54 2 Gun.



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE QUIMICA

## Estudio Teórico de las Propiedades Magnéticas de los Sistemas <u>Cu</u>Mn y <u>Cu</u>Ni

# T E S I S QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

QUE PARA OBTENDA DE TROPI QUE PARA OBTENDA DE TROP PRESENTA: JOSE FEDERICO DEL RIO PORTILLA



## UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

## DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### INDICE GENERAL

|             |   |                             |                     | Página |
|-------------|---|-----------------------------|---------------------|--------|
|             |   |                             |                     |        |
| TNTPON YTON |   |                             |                     |        |
|             |   |                             |                     | -      |
| I           | FUNDAMENTOS TEORICOS.                       |                             |                     | 4      |
|             | I.1.  | Comportamiento magnético.   |                     | 4      |
|             | I.2.  | Relación entre momento ma   | gnético y           |        |
|             |   | momento angular.            |                     | 6      |
|             | I.3.  | Dependencia de $X$ respecto | aT.                 | 9      |
|             | I.4.  | Origenes mecánico cuántic   | cos del magnetismo. | 11     |
|             | I.5. Integral de intercambio y Hamiltoniano |                             |                     |        |
|             |   | de Heisenberg.              |                     | 16     |
|             | I.6.  | Resultados experimentales   | · ·                 | 22     |
|             | I.7.  | Teoría sobre estructuras    | electrónicas de     |        |
|             |   | aleaciones intermetálicas   |                     | 29     |
| II          | RESULTADOS.                                 |                             |                     | 35     |
|             | II.1.                                       | Método empleado.            |                     | 35     |
|             | II.2.                                       | Parámetros del cálculo.     |                     | 38     |
|             | II.3.                                       | Discusión de los resultado  | as.                 | 42     |
| III         | CONCLU                                      | SIGNES.                     |                     | 68     |
|             | APENDI                                      | CE.                         |                     | 70     |
|             | BIBLIC                                      | GRAFIA.                     |                     | 72     |
|             |   |                             |                     |        |

#### INTRODUCCION

El objetivo principal de este trabajo es el de aportar elementos para explicar, dentro de lo posible, el siguiente fenómeno: Siendo el n<u>í</u> quel un material ferromagnético y el manganeso un material paramagnético, ¿por qué al formar aleaciones diluídas de estos materiales con cobre, la aleación <u>Cu</u>Mn posee un momento magnético dos millones de veces mayor que la de CuNi?

El problema radica en explicar la formación o ausencia de momen-tos magnéticos en estas aleaciones, ya que los resultados experimentales son contrarios a lo esperado a priori.

Estos resultados experimentales motivaron a Keller y Pisanty(25.a) a realizar un estudio de las aleaciones <u>CuMn y CuNi</u> por el método de la suma de Friedel generalizada (30) y, para la aleación <u>CuNi</u>, una serie de cálculos con el método Celular de Dispersión Múltiple con Intercambio E<u>s</u> tadístico X× $\beta$ , tratando de seguir , en cierta forma, la metodología empleada para una descripción tipo bandas sugeridas por Keller y Garritz(-11, 18.c y 18.e). Estos autores propusieron un modelo de átomo-en-materiacondensada y una forma para la ocupación electrónica, donde la carga para cada estado dentro de la esfera del átomo central a tratar (conocida como esfera de Wigner-Seitz) se obtiene llevando a la autoconsistencia el potencial en esa región. Este tipo de cálculos se realizan con un sólo átomo central y se simula la existencia del número de átomos, a diferentes distancias, requeridas para simular materia condensada, con un pote<u>n</u> cial esféricamente simétrico generado por las densidades electrónicas de

1

estos átomos. Mientras que el potencial dentro del átomo central se lleva a la autoconsistencia, el potencial fuera de éste permanece invariable du rante todo el cálculo.

El objetivo de los cálculos realizados fue, en primera instancia, poner a prueba el modelo propuesto por Keller y Garritz, programándolo <u>pa</u> ra realizarlo en forma automática y, segundo, aplicarlo para analizar la situación de las aleaciones de CuMn y CuNi.

Se modificó el programa Celular para que la carga dentro de la esfera de Wigner-Seitz fuera autoconsistente. Se realizó el cálculo de <u>Cu</u>Ni, esperando obtener resultados similares a los de Pisanty, y de CuMn.

En este trabajo se intentó, de esta forma, dar una explicación a la formación de momento magnético en la aleación de <u>Cu</u>Mn y la ausencia -del mismo en <u>Cu</u>Ni.

El presente trabajo pretende, primero: dar ciertos fundamentos te<u>ó</u> ricos y, segundo: con base en lo anteriormente expuesto, exponer y discutir los resultados obtenidos en el desarrollo del cálculo. Por esto el -trabajo se ha dividido en tres capítulos.

En el primero se revisa la clasificación fenomenológica de los materiales, dependiendo del comportamiento observado cuando se someten a un campo magnético. Allí se exponen las nociones básicas de mecánica cuántica para comprender el fenómeno del magnetismo, al igual que una descrip-ción del problema físico a resolver y de algunos modelos cuánticos que -pretenden explicar y predecir el comportamiento magnético de la materia.

En el segundo, se explica el método empleado en el trabajo, se des cribe el desarrollo de los cálculos, se proporcionan los resultados obte-

2

nidos y, por último, se discuten y, hasta donde es posible, se comparan - con otros resultados teóricos.

Al final, en el tercer capítulo, se presentan las conclusiones.

#### CAPITULO I

#### Fundamentos Teóricos

En el presente capítulo se expone en forma breve:

 1.- El comportamiento empírico de la materia cuando es expuesta a un campo magnético.

2.- La explicación de la mecánica cuántica al respecto y algunos otros conceptos necesarios para comprender el siguiente capítulo.

3.- Una descripción del problema físico al cual pertenece el problema a tratar; y.

 4.- Algunos modelos cuánticos que intentan explicar y predecir el comportamiento magnético de ciertas aleaciones.

I.l. Comportamiento magnético.

Desde la antigüedad se conoce que ciertos materiales tienen propiedades magnéticas. En el siglo XIX se comienza a formular la teoría del magnetismo y a considerarlo parte de un todo; el electromagnetismo.

El material que posee las propiedades magnéticas más sorprendentes es el hierro (ferromagnético). Existen otros elementos como el níquel, cobalto, y el gadolinio y disprosio a bajas temperaturas, que tienen propiedades magnéticas análogas a las del hierro, al igual que ciertas aleaciones especiales.

Se ha observado que al colocar cualquier material en un campo --magnético puede tener dos tipos de comportamiento. Ciertos materiales ---- ejercen una fuerza contraria al campo magnético aplicado (repelidos) y otros ejercen una fuerza en sentido contrario (atraídos). Así surge la – primera clasificación: aquéllos que son atrídos por el campo magnético – se les llama <u>paramagnéticos</u> y los que son repelidos diamagnéticos.

Estas observaciones llevaron a la conclusión que los materiales pueden tener momentos dipolares intrínsecos(9), como los imanes, o momentos dipolares inducidos en éllos debidos a la aplicación de un campo magnético externo. En presencia de un campo magnético, los dipolos magnéticos elementales actuarán de cierta forma para establecer entre ellos mismos un campo de inducción que modificará el campo original, figura 1(7).



Figura 1.- Líneas de campo magnético: a) normal, b) con un material paramagnético y c) con un material di<u>a</u> magnético.

Se ha encontrado empíricamente que para ciertos materiales en con diciones específicas, como bajas temperaturas y campos magnéticos pequeños, se cumple con la relación:

 $M = \chi H$ 

1.1

(tely

donde H es la intensidad de campo magnético y está asociada con las co-rrientes macroscópicas,  $\chi$  se conoce como susceptibilidad magnética y Mes la magnetización dada por:

donde  $\mu$  es el momento magnético del material y V es el volumen. El traba jo en el estudio de propiedades magnéticas de los materiales radica en de terminar X y encontrar su dependencia con la temperatura y el valor de H.

La susceptibilidad magnética en ciertos materiales puede ser un n<u>ú</u> mero real. Cuando es negativa, implica que el material es repelido por el campo magnético, es diamagnético; su origen es la ley de Lenz (26.a): El momento magnético dipolar que proviene de las corrientes inducidas por un campo aplicado se opone a dicho campo. El orden de magnitud de  $\chi$  es de - $10^{-6}$ emu.

Si  $\chi$  es positiva, el momento dipolar del material tiende a alinear se en la dirección del campo aplicado, por lo tanto es atraído hacia él y la sustancia es paramagnética; el orden de  $\chi$  es de 0-10<sup>-4</sup> emu.

I.2. Relación entre momento magnético y momento angular.

El hecho de que un material posea  $\chi$  positiva, implica que posee un momento magnético (mm). El mm en el material es producido por los mm de los átomos. El mm del átomo puede expresarse como un acoplamiento en-tre el mm de los electrones y el mm de los nucleones; y cada uno de ellos es proporcional a los momentos angulares de cada partícula:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N_{e}} \frac{q_{e}}{2m_{e}} \left( \mathbb{L}_{i} + \mathcal{I}_{i} \right) + \sum_{j=1}^{N_{e}} \propto_{j} \left( \mathbb{L}_{j} + g_{j} \mathcal{I}_{j} \right)$$

$$I.3$$

donde Ne es el número de electrones, Nn es el número de nucleones,  $q_e$  es la carga del electrón,  $m_e$  su masa,  $\ll_j$  es una constante que depende del nu cleón (protón o neutrón) y es inversamente proporcional a la masa de la partícula,  $g_n$  es el factor de Landé para el nucleón a tratar (5.58 para el protón),  $L_r$  es el momento angular orbital de la partícula  $\gamma$  y  $S_r$  es el momento angular de espín de la misma.

Dado que q\_/2m\_~18364;, la ecuación I.3 puede escribirse como:

$$\mathcal{H} \approx \sum_{i=1}^{M_{e}} \frac{q_{e}}{m_{e}} \left( \mathbb{L}_{i} + 2 \mathbf{S}_{i} \right)$$
 1.4

Esto lleva a concluir que cuando se tienen átomos con subcapas llenas, los mm de espín y, separadamente, los mm dipolares orbitales se cancelan por pares, como ocurre en los iones, gases nobles y átomos con configuraciones electrónicas con subcapas llenas. Solamente los átomos con subcapas no saturadas pueden tener electrones no apareados, el moemnto angular de espín no se cancela y produce el paramagnetismo.

Algunos materiales poseen magnetización espontánea, es decir, no se re quiere la presencia de un campo magnético externo para observar el compor tamiento magnético. Como ejemplo de magnetización espontánea están los imanes. Este fenómeno se explica por la formación de regiones pequeñas del material que poseen un mm neto. Estos arreglos son de orden macroscópicos. Los más conocidos son: el <u>ferromagnetismo</u>, el <u>antiferromagnetismo</u> y el ferrimagnetismo.

El ferromagnetismo es un tipo de magnetización que el material posee independientemente que exista un campo magnético.

Consideremos el caso del níquel, cobalto y hierro, los cuales tienen

parcialmente llenas las subcapas internas 3d. Los números cuánticos  $m_1$  y  $m_s$  para los electrones 3d, en un átomo de éstos, tendrán aquellos valores que minimicen la energía del sistema y que sean consistentes con el principio de exclusión de Pauli. El factor de Landé, que especifica la rela--ción del mm dipolar total con el momento angular total, tiene un valor <u>pa</u> ra estos materiales cercano a dos, que corresponde al valor para el mome<u>n</u> to angular de espín del electrón; ésto indica que la formación del mm se debe al paralelismo de los espines y no a los mm dipolares orbitales; por tanto, los electrones en la subcapa 3d de un átomo de los elementos citados, se alínean entre ellos mismos, de tal forma que los espines están <u>pa</u> ralelos, ya que ello reduce la energía total del átomo. Así, un átomo de hierro, en particular, posee un mm neto. Se dice que el acoplamiento de -espín se debe a la interacción de intercambio<sup>\*\*</sup>. Este fenómeno ocurre en -el átomo.

Si consideramos una red cristalina de átomos de hierro, existe interacción de intercambio entre átomos adyacentes (ver sección I.4.), debido a que los átomos están suficientemente cerca. Esta interacción entre átomos conduce, también, a un acoplamiento de espín paralelo. Así, por el fenómeno cooperativo de muchos átomos, se forma un mm intrínseco del material, originando el ferromagnetismo.

Mediante la teoría de bandas, se explica que la banda parcial de un espín será disminuída en energía por la interacción de intercambio y la banda parcial del otro espín será aumentada en energía por esta inte--\*\* La interacción de intercambio será descrita más adelante en este traba jo, y proviene del acoplamiento del espín electrónico.

8

racción; ésto hace que la energía total del sistema disminuya.

Cuando la interacción de intercambio produce un acoplamiento de <u>es</u> pín antiparalelo entre átomos con mm iguales, se produce el fenómeno de antiferromagnetismo, como en el MnO<sub>2</sub>.

Si la interacción de intercambio produce un acoplamiento de espín antiparalelo, pero con mm diferentes, como en la ferrita, donde los iones involucrados son el Ni<sup>2+</sup> y el Fe<sup>3+</sup>, se forma un acoplamiento de espín antiparalelo. Como la magnitud de los mm son diferentes, se produce una mag netización distinta de cero, llamando al material ferrimagnético.

El comportamiento ferromagnético, antiferromagnético y ferrimagnético se puede representar figurativamente como:

donde la magnitud del mm está representada por el tamaño de las flechas.

I.3. Dependencia de  $\chi$  respecto a T.

Se ha encontrado experimentalmente que la susceptibilidad magnética en la mayoría de los casos, depende de la temperatura.

Para los materiales diamagnéticos, se observa la menor dependencia con la temperatura.

El paramagnetismo de materiales aislantes a bajas temperaturas cum ple con la relación:

X= C/τ

I.5

llamada ley de Curie, donde T es la temperatura y C una constante del material a tratar. Esta relación nos dice que el campo magnético requerido para alinear los mm del material será mayor mientras aumente la temperat<u>u</u> ra.

Ciertos materiales paramagnéticos metálicos tienen la caracteristi ca que la susceptibilidad no varia con respecto a la temperatura, a este tipo de paramagnetismo se le llama de Pauli.

Existen ciertos casos en donde el material presenta una dependen-cia con la temperatura semejante a la del magnetismo de Curie-Weiss:

$$\chi = C/(T - \Theta)$$
 I.6

donde  $\Theta$  es la corrección a la temperatura, a partir de la cual tienen -ese comportamiento.

Los materiales ferromagnéticos poseen un máximo de magnetización – en los 0 K. Aquella temperatura donde la magnetización espontánea desaparece, se le llama temperatura de Curie,  $T_c$ ; a partir de la cual el material cumple con la relación:

 $\chi = C/(T - T_c)$  I.7

comportándose como un material paramagnético simple.

Para los materiales antiferromagnéticos, al ir aumentando la tempe ratura, la magnetización se incrementa hasta llegar a un máximo, conocida la temperatura como de Neel,  $T_n$ ; después de la cual, se comporta como un material paramagnético. El comportamiento de estos materiales puede esque matizarse y resumirse en la figura 2.



Figura 2.- Dependencia de la susceptibilidad magnética de los materiales con respecto a la temperatura.

I.4. Crígenes mecánico cuánticos del magnetismo.

A partir de la mecánica cuántica es posible dar explicaciones plau sibles a la mayoría de los fenómenos magnéticos. Cuando se quiere conocer la magnetización de un material, es necesario determinar su mm, el cual – es función del momento angular de espín, una propiedad de origen cuántico (21.a).

Para describir los fenómenos magnéticos de acuerdo a la mecánica cuántica, puede considerarse un sistema de electrones en un campo magnét<u>i</u> co uniforme y, por conveniencia, dirigido en la dirección del eje z (24), así, se tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$\begin{split} & \hat{H} = -\sum_{k} \frac{\hbar^{3}}{2m} \nabla_{k}^{2} + \hat{U} + H_{2} \frac{e^{\frac{\hbar^{3}}{2}}}{4imc} \sum_{k} (X_{k} \frac{\partial}{\partial y_{k}} - y_{k} \frac{\partial}{\partial X_{k}}) + \\ & + H_{2} \frac{e}{mc} \sum_{k} \hat{S}_{z_{k}} + H_{2}^{2} \frac{e^{3}}{8mc^{4}} \sum_{k} (X_{k}^{3} + y_{k}^{4}). \end{split}$$

donde  $\hat{S}_{I}$  es el operador de la componente en z del espín,  $\hat{U}$  es el opera-dor de energía potencial originada por la interacción de los electrones con ellos mismos y el núcleo,  $H_{Z}$  es la componente en z del campo magnético y el índice k corre sobre todos los electrones.

Se puede observar que la suma del tercer término de la ecuación I.8 corresponde a la componente en z del momento angular y si se analiza apar te, los términos lineales de H<sub>2</sub> en I.8, se obtiene:

$$-H_{z}\hat{A}_{z} = H_{z\frac{e}{2\pi\epsilon}} \sum_{\kappa} (\hat{\mathbb{L}}_{z\kappa} t \hat{\mathbb{S}}_{z\kappa})$$

$$I.9$$

donde  $\hat{\mu}_{2}$  es el operador de la componente en z del mm total citado en I.4.

Si se efectúa el cálculo de la energía por teoría de perturbacio-nes(22) hasta segundo orden y se supone simetría esférico; como:

$$\hat{\mu}_n = -\frac{\partial E}{\partial H}$$
 I.10

donde  $E_n$  es la energía de la función espín-orbital n-ésima del sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{z} &= \langle n | \hat{\mathcal{H}}_{z}^{(o)} | n \rangle + \mathcal{L} H_{z} \sum_{\mathbf{n}} \frac{|\langle n | \hat{\mathcal{H}}_{z}^{(o)} | n' \rangle|^{n}}{\mathcal{E}_{w}^{(o)} - \mathcal{E}_{w}^{(o)}} + \\ &+ H_{z} \frac{e^{a}}{4mc^{a}} \sum_{\mathbf{n}} \langle n | X_{\mathbf{n}}^{a} + y_{\mathbf{n}}^{a} | n' \rangle, \end{aligned}$$
I.11

donde n representa la función de onda definida por los números cuánticos  $\{n, j, m_j\}$  y n' a otra función de onda con números cuánticos diferentes,  $\hat{\mu}_{2}^{(n)}$  es el mm del estado basal y la prima sobre la suma indica que el término n=n' se excluye.

El tercer término de I.ll corresponde al diamagnetismo clásico. Es te fenómeno se presenta en todo átomo, ión o molécula a la cual se le apli ca un campo magnético. Si se supone que la sustancia no tiene mm intrínse co, el único término que queda es éste.

Al aplicar un campo magnético a una sustancia, ésta pierde su neutralidad por la acción del campo eléctrico inducido, provocándose así, -que los electrones adquieran una velocidad angular adicional, llamada pre cesión de Larmor. Este fenómeno sólo es observable en materiales donde el mm resultante se anula. Si se supone simetría esférica en un material don de sólo exista diamagnetismo, de la ecuación I.ll se tiene:

la constante de este término es de magnitud pequeña, por tanto se espera que este término sea despreciable y contrario al campo aplicado.

Si no se supone simetría esférica, el segundo término en I.ll no se anula y se tiene la relación para el mm promedio como:

$$\hat{\mu}_{2} = 2 H_{2} \sum_{n'}^{\prime} \frac{|\langle n| \hat{\mu}_{2}^{(m)} | n' \rangle|^{2}}{\mathcal{E}_{n'}^{(m)} - \mathcal{E}_{1'}^{(m)}} - H_{2} \frac{e^{4}}{6mc^{4}} \sum_{k} \langle n| \Gamma_{k}^{4} | n \rangle \qquad \text{I.13}$$

El primer factor en I.13 representa una polarización cuántica, relacionada con las transiciones virtuales entre los estados estacionarios del átomo cuando no hay campo magnético aplicado. Este término se conoce como paramagnetismo de van Vleck, por haber sido éste el primero en estudiar este efecto.

El primer término en I.ll es el responsable del paramagnetismo de orientación, o sea, de la magnetización originada por el momento angular del átomo; es el único término de los tres de dicha ecuación, que depende fuertemente de la temperatura y predomina sobre los otros(21).

Para estudiar un caso en particular, considérese un sistema con si

metría esférica, que no tenga contribución orbital al mm y donde sólo haya un electrón(7). Con estas aproximaciones, como la contribución paramag nética a la susceptibilidad surge del espín de los electrones que interac tuan al aplicar un campo magnético, el mm asociado al sistema está dado – por:

El Hamiltoniano que describe la interacción de este momento con el campo aplicado es:

$$\hat{H} = -\hat{\mu} \cdot \hat{H} = g \hat{\mu} \hat{S} \cdot \hat{H}$$
 1.15

el cual tiene dos valores propios, al operar sobre las funciones de onda de espín, con energías dadas por:

$$E = m_s g \beta H$$
 I.16

donde  $m_{a} = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ , con una diferencia de energía dada por:

$$\Delta E = g \beta H$$
 I.17

A temperatura ambiente existe la energía necesaria para pasar de un nivel a otro, ya que  $\Delta E$  es del orden de 2 cm<sup>-1</sup> comparado con kT de 200 cm<sup>-1</sup>. En estas condiciones no se observa que el sistema posea paramagne-tismo, salvo un ligero exceso en el estado basal.

La proyección en la dirección del campo del mm,  $\mu_n$ , de un estado n, es la derivada parcial de la energía de ese estado  $E_n$ , con respecto al campo:

$$\mu_n = -\frac{\partial E_n}{\partial H} = -m_s g\beta \qquad \qquad I.18$$

Para determinar el mm de cualquier material, se deben considerar – los mm individuales de cada estado ponderados por su distribución estadí<u>s</u> tica.

El factor de Boltzmann para calcular la probabilidad,  $P_n$ , para cada estado discreto que tiene la energía  $E_n$  en el equilibrio térmico es:

$$P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{E \times P[-E_n/kT]}{\sum E \times P[E_n/kT]}$$
I.19

que es únicamente el número de estados con esa energía, N<sub>n</sub>, entre el núm<u>e</u> ro total de estados existentes, N. En este caso se tiene una función de onda para cada estado y el término "nivel" indica los estados que tienen la misma energía. Para obtener el mm macroscópico, al que se le ha llamado magnetización, se suma cada mm de los estados individuales pesados por su probabilidad:

$$M = N_{a} \sum_{m_{s}} \mu_{n} \dot{P}_{n}$$
 I.20

donde  $N_a$  es el número de Avogadro, ya que en esta relación se considera una mol de material. Al substituir en esta ecuación el valor de  $P_n$  y para este sistema se tiene:

$$M_{I} = \frac{N_{a} g_{B} \sum_{m_{s}} m_{s} EXP[-E_{n}/kT]}{\sum_{m_{s}} EXP[-E_{n}/kT]}$$
1.21

Al substituir el valor de  ${\rm E}_{\rm n}$  por la ecuación I.16 y sumar para los valores de m $_{\rm S}$  y ya que S tiene el valor de  $V_2$ , la ecuación I.21 se transforma en:

$$M_{l} = \frac{N_{a} g \beta}{2} \left( \frac{E \chi P[g \beta H/_{2k} T] - E \chi P[-g \beta H/_{2k} T]}{E \chi P[g \beta H/_{2k} T] + E \chi P[-g \beta H/_{2k} T]} \right)$$

$$I.22$$

Al considerar que 30 H/kT << 1, se tiene la aproximación:

$$\mathsf{EXP}\left[\frac{\pm 3\beta H}{2kT}\right] \sim \left[\frac{1\pm 3\beta H}{2kT}\right]$$
 I.23

y la ecuación I.22 se transforma en:

$$M = \frac{N_{e} g^{2} \beta^{2} H}{4 k T}$$
I.24

de I.1 la ecuación I.24 puede escribirse como:

$$\chi_m = \frac{N_a g^2 \beta^2}{4kT}$$
I.25

donde  $\chi_m$  es la susceptibilidad molar.

Si a  $N_a g^2 \beta^2/4k$  le llamamos C, se obtiene la ecuación I.4 que es la ley de Curie.

Este es un ejemplo sencillo de como la mecánica cuántica predice el comportamiento de ciertas sustancias en condiciones dadas.

1.5. Integral de Intercambio y Hamiltoniano de Heisenberg.

Cuando se considera un sólido formado por N átomos, existe la llamada interacción de intercambio. Este efecto es el producto de las inte-racciones coulómbicas entre los electrones y el resultado del principio de exclusión de Pauli.

Para el estudio de átomos o moleculas es necesario incluir en el -Hamiltoniano la interacción de intercambio(13, 21). Diarc propuso en 1929 un Hamiltoniano en donde considera la inte-racción de intercambio, con la aproximación de que hay n electrones dis-tribuidos entre n orbitales monoelectrónicos mutuamente ortogonales:

$$\hat{H} = -\frac{1}{4} \sum_{k,i} J_{k,i} \left( 1 + 4 \hat{S}_k \cdot \hat{S}_i \right)$$
(alectrones)
$$I.26$$

donde  $\hat{\mathbf{S}}$ ; representa el operador de espín total del átomo i-ésimo y  $\mathbf{J}_{k,1}$ es la constante de acoplamiento isotrópica, que es una medida del desdo--blamiento de niveles debido al acoplamiento de los momentos de espín. Si se considera que todos los orbitales en el mismo átomo son iguales, se ob tiene de I.26:

$$\widehat{H} = -2 \sum_{i,j} J_{ij} \widehat{S}_i \cdot \widehat{S}$$
(atomos)
$$1.27$$

que es conocido como el Hamiltoniano de Heisenberg-Dirac-Van Vleck. A pesar que este Hamiltoniano es obtenido al hacer aproximaciones muy drásticas, puede interpretar correctamente propiedades magnéticas de muchos materiales.

Heisenberg fue el primero en obtener la ecuación I.27 de manera fe nomenológica. Este Hamiltoniano lo obtuvo del análisis de la molécula de hidrógeno por la teoría de Heitler y London (unión valencia). Este análisis se estudiará brevemente, y de ninguna manera formal(13 y 21.a) para comprender un poca la interacción de intercambio.

Para el sistema de la molécula de hidrógeno, dos protones, a y b, y dos electrones, l y 2, se tiene el Hamiltoniano:

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2} \nabla_{1}^{2} - \frac{1}{r_{a}} - \frac{1}{2} \nabla_{2}^{2} - \frac{1}{r_{b2}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{r_{a1}}} \qquad I.28$$

donde los primeros términos consideran un átomo de hidrógeno con núcleo a y electrón 1,  ${}^{\text{H}}\hat{H}_{a}(1)$ ; el tercero y cuarto otro átomo de hidrógeno con núcleo b y electrón 2,  ${}^{\text{H}}\hat{H}_{b}(2)$ ; el quinto y sexto las atracciones faltantes de núcleo y electrón, y el último término la repulsión electrónica,  ${}^{\text{H}}\hat{H}'$ . Se ha considerado la aproximación de Born-Oppenheimer.

Si se resuelve el sistema por teoría de perturbaciones, la solución de la ecuación de Schrödinger se aproxima como el producto de las soluciones para dos átomos de hidrógeno en estado basal:

$$\Psi_1 = 1S_{\alpha}(1) 1S_{b}(2)$$
 I.29

donde  $1S_{\alpha}(1)$  representa la función ls con núcleo a y electrón l y, de la misma forma,  $1S_{\lambda}(2)$  para b y 2.

Como no se puede distinguir entre el electrón 1 y el 2, debe considerarse el intercambio de la partícula, teniendo la solución:

$$\Psi_2 = 15_a(2)15_b(1).$$
 I.30

La función de onda a orden cero será una combinación lineal de  $Y_1$  y  $Y_2$ . Estas funciones son linealmente independientes y con valores propios iguales, por esto, se dice que existe degeneración de intercambio. Los n<u>i</u> veles de los átomos de hidrógeno que eran degenerados, sufren desdoblamie<u>n</u> to por la perturbación producida por el acercamiento de los átomos para formar la molécula.

De acuerdo a la teoría de perturbaciones para el caso degenerado, debe cumplirse con:

1.32

$$\begin{array}{ccc} H_{11} - S_{11}E & H_{12} - S_{12}E \\ H_{21} - S_{21}E & H_{22} - S_{22}E \end{array} = O \\ \end{array}$$

donde:

$$S_{ij} = \langle \Psi_i^* | \Psi_j \rangle$$

y para H<sub>ij</sub>:

$$H_{ij} = \langle \Psi_i^* | \hat{H} | \Psi_j \rangle$$
1.33

donde  $\hat{H}$  esta dada por I.28.

Un intercambio de coordenadas no debe afectar al Hamiltoniano en sí; entonces  $H_{11} = H_{22}$  y  $H_{12} = H_{21}$ . Si  $\Psi_i$  y  $\Psi_j$  son funciones ortonormales e i=j, entonces  $S_{ij}=1$ ; y cuando i≠j,  $S_{ij}\neq 0$  por ser un estado no degenerado.

$$\begin{split} H_{11} & \text{puede escribirse como:} \\ H_{11} &= \langle |S_{\alpha}(1)| |\hat{H}_{\alpha}(1)| |S_{\alpha}(1) \rangle + \langle |S_{b}(2)| |\hat{H}_{b}(2)| |S_{b}(2) \rangle + \\ &+ \langle |S_{\alpha}(1)| |S_{b}(2)| |\hat{H}'| |S_{\alpha}(1)| |S_{b}(2) \rangle . \end{split}$$

donde el primer término es el valor esperado para el átomo de hidrógeno, con centro en a y electrón l, de  $-\frac{1}{2}$  Hartree; el segundo término tiene el mismo valor. Si se define la integral coulómbica como:

$$K \equiv \langle 1S_{a}(1) | S_{b}(2) | \hat{H}' | 1S_{a}(1) | S_{b}(2) \rangle$$
 I.35

se obtiene que H<sub>11</sub>:

$$H_{11} = -1 + K$$
 I.36

Para H<sub>12</sub> se tiene que:

$$H_{12} = \langle 1S_{a}(2) 1S_{b}(1) | 1\hat{H}_{a}(1) + 1\hat{H}_{b}(2) + 1\hat{H}' | 1S_{a}(1) 1S_{b}(2) \rangle$$
I.37

los términos correspondientes a  $\hat{\mathcal{H}}_{\bullet}(1)$  y  $\hat{\mathcal{H}}_{\bullet}(2)$  tienen el valor de  $-\frac{1}{2}S_{12}$ . Si definimos la integral de intercambio como:

$$J \equiv \langle 1S_{a}(2) 1S_{b}(1) | \frac{1}{H} | \frac{1}{1}S_{a}(1) 1S_{b}(2) \rangle$$
I.38

entonces:

$$H_{21} = -S_{12} + J$$
 I.39

y las energías que resuelven I.31 pueden escribirse como:

$$E_1 = -1 + \frac{K+J}{(1+S_{12})}$$
;  $E_2 = -1 + \frac{K-J}{(1-S_{12})}$  I.40

con las soluciones:

$$\varphi_{1} = \frac{\Psi_{1} + \Psi_{2}}{(2(1+S_{14}))^{V_{2}}} \qquad ; \qquad \varphi_{2} = \frac{\Psi_{1} - \Psi_{2}}{(2(1-S_{14}))^{V_{2}}} \qquad I.41$$

Al exigir que se cumpla el principio de exclusión de Pauli, el cual dice que las funciones de onda total, espacial y de espín, deben ser ant<u>i</u> simétricas ante el intercambio de coordenadas;  $\mathcal{Q}_1$  habrá que multiplicarla por una función de espín antisimétrica, que representa espines antiparalelos:

donde  $\mathcal{A}(\mathsf{m}_{s}) = \delta \mathsf{m}_{s, \frac{1}{2}}$  y  $\beta(\mathsf{m}_{s}) = \delta \mathsf{m}_{s, -\frac{1}{2}}$ ; y,  $\mathcal{A}_{a}$  se multiplicará por funciones de espín simétricas, que representa espines paralelos:

$$Q_{T_{vl}}^{-} = \frac{j^{V_{a}}(\underline{Y}_{1} - \underline{Y}_{2})}{(1 - S_{1a})^{V_{a}}} \begin{cases} \alpha(1) \ \alpha(2) \\ \beta(1) \ \beta(2) \\ [\alpha(1) \ \beta(2) + \beta(1) \ \alpha(2)] \ j^{-V_{a}} \end{cases}$$
I.43

La función  $\mathscr{Y}_{rst}^{*}$  tiene espín total nulo y se dice que es un estado singulete (2S+1=1). La función  $\mathscr{Y}_{rst}^{*}$  tiene espín total igual a uno y se di ce que es un estado de triplete (2S+1=3).

Para la molécula de hidrógeno, J<0, al graficar I.40 se espera obtener la gráfica:



Figura 3.- Esquema de energía-distancia obtenida por la teoría de Heitler y London para la molécula de Hidrógeno.

Se espera que el estado basal sea el de espines paralelos por ser el de menor energía.

Ahora, el problema consiste en obtener un Hamiltoniano de espín -que describa correctamente esta situación. Para esto, el producto punto de los operadores de espín esta dado para 🌾 y 👫 como:

$$\widehat{S}_{1} \cdot \widehat{S}_{2} \cdot \widehat{S}_{4} = -\frac{3}{2} \hbar^{2} \cdot \hat{Y}_{x}^{*}, \quad ; \quad \widehat{S}_{1} \cdot \widehat{S}_{2} \cdot \hat{Y}_{x}^{-} = \frac{1}{2} \hbar^{2} \cdot \hat{Y}_{x}^{-} \qquad 1.44$$

Con los cuales se puede obtener una ecuación para la energía total del singulete o del triplete:

$$E_{1,2} = E_{a}^{*} + E_{b}^{*} + \frac{1}{(1 \pm S_{14})} \left[ K - \frac{1}{2} J - \frac{2}{2^{*}} (\hat{S}_{1} \cdot \hat{S}_{2}) J \right]$$
 I.45

que está en función de un acoplamiento entre los momentos angulares de es pín.

Si se supone que el sistema molecular de hidrógeno puede escribirse como en I.45, la parte del Hamiltoniano correspondiente al acoplamiento de los momentos angulares de espín es:

$$\hat{H} = -2 J_{ab} \hat{S}_{1} \cdot \hat{S}_{2} \qquad I.46$$

que es el Hamiltoniano de Heisenberg para dos átomos y está de acuerdo -con la ecuación I.27. Se puede, de esta manera, ver el papel tan importan te que desempeña el intercambio en la mecánica cuántica.

#### I.6. Resultados experimentales.

Las propiedades características de ciertas aleaciones donde un metal de transición se presenta como impureza en una matríz de un metal nóble - Cu, Au y Ag-, ha recibido atención especial en los últimos veinti-cinco años y ha originado numerosos experimentos a bajas temperaturas y varios análisis teóricos. El origen y explicación de los estados electrónicos de las impurezas de estas aleaciones está poco entendido, aún en la actualidad. Este interés se origina porque en ciertas aleaciones, como <u>CuMn</u>, -<u>AgMn</u>, <u>CuFe y CuCr</u> se forman mm localizados en los metales que están como impurezas, y en otras no, como <u>CuNi</u>, <u>Al</u>Co y <u>Al</u>Ni, lo que se ha constatado al medir sus diferentes propiedades.

Se definen los sistemas magnéticos(27) como aquéllos cuya suscept<u>i</u> bilidad magnética sigue la ley de Curie-Weiss, ecuación I.6; de esta ecua ción es posible obtener momentos magnéticos efectivos, p<sub>eff</sub>,por átomo, da do por:

$$C = P_{off}^{1} \beta^{3} / 4 \kappa \qquad 1.47$$

donde el momento magnético efectivo se define como:

$$P_{eff} = 9[S(S+1)]^{v_a}$$
 1.48

donde S es el momento angular total de espín.

Se han estudiado especialemnte, desde el punto de vista experimental, los efectos debidos a la presencia de átomos aislados (aleaciones d<u>i</u> luídas), donde la dilución es tal, que las propiedades observadas varían linealmente con la concentración. La dificultad radica en eliminar – por dilución- las interacciones entre las impurezas; porque existe la forma-ción de cúmulos químicos y cúmulos magnéticos que dificultan la interpretación de los experimentos.

Las propiedades que constituyen el campo de investigación común, proporcionan información necesaria para establecer modelos teóricos para explicar este tipo de sistemas. Estas propiedades se discuten a continuación, considerando la contribución de la impureza a las propiedades del - elemento huésped y describiendo las propiedades relacionadas con las alegciones  $\underline{OuMn}$  y  $\underline{OuNi}$ .

Propiedades Magnéticas:

El comportamiento magnético de varias aleaciones permite clasificar los en tres grupos(27):

Clase A: Los sistemas que representan susceptibilidades magnéticas bajas y aproximadamente independientes de la temperatura. Este tipo de paramagnetismo se puede explicar con un modelo de electrones libres.

A esta clase de sistemas pertenece la aleación <u>Cu</u>Ni. Su susceptib<u>i</u> lidad magnética, varía muy poco al variar la temperatura, y tiene un va-lor de:

 $\chi(0) = 1.19 \times 10^{-6} \text{ emu/mol}\%$ 

Los estudios teóricos de Blaha y Callaway(3) concuerdan con la proposición de Beaglehole(4) sobre la existencia de fluctuaciones de espín para esta aleación.

Clase B: La susceptibilidad magnética de estas aleaciones presenta una dependencia con la temperatura del tipo Curie-Weiss, dada por la ecua ción I.6. En estos casos la temperatura de Curie puede utilizarse como pa rámetro, para establecer el intervalo de validez de la ley para estos sis temas.

La aleación de <u>Cu</u>Mn pertenece a esta clase. Los datos experimentales reportados son:

 $\chi(0) = 2.6 \text{ emu/mol%}$   $p_{eff} = 4.44^{+} 0.03 \implies n^{\dagger} - n^{4} = 3.5 \text{ emu}$  $\Phi_{x} = 0.0095 \text{ K}$  este tipo de comportamiento se manifiesta entre 0.0095 y 0.25 K; esto es, entre  $\theta_x$  y 25  $\theta_x$ (14).

Los valores de  $\chi(0)$  en aleaciones al 1% de la impureza transicional presentan un máximo alrededor de la región central de la serie d:





que también se observa en los valores experimentales obtenidos para p<sub>eff</sub>:



Figura 5.- Resultados experimentales y teóricos(27)(ecuación I.48, línea continua), del p $_{\rm eff}$  de la impureza en Au y Cu.

Para el estudio del diagrama de fases magnéticas en función de la temperatura y la concentración revisar la referencia (12).

Clase C: La contribución orbital al mm del sistema se considera nu la. Se sigue la ley de Curie, ecuación I.5.

Resistividad Eléctrica:

Las vibraciones de la malla originan cierta resistencia eléctrica por la dispersión fonónica de los electrones de conducción. Existe cierta resistencia eléctrica residual debida a las imperfecciones de la red cris talina y a la impureza, la cual se conoce como de la impureza. Cuando se disminuye la temperatura, al intervalo del helio líquido, la resistencia eléctrica debida a vibraciones de la malla, en la mayoría de los metales, es despreciable; y la resistencia electrica residual es constante cuando proviene de fenómenos independientes de dispersión electrónica.

Sin embargo, se ha encontrado que, para ciertas aleaciones diluí-das, existe cierta tendencia a presentar incrementos en la resistividad de la impureza a bajas temperaturas. Con base en lo anterior, surgen dos clasificaciones(27):

Clase A: En el intervalo de temperaturas del helio líquido, la variación de la resistividad de la impureza con la temperatura es mínima.

Clase B: La variación de la resistividad de la impureza, a bajas temperaturas, es de la forma:

$$f(T) = f(0) \left( 1 + \left( \frac{T}{\Phi_r} \right)^2 \right)$$
 I.49

donde f(0) es la resistividad residual y  $\theta_r$  es una temperatura obtenida experimentalmente, del orden de  $\theta_r$ .

En algunos casos la dependencia con la tempeartura es logarítmica

y en muchos de estos se observa la presencia de un mínimo seguido de un máximo a medida que T disminuye; según el caso y el intervalo de concen-tración utilizado, la resistividad se vuelve una función lineal del ln(T).

$$f(T) = -A L T + D \qquad 1.50$$

donde A y D son parámetros independientes de la temperatura. Esta depen-dencia con la temperatura sugiere la presencia de fenómenos debido al --efecto Kondo(17). Kondo alrededor de 1964 (19), propone que este comport<u>a</u> miento se origina al considerar la interacción del espín de los electro--nes de conducción con el espín de los electrones de la impureza como un -proceso elástico.

En la figura 6 se muestran los datos de resistividad para diversas impurezas en cobre. Nótese la similitud con las figuras correspondientes a la susceptibilidad magnética y al momento magnético efectivo.



Figura 6.- Datos de resistividad para diversas impurezas en cobre. La aleación <u>Cu</u>Ni posee un comportamiento correspondiente al tipo A. La de <u>Cu</u>Mn posee una dependencia logarítmica con la temperatura. Los par<u>á</u> metros se dan a continuación:

|                         | CuNi  | CuMn                |
|-------------------------|---|---------------------|
| f (0)[* 1 cm/at%]       | 1.12  | 4.8                 |
| ⊖ <sub>r</sub> (K)      | and the second se | 0,8                 |
| Intervalo de T(K)       | 81- 295   | 1.2- 20             |
| Intervalo de Conc.(at%) | 0.5- 2.0  | 75x10 <sup>-4</sup> |
| Calor específico:       |   |                     |

El calor específico de un metal a bajas temperaturas puede expre-sarse como:

$$C_{\nu}(T) = \mathcal{Y}_{T} + \alpha T^{3} + \delta T^{5} + \beta T^{7}$$
 I.51

donde \* es el término electrónico y « es el fonónico.

En aleaciones el calor específico es el resultado de tres tipos de contribuciones, las cuales están relacionadas con ondas en el cristal, -electrones del sistema e impurezas magnéticas presentes en el mismo. Esta última contribución puede asociarse con el término electrónico por su naturaleza lineal. Aunque la impureza contribuye al calor específico, pueden considerarse sólo las contribuciones provenientes de la interacción entre electrones e impurezas aisladas, debido a las bajas concentraciones emplea das.

Para la aleación <u>Cu</u>Mn se tiene el comportamiento siguiente(5)(fig<u>u</u> ra 5).

- ..



Figura 7.- Gráfica de resultados de calor específico para <u>Cu</u>Mn con concentraciones de Mn: 1)1.15%, 2) 0.45%, 3)0.35%,
4) 0.15% y 5) cobre puro.

## I.7. Teoría sobre estructuras electrónicas de aleaciones intermetálicas.

Una teoría completa de las aleaciones con impurezas de metales de transición en metales nobles, debe incluir la presencia de electrones de conducción del anfitrión, los electrones d de la impureza con sus efectos locales de intercambio y sus interacciones con los de conducción, el enla ce químico y los efectos espín-orbita.

Diversas teorías han tratado de generar explicaciones para algunos de los fenómenos observados.

Una de ellas es la hipótesis de Korringa y Gerritsen(20), en la -cual se admite la presencia de interacciones elásticas entre los electro-nes de conducción. Este modelo puede explicar el comportamiento de la resistividad dependiente de la temperatura.

Schmitt(29), hacia 1956, plantea un modelo de campo molecular; en él supone la presencia de cierto acoplamiento ferromagnético entre las impurezas. Este modelo no explica las propiedades magnéticas y predice la presencia de efectos cooperativos en aleaciones diluídas, efectos que no se presentan.

Friedel(10), en 1958, propone la hipótesis del estado ligado vir-tual (elv): "Estos estados son casos particulares del fenómeno de resonan cia que se presenta cuando se colocan juntos dos sistemas con energías si milares. Aquí, se trata de los estados d de la impureza transicional y -los estados de conducción de la matriz. Estos tienen energías similares y las capas d de la impureza presentan un momento magnético neto resultado del llenado parcial. Comenzando con un estado d y un estado de conducción k, que dan lugar a los estados d $\pm$  k, se obtiene, por resonancia con los estados de conducción k', k'',..., una región en el espacio y energía don de cada uno de los estados presenta, en la aleación, una amplitud mayor sobre el átomo impureza y un fuerte carácter d. Al considerar el corres-pondiente exceso de carga, en los estados del continuo, se obtiene un exceso local de carga igual al del estado de enlace que se ha comentado. Es to es lo que se conoce como estado de enlace virtual"(10.d). Para el estudio de las propiedades asociadas a esta hipótesis se proponen dos modelos:

- Considerar un modelo de electrones libres para los de conduc-ción y analizar las funciones de onda por armónicos esféricos, suponien\_ do simetría esférica para la perturbación (impureza).

- Postular la existencia de un potencial U generado por la impureza, el cual es pequeño y repulsivo, Anderson 1961(1).

Para el primer caso la presencia de un átomo impureza perturba las funciones de onda de los electrones de conducción e induce corrimien tos de fase característicos,  $\eta_1$ . Para un estado de enlace,  $\eta_l$  tiene un valor de  $\pi$  en la base  $E_c$  de la banda de conducción y tiende a cero a energías mayores. En un elv,  $\eta_l$  parte de cero y se acerca al valor del estado de enlace si la perturbación es suficiente para captar un estado (figura 8).



Figura 8.- Esquema de co rrimientos de fase para: 1) estado de enlace y 2) estado ligado virtual.

Esta aproximación al estado de enl<u>a</u> ce se realiza en un intervalo de energía -(w), alrededor de la energía promedio  $E_{o}$ , que puede considerarse la del estado de en lace; w decrece con el incremento en uno ( estados más localizados) y aumenta la dif<u>e</u> rencia  $E_{o}-E_{c}$ .

Al aplicar esta descripción, se obtiene que el átomo impureza genera sólo un estado virtual d, el cual puede aceptar --

hasta diez electrones y se va llenando progresivamente a través del pri

mer período transicional. Así se puede explicar ciertas propiedades don de el máximo se encuentra a la mitad del período 3d.

Este máximo se encuentra por la dispersión resonante de los elec trones de conducción a nivel del elv generado por los estados electróni cos 3d de la impureza. A la mitad de la serie la posición de tal estado está muy cerca a la del nivel de Fermi del elemento huésped, lo que da lugar a una fuerte dispersión resonante de los electrones de conducción.

Friedel supuso que el desdoblamiento del elv por correlaciones de intercambio d-d, en dos estados d<sup>5</sup> con espines opuestos, podrían ll<u>e</u> narse sucesivamente en una serie transicional.

Encuentra que los parámetros que determinan su presencia son el número de electrones d de la impureza, la anchura de la banda del elv (  $\Delta \beta$ ) y el valor promedio del parámetro de intercambio  $\xi_{xx}$ , definido por:

$$\Delta E_{ex} = \frac{1}{2} P^{2} \mathcal{E}_{ex}$$
 I.52

donde AEe es el desdoblamiento de intercambio(25.a).

Si el desdoblamiento de intercambio es mayor que la anchura del



Figura 9.- Diagrama de densidad de estados. Se encuentran las características de un elv que permite formar mm.

32

elv:  $\Delta \Gamma_{ex} > \Delta B$ , éste podrá aparcer desdoblado por espín, y no para el ca so que  $\Delta E_{ex} < \Delta B$ .

El modelo de Friedel-Anderson predice que se formará un momento local si coinciden en la impureza estados locales estrechos y una interacción suficientemente fuerte entre electrones localizados. En resumen, Friedel-Anderson explican la formación de momentos magnéticos mediante el modelo de elv. Este se utiliza en sistemas donde el estado d metálico se presenta en bandas s-p del elemento huésped y los estados electr<u>ó</u> nicos parecen estar gobernados por interacciones, con los electrones de la matriz, del tipo coulómbico y de intercambio.

La presencia de propiedades peculiares y la presencia o ausencia de mm localizados en aleaciones, se explican al considerar la interac-ción entre los estados d ó f vacios de la impureza y los electrones de conducción de, aproximadamente, la misma energía.

Por 1970, Hirst(15) propone conferir a los electrones d de la impureza propiedades tipo atómicas semejantes a la de los electrones 4f. Esto conduce a estados electrónicos gobernados por interacciones interatómicas tipo d y los electrones de conducción contribuyen poco.

Johnson en 1979(16), realizó cálculos de impurezas de metales de transición (V, Mn, Fe, Ni y Cu) en cobre, por el método SCF-X -SW. Em--pleó, explicitamente, las dos primeras capas de vecinos de cobre y el - átomo central en arreglo cúbico centrado en las caras; pero no describió la inmersión de estos cúmulos en materia condensada. Para el caso -----MnCu<sub>12</sub>Cu<sub>6</sub> encuentra regiones de antienlace entre el manganeso y la primera capa y una de enlace entre éste y la segunada capa de vecinos de -

33
cobre. Para la aleación  $\text{NiCu}_{12}^{\text{Cu}_6}$  encuentra que los orbitales moleculares están muy combinados, con lo cual critica el modelo de Friedel-An-derson del elv. Basándose en sus resultados propone un Hamiltoniano para simular la interacción de intercambio.

## CAPITULO II

#### Resultados

.II.1. Método Empleado

El presente trabajo consiste en evaluar si el estudio de un átomo bajo condiciones de frontera que lo consideren, dentro de la malla crist<u>a</u> lina de un metal noble, lleva a alguna conclusión respecto a la naturaleza del magnetismo de ciertas aleaciones.

En 1977 Keller y Garritz(11, 18.c y 18.e) propusieron un modelo pa ra el estudio de materia condensada incluyendo condiciones a la frontera adecuadas para simular un cúmulo de átomos. A este modelo se le da el nom bre de estados ligados de átomo-en-materia-condensada.

Consiste en el estudio de un sólo átomo, donde el potencial que lo describe es llevado a autoconsistencia.

La ecuación de Schrödinger monoelectrónica a resolver es:

$$\left(-\nabla^{2}+\nabla(\mathbf{r})\right)\Psi_{i}=\xi_{i}\Psi_{i}$$
 II.1

donde el V(r) del sistema se modela para simular un cúmulo.

A continuación se incluye una descripción del procedimiento seguido en este estudio.

1.- Se generan las densidades electrónicas atómicas de cada átomo
que se estudiará en el cálculo(33). En nuestro caso en particular serán –
las de los átomos de manganeso, níquel y cobre.

2.- Se escoge cierto número de capas de vecinos correspondientes a

un arregio cristalino.

3.- Se resuelve la ecuación de Poisson a partir de la densidad elec trónica obtenida:

por superposición de  $V_{at}(\mathbf{r})$  se obtiene un potencial esfericamente simétri co para cada espín, referido al núcleo del átomo central.

4.- Como el material es eléctricamente neutro, puede rodearse cada núcleo por una celda, llamada de Wigner-Seitz, que sea eléctricamente neu tra.

Por motivos del cálculo, la celda de Wigner-Seitz se reemplaza por una esfera del mismo volumen, que llamaremos esfera de Wigner-Seitz( $E_{WS}$ ), de radio  $r_{WS}$ , alrededor del núcleo central.

Para emplear el programa Celular de dispersión múltiple X $_{A}\beta$ , fue necesario definir tres zonas del espacio: del origen a un radio b<sub>1</sub>, de b<sub>1</sub> al r<sub>WS</sub> y del r<sub>WS</sub> al infinito práctico.

Así, el potencial generado en 3) se divide en tres zonas:

a) Dentro del radio b,,

- b) Potencial constante entre  $b_1 y r_{WS}$ ; y
- c) Potencial fuera de la Ews.

La región comprendida entre  $b_1$  y  $r_{WS}$  debe contener tres puntos del potencial por restricción del método empleado. En esta forma se fija  $b_1$ .

5.- Con el potencial de las características de 4) se resuelve la ecuación II.1, obteniéndose las funciones espín-orbitales, $\mathcal{X}_i$ , en todo el espacio. 6.- Para hacer autoconsistente el cálculo, se construye un nuevo - potencial a partir del conjunto de espín-orbitales  $\Psi_i$ .

El potencial fuera de la  $E_{WS}$  se mantiene invariable(congelado) a lo largo del proceso iterativo.

La densidad total esta dada por:

$$\int_{i}^{c} (\mathbf{r}) = \sum_{i} \kappa_{i} \Psi_{i}^{*} (\mathbf{r}) \Psi_{i} (\mathbf{r}) \qquad \text{II.3}$$

donde se incluye la ocupación  $k_i$ , que toma valores de 1 ó 0 para un estado ocupado o desocupado, respectivamente, y para encontrar la carga den-tro de la  $E_{WS}$  se tiene la relación de neutralidad:

$$\int_{\mathbf{E}_{vs}} f(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{E}_{vs}} \sum_{i} \kappa_{i} \, \Psi_{i}^{*} \, \Psi_{i} \, \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = Z \qquad \text{II.4}$$

donde Z es el número de protones del átomo central. Así, la integral de la densidad dentro de la  $E_{WS}$  es la carga electrónica.

La integral de carga de la impureza para cada espín-orbital está dado por:

$$n_{i} = \int_{\mathbf{E}_{s}} \Psi_{i}^{*} \Psi_{i} \, d\mathbf{\hat{r}} \qquad \text{II.5}$$

donde las funciones de onda están normalizadas.

Una vez definidas estas ecuaciones, implican que:

$$\sum_{i} k_{i} n_{i} = \sum II.6$$

donde los espín-orbitales se irán ocupando en orden creciente de energía hasta el nivel de Fermi. El espín-orbital más alto ocupado(ECMAO), por t<u>e</u> ner que cumplir con la ecuación II.6, necesita tener una k<sub>i</sub> definida por:

$$k_{if} = \frac{Z - \sum_{i=1}^{u-1} n_i k_i}{n_{if}}$$
 II.7

donde  $i_f$  es el número de espín-orbital más alto ocupado; el denominador indica cuántos electrones faltan para completar Z electrones. La  $k_{i_f}$  es la única k que posee, para la mayoría de los casos, un valor que cumple con: 0<k\_i<1. Las k tendrán los valores:

$$k_{i} = \begin{cases} 1 \text{ ocupado} \\ 0 \text{ desocupado} \\ k_{if} \text{ECMAC} \end{cases}$$

El proceso de autoconsistencia del potencial dentro de la  $E_{WS}$  implica que la integral de la densidad electrónica en dicha esfera varíe pa ra cada espín-orbital en cada iteracción. En esta forma además de lograr autoconsistencia en este potencial, se logra también en la densidad electrónica y por consecuencia en las ocupaciones de los espín-orbitales.

De esta manera, se estudia las propiedades magnéticas de <u>Cu</u>Ni y --<u>Cu</u>Mn mediante el análisis de la distribución electrónica de los espín-orbitales.

II.2. Parámetros del cálculo.

Las densidades electrónicas enunciadas en el punto 1) fueron cons truídas por el programa Hex. Para esto se requirió suponer ocupaciones --previas para el cobre, el níquel y el manganeso.

En todos los casos se empleó la ocupación del core normal:

 $(15_{1/2})^{2}(25_{1/2})^{4}(2p_{1/2})^{2}(2p_{3/2})^{4}(35_{1/2})^{2}(3p_{1/2})^{2}(3p_{1/2})^{4}$ 

Al cobre se le asignó la siguiente ocupación de valencia:

$$(3d_{3/2}^{\dagger})^2 (3d_{5/2}^{5/2})^{2} (45v_3)^{0.57} (4p_{7/2}^{\dagger})^{0.37} (3d_{3/2}^{\dagger})^1 (3d_{5/2}^{5/2})^{2} (4+v_3)^{0.57} (4+v_7)^{0.57} (4+v_7)^{0.$$

la cual fue obtenida por Pisanty(25.a), como la que describe adecuadamente el sistema <u>Cu</u>Ni. Esta ocupación se emplea en todos los cálculos para hacerlos comparables.

Para el níquel se emplearon las ocupaciones de valencia: CC.Ni.a)  $(3d_{3/2}^{\dagger})^{4}(3d_{5/2}^{\dagger})^{2.35}(45_{3/2}^{\bullet})^{\alpha,\eta}(4_{p}^{\bullet}_{y_{2}})^{\alpha,\eta}(3d_{3/2}^{\bullet})^{4}(3d_{5/2}^{\bullet})^{2.35}(45_{3/2}^{\bullet})^{\alpha,\eta}(4_{p}^{\bullet}_{y_{2}})^{\alpha,\eta}$ CC.Ni.b)  $(3d_{5/2}^{\bullet})^{4}(3d_{5/2}^{\bullet})^{\alpha,\eta}(4_{3}^{\bullet}_{y_{2}})^{\alpha,\eta}(3d_{3/2}^{\bullet})^{4}(3d_{5/2}^{\bullet})^{\alpha,\eta}(45_{3/2}^{\bullet})^{\alpha,\eta}$ 

La primera ocupación fue propuesta por Pisanty; la segunda se obt<u>u</u> vo después de haber realizado todo el cálculo con la primera ocupación, pero con la restricción de una magnetización de 0.5 electrones en los orbitales d.

Para el sistema <u>Cu</u>Mn se utilizó una ocupación en el manganeso de: Cc.Mn.a) $(\hat{3}d_{1/4}^{\dagger})^{4}$   $(3d_{5/4}^{\dagger})^{4.5}$  $(4s_{1/2}^{\dagger})^{0.75}$ Cc.Mn.b) $(3d_{1/2}^{\dagger})^{4}$   $(3d_{5/2}^{\dagger})^{4}$   $(4s_{1/2}^{\dagger})^{2.5}$   $(3d_{3/4}^{\dagger})^{4}$   $(3d_{5/4}^{\dagger})^{0.5}$ 

La ocupación Cc.Mn.a) se fijo con base en los resultados experimen tales(que sugieren una magnetización de 3.5 electrones) y al considerar que los orbitales d son los responsables de la magnetización y la Oc.Mn.b) se obtuvo después de haber realizado el cálculo para la primera ocupación y poniendo la misma restricción que en el níquel.

Estas diferentes ocupaciones en el átomo central obedecen a que -existe una pequeña cola en el potencial de este átomo, que penetra en la esfera exterior. Cuando las ocupaciones son diferentes para cada espín, dicha cola hace que el potencial exterior de un espín y otro sean diferen tes. Cuando las ocupaciones son iguales para ambos espines no existe dife rencia en el potencial exterior. La diferencia más grande en el potencial exterior es la originada por la ocupación Cc.Mn.a) del manganeso con magnetización de 3.5 e<sup>-</sup>(ver figura 12). La importancia de generar el poten-cial exterior con un átomo central con diferente ocupación, radica en ser la única forma, por el momento, que dicho átomo influya, por así decirlo, en los cobres.

Para todos los cálculos se escogieron ocho capas de vecinos en arre glo cúbico centrado en las caras, con constante de malla de 6.824 bohrs. Este arreglo se escogió por el ser el que presenta el cobre en estado puro(véase figura 10). Las distancias y números de vecinos para cada capa se dan en la tabla 1.

#### Tabla 1

| No. capa | No. vecinos | Distancia(bohrs) |
|----------|-------------|------------------|
| 1        | 12          | 4.8253           |
| 2        | 6           | 6.8240           |
| 3        | 24          | 8.3574           |
| 4        | 12          | 9.6505           |
| 5        | 24          | 10.7894          |
| 6        | 6           | 11.8199          |
| 7        | 48          | 12.7663          |
| 8        | 6           | 13.6480          |

Con estos datos se corrió el programa Molpot, el cual genera el po tencial inicial para el átomo central y el potencial exterior.

La partición del espacio se esquematiza en la figura 11, donde el  $r_{WS}$ = 2.6668 y b<sub>1</sub>= 2.6025 bohrs; el  $r_{WS}$  es el radio covalente del cobre.

Los puntos 5) y 6) de la sección anterior se cumplen al ejecutar el programa Celular, una vez hechas las correcciones pertinentes al programa, para que la carga de cada espín-orbital dentro de la  $E_{WS}$  se asigne



Figura 10.- Esquema del átomo central rodeado de sus primeros y segundos vecinos (línea discontinua) en arreglo cúbico centrado en las caras.

automaticamente en cada iteración (ver Apéndice).

Resulta interesante mencionar que los espín-orbitales 3s y 3p, que corresponderían al core de manganeso y níquel, es necesario declararlos de valencia. Esto ocurre porque el potencial exterior que se tiene es muy profundo. Los orbitales 3p del manganeso entran en resonancia con orbitales del mismo tipo y de energías parecidas de la esfera exterior; esto produce fluctuaciones considerables en la densidad electrónica de estos -



Figura 11.- Esquema de la partición del espacio. La región que se señala con potencial constante se conoce como intersticial.

orbitales dentro de la Ews.

## II.3. Discusión de los resultados.

En esta sección se dan los resultados de los cálculos realizados para estudiar los sistemas <u>CuNi</u>, <u>CuMn</u> y uno donde se considera un hueco en lugar de un átomo central con la carga derramada por el potencial ext<u>e</u> rior.

El potencial obtenido como exterior se grafica en la Figura 12.Este es el mismo para todos los casos, excepto en la zona de 2.5 a 3.4 bohrs que varía un poco. La variación más grande en el potencial exterior de ambos espines se encuentra donde se empleó la ocupación Cc.Mn.a).La diferen cia entre los potenciales se grafica en la figura 13, la cual es una am-plificación del graficado en la figura 12.

1.- Hueco inmerso en materia condensada.

Este cálculo se realizó para conocer la densidad de carga derrama-









Figura 13.- Amplificación del potencial exterior para el sistema <u>Cu</u>Mn a partir de la ocupación en manganeso dada en Cc.Mn.a).

da dentro de  $E_{WS}$ , por el potencial generado por los 138 cobres, tabla l. El potencial dentro de  $E_{WS}$  se llevó a autoconsistencia, ver figura 14. Co mo se aplicó el mismo modelo que para un átomo, se le asignó explicitamen te la carga dentro de la  $E_{WS}$  a cada espín-orbital de la misma forma que a un átomo, pero sin la restricción dada en II.6. Los resultados se muestran en la tabla 2 y se grafican en la figura 15. Se encontró que la carga elec trónica dentro de la  $E_{WS}$  corresponde a 0.764 electrones, la cual también



POTENCIAL EN EWS GENERADO POR 8 CAPAS DE CU

Figura 14.- Potencial convergido dentro de la  $E_{WS}$  para un hueco con 0.764 electrones en una esfera de radio 2.6668 bhors.

es autoconsistente. Podría hacerse este mismo cálculo asignando a toda la  $E_{WS}$  una carga difundida para que neutralizara la carga añadida al emplear este método.

2) Sistema CuNi.

Para este sistema se emplearon dos ocupaciones, pero se realizaron tres cálculos:

a) El primero se inició con la ocupación dada en Oc.Ni.a). Los re-

| Carga E <sub>WS</sub> Energ<br>0.001 -3.7<br>0.001 -3.7<br>0.002 -3.6<br>0.002 -3.4<br>0.0002 -3.4<br>0.0002 -3.4<br>0.0002 -3.4<br>0.0000 -3.22<br>0.0000 -3.22<br>0.0000 -3.22<br>0.0002 -3.22<br>0.0002 -3.22<br>0.0002 -3.22<br>0.0002 -3.22<br>0.0002 -3.1<br>0.0001 -3.0 | i a Or<br>2557764433447755                  | bital<br>SSP<br>DD<br>SSP<br>DD<br>SSP<br>S<br>Ff<br>f   | Espin<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1 | DFA1<br>.001<br>.001<br>.003<br>.005<br>.005<br>.005<br>.005<br>.005               | 0FA2<br>0.000<br>0003<br>0005<br>0005<br>0005<br>0005<br>0005<br>000 | OFA<br>.007<br>.004<br>.004<br>.004<br>.010<br>.010<br>.010   |
|--|---|--|--|--|--|---|
|  | 22334443344775                              | א זי בריםם א זי דלי <del>ו</del> הי  | 17717171717171   | .001<br>.001<br>.003<br>.0055<br>.0055<br>.0055<br>.0055                           | 0.0001   | .000<br>.000<br>.000<br>.000<br>.000<br>.010<br>.010  |
| -3.77746464655777464646555554435555445555445555644555564455556445555644555564455556445555644555564455556445555644555556445555564455555644555556445555564455555644555556445555564455555644555555  | V770088559977550022334444400999110088004411 | אין מיש אין מער אין מער<br>אא<br>מער אין מער אין | NTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNTNT   | 0007778898888899999900111188111177444223333441<br>00000000000000000000000000000000 |  | 00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00114<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00014<br>00000000 |
|  |   | Developert   | on Frace   | ional Acu  | umulada  | Espin 1   |

## TABLA: 2

.



Figura 15.- Carga dentro de E<sub>WS</sub> contra energía para el hueco con el potencial dado en la figura 12. La gráfica corresponde a la misma escala usada en todas las gráficas de este tipo para observar las diferencias. En to dos los casos se grafican los estados de valencia con valores propios mayores a -1.0 Ry y con carga dentro de la E<sub>we</sub>.

sultados obtenidos al llevar el cálculo a la autoconsistencia se muestran



Figura 16.- Carga dentro de E<sub>WS</sub> contra energía para el sistema <u>Cu</u>Ni con magnetización inicial de 0.0 e<sup>-</sup>. Con líneas discontinuas se grafican la de los estados con espín dos.

en la tabla 3, ver figura 16, con los que se obtienen una magnetización de 0.112 electrones.

En esta figura se observa que los espín-orbitales con mayor contr<u>i</u> bución a la carga dentro de la  $E_{MS}$  son los de tipo d, dl a -0.308 y d2 a

and the second

|    | Res   | sultad  | los de  |          | li M≕                                  | 0.0   |   |
|----|---|---|---|----------|--|---|---|
| i. | Carga E <sub>WS</sub>                             | Energia   | Orbital   | Espin    | OFA1                                   | OFA2  | OFA   |
|    | 1.1.1.3.3.1.1.2.2.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0 | 43218797756688442288335577711338884466001122433444437776220754877688731 | נים<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 1<br>1 |          | 00000000000000000000000000000000000000 | 011125564888999999999999999999999999999999999 | 000000000989903492235777788990011112333345790123554898774772224648590<br>000000000999900000111111111111111111 |
|    |   | OFA   | H DEUDACIO  | on Frace | IONAL ACL                              | Inulada                                       |   |

OFA1: Ocupacion Fraccional Acumulada Empin 1 OFA2: Ocupacion Fraccional Acumulada Empin 2 a -0.475 Ry. Sin embargo, la magnetización es producida por el espín-orbital más alto ocupado (ECMAO), de tipo p; la cual no es lo suficientemente fuerte para producir un desdoblamiento apreciable en todos los orbitales.

Resulta interesante abrir un paréntesis. Al observar las figuras -15 y 16 tenemos que: al incluir el átomo de níquel, todos los valores pro pios de los espín-orbitales se desplazan a menor energía y la densidad -electrónica dentro de E<sub>WS</sub>, aumenta con respecto a los valores obtenidos -



Figura 17.- Carga dentro de  $E_{WS}$  contra energía para <u>Cu</u>Ni con ocupación inicial en níquel dada en Cc.Ni.b).

CARGA EN Ews vs. ENERGIA DE ESTADOS DE CUNI M=0.5

para el hueco. La carga dentro de  $E_{WS}$  hueca generada por el potencial exterior (0.764 e-), resulta muy pequeña comparada con 4002 e-, de los cuales el potencial exterior posee información. Con esto, se puede decir que la densidad electrónica dentro de  $E_{WS}$  es producida, principalmente, por el átomo central.

b) Como se obtuvo en el cálculo anterior una magnetización en ní- quel de 0.112 e-, se realizó otro partiendo de la ocupación dada en Oc.Ni.
b); en la cual, el níquel tiene una magnetización de 0.5 electrones.

Los resultados obtenidos se dan en la tabla 4, ver figura 17. Estos son muy semejantes a los obtenidos en el caso anterior: la magnetización es de 0.110 e-, los orbitales con mayor carga dentro de  $E_{WS}$  son de tipo d y el EOMAO es de tipo p.

Este espín-orbital tiene una integral de la densidad de carga dentro de  $E_{WS}$  de:  $n_i = 0.250$ , pero por restricción del cálculo sólo debe te-ner una carga de:  $k_i = 0.138$  (nótese que  $n_i - k_i = 0.112$  e<sup>-</sup> es muy semejan te al valor obtenido de la magnetización del sistema). Esto lleva a pen-sar que el níquel inmerso en cobre no posee magnetización, sobre todo pen sando que es un nivel p (deslocalizado) el que la produce en el cálculo.

c) Al considerar que la magnetización es resultado de la forma en que se van ocupando los espín-orbitales y no por efectos del sistema en sí, se realizó un tercer cálculo.

En este se partió de la ocupación (c.Ni.a) y la carga dentro de  $E_{WS}$  en el nivel de Fermi se declaró igual para ambos orbitales p. Los resulta dos se muestran en la tabla 5, figura 18.

Si se comparan los resultados de la tabla 3 y 5 y sus correspondien

TABLA: 4

| Re                                     | sultad   | os de  | <u>Cu</u> r | 11 M= | 0.5   |  |
|--|--|--|-------------|-------|---|--|
| Carga E <sub>uc</sub>                  | Energia  | Orbital  | Espin       | OFA1  | OFA2  | OFA  |
| 1.1.0000000000000000000000000000000000 | 0974322312077799464442255777777008855997777555600554411222272954201877555558 | ניט<br>אי מטתבנא א-איגיבסטט גע א-ארבטטט גע א-ארבנטטע גע א-ארבנטטע א-איגיגיגע הבסטט גע איי<br>גע מטרבנע א-איגיבטטט גע א-ארבנטטע גע א-ארבנטטע גע אייניגע גע גע גע גע גע גע<br>גע גע ג |             |       | 0112556688899999999999999999999999999999999 | 123470000000988903492224444478900011112222344889012334555310995519889745331220<br>0000000009789900000111111111111111111111 |

OFA: Ocupacion Fraccional Acumulada OFA: Ocupacion Fraccional Acumulada Espin 1 OFA2: Ocupacion Fraccional Acumulada Espin 2

53

# TABLA: 5

| Res  | ultado   | s de  | CUNI  | tip      | 00 *C   | *                                      |
|--|--|---|---|----------|---------|--|
| Carga E <sub>WS</sub>                        | Energia  | Orbital   | Espin   | OFA1     | OFA2    | OFA                                    |
| 1.1.0000000099911133333000220000000000000000 | 4311878884999884420883355577113788844997755003599774499553887777788828 | ייש<br>טיי טס בב++אש בבטט שש ++רבטט שש ++רבטט שש +אבבטט +אש בטטט שש איי<br>וו<br>הקון | 1 1<br>1 1 Newskewewewewewewewewewewwewwewwewwewwewweww |          |         | 00000000979700000000000000000000000000 |
|  | OFA  | 1. Ocupac   | ion Frace   | LIONAL A | umulada | Empin 1                                |

-------

OFA2: Ocupacion Fraccional Acumulada Empin 2



CARGA EN Ews vs. ENERGIA DE ESTADOS DE CUNI TIPO \*c\*



tes gráficas, se observa que no existe cambio aparente, excepto para los últimos espín-orbitales, que son de tipo p. La energía total del sistema -<u>Cu</u>Ni tipo c es de -3014.4004 Ry y la del tipo a es de -3014.4153 Ry. Esto nos lleva a pensar que la energía de intercambio es menor en el cálculo tipo a y la de repulsión electrónica es mayor comparada con el de tipo c. Para obtener una descripción más adecuada del sistema se escogió, por los argumentos antes dados, el cálculo tipo c como el que describe adecuada-- mente el sistema, a pesar de estos resúltados.

Los espín-orbitales dl y d2 de ambos espines son los que más con-tribuyen a la carga del átomo central. Por ello se supuso que al graficar la densidad electrónica de estos orbitales, se obtendría mayor información respecto a la interacción níquel-cobre. La densidad de estos estados se grafica en la figura 19. Ahí se observa que el orbital dl se localiza pr<u>e</u> ferentemente en el átomo central y que existe un nodo entre el níquel y -



Figura 19.- Gráfica de la densidad electrónica de los estados d del <u>CuNi</u> cálculo tipo c. La línea discontinua represen ta los estados d2 y la continua los dl. Nótese que no hay diferencia entre espín 1 y 2.

los primeros vecinos; los orbitales d2 son orbitales de enlace entre los primeros vecinos y el níquel, por existir una densidad de carga entre ---ellos y no tener un nodo. Si se considera la contribución de los doce co-bres a la densidad de carga, comparada con la de un sólo átomo de níquel, la aportación a la densidad para el enlace por cada átomo de cobre es pequeña; aunque existe enlace entre el níquel y sus primeros vecinos. -----Estas gráficas hacen pensar en electrones de conducción, pero que tienden a estar localizados preferentemente entre el níquel y sus primeros vecinos.



CARGA EN Ews vs. ENERGIA DE ESTADOS DE CuMn M=3.5

Figura 20.- Carga dentro de  $E_{WS}$  contra energía del sistema CuMn, con ocupación inicial en manganeso dada en Oc.Mn.a).

Estos orbitales son los que corresponderían al elv propuesto por Friedel para el cálculo de estados discretos.

3) Sistema CuMn.

Para el estudio de esta aleación se efectuaron dos cálculos a partir de ocupaciones diferentes:

 a) En el primero se empleó la ocupación Cc.Mn.a). Esta posee la mag netización más grande de todo el trabajo. Los resultados se muestran en la tabla 6, figura 20; se obtuvo una magnetización de 0.574 e<sup>-</sup>. El potencial



CARGA EN EWS VS. ENERGIA DE ESTADOS DE Cum M=0.5

Figura 21.- Carga dentro de E<sub>WS</sub> contra energía del sistema <u>Cu</u>Mn, con ocupación inicial en manganeso dada en Oc.Mn.b).

TABLAI

Empin 1 - Empin Empin 2 - Empin Mayoritario Minoritario OFA: Ocupacion Fraccional Acumulada OFAis Ocupacion Fraccional Acumulada Espin 1 OFA21 Ocupación Fraccional Acumulada Espin 2

OFA

•

de las figuras 12 y 13 se obtuvieron a partir de este sistema.

b) Como la magnetización es muy diferente a la esperada, se realizó otro cálculo donde el manganeso tuviera una magnetización de 0.5 e-. Se partió de la ocupación (c.Mn.b). Los resultados se muestran en la tabla 7 y se grafican en la figura 22. En este cálculo se obtuvo una magnetización de 0.382 e-. Al comparar el cambio de esta magnetización con la obtenida en el cálculo anterior (0.192 e- de diferencia) y el cambio entre la magnetización inicial supuesta (3.0 e- de diferencia) se considera que modificaciones ulteriores darían resultados similares. Esto se puede constatar al comparar la tabla 6 y 7. Se considera a este cálculo como el convergido.

Los orbitales dl, entre -0.23 y -0.20 Ry, y los d2, entre -0.475 y -0.468 Ry, son los que sufren un cambio apreciable entre el cálculo a) y éste, y, además, son los que contribuyen más a la carga del átomo central.

El nivel de Fermi se encuentra en el orbital dl espín minoritario (dls2) y el desdoblamiento generado por este espín-orbital es lo suficien\_ temente fuerte para producir una magnetización en el sistema.

Como se explicó anteriormente, el cálculo se inicia con un poten-cial que proviene de una superposición de potenciales atómicos. El potencial sobrepuesto, obviamente, no considera efectos de relajación de la -densidad electrónica. Resulta interesante observar cómo va influyendo el potencial exterior, a medida que el cálculo converge, en las densidades electrónicas de los orbitales de manganeso que contribuyen con mayor carga (dl y d2). Estos resultados simulan las modificaciones en la distribución electrónica en el átomo de manganeso con respecto al tiempo, una vez que un átomo aislado es inmerso en la matriz diamagnética. Esta compara--

-

\_

.

| Carga E <sub>WS</sub><br>1.00000000001178093310000000101100000000000000000000000   | Ree    |       |
|--|--------|-------|
| Energia<br>333142005449732444645511644770003364600779933444447657777000759881809910<br>4445554555545555547444645553337788857074444475555888857777555544444375555845555555555 | ultad  | т     |
| Orbital<br>ssssppsssnpppdussffppduffsspputffsspputffsspputtfsspputtfssp  | los de | ABLA: |
| n<br>12121212121212121212121212121212121212  | cut    |       |
| 1   0000000001188888110014444556464649999900000000000000000000000  | יר M=  |       |
| 2<br>00000000001199881111133333333444444444444444444444  | 0.5    |       |
| DFA<br>000000000125777597000007777899700001022225977907897000000000000000000000000000000   |        |       |

Espin 1 - Espin Mayoritario Espin 2 - Espin Minoritario OFA: Ocupacion Fraccional Acumulada OFA: Ocupacion Fraccional Acumulada OFA: Ocupacion Fraccional Acumulada Empin 1 Acumulada Espin 2 ción se realiza para las densidades de carga del cálculo a) en las iteraciones donde se tiene una magnetización de: 1.548, 3.040, 1.262 y 0.574e<sup>-</sup>; estas están dadas en orden creciente de iteración; la última corresponde a la considerada como convergida. Los datos de  $q_{im}$  que a continuación se dan, se refieren a la carga dentro de  $E_{WS}$ ,  $n_i$ , para esta última iteración:

 $\propto$ ) Espín-orbital dlsl, q<sub>im</sub>= 2.347 e-, figura 22

En un inicio es un espín-orbital localizado en el manganeso. Existe un nodo alrededor del  $r_{WS}$ , lo cual hace pensar en un estado de antien-





lace. A medida que itera el cálculo, el nodo se recorre a mayores distancias y comienza a formarse una región mayor en densidad entre el manganeso y los primeros vecinos, creándose un espín-orbital de enlace débil. El aumento de la densidad electrónica en esta zona origina un incremento en q<sub>im</sub>. Este espín-orbital es el que posee mayor q<sub>im</sub> entre los de valencia del cálculo convergido.

 $\beta$ ) Espín-orbital dls2, q $_{im}$ = 2.056e-, figura 23:

Este se encuentra en el nivel de Fermi,  $k_i \leq 1$ , no está totalmente - ocupado, pudiendo albergar hasta 2.134 e<sup>-</sup>. En un inicio existe un nodo en



Figura 23.- Densidad electrónica del estado dls2. Las líneas corresponden a las mismas iteraciones que la figura 22.

3.5 bohrs, el cual se recorre hasta 4.4. Su densidad de carga por el  $r_{WS}$  es mayor que en el dlsl. Posteriormente aumenta esta región hasta formarse un máximo. La densidad radial es mayor en la iteración con magnetiza-ción de 1.262 e- y decrece en el cálculo que se considera convergido.

✗) Espin-orbital d2sl, q<sub>im</sub>= 0.542 e-, figura 24:

Desde un inicio existe una zona de enlace al formarse un hombro al rededor de 3.5 bohrs. A medida que se itera, el hombro mencionado origina un máximo creciente y otros picos en los segundos y restantes vecinos de cobre; que son mayores que el originado por el átomo central. Por la pro-



Figura 24.- Densidad electrónica del estado d2sl. Las líneas corresponden a las mismas iteraciones que la figura 22.

ximidad del máximo del manganeso con el pico principal, existe un 10.8%  $\div$  de la densidad de carga dentro de  $E_{WS}$ .

S) Espín-orbital d2s2, q<sub>im</sub>= 0.464 e-, figura 25:

Conforme itera el cálculo, el máximo localizado en 1.0 bohrs dismi nuye mientras que los otros aumentan; el máximo localizado en 3.6 bohrs incrementa su tamaño considerablemence, pero en la última iteración decre ce. Los máximos producidos por los diferentes vecinos son ya de importancia y mayores que el correspondiente al manganeso. En este espín-orbital el nodo entre manganeso y primeros vecinos es el único que no se mueve. -



Figura 25.- Densidad electrónica del estado d2s2. Las líneas corresponden a las mismas iteraciones que la figura 25.

Se forma una región entre el átomo central y los primeros vecinos, de alta densidad electrónica; generando así un espín-orbital de enlace.

La gráfica de los espín-orbitales del cálculo convergido se mues--tra en la figura 26. Los d2 forman un enlace químico fuerte entre el manganeso y los primeros doce vecinos de cobre; en este orbital la contribución originada por cada cobre ya es de importancia. Los dl forman un enl<u>a</u> ce, pero muy débil. Cerca del átomo central la densidad de carga es mayor para los orbitales de espín 1, dlsl y d2sl, y siendo lo contrario en toda la zona exterior, donde la densidad de los orbitales dls2 y d2s2 es mayor.



Figura 26.- Densidad electrónica de los estados d del <u>Cu</u>Mn: dls1 \_\_\_\_; dls2 -----; d2s1 -- -; y d2s2 ----- .

Cuando se comparan los cálculos convergidos de <u>Cu</u>Mn y <u>Cu</u>Ni, se -observa que los espín-orbitales tipo s y d con valores propios mayores a -1.0 Ry se desplazan a menor energía en el sistema <u>Cu</u>Ni y los d muestran mayor contribución de la impureza. Los demás estados de valencia pueden considerarse sin cambios apreciables (figura 19 y 26). Los orbitales dl del <u>Cu</u>Ni son los que se encuentran más localizados dentro de la  $E_{WS}$ , de los ocho considerados. Los d2 del <u>Cu</u>Mn son, de estos ocho los más desloca lizados, pero forman un mayor enlace entre el átomo central y la primera capa de vecinos.

Con todo esto se tiene que los espín-orbitales que tengan valores propios más lejos del nivel de Fermi y ocupación considerable para cada átomo, serán los que contribuyan más al enlace de los orbitales d.

Estos son los espín-orbitales que corresponderían en un cálculo de estados discretos a la descripción de Friedel de un estado ligado virtual. En el sistema <u>Cu</u>Mn, los estados demuestran un mayor enlace que en los de <u>Cu</u>Ni.

Este estudio nos lleva a plantear que el análogo de un estado lig<u>a</u> do virtual para cálculos discretos se puede esquematizar como el dado en la figura 27.



Figura 27.- Esquema de un estado ligado virtual para un cálculo de estados discretos comparados con la de un cálculo de estados continuos.

## CAPITULO III

## CONCLUSIONES

Con los resultados de los cálculos descritos en el presente trabajo, podemos concluir los siguientes puntos y abrir paso a subsecuentes in vestigaciones.

Se apoya la posición de que los espín-orbitales tipo d son los res ponsables de la formación de momentos magnéticos locales en los sistemas metálicos cuando se encuentran en el nivel de Fermi:

a) La aleación <u>Cu</u>Ni no presenta momento magnético en níquel(magnetización cero), esto se debe a que el nivel de Fermi se encuentra en un espín-orbital tipo p, los cuales no generan momentos magnéticos considera bles. Los estados d están situados a energías menores a  $E_{\rm p}$ .

b) El EOMAO en la aleación <u>Cu</u>Mn es de tipo d; por esto se genera un momento magnético en manganeso, ya que el orbital de espín minoritario no se llena completamente, generando así un momento magnético neto (magne tización de 0.382 e-).

Por el análisis de los espín-orbitales del manganeso en la aleación de <u>Cu</u>Mn podemos decir que existe un enlace químico entre éste y los prim<u>e</u> ros vecinos de cobre. Este enlace es más notorio que el formado con el n<u>í</u> quel y su entorno. A pesar de que el apareamiento de espín involucrado en la formación del enlace químico destruye la magnetización en la mayoría de los sistemas donde se presenta, persiste una cierta magnetización en la aleación CuMn. El modelo empleado es simple, ya que no toma en cuenta la relaja-ción de los cobres, pero considera varios efectos presentes en los sistemas considerados. Se obtienen resultados cualitativos buenos, pues predice la existencia de magnetización en la aleación <u>Cu</u>Mn y la ausencia en la de <u>Cu</u>Ni; y resultados cuantitativos aceptables, ya que se predice la magnetización correcta en <u>Cu</u>Ni, aunque en <u>Cu</u>Mn la magnetización obtenida (--0.382 e-) no se parece a la experimental de 3.5 e-.

Esta forma de modelar los sistemas toma en cuenta la interacción de los diferentes cobres con la impureza, pero no se modela correctamente los efectos producidos por el átomo central con su entorno. Se considera que existe enlace metálico covalente entre la primera capa de vecinos de cobre con el manganeso. Resulta interesante realizar un cálculo donde se incluyan explícitamente los doce primeros vecinos de cobre y-el manganeso, en condiciones a la frontera adecuadas, para estudiar con más detalle este enlace; en esta forma se permite la relajación de los cobres por efecto del manganeso, modelando mejor el sistema y comprendiendo más el enlace formado. Así, se espera tener resultados cuantitativos que estén de --acuerdo con el experimento.

Un cálculo de estados discretos, como el que se presenta, puede --proporcionar información suficientemente predictiva del comportamiento --magnético de estos sistemas, permitiendo además hacer un paralelismo simple con el concepto de estado ligado virtual de Friedel.
## APENDICE

Corrección hecha al programa Celular.

El programa Celular que se empleó en todos los casos fue el que -tiene la opción de esferas traslapantes. Este se actualizó añadiendo las opciones de: 1) Ordenar los estados en forma creciente de energía, 2) Rea lizar cálculos tipo CMEENA, 3) Escritura sin el potencial y sin los facto res de traslape, 4) Poder corregir los datos de distancias de las esferas directamente en los archivos, y 5) Realizar análisis de carga.

La modificación principal fue la de declarar la carga dentro de  $E_{_{WS}}$  como la integral de la densidad, para cada estado, en cada iteración.

Como ya existían modificaciones para simular materia condensada en el programa, sólo se añadieron ciertas líneas en el programa principal, en la subrutina NRMLIZ y se añadió la subrutina de graficación para la -densidad radial.

Las modificaciones al programa principal fueron (la secuencia co-rresponde a la del programa Celular de 1977):

| 23800 0<br>238500<br>238700 | CALL NRMLIZ(P,XC,XA,Q,QINT,PS,DPS,RAMF,ESTATE(N),THRESH,INORM(N),<br>1NOAVFL,CCU,ISACOR(N),NITER,ITER)<br>CCUPA(N)=OCU |
|-----------------------------|--|
| 246250                      | IF (NCAVFL. EQ. 3) GO TO 27  |
| 246300                      |  |
| 246400                      | ISTATE=0   |
| 246450                      | SUMACC=0.  |
| 246500                      | DO 356 N=1,NSTS  |
| 246600                      | IO=ID(N)   |
| 246700                      | NFO=NSYM(IO)   |
| 246800                      | NDG=ISTR(NSFIX(NFO)+1)   |
| 246805                      | FNDG=NDG   |
| 246810                      | IF(NOAVFL.EQ.1) GO TO 450  |
| 246815                      | IF(SUMACC.CE.CCEL)CCUP(IO)=0.  |
| 246820                      | IF(SUMACC.GE.CCEL) GO TO 356   |
| 246825                      | FNDG=FNDG*CCUPA(IO)  |
| 246830                      | IF(FNDG.LE.0.0001.OR.(ABS(FNDG-OCUP(IO)))/FNDG.LE.0.5.OR.OCUP(IO)  |

70

| 240835 I .EQ.0/GO IQ 435               |                  |
|--|------------------|
| 246840 WRITE(6,*/)I0,OCUP(I0),FNDG     |                  |
| 246850 GC TC 454                       |                  |
| 246855 453 OCUP(IO) =FNDG              |                  |
| 246860 454 SUMAOC=SUMACC+OCUP(IO)      |                  |
| 246865 IF(SUMAOC.GT.OCEL)OCUP(IO)=OCUP | (IO)+OCEL=SUMAOC |

246870 IF (N.EQ.NSTS, AND, SUMACC, LT, OCEL) OCUP (IO) = OCEL-SUMAOC+OCUP (IO)

246875 со то 356

Las correciones a NRMLIZ fueron:

| 2411100 |     | IF(N,EQ,2)LL=0  |   |
|---------|-----|---|---|
| 2411200 |     | DC 452 K=1,KX   |   |
| 2411300 |     | RR(LL+K) = R(K,N)   |   |
| 2411400 |     | RRH(LL+K) = RHO(K,N)  |   |
| 2411500 | 452 | CCNTINUE  |   |
| 2412000 | 1   | CONTINUE  |   |
| 2412300 | 455 | IF (NOAVEL.EO. 0) GO TO 325                                       |   |
| 2412500 | -   | CCUP=(ANORM=O(1))/ANORM   |   |
| 2412800 |     | ANORM=ANORM-Q(1)  |   |
| 2421100 |     | IF (OCUP.LE. 0.05.OR.NOAVFL.EQ. 0.OR.ISACOR.EQ. 1.OR.ITER.NE.NITE | R |
| 2421200 |     | 1)GO TO 456   |   |
| 2421300 |     | KA=KMAX(1)+KMAX(2)  |   |
| 2421400 |     | WRITE(6.*/)OCUP   |   |
| 2421410 |     | DO 457 K=1.KA   |   |
| 2421420 |     | RRH(K) #RRH(K) / ANORM  |   |
| 2421430 | 457 | CONTINUE  |   |
| 2421500 |     | CALL CARTE(RRH, RR, KA)   |   |
|         |     |   |   |

La subrutina CARTE es la empleada en el programa Hex.

Cuando se quiere correr un cálculo de átomo-en-materia-condensada sin ocupación fraccional y de la forma antigua, la variable NOAVFL debe valer 1. Cuando se desea que las ocupaciones sean variables en cada itera ción (como en este trabajo) NOAVFL=2. Para hacer un cálculo con potencial exterior congelado, sin repoblar y ocupaciones fijas, NCAVFL=3.

## BIBLIOGRAFIA

1.- Anderson, P.W. Phys. Rev. 124, 41 (1961).

- 2.- Arango, J.D. Tesis Profesional, Fac. de Química, U.N.A.M. (1978). Cálculos atómicos relativistas a partir de funciones monoelectrónicas. Instructivo del programa Hex.
- 3.- Blaha, P. and Callaway "The electronic structure of transition metal impurities in cooper."

Emplea teoría de funcionales de la densidad de espín local para calcular cúmulos de  $Cu_{13}$ ,  $Cu_{12}Fe$ ,  $MCu_{12}Cu_6$ (M= Cu, Fe, Co, Ni). Obtiene resultados en <u>Cu</u>Ni semejantes a los muestros.

4.- Beaglehole, D. Phys. Rev. B14, 341 (1976).\*

Propone fluctuaciones de espín para el sistema <u>Cu</u>Ni basándose en resultados experimentales.

5.- du Chatner, F.J. and de Nobel, J. Physica <u>32</u>, 1097 (1966).\*

6.- Dekker, A.J. <u>Solid State Physics</u> Londres, Macmillan, 1970. 540 pp.

7.- Drago, R. Physical Method in Chemistry

U.S.A., Saunders, 1977.

Chapter 11

Expone en forma clara los fundamentos útiles para entender los métodos de análisis utilizados en Química.

8.- Faulkner, J.S. Progress in Materials Science; <u>27</u>, 4-187 (1982). Un resumen de la teoría de aleaciones.Claro y sencillo.

9.- Feyman, R.P. et al. Física

E.U.A., F.E.I., 1972.

Volumen II

Cap. 34-37

Libro de Física; el concepto de momento magnético se estudió en este libro.

10.- Friedel, J.

- a) Can. J. Phys. 34, 1190 (1956).\*
- b) Suppl. Nuovo Cim. 7, 287 (1958).\*
- c) J. Phys. Rad. 19, 573 (1958).\*
- d) J. Phys. Rad. 23, 692 (1962).\*
- 11.- Garritz, A. Tesis Doctoral, Fac. de Química, U.N.A.M., 1977. Estudio sobre Fe. Primer trabajo donde se expone el método seguido en éste.
- 12.- Gibbs, P. et al. J. Phys. F15, 213-23 (1985).

Estudio sobre el diagrama de fases magnéticas del sistema <u>Cu</u>Mn. Tiene un resumen de las propiedades encontradas para este sistema.

- Ginsberg, A.P. Inorg. Chem. Acta <u>5</u>, 45-68 (1971).
  Exposición sobre el Hamiltoniano de Heisenberg.
- 14.- Hirschkoff, E.C. et al. J. Low. Temp. Phys. 5, 155 (1971).\*

15.- Hirst, L.L. Phys. Kondens. Mater 11, 255 (1970).\*

16.- Johnson, K.H. et al. Phys. Rev. <u>B19</u>, 1519-47 (1979).

Estudio teórico con el método SCF-Xlpha de los sistemas: MCu<sub>12</sub>Cu<sub>6</sub> (M= Cu, V, Mn, Fe, Ni), obtiene resutados en desacuerdo con los obtenidos en este trabajo. Pisanty (25.a) critica ese trabajo.

17.- Jha, D. and Jericho, M.H. Phys. Rev. <u>B3</u>, 147 (1971).\*

18.- Keller, J.

a) - and Castro, M. J. Mag. Mag. Mat. <u>15</u>, 856-8 (1980).
 b) - et al. J. Appl. Phys. <u>53</u>, 8850-5 (1982).

c)- and Garritz, A. Inst. Phys. Conf. Ser. 39, 372 (1978).

d) - et al. Teoría de Dispersión Múltiple y sus Aplicaciones
 al Estudio de la Estructura Electrónica de la Materia Condensada.
 Seminario Latinoamericano de Química Cuántica. 339- 488, (1980).

e) - et al. Computers in Chemical Education and Research,ed. Ludeña p. 225 (1977).

19.- Kondo, J. Progr. Theor. Phys. <u>32</u>, 37 (1964).\*

20.- Korringa, J. and Gerritsen, A.N. Physica 19, 457 (1953).\*

21.- Lemus, R.

a) Tesis Profesional, Fac. de Química, U.N.A.M., (1982). Trabajo sobre intercambio en complejos. En el se explica en forma breve los problemas a resolver en los programas Hex, Molpot y Celular; de estos dos últimos tiene los instructivos. Par te de los fundamentos teóricos se obtuvieron de este trabajo por su exposición sencilla. b) Tesis de Maestría, Fac. de Química, U.N.A.M., (1984). Se desarrolla paso a paso los fundamentos del método Celular de Dispersión Múltiple con Intercambio Estadístico X«β.

22.- Levine, I.N. Química Cuántica

Madrid, A.C., 1977.

Libro para estudiar las bases de la Mecánica Cuántica.

23.- Monod, P. Phys. Rev. Lett. 19, 113 (1967).\*

24.- Pilar, F.L. Elementary Quantum Chemistry

U.S.A., Mc. Graw Hill, 1968.

p.117

25.- Pisanty, A.

a) Tesis Doctoral, Fac. de Química, U.N.A.M., 1984.

Tesis relacionada con el tema. La discusión de las bases teóricas y los resultados experimentales están contenidos en ella.

b)- y Talanquer, V.A. XVII Congreso de Química Pura y Aplicada, 1983.

Existe un trabajo sobre <u>Cu</u>Mn y <u>Ag</u>Mn en poder de Pisanty realizapor Talanquer, el cual sirvió como base en las secciones I.6 y 7.

26.- Resnick, R.

a)- y Halliday, D. Física

México, Continental, 1977.

Parte II

Libro de Física fundamental para tener una visión general sobre el tema a tratar.  b)- y Eisberg, R. Física Cuántica: Atomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas.

México, Limusa, 1979.

Libro muy claro sobre Mecánica Cuántica. Bueno como primera - lectura.

- 27.- Rizzuto, C. Reports on Progress in Physics <u>37</u>, 144 (1974).
  Revisión experimental sobre la formación de momentos magnéticos en aleaciones diluídas. Clasificación de éstas por sus propiedades.
- 28.- Rodríguez, A. and Keller, J. J. Phys. <u>Fl1</u>, 423-33 (1981). Estudio semejante al desarrollado sobre <u>PdFe</u>. Uno de los primeros trabajos de este tipo.
- 29.- Schmitt, R.W. Phys. Rev. 103, 83 (1956).\*
- 30.- de Teresa, M.C. Tesis Profesional, Fac. de Química, U.N.A.M. (1978). Se dan los fundamentos sobre el método de dispersión míltiple para estados continuos.
- 31.- Van den Berg, G.J. Progress in Low Temp. Phys. ed. Gonter, C.J.\* Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1964. Chapter IV

32.- Vonsovskii, S.V. <u>Magnetism</u> New York, J. WIley & Sons, 1974. Vol. 1 Chapter 6

33.- Waber, J.T., Liberman, D.A. and Cromer, D.T. Phys. Rev. <u>A27</u>, 137 (1965). Artículos o libros no consultados, pero citados en los consultados.