

199



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**LA TECNICA DEL KRIGING EN LA INTERPOLACION DE  
VARIABLES GEOFISICAS.**

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**INGENIERO GEOFISICO**

**P r e s e n t a n :**

**LUIS RAMOS MARTINEZ**

**ADOLFO VAZQUEZ CONTRERAS**



México, D. F.

1981



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA

FACULTAD DE INGENIERIA  
EXAMENES PROFESIONALES  
60-1-176

A los Pasantes señores ADOLFO VAZQUEZ CONTRERAS y  
LUIS RAMOS MARTINEZ  
P r e s e n t e s .

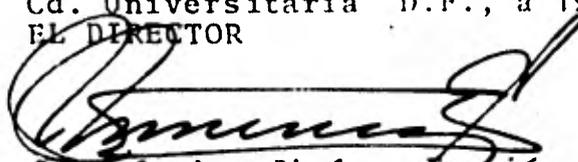
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a ustedes a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Prof. Dr. Juan M. Berlanga Gutiérrez, para que lo desarrollen como tesis en su Examen Profesional de INGENIERO GEOFISICO.

"LA TECNICA DEL KRIGING EN LA INTERPOLACION DE VARIABLES GEOFISICAS".

- I. Introducción
- II. Conceptos básicos de la teoría de las variables regionalizadas
- III. El kriging universal
- IV. El método de las covarianzas generalizadas
- V. Otros métodos de interpolación
- VI. Aplicaciones
- VII. Conclusiones

Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesionales, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria D.F., a 19 de noviembre de 1980  
EL DIRECTOR



Ing. Javier Jiménez Esprú

JJE' MRV' mdb.

## CONTENIDO

Capítulo	Página
I.- Introducción	1
II.- Conceptos básicos de la Geoestadística	3
Definición de variable regionalizada	3
Inferencia estadística	5
Hipótesis de estacionariedad	5
Semivariograma	6
Propiedades del semivariograma	7
Modelos de semivariograma	11
III.- Kriging universal	12
Interpretación física del drift	13
Derivación de las ecuaciones del kriging universal	14
Estimación óptima del drift	20
Semivariograma de los residuales estimados	21
Semivariograma experimental de los residuales estimados	22
Identificación del semivariograma fundamental	22
IV.- Método de covarianzas generalizadas	28
Incrementos generalizados	29

Función covarianza generalizada	32
Funciones aleatorias intrínsecas	33
Hipótesis intrínseca generalizada	34
Modelos de covarianza generalizada	35
Estimación puntual	38
Identificación automática de la función covarianza generalizada en dos dimensiones	41
V.- Kriging y otros métodos de interpolación	45
Panorama general de la configuración	45
Interpolación de campos potenciales	46
Interpolación de variables sísmicas	54
VI.- Aplicaciones	61
Configuración de una malla de datos aeromagnéticos	61
Configuración de tiempos de reflexión y velocidades sísmicas	80
VII.- Conclusiones	107
Agradecimientos	110
Bibliografía	111
Apéndice I: Desarrollo del sistema de ecuaciones lineales de regresión de la covarianza generalizada	116

**Apéndice II: Fórmula de tiempo vertical de reflexión para un  
contacto tridimensional**

**120**

## RESUMEN

En este trabajo se presentan las bases teóricas fundamentales del kriging en sus tres variantes: kriging normal, kriging universal y el método de covarianzas generalizadas. Se hace notar la versatilidad del kriging para llevar a cabo no únicamente la estimación puntual sino también la estimación de derivadas y valores promedios sobre volúmenes. Por ser el método de covarianzas generalizadas la teoría más recientemente desarrollada y por representar ésta el enfoque más general al problema de la estimación, se desarrolla íntegramente el algoritmo necesario para su aplicación. Igualmente se analizan algunas técnicas de interpolación comúnmente empleadas en problemas geológicos y geofísicos, discutiendo se sus ventajas y desventajas con respecto al kriging.

Se presentan dos ejemplos. El primero considera datos aeromagnéticos interpolados utilizando tres técnicas distintas: el kriging normal, el kriging universal y el método de relajación. En el segundo ejemplo, se describe el proceso para la obtención de un mapa de cimas a partir de datos de tiempos de reflexión. Dos programas de cómputo son elaborados con tales propósitos: el mejor modelo de covarianza generalizada correspondiente a determinado conjunto de datos es definido en el primer programa cuyos resultados son manejados, con propósitos de interpolación, por un segundo programa de cómputo.

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

En el campo de las Ciencias de la Tierra el mapeo de estructuras geológicas subsuperficiales así como el de variables geofísicas (velocidades sísmicas, tiempos de reflexión, gravedad, etc.) es de primordial importancia para la interpretación, ya que constituye la base de futuros desarrollos en la exploración y explotación de recursos naturales.

Puesto que la cantidad de información disponible es limitada, ya sea por su costo o por ser ésta técnicamente inaccesible, la aplicación de métodos de interpolación resulta necesaria en la obtención de información adicional.

Existen muchos métodos de interpolación, algunos diseñados especialmente para resolver problemas específicos (generalmente con enfoques determinísticos), pero ninguno de ellos aplicable en todas circunstancias. La aparición de la geoestadística como una metodología de estimación que no se limitó a agregar, a lo Geología, técnicas estadísticas convencionales, sino que, ante la necesidad de resolver ciertos problemas geológico-mineros, enriqueció el significado de términos ya conocidos y creó otros nuevos, lo cual permitió analizar objetivamente las ventajas y desventajas de los demás métodos de estimación. Así, se llegó a la conclusión de que unos métodos de interpolación tienden a considerar a la variable a estimar como una variable totalmente aleatoria, sin considerar las posibles relaciones existentes entre los distintos valores que la variable puede tomar en diferentes puntos.

Otros métodos no pueden proporcionar una medida del error que puede esperarse al efectuar la estimación. El método kriging es el único que toma en cuenta las relaciones estadístico-espaciales de la variable y proporciona además, una medida del error en la estimación.

En sus inicios(1960), la técnica del kriging fué empleada exclusivamente como -  
herramienta en la evaluación de yacimientos minerales; actualmente la teoría en que --  
esta basada(la teoría de las variables regionalizadas) la hacen un método general de esti-  
mación que puede aplicarse a cualesquiera fenómenos distribuidos espacialmente.

## CAPITULO II

### CONCEPTOS BASICOS DE LA GEOESTADISTICA

#### II. 1) Definición de variable regionalizada

Una variable regionalizada es una variable aleatoria distribuida espacialmente.

Matemáticamente, una variable regionalizada  $Z(\bar{x})$  es una función definida en un espacio  $n$ -dimensional cuya representación no es simple y que presenta características tales como:

a) Localización y soporte geométrico (puntual, superficial o volumétrico).

b) Continuidad, la cuál puede clasificarse en tres tipos principales (figura 1):

- Altamente continua, tal como el espesor de una formación geológica, el campo magnético terrestre y los tiempos de reflexión de un contacto litológico en una área de tectónica suave.

- Continuas, donde las variables aleatorias presentan un aspecto aleatorio local, pero que en conjunto muestran zonas donde los valores tienden a ser regulares. Como ejemplos de variables aleatorias continuas pueden citarse la porosidad, la saturación de agua, la permeabilidad, etc.

- Discontinuas, donde las variables muestran una marcada aleatoriedad, tal es el caso de las velocidades sísmicas calculadas a lo largo de un perfil mediante el análisis de velocidades.

c) Anisotropía, donde las variables aleatorias regionalizadas presentan direcciones preferenciales de variabilidad.

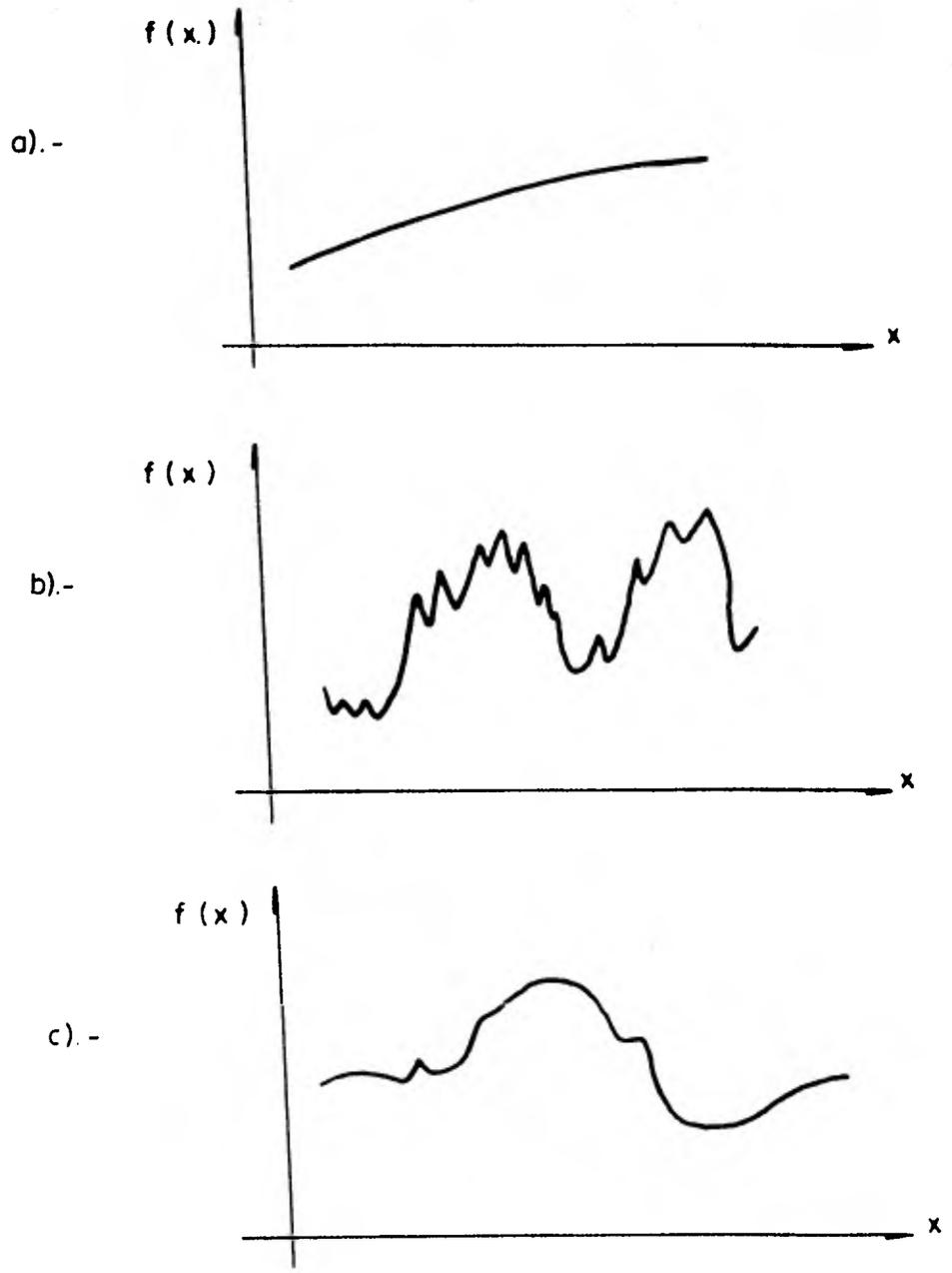


FIG. 1

**CONTINUIDAD DE LA VARIABLE**

- a).- Variable muy continua
- b).- Variable discontinua
- c).- Variable continua en promedio

## II. 2) Inferencia estadística

La idea básica de la teoría de las variables regionalizadas es considerar a la función  $z(x)$  como una realización de una función aleatoria  $Z(\bar{x})$ , esto es, considerar al único valor numérico  $z(\bar{x}_0)$ , en el punto  $\bar{x}_0$ , como la realización de un proceso aleatorio.

De esta forma para hacer posible la estimación del valor de una variable en un punto desconocido, es necesario encontrar las características de la función aleatoria  $Z(\bar{x})$  a partir de una realización de dicha función. Esto puede lograrse si introducimos hipótesis acerca de la estacionariedad de la función aleatoria.

### III. 3) Hipótesis de estacionariedad

#### III. 3. 1) Hipótesis de estacionariedad-débil

Esta hipótesis rara vez se adopta en fenómenos naturales y esta dada por dos condiciones:

- El valor esperado de la variable regionalizado es el mismo sobre todo el campo de interés  $R$ .

$$E [ Z(\bar{x}) ] = m, \quad \forall \bar{x} \in R \quad (2.1)$$

- La covarianza entre dos variables aleatorias separadas por un vector  $\bar{h}$  depende exclusivamente de  $h$ .

$$E [ (Z(\bar{x} + \bar{h}) - m)(Z(\bar{x}) - m) ] = C(\bar{h}) \quad (2.2)$$

La varianza de la función aleatoria  $Z(\bar{x})$  se obtiene al hacer  $\bar{h} = \bar{0}$  en la ecuación anterior, es decir:

$$\text{var} [ Z(\bar{x}) ] = E [ Z(\bar{x}) - m ]^2 = C(\bar{0})$$

El proceso aleatorio tendrá una covarianza finita si la varianza de la variable -- aleatoria es finita,  $\text{var} [Z(\bar{x})] < \infty$ . Esto implicará que la función aleatoria  $Z(\bar{x})$  sea homogénea. Ejemplos de tales funciones se encuentran comúnmente en el análisis de series de tiempo (la variación secular del campo magnético o los movimientos de marea).

### II. 3. 2) Hipótesis intrínseca

Puesto que en muchos casos la condición de varianza finita no se cumple, resulta necesario introducir un nuevo tipo de hipótesis que considere a los incrementos, más que a la variable misma. La hipótesis intrínseca establece que:

$$E [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] = 0, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

$$\text{var} [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] = 2\gamma(\bar{h}) \quad (2.4)$$

donde a la función  $\gamma(\bar{h})$  se le nombra semivariograma.

Considerando la ecuación (2.3) en la expansión de la ecuación (2.4) se puede -- obtener la expresión siguiente:

$$\text{var} [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] = E [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})]^2 \quad (2.5)$$

### II. 4) Semivariograma

Todas las características esenciales de la variable regionalizada tales como, continuidad, anisotropía y zona de influencia, se encuentran representadas en la función -- semivariograma.

La función semivariograma esta definida según las ecuaciones (2.4) y (2.5) como:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})]^2 \quad (2.6)$$

#### II. 4. 1) Estimación del semivariograma

Cuando la variable regionalizada bajo estudio satisface la hipótesis intrínseca, el semivariograma  $\gamma(\bar{h})$  puede ser estimado únicamente en base a las diferencias cuadráticas de dos variables aleatorias regionalizadas espaciadas una de la otra por un vector  $\bar{h}$ .

Si las muestras están separadas regularmente a lo largo de un perfil, el semivariograma puede estimarse para valores de  $\bar{h}$  múltiplos de la unidad de separación por medio del estimador:

$$\gamma^*(\bar{h}) = \frac{1}{2 N(\bar{h})} \sum_{i=1}^{N(\bar{h})} [Z(\bar{x}_i + \bar{h}) - Z(\bar{x}_i)]^2 \quad (2.7)$$

siendo  $Z(\bar{x}_i)$  y  $Z(\bar{x}_i + \bar{h})$  los datos y  $N(\bar{h})$  el número de pares de datos separados por un vector  $\bar{h}$ .

En el caso de datos irregularmente espaciados en el plano, la estimación del semivariograma se hace más difícil, ya que es necesario agrupar los datos por clases de distancias y ángulo de tal manera que las diferencias medias cuadráticas puedan calcularse.

#### II. 5) Propiedades del semivariograma

Entre las propiedades más importantes del semivariograma caben mencionar:

$$\gamma(\bar{0}) = 0$$

$$\gamma(\bar{h}) = \gamma(-\bar{h}) \geq 0$$

##### II. 5. 1) Zona de influencia

Es la región donde las variables aleatorias son estadísticamente dependientes. Esta región se define por la distancia  $L$  llamada rango (figura 2) a partir de la cual el semivariograma tiende a estabilizarse alrededor de un valor límite, denominado meseta.

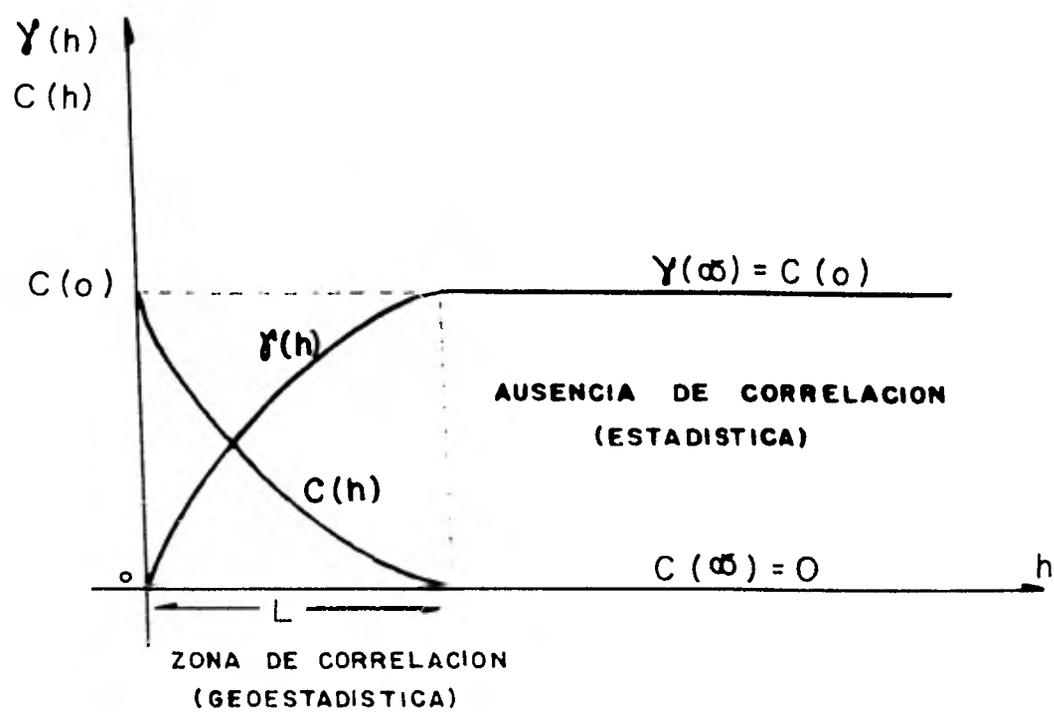


FIG. 2

GRAFICA DE LA FUNCION SEMIVARIOGRAMA Y COVARIANZA.

Este valor límite es igual a la varianza de los datos,

$$\gamma(\infty) = \text{var} [Z(\bar{x})] = C(\bar{0})$$

A los semivariogramas caracterizados por el valor de su meseta y de su rango, se les conoce como modelos de transición y corresponden a funciones aleatorias estacionarias de segundo orden (y por ende intrínsecas).

### 11. 5. 2) Comportamiento en el origen

Del comportamiento del semivariograma cerca del origen se pueden diferenciar -- cuatro formas principales (figura 3):

1) Parabólica:  $\gamma(\bar{h}) \approx A|\bar{h}|^2$  cuando  $\bar{h} \rightarrow 0$ . El semivariograma es dos veces diferenciable y caracteriza a una variable extremadamente regular.

2) Lineal:  $\gamma(\bar{h}) \approx A|\bar{h}|$  cuando  $\bar{h} \rightarrow 0$ . En este caso  $\gamma(\bar{h})$  corresponde a una variable menos regular que el anterior (es continuo, pero no diferenciable en el origen).

3) Discontinuidad en el origen,

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \gamma(\bar{h}) = C_0, \quad C_0 > 0$$

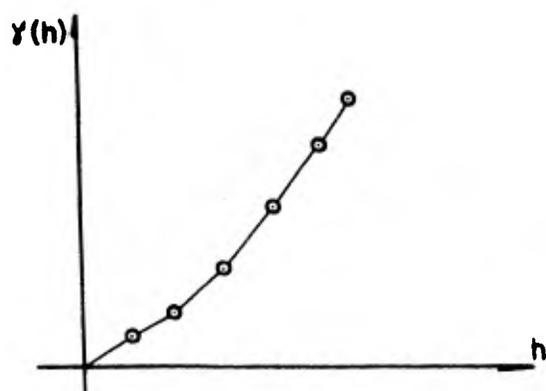
La discontinuidad en el origen puede observarse en el semivariograma de una variable aleatoria muy irregular. Puntos muy cercanos muestran marcada diferencia entre sí, produciendo una varianza  $C_0$ , denominada "efecto pepita". Este efecto refleja la existencia de estructuras a una escala mucho más pequeña que la del espaciamiento de los datos. Errores en la medición también pueden dar origen a este efecto.

4) Semivariograma plano, representa a una variable completamente aleatoria:

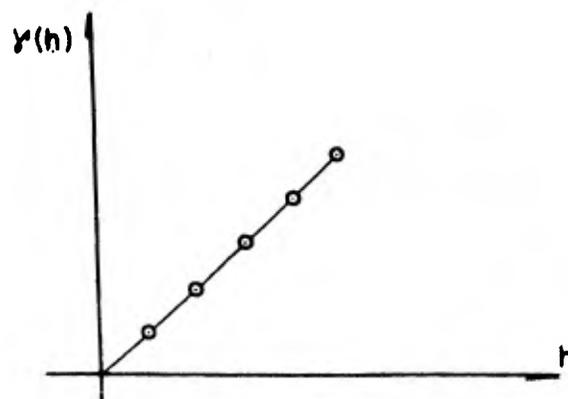
$$\gamma(\bar{0}) = 0$$

$$\gamma(\bar{h}) = C_0, \quad \forall \bar{h} > \epsilon$$

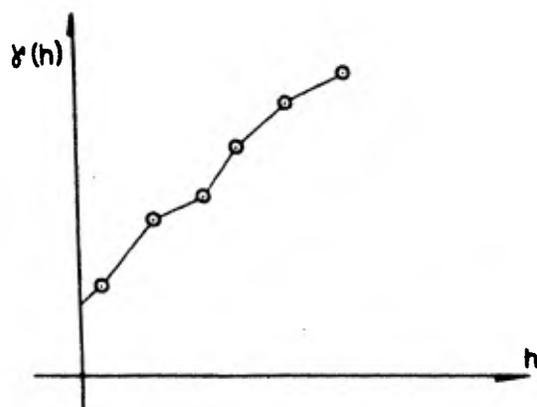
donde  $\epsilon$  es una distancia muy pequeña en comparación con las distancias de las observaciones experimentales.



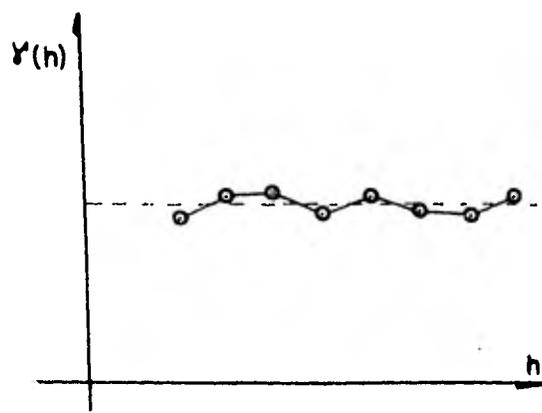
a)



b)



c)



d)

FIG. 3

**COMPORTAMIENTO DEL SEMIVARIOGRAMA  
CERCA DEL ORIGEN**

- a).- Tipo parabolico
- b).- Tipo lineal
- c).- Discontinuidad en el origen
- d).- Aleatorio

### II. 5. 3) Anisotropía

La anisotropía se detecta por un comportamiento muy particular del semivariograma a lo largo de diferentes direcciones(figura 4).

### II. 6) Modelos de semivariogramas

Con propósitos de estimación, los semivariogramas experimentales  $\gamma^*(h)$  se ajustan a cierto tipo de funciones analíticas. La condición que deben cumplir dichas funciones para ser semivariogramas es que éstas sean funciones positivamente definidas. Los modelos más comunes son los del tipo esférico, exponencial y lineal. Una clara exposición de las características de estos modelos ha sido dada por David(1976).

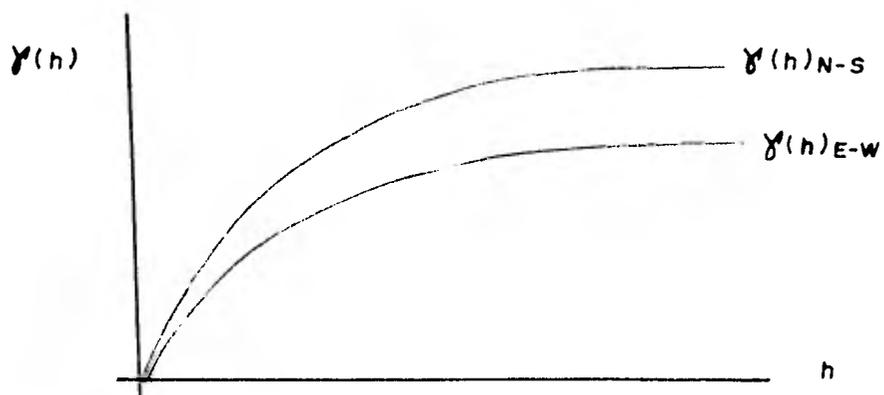


FIG. 4

### ANISOTROPIA

Semivariograma calculado en dirección N - S  
en contraste con otro calculado en dirección E - W

CAPÍTULO III  
KRIGING UNIVERSAL

En el capítulo anterior se asumieron condiciones de estacionariedad en la función aleatoria  $Z(x)$ , ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3, 2.4. Sin embargo surge un problema cuando tratamos con funciones aleatorias no estacionarias, esto es, cuando el valor esperado de la variable regionalizada no es constante, sino que éste depende de la posición de la variable  $Z(\bar{x})$ :

$$E [Z(\bar{x})] = m(\bar{x})$$

El kriging universal resuelve este problema, ya que considera tipos de hipótesis -- menos estrictas que las anteriores. El kriging universal asume que el segundo momento de la función aleatoria tiene propiedades de estacionariedad dentro de una vecindad de tamaño restringido y su valor esperado no es estacionario sino que varía de una manera regular. Si  $\bar{x}$  y  $\bar{x} + \bar{h}$  son dos localizaciones dentro de una misma vecindad restringida, la hipótesis del kriging universal establece lo siguiente:

a) Para la variable  $Z(\bar{x})$

$$E [Z(\bar{x})] = m(\bar{x}) \tag{3.1}$$

$$\text{cov} [Z(\bar{x}), Z(\bar{x} + \bar{h})] = C(\bar{h}) \tag{3.2}$$

b) Para los incrementos de la variable  $Z(\bar{x})$

$$E [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] = m(\bar{x} + \bar{h}) - m(\bar{x}) \tag{3.3}$$

$$\text{var} [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] = 2\gamma(\bar{h}) \tag{3.4}$$

A la función  $m(x)$  se le denomina en geoestadística "drift".

La razón por la cual el kriging considera únicamente los momentos de primero y segundo orden en la variable regionalizada, se debe a que es un método que proporciona un estimador lineal insesgado. Dicho de otra manera, la evaluación del valor desconocido de una variable regionalizada  $Z(\bar{x})$  en un cierto punto  $\bar{x}$  a través de estimadores lineales, depende de los momentos de primero y segundo orden.

Por otro lado, los estimadores "no-lineales" requieren para su utilización de la distribución conjunta de la función aleatoria  $Z(\bar{x})$ , la cuál es imposible de derivar a partir de la información disponible (al menos en problemas de Ciencias de la Tierra).

La aparente desventaja de los estimadores lineales al no incluir la función de distribución conjunta, es compensada en cierta manera por su menor grado de dificultad en su aplicación. Tal desventaja no existiría en el caso de una función aleatoria  $Z(\bar{x})$  distribuida normalmente pues en ese caso el mejor estimador (esperanza condicional) tendría la forma de un estimador lineal (Papoulis, 1965).

### III. 1) Interpretación física del drift

Físicamente el drift representa la tendencia de la función aleatoria a lo largo de ciertas direcciones. El drift representa apariencias sistemáticas más que detalles esporádicos. El concepto de anomalía regional en gravimetría, corresponde al de drift.

Si la función  $m(\bar{x})$  es irregular y aparentemente caótica, esta debe ser considerada como la realización de una nueva función aleatoria.

Al igual que el semivariograma, el drift está estrechamente relacionado a la escala de trabajo. En geofísica por ejemplo, la anomalía magnética debida a un depósito de material ferromagnético en una escala de cientos de metros representaría claramente el drift. Sin embargo, esta misma anomalía (de interés en prospección minera) se conside

ra como una función aleatoria en un estudio cuyos propósitos fueran detectar trampas estructurales de hidrocarburos, donde la escala de trabajo sería de decenas de kilómetros.

El concepto de drift proporciona un medio para dividir a la variable regionalizada en dos componentes: el drift  $m(\bar{x})$  y el residual  $Y(\bar{x})$ . El residual es la diferencia de la variable regionalizada y el drift,

$$Y(\bar{x}) = Z(\bar{x}) - m(\bar{x})$$

La interpretación de los términos  $m(\bar{x})$  y  $Y(\bar{x})$  es diferente a la dada por el análisis de superficies de tendencias (Watson, 1969). El kriging universal pone especial interés en el residual, el cuál se asume que no es totalmente aleatorio, sino que posee estructura propia. Esto significa que para dos localizaciones  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ , los residuales  $Y(\bar{x}_1)$  y  $Y(\bar{x}_2)$  mantienen una relación que puede ser descrita como una función aleatoria de la distancia.

### III. 2) Derivación de las ecuaciones del kriging universal

Cuando la hipótesis del kriging universal es aplicada, el drift de la función aleatoria queda representada por la expresión:

$$m(\bar{x}) = \sum_{k=0}^n a_k f^k(\bar{x}) \quad (3.5)$$

en una cierta vecindad  $R$ .

El problema general a resolver es: dada una serie de datos  $Z_i$  con soporte  $v_i$ , estimar el valor  $Z_0$  en el punto  $x_0$  empleando el estimador lineal  $Z_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z_i$ . Ciertos pesos  $\lambda_i$  serán calculados de tal manera que  $Z_0^*$  sea el mejor estimador lineal insesgado, es decir, con error cuadrático mínimo. La cantidad  $Z_0$  a ser estimada puede ser:

1) El valor de  $Z(\bar{x})$  en el punto  $\bar{x} = \bar{x}_0$

$$Z_0 = Z(\bar{x}_0)$$

2) La derivada a lo largo de cierta dirección,

$$Z_0 = \frac{\partial}{\partial u} | Z(\bar{x}) |_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

3) El valor promedio de  $Z$  sobre un volumen centrado en  $\bar{x}_0$

$$Z_0 = \frac{1}{V(\bar{x}_0)} \int_{V(\bar{x}_0)} Z(\bar{x}) dx$$

Considérese entonces el estimador

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z_i$$

El objetivo es determinar los pesos  $\lambda_i$  tales que  $Z_0^*$ :

a) Sea insesgado

$$E [Z_0^* - Z_0] = 0$$

b) Tenga varianza de estimación mínima

$$\text{var} [Z_0^* - Z_0] \text{ mínima}$$

De la primera condición

$$E [Z_0^* - Z_0] = E [Z_0^*] - E [Z_0]$$

$$E [Z_0^*] = \sum_{i=1}^k \lambda_i E [Z_{v_i}] = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{1}{v_i} \int_{v_i} E [Z(\bar{x})] dx \quad (3.6)$$

$$E [Z_0] = \frac{1}{V(\bar{x}_0)} \int_{V(\bar{x}_0)} E [Z(\bar{x})] dx \quad (3.7)$$

Puesto que nuestro objetivo es la estimación puntual, de ec. (3.7) se obtiene:

$$E [Z_0] = E [Z(\bar{x}_0)] = m(\bar{x}_0)$$

Por otro lado si las muestras están definidas en un punto, de ec. (3.6)

$$E [Z_0^*] = \sum_{i=1}^K \lambda_i E [Z_i] = \sum_{i=1}^K \lambda_i m(\bar{x}_i)$$

y por consiguiente,

$$E [Z_0^* - Z_0] = \sum_{i=1}^K \lambda_i m(\bar{x}_i) - m(\bar{x}_0) = 0$$

donde  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_0$  son los vectores de localización.

Considerando la ec. (3.5):

$$\begin{aligned} E [Z_0^* - Z_0] &= \sum_{i=1}^K \lambda_i \sum_{l=0}^n a_l f^l(x_i) - \sum_{l=0}^n a_l f^l(x_0) \\ &= \sum_{l=0}^n a_l \left[ \sum_{i=1}^K \lambda_i f^l(x_i) - f^l(x_0) \right] \end{aligned}$$

se obtiene,

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i f^l(x_i) = f^l(x_0), \quad l = 0, 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Este sistema de ecuaciones representa la condición de insesgamiento del estimador  $Z_0^*$ .

Si  $l$  fuese igual a 0 y  $f(x_i)$  fuese igual a la constante  $a_0$  se tendría como -- condición de insesgamiento lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i a_0 = a_0 \quad \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1$$

Como puede observarse en el sistema de ecs. (3.8) los coeficientes del drift -- no intervienen.

Haciendo intervenir la primera condición en el desarrollo de la segunda:

$$\text{var} [Z_0^* - Z_0] = E [Z_0^* - Z_0]^2 = E \left[ \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_i \lambda_j (Z(\bar{x}_i) - Z_0)(Z(\bar{x}_j) - Z_0) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j E [Z(\bar{x}_i)Z(\bar{x}_j) - Z(\bar{x}_i)Z_0 - Z_0Z(\bar{x}_j) + Z_0^2] \\
\text{var } [Z_0^* - Z_0] &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{1}{2} E [Z(\bar{x}_i) - Z_0]^2 + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{1}{2} E [Z(\bar{x}_j) - Z_0]^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \frac{1}{2} E [Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_j)]^2 \\
\text{var } [Z_0^* - Z_0] &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma'(\bar{x}_i - \bar{x}_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \gamma'(\bar{x}_j - \bar{x}_0) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma'(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \\
\text{var } [Z_0^* - Z_0] &= 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma'(\bar{x}_i - \bar{x}_0) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma'(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Obtener la varianza mínima, es un problema que puede ser resuelto por el método de multiplicadores de Lagrange. Tomando en cuenta las restricciones dadas por la condición de insesgamiento (3.8), la función auxiliar es :

$$\Psi = \text{var } [Z_0^* - Z_0] - 2 \sum_{l=0}^n u_l \left( \sum \lambda_i f^l(\bar{x}_i) - f^l(\bar{x}_0) \right)$$

$u_l$  son los multiplicadores de Lagrange.

Calculando las  $k$  derivadas parciales de  $\Psi$  con respecto a los  $\lambda_i$  e igualandolas a cero, resulta en forma general :

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \gamma'(\bar{x}_j - \bar{x}_i) + \sum_{l=0}^n u_l f^l(\bar{x}_i) = \gamma'(\bar{x}_i - \bar{x}_0) \quad (3.10)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, k$$

Así el sistema de kriging universal esta constituido por las condiciones (3.8) y (3.10) :

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \gamma (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \sum_{l=0}^n u_l f^l(\bar{x}_i) = \gamma (\bar{x}_i - \bar{x}_0) \quad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f^l(\bar{x}_i) = f^l(\bar{x}_0) \quad l = 0, \dots, n \quad (3.11)$$

y su varianza de estimación es,

$$\text{var} [Z_0^* - Z_0]_{\text{mín}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma (\bar{x}_i - \bar{x}_0) + \sum_{l=0}^n u_l f^l(\bar{x}_0) \quad (3.12)$$

De la condición (3.8) se puede demostrar que el kriging es un método de interpolación exacto. Esto no se demostrará, ya que es más interesante señalar las modificaciones que sufrirá el sistema de kriging universal para que la estimación de la derivada, caso 2 (y el valor promedio, caso 3) sea posible.

Si analizamos las expresiones (3.6) y (3.7) para este nuevo caso (cálculo de la derivada) resulta:

$$E [Z_0^*] = \sum_{i=1}^k \lambda_i E [Z_{v_i}] = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{1}{v_i} \int_{v_i} E [Z(\bar{x})] dx$$

Si los datos son los valores de  $Z_i$  definidos en un soporte puntual,

$$E [Z_0^*] = \sum_{i=1}^k \lambda_i E [Z_i] = \sum_{i=1}^k \lambda_i m(\bar{x}_i)$$

Por otro lado,

$$E [Z_0] = E \left[ \frac{\partial}{\partial u} (Z(\bar{x}))_{\bar{x}=\bar{x}_0} \right]$$

$$E [Z_0] = \frac{\partial}{\partial u} E [Z(\bar{x})]_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \frac{\partial}{\partial u} [m(\bar{x}_0)]$$

De lo anterior, la condición de insesgamiento se establece de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f^l(\bar{x}_i) = \frac{\partial}{\partial u} [f^l(\bar{x}_0)] \quad l = 0, 1, \dots, n$$

y el sistema de kriging universal para la estimación de la derivada es:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(\bar{x}_i - \bar{x}_i) + \sum_{\lambda=0}^n u_{\lambda} f^{\lambda}(\bar{x}_i) = \gamma(\bar{x}_i - \bar{x}_0) \quad i=1, 2, \dots, k \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f^{\lambda}(\bar{x}_0) = \frac{\partial}{\partial u} [f^{\lambda}(\bar{x}_0)] \quad \lambda = 0, 1, \dots, n$$

Nótese que sólo la condición de insesgamiento (3.8) se modifica. De manera similar se puede obtener el sistema de kriging universal para la estimación del valor promedio sobre un volumen.

En sí, la solución del sistema de kriging universal no es difícil. El problema estriba en la adecuada elección de las funciones que están involucradas en dicho sistema (semivariograma fundamental, drift, etc.) las cuales son proporcionadas por la información disponible.

El cálculo del semivariograma fundamental  $\gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \gamma(\bar{x}, \bar{h})$  no es posible efectuarse por medio del estimador dado en la ecuación (2.7), ya que cuando se dispone únicamente de una realización de la función aleatoria no estacionaria  $Z(x)$ , las estimaciones obtenidas son solo valores distorsionados del semivariograma fundamental. Esto es:

$$\gamma_b^*(\bar{h}) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(\bar{x}_i + \bar{h}) - Z(\bar{x})]^2$$

es un estimador de:

$$\gamma_b(\bar{h}) = \frac{1}{2} E [Z(\bar{x}_i + \bar{h}) - Z(\bar{x})]^2$$

Ahora, si el valor esperado de  $Z(x)$  no es constante se tiene que

$$E [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})]^2 = \text{var} [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] + [E(Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x}))]^2$$

$$Y_b(\bar{h}) = Y(\bar{h}) + \frac{1}{2} [m(\bar{x} + \bar{h}) - m(\bar{x})]^2$$

Debido a ésto, el cálculo del semivariograma fundamental se tiene que hacer en base a los residuales  $Y(x)$ . Para la obtención de éstos es necesaria una estimación del drift.

### III. 3) Estimación óptima del drift.

La condición de regularidad impuesta "a priori" a la función  $m(\bar{x})$ , significa -- que una estimación local de  $m(\bar{x})$  es siempre posible en alguna extensión.

Dada una vecindad  $\bar{r}$  en  $\bar{x}_0$ , el drift en cualquier punto  $\bar{x}$ , tal que  $|\bar{x} - \bar{x}_0| \leq \bar{r}$ , puede ser definida como:

$$m(\bar{x}) = \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}) \quad (3.6)$$

donde las  $a_l$ 's son constantes desconocidas y las  $f^l(\bar{x})$  son funciones básicas -- dadas (en la práctica, estas funciones son potencias enteras de  $x$  ó funciones senoidales). Los coeficientes  $a_l$ 's pueden ser definidos por estimadores lineales:

$$A_l = \sum_{j=1}^k \lambda_l^j Z(x_j)$$

para  $|\bar{x}_j - \bar{x}_0| \leq |r|$  e  $i = 0, 1, \dots, n$

y  $m(\bar{x})$  estimada por:

$$M(\bar{x}) = \sum_{l=0}^n A_l f^l(\bar{x}) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^n \lambda_l^j Z(\bar{x}_j) f^l(\bar{x})$$

Siguiendo un proceso similar al de la sección anterior (para que el estimador  $A_l$  sea óptimo e insesgado), el sistema de ecuaciones resultante para la estimación de cada coeficiente  $a_l$  es:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{\alpha}^{jj} \gamma(\bar{x}_{\alpha}, \bar{x}_{jj}) = - \sum_{s=1}^n u_s^{\alpha} f^s(\bar{x}_{\alpha}) - u_{0\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{\alpha}^{jj} f^s(\bar{x}_{\alpha}) = \delta(s, \alpha) \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{\alpha}^{jj} = 0 \quad s, \alpha = 0, 1, 2, \dots, n$$

donde  $\delta(s, \alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq s \\ 1, & \alpha = s \end{cases}$

### III. 4) Semivariograma de los residuales estimados

Debido a que no conocemos el drift, sino solo una estimación de éste, es decir -  $M(x)$ , los verdaderos residuales no pueden ser conocidos. Los residuales obtenidos utilizando  $M(x)$ , son los residuales estimados y guardan un considerable sesgo con los verdaderos residuales.

La relación entre el semivariograma fundamental(o de los residuales) y el de los residuales estimados  $\gamma_e(\bar{h})$  es la siguiente(Matheron, 1969):

Sea  $\gamma_e(\bar{h})$  el semivariograma de los residuales estimados en  $t$  localizaciones a intervalos regulares  $a$ . Entonces si  $h$  es  $p$  veces la distancia  $a$  entre muestras consecutivas y  $\gamma(\bar{h})$  el semivariograma fundamental de los residuales, entonces:

$$\gamma_e(\bar{h}) = \gamma(\bar{h}) - \frac{1}{2(k-p)} \sum_{j=1}^{k-p} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n u_s^i [ [f^i(\bar{x}_j + p\bar{a}) - f^i(\bar{x}_j)] * [f^s(\bar{x}_j + p\bar{a}) - f^s(\bar{x}_j)] ] \quad (3.15)$$

para  $k+1 \leq t$  y  $p=0, 1, 2, \dots, k-1$

como  $u_s^i$  está positivamente definida(Matheron, 1970), la existencia de un -- sesgo es obvia.

Esto implica que el semivariograma de los residuales estimados es menor que el semivariograma fundamental. De la figura 5 podemos observar que conforme aumenta la distancia, el sesgo entre los dos semivariogramas se hace más notorio. Esto no es más que el reflejo de la estructura de la ecuación (3.15), a partir de una cierta distancia  $h$ , el último término de la derecha se hace más significativo.

Cabe señalar que una de las características de los semivariogramas de residuales estimados es que todos tienen una forma parabólica y aunque esto es difícil de probar, la ecuación (3.15) representa una parábola cuyas raíces son  $\bar{h} = 0$  y  $\bar{h} = (t - 1)a$ .

### III. 5) Semivariograma experimental de los residuales estimados

Sean  $R(\bar{x}_1), R(\bar{x}_2), \dots, R(\bar{x}_t)$  residuales estimados tomados a intervalos regulares en una vecindad donde la expresión analítica para el drift no cambia. Entonces si los residuales satisfacen la hipótesis intrínseca, es decir, si los residuales tienen un semivariograma común, el siguiente es un estimador insesgado para  $\gamma_e(\bar{h})$ ,

$$\gamma_e^*(\bar{h}) = \frac{1}{2(k-p)} \sum_{j=1}^{k-p} [R(\bar{x}_j + p\bar{a}) - R(\bar{x}_j)]^2 \quad (3.16)$$

para  $k+1 \leq t$  y  $p = 0, 1, \dots, k-1$

es decir:  $E[\gamma_e^*(\bar{h})] = \gamma_e(\bar{h})$

### III. 6) Identificación del semivariograma fundamental

Existen dos métodos para la identificación del semivariograma fundamental, ambos debidos a Matheron(1969, 1970) los cuales han sido denominados por Sabourin(1976) método indirecto y método directo, respectivamente.

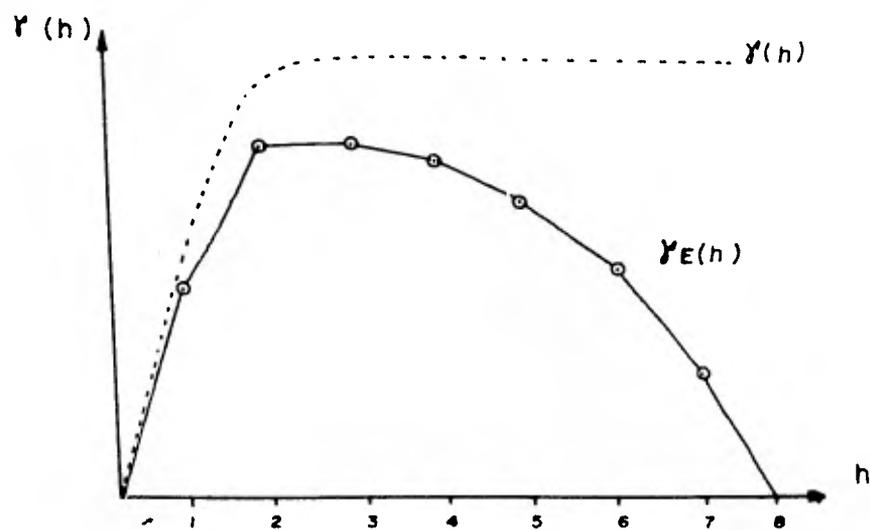


FIG. 5

Sesgo existente entre el semivariograma de los residuales estimados y el semivariograma fundamental.

### III. 6. 1) Método indirecto

Consiste básicamente en los siguientes pasos:

- 1) Se selecciona una vecindad
- 2) Se elige un tipo de drift dentro de esta vecindad
- 3) Se calculan los coeficientes  $a_i$  del drift estimados mediante  $A_i$  en el sistema de ecuaciones (3.14). Como se señaló anteriormente esta estimación del drift es óptima, sin embargo, basta con un simple estimador insesgado (mínimos cuadrados) para este propósito (David, 1976; Matneron, 1969). Aún así, el sesgo entre el semivariograma de los residuales estimados y el semivariograma fundamental se mantendrá.
- 4) Se calculan los residuales estimados  $R(\bar{x})$ 

$$R(\bar{x}) = Z(\bar{x}) - M(\bar{x})$$
- 5) Obtención del semivariograma experimental de los residuales (ec. 3.16)  $\gamma_e^*(\bar{h})$ .
- 6) Se calcula el semivariograma teórico de los residuales estimados  $\gamma_e(\bar{h})$  con ecuación (3.15).
- 7) Se comparan ambos semivariogramas,  $\gamma_e(\bar{h})$  y  $\gamma_e^*(\bar{h})$ .
- 8) Si se logra un ajuste razonable (no hay pruebas todavía para la bondad del ajuste) las funciones empleadas (drift y semivariograma fundamental), así como la vecindad, se consideran como correctas.
- 9) Si no existe un ajuste razonable, se hace necesario definir otras funciones o un nuevo tamaño de vecindad, o ambos. Con esto, el proceso de ajuste empieza nuevamente (ver figura 6).

Como puede observarse, este proceso no es más que un método de ensayo y error, donde no existe un criterio bien definido por medio del cual se determinen cuáles parámetros son los mejores.

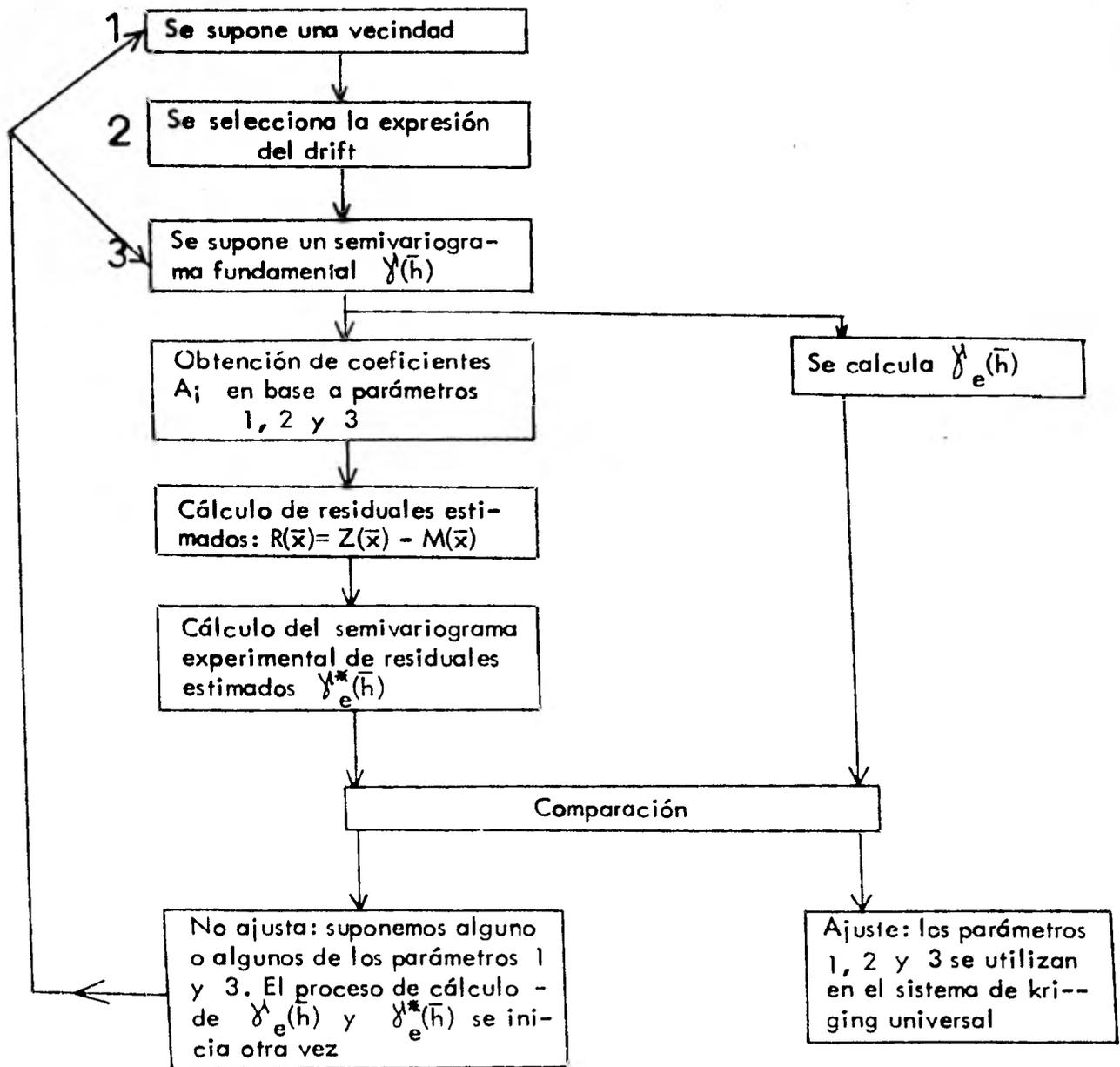


FIGURA 6

Identificación del semivariograma fundamental

### III. 6. 2) Método directo

Este método proporciona "casi" automáticamente el semivariograma fundamental

$\gamma(h)$  e involucra básicamente el procedimiento del séptimo paso del método indirecto.

La determinación del semivariograma fundamental se hace en base a un factor.

La expresión del semivariograma fundamental es:

$$\begin{aligned} 2 \gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}) &= \text{var} [Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h})] = E [Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h})]^2 \\ &\quad - E^2 [Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h})] \\ &= E [Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h})]^2 - [m(\bar{x}) - m(\bar{x} + \bar{h})]^2 \end{aligned}$$

Tomando  $M(\bar{x})$  como una estimación de  $m(\bar{x})$ , se puede decir (Sabourin, 1975) que:

$$2 \gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}) = E [Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h})]^2 - E^2 [M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h})] \pm E [M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h})]^2$$

$$2 \gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}) = E [(Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h}))^2 - (M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h}))^2] + \text{var} [M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h})]$$

$$2 \gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}) = \text{CT}(\bar{h}) + \text{var} [M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h})]$$

De esta expresión el primer término de la derecha se puede calcular, es decir:

$E [Z(\bar{x}) - Z(\bar{x} + \bar{h})]$  puede ser aproximado por medio del estimador

$$\frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_i + \bar{h})] \quad \text{y} \quad [M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h})] \quad \text{por medio del sistema}$$

de ecuaciones (3.14), no así el segundo término el cuál permanece indeterminado. Sin -

embargo, este último término, puede ser aproximado de la siguiente manera (Matheron, 1969):

$$\text{var} [M(\bar{x}) - M(\bar{x} + \bar{h})] = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{s=1}^n u_{\lambda s} [f^{\lambda}(\bar{x}) - f^{\lambda}(\bar{x} + \bar{h})] [f^s(\bar{x}) - f^s(\bar{x} + \bar{h})]$$

siendo  $u_{\lambda s}$  multiplicadores de Lagrange.

Por otro lado, si  $\gamma_e^*(h)$  es un estimador insesgado del semivariograma de los -  
residuales estimados, minimizando la siguiente expresión:

$$[\gamma_e^*(\bar{h}) - \gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{h})]^2$$

se pueden encontrar todos los  $u_{qs}$ , excepto  $u_{11}$  el cuál es, por ahora, inaccesible. Consideraciones prácticas permitirán el cálculo de  $u_{11}$ , esto es, considerando que el primer valor del semivariograma experimental debe ser muy cercano al primero del semivariograma fundamental. Así, la ecuación a resolver para obtener el valor de  $u_{11}$ , es la siguiente:

$$\gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{h}) = CT(\bar{h}) + u_{11} h^2$$

$$\gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{l}) = CT(\bar{l}) + u_{11}$$

$$u_{11} = \gamma(\bar{x}, \bar{x} + \bar{l}) - CT(\bar{l})$$

Con este valor de  $u_{11}$ , estamos en posibilidad de obtener una mejor aproximación del semivariograma fundamental.

## CAPITULO IV

### METODO DE COVARIANZAS GENERALIZADAS

Como se ha expuesto, la mayor dificultad con que tropieza la aplicación del método kriging al estudio de fenómenos no estacionarios es la inferencia del semivariograma y/o de la covarianza.

Diferentes investigadores (David, 1975; Olea, 1972 y otros) han desarrollado programas de cómputo basados en la hipótesis del kriging universal la cuál considera la no estacionariedad de los fenómenos naturales. Con esta variante se ha evitado el tener que emplear un semivariograma sesgado cuando el fenómeno es no estacionario.

En el kriging universal la inferencia del semivariograma fundamental es indirecta, es decir, se hace a través del semivariograma de los residuales de la variable que se estudia. El cálculo de los residuales es, sin embargo, altamente subjetivo ya que la práctica ha demostrado que su estimación es más un arte que una ciencia.

En este capítulo describiremos la inferencia estadística de la covarianza adoptando un modelo en el cual la función covarianza será definida a través de operadores lineales llamados incrementos generalizados.

La estimación de variables asociadas a fenómenos no estacionarios empleando métodos lineales presenta la ventaja sobre los métodos no-lineales de requerir menos suposiciones teóricas, lo cual se traduce en un número menor de parámetros a estimar con las consecuentes facilidades de adaptación a las computadoras digitales.

#### I V. 1) Incrementos generalizados

Sea  $Z(\bar{x})$  una variable regionalizada y  $\gamma(\bar{h})$  su semivariograma. Si  $Z(\bar{x})$  representa un fenómeno estacionario entonces el valor esperado de  $Z(\bar{x})$  será constante en toda localización, esto es:  $E [Z(\bar{x})] = m$ ,  $\forall \bar{x}$ . El semivariograma será función de  $\bar{h}$  dada por,

$$\gamma(\bar{h}) = \frac{1}{2} E [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})]^2$$

y podrá estimarse sin sesgo a través de la ecuación (2.7).

En el caso de fenómenos no estacionarios, en los cuales la hipótesis intrínseca común no es suficiente, la idea es emplear diferencias de orden más alto de tal manera que ya no únicamente constantes, sino polinomios de grado variable que representen un drift, puedan ser filtrados. Por simplicidad representaremos la forma del drift mediante modelos polinomiales.

Considérese el caso de datos igualmente espaciados en una línea. La función incremento se definirá entonces como:

$$\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$$

Similarmente,

$$\Delta^2 Z_n = \Delta (\Delta Z_n)$$

$$= \Delta Z_{n+1} - \Delta Z_n = (Z_{n+2} - Z_{n+1}) - (Z_{n+1} - Z_n)$$

$$= Z_{n+2} - 2Z_{n+1} + Z_n$$

$$\Delta^3 Z_n = Z_{n+3} - 3Z_{n+2} + 3Z_{n+1} - Z_n$$

Una propiedad importante de este operador de diferencia es la de filtrar polinomios  $P(x)$  de grado  $n$ ,

$$\Delta^{n+1} P(x) = 0$$

Esta propiedad se empleará para filtrar drifts cuando éstos estén presentes en un fenómeno. Supóngase, por ejemplo, un fenómeno unidimensional  $Z(x)$  con drift lineal, o sea:  $E [Z(x)] = a_0 + a_1 x$

La diferencia de las dos diferencias de primer orden (tal que  $x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ ) es:

$$[Z(x_2) - Z(x_1)] - [Z(x_1) - Z(x_0)]$$

con esperanza igual a cero,

$$\begin{aligned} E [Z(x_2) - Z(x_1) - Z(x_1) + Z(x_0)] &= a_0 + a_1 x_2 - a_0 - a_1 x_1 - a_0 - a_1 x_1 + a_0 + a_1 x_0 \\ &= a_1 [(x_2 - x_1) - (x_1 - x_0)] = 0 \end{aligned}$$

El fenómeno representado por la diferencia de segundo orden,

$Z(x_2) - 2Z(x_1) + Z(x_0)$  tiene ahora una media igual a cero (filtra drifts de orden 1).

En el caso de pares de puntos espaciados irregularmente en una, dos o tres dimensiones, la analogía de una diferencia finita será un incremento generalizado representado por una combinación lineal de  $Z(\bar{x})$  la cual tiene la propiedad de filtrar polinomios en las coordenadas de un punto dado  $\bar{x}$ . La función aleatoria  $Z(\bar{x})$  que interviene en esta combinación lineal se denomina función aleatoria intrínseca de orden  $k$  (abreviada F. A. I. K) donde  $k$  es el grado del polinomio filtrado. En general un incremento de orden  $k$  está asociado a una diferencia de orden  $k+1$ .

Al considerar únicamente incrementos, en realidad estamos trabajando con una clase equivalente de funciones aleatorias  $Z(\bar{x})$ , es decir, con la clase de funciones que generan los mismos incrementos. Por ejemplo, en el caso unidimensional la ecuación  $\Delta^k Z_i = f(x)$  determina  $Z(\bar{x})$  solamente hasta un polinomio arbitrario de grado  $k-1$ .

**Definición.-** Sea  $Z(\bar{x})$  una función aleatoria en  $\mathbb{R}^n$  donde  $\bar{x}$  denota un punto con coordenadas en una, dos o tres dimensiones. Una combinación lineal de  $m$  valores

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) \quad (4.1)$$

es un incremento generalizado de orden  $k$  de la función aleatoria  $Z(\bar{x})$  si y solo si:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f^k(\bar{x}_i) = 0 \quad (4.2)$$

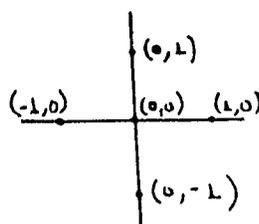
para todos los monomios  $f^k$  de grado menor o igual a  $k$ . En el caso bidimensional por ejemplo los monomios serán de la forma  $x^p y^q$  con  $0 \leq p+q \leq k$  y con las siguientes condiciones sobre los pesos  $\lambda_i$  de acuerdo al orden del incremento:

$$\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i \bar{y}_i = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i^2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{y}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{y}_i^2 = 0 \end{array}$$

Ejemplos:

En el plano la cantidad:

$Z(-1, 0) + Z(1, 0) + Z(0, -1) + Z(0, 1) - 4Z(0, 0)$  es un incremento de orden 1.



Los pesos  $\lambda_i$  satisfacen;

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i = 0, \sum_{i=1}^5 \lambda_i \bar{x}_i = 0, \sum_{i=1}^5 \lambda_i \bar{y}_i = 0, \sum_{i=1}^5 \lambda_i \bar{x}_i \bar{y}_i = 0$$

pero  $\sum_{i=1}^5 \lambda_i \bar{x}_i^2 \neq 0$  y  $\sum_{i=1}^5 \lambda_i \bar{y}_i^2 \neq 0$ , por lo tanto, no es un incremento de

orden 2.

En una dimensión, la diferencia de segundo orden  $x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}$  es un incremento de orden 1 ya que satisface

$$\sum \lambda_j = 0 : \quad \lambda_{i+1} + \lambda_i + \lambda_{i-1} = 1 + (-2) + 1 = 0$$

$$\text{y } \sum \lambda_j x_j = 0 : \quad 1(i+1) - 2(i) - 1(i-1) = 0$$

El propósito de tomar incrementos generalizados es producir una variable regionalizada estacionaria a partir de una variable con drift. Esta es la analogía n-dimensional del enfoque que se emplea actualmente para el análisis de series de tiempo no-estacionarias (Box y Jenkins, 1969) en el cual se calculan diferencias finitas sucesivas hasta -- que se obtienen cantidades aproximadamente estacionarias.

#### IV. 2) Función covarianza generalizada

Sea  $Z(\bar{x})$  una función aleatoria no-estacionaria compuesta de una parte aleatoria estacionaria  $Y(\bar{x})$  y de una parte determinística  $m(\bar{x})$  que puede expandirse como:

$$m(\bar{x}) = \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}) \quad (4.3)$$

es decir,

$$Z(\bar{x}) = Y(\bar{x}) + \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}) \quad (4.4)$$

Sustituyendo ec.(4.4) en la expresión del incremento generalizado(4.1) tenemos:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(\bar{x}_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^n a_l \lambda_i f^l(\bar{x}_i)$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i Z(x_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(x_i) \quad (4.5)$$

ya que la restricción (4.2) impuesta sobre el incremento generalizado filtra el -- término  $\sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^n a_l \lambda_i f^l(\bar{x}_i)$ .

La igualdad (4.5) nos permite definir la covarianza generalizada a través de la -- varianza del incremento generalizado de  $Z(\bar{x})$  en lugar de hacerlo a través del incremen

to generalizado de  $Y(\bar{x})$  (como sería lo normal), ya que los residuales son desconocidos. De esta forma tenemos:

$$\text{var} \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K(\bar{h}) \quad (4.6)$$

donde  $h = \bar{x}_i - \bar{x}_j$ ,  $Z(\bar{x}_i)$  y  $Z(\bar{x}_j)$  son correlacionables y  $K(h)$  es la covarianza generalizada.

Cuando la función aleatoria intrínseca es de orden cero las diferencias asociadas son de orden 1 y filtran constantes. Por otra parte, el semivariograma es una varianza de incrementos (diferencia de orden 1) y si  $E[Z(\bar{x})] = m$  entonces las diferencias  $Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})$  tienen esperanza igual a cero, es decir, también filtran constantes. Por lo tanto cuando  $k=0$  la covarianza generalizada equivale al semivariograma pero con signo contrario,

$$K(|\bar{x}_i - \bar{x}_j|) = -\gamma(|\bar{x}_i - \bar{x}_j|), \quad \text{si } k=0 \quad (4.7)$$

#### IV. 3) Funciones aleatorias intrínsecas

Una función aleatoria intrínseca de orden  $k$  es una función aleatoria cuyos incrementos de orden  $k$ -ésimo son estacionarios. En otras palabras, para todas las series de pesos  $\lambda_i$  que satisfagan,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f^{\ell}(\bar{x}_i) = 0 \quad \forall \ell = 0, 1, \dots, n$$

la función aleatoria  $\sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i + \bar{h})$  tiene una media y una varianza que no depende de  $\bar{x}_i$ .

Se puede observar que si reemplazamos  $Z(\bar{x})$  por  $Z(\bar{x}) + \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} f^{\ell}(x)$ , esto no cambia el valor de  $\sum \lambda_i Z(\bar{x}_i + \bar{h})$  ya sea que los  $a_{\ell}$  sean aleatorios o no.

Demostración:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i [Z(\bar{x}_i + \bar{h}) + \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} f^{\ell}(\bar{x}_i + \bar{h})] = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i + \bar{h}) + \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \sum_{i=1}^m \lambda_i f^{\ell}(\bar{x}_i + \bar{h})$$

Pero la familia de polinomios es cerrada bajo traslación y por lo tanto existen funciones  $B_s^l(\bar{h})$  tales que:

$$f^l(\bar{x}_i + \bar{h}) = \sum_{s=0}^k B_s^l(\bar{h}) f^s(\bar{x}_i)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i f^l(\bar{x}_i + \bar{h}) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{s=0}^k B_s^l(\bar{h}) f^s(\bar{x}_i) \\ &= \sum_{s=0}^k B_s^l(\bar{h}) \sum_{i=1}^m \lambda_i f^s(\bar{x}_i) = 0 \end{aligned}$$

ya que los pesos  $\lambda_i$  satisfacen la ecuación (4.2).

Esto demuestra que cuando trabajamos con incrementos, más que una función aleatoria particular estamos considerando una clase completa equivalente de funciones iguales a  $Z(\bar{x})$  hasta un polinomio de grado  $k$ . Esta clase equivalente es lo que llamamos una función aleatoria intrínseca de orden  $k$  y su covarianza es la covarianza generalizada definida como:

$$\text{var} \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K(|\bar{x}_i - \bar{x}_j|)$$

#### IV. 4) Hipótesis intrínseca generalizada

Se ha visto que a partir de un proceso no estacionario podemos producir otro estacionario obteniendo los incrementos de orden  $k$ -ésimo. Después, con la covarianza generalizada podemos estimar la covarianza del proceso estacionario. Sin embargo, el problema original es la estimación de un proceso no estacionario.

Esta aparente contradicción se resuelve si recordamos que de acuerdo a las condiciones de insesgamiento del kriging universal, los coeficientes del estimador de  $Z(\bar{x}_0)$ :

$$Z^*(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i)$$

$$\text{satisfacen} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

(4.8)

$$y \sum_{i=1}^m \lambda_i f^k(\bar{x}_i) = f^k(\bar{x}_0) \quad (4.9)$$

Consideremos ahora el error de kriging  $Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)$  y definamos el coeficiente de  $Z(\bar{x}_0)$  como:

$$\lambda_{m+1} = -1$$

entonces

$$\begin{aligned} Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) + (-1)Z(\bar{x}_0) \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j Z(\bar{x}_j) \end{aligned} \quad (4.10)$$

y se observa que para la serie  $[\lambda_i, -1] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, -1]$  se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 0$$

Por otro lado, la condición de insesgamiento (4.9) puede escribirse de la siguiente

manera:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f^k(\bar{x}_i) = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo a las expresiones (4.1) y (4.2) el error de kriging es un incremento generalizado de orden  $k$ .

De esta forma la hipótesis mínima requerida para la inferencia estadística es la estacionariedad de tales incrementos de orden  $k$ , es decir, que los momentos de primero y segundo orden se conserven bajo traslación. Lo anterior constituye la hipótesis intrínseca generalizada.

#### IV. 5) Modelos de covarianza generalizada

Para que una función pueda representar una covarianza generalizada deberá satisfacer la condición matemática que asegure que las varianzas de los incrementos sean siempre positivas. Dicha condición es que  $K(\bar{h})$  sea positivamente definida y se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \geq 0 \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Los modelos de covarianza generalizada más convenientes para los problemas prácticos son de tipo polinomial. Matheron ha demostrado que en una covarianza polinomial los términos con potencias pares no importan (se anulan al realizar la sumatoria  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$ ). La demostración es difícil y solamente se esboza a continuación (Matheron, 1971):

Primero se muestra que una función continua y simétrica  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (es decir, tal que  $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{y}, \bar{x})$ ) satisface:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \phi(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0 \quad \forall \lambda_i \text{ tal que } \sum_{i=1}^m \lambda_i f^l(\bar{x}_i) = 0 \text{ si y solo si}$$

es de la forma:

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = C_r(\bar{x})y^r + C_r(\bar{y})x^r + T_{rs} x^r y^s$$

para algunas constantes simétricas  $T_{rs}$  y funciones continuas  $C$ .

Luego queda el problema de caracterizar aquellas funciones dentro de esta clase que son de la forma  $K(\bar{x} - \bar{y})$ .

Como las funciones  $x^r$  son monomios hasta de grado  $k$ , es claro que diferenciando  $\phi(\bar{x} - \bar{y})$   $k+1$  veces en  $\bar{x}$  y  $k+1$  veces en  $\bar{y}$ , dará como resultado cero.

Ahora, si  $\bar{h} = \bar{x} - \bar{y}$ :

$$\frac{d^{2k+2}}{dh^{2k+2}} K(\bar{h}) = (-1)^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} K(\bar{x} - \bar{y})$$

de tal modo que  $K(\bar{h})$  tiene todas sus derivadas de orden  $2k+2$  iguales a cero. Por lo tanto  $K(\bar{h})$  debe ser un polinomio de grado  $2k+1$ , es decir, con términos elevados a potencias impares únicamente.

Las covarianzas generalizadas polinomiales son isotrópicas pues  $K(\bar{h})$  depende solo del modulo  $|h|$  del vector  $\bar{h}$ . Su forma depende del orden del incremento como se muestra en la tabla 1 y consiste de todas las posibles combinaciones de términos. Cada término toma en cuenta cierto aspecto del fenómeno espacial:  $C_1|\bar{h}|$  para una componente continua pero no diferenciable(constante);  $C_2|\bar{h}|^3$  para una componente diferenciable una vez(lineal);  $C_3|\bar{h}|^5$  para una componente dos veces diferenciable(cuadrática). Si es necesario se añade a  $K(\bar{h})$  un término de efecto pepita  $C_0\delta$  para tomar en cuenta errores de medición.

TABLA 1

Modelos polinomiales de covarianzas generalizadas

Drift	Orden k	Modelos
Constante	0	$K(h) = C_0\delta + C_1 \bar{h} $
Lineal	1	$K(h) = C_0\delta + C_1 \bar{h}  + C_2 \bar{h} ^3$
Cuadrático	2	$K(h) = C_0\delta + C_1 \bar{h}  + C_2 \bar{h} ^3 + C_3 \bar{h} ^5$
Restricciones: $C_0 \geq 0$ , $C_1 \leq 0$ , $C_2 \geq (-10/3) \sqrt{C_1 C_3}$ , $C_3 \leq 0$		

Estos modelos de covarianzas polinomiales pueden adaptarse a la mayoría de los problemas y además al depender linealmente de sus coeficientes permiten que la inferencia estadística sea más sencilla. Por medio de un procedimiento automático los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se obtienen por regresión de las varianzas experimentales de los incrementos -

de orden  $k$  sobre sus valores teóricos, expresados linealmente como una función de esos coeficientes. Esto se verá con más detalle en la parte correspondiente a la identificación automática de la covarianza generalizada.

#### IV. 6) Estimación puntual

El problema es estimar  $Z(\bar{x}_0)$  como una combinación lineal de  $Z(\bar{x}_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ . Se asume el modelo de una función aleatoria  $Z(\bar{x})$  compuesta de una parte aleatoria  $Y(\bar{x})$  y de una parte determinística  $m(\bar{x})$ ,

$$Z(\bar{x}) = Y(\bar{x}) + m(\bar{x})$$

y se hacen las siguientes hipótesis básicas:

$$1) E [Y(\bar{x})] = 0$$

$$2) m(\bar{x}) = \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x})$$

Como en el kriging universal debe cumplirse que:

i) El estimador sea insesgado

ii) El estimador tenga varianza mínima

Sea  $Q$  el error de estimación:

$$Q = \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \quad (4.11)$$

La condición de que el estimador sea insesgado implica que:

$$E [Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)] = E [Q] = 0 \quad (4.12)$$

$$E [Q] = \sum_{i=1}^m \lambda_i E [Z(\bar{x}_i)] - E [Z(\bar{x}_0)] \quad (4.13)$$

pero,

$$\begin{aligned} E [Z(\bar{x}_i)] &= E [Y(\bar{x}_i)] + E [m(\bar{x}_i)] \\ &= 0 + m(\bar{x}_i) = \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}_i) \end{aligned}$$

similarmente  $E [Z(\bar{x}_0)] = \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}_0)$

Sustituyendo en ec.(4.13) se tiene:

$$E [Q] = \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^n \lambda_i a_l f^l(\bar{x}_i) - \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}_0) = 0$$

de donde  $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_l f^l(\bar{x}_i) = a_l f^l(\bar{x}_0)$

por lo tanto una condición suficiente es que:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f^l(\bar{x}_i) = f^l(\bar{x}_0) \quad , \quad 0 \leq l \leq n \quad (4.14)$$

que es la misma condición de insesgamiento del kriging universal .

Por otra parte, la varianza del error del kriging es: \*

$$\text{var} [Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)] = E [Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)]^2 - [E [Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)]]^2$$

pero de acuerdo a la ecuación (4.12) el segundo término del lado derecho de la igualdad

vale cero.

$$\therefore \text{var} [Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)] = E [Q^2] \quad (4.15)$$

Desarrollando Q tenemos:

$$Q = \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i [Y(\bar{x}_i) + \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}_i)] - Y(\bar{x}_0) - \sum_{l=0}^n a_l f^l(\bar{x}_0) \right]$$

$$Q = \sum_{i=1}^m \lambda_i [Y(\bar{x}_i) - Y(\bar{x}_0)]$$

$$Q^2 = \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(\bar{x}_i) \right]^2 - 2Y(\bar{x}_0) \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(\bar{x}_i) + [Y(\bar{x}_0)]^2$$

$$E[Q]^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j E[Y(\bar{x}_i) Y(\bar{x}_j)] - 2 \sum_{i=1}^m \lambda_i E[Y(\bar{x}_i) Y(\bar{x}_0)] + E[Y(\bar{x}_0)^2]$$

Sea  $K_{ij} = E[Y(\bar{x}_i) Y(\bar{x}_j)]$  la función covarianza generalizada, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} E[Q]^2 &= \text{var}[Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K_{ij} - 2 \sum_{i=1}^m \lambda_i K_{i,0} + K_{0,0} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esta varianza del error de kriging se minimiza bajo las condiciones de insesgamiento -- (4.14) empleando el método de multiplicadores de Lagrange con lo cual se llega al sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i K_{ij} + \sum_{\ell=0}^n u_{\ell} f^{\ell}(\bar{x}_i) = K_{0,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.17)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f^{\ell}(\bar{x}_i) = f^{\ell}(\bar{x}_0) \quad \ell = 0, 1, \dots, n \quad (4.18)$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,m} & 1 & f_1^1 & \dots & f_1^n \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,m} & 1 & f_2^1 & \dots & f_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{m,1} & K_{m,2} & \dots & K_{m,m} & 1 & f_m^1 & \dots & f_m^n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_m^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ f_1^n & \vdots & \dots & f_m^n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_m \\ u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0,1} \\ K_{0,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{0,m} \\ 1 \\ f_0^1 \\ \vdots \\ f_0^n \end{bmatrix}$$

La varianza de estimación viene dada por:

$$\sigma_k^2 = \text{var} [Z^*(\bar{x}_0) - Z(\bar{x}_0)] = \sum_{i=1}^m \lambda_i K_{0,i} + \sum_{l=0}^n u_l f^l(\bar{x}_0) \quad (4.19)$$

#### IV. 7) Identificación automática de la función covarianza generalizada en dos dimensiones

Ya se ha visto que la función covarianza generalizada está definida por la ec.

(4.6):

$$\text{var} \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K_{ij}(\bar{h})$$

donde  $\lambda_i Z(\bar{x}_i)$  es un incremento generalizado.

Por otro lado, se ha demostrado (ver ec. 4.10) que el error de kriging es un incremento generalizado y que se cumple la siguiente igualdad (ec. 4.15):

$$\text{var} [\text{error de kriging}] = E [(\text{error de kriging})^2]$$

Tomando en cuenta todo lo anterior podemos escribir:

$$E \left[ \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K_{ij} \quad (4.20)$$

Esta ecuación puede plantearse en términos de una regresión. El hecho de considerar covarianzas polinomiales simplifica el problema de la regresión ya que se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sea

$$R = \sum \left[ \left( \sum \lambda_i Z(\bar{x}_i) \right)^2 - \sum \sum \lambda_i \lambda_j K_{ij} \right]^2 \quad (4.21)$$

donde la suma se toma sobre configuraciones de puntos que satisfacen

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^l y_i^q = 0, \quad l + q \leq k$$

Entonces el mejor modelo de covarianza generalizada es aquel con coeficientes escogidos para minimizar R. Una manera de hacer esto es empleando mínimos cuadrados, sin embargo, una comparación de la ecuación (4.21) con el sistema de kriging nos propor

cionará otras relaciones útiles. Veamos que es lo que pasa si un punto de la serie de datos, digamos  $Z(\bar{x}_0)$  se remueve del conjunto y luego se estima por kriging a partir de -- los puntos circundantes.

Sean  $Z^*(\bar{x}_0)$  el valor estimado de  $Z(\bar{x}_0)$  y  $\bar{\lambda}_i$  los pesos calculados por kriging correspondientes a los puntos dato que rodean al punto omitido, entonces:

$$Z^*(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i)$$

y el sistema de kriging para obtener los  $\bar{\lambda}_i$ s es,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i K_{ij} + \sum_{l=0}^n u_l f^l(\bar{x}_i) &= K_{0,i} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f^l(\bar{x}_i) &= f^l(\bar{x}_0) \quad l \leq n \end{aligned}$$

Como se demostró anteriormente, el error de kriging

$$Q = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{m+1} \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) \quad (4.11)$$

es un incremento generalizado.

Por otra parte, de acuerdo a la ecuación (4.15) el error de estimación es:

$$\begin{aligned} \text{var} \left[ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right] &= E \left[ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right]^2 \\ &= E \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j Z(\bar{x}_i) Z(\bar{x}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) Z(\bar{x}_0) \right. \\ &\quad \left. + Z(\bar{x}_0) Z(\bar{x}_0) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j K_{ij} - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i K_{i,0} + K_{0,0} \end{aligned}$$

y escribiéndolo en forma compacta:

$$\text{var} \left[ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \lambda_i \lambda_j K_{ij} \quad (4.22)$$

De este modo, a partir de ecs. (4.11) y (4.22) la ecuación (4.21) puede interpretarse como:

$$R = \sum_{i=0}^m [(\text{error de kriging})^2 - \text{error teórico de estimación}]^2$$

De acuerdo a lo anterior puede formularse un procedimiento de regresión iterativo con los siguientes pasos:

- 1) Se escoge un primer modelo arbitrario de covarianza generalizada (por ejemplo  $K(h) = -h$ ).
- 2) Algunos puntos representativos del área se quitan temporalmente, uno a la vez y son estimados por kriging a partir de los puntos adyacentes.
- 3) Los pesos  $\lambda_i$  calculados se sustituyen en la ecuación (4.21).
- 4) Se escogen todos los modelos de covarianza generalizada apropiados al fenómeno.

Por ejemplo, si el drift es lineal se proponen los modelos:

$$K(h) = C_0 \delta + C_2 |\bar{h}|^3$$

$$K(h) = C_1 |\bar{h}| + C_2 |\bar{h}|^3$$

$$K(h) = C_2 |\bar{h}|^3$$

Para cada uno de los modelos se calcularán por separado los coeficientes de la covarianza que minimizan  $R$ .

5) Se desechan los modelos de covarianza generalizada cuyos coeficientes no cumplen con la restricciones impuestas sobre los mismos y para los restantes modelos se calcula el valor de  $R$ . El modelo de covarianza generalizada que finalmente se escoge es el que minimiza el error cuadrático medio (ECM),

$$ECM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Z^*(\bar{x}_0)_i - Z(\bar{x}_0)_i]^2$$

y que además hace que el error cuadrático medio estandarizado (ECS) tienda a uno,

$$ECS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{[Z^*(\bar{x}_0)_i - Z(\bar{x}_0)_i]^2}{\underbrace{\quad}_{K(\bar{x}_0)_i}} \rightarrow 1$$

El modelo así escogido se sustituye en el sistema de kriging y el proceso se --

repite.

Para llevar a cabo el punto 4 es necesario conocer el orden del drift; asimismo es conveniente que el primer modelo de covarianza generalizada corresponda al orden del drift del fenómeno pues de este modo la convergencia al modelo final es más rápida. Es por ello que previamente al proceso iterativo, ciertos paquetes de kriging (BLUEPACK) llevan a cabo la identificación del orden del drift por medio del siguiente procedimiento:

- Un subgrupo seleccionado de datos se divide en dos grupos y se predice cada punto dato a partir de los datos del otro grupo suponiendo primero un drift constante, luego uno lineal y finalmente uno cuadrático. Para cada grupo se obtiene el error cuadrático medio con cada uno de los drifts y se ordenan de acuerdo a la magnitud absoluta de dicho error. El orden del drift que produce el menor error en promedio sobre todos los puntos dato se considera como el más probable. Debe notarse que en esta etapa de la identificación del drift la covarianza generalizada se desconoce y los estimadores mencionados se calculan simplemente por mínimos cuadrados.

El desarrollo completo del sistema de ecuaciones lineales de regresión para el cálculo de los coeficientes de los modelos de covarianza generalizada se expone en el apéndice 1.

## CAPITULO V

### KRIGING Y OTROS METODOS DE INTERPOLACION

En este capítulo se discutirán brevemente los métodos de interpolación más empleados en Geofísica, varios de los cuales, por otra parte, son de uso general en Ciencias de la Tierra. Asimismo, se señalarán algunas diferencias importantes entre estos métodos y el kriging.

#### V. 1) Panorama general de la configuración

La configuración de datos geológicos y geofísicos puede dividirse en dos partes - fundamentales: la interpolación de los datos irregularmente distribuidos para generar una malla regular "suficientemente" cerrada y en segundo lugar la configuración de los datos de la malla.

La configuración puede ser manual o automática, en este último caso los algoritmos utilizados para localizar los contornos siguen una lógica más o menos similar y más bien el factor determinante en la calidad del mapa obtenido es el método de interpolación utilizado para crear la malla.

Se han publicado muchos artículos discutiendo los diferentes métodos de interpolación de datos bidimensionales en Geofísica. Entre las diferentes clasificaciones propuestas se distinguen las siguientes: métodos exactos e inexactos (Crain y Bhattacharyya, 1967); superficies matemáticas y superficies numéricas (Crain, 1970); métodos determinísticos y métodos estocásticos (Bolondi, Rocca y Zanoletti, 1975); etc. En general no puede hacerse una clasificación rigurosa pues algunos métodos participan de más de una de esas clasificaciones. Por esta razón y en interés de la Geofísica se hablará en cambio de los mé-

todos empleados en la configuración de campos potenciales y de variables sísmicas.

## V. 2) Interpolación de campos potenciales

Dentro de la exploración geofísica, los fenómenos que han recibido mayor atención en cuanto al desarrollo de técnicas de interpolación son el campo gravitacional terrestre y el campo geomagnético, agrupados bajo la denominación de campos potenciales. Las técnicas de interpolación empleadas incluyen: ajuste de palinamios (superficies de tendencia), promedios pesados, ecuaciones en diferencias finitas (harmonización y curvatura mínima) y splines bicúbicos.

### V. 2. 1) Superficies de tendencia

Este es el método estadístico más comúnmente empleada. De hecho es una técnica derivada directamente del análisis de regresión múltiple, aplicada a variables geológicas y geofísicas.

Este método trata de determinar una función  $f(\bar{x}, \bar{y})$  que asuma valores en los puntos de dato aproximadamente iguales a los valores observados  $G_i$ . Por lo tanto, en general existirá un error  $\epsilon(\bar{x})$  en cada punto de dato dado por:

$$\epsilon(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) - G_i$$

$f(\bar{x}, \bar{y})$  se expresa como un polinomio algebraico o trigonométrico,

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^M a_j R_j(\bar{x}, \bar{y}) + \epsilon(\bar{x}) \quad (5.1)$$

donde  $M$  es el número total de monomios y los coeficientes  $a_j$  se escogen de tal manera que minimizen la siguiente expresión (criterio de mínimos cuadrados):

$$\sum_{i=1}^N \epsilon(\bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^N [f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) - G_i]^2 \quad (5.2)$$

Esto se logra derivando parcialmente con respecto a cada coeficiente  $a_j$  e igualando a cero la derivada.

Se obtiene así el sistema de ecuaciones normales cuya solución son los  $a_j$ :

$$\sum_{j=1}^M a_j \left[ \sum_{i=1}^N R_k(\bar{x}_i, \bar{y}_i) * R_j(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right] = \sum_{i=1}^N G_i R_k(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \quad (5.3)$$

$k = 1, 2, \dots, M$

El problema que se tiene al emplear superficies de tendencia en áreas grandes es -- que al tratar de encontrar una función de interpolación para todos los datos, se requerirá -- una función de orden muy alto si se desea una interpolación exacta de los puntos dato. Es -- to es un inconveniente, pues será necesaria mucha memoria de computadora además de los -- problemas de inversión de matrices grandes. Por otro lado los polinomios de grado alto tien -- den a ser inestables, es decir, pueden producir valores extremos sin relación verdadera -- con el fenómeno verdadero (lo cual no sucede con el kriging). Es por ello que usualmente -- se consideran áreas pequeñas con traslape entre las mismas (para asegurar la continuidad) y -- se interpola en esas áreas empleando polinomios de grado bajo.

El modelo de superficies de tendencia puede expresarse como la suma de una compo -- nente determinística llamada tendencia y de un término  $\xi(\bar{x})$  que incluye las componentes -- locales y de error:

$$Z(\bar{x}) = \sum_{j=1}^M a_j R_j(\bar{x}, \bar{y}) + \xi(\bar{x}) \quad (5.4)$$

La separación que se hace del fenómeno en tendencia y error esta determinada por -- el orden del polinomio empleado para ajustar los datos. Es por ello que dicha separación es -- más o menos subjetiva y generalmente se hace en base a la escala de variación "grande" -- o "pequeña" del fenómeno.

El término  $\xi(\bar{x})$  puede considerarse como las alturas de una superficie aleatoria --  $e(\bar{x}, \bar{y})$  sobre los valores verdaderos. Si  $P_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  y  $P_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$  son dos puntos de obser -- vación, esto implica que:

$$E [e(\bar{x}_1, \bar{y}_1)] = 0$$

$$E [e^2(\bar{x}_1, \bar{y}_1)] = \sigma^2 = \text{cte.}$$

$$E [e(\bar{x}_1, \bar{y}_1) e(\bar{x}_2, \bar{y}_2)] = 0$$

es decir, el error  $\xi(\bar{x})$  es una cantidad con media cero, varianza constante y sin autocorrelación (ruido blanco). Esta es la diferencia que guarda  $\xi(\bar{x})$  con el término  $Y(\bar{x})$  (residual) del kriging, ya que  $Y(\bar{x})$  es una función con estructura propia y autocorrelacionable. Obviamente la autocorrelación es cero únicamente si  $P_1$  y  $P_2$  están muy alejados.

El método de superficies de tendencia no puede resolver problemas de predicción local, ya que incluso cuando no hay error en los datos, éste no restituye los valores originales. Por otra parte, este método es incapaz de dar una varianza de estimación verdadera pues -- las desviaciones  $Z(\bar{x}_i) - P(\bar{x}_i)$  observadas en los puntos experimentales son mucho menores -- que las desviaciones en los puntos desconocidos. Es decir, la diferencia entre la superficie verdadera y la superficie estimada solo puede considerarse que es mínima en los puntos dato; en contraste el kriging proporciona estimaciones que minimizan el error en las localizaciones donde no hay datos.

El cálculo de superficies de tendencia tiene mayor significado cuando se pretende -- obtener el valor esperado (por ejemplo el regional en gravimetría). Se ha demostrado (Mathéron, 1969) que el polinomio de mínimos cuadrados  $P(\bar{x})$  constituye siempre un estimador insesgado del drift aunque no el óptimo, excepto cuando la parte aleatoria  $Z(\bar{x}) - m(\bar{x})$  es -- un ruido blanco o en términos geoestadísticos efecto pepita puro.

### V. 2. 2) Promedios pesados

Este método se basa en la aproximación del valor en un punto por el promedio de los datos circundantes, a cada uno de los cuales se asigna un determinado peso. Obviamente los puntos más cercanos tendrán un mayor peso.

La función de interpolación puede escribirse como:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^N w(\bar{x}_i, \bar{y}_i) * G_i}{\sum_{i=1}^N w(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} \quad (5.5)$$

donde  $w(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  es la función de peso.

Existen muchas variantes de los promedios pesados pero los más comunes son los siguientes:

- Pesos lineales;  $w_i = 1/\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$
- Pesos cuadráticos;  $w_i = 1/(x_i^2 + y_i^2)$

Una de las principales desventajas de estos métodos es que no discriminan la información redundante. Por ejemplo, considérese la figura 7 en la cual se desea estimar el valor del punto  $z$ . Como los puntos A, B y C están equidistantes de  $z$  se les asignará un peso de  $1/3$  a cada uno ya que los pesos deben sumar uno. Supóngase ahora que A es en realidad un par de puntos A y A' muy cercanos. Lo lógico sería que a cada elemento de ese par se le asignara un peso de  $1/6$ . Sin embargo un método de promedios pesados basado únicamente en la distancia asignará un peso de  $1/4$  a A y A' del mismo modo que a B y C. En un caso extremo, si A es una acumulación de muchos puntos, la consecuencia será que B y C tendrán una influencia mínima en la estimación de  $z$ .

Otra de las características de estos métodos es que la función de interpolación obtenido estará limitada por:  $G_i(\text{mín}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq G_i(\text{máx})$  como puede deducirse de la ex

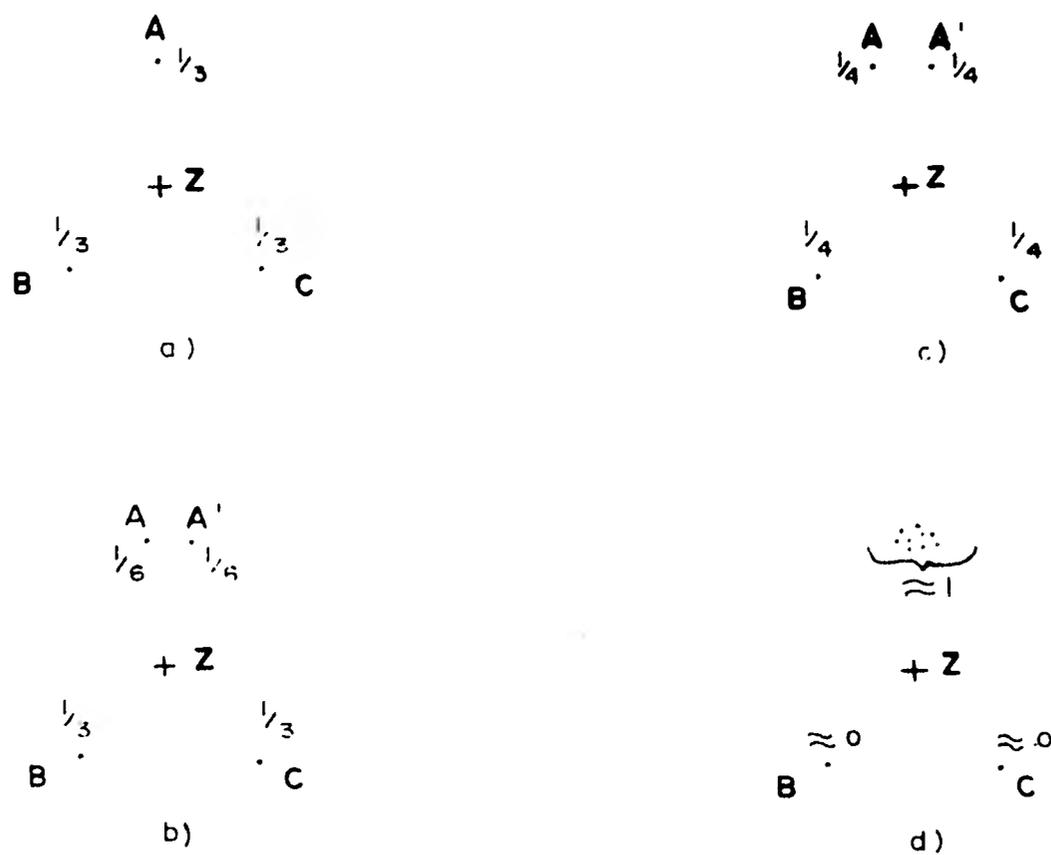


FIG. 7

ERROR AL ASIGNAR PESOS EN LA ESTIMACION DE Z

a) y b) pesos correctos

c) y d) pesos incorrectos calculados por promedios pesados

presión general de  $f(\bar{x}, \bar{y})$ , ecuación (5.5). Esto implica que se producirá un suavizamiento de los datos, el cual es más marcado cuando se emplean pesos lineales.

No existe un criterio objetivo para aplicar a un caso particular una de las distintas clases de promedios pesados. En algunos casos darán buenos resultados (generalmente - donde los gradientes son suaves), pero en otros dará resultados inaceptables. Por ejemplo, en una zona con densidad de datos variable, ciertos paquetes de configuración que usan promedios pesados producen mapas con máximos y mínimos ficticios donde hay escasez de datos (figura 8)

En cierta forma puede considerarse que el kriging es un tipo especial de promedio pesado, el cual se distingue por asignar a los datos unos pesos que dependen no solo de la distancia entre éstos y el punto a estimar, sino también de las relaciones entre cada pareja de datos. El kriging elimina así la incertidumbre inherente a los otros métodos pues -- identifica parcialmente la estructura espacial del fenómeno y la incorpora al algoritmo de estimación. Dicha estructura espacial será diferente no solo para variables diferentes sino incluso para la misma variable dentro de regiones diferentes.

La ventaja que tienen los promedios pesados es la rapidez con que proporcionan resultados ya que es muy sencillo implementarlos en las computadoras y por lo mismo su costo es muy bajo. Cuando los datos son bastante continuos y suaves dan muy buenos resultados y no hay por que utilizar métodos más complejos.

### V. 2. 3) Métodos de diferencias finitas

El comportamiento espacial de los campos gravitacional y magnético puede expresarse por medio de una fórmula analítica: la solución de la ecuación de Laplace. Esto proporciona la alternativa de tratar el problema de la interpolación de campos potenciales -

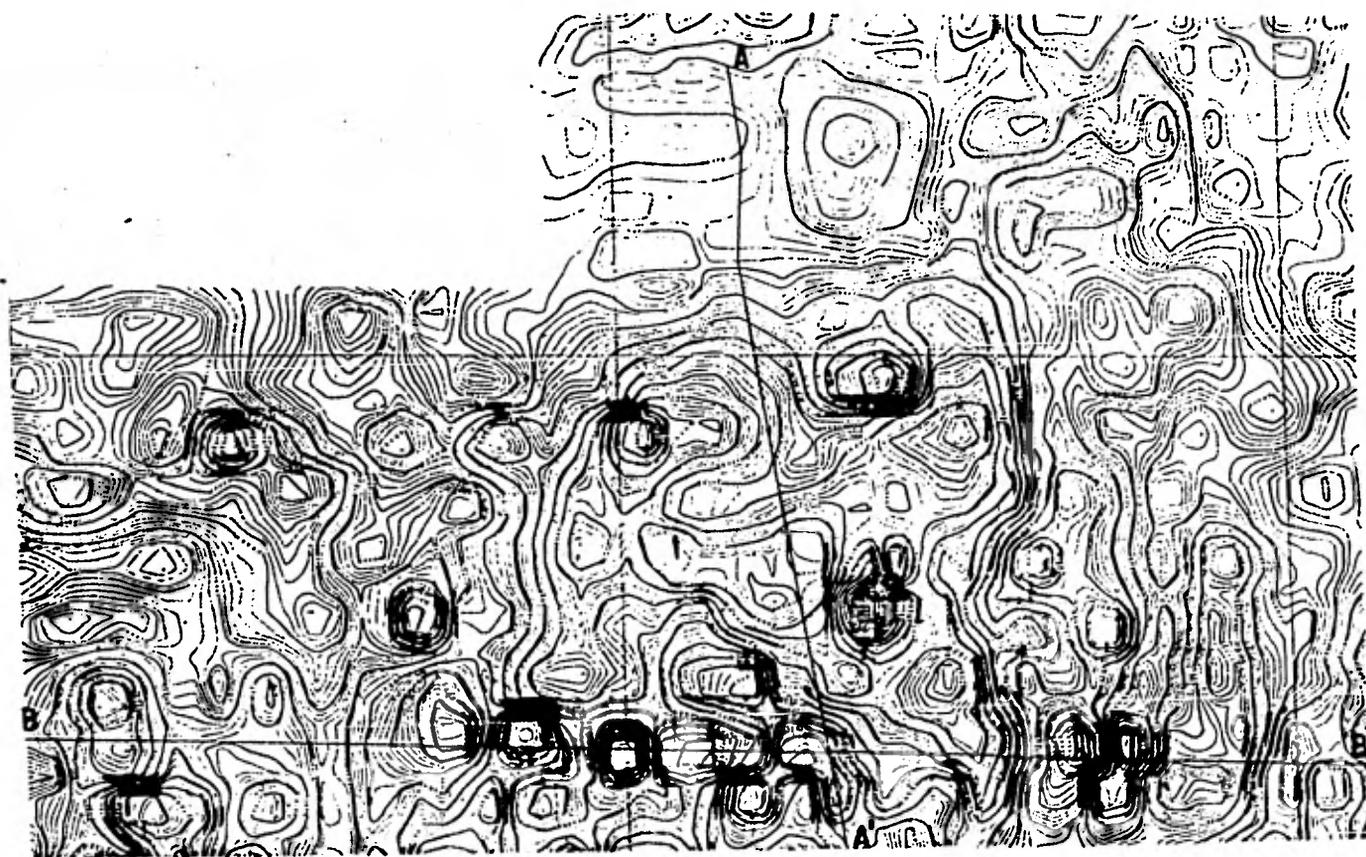


FIG. 8

EJEMPLO DE MAPA CONFIGURADO CON UN PROMEDIO PESADO INADECUADO PRODUCIENDO MAXIMOS Y MINIMOS FICTICIOS

desde un punto de vista determinístico.

El método de armonización considera este enfoque al resolver la ecuación diferencial de Laplace

$$\begin{aligned} \nabla^2 Z(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

por el método de diferencias finitas.

Las condiciones de frontera vienen dadas por  $Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = Z_i$ . Los algoritmos para la solución de la ecuación de Laplace en una malla regular discreta son bien conocidos (Milne, 1953).

En general se tendrá:

$$Z_{p,q} = \frac{1}{4} (Z_{p+1,q} + Z_{p-1,q} + Z_{p,q+1} + Z_{p,q-1}) \quad (5.7)$$

si  $Z_{p,q}$  no es dato.

$$Z_{p,q} = Z_{p,q}, \text{ si } Z_{p,q} \text{ es dato} \quad (5.8)$$

Para obtener (5.7) se tiene que iterar el algoritmo:

$$Z_{p,q}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (Z_{p+1,q}^{(k)} + Z_{p-1,q}^{(k)} + Z_{p,q+1}^{(k)} + Z_{p,q-1}^{(k)})$$

hasta que  $\max |Z_{p,q}^{(k+1)} - Z_{p,q}^{(k)}| \leq \epsilon$

Se ha encontrado que es útil inicializar todos los puntos que no son dato asignando el valor  $\bar{Z}$  dado por  $\bar{Z} = \sum_{i=1}^n Z_i / n$  lo cual incrementa la convergencia del algoritmo. Si  $\epsilon$  se escoge tal que  $\epsilon$  sea 1/100 del intervalo de contorno a usarse, se asegurará que cualquier iteración posterior no alterará significativamente la posición de la lí-

nea de contorno.

Las características principales de este tipo de interpolación son su rapidez, bajo costo y estimaciones que nunca exceden el rango de los datos. Esto equivale a suavizar la superficie (o al menos algunos de sus puntos) dejando los datos sin modificar.

### V. 3) Interpolación de variables sísmicas

En la prospección sísmológica de reflexión los objetivos finales son la obtención de un mapa de isopacas o el mapa de un horizonte geológico de interés. Estos objetivos se alcanzan después de un largo proceso que incluye entre otras cosas estimación de tiempos de reflejo y de velocidades sísmicas en zonas sin información, finalizando con la migración y conversión de tiempos a profundidades. La exactitud de los diferentes mapas obtenidos durante el proceso dependerá de la calidad de la información así como de la aplicación de un método adecuado de interpolación.

En cierta forma la configuración automática de variables sísmicas presenta más dificultades que el caso de los campos potenciales. Por ejemplo, en un campo potencial puede haber datos que aunque tengan un error apreciable tiene un valor bien definido; en contraste, en el caso sísmico frecuentemente se tienen secciones sísmicas en tiempo, donde se pasa de zonas en que puede identificarse perfectamente un reflector a otras donde desaparece y aún otras donde se distinguen dos o tres rasgos, alguno de los cuales corresponde al contacto reflector.

Otro de los factores que hacen que el manejo de las variables sísmicas requiera de mayor supervisión es que los aspectos geológicos estructurales juegan un papel mucho más importante que en cualquier otro método geofísico y debe existir una estrecha correspondencia entre la respuesta sísmica y la estructura del subsuelo. Es por ello que generalmente -

el mapa interpolado automáticamente se acepta solamente como una primera aproximación, sujeta al criterio geológico del intérprete.

### V. 3. 1) Estimación de tiempos de reflexión y velocidades

En el caso sísmico se presentan dos variables principales a configurar: los tiempos de reflexión y las velocidades sísmicas, las cuales son de naturaleza muy distinta.

La configuración de tiempos de reflexión es realizada usualmente por el método de promedios pesados que pueden ser de muchos tipos. Como se mencionó anteriormente este método no puede indicar máximos y mínimos que existen pero que no se muestrearon. Por esta razón, otros algoritmos consideran el echado entre puntos adyacentes (en pares o tercias) y proyectan este echado hacia el nodo. Estos valores proyectados son luego promediados y pesados. De esta forma se producirán máximos y mínimos donde debería haberlos, pero también daría como resultado máximos y mínimos donde no hay datos. En estos programas debe decidirse la manera de usar los puntos dato en la medición del echado así como en la relación peso-distancia.

Ya sea que se emplee uno u otro programa de interpolación, existen varios hechos que deben tomarse en cuenta: donde los datos son densos el mapa final depende poco del algoritmo usado; donde los datos están dispersos, el mapa final depende críticamente del número de datos empleados al estimar el punto.

En general los métodos de promedios pesados proporcionan resultados aceptables siempre que no existan fallas. Algunos programas consideran la existencia de fallas y llevan a cabo la estimación de valores en forma separada a uno y otro lado de la falla, sin embargo los puntos interpolados cercanos a la falla serán menos confiables por la falta de datos en ciertas direcciones.

En lo que respecta a los datos de velocidad, su tratamiento es diferente al dado -- a los tiempos de reflexión. En un principio podría pensarse que dicho manejo es más sencillo por el carácter univaluado de las velocidades sísmicas. Sin embargo éstas últimas generalmente muestran gran dispersión, por lo que requieren de un suavizamiento. Además, su obtención es limitada en comparación con los datos de tiempo de reflexión.

### V. 3. 2) Importancia de la velocidad en la migración

La validez del proceso de migración y la exactitud de la conversión de tiempos a profundidades dependen en un alto grado de un método apropiado de interpolación y suavizamiento de velocidades.

La migración automática es una de las etapas finales del procesamiento de las -- secciones sísmicas y se hace generalmente en áreas de geología compleja. El objetivo del proceso es eliminar los patrones de difracción causados por fallas y anticlinales, así como distorsiones causadas por echados fuertes, lográndose así una clarificación de la estructura geológica. Actualmente el proceso puede considerarse compuesta de dos pasos:

1) Migración en tiempo, consiste en mover los segmentos de reflexión a su verdadera posición horizontal, pero el eje vertical sigue siendo el tiempo de reflexión.

#### 2) Conversión a profundidad

Previamente al suavizado de las velocidades que se usarán en la migración se desechan los análisis de velocidad que desde un punto de vista geológico o geofísico no -- corresponden a las estructuras de interés. El suavizado de un perfil se hace generalmente de acuerdo al criterio del intérprete o se emplea un operador de suavizado que es un tipo de promedio pesado.

Cuando en las secciones sísmicas sin migrar, todos los reflectores de interés pueden seguirse sin ninguna dificultad no se justifica la migración en tiempo. En este caso --

es mucho mejor migrar los contornos de tiempo (Hagedoorn, 1954; Hass y Viallix, 1974), es decir, se lleva a cabo una migración tridimensional. Esta clase de migración es muy conveniente para tratar el problema de la estimación de reservas de hidrocarburos en una estructura anticlinal.

### V. 3. 3) Kriging y el proceso de migración en tres dimensiones

Para llevar a cabo la migración tridimensional, es necesario un método de suavizamiento de las velocidades sísmicas en un plano. Esto puede realizarse automáticamente por diferentes métodos (p promedios pesados, mínimos cuadrados, etc.). Sin embargo el suavizamiento que producen es hasta cierto punto arbitrario (como ya se vió en el caso de superficies de tendencia) ya que el intérprete puede variar parámetros hasta obtener el suavizamiento que le parezca más apropiado.

Para este problema el kriging es el único método que puede proporcionar un criterio objetivo: el grado de suavizamiento es función de la máxima varianza que puede esperarse entre dos datos cercanos. Este parámetro viene dado por el término  $C_0$  de la covarianza generalizada de las velocidades y es particular de cada conjunto de datos.

La idea de aplicar el método de kriging al proceso de migración tridimensional fué desarrollada originalmente por dos compañías francesas: la Sociedad Nacional del Petróleo de Aquitania y la Compañía Francesa del Petróleo en cooperación con la Escuela de Minas de París. El procedimiento general se esquematiza en la figura 2 (de Hass y Viallix, 1974).

Hass y Viallix describen brevemente la aplicación de este procedimiento a un caso de prospección sísmica marina. El tratamiento de los datos a lo largo de todo el proceso se hace utilizando la técnica del kriging normal, es decir, se considera que el fenó-

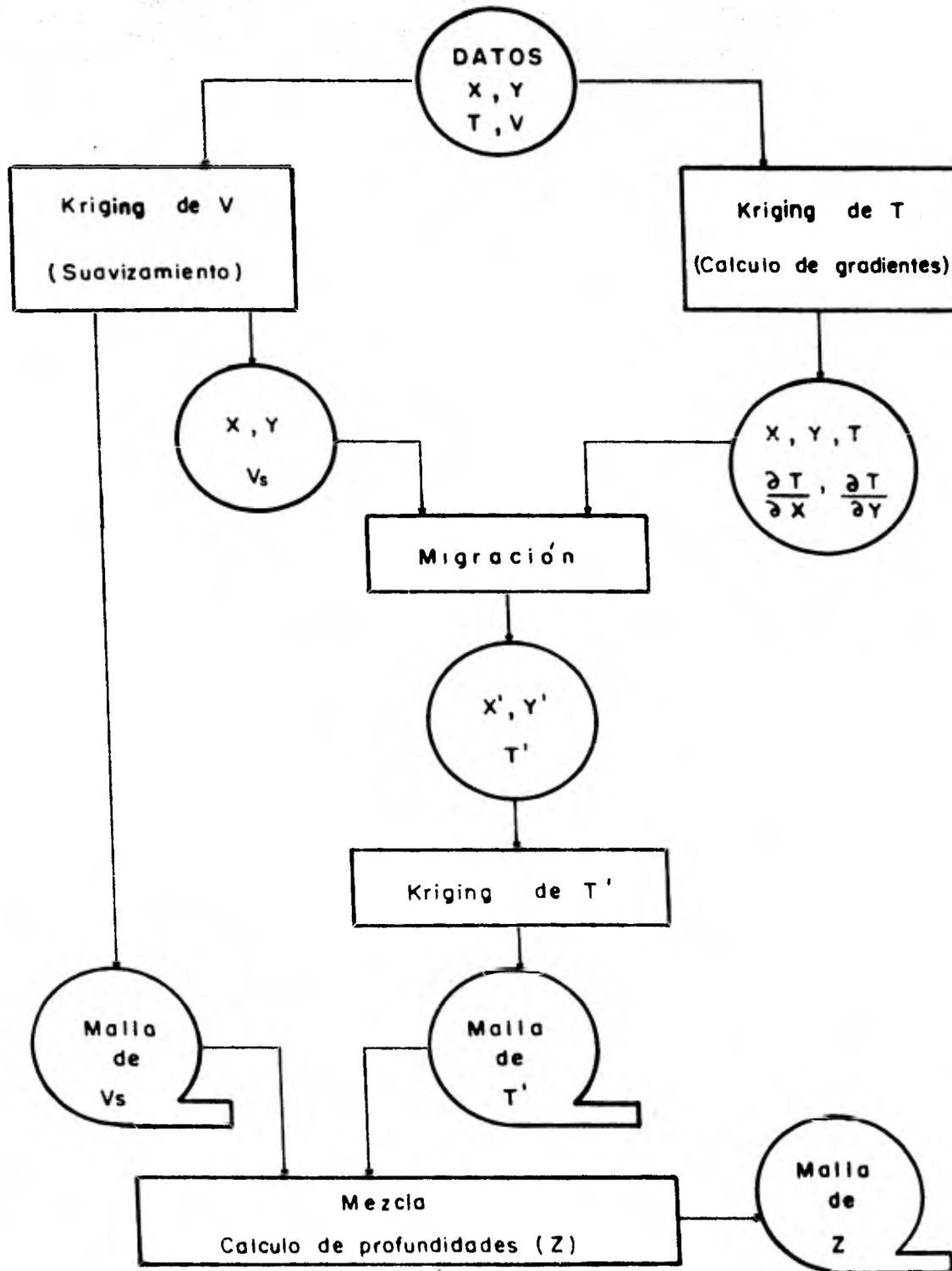


FIG. 9  
 PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR UN MAPA DE CIMAS  
 UTILIZANDO KRIGING

meno es estacionario. Es por esto que su aplicación es muy restringida ya que en muchos casos es frecuente la presencia de un drift o en su defecto no existen suficientes datos como para considerar zonas de quasi-estacionariedad. Tomando en cuenta estas limitaciones se hace necesario el empleo de una técnica más general de estimación, esto es, que considere el caso no estacionario. Este objetivo puede satisfacerse a través de la aplicación de la teoría de las funciones aleatorias intrínsecas de orden  $k$  ya descritas con anterioridad.

El sistema de kriging empleado para calcular los gradientes de tiempo es el dado por el sistema de ecuaciones (3.13), donde las condiciones de insesgamiento son:

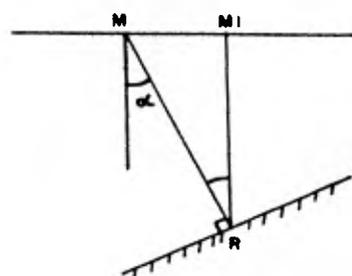
$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f^l(\bar{x}_i) = \frac{\partial}{\partial x} [f^l(\bar{x}_0)]$$

para estimar el gradiente en  $\bar{x}$  y

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f^l(x_i) = \frac{\partial}{\partial y} [f^l(\bar{x}_0)]$$

para el gradiente en  $\bar{y}$ .

Una vez obtenidos los gradientes de tiempo y la estimación de las velocidades en cada punto dato, puede llevarse a cabo la migración de los puntos dato (figura 10) es decir, el cálculo de las coordenadas  $(x', y')$  del punto migrado  $M'$  y el cálculo de los tiempos verticales. Esta es una idealización del fenómeno, ya que considera trayectorias rectas entre el punto de tiro  $M$  y el punto de reflexión  $R$ . Por supuesto el modelo puede mejorarse de acuerdo a la información disponible, considerando por ejemplo las interfaces refractoras.



- M** — Punto de tiro  
**M<sub>i</sub>** — Punto migrado  
**R** — Punto de reflejo  
 **$\alpha$**  — Angulo de incidencia

FIG. 10

### NIGRACION DE PUNTOS DE TIRO

Las coordenadas del punto migrado vienen dadas por:

$$x' = x - V'^2 + T \frac{\partial T}{\partial x}$$

(5.9)

$$y' = y - V'^2 + T \frac{\partial T}{\partial y}$$

y el tiempo vertical  $T'$  por:

$$T' = T \cos \alpha$$

$$\alpha = \text{sen}^{-1} \left[ V' \sqrt{\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2} \right]$$

La deducción de estas fórmulas puede verse en el apendice II.

## CAPITULO VI

### APLICACIONES

#### ( A ) Configuración de una malla de datos aeromagnéticos

En octubre de 1979, la Comisión Federal de Electricidad realizó un estudio aeromagnético en Puerto Libertad, Sonora (figura 11) como parte de un reconocimiento geofísico del área, para determinar espesores de los sedimentos que sobreyacen el basamento ígneo. Estos datos eran útiles para contribuir a la caracterización hidrogeológica de la región.

Se cubrió un área de  $168 \text{ km}^2$  con siete líneas de vuelo en dirección N-S y ocho líneas en dirección E-W, separadas dos kilómetros en ambas direcciones. Las líneas se muestrearon del registro analógico cada 200 metros y se emplearon las técnicas del kriging para interpolar hacia el centro de los cuadros formados por las líneas de vuelo con el objeto de construir una retícula uniforme con nodos cada 500 metros, tal como se ilustra en la figura 12.

Algunos perfiles N-S y E-W que son característicos del área se muestran en las figuras 13 y 14. Puede observarse en casi todos ellos, una fuerte tendencia lineal. Se calcularon los semivariogramas experimentales del campo magnético en las direcciones de vuelo (figura 15). Ambos semivariogramas resultaron ser de forma regular creciente, sin efecto pepita, lo cual era de esperarse debido a la alta continuidad de la variable y sin presencia aparente de meseta. Se ajustaron los primeros 40 puntos de cada semivariograma a un modelo de función de potencia resultando las siguientes expresiones analíticas:

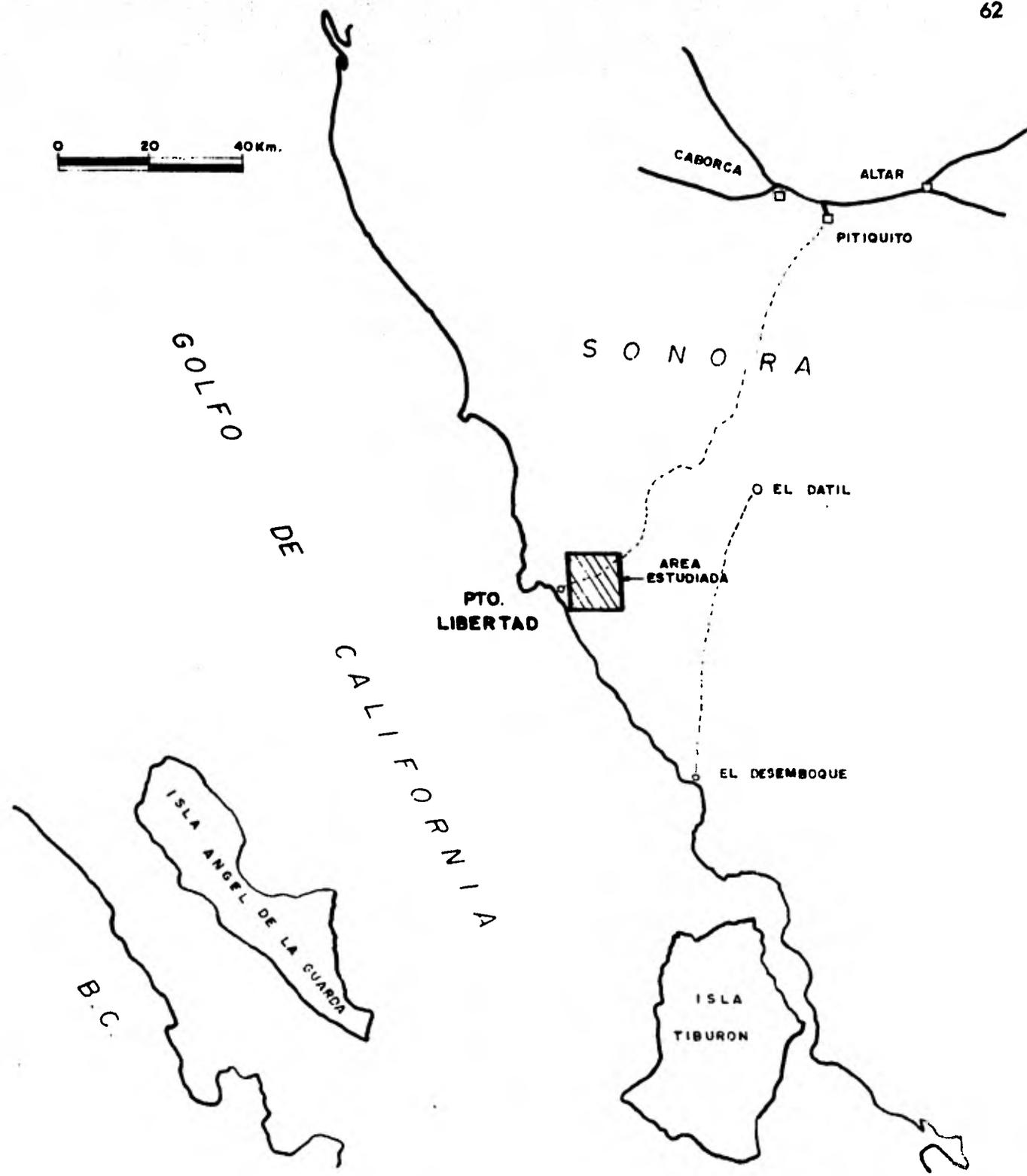


FIG. 110  
LOCALIZACION DE LA ZONA ESTUDIADA

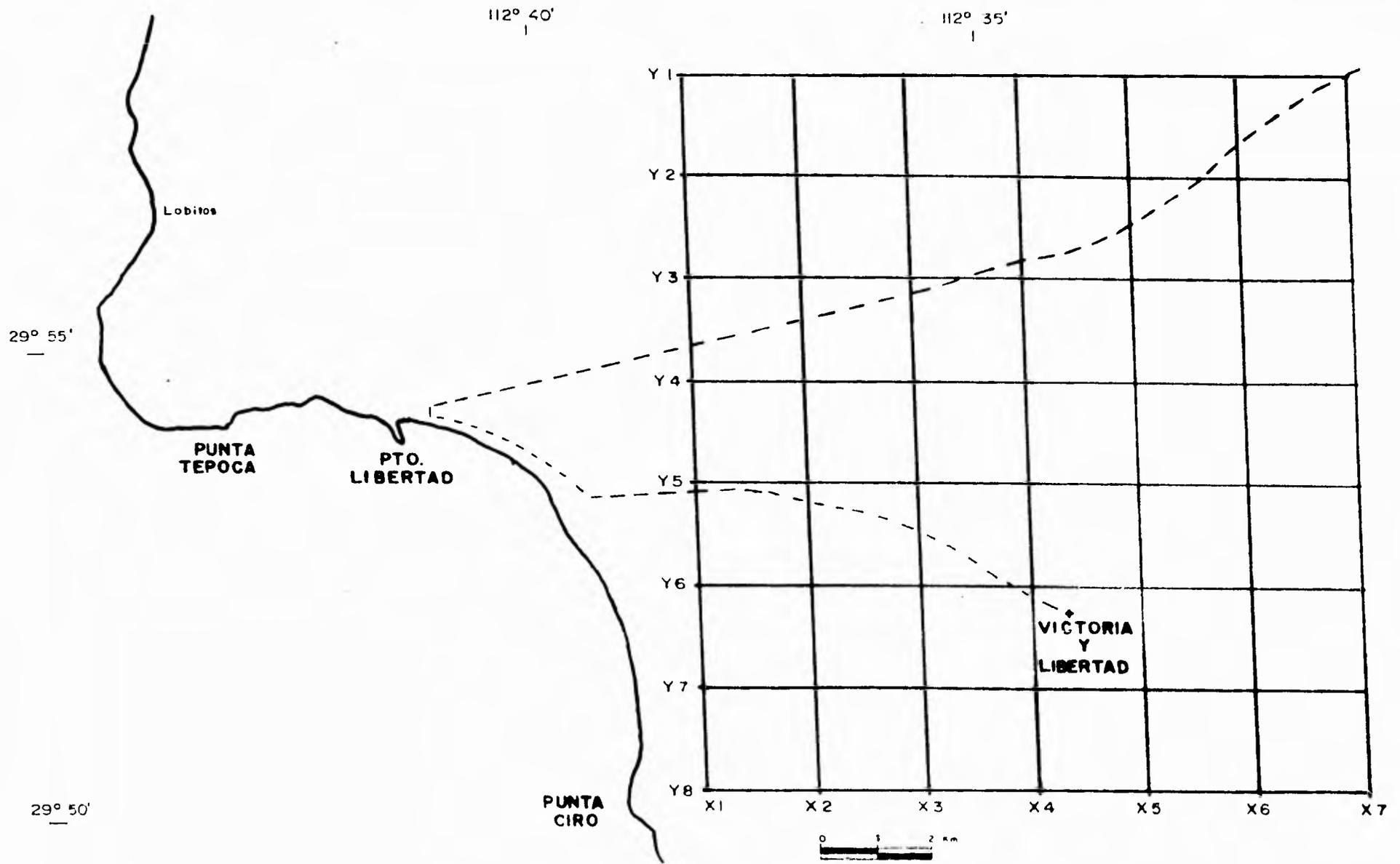
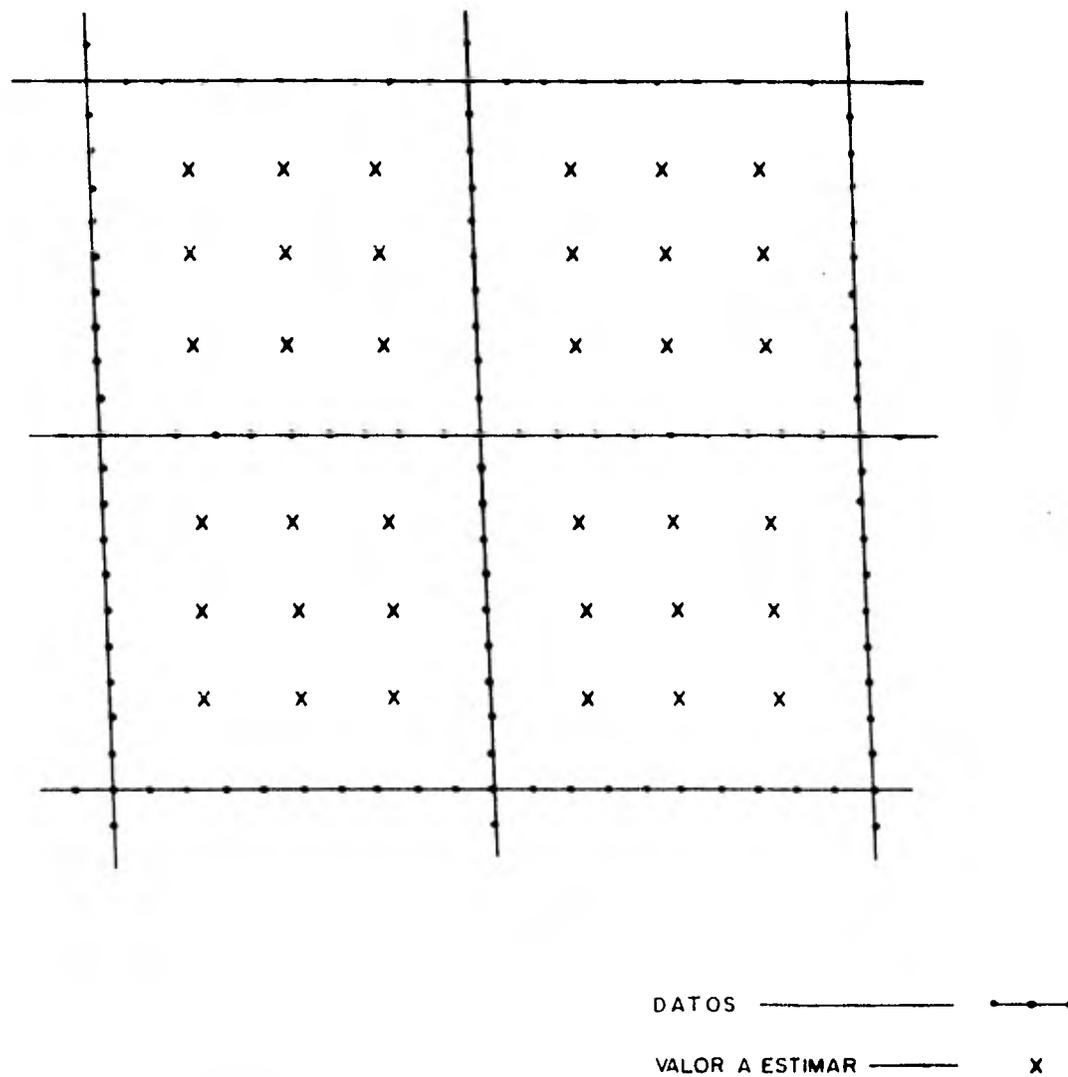


FIG. 11 b  
LOCALIZACION DE LINEAS AEROMAGNETICAS



0 1 2 Km.

FIG. 12  
DISTRIBUCION DE DATOS Y PUNTOS A ESTIMAR

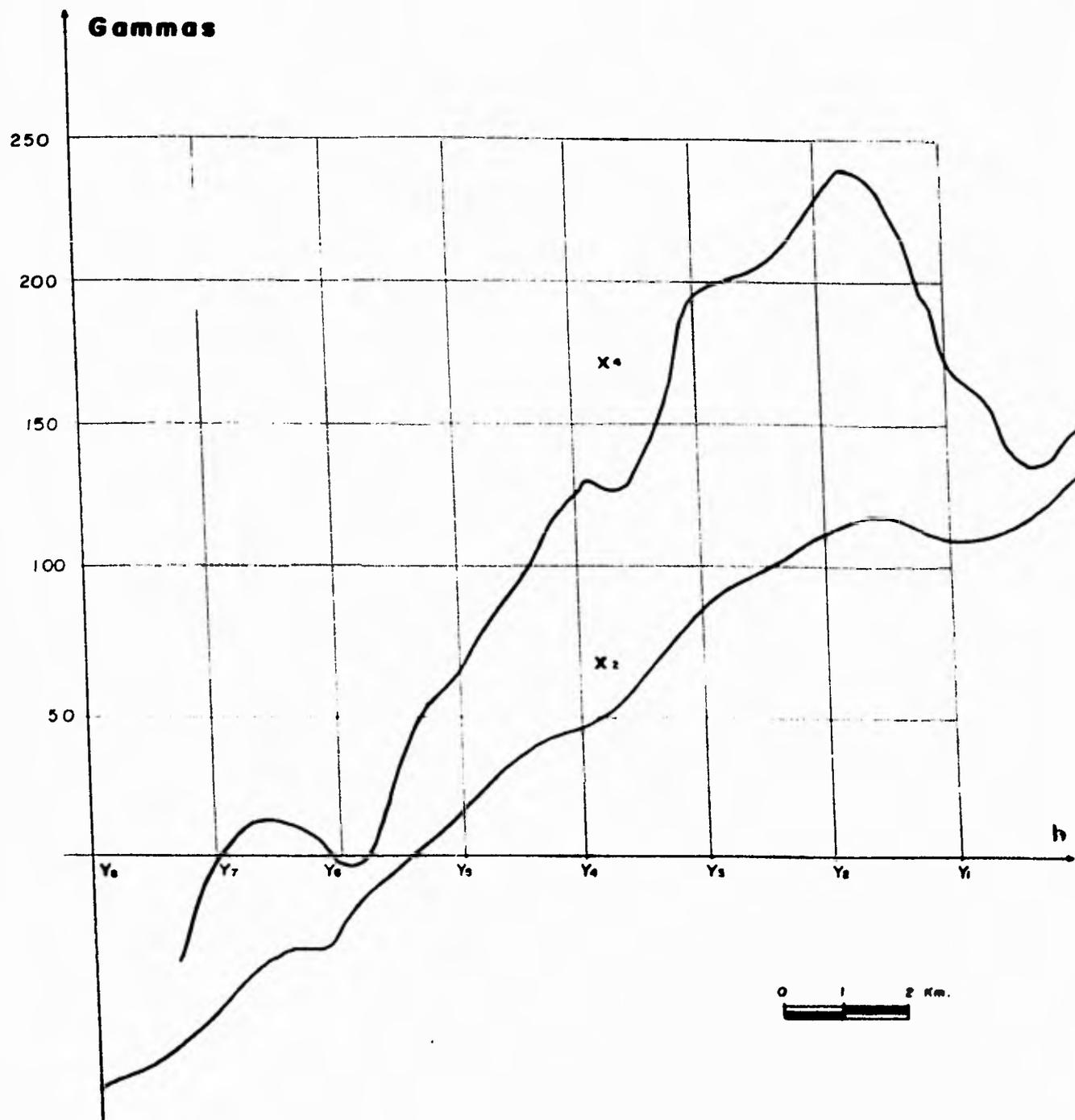


FIG. 13  
PERFILES MAGNETICOS EN DIRECCION N - S

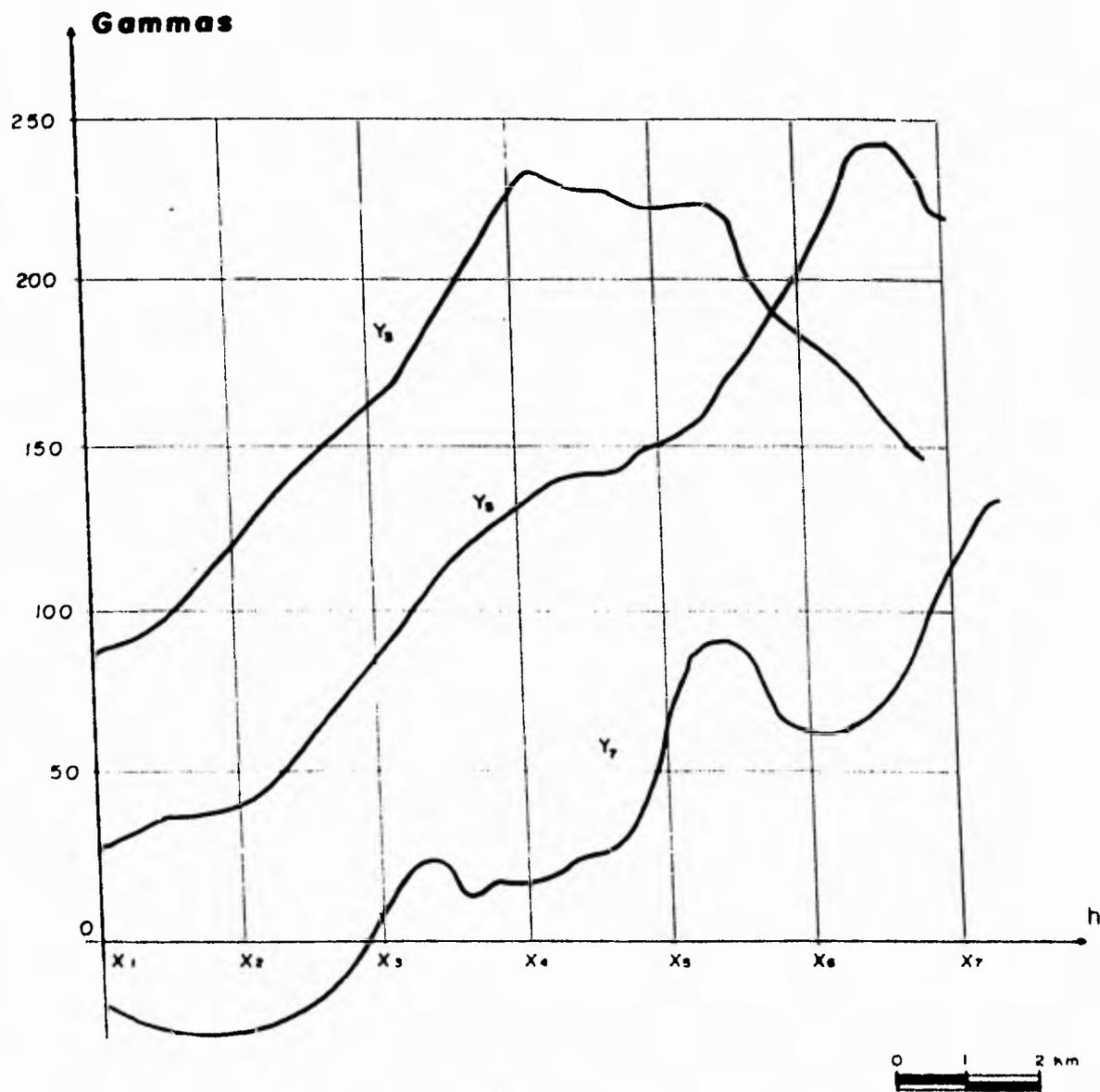


FIG. 14  
PERFILES MAGNETICOS EN DIRECCION E - W

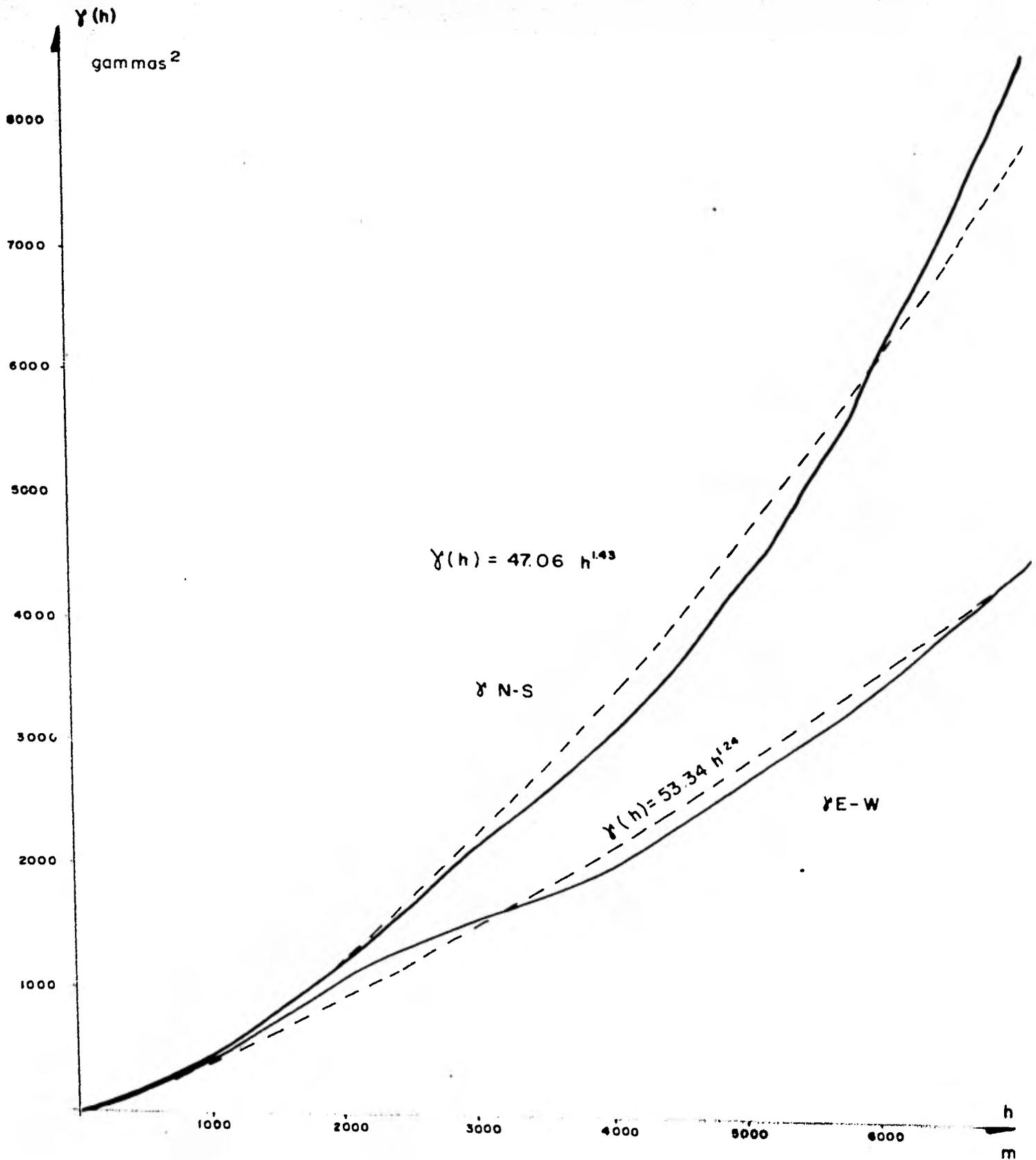


FIG. 15

SEMIVARIOGRAMAS EXPERIMENTALES DEL CAMPO MAGNETICO

semivariograma N-S,  $\gamma(h) = 47.06|h|^{1.43}$

semivariograma E-W,  $\gamma(h) = 53.34|h|^{1.34}$

Habiendo sido fácil el ajuste de los semivariogramas se decidió emplearlos directamente en el sistema de kriging normal, lo que implicaba considerar el fenómeno como estacionario, a pesar de existir un drift. Con el propósito de tomar en cuenta la anisotropía, las direcciones del segmento que une dos puntos cualesquiera fueron clasificados en tres zonas (figura 16).

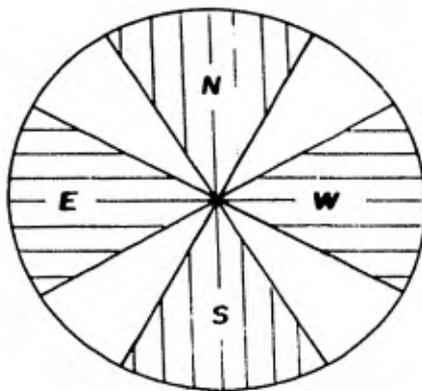


FIG. 16  
ZONAS CONSIDERADAS PARA ASIGNAR SEMIVARIOGRAMA  
SEGUN LA ORIENTACION DE  $h$

Para todos los pares de puntos unidos por un segmento cuya dirección esta incluida en la zona N-S se obtuvo:

$$|\tan \theta| = \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| > \tan 60^\circ = 1.732$$

y se les aplicó el semivariograma N-S.

Similarmente, para los pares de puntos tales que:

$$|\tan \theta| = \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < \tan 30^\circ = 0.5773$$

se les aplicó el semivariograma E-W y para los pares de puntos tales que:

$$0.5773 < |\tan \theta| < 1.732$$

se les aplicó un promedio de los dos semivariogramas.

Puesto que el semivariograma experimental no presenta meseta, no es posible definir el radio de influencia. Es por ello que se eligió "arbitrariamente" un radio de quasi estacionariedad de 7 unidades (1400 mts.), todo ello con propósitos de interpolación. Los resultados obtenidos fueron incongruentes, lo que obligó a reducir el radio a 5.5 unidades. Esta vez los resultados mejoraron y se obtuvo el mapa\* de la figura (17). Sin embargo, la superficie aún presenta distorsiones muy bruscas que no concuerdan en los puntos de control con el fenómeno real. Esto se verificó fácilmente pues varios puntos de los perfiles magnéticos originales, que no intervinieron como datos en el cálculo, fueron estimados como nodos en la malla interpolada produciendo máximos, mínimos e inclusive dipolos ficticios. Este efecto se hizo más notorio en la dirección de la tendencia. En la tabla 2 se muestran algunos puntos sobre o sub-estimados, así como sus coordenadas y su valor tomado de los perfiles. Obtener el mapa de desviaciones estándar en este caso era inútil.

\* En la configuración de las mallas se utilizó el paquete "SURFACE II"

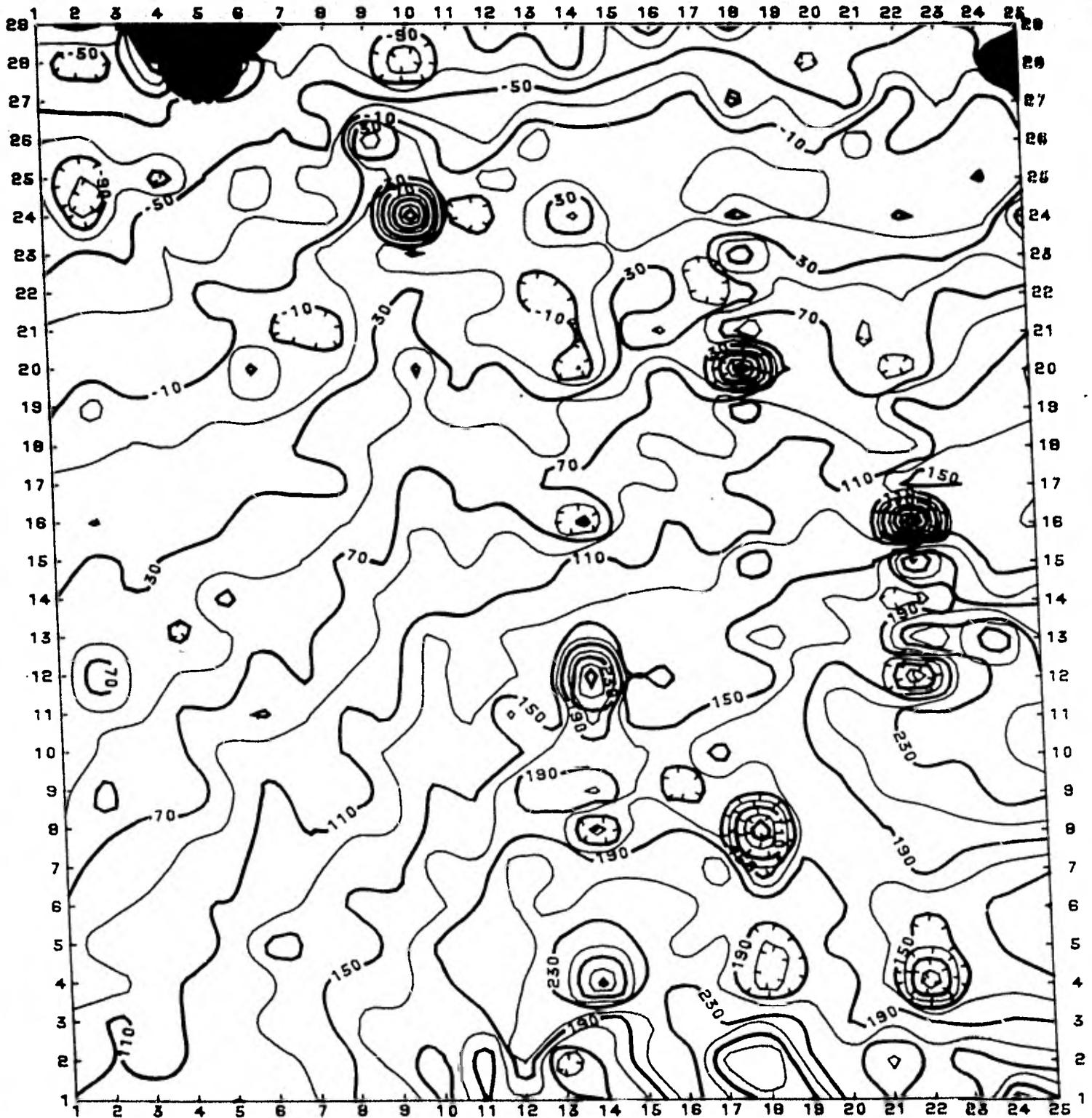


FIG. 17

MAPA CONFIGURADO POR COMPUTADORA EMPLEANDO KRIGING NORMAL  
INTERVALO DE CONFIGURACION : 20 GAMMAS

0 1 2 km

ESC.

TABLA 2

Error de estimación en puntos dato

Renglón	Columna	Valor real	Valor estimado
29	4	-85.0	-105.7
28	5	-74.0	658.0
29	6	-70.0	-339.0
21	16	41.0	5.5
26	21	-21.0	27.0
28	25	-19.0	-430.0

Posteriormente, se utilizó la variante del kriging que toma en cuenta el drift o sea el kriging universal. Para ello se calcularon los semivariogramas de residuales experimentales y teóricos en las direcciones principales (N-S y E-W), de acuerdo al proceso descrito en el capítulo III (figura 6). Algunos de estos semivariogramas se muestran en las figuras 18, 19 y 20. El mejor ajuste entre los semivariogramas de residuales teóricos y experimentales se encontró para una vecindad de 7 unidades (1400 mts.) y un drift lineal (figura 21). A partir de este semivariograma de residuales se calculó la pendiente, la cual es necesaria para la estimación de las varianzas. Los datos de vecindad óptima, orden del drift y pendiente se alimentaron al programa de kriging universal (Olea, 1971). Este programa se modificó ligeramente para ahorrar tiempo de cómputo, aprovechando el patrón geométrico regular y repetitivo de los datos. Este patrón permitió que sólo fuera necesario calcular los pesos asociados a los puntos a estimar contenidos dentro de una de

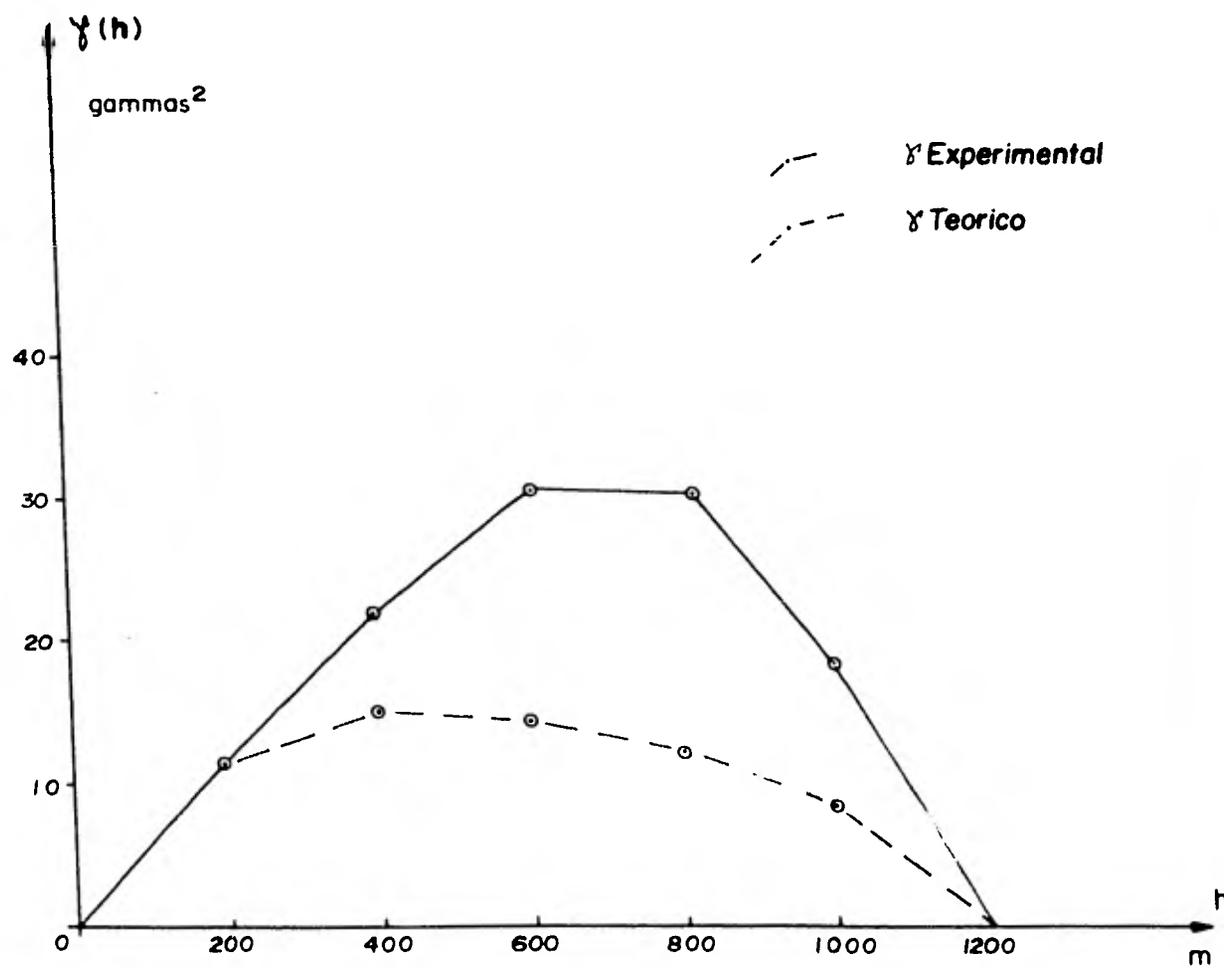


FIG. 18  
SEMIVARIOGRAMA DE RESIDUALES PARA UN DRIFT  
CUADRATICO Y VECINDAD DE 1200 m, EN DIRECCION E - W

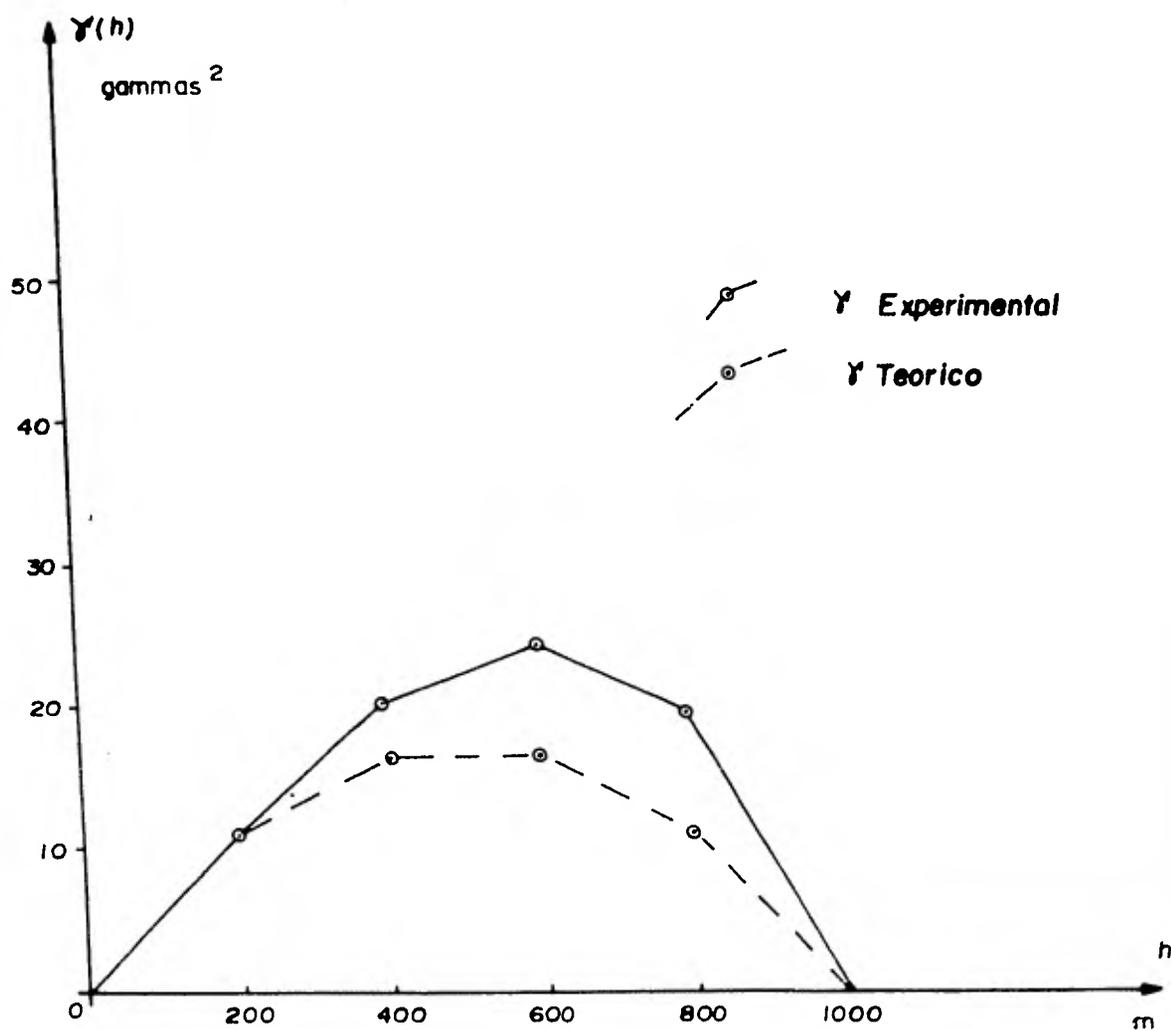


FIG. 19  
SEMIVARIOGRAMA DE RESIDUALES PARA UN DRIFT CUADRATICO  
Y VECINDAD DE 1000 m, EN DIRECCION E - W

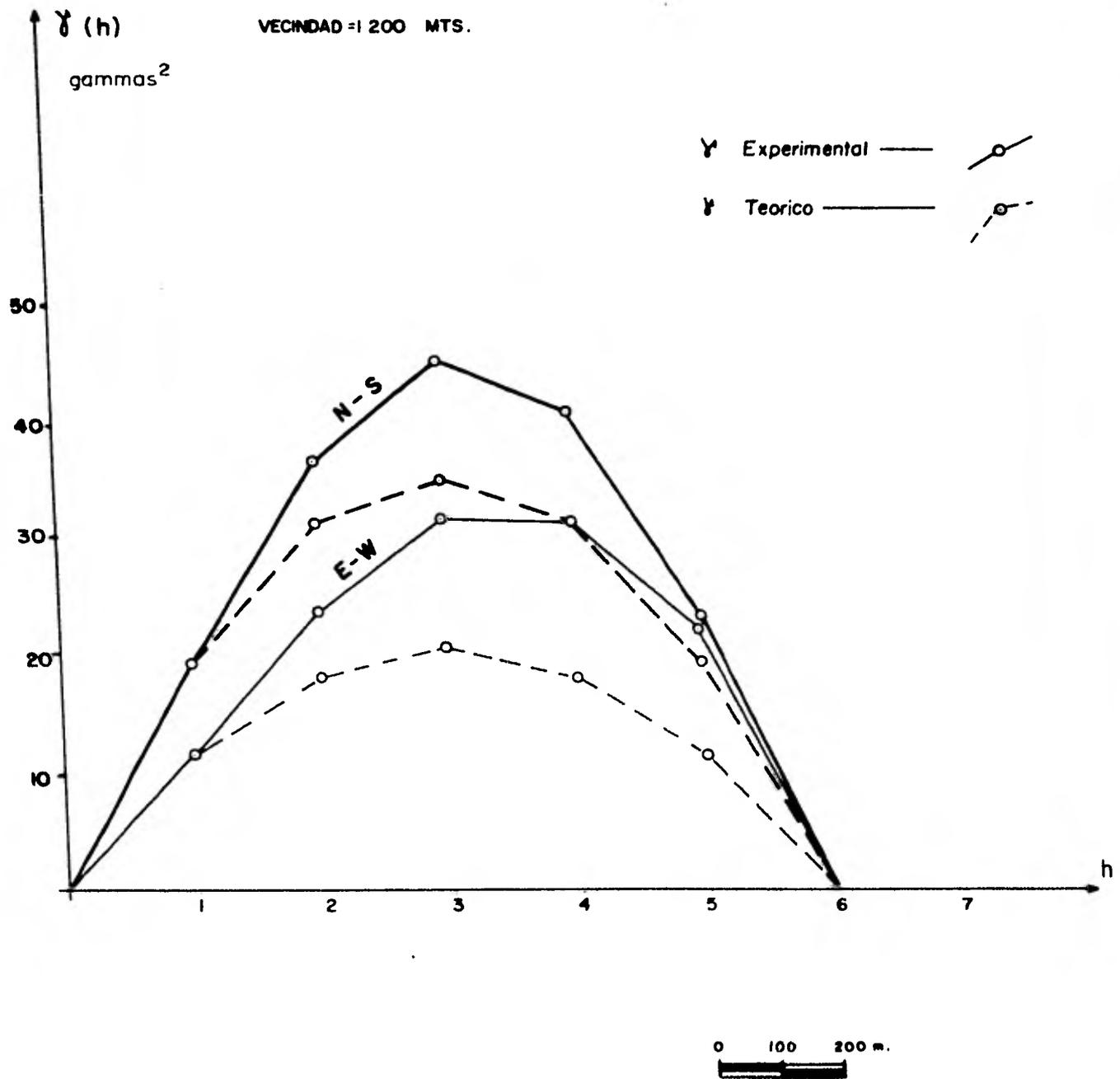


FIG. 20

SEMIVARIOGRAMA DE RESIDUALES PARA UN DRIFT LINEAL Y  
VECINDAD DE 1200 m, EN LAS DIRECCIONES N - S Y E - W

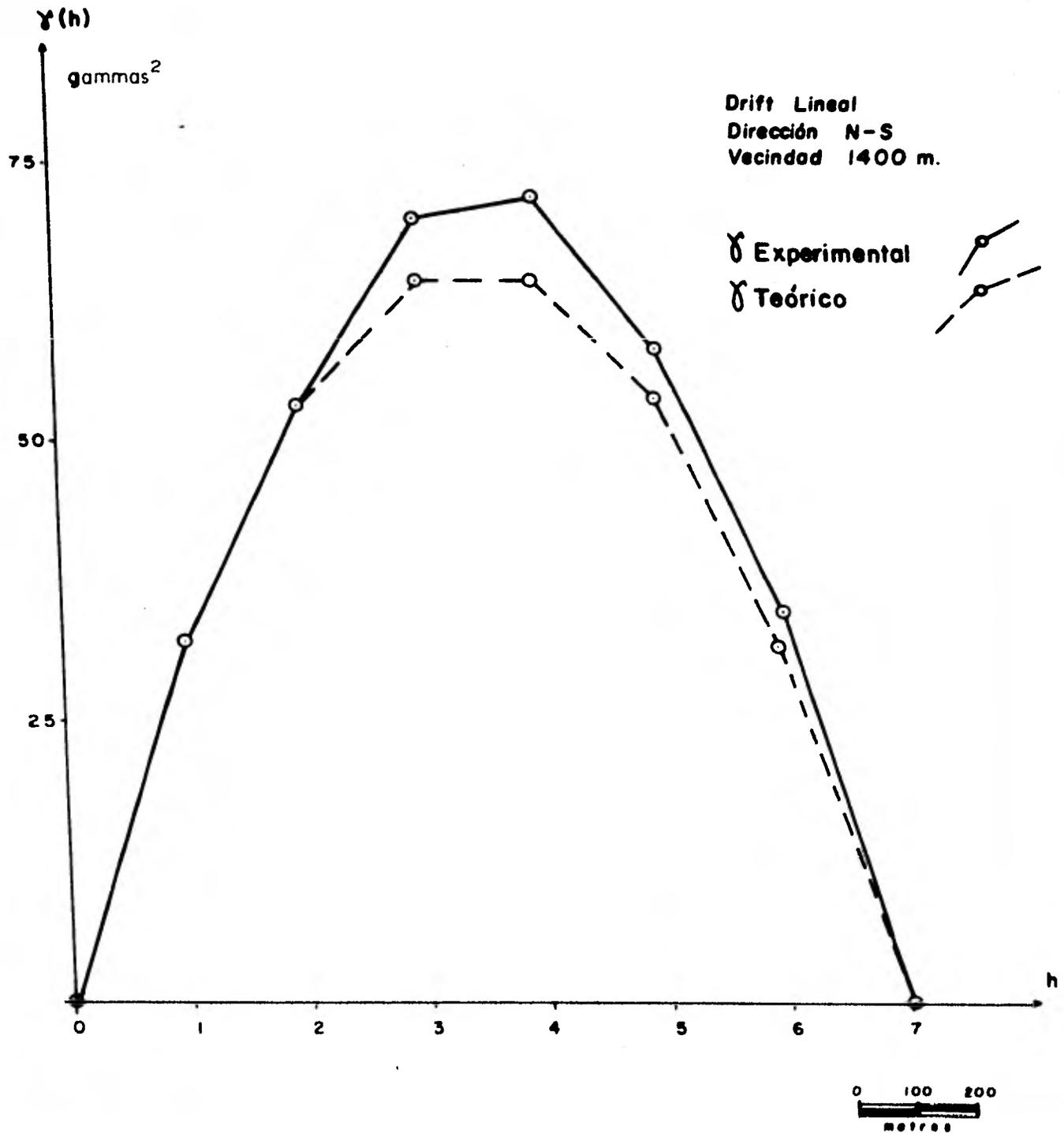


FIG. 21

MEJOR AJUSTE OBTENIDO ENTRE EL SEMIVARIOGRAMA EXPERIMENTAL  
 Y EL SEMIVARIOGRAMA TEORICO

las celdas (figura 12), ya que en las demás celdas los pesos asociados serían los mismos. De este modo se obtuvo una malla interpolada de la variable así como una malla asociada de desviaciones estándar que posteriormente se configuraron (figuras 22 y 23 respectivamente).

El mapa de la variable que se obtuvo es considerablemente diferente al calculado -- con kriging normal. Los puntos interpolados conservan el drift del fenómeno y ningún valor está sobre o sub-estimado en demasía. Como puede observarse el mapa de desviaciones estándar es repetitivo y simétrico con respecto al centro de cada celda, donde se encuentran las desviaciones estándar mayores.

Por último se llevó a cabo la interpolación empleando el método de relajación -- aprovechando que la disposición de los datos en forma equiespaciada y formando cuadros -- permitía emplear un programa muy rápido. El mapa interpolado resultante (figura 24) es -- prácticamente igual al obtenido por kriging universal, excepto por la forma del máximo de 220 gomas en la parte inferior central del mapa y en general por la mayor suavidad de los contornos.

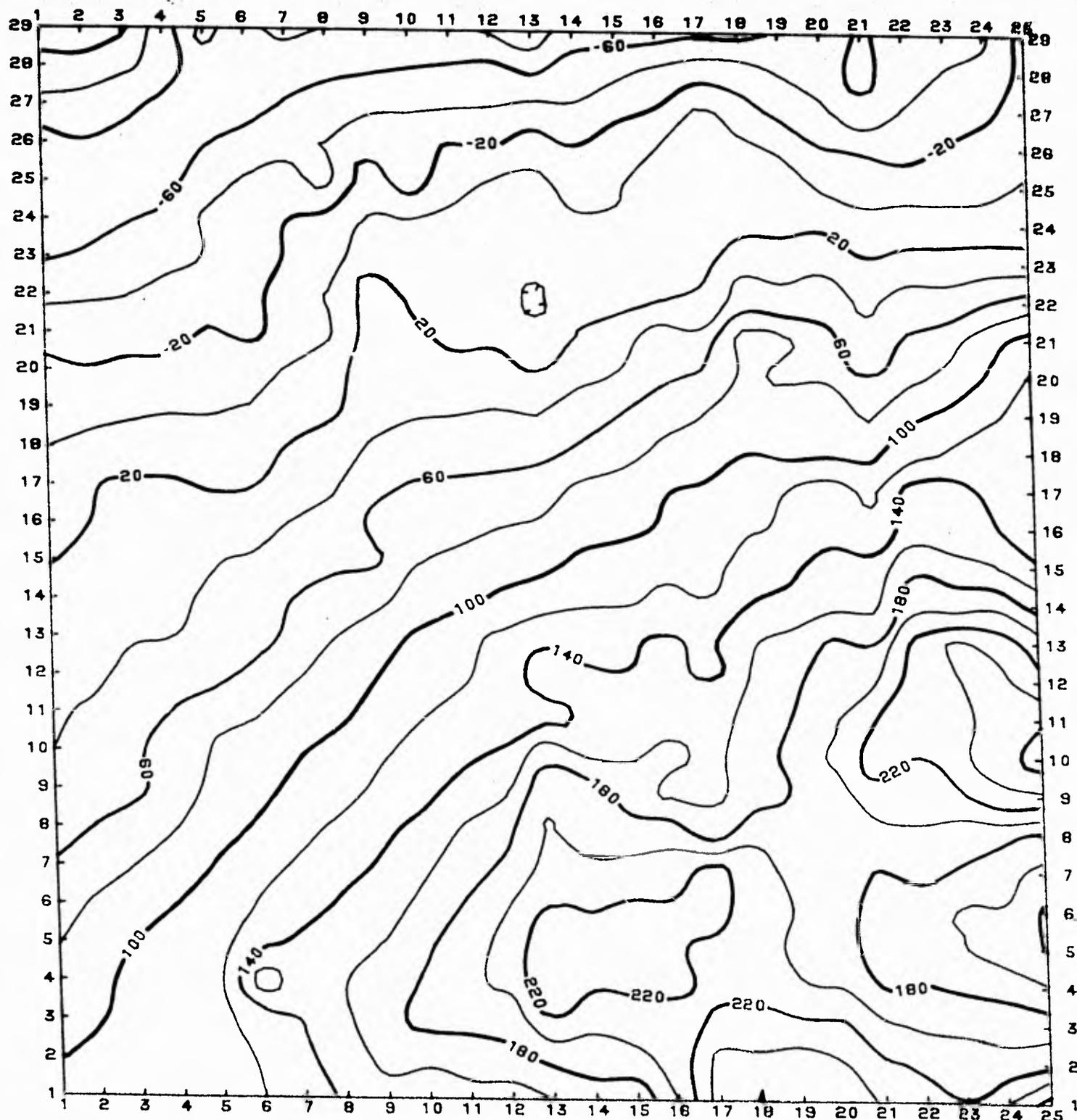


FIG. 22

MAPA CONFIGURADO POR COMPUTADORA EMPLEANDO KRIGING UNIVERSAL.  
INTERVALO DE CONFIGURACION : 20 GAMMAS

0 1 2 Km  
ESC

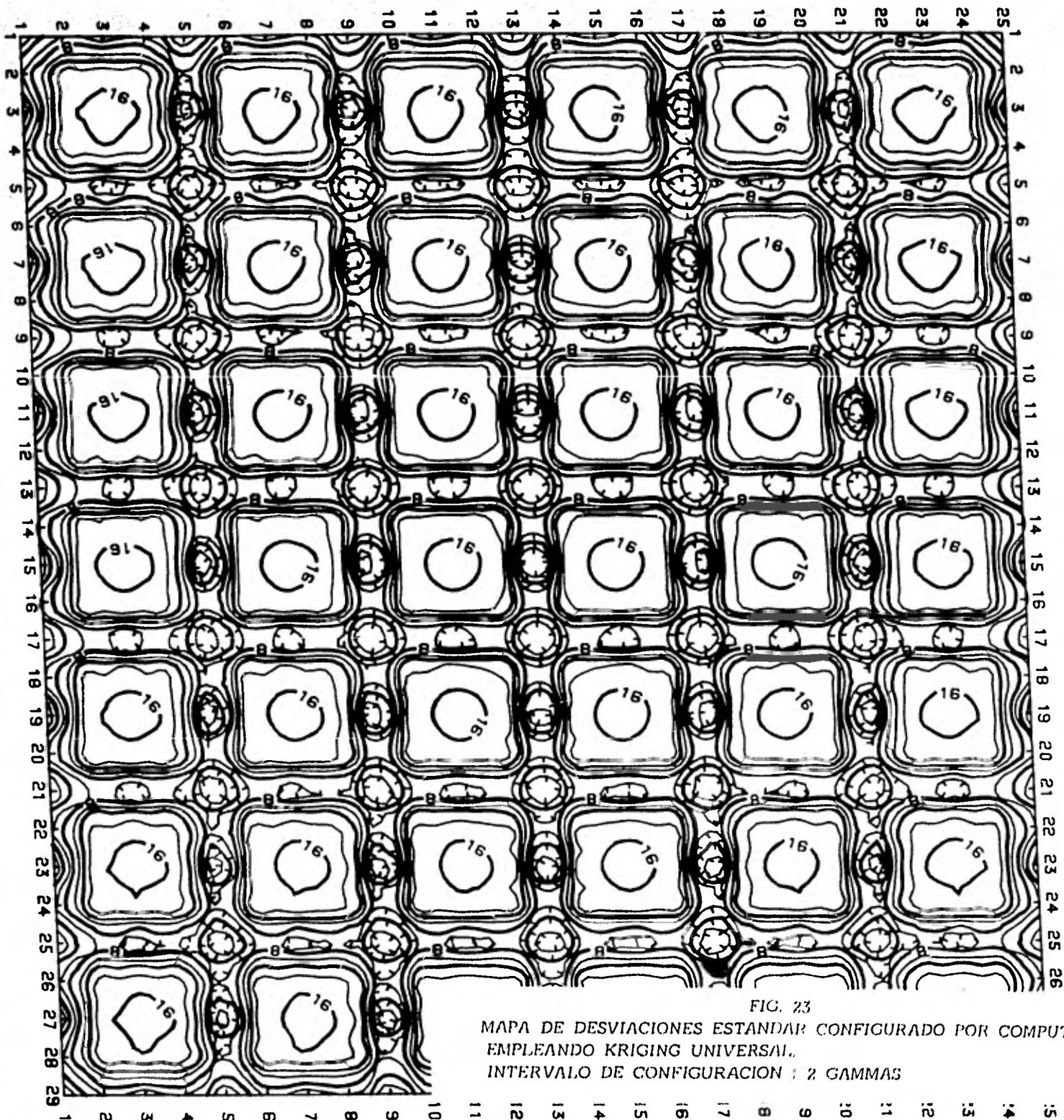
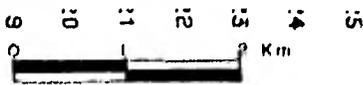


FIG. 23

MAPA DE DESVIACIONES ESTANDAR CONFIGURADO POR COMPUTADORA  
 EMPLEANDO KRIGING UNIVERSAL.  
 INTERVALO DE CONFIGURACION : 2 GAMMAS



ESC.

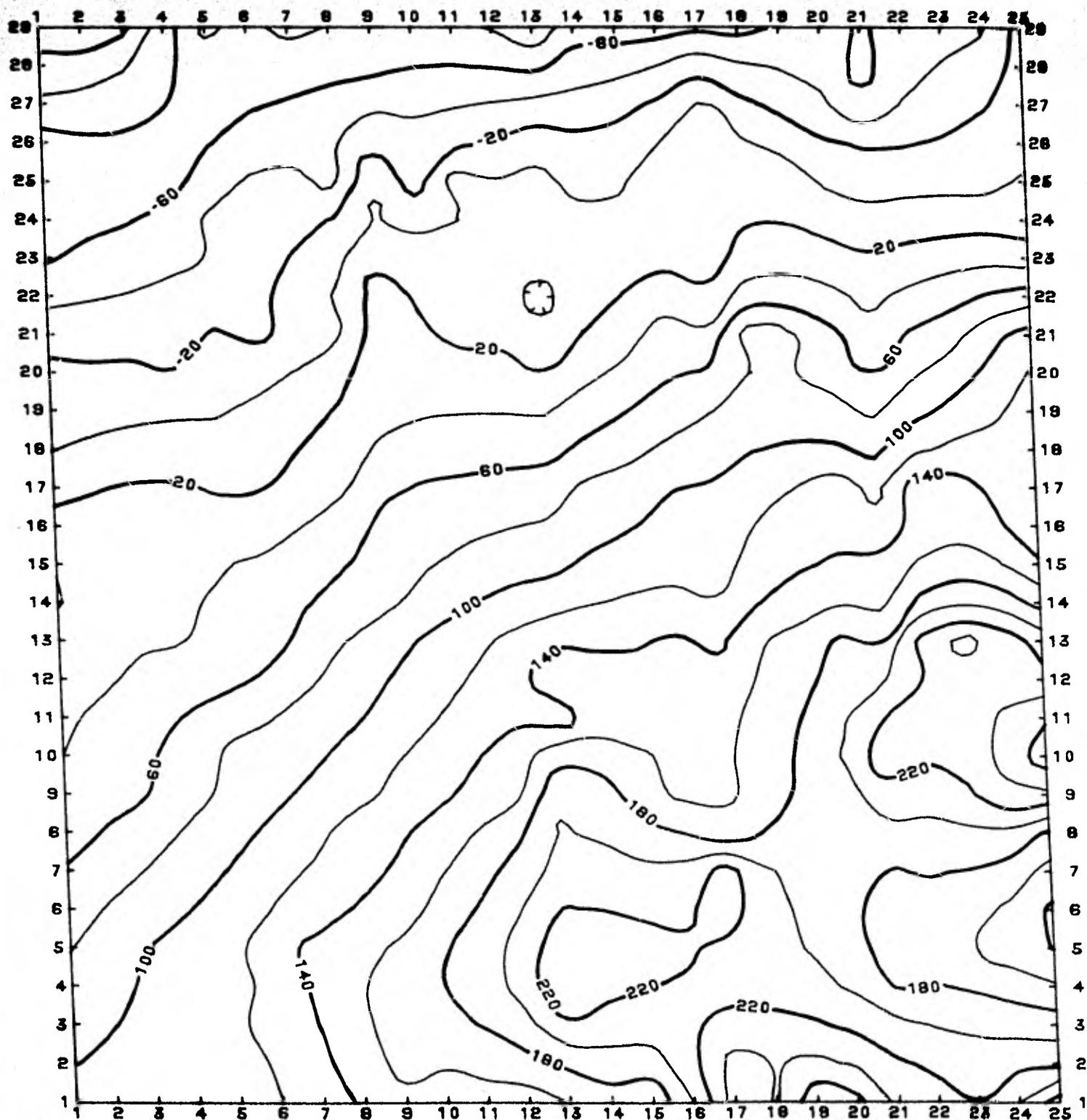


FIG. 24

MAPA CONFIGURADO POR COMPUTADORA UTILIZANDO EL METODO DE  
RELAJACION.  
INTERVALO DE CONFIGURACION : 20 GAMMAS



## ( B ) Configuración de tiempos de reflexión y de velocidades sísmicas

El primer problema consistió en generar una malla cuadrada regular a partir de la información de tiempos de reflexión disponible, 1681 datos (figura 25).

Tomando en cuenta algunos perfiles de tiempos de reflexión se considerará que el fenómeno tenía un drift lineal y de acuerdo a esta se procedió a calcular los modelos de covarianzas generalizadas. Con este propósito se quitaran 85 puntos dato (figura 26) y se estimaron por covarianzas generalizadas utilizando el modelo "arbitrario"  $|h|^{-3}$ . En la tabla 3 se muestran los valores estimados y los valores reales de los 85 puntos. El significado de cada columna es el siguiente:

IPO : índice del punto omitido

XX : abscisa del punto omitido

YY : coordenada del punto omitido

Z(3, IPO) : valor del punto omitido,  $Z_0$

ESTIMACION : valor del punto omitido calculado por kriging (covarianzas generalizadas) utilizando el modelo inicial,  $Z^* = \sum \lambda_i Z_i$

NW : número de muestras utilizadas para la estimación

ERROR : error de kriging,  $Z_0 - Z^*$

ERROR2 :  $(Z_0 - Z^*)^2$

VARIANZA : varianza de estimación,  $\sigma_k^2 = \text{var} [Z_0 - Z^*]$

Los primeros modelos obtenidos se presentan en la tabla 4 donde,

$$S_0 = X(\delta)$$

$$S_1 = Y(|h|)$$

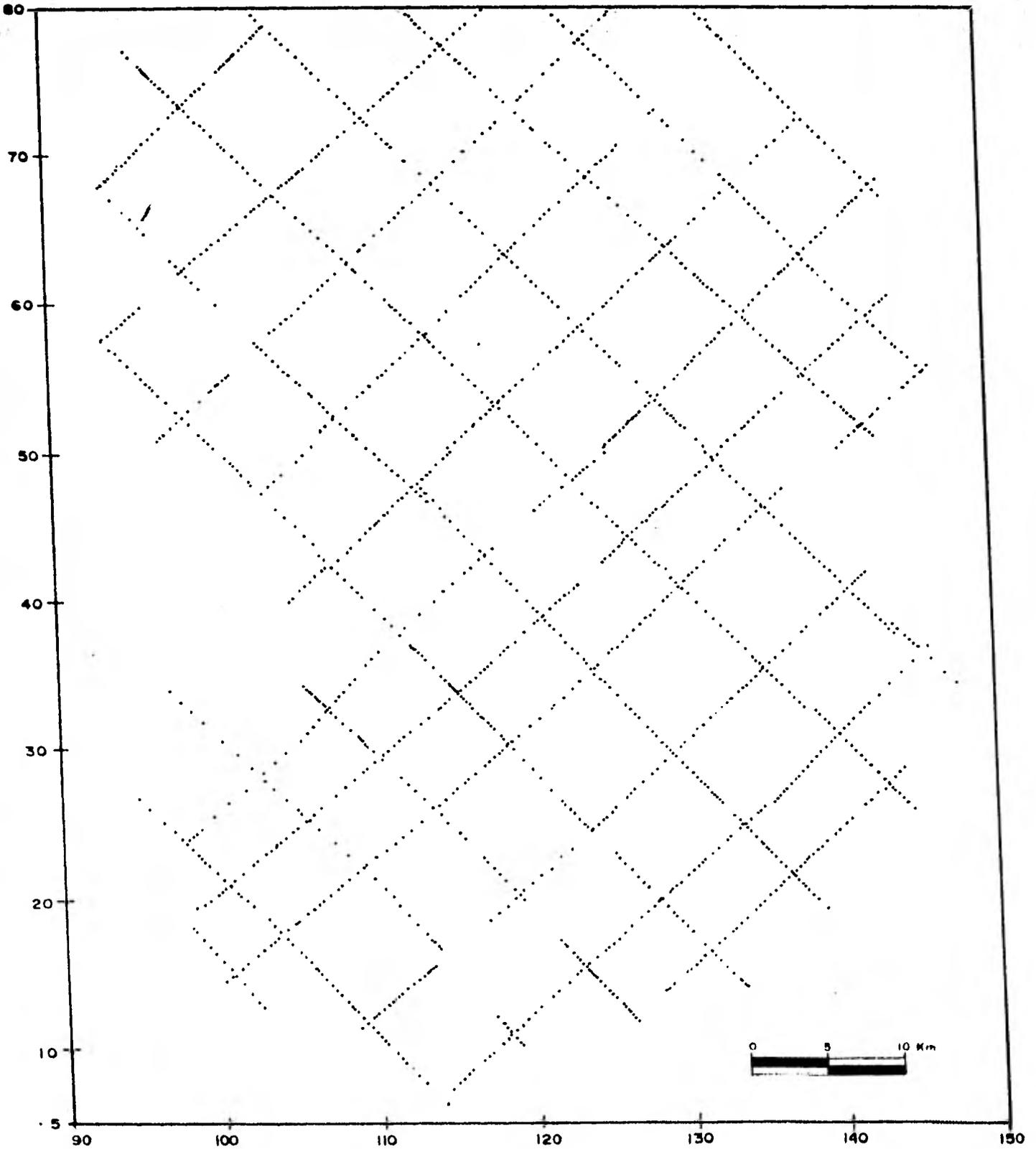


FIG. 25  
LOCALIZACION DE PUNTOS DE TIRO UTILIZADOS PARA GENERAR UN  
MAPA DE TIEMPOS DE REFLEXION.

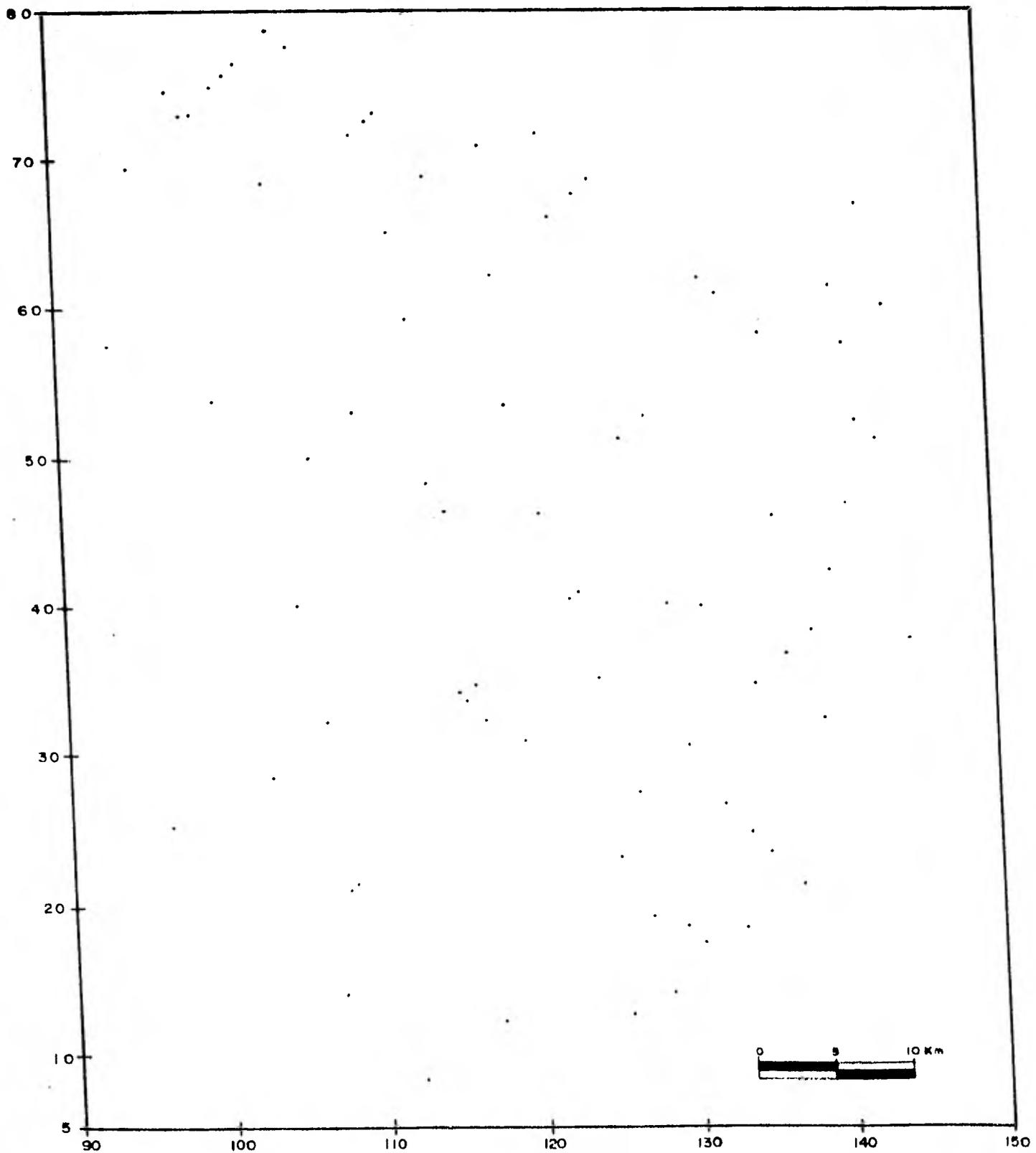


FIG. 26  
PUNTOS DATO RE-ESTIMADOS PARA OBTENER EL MEJOR MODELO DE  
COVARIANZA GENERALIZADA. 1a. OPCION

**TABLA 3**  
**ESTIMACION DE 85 PUNTOS DATO UTILIZANDO EL MODELO**  
**DE COVARIANZA GENERALIZADA (n)**

EL MODELO UTILIZADO ES EL SIGUIENTE

CO                    C1                    C2                    C3  
 .000000            .000000            1.000000            .000000

IFO	XX	YY	Z(3,140)	ESTIMACION	NW	ERROR	ERROR?	VARIANZA
1	92.4220	50.5040	3.7000	3.6552	9	-.0444	.002010	8.853153
21	95.5930	47.3130	3.8500	3.8410	10	-.0090	.000081	.079337
41	96.4980	24.8570	3.7200	3.0172	10	-.0029	.000008	.045459
61	97.2560	33.8500	3.5500	3.6270	8	-.0700	.000900	.198244
81	98.0520	18.0210	2.7500	2.7269	10	-.0231	.000533	.028394
101	98.5720	32.6000	3.4000	3.3861	17	-.0139	.000192	.020304
121	99.2010	27.4280	3.1200	3.1386	15	.0186	.000346	.099171
141	99.9470	23.4990	3.0200	3.0614	12	.0414	.001716	.229754
161	100.6140	42.6740	3.8300	3.6377	8	.0077	.000059	.072621
181	101.2600	57.6180	4.0400	4.0408	12	.0008	.000001	.089464
201	101.8630	46.7540	3.7700	3.7670	4	-.0010	.000001	.180689
221	102.4640	56.4770	4.0600	3.9746	17	-.1054	.000001	.076605
241	102.9590	63.7580	3.5500	3.5457	10	-.0043	.000018	.031953
261	103.4870	48.3530	3.7500	3.7280	12	-.0220	.000485	.261752
281	104.0870	39.0900	3.1100	3.0518	10	-.0582	.003390	.060641
301	104.5870	26.7340	2.5100	3.5089	17	-.0011	.000001	.128427
321	105.0000	61.5580	3.7000	3.6770	16	-.0230	.000530	.011991
341	105.6220	50.3550	3.7500	3.9274	11	.1774	.031458	.076466
361	106.2130	60.2350	3.8500	3.8679	13	.0109	.000119	.022311
381	106.7940	66.6870	3.6000	3.6043	13	.0047	.000018	.101848
401	107.2490	24.0970	3.5500	3.4971	17	-.0529	.002800	.048051
421	107.8410	58.3790	3.4400	3.4433	12	.0033	.000011	.017661
441	108.3230	23.0610	3.3000	3.3329	12	.00329	.001083	.057201
461	108.9200	45.1350	3.8000	3.8038	10	.0038	.000015	.408714
481	109.4850	67.6520	3.5100	3.5078	13	-.0027	.000005	.171095
501	109.9960	54.5170	3.2700	3.2245	11	-.0455	.002066	.146344
521	110.5420	66.5280	3.5700	3.5700	16	.0500	.002499	.089426
541	111.0760	45.0510	3.7200	3.7306	14	.0190	.000759	.066625
561	111.5790	71.0300	3.4500	3.4594	11	.0094	.000089	.049049
581	112.1670	37.2440	2.7900	2.8052	17	.0152	.0000731	.050196
601	112.7790	65.8680	3.4000	3.4095	11	.0095	.000091	.175370
621	113.3310	57.6600	3.1400	3.1644	8	.0244	.000098	.140741
641	113.7800	33.8670	3.5000	3.3471	8	-.1520	.023391	.021709
661	114.2460	72.4800	2.6000	2.6136	8	.0136	.000186	.009347
681	114.6800	61.9630	3.8600	3.8082	11	-.0518	.002683	.353084
701	115.1600	16.3670	3.0500	3.0468	13	-.0032	.000010	.002715
721	115.6400	49.9480	3.0400	3.0263	10	-.0137	.000188	.074108
741	116.1850	17.3770	2.8000	2.8086	12	.0086	.000074	.156493
761	116.7420	44.1990	3.3300	3.3225	13	-.0075	.000056	.079625
781	117.2630	44.6880	3.2000	3.1953	12	-.0047	.000027	.055951
801	117.7920	18.9600	2.7600	2.7816	6	.0016	.000003	.084171
821	118.2940	13.2520	3.0000	2.9861	12	-.0139	.000192	.044721
841	119.1010	38.9550	3.7300	3.7004	10	-.0296	.000875	.623838
861	119.7960	20.9620	2.8800	2.9160	17	.0760	.001294	.124629
881	120.6140	54.1200	2.8400	2.8781	11	.0381	.001452	.320697
901	121.1550	31.8060	3.4000	3.3994	10	-.0006	.000000	.016866
921	121.6630	22.8520	3.7400	3.2618	17	.0418	.001745	.119270
941	122.1820	14.0530	2.8600	2.8749	17	-.0051	.000026	.574263
961	122.5910	72.5190	2.4200	2.3763	8	-.0437	.001914	1.129263
981	123.0350	52.8250	2.7800	2.7847	16	.0047	.000022	.018699
1001	123.6300	50.4600	3.0300	3.0249	11	-.0051	.000026	.069061

1021	124.2480	51.4530	2.2400	2.9442	11	.0042	.000018	.014859
1041	124.6670	50.9450	3.1000	3.1059	14	.0059	.000035	.005949
1061	125.2060	50.6150	3.4600	3.6312	11	.1712	.029325	.282488
1081	125.7890	16.1650	3.1100	3.1956	11	.0056	.007322	.746975
1101	126.3060	36.8350	3.2800	3.3067	12	.0267	.0000715	.061476
1121	126.7330	5.1520	.0500	.0002	9	-.0498	.002483	.822669
1141	127.3130	25.7740	3.2800	3.3061	12	.0061	.000038	.063693
1161	127.7940	76.8470	2.3400	2.3377	9	-.0023	.000005	.230522
1181	128.2910	19.5500	2.0200	2.9488	9	.0288	.000030	.266732
1201	128.9020	11.9230	2.3400	2.7420	10	.0020	.000004	.141357
1221	129.4250	12.4390	2.4100	2.4132	9	.0032	.000010	.002852
1241	129.9580	55.1240	2.7100	2.7061	11	-.0039	.000015	.112772
1261	130.5050	13.2460	2.6600	2.5448	10	-.1152	.013278	.304033
1281	130.9840	32.0510	3.4200	3.3666	10	-.0532	.002429	.706215
1301	131.7780	63.7000	3.4500	3.7366	10	.1866	.034832	.217762
1321	132.2530	64.1210	3.5000	3.4045	11	-.0157	.0000239	.071110
1341	132.8050	71.1240	3.3300	3.7457	9	.0157	.0000246	.075340
1361	133.3680	52.0550	3.0000	2.9549	12	-.0051	.000026	.206516
1381	133.9770	25.1690	3.3900	3.7776	10	-.0122	.000150	.361228
1401	134.3710	7.4790	1.7500	.9540	10	-.0960	.009214	.115672
1421	134.9890	45.0970	3.3100	3.2717	10	-.0383	.001468	.353870
1441	135.6910	6.7870	.6700	.6764	9	.0064	.000041	.018146
1461	136.2900	16.5580	2.7900	2.7235	10	-.0665	.004417	.153079
1481	136.9980	56.8390	3.0500	3.5914	10	.5414	.293105	.252698
1501	137.8730	9.0910	1.2400	1.0390	9	-.0020	.000004	.027495
1521	138.6000	9.2320	1.7400	1.3326	10	-.0074	.000055	.061320
1541	139.4170	10.1350	1.4900	1.4707	11	-.0113	.000127	.181609
1561	140.0190	31.2490	3.2000	3.2050	12	.0050	.000025	.065702
1581	140.7740	11.6580	1.7500	1.6944	12	-.0556	.003088	.049908
1601	141.4400	12.0710	1.6000	1.6017	12	.0017	.000003	.066563
1621	142.7090	10.4800	1.4500	1.4058	11	-.0042	.001951	.034566
1641	143.5400	59.0520	3.1200	3.1103	8	-.0097	.000095	.926356
1661	144.5560	15.5930	2.5000	2.4956	10	-.0042	.000018	.063676
1681	146.5940	27.5300	2.9500	2.9679	8	-.0071	.000050	.026598

TABLA 3 (CONTINUACION)



$$S_2 = U(\bar{h})^3$$

$$S_3 = W(\bar{h})^5$$

$$R_{x1} = \sum_{r=1}^3 (T_r - X_r C_0 - Y_r C_1 - U_r C_2 - W_r C_3)^2$$

$$EPP = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Z_i - Z_i^*|$$

$$ECM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i - Z_i^*)^2$$

$$ECS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(Z_i - Z_i^*)^2}{\sigma_x^2}$$

$$RMEDIA = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i$$

$$RMEST = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^*$$

$$VARR = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i - RMEDIA)^2$$

$$VAREST = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i^* - RMEST)^2$$

$$CORR = \text{coeficiente de correlación} = \frac{\text{covarianza}(Z, Z^*)}{\sqrt{VARR * VAREST}}$$

Todos los modelos calculados se muestran en la tabla 5. En general los modelos - del tipo  $C_1 \bar{h} + C_2 \bar{h}^3$  son mejores (error cuadrático mínimo, error cuadrático estandarizado más cercano a uno, máxima correlación, etc.) que los del tipo  $C_0 + C_1 \bar{h} +$

TABLA 5

Quince modelos correspondientes a la primera opción

No.	Co	Modelo C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	RMEDIA	RMEST	VARR	VAREST	EPP	ECS	ECM	CORR	R <sub>x1</sub>
1	0.0	0.0	1.0	3.0264	3.0298	.53941	.55686	.036	.044	.0059	.9947	54.19
2	.4320E-3	0.0	.2714E-2	3.0264	3.0269	.53941	.55324	.033	7.208	.0057	.9949	.0779
3	.1933E-2	0.0	.1271E-2	3.0264	3.0254	.53941	.54862	.036	4.168	.0050	.9954	.0509
4	.1458E-2	0.0	.2324E-2	3.0264	3.0265	.53941	.55102	.033	3.757	.0050	.9955	.0601
5	0.0	-.4186E-2	.1867E-2	3.0264	3.0272	.53941	.55299	.033	1.908	.0052	.9953	.0696
6	.1165E-2	0.0	.2861E-2	3.0264	3.0278	.53941	.55187	.032	3.954	.0051	.9954	.0655
7	0.0	-.4888E-2	.1854E-2	3.0264	3.0271	.53941	.55271	.033	1.651	.0052	.9953	.0686
8	.1926E-2	0.0	.1196E-2	3.0264	3.0253	.53941	.54843	.036	4.297	.0050	.9954	.0504
9	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	3.0248	.53941	.54832	.032	1.077	.0049	.9955	.0602
10	.1393E-2	0.0	.2571E-2	3.0264	3.0266	.53941	.55133	.033	3.706	.0050	.9955	.0618
11	0.0	-.6227E-2	.1155E-2	3.0264	3.0266	.53941	.55145	.032	1.341	.0050	.9955	.0655
12	.1955E-2	0.0	.1159E-2	3.0264	3.0252	.53941	.54828	.036	4.327	.0051	.9954	.0500
13	0.0	-.8027E-2	.2054E-3	3.0264	3.0268	.53941	.55202	.032	1.026	.0051	.9954	.0672
14	.2124E-2	0.0	.8972E-3	3.0264	3.0246	.53941	.54710	.039	4.696	.0052	.9952	.0473
15	0.0	-.7439E-2	.3338E-3	3.0264	3.0255	.53941	.54934	.032	1.171	.0049	.9956	.0618

$C_2 \bar{h}l^3$ . De acuerdo a criterios ya señalados (ver capítulo IV) el "mejor" modelo de covarianza generalizada es:  $-.8228 \times 10^{-2} \bar{h}l + .1229 \times 10^{-3} \bar{h}l^3$ . Este modelo se utilizó para construir la tabla 6 (valores estimados y valores reales de los 85 puntos). La figura 27 indica la secuencia que se siguió para la obtención de los modelos, donde cada número indica el número de modelo de covarianza generalizada de acuerdo a la tabla 5.

Sin soslayar el hecho de que gran parte de los datos a lo largo de los tendidos -- sísmicos están muy cercanos unos de los otros, las estimaciones fueron bastante aceptables. En el proceso de estimación se observó que éste dependía casi totalmente de los dos datos más cercanos al punto a estimar. En la estimación, un radio efectivo mucho menor al rango podría ser empleado en interpolaciones en puntos aislados. Por ello, el "mejor" modelo de covarianza generalizada obtenido,  $-.8228 \times 10^{-2} \bar{h}l + .1229 \times 10^{-3} \bar{h}l^3$ , no se consideró como el más representativo por el momento.

Consecuentemente, se decidió crear una segunda opción: eliminar información muy cercana al punto estimado (figura 28). En este caso se eligió un radio igual a dos veces el espaciamiento entre datos (.6 kms.). Con esto se logró un modelo más representativo, al menos intuitivamente, para la interpolación en áreas con datos distribuidos a lo largo de líneas, como es el caso de los trabajos geofísicos.

Se utilizaron los mismos puntos dato para re-estimarse, sin embargo, no fué posible encontrar modelos de covarianza generalizada debido a que ninguno cumplía con las condiciones establecidas en la tabla 1. Esto hizo necesario que se utilizarán puntos dato diferentes a los de la figura 26. Los modelos resultantes de esta nueva opción aparecen en la tabla 7. Nuevamente se observa que los modelos del tipo  $C_1 \bar{h}l + C_2 \bar{h}l^3$  son considerablemente mejores que los del tipo  $C_0 + C_1 \bar{h}l + C_2 \bar{h}l^3$ . En la figura 30 se mues

TABLA 6  
VALORES REALES Y VALORES ESTIMADOS UTILIZANDO EL MODELO  
DE COVARIANZA GENERALIZADA,  $-0.8228 E-2 |h| + 0.1229 E-3 |h|^3$

EL MODELO UTILIZADO ES EL SIGUIENTE

CO                    C1                    C2                    C3  
.000000            -.0008228            .000123            .000000

IPO	XX	YY	Z(3,IPO)	ESTIMACION	NW	ERROR	ERROR2	VARIANZA
1	92.4220	50.5040	3.7000	3.7683	9	.0683	.004667	.025552
21	95.5930	47.3130	3.8500	3.8389	17	-.0111	.000123	.003706
41	96.4980	24.8570	3.0200	3.0192	10	-.0008	.000001	.002801
61	97.2560	33.8500	3.6500	3.6397	8	-.0103	.000105	.006646
81	98.0520	18.0210	2.7500	2.7427	10	-.0073	.000053	.002543
101	98.5720	32.6000	3.4000	3.4045	12	.0045	.000020	.002229
121	99.2010	27.4280	3.1200	3.1294	15	.0094	.000087	.003862
141	99.9470	23.4990	3.0200	3.0180	12	-.0020	.000004	.005356
161	100.6140	42.6740	3.8300	3.8398	8	.0098	.000095	.003567
181	101.2600	52.6180	4.0400	4.0465	12	.0065	.000042	.003534
201	101.8830	46.7540	3.7700	3.7888	8	.0188	.000354	.004953
221	102.4640	56.4730	4.0800	3.9680	13	-.1120	.012541	.003527
241	102.9590	63.7580	3.5500	3.5542	10	.0042	.000018	.002792
261	103.4870	48.3530	3.7500	3.7505	12	.0005	.000000	.005758
281	104.0870	39.0900	3.1100	3.0288	10	-.0812	.006598	.003326
301	104.5870	26.7340	3.5100	3.4974	12	-.0126	.000160	.004556
321	105.0000	61.5580	3.7000	3.6627	16	-.0173	.000300	.001843
341	105.6220	50.3550	3.7500	3.7537	11	.0037	.000013	.003700
361	106.2130	60.2350	3.8500	3.8592	13	.0092	.000084	.002193
381	106.7940	66.6800	3.6000	3.6181	13	.0181	.000326	.004078
401	107.2490	24.0970	3.5500	3.4827	12	-.0673	.004534	.003027
421	107.8410	58.3790	3.4400	3.4461	12	.0061	.000037	.002139
441	108.3230	23.0610	3.3000	3.3493	12	.0493	.002432	.003387
461	108.9200	45.1350	3.8000	3.7865	10	-.0135	.000184	.006756
481	109.4850	67.6520	3.5100	3.5179	13	.0079	.000063	.004876
501	109.9960	54.5170	3.2700	3.2179	11	-.0521	.002718	.004273
521	110.5420	66.5280	3.5200	3.5628	16	.0428	.001835	.003992
541	111.0760	45.0510	3.7200	3.7206	14	.0006	.000000	.003522
561	111.5790	71.0300	3.4500	3.4492	11	-.0008	.000001	.002484
581	112.1670	32.3440	2.7900	2.8293	12	.0393	.001545	.003209
601	112.7790	65.8880	3.4000	3.3681	11	-.0319	.001020	.004801
621	113.3310	57.6800	3.1400	3.1584	9	.0184	.000338	.004303
641	113.7800	33.8870	3.5000	3.3166	8	-.1834	.033620	.002334
661	114.2460	72.4800	2.6000	2.6099	8	.0099	.000098	.001766
681	114.6800	61.9630	3.8600	3.7009	11	-.1591	.025298	.005862
701	115.1600	16.3670	3.0500	3.0446	13	-.0054	.000029	.000832

721	115.6400	49.9480	3.0400	3.0354	10	-.0046	.000021	.003432
741	116.1850	17.3770	2.8000	2.8267	17	.0287	.000826	.004720
761	116.7420	44.1990	3.3300	3.3279	13	-.0021	.000004	.003340
781	117.3630	44.6880	3.2000	3.1590	12	-.0010	.000001	.003009
801	117.7920	18.9600	2.7800	2.7842	8	.0042	.000018	.003525
821	118.3940	13.2520	3.0000	3.0028	17	.0028	.000008	.002589
841	119.1010	38.9550	3.7300	3.6657	17	-.0643	.004131	.007579
861	119.7960	20.9620	2.8000	2.9264	10	.0064	.002158	.004482
881	120.6140	54.1290	2.8400	2.8462	11	.0062	.000038	.006243
901	121.1550	31.6060	3.4000	3.4007	17	.0007	.000000	.001940
921	121.6630	22.8520	3.2400	3.2416	12	.0016	.000002	.004142
941	122.1820	14.0530	2.8000	2.9019	12	.0219	.000478	.007378
961	122.5910	72.9190	2.4200	2.3570	8	-.0630	.003964	.015744
981	123.0350	52.8250	2.7800	2.7862	16	.0062	.000038	.001929
1001	123.6300	50.4600	3.0300	3.0334	11	.0734	.000011	.003486
1021	124.2460	51.4530	2.9400	2.9470	11	.0070	.000049	.001959
1041	124.6670	50.9450	3.1000	3.1057	14	.0057	.000033	.001565
1061	125.2060	38.8150	3.4600	3.6038	11	.1438	.020687	.005676
1081	125.7890	16.1650	3.1000	3.1596	11	.0096	.002462	.008509
1101	126.3060	36.8350	3.2800	3.3080	12	.0280	.000784	.003412
1121	126.7330	5.1520	.8500	.8267	9	-.0233	.000544	.000905
1141	127.3130	25.7740	3.3800	3.3902	17	.0102	.000103	.003500
1161	127.7940	76.8470	2.3400	2.3561	9	.0161	.000258	.005083
1181	128.2910	19.9500	2.9200	2.9506	9	.0306	.000938	.005538
1201	128.9020	11.9230	2.3400	2.3340	17	-.0060	.000037	.004498
1221	129.4250	12.4380	2.4100	2.4105	8	.0705	.000000	.000845
1241	129.9580	55.1240	2.7100	2.7323	11	.0223	.000478	.004239
1261	130.5050	13.3460	2.6600	2.6540	17	-.1130	.012798	.005830
1281	130.9840	32.0510	3.4200	3.4145	17	-.0055	.000030	.000180
1301	131.7780	63.7000	3.4500	3.4446	10	-.0054	.000030	.005446
1321	132.2530	64.1210	3.5000	3.4776	11	-.0224	.000500	.003678
1341	132.8050	71.1240	3.3300	3.3300	9	-.0000	.000000	.003521
1361	133.3680	52.9550	3.0000	2.9886	12	-.0114	.000130	.005373
1381	133.8770	35.1880	3.3900	3.3625	17	-.0075	.000056	.005694
1401	134.3710	7.4780	1.0500	.9493	10	-.1007	.010150	.004140
1421	134.9890	45.0970	3.3100	3.2499	17	-.0601	.003610	.005654
1441	135.6910	6.3820	.6700	.6735	9	.0035	.000012	.001902
1461	136.2900	16.5980	2.7900	2.7698	17	-.0002	.000000	.004531
1481	136.9980	56.6390	3.0500	3.0546	17	.4946	.244621	.005000
1501	137.8730	8.5910	1.0400	1.0391	9	-.0009	.000001	.001988
1521	138.6000	9.3320	1.3400	1.3135	10	-.0265	.000701	.003520
1541	139.4170	10.1350	1.4900	1.4643	11	-.0257	.000661	.005117
1561	140.0190	31.3480	3.2000	3.2111	17	.0111	.000123	.003565
1581	140.7740	11.9580	1.7500	1.6948	12	-.0552	.003051	.003082
1601	141.4400	12.0710	1.6000	1.6099	12	.0099	.000099	.003555
1621	142.3090	10.4500	1.4500	1.4193	11	-.0307	.000942	.002800
1641	143.5400	59.9520	3.1200	3.1183	8	-.0017	.000007	.008909
1661	144.9560	15.5930	2.5000	2.4957	10	-.0043	.000018	.003307
1681	146.5940	27.5300	2.9900	2.9810	8	-.0090	.000081	.002064

TABLA 6 (CONTINUACION)

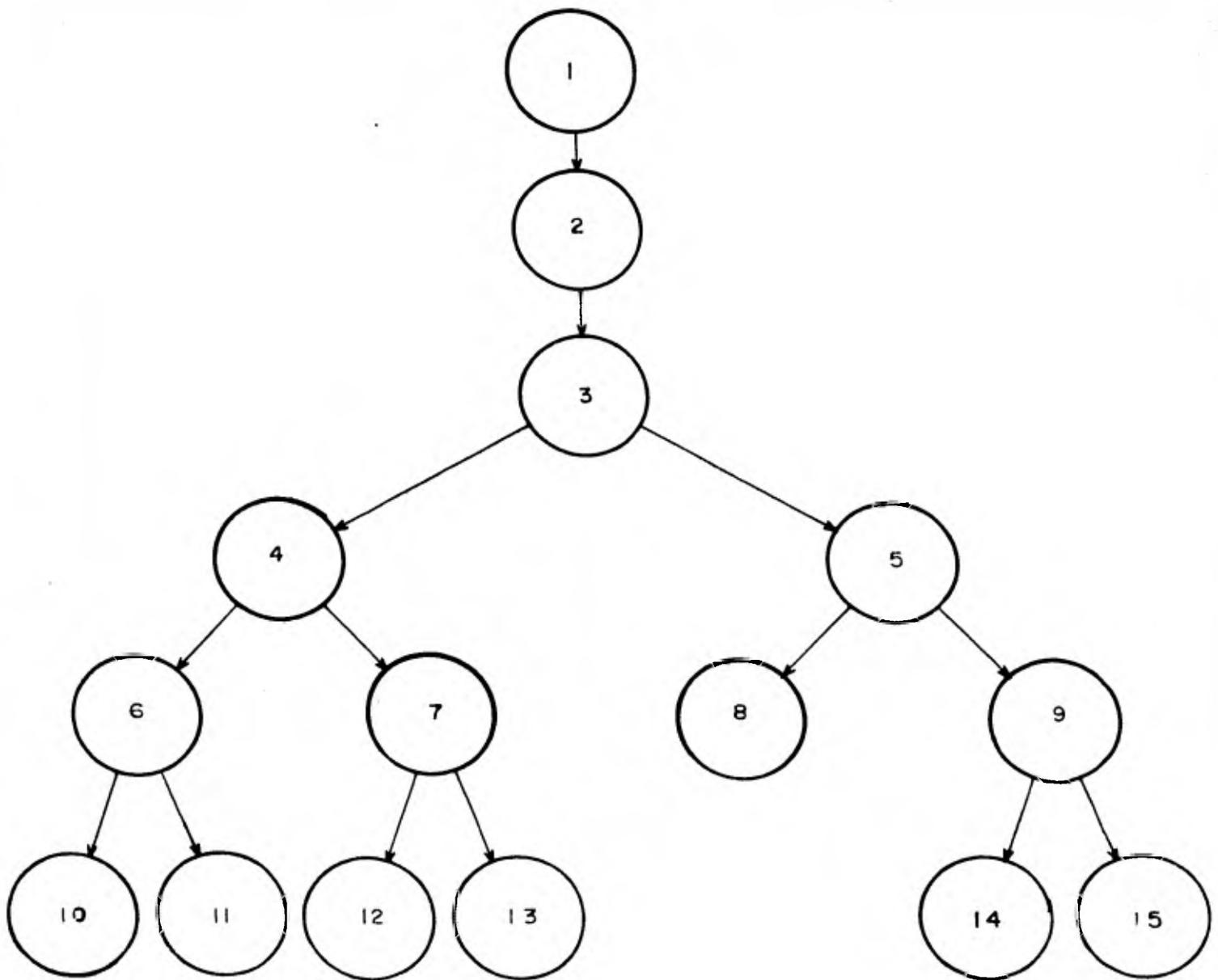
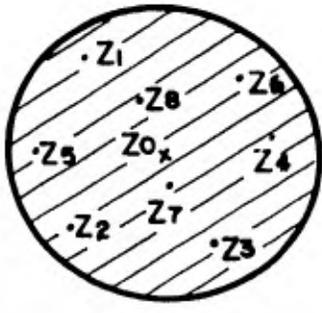
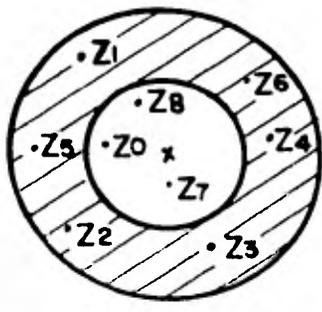


FIG. 27

SECUENCIA DE OBTENCION DE MODELOS DE COVARIANZA GENERALIZADA  
CORRESPONDIENTES A LA ESTIMACION DE 85 PUNTOS DATO



a)



b)

FIG. 28  
ZONA DE INFLUENCIA CONSIDERADA (RAYADA) PARA LA  
ESTIMACION DE  $Z_0$

- a) primera opción
- b) segunda opción

TABLA 7

Nueve modelos correspondientes a la segunda opción

No.	Co	Modelo C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	RMEDIA	RREST	VARR	VAREST	EPP	ECS	ECM	CORR	Rx <sub>1</sub>
1	0.0	0.0	1.0	3.0551	3.0621	.36061	.35836	.067	.014	.0099	.9863	262.6
2	.2058E-3	0.0	.3114E-2	3.0551	3.0603	.36061	.35844	.064	3.187	.0090	.9875	.0365
3	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0556	.36061	.34865	.056	1.301	.0066	.9909	.0284
4	.4084E-4	0.0	.1235E-2	3.0551	3.0612	.36061	.35879	.065	9.108	.0093	.9871	.0417
5	0.0	-.3266E-2	.3696E-3	3.0551	3.0563	.36061	.35191	.057	1.736	.0067	.9907	.0256
6	0.0	-.2483E-2	.9703E-3	3.0551	3.0576	.36061	.35510	.060	1.959	.0073	.9899	.0240
7	0.0	-.2465E-2	.1212E-2	3.0551	3.0579	.36061	.35561	.061	1.891	.0074	.9896	.0243
8	0.0	-.2619E-2	.1188E-2	3.0551	3.0578	.36061	.35543	.061	1.808	.0074	.9897	.0241
9	0.0	-.2560E-2	.1199E-2	3.0551	3.0578	.36061	.35550	.061	1.838	.0074	.9897	.0242

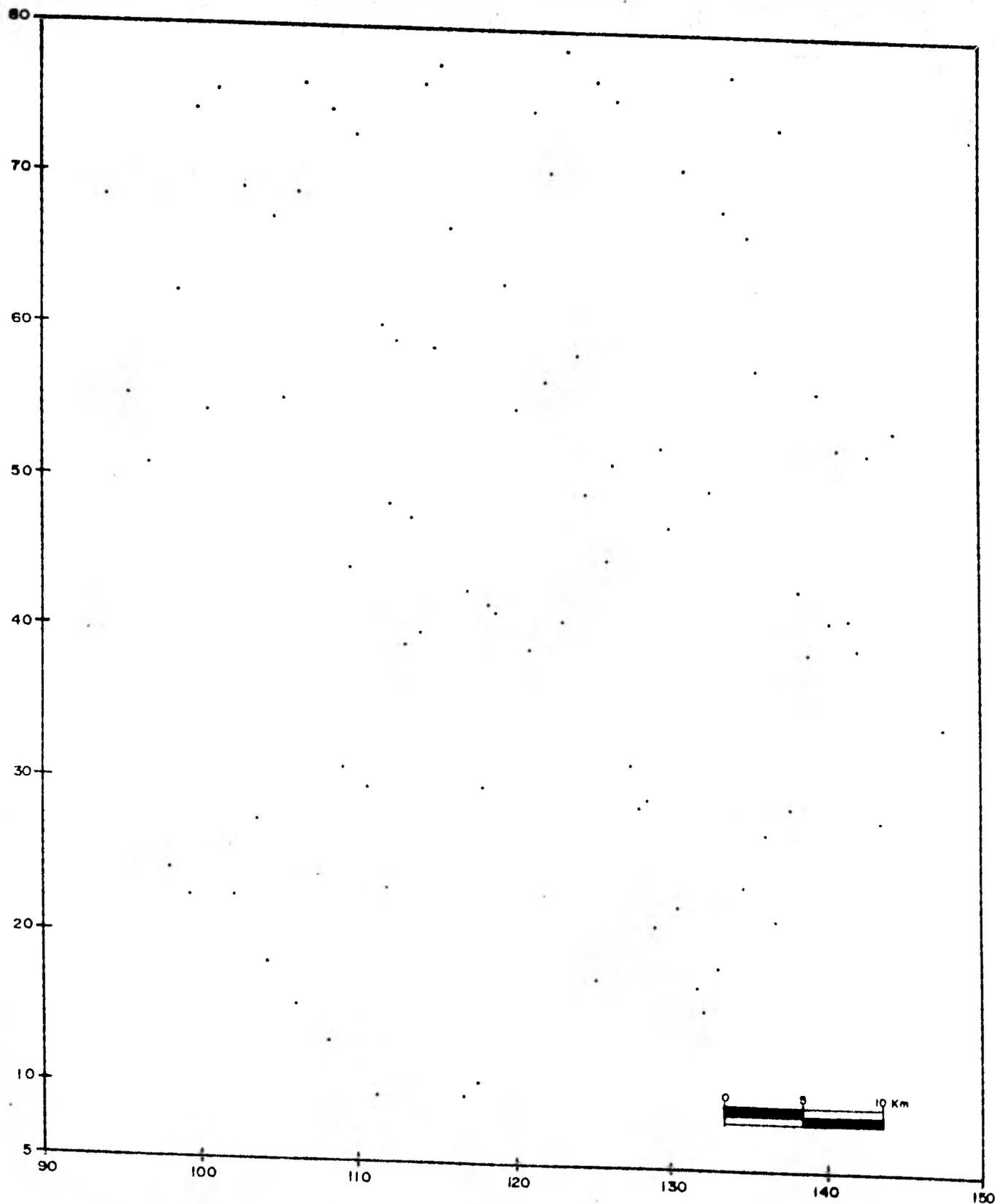


FIG. 29  
PUNTOS DATO RE-ESTIMADOS PARA OBTENER EL MEJOR MODELO DE  
COVARIANZA GENERALIZADA. 2a. OPCION

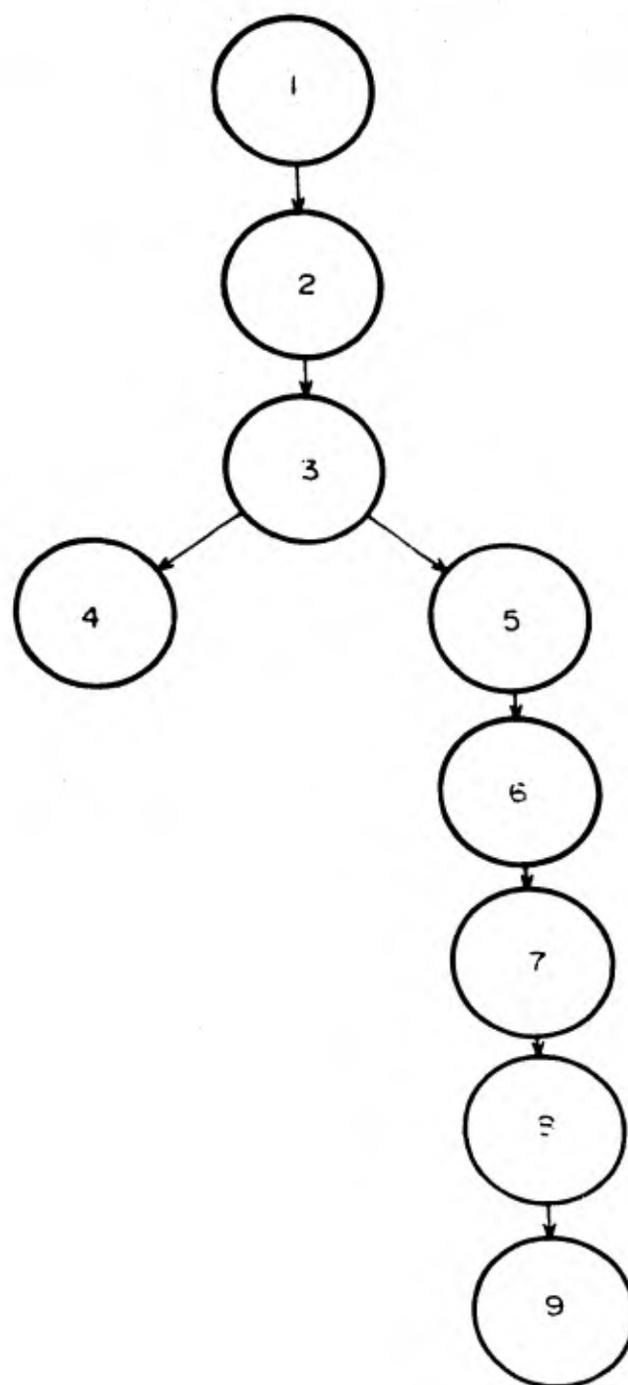


FIG. 30

SECUENCIA DE OBTENCION DE MODELOS DE COVARIANZA GENERALIZADA  
CORRESPONDIENTES A LA ESTIMACION DE 89 PUNTOS DATO

tra esquemáticamente la secuencia de obtención del "mejor" modelo. Los puntos dato que se re-estimaron fueron 89 (figura 29) y el "mejor" modelo que se obtuvo fué:

$$-.4765 \times 10^{-2} |h| + .1463 \times 10^{-3} |h|^3$$

La necesidad de demostrar la validez de lo supuesto en la segunda opción sobre la primera opción hizo que se probaran los mejores modelos de ambas opciones en condiciones similares. Primeramente se utilizaron los 85 puntos dato correspondientes a la primera opción y se hizo variar el radio (RIN), para desechar información, desde 0.0 hasta 3.5 kms. y con ello realizar la re-estimación empleando el "mejor" modelo de cada opción. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 8. De acuerdo al error cuadrático medio la diferencia entre ambos modelos es despreciable para cualquier situación. Esta diferencia, por el contrario, se hace notable cuando se considera el error cuadrático estandarizado (ver columna ECS). Los dos modelos tienden por un lado, a suavizar el fenómeno conforme aumenta el radio para desechar información y por el otro, a hacerlo más irregular cuando dicho radio (RIN) es pequeño, de 0.0 a 0.6 kms. (ver columnas VARR y VAREST). De todo lo anterior resulta que el "mejor" modelo es:

$$-.8228 \times 10^{-2} |h| + .1229 \times 10^{-3} |h|^3$$

el cual corresponde al "mejor" modelo de la primera opción.

Posteriormente, se hizo la re-estimación de los 89 puntos dato bajo las condiciones ya descritas (vecindad anular), obteniéndose los resultados de la tabla 9. En este caso los resultados de ambos modelos son similares, según el error cuadrático medio y el error cuadrático estandarizado, para radios (RIN) de 0.0 a 0.6 kms. Sin embargo, a partir de un radio de un kilómetro la diferencia vuelve a hacerse notoria, como en el caso anterior, según el error cuadrático estandarizado. El modelo propuesto en el caso anterior continúa siendo el "mejor" para esta nueva situación.

TABLA 8

Comparación de modelos de covarianza generalizada  
basados en la estimación de 85 puntos dato

Opción	Co	Modelo C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	RMEDIA	RMEST	VARR	VAREST	EPP	ECS	ECM	CORR	R <sub>x1</sub>	RIN kms.
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	3.0248	.53941	.54832	.032	1.077	.0049	.9955	.06021	0.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	3.0252	.53941	.54893	.032	1.841	.0049	.9956	.06135	0.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	2.9965	.53941	.55530	.101	1.871	.0565	.9493	9.963	0.6
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	2.9922	.53941	.55107	.099	2.705	.0525	.9530	9.148	0.6
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	3.0087	.53941	.52656	.092	1.735	.0204	.9813	.2799	1.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	3.0092	.53941	.52824	.091	2.852	.0204	.9813	.3019	1.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	2.9941	.53941	.52747	.166	1.861	.0305	.9725	2.369	2.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	2.9952	.53941	.52887	.117	3.083	.0312	.9718	1.122	2.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	2.9937	.53941	.52612	.121	2.124	.0332	.9699	.6389	2.5
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	2.9955	.53941	.52871	.122	3.529	.0340	.9691	.7535	2.5
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	2.9886	.53941	.53831	.130	2.071	.0370	.9670	.8296	3.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	2.9901	.53941	.54176	.130	3.423	.0382	.9659	1.020	3.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0264	2.9997	.53941	.52891	.125	1.813	.0335	.9694	.4354	3.5
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0264	3.0015	.53941	.53362	.125	2.908	.0338	.9691	.4878	3.5

TABLA 9

Comparación de modelos de covarianza generalizada  
basados en la estimación de 89 puntos dato

Opción	Co	Modelo C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	RMEDIA	RMEST	VARR	VAREST	EPP	ECS	ECM	CORR	Rx <sub>1</sub>	RIN kms.
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0577	.36061	.36396	.028	.740	.0027	.9962	.0082	0.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0580	.36061	.36014	.027	1.026	.0027	.9963	.0090	0.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0568	.36061	.35326	.058	.867	.0069	.9904	.0277	0.6
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0556	.36061	.34865	.056	1.301	.0066	.9909	.0284	0.6
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0576	.36061	.35233	.075	1.088	.0120	.9832	9.775	1.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0611	.36061	.35590	.077	1.786	.0143	.9801	3.001	1.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0549	.36061	.32747	.098	1.158	.0188	.9738	.1370	2.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0548	.36061	.32485	.100	2.287	.0200	.9721	.1688	2.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0637	.36061	.33240	.107	1.136	.0223	.9687	.2364	2.5
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0621	.36061	.33035	.107	2.345	.0234	.9672	.3336	2.5
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0614	.36061	.32899	.108	1.078	.0244	.9657	.2941	3.0
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0607	.36061	.32640	.107	2.247	.0245	.9656	.3710	3.0
1	0.0	-.8228E-2	.1229E-3	3.0551	3.0832	.36061	.37141	.130	.929	.0468	.9372	78.85	3.5
2	0.0	-.4765E-2	.1463E-3	3.0551	3.0803	.36061	.36663	.134	1.499	.0398	.9462	19.91	3.5

Respecto al tiempo de cómputo utilizado para la identificación de la covarianza generalizada éste fué de 59 segundos de CPU, empleando 15 iteraciones (ver tabla 5). Este tiempo pudo haberse reducido en un 30 por ciento aproximadamente, si sólo se hubiesen considerado los modelos del tipo  $C_1|\bar{h}| + C_2|\bar{h}|^3$  a partir de la quinta iteración. El error cuadrático estandarizado de los modelos del tipo  $C_0 + C_1|\bar{h}| + C_2|\bar{h}|^3$  tiende a estabilizarse alrededor de un valor igual a cuatro, por lo que no debió haberse insistido en su uso. Esto es más claro en la tabla 7, pues de todos los modelos calculados sólo dos de ellos son del tipo  $C_0 + C_1|\bar{h}| + C_2|\bar{h}|^3$ .

Por otro lado, para valorar la efectividad del método se construyeron las tablas 10 y 11. En éstas se compara el modelo inicial de covarianza generalizada con el "mejor" modelo de covarianza generalizada. Para el caso en que se considera información muy cercana al punto a ser estimado, la diferencia no es muy notable según el error cuadrático medio, para ambos modelos, aunque no sucede lo mismo con el error cuadrático estandarizado y con el término  $Rx_1$  (suma del cuadrado de las diferencias entre el error de kriging cuadrático y el error teórico de estimación). Sin embargo, cuando se empieza a ampliar el radio (RIN) los resultados son bastante diferentes, notándose claramente el mejoramiento en la estimación y la minimización del término  $Rx_1$ .

Con el "mejor" modelo de covarianza generalizada se llevó a cabo la estimación de una malla de  $38 \times 31$  nodos, lo que requirió un tiempo de 44 segundos de CPU. La malla se configuró dando como resultado el mapa de la figura 31. En la figura 32 se presenta el mapa de desviaciones estándar asociado a dicha malla.

La imposibilidad de conseguir datos de análisis de velocidad correspondientes al área de donde se tenía información de tiempos de reflexión impidió que se llevara a cabo la

TABLA 10

Comparación entre modelo inicial de covarianza generalizada y "mejor" modelo de covarianza generalizada utilizando información de la figura 25.

Co	Modelo		ECS	ECM	Rx <sub>1</sub>	RIN kms.
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>				
0.0	0.0	1.0	.044	.0059	54.190	0.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.077	.0049	.06021	0.0
0.0	0.0	1.0	.047	.0900	274.10	0.6
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.871	.0565	9.9630	0.6
0.0	0.0	1.0	.036	.0712	1156.0	1.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.735	.0204	.27990	1.0
0.0	0.0	1.0	.024	.0845	19,110.	2.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.861	.0305	2.369	2.0
0.0	0.0	1.0	.025	.0797	7378.0	2.5
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	2.124	.0332	.6389	2.5
0.0	0.0	1.0	.025	.1101	11,140.	3.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	2.071	.0370	.8296	3.0
0.0	0.0	1.0	.008	.0553	15,280.	3.5
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.813	.0335	.4354	3.5

TABLA 11

Comparación entre modelo inicial de covarianza generalizada y "mejor" modelo de covarianza generalizada utilizando información de la figura 29.

Co	Modelo C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	ECS	ECM	Rx <sub>1</sub>	RIN kms.
0.0	0.0	1.0	.034	.0040	69.13	0.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	.740	.0027	.008171	0.0
0.0	0.0	1.0	.014	.0099	262.6	0.6
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	.867	.0069	.0277	0.6
0.0	0.0	1.0	.013	.0172	1025.0	1.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.088	.0120	9.775	1.0
0.0	0.0	1.0	.008	.0307	6853.0	2.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.158	.0188	.1370	2.0
0.0	0.0	1.0	.007	.0282	6301.0	2.5
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.136	.0223	.2364	2.5
0.0	0.0	1.0	.007	.0364	7613.0	3.0
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	1.078	.0244	.2941	3.0
0.0	0.0	1.0	.008	.0503	2.35E+6	3.5
0.0	-.8228E-2	.1229E-3	.929	.0468	78.85	3.5

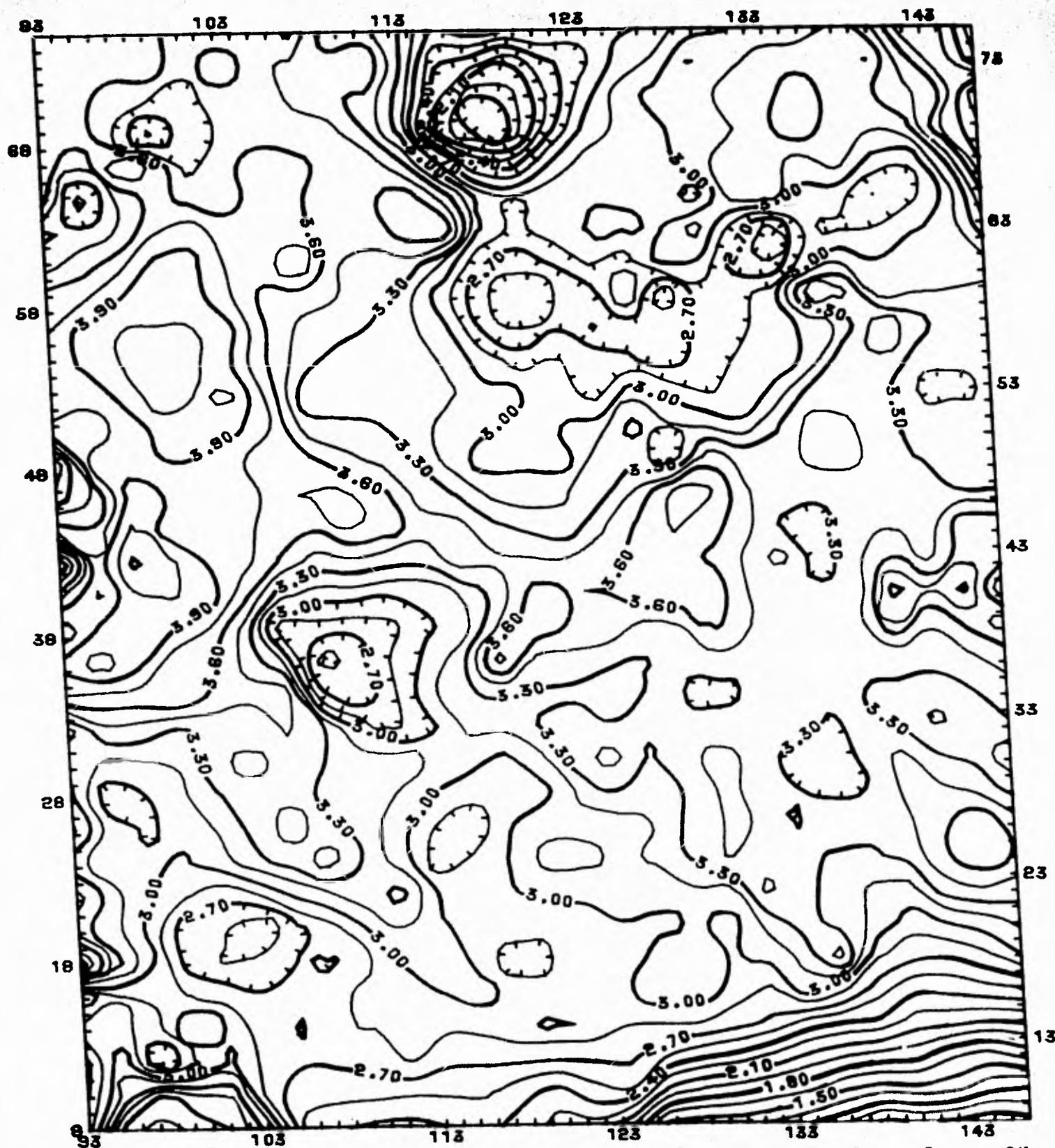


FIG. 31

MAPA DE TIEMPOS DE REFLEXION CONFIGURADO POR COMPUTADORA  
 UTILIZANDO COVARIANZAS GENERALIZADAS.  
 INTERVALO DE CONFIGURACION : 0.15 SEG.

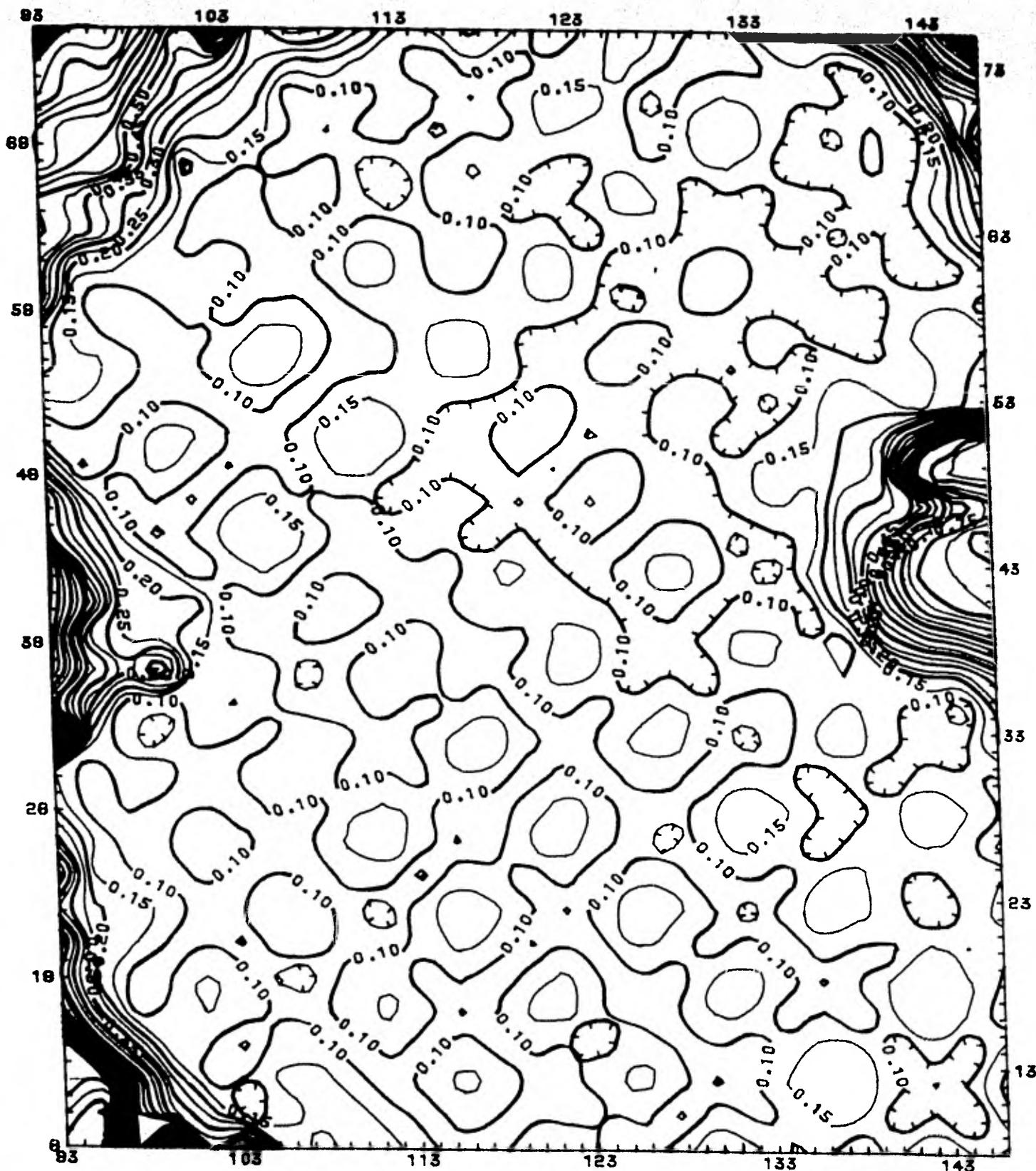
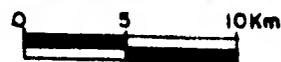


FIG. 32

MAPA DE DESVIACIONES ESTANDAR CONFIGURADO POR COMPUTADORA  
 UTILIZANDO COVARIANZAS GENERALIZADAS.  
 INTERVALO DE CONFIGURACION: 0.05 SEG.



migración de estos últimos. Sin embargo, se presenta un ejemplo con datos ficticios de velocidad que ilustra la manera como se hubiera realizado el proceso con datos reales.

El mapa de la figura 33 muestra una serie de datos de "velocidad" en los que se efectuó el suavizamiento por kriging (método de covarianzas generalizadas). Primero se calcularon varias funciones de covarianza generalizada para los datos y de éstas se eligió el modelo  $214.7 - 16.49|h| + 0.0398|h|^3$  por ser éste el que restituía el valor de los puntos con mayor precisión (55.46 m/seg de error promedio en datos que variaban de 2700 a 2900 m/s). Esta función de covarianza se empleó para re-estimar (en este caso suavizar, por la existencia del término  $C_0$ ) las velocidades. El término  $C_0$  sólo aparece en la diagonal principal de la matriz de kriging y no en el vector de términos independientes. El resultado fué el mapa de la figura 34 en el que puede apreciarse un suavizamiento de la variable.

Si los datos fuesen reales, con las velocidades suavizadas y estimando los gradientes de tiempo por kriging (ec. 3.13) se habrían calculado las nuevas posiciones de los puntos migrados mediante la ecuación 5.9.

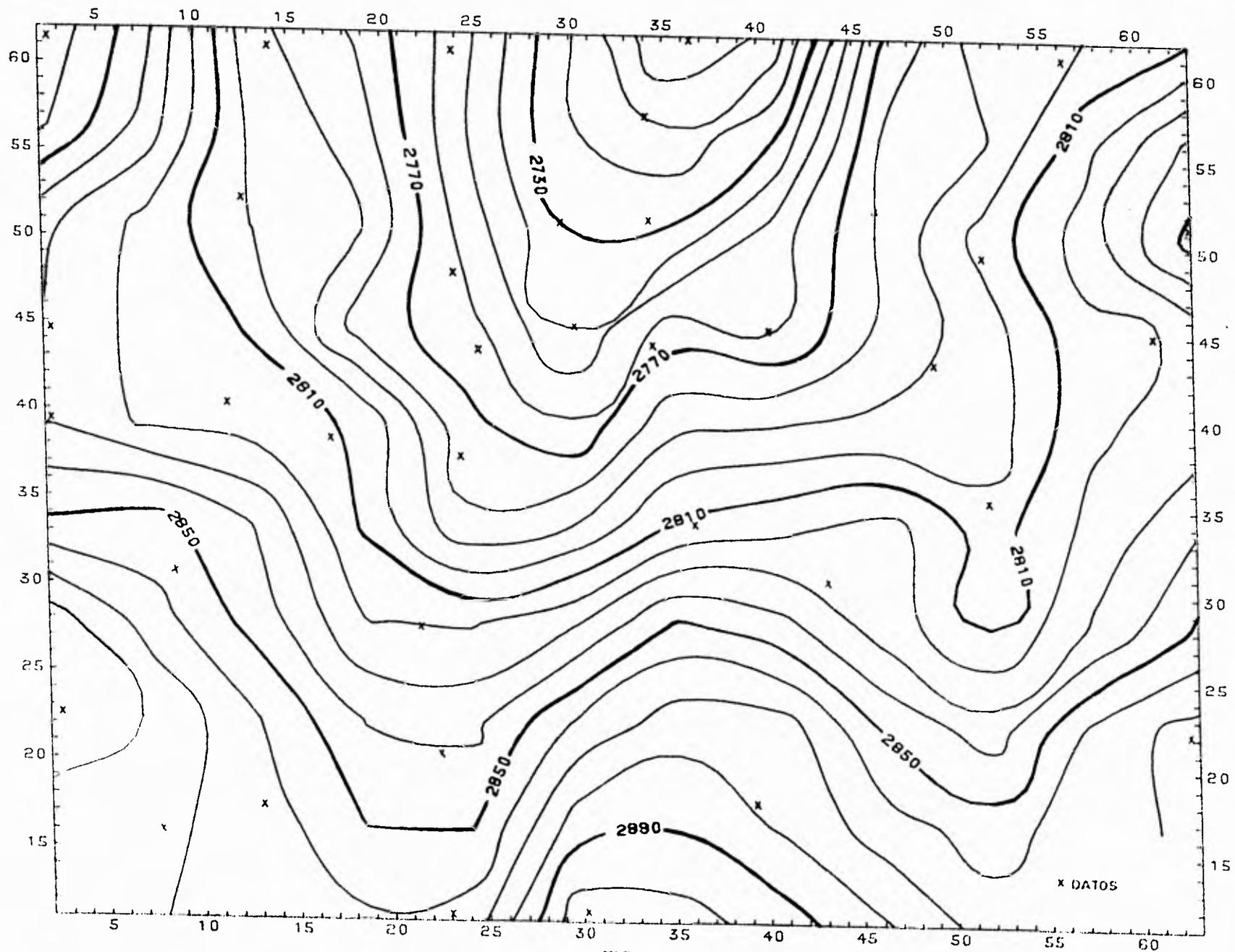


FIG. 33  
 MAPA DE 'VELOCIDADES' CONFIGURADO POR COMPUTADORA  
 EMPLEANDO PROMEDIOS PESADOS INT. CONFIG. 10 M/SEG.

0 1 2 Km.  
 ESC.

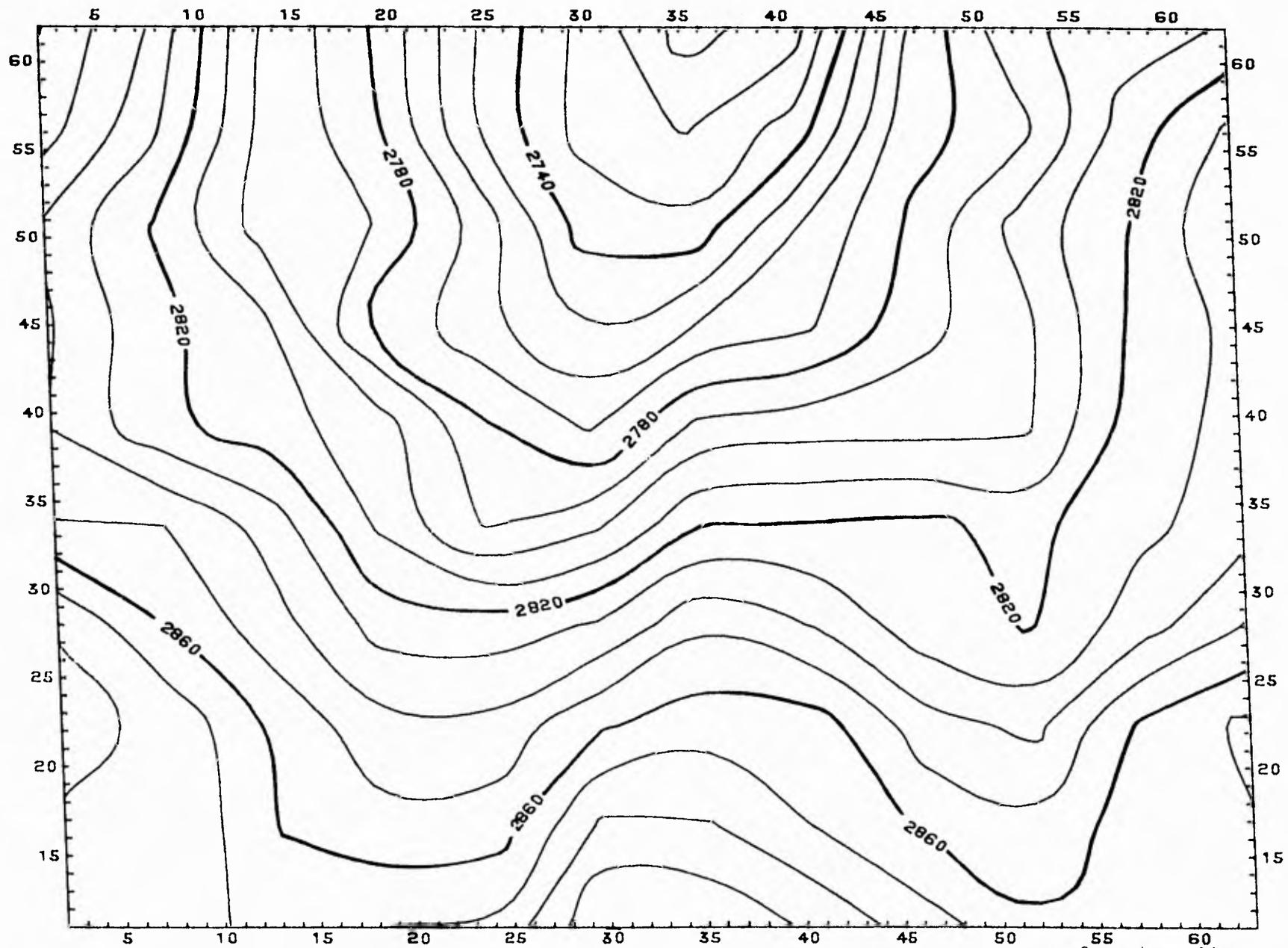


FIG. 34

MAPA DE 'VELOCIDADES' SUAVIZADO EMPLEANDO COVARIANZAS GENERALIZADAS INT. CONFIG. 10 M/SEG.

## CAPITULO VII

### CONCLUSIONES

El kriging es el método que proporciona el mejor estimador lineal insesgado en el sentido de varianza de estimación mínima (Journel, 1978).

Este es el único método que toma en cuenta la estructura del fenómeno bajo estudio (a través del semivariograma o covarianza) y proporciona una medida del error al efectuar estimaciones (varianza de estimación). Sin embargo, presenta dos limitaciones que hacen que su empleo no sea el más apropiado en todos las casos:

- Excesiva tiempo de cómputo, en comparación con otros métodos convencionales de interpolación.

- Base teórica extensa y no muy sencilla. Esto provoca que en algunos casos se haga una incorrecta aplicación del método o se elimine como una posible alternativa.

Estas desventajas no son muy apreciables en el ejemplo No. 1, ya que los costos difieren muy poco. Como se dijo anteriormente esto se debió a que la configuración de los datos es repetitiva y el patrón geométrico de estimación es constante de una celda a otra (ver figura 22). Este mismo factor determinó que el método de relajación necesitara de un algoritmo muy sencillo para su aplicación.

En el caso de una distribución irregular de los datos, los dos métodos resultarían sumamente caros. Por un lado la aplicación del kriging implicaría resolver un sistema de ecuaciones para cada punto a estimar. Por otro, la relajación involucraría mayor complejidad por las transformaciones de un espacio irregular a uno regular y viceversa (ver Bondi, Rocca y Zanoletti, 1975).

Existen casos fuera del campo de la minería en los cuales la aplicación del kriging está plenamente justificada. La caracterización de un determinado horizonte geológico con información obtenida a partir de núcleos de perforación y/o sismología de reflexión son ejemplos de lo anterior.

La obtención de núcleos es muy costosa por lo que los sitios de muestreo se deben limitar. A partir de esos pocos datos el kriging puede proporcionar un modelo del horizonte geológico con una medida asociada de incertidumbre. Esta última información expresada a través del mapa de desviaciones estándar proporciona un criterio lógico para seleccionar nuevas localizaciones de barrenos. Con esto se logra resolver el problema de obtener la máxima información con el mínimo de muestras.

En el caso de fenómenos no estacionarios el kriging universal produce mejores resultados que el kriging normal como pudo observarse en el primer ejemplo de aplicación, debiéndose básicamente al uso en el sistema de kriging normal de un semivariograma sobrestimado.

El mejoramiento al efectuar la estimación por medio del kriging universal se ve afectado por un incremento en costo de tiempo de cómputo, cuando los datos no están regularmente espaciados a lo largo de líneas y además se desea una estimación óptima del drift. Para la estimación óptima del drift en un punto en base a  $N$  datos circundantes, es necesario resolver dos veces (para un drift lineal) o seis veces (para un drift cuadrático) un sistema de  $N+q$  ecuaciones, donde  $q$  es el número de monomios del drift asociado.

En el método de kriging universal la dependencia entre drift y semivariograma obliga a utilizar un método recursivo para la inferencia de ambas funciones, a partir -

de una sola realización. En contraste, el método de covarianzas generalizadas, al filtrar el drift, requiere únicamente la inferencia de la función covarianza generalizada para su aplicación.

Otra ventaja del método de covarianzas generalizadas sobre el kriging universal es que puede ser enteramente programable.

En el contexto de la sismología de reflexión, el kriging empleando covarianzas generalizadas ha sido considerado como "una herramienta geofísica cara que mide algunas propiedades simples del subsuelo" (David, 1975). Aún así, el kriging es redituable debido a que el procesamiento de datos sísmicos (para no hablar de la prospección sísmica en sí) siempre ha sido costoso por su complejidad matemática.

## A G R A D E C I M I E N T O S

Al Dr. Juan M. Berlanga G. por sus valiosas sugerencias, interés e impulso en la realización de esta tesis.

Al Ing. Mario Vargas F. por su ayuda en las etapas preliminares de este trabajo.

Al Dpto. de Geología y Minería de la Gerencia de Estudios e Ingeniería Preliminar de la C.F.E. por habernos permitido utilizar información de su -- propiedad.

## BIBLIOGRAFIA

- Akima, K., 1975: "Comments on optimal contour mapping using kriging by Ricardo Olea", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 80, No. 5, págs. 832-836.
- Anstey, N. A., 1977: "Seismic interpretation: The physical aspects", IHRDC, - Boston, Mass. 02116, partes 7 y 9.
- Bolondi, G., Rocca, F. y Zanoletti, S., 1976: "Automatic contouring of faulted subsurfaces", *Geophysics*, Vol. 41, págs. 1377-1393.
- Bolondi, G., Rocca, F. y Zanoletti, S., 1977: "Methods for contouring irregularly spaced data", *Geophysical Prospecting*, Vol. 25, págs. 96-119.
- Box, G. y Jenkins, G. M., 1969: "Time Series Analysis Forecasting and Control", Holden-Day, San Francisco.
- Crain, I. K., 1970: "Computer interpolation and contouring of two dimensional - data: A review", *Geoexploration*, Vol. 8, págs. 71-86.
- Crain, I. K. y Bhattacharyya, B. K., 1967: "Treatment of non-equispaced two dimensional data with a digital computer", *Geoexploration*, Vol. 5, - págs. 173-194.
- Chiles, J. P., 1975: "How to adapt kriging to non-classical problems: three case studies", en *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, págs. 69-89, Reidel Publishing Corp., Dordrecht.

- Chiles, J. P., Delfiner, P., Marechal, A. y Matheron, G. 1979: "Specialized Techniques of Geostatistics", Private short course, Batelle Research Center, Seattle, Washington.
- Dagbert, M. y David, M., 1976: "Universal kriging for ore-reserve estimation. Conceptual background and application to the Navan Deposit", CIM Bulletin, Vol. 69, No. 766, págs. 80-92.
- David, M., 1976: "The practice of kriging", en Advanced Geostatistics in the Mining Industry, págs. 31-48.
- David, M., 1977: "Geostatistical Ore Reserve Estimation", Elsevier, Amsterdam.
- Davis, M. y David, M., 1978: "Automatic kriging and contouring in the presence of trends (Universal kriging made simple)", The Journal of Canadian Petroleum, No. 1, págs. 90-99.
- Davis, J. C., 1973: "Statistics and Data Analysis in Geology", John Wiley and Sons, New York.
- Delfiner, P. y Delhomme, J. P., 1975: "Optimum interpolation by kriging", en Display and Analysis of Spatial Data, John Wiley and Sons, New York, págs. 96-114.
- Delfiner, P., 1975: "Linear estimation of non-stationary phenomena", en Advanced Geostatistics in the Mining Industry, págs. 49-68.

- Delfiner, P., 1976: "Basic Introduction to Geostatistics", Private short course, --  
Batelle Research Center, Seattle, Washington.
- Delhomme, J., P., 1978: "Kriging in the Hydrosiences", Advances in Water Re-  
sources, Vol. 1, No. 5, págs. 251-266.
- Doctor, P. G., 1979: "An Evaluation of Kriging Techniques for High Level Radioactive  
Waste Repository Site Characterization", Pacific Northwest Laboratory, -  
Richland, Washington 99352
- Grant, F., S., 1972: "Review of Data Processing and Interpretation Methods in --  
Gravity and Magnetism 1964-1971", Geophysics, Vol. 37, No. 4, págs.  
647-661.
- Hagedoorn, J. G., 1954: "A process of seismic reflection interpretation", Geophy-  
sical Prospecting, Vol. 2, No. 1, págs. 85-127.
- Hass, A. G. y Jouselin, C., 1975: "Geostatistics in the petroleum industry", en  
Advanced Geostatistics in the Mining Industry, págs. 333-347.
- Hass, A. G. y Viallix, J. R., 1976: "Kriging applied to geophysics, the answer  
to the problem of estimates and contouring", Geophysical Prospecting, --  
Vol. 24, págs. 48-69.
- Huijbregts, Ch., 1975: "Regionalized variables and application to quantitative --  
analysis of spatial data", en Display and Analysis of Spatial Data, John  
Wiley and Sons, New York, págs. 38-53.

Journel, A. G. y Huijbregts, Ch., 1978: "Mining Geostatistics", Academic Press, New York.

Karas, S. y Paccou, Y., 1969: "Le krigeage universel et ses applications a la --- cartographie automatique", Reporte técnico S-26, Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France.

Matheron, G., 1963: "Principles of Geostatistics", Economic Geology, Vol. 58, págs. 1246-1266.

Matheron, G., 1967: "Kriging or polynomial interpolation procedures?", Canadian Mining and Metallurgical bulletin, No. 60, págs. 1041-1045.

Matheron, G., 1971: "The theory of regionalized variables and its applications", Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. 5, Fontainebleau, France.

Olea, R., 1972: "Application of regionalized variable theory to automatic contouring", Special report to the American Petroleum Institute, Research - Project No. 131, 191 págs.

Olea, R., 1974: "Optimal contour mapping using universal kriging", Journal of Geophysical Research, Vol. 79, págs. 695-702.

Papoulis, A., 1965: "Probability Random Variables and Stochastic Processes", McGraw-Hill, New York.

- Sabourin, R., 1979: "Application of two methods for the interpretation of the -- underlying variogram", en *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, págs. 101-109.
- Sampson, R. J., 1975: "Surface II Graphics System", Kansas Geological Survey, Lawrence, Kansas.
- Telford, Geldart, Sheriff y Keys, 1976: "Applied Geophysics", Cambridge University Press, New York.
- Walters, R., 1969: "Contouring by machine, a user's guide", *The American Association of Petroleum Geologist Bulletin*, Vol. 53, No. 11, págs. 2324-2340.
- Watson, G. S., 1969: "Trend surface analysis and spatial correlation", Technical Report No. 124, Department of Statistics, The John Hopkins University, Baltimore, Maryland.
- Watson, G. S., 1971: "Trend surface analysis", *Mathematical Geology*, Vol. 13, No. 3, págs. 215-225.
- Whitten, E. H., 1975: "The practical use of trend-surface analysis in the Geological Sciences", en *Display and Analysis of Spatial Data*, John Wiley and Sons, New York, págs. 282-297.
- Wren, A. E., 1975: "Contouring and the contour map, a new perspective", *Geophysical Prospecting*, Vol. 23, págs. 1-17.

A P E N D I C E I  
 DESARROLLO DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES  
 DE REGRESION DE LA COVARIANZA GENERALIZADA

Sean  $p$  el número total de puntos omitidos,  $Z(\bar{x}_{0i})$  el  $i$ -ésimo punto omitido y  $\bar{\lambda}_i$  los pesos asociados a su estimación en las siguientes expresiones:

$$R = \sum_{r=1}^p [(\text{error de kriging})^2 - \text{error teórico de estimación}]^2$$

$$= \sum_{r=1}^p \left[ \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i Z(\bar{x}_i) \right)^2 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j K_{ij} \right]^2 \quad (1)$$

$$\text{error de kriging} = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \quad (2)$$

$$\text{error teórico de estimación} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j K_{ij} - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i K_{i,0} + K_{0,0} \quad (3)$$

Sustituyendo ecuaciones (2) y (3) en ecuación (1) y definiendo  $R_x$  como uno de los sumandos de  $R$  tenemos:

$$R_x = \left( \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right)^2 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j K_{ij} + 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i K_{i,0} - K_{0,0} \quad (4)$$

$$y \quad R = \sum_{r=1}^p R_x^2 \quad (5)$$

Cabe hacer la aclaración de que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j K_{ij} &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_1 K_{1,1} + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 K_{1,2} + \dots + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_n K_{1,n} \\ &+ \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1 K_{2,1} + \dots + \\ &+ \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_1 K_{n,1} + \dots + \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_n K_{n,n} \end{aligned}$$

donde  $K_{1,1} = K_{2,2} = \dots = K_{n,n} = K(\bar{0})$

por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j K_{ij} = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^2 K(\bar{0}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j K_{ij}(\bar{h}) \quad (6)$$

Consideremos el modelo el modelo más general de covarianza generalizada:

$$K(h) = C_1 |h| + C_2 |h|^3 + C_3 |h|^5$$

$$K(0) = C_0$$

entonces sustituyendo este modelo en ecuación (4) y tomando en cuenta ecuación(6) --

tenemos:

$$\begin{aligned} R_x &= \left[ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right]^2 - C_0 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^2 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j [C_1 |\bar{h}_{ij}| + C_2 |\bar{h}_{ij}|^3 \\ &\quad + C_3 |\bar{h}_{ij}|^5] + 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i [C_1 |\bar{h}_{i0}| + C_2 |\bar{h}_{i0}|^3 + C_3 |\bar{h}_{i0}|^5] - C_0 ] \\ &= \left[ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right]^2 - C_0 \left( \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^2 + 1 \right) \\ &\quad - C_1 \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j |\bar{h}_{ij}| - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i |\bar{h}_{i0}| \right) \\ &\quad - C_2 \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j |\bar{h}_{ij}|^3 - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i |\bar{h}_{i0}|^3 \right) \\ &\quad - C_3 \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j |\bar{h}_{ij}|^5 - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i |\bar{h}_{i0}|^5 \right) \end{aligned}$$

Definiendo:

$$T = \left[ \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i Z(\bar{x}_i) - Z(\bar{x}_0) \right]^2$$

$$X(\delta) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^2 + 1$$

$$Y(h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j |\bar{h}_{ij}| - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i |\bar{h}_{i0}|$$

$$U(|h|^3) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j |\bar{h}_{ij}|^3 - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i |\bar{h}_{i0}|^3$$

$$W(|h|^5) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j |\bar{h}_{ij}|^5 - 2 \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i |\bar{h}_{i0}|^5$$

y sustituyendo en  $R_x$  tenemos:

$$R_x = (T - X C_0 - Y C_1 - U C_2 - W C_3)$$

(7)

así como :

$$R = \sum_{r=1}^P R_x(r) = \sum_{r=1}^P (T_r - X_r C_0 - Y_r C_1 - U_r C_2 - W_r C_3) \quad (8)$$

para obtener el mínimo de R, derivamos parcialmente con respecto a X, Y, U y

W e igualamos a cero las derivadas,

$$\frac{\partial R}{\partial C_0} = 2 \sum_{r=1}^P (T_r - X_r C_0 - Y_r C_1 - U_r C_2 - W_r C_3)(-X_r) = 0$$

y simplificando:

$$C_0 \sum_{r=1}^P X_r^2 + C_1 \sum_{r=1}^P X_r Y_r + C_2 \sum_{r=1}^P X_r U_r + C_3 \sum_{r=1}^P X_r W_r = \sum_{r=1}^P T_r X_r$$

De manera similar, calculando  $\frac{\partial R}{\partial C_1}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial C_2}$  y  $\frac{\partial R}{\partial C_3}$ , igualando a cero -

cada derivada parcial y reordenando términos se llega al siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$C_0 \sum_{r=1}^P X_r^2 + C_1 \sum_{r=1}^P X_r Y_r + C_2 \sum_{r=1}^P X_r U_r + C_3 \sum_{r=1}^P X_r W_r = \sum_{r=1}^P T_r X_r$$

$$C_0 \sum_{r=1}^P X_r Y_r + C_1 \sum_{r=1}^P Y_r^2 + C_2 \sum_{r=1}^P Y_r U_r + C_3 \sum_{r=1}^P Y_r W_r = \sum_{r=1}^P T_r Y_r$$

$$C_0 \sum_{r=1}^P X_r U_r + C_1 \sum_{r=1}^P Y_r U_r + C_2 \sum_{r=1}^P U_r^2 + C_3 \sum_{r=1}^P U_r W_r = \sum_{r=1}^P T_r U_r$$

$$C_0 \sum_{r=1}^P X_r W_r + C_1 \sum_{r=1}^P Y_r W_r + C_2 \sum_{r=1}^P U_r W_r + C_3 \sum_{r=1}^P W_r^2 = \sum_{r=1}^P T_r W_r$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen los coeficientes del modelo más general de covarianza:  $C_0 \bar{h} + C_1 \bar{h}^3 + C_2 \bar{h}^5$ , pero el sistema también incluye la solución de todos los demás modelos de covarianza. Por ejemplo, si el modelo que se desea calcular es del tipo  $C_1 \bar{h} + C_2 \bar{h}^3$ , se resuelve el sistema que queda al considerar iguales a cero todos los términos e incógnitas asociados al efecto pepita y  $\bar{h}^5$  (o sea:  $C_0 = 0$ ,  $C_3 = 0$ ,  $X = 0$  y  $W = 0$ ).

Así el sistema a resolver es:

$$C_1 \sum_{r=1}^p Y_r^2 + C_2 \sum_{r=1}^p Y_r U_r = \sum_{r=1}^p T_r Y_r$$

$$C_1 \sum_{r=1}^p Y_r U_r + C_2 \sum_{r=1}^p U_r^2 = \sum_{r=1}^p T_r U_r$$

A P E N D I C E    I I  
 F O R M U L A   D E   T I E M P O   V E R T I C A L   D E   R E F L E X I O N  
 P A R A   U N   C O N T A C T O   T R I D I M E N S I O N A L   I N C L I N A D O

Considérese el plano X-Y como horizontal (ver figura 36) y el eje vertical Z -- apuntando hacia abajo. La línea OP de longitud  $h$  es perpendicular a un plano buzante que intersecta el plano X-Y a lo largo de la línea MN si se extiende suficientemente.

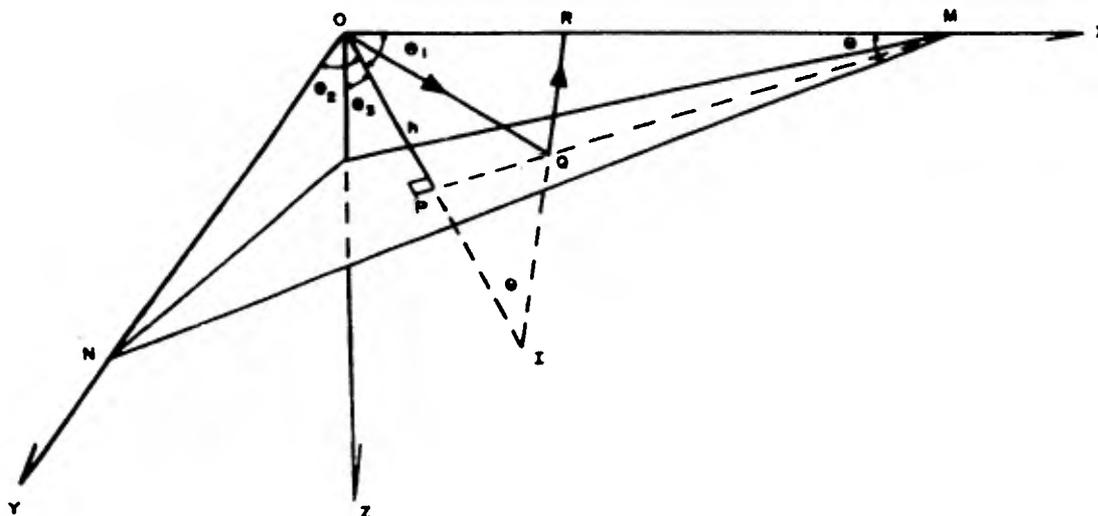


FIG. 35

**Vista tridimensional de la trayectoria de un rayo reflejado en una capa buzante.**

Sean  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  los ángulos entre OP y los ejes X, Y y Z, y  $l$ ,  $m$ ,  $n$  los cosenos de dichos ángulos en ese orden; por lo tanto son los cosenos directores de OP y cumplen con la igualdad:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

El ángulo  $\phi$  entre MN y el eje X es el rumbo, mientras que  $\theta_3$  es el echado.

La trayectoria de la onda reflejada que llega al geófono R en el eje X puede encontrarse utilizando el punto imagen I. La trayectoria OQR tiene la misma longitud -- que la línea IR que puede expresarse como el producto VT siendo T el tiempo de viaje para el geófono R. Las coordenadas de I y R son respectivamente  $(2hl, 2hm, 2hn)$  y  $(X, 0, 0)$ , por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} V^2 T^2 &= (IR)^2 = (X - 2hl)^2 + (0 - 2hm)^2 + (0 - 2hn)^2 \\ &= X^2 + 4h^2(l^2 + m^2 + n^2) - 4hlx \end{aligned}$$

$$V^2 T^2 = X^2 + 4h^2 - 4hlx$$

$$T = \frac{4h^2}{V^2} \left( 1 + \frac{X^2 - 4hlx}{4h^2} \right)$$

$$T = \frac{2h}{V} \left( 1 + \frac{X^2 - 4hlx}{4h^2} \right)^{1/2}$$

como  $T_0 = 2h/V$ , tiempo de reflejo en el punto de tiro,

$$T = T_0 \left( 1 + \left( \frac{\sqrt{X^2 - 4hlx}}{2h} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Haciendo la expansión binomial de la expresión anterior tenemos:

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{X^2 - 4hlx}}{2h} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{\sqrt{X^2 - 4hlx}}{2h} \right)^4 + \dots \right]$$

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{x^2 - 4hlx}{8h^2} \right]$$

Empleando la fórmula anterior para sustraer los tiempos de arribo en dos geófonos localizados en el eje X a distancias  $X = \pm s$  y haciendo  $2s = \Delta x$  encontramos:

$$\Delta T_x \approx T_0 \left( \frac{2s}{h} \right) = \frac{\Delta x}{v}$$

y despejando :

$$l = \cos \theta_1 = v \left( \frac{\Delta T_x}{\Delta x} \right) \quad (1)$$

Si también se tiene un tendido en el eje Y:

$$m = \cos \theta_2 = v \left( \frac{\Delta T_y}{\Delta y} \right) \quad (2)$$

donde  $\Delta T_y$  es la diferencia de tiempo entre geófonos separados por una distancia  $\Delta y$  y simétricos con respecto al punto de tiro.

Asimismo:

$$\begin{aligned} n = \cos \theta_3 &= [1 - (l^2 + m^2)]^{1/2} \\ \text{sen } \theta_3 &= [1 - n^2]^{1/2} = (l^2 + m^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo ecuaciones (1), (2) en ecuación (3)

$$\text{sen } \theta_3 = v \left[ \left( \frac{\Delta T_x}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta T_y}{\Delta y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

y generalizando el problema:

$$\theta_3 = \text{sen}^{-1} \left[ v \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \right]$$

El tiempo vertical para el geófono R será:

$$T_v = T \cos \theta_3$$