2 Ej. No. 28

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE QUIMICA

FUNDAMENTOS ALGEBRAICOS DEL ANALISIS DIMENSIONAL

T E S I S

Que para obtener el Título de

Q U I M I C O

P r e s e n t a

OCTAVIO SOTELO DE LA TORRE

México, D. F. 1984

INDICE

PROLOGO

El objetivo principal de esta tesis es enunciar y demostrar los teoremas que justifican los procedimientos matemáticos usados en el Análisis Dimensional. Para lograrlo, se han expuesto los conceptos del Algebra Lineal que son fundamento de las demostraciones de dichos teoremas.

Además, se da un panorama del Análisis Dimensional y sus aplicaciones. Creo que sólo después de aclarados los Fundamentos Algebraicos del Análisis Dimensional se puede tener una visión clara de las potencialidades y limitaciones de este importante instrumento de la Ciencia y de la Técnica.

Al final existen cuatro apéndices que complementan el trabajo.

Deseo agradecer especialmente a los profesores Edna Cárdenas Cuenca y César Rincón Orta por su gran

calidad humana para conmigo y por su valiosa colaboración en la elaboración de esta tesis, pues gracias a ambos tiene una estructura más clara y compacta.

Asimismo, agradezco profundamente a mis padres y a mis hermanos el cariño que me han demostrado y el gran apoyo que me han brindado durante mis años de estudiante.

Y de un modo especialísimo agradezco a Dios el haberme llamado por el camino de la Ciencia pues: "...El estudio de la verdad aproxima al hombre a la semejanza con Dios, quien hizo todas las cosas con sabiduría. Y por ello, ya que la semejanza es causa de amor, la sabiduría une al hombre con Dios principalmente por la amistad". (Tomás de Aquino).

OCTAVIO SOTELO DE LA TORRE

México, 1984.

I- ALGEBRA LINEAL

A) ESPACIOS VECTORIALES

B) SISTEMAS DE ECUACIONES

Definición I-1

Un sistema $\{\mathcal{V}, \oplus, \odot, \mathbb{K}\}$ es un ESPACIO VECTORIAL sobre $\mathbb{K}$ si :

$\{\mathcal{V}, \oplus\}$ es un grupo abeliano y

$\mathbb{K}$ es un campo y

$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, $k \odot v : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ es tal que se cumplen :

1) $(k_1 + k_2) \odot v = k_1 \odot v \oplus k_2 \odot v$;
2) $k_1 \odot (v_1 \oplus v_2) = k_1 \odot v_1 \oplus k_1 \odot v_2$;
3) $k_1 \odot (k_2 \odot v) = (k_1 \cdot k_2) \odot v$;
4) $n_{\mathbb{K}} \odot v = v$;

donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones del campo $\mathbb{K}$ y $n_{\mathbb{K}}$ el neutro bajo $\cdot$.

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Definición I-2

Sea S un conjunto no vacío y

$\{ \mathbb{V}, \oplus, \odot, \mathbb{K} \}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

y $\mathcal{F} = \{ f : S \longrightarrow \mathbb{V} \}$.

Se definen :

1) $*$: $\forall f, g \in \mathcal{F}$ y $\forall s \in S$,
$f * g : S \longrightarrow \mathbb{V}$ es la función cuyo algoritmo es $(f * g)(s) = f(s) \oplus g(s)$.

2) $\square : \mathbb{K} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, $k \square f : S \longrightarrow \mathbb{V}$
es la función cuyo algoritmo es $k \square f(s) =$
$= k \odot f(s)$.

Teorema I-1

El sistema $\{ \mathcal{F}, *, \square, \mathbb{K} \}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración

Para que $\{\mathcal{F}, *, \square, \mathbb{K}\}$ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, debe cumplir con la definición I-1. Por ello, primero demostraremos que $\{\mathcal{F}, *\}$ es un grupo abeliano, y luego que $\square : \mathbb{K} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ cumple con las propiedades (1), (2), (3) y (4) de la definición I-1.

a) $\{\mathcal{F}, *\}$ es un grupo abeliano.

Asociatividad: $f*(g*h) = (f*g)*h$,
$\forall\, f, g, h \in \mathcal{F}$.

Prueba: Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$ y $s \in S$.

$$[f*(g*h)](s) = f(s) \oplus [(g*h)(s)] =$$
$$= f(s) \oplus [g(s) \oplus h(s)] = [f(s) \oplus g(s)] \oplus h(s) =$$
$$= [(f*g)(s)] \oplus h(s) = [(f*g)*h](s) \;\dagger.$$

<u>Conmutatividad</u>: $f * g = g * f$, $\forall f, g \in \mathcal{F}$.

<u>Prueba</u>: Sean $f, g \in \mathcal{F}$ y $s \in S$.

$(f * g)(s) = f(s) \oplus g(s) = g(s) \oplus f(s) =$
$= (g * f)(s).$ †

<u>Existencia de neutro</u>: $\forall f \in \mathcal{F}$, $\exists 1\, n \in \mathcal{F} \ /$
$f * n = f = n * f$.

<u>Prueba</u>: primero probaremos que n existe y luego que es única.

1) Existe $n \ / \ f * n = f = n * f$.
Sean $n, f \in \mathcal{F}$ con n tal que $n(s) = 0_V$ $\forall s \in S$, donde 0_V es el neutro del grupo abeliano $\{V, \oplus\}$.
$(f * n)(s) = f(s) \oplus n(s) = f(s) \oplus 0_V =$
$f(s) = 0_V \oplus f(s) = (n * f)(s)$ †.

2) n es única.
Sean $n, m \in \mathcal{F}$ dos neutros de $\{\mathcal{F}, *\}$, $s \in S$.

$(n * m)(\Delta) = n(\Delta) \oplus m(\Delta) = 0_{\mathcal{V}} \oplus 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$

y por tanto $n = m$. †

Existencia de inversos: $\forall f \in \mathcal{F}, \exists f_i \in \mathcal{F} \ni$

$f * f_i = n = f_i * f$, donde n es el neutro de $\{\mathcal{F}, *\}$.

Prueba: Sean $f, f_i \in \mathcal{F}$ con $f_i(\Delta) = [f(\Delta)]^{-1}$ $\forall \Delta \in S$, es decir, $f_i(\Delta)$ es el inverso de $f(\Delta)$ bajo la operación $\oplus$ del grupo abeliano $\{\mathcal{V}, \oplus\}$.

$(f * f_i)(\Delta) = f(\Delta) \oplus f_i(\Delta) = f(\Delta) \oplus [f(\Delta)]^{-1} =$
$= 0_{\mathcal{V}} = [f(\Delta)]^{-1} \oplus f(\Delta) = (f_i * f)(\Delta)$. †

Por lo tanto $\{\mathcal{F}, *\}$ es un grupo abeliano.

b) $\square : \mathbb{K} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ cumple con (1), (2), (3) y (4) de la definición I-1.

1) $(k_1 + k_2) \square f = (k_1 \square f) * (k_2 \square f)$.

Prueba: sean $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{F}$ y $\Delta \in S$.

$(k_1 + k_2) \square f(\Delta) = (k_1 + k_2) \odot f(\Delta) =$

$[k_1 \odot f(\Delta)] \oplus [k_2 \odot f(\Delta)] =$

$[k_1 \square f(\Delta)] \oplus [k_2 \square f(\Delta)] =$

$[(k_1 \square f) * (k_2 \square f)](\Delta)$. $\dagger$

2) $k \square (f * g) = (k \square f) * (k \square g)$.

Prueba: sean $k \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{F}$ y $\Delta \in S$.

$k \square [(f * g)(\Delta)] = k \odot [(f * g)(\Delta)] =$

$k \odot [f(\Delta) \oplus g(\Delta)] =$

$[k \odot f(\Delta)] \oplus [k \odot g(\Delta)] =$

$[k \square f(\Delta)] \oplus [k \square g(\Delta)] =$

$[(k \square f) * (k \square g)](\Delta)$. $\dagger$

3) $k_1 \square (k_2 \square f) = (k_1 \cdot k_2) \square f$.

Prueba: sean $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{F}$ y $\Delta \in S$.

$k_1 \square (k_2 \square f(\Delta)) = k_1 \odot (k_2 \odot f(\Delta)) =$

$= (k_1 \cdot k_2) \odot f(\Delta) = (k_1 \cdot k_2) \square f(\Delta)$. $\dagger$

4) $n_{\mathbb{K}} \square f = f$.

Prueba: Sea $n_{\mathbb{K}}$ el neutro del campo $\mathbb{K}$ bajo la operación $\cdot$, y sea $f \in \mathcal{F}$, y $s \in S$.

$$n_{\mathbb{K}} \square f(s) = n_{\mathbb{K}} \odot f(s) = f(s) \,.\ \dagger$$

Por tanto $\{ \mathcal{F}, *, \square, \mathbb{K} \}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Definición I-3

Sea $\{ \mathbb{C}, \oplus, \odot, \mathbb{C} \}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y

$$\mathcal{M} = \{ M : I_m \times I_n \longrightarrow \mathbb{C} \mid M(i,j) = a_{ij} \}$$

el conjunto de las matrices de $m \times n$.

Se definen:

1) $*$: si $M = a_{ij}$, $N = b_{ij} \in \mathcal{M}$,

$M * N : I_m \times I_n \longrightarrow \mathbb{C}$ es la matriz

$M * N = a_{ij} \oplus b_{ij}$.

2) $\square : \mathbb{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, $c \square M : I_m \times I_n \longrightarrow \mathbb{C}$

es tal que si $M = a_{ij}$, $c \square M = c \odot a_{ij}$.

Se puede demostrar fácilmente que el sistema $\{ \mathcal{M}, *, \square, \mathbb{C} \}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (nótese que se trata de un caso particular de la definición I-2).

<u>Otros ejemplos de espacios vectoriales</u>

Es fácil demostrar que:

a) El espacio $\mathbb{P}_n$ formado por todos los polinomios de grado n, $p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ es un espacio vectorial.

b) Dada una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes:

$$\frac{d^n u}{dt^n} + c_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + c_n u = 0 ,$$

las soluciones $u(x)$ forman un espacio vectorial S_n.

Definición I-4

Dado $\mathbb{R}^n = \left\{ A = (a_1, \ldots, a_n) \,\middle|\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

se definen:

1) $\oplus$: $\forall\ (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$(a_1, \ldots, a_n) \oplus (b_1, \ldots, b_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la operación cuyo algoritmo es
$(a_1, \ldots, a_n) \oplus (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots$
$\ldots, a_n + b_n)$, donde $+$ es la suma de $\mathbb{R}$.

2) $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $r \odot (a_1, \ldots, a_n)$:

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la operación cuyo algoritmo es $r \odot (a_1, \ldots, a_n) =$
$= (r \cdot a_1, \ldots, r \cdot a_n)$, donde $\cdot$ es el producto de $\mathbb{R}$.

Teorema I-2

El sistema $\{ \mathbb{R}^n, \oplus, \odot, \mathbb{R} \}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración

1) $\{ \mathbb{R}^n, \oplus \}$ es un grupo abeliano.

Asociatividad: $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $(A \oplus B) \oplus C =$
$= A \oplus (B \oplus C)$.

Prueba: Sean $A = (a_1, \ldots, a_n)$,
$B = (b_1, \ldots, b_n)$, $C = (c_1, \ldots, c_n)$
elementos de $\mathbb{R}^n$.

$(A \oplus B) \oplus C = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n) \oplus (c_1, \ldots, c_n) =$
$= ((a_1+b_1)+c_1, \ldots, (a_n+b_n)+c_n) =$
$= (a_1+(b_1+c_1), \ldots, a_n+(b_n+c_n)) =$
$= A \oplus (B \oplus C)$. †

<u>Conmutatividad</u>: $\forall A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \oplus B = B \oplus A$.

<u>Prueba</u>: Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$.

$$A \oplus B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) =$$
$$= (b_1 + a_1, \ldots, b_n + a_n) = B \oplus A. \quad \dagger$$

<u>Existencia de neutro</u>: $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\exists 1 N \in \mathbb{R}^n$ /
$A \oplus N = A = N \oplus A$.

<u>Prueba</u>: debemos demostrar que N existe y es único.

1) Existe N.
Sean $N, A \in \mathbb{R}^n$ con $N = (0, \ldots, 0)$ y $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

$$A \oplus N = (a_1 + 0, \ldots, a_n + 0) =$$
$$= (a_1, \ldots, a_n) = (0 + a_1, \ldots, 0 + a_n)$$
$$= N \oplus A. \quad \dagger$$

2) N es único.
Sean N y M dos neutros de $\{\mathbb{R}^n, \oplus\}$ y $A \in \mathbb{R}^n$.

$(N \oplus A) \oplus M = A \oplus M = A$;

$N \oplus (A \oplus M) = N \oplus A = A \oplus N = A$, de donde

$A \oplus M = A \oplus N$ y por lo tanto $M = N$. †

<u>Existencia</u> <u>de inversos</u> : $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\exists A_i \in \mathbb{R}^n \ni$

$$A \oplus A_i = N = A_i \oplus A.$$

<u>Prueba</u>: Sean $A, A_i \in \mathbb{R}^n$, con $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $A_i = (-a_1, \ldots, -a_n)$.

$$A \oplus A_i = (a_1 - a_1, \ldots, a_n - a_n) = (0, \ldots, 0) =$$
$$= (-a_1 + a_1, \ldots, -a_n + a_n) = A_i \oplus A. \dagger$$

Por lo tanto $\{ \mathbb{R}^n, \oplus \}$ es un grupo abeliano.

2) $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cumple con las propiedades (1), (2), (3) y (4) de la definición I-1.

1) $(r_1 + r_2) \odot A = (r_1 \odot A) \oplus (r_2 \odot A)$.

<u>Prueba</u>: Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^n$ con $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

$(r_1 + r_2) \odot (a_1, \ldots, a_n) =$

$((r_1 + r_2) \cdot a_1, \ldots, (r_1 + r_2) \cdot a_n) =$

$= ((r_1 \cdot a_1) + (r_2 \cdot a_1), \ldots, (r_1 \cdot a_n) + (r_2 \cdot a_n))$
$= [r_1 \odot (a_1, \ldots, a_n)] \oplus [r_2 \odot (a_1, \ldots, a_n)]$
$= (r_1 \odot A) \oplus (r_2 \odot A)$. †

2) $r \odot (A \oplus B) = (r \odot A) \oplus (r \odot B)$.

<u>Prueba</u>: Sean $r \in \mathbb{R}$ y
$A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$r \odot [A \oplus B] = r \odot [(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)] =$
$= (r \cdot (a_1 + b_1), \ldots, r \cdot (a_n + b_n)) =$
$= ((r \cdot a_1) + (r \cdot b_1), \ldots, (r \cdot a_n) + (r \cdot b_n)) =$
$= [r \odot (a_1, \ldots, a_n)] \oplus [r \odot (b_1, \ldots, b_n)] =$
$= (r \odot A) \oplus (r \odot B)$. †

3) $r_1 \odot (r_2 \odot A) = (r_1 \cdot r_2) \odot A$.

<u>Prueba</u>: Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y
$A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$r_1 \odot (r_2 \odot A) = r_1 \odot [(r_2 \cdot a_1, \ldots, r_2 \cdot a_n)] =$
$= (r_1 \cdot (r_2 \cdot a_1), \ldots, r_1 \cdot (r_2 \cdot a_n)) =$
$= ((r_1 \cdot r_2) \cdot a_1, \ldots, (r_1 \cdot r_2) \cdot a_n) =$
$= (r_1 \cdot r_2) \odot (a_1, \ldots, a_n) = (r_1 \cdot r_2) \odot A$. †

4) $1 \odot A = A$.

<u>Prueba</u>: Sea $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $1 \in \mathbb{R}$ el neutro bajo la operación $\cdot$.

$$1 \odot A = (1 \cdot a_1, \ldots, 1 \cdot a_n) = (a_1, \ldots, a_n) = A. \dagger$$

HEMOS DEMOSTRADO QUE $\{\mathbb{R}^n, \oplus, \odot, \mathbb{R}\}$ ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{R}$.

<u>Convención I-1</u>

En vista de que no hay riesgo de confusión y para simplificar la notación en el desarrollo subsiguiente, se adoptarán las siguientes convenciones:

1) Para referirnos a $\{\mathbb{R}^n, \oplus, \odot, \mathbb{R}\}$ diremos simplemente "el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$".

2) A todo elemento de $\mathbb{R}^n$ le llamaremos "vector" y a todo elemento de $\mathbb{R}$ "escalar".

3) Al neutro $N = (0, \ldots, 0)$ de $\{\mathbb{R}^n, \oplus\}$ lo denotaremos $\bar{0}$.

4) El inverso bajo $\oplus$ de todo elemento A de $\mathbb{R}^n$ lo denotaremos $-A$.

5) a) $\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \cdot r_2$ se denotará $r_1 r_2$.

b) $\forall\, r \in \mathbb{R}$ y $\forall\, A \in \mathbb{R}^n$, $r \odot A$ se denotará rA.

c) $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \oplus B$ se denotará $A + B$.

Nota I-1

En todo lo que sigue de este capítulo, se puede tomar en lugar de $\mathbb{R}$ cualquier otro campo $\mathbb{K}$, como por ejemplo $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{C}$, y todo lo que se haga para $\mathbb{R}$ seguirá siendo válido para cualquier campo, pues de $\mathbb{R}$ utilizaremos solamente la estructura del campo.

Definición I-5

Se dice que un subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ es un SUBESPACIO VECTORIAL de $\mathbb{R}^n$ si cumple las tres condiciones siguientes:

a) El vector $\bar{o}$ de $\mathbb{R}^n$ pertenece a W.

b) Si A y B son vectores de W, su suma A+B pertenece también a W.

c) Si A pertenece a W y λ es un escalar arbitrario, entonces λA pertenece a W.

En particular:

- En $\mathbb{R}^n$ el conjunto $\{\bar{o}\}$ que consta solamente del vector $\bar{o}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Los subespacios $\{\bar{o}\}$ y $\mathbb{R}^n$ se llaman respectivamente subespacios trivial e impropio de $\mathbb{R}^n$.

<u>Definición I-6</u>

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se llama COMBINACION LINEAL de los vectores $A_1, \ldots, A_h$ a cualquier vector C que se exprese en la forma

$$C = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_h A_h \quad ,$$

en donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son escalares.

En particular :

- El vector $\bar{o}$ es combinación lineal de cualquier conjunto finito de vectores, aclarando que la combinación vacía es por definición $\bar{o}$:

$$\bar{o} = 0A_1 + \ldots + 0A_h \; .$$

- En $\mathbb{R}^n$ todo vector $C = (x_1, \ldots, x_n)$ es combinación lineal de los vectores:

$$E_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

pues $C = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n$.

- Si C y D son combinaciones lineales de los vectores $A_1, \ldots, A_h$, entonces $C+D$ también lo es. En efecto, por hipótesis

$$C = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_h A_h$$
$$D = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_h A_h$$

de donde obtenemos

$$C+D = (\lambda_1 + \mu_1) A_1 + \ldots + (\lambda_h + \mu_h) A_h .$$

Esto prueba que $C+D$ es combinación lineal de $A_1, \ldots, A_h$.

Teorema I-3

El conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Definición I-7

A este subespacio se le llama SUBESPACIO GENERADO POR $A_1, \ldots, A_r$. Es decir : Un espacio vectorial W está generado por los vectores $A_1, \ldots, A_r$ de $\mathbb{R}^n$ si W consta de todas las combinaciones lineales de estos vectores y sólo de ellas.

Demostración

Consideremos un conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ y el conjunto $W \subset \mathbb{R}^n$ que estará formado con todas las combinaciones lineales de $\{A_1, \ldots, A_r\}$. Afirmamos que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, $\bar{0} \in W$ (ver definición I-6, primer caso particular). Además, si B y C están en W, es decir, si B y C son combinaciones lineales de $\{A_1, \ldots, A_r\}$, entonces B+C también lo es (ver definición I-6, caso particular tercero), es decir $(B+C) \in W$.

Finalmente, si λ es un escalar y

$$C = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_r A_r \quad , \quad \text{entonces}$$

$$\lambda C = (\lambda\mu_1)A_1 + \ldots + (\lambda\mu_r)A_r \quad \in W.$$

Por lo tanto, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. †

Definición I-8

Se dice que un vector C depende linealmente del conjunto de vectores $\{A_1, \ldots, A_r\}$ si C es una combinación lineal de $\{A_1, \ldots, A_r\}$ o lo que es lo mismo, si C pertenece al subespacio vectorial W generado por $\{A_1, \ldots, A_r\}$.

Definición I-9

Se dice que un conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es LINEALMENTE DEPENDIENTE si al menos uno de ellos depende linealmente de los restantes.

En particular el conjunto $\{A\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $A = \bar{0}$.

Proposición I-1

El conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si y sólo si existe una combinación lineal de ellos igual a cero

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r A_r = \bar{0}$$

con algún λ_i distinto de cero.

Demostración

Supongamos que $\{A_1, \dots, A_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente. Esto significa que alguno de ellos, digamos A_i, depende linealmente de los demás:

$$A_i = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \\ + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \dots + \lambda_r A_r \ .$$

Por consiguiente:

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + (-1) A_i + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \dots + \lambda_r A_r = \bar{0} ,$$

es decir, existe una combinación lineal igual a $\bar{0}$ con al menos un coeficiente distinto de cero, a saber, $\lambda_i = -1$. †

Inversamente, supongamos ahora que hay una combinación lineal con algún coeficiente, digamos $\lambda_i \neq 0$:

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_i A_i + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \dots + \lambda_r A_r = \bar{0} .$$

De aquí obtenemos:

$$A_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} A_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} A_{i-1} +$$

$$-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} A_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_i} A_r \ ,$$

lo cual prueba que los vectores son linealmente dependientes. †

Definición I-10

Se dice que un conjunto de vectores es LINEALMENTE INDEPENDIENTE si no es linealmente dependiente, es decir, si ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes.

De lo anterior resulta que:

Proposición I-2

Un conjunto $\{A_1, \dots, A_r\}$ de vectores es linealmente independiente si la relación

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r = \bar{0}$$

solamente es posible cuando $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

En particular:

a) El conjunto $\{A\}$ es linealmente independiente si y sólo si $A \neq \bar{O}$.

b) Si un conjunto $\{A_1, \cdots, A_r\}$ es linealmente dependiente, entonces cualquier conjunto que lo contenga, digamos $\{A_1, \cdots, A_r, A_{r+1}, \cdots, A_{r+s}\}$ es también linealmente dependiente.

c) Si en un conjunto de vectores uno de ellos es $\bar{O}$, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

d) Cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente de vectores es linealmente independiente ($\emptyset$ es linealmente independiente por definición).

<u>Definición I-11</u>

Un conjunto $\{A_1, \cdots, A_r\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es UNA BASE del subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^n$ si:

1) $\{A_1, \cdots, A_r\}$ es linealmente independiente.

2) $\{A_1, \ldots, A_r\}$ genera a W.

NOTA I-2

El conjunto $\{\bar{0}\}$ formado únicamente con el vector $\bar{0}$ de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (ver definición I-5, primer caso particular). De acuerdo con las convenciones acerca del conjunto vacío (ver definición I-6, primer caso particular y proposición I-2, caso particular d), $\emptyset$ es una base de $\{\bar{0}\}$.

Proposición I-3

Si un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^n$ está generado por r vectores, entonces cualquier conjunto de $r+1$ vectores de W es linealmente dependiente.

Demostración (por inducción sobre r).

Suponemos primero que $r=1$ y que W está generado por $A \neq \bar{0}$, es decir, $W=\{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Necesitamos demostrar que si tomamos dos vectores distintos B_1 y B_2 en W, éstos forman un conjunto linealmente dependiente.

Sean $B_1 = \lambda_1 A$ y $B_2 = \lambda_2 A$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alguna de estas λ_i es distinta de cero, digamos $\lambda_1 = 0$. Entonces: $B_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} B_1$,

lo cual prueba la dependencia lineal.

Supongamos ahora cierto el resultado para r. Lo probaremos para $r+1$. Supongamos que $A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}$ generan a W y que $B_1, \ldots$
$\ldots, B_r, B_{r+1}, B_{r+2} \in W$. Debemos probar que éstos últimos son linealmente dependientes.

Podemos escribir :

$$B_1 = \alpha_{11} A_1 + \ldots + \alpha_{1r} A_r + \gamma_1 A_{r+1}$$

$$B_2 = \alpha_{21} A_1 + \ldots + \alpha_{2r} A_r + \gamma_2 A_{r+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{r+2} = \alpha_{r+2\,1} A_1 + \ldots + \alpha_{r+2\,r} A_r + \gamma_{r+2} A_{r+1} .$$

Supongamos que alguna γ_i, digamos γ_1, es distinta de cero.

Los vectores $B'_1, \dots, B'_{r+1}$ definidos por:

$$B'_1 = B_2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} B_1 \,, \quad \dots \,, \quad B'_{r+1} = B_{r+2} - \frac{\gamma_{r+2}}{\gamma_1} B_1$$

pertenecen al espacio vectorial W' generado por $\{A_1, \dots, A_r\}$ y entonces, por hipótesis de inducción $\{B'_1, \dots, B'_{r+1}\}$ es linealmente dependiente. Luego, existe una combinación lineal:

$$\lambda_1 B'_1 + \dots + \lambda_{r+1} B'_{r+1} = \bar{0}$$

con alguna $\lambda_i \neq 0$.

Sustituyendo obtenemos:

$$\lambda_1 B_2 + \dots + \lambda_{r+1} B_{r+2} + \left[-\frac{\lambda_1 \gamma_2}{\gamma_1} - \dots - \frac{\lambda_{r+1} \gamma_{r+2}}{\gamma_1} \right] B_1 =$$

$= \bar{0}$, lo cual prueba que $\{B_1, \dots, B_{r+2}\}$ es linealmente dependiente, pues alguna $\lambda_i \neq 0$. †

<u>Corolario I-3-a</u>

Si un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^n$ está generado por r vectores, entonces cualquier conjunto de más de r vectores de W es linealmente dependiente. Esto es consecuencia de la proposición anterior y de la proposición I-2, caso b.

Corolario I-3-b

En $\mathbb{R}^n$ cualquier conjunto de más de n vectores es linealmente dependiente.

En efecto, en $\mathbb{R}^n$ hay conjuntos con n vectores que generan $\mathbb{R}^n$ (ver definición I-6, caso 2).

Demostraremos a continuación que todo conjunto linealmente independiente de vectores de W puede "extenderse" a una base de W. Para ello demostraremos primero el siguiente:

Lema I-1

Sea $\{B_1, \ldots, B_r\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^n$ y W el subespacio vectorial que genera. Si B es un vector de $\mathbb{R}^n$ que no está en W, entonces $\{B_1, \ldots, B_r, B\}$ es linealmente independiente.

Demostración

Supongamos que:

$$\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_r B_r + \lambda B = \bar{0} \quad (1).$$

En primer lugar tenemos que: $\lambda=0$, pues en caso contrario tendríamos que:

$$B = \left[-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right]B_1 + \cdots + \left[-\frac{\lambda_r}{\lambda}\right]B_r$$

lo cual no es posible ya que $B \notin W$. Entonces la relación (1) queda:

$$\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_r B_r = \bar{0}$$

y como $\{B_1, \ldots, B_r\}$ es linealmente independiente tenemos $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. En resumen, la condición (1) implica que todas las λ son cero, es decir, $\{B_1, \ldots, B_r, B\}$ es linealmente independiente. †

Teorema I-4

Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{B_1, \ldots, B_r\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores de W. Entonces existen vectores $B_{r+1}, \ldots, B_{r+s}$ en W tales que $\{B_1, \ldots, B_r, B_{r+1}, \ldots, B_{r+s}\}$ es una base de W.

Demostración

Si $\{B_1, \ldots, B_r\}$ genera a W no hay nada que demostrar pues, en este caso, es una base de W. En el caso contrario, si W_1 es el subespacio generado por $\{B_1, \ldots, B_r\}$, $W_1 \subset W$ y $W_1 \neq W$. Entonces podemos tomar un vector $B_{r+1} \in (W - W_1)$. Por el lema anterior, el conjunto $\{B_1, \ldots, B_r, B_{r+1}\}$ es linealmente independiente.

Ahora bien, si este último genera W, es una base de W y queda probado el teorema. En caso contrario, procediendo en igual forma obtenemos un conjunto linealmente independiente $\{B_1, \ldots$ $\ldots, B_r, B_{r+1}, B_{r+2}\}$. Este proceso debe terminar antes de que $r+s$ sea mayor que n, pues de lo contrario obtendríamos más de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ (ver corolario I-3-b). Luego, existe una s tal que $\{B_1, \ldots$ $\ldots, B_r, B_{r+1}, \ldots, B_{r+s}\}$ es una base de W y el teorema queda probado. †

Proposición I-4

Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ tiene base.

Demostración

Convinimos que si $W=\{\bar{0}\}$, tiene como base al conjunto vacío (ver nota I-2). Sea pues $W \neq \{\bar{0}\}$. Entonces hay en W vectores distintos de $\bar{0}$. Sea $B_1 \in W$, $B_1 \neq \bar{0}$. $\{B_1\}$ es linealmente independiente y la proposición se sigue del teorema I-4. †

Teorema I-5

Todas las bases de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ tienen el mismo número de elementos.

Demostración

Sean $\{A_1, \ldots, A_r\}$ y $\{B_1, \ldots, B_s\}$ dos bases de W. Demostraremos que $r=s$.
En primer lugar, ya que $\{A_1, \ldots, A_r\}$ genera a W y $\{B_1, \ldots, B_s\}$ es linealmente independiente, por el corolario I-3-a resulta que $s \leq r$. Invirtiendo el argumento resulta que $r \leq s$, de donde $r=s$. †

Definición I-12

LA DIMENSION de un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^n$ es el número de elementos de cualquier base de W.

Definición I-13

Sean $\{V, +, \cdot, \mathbb{K}\}$ y $\{W, \oplus, \odot, \mathbb{K}\}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

$T : V \longrightarrow W$ es una TRANSFORMACION LINEAL si $\forall\ v_1, v_2 \in V$ y $\forall k \in \mathbb{K}$ se cumple:

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$.

2) $T(k \cdot v_1) = k \odot T(v_1)$.

Definición I-14

Si T es una transformación lineal biyectiva(1) de V en W, se dice que es un ISOMORFISMO o que V ES ISOMORFO A W (que se denota $V \cong W$).

(1) Recuérdese que una función T es biyectiva si y sólo si tiene inversa; y si T es una transformación lineal, $(T)^{-1}$ también lo es.

Definición I-15

Sea T una transformación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$.

El KERNEL DE T se define :

$$\operatorname{Ker} T = \left\{ v \in \mathcal{V} \;\middle|\; T(v) = 0_{\mathcal{W}} \right\} \quad ,$$

donde $0_{\mathcal{W}}$ es el neutro de $\left\{ \mathcal{W}, \oplus \right\}$.

Teorema I-6

Sea T una transformación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$.

$T(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$ donde $0_{\mathcal{V}}, 0_{\mathcal{W}}$ son respectivamente los neutros de $\left\{ \mathcal{V}, + \right\}$ y $\left\{ \mathcal{W}, \oplus \right\}$.

Demostración

$$T(0_{\mathcal{V}}) = T(0_{\mathcal{V}} + 0_{\mathcal{V}}) = T(0_{\mathcal{V}}) \oplus T(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}. \dagger$$

Teorema I-7

Sea T una transformación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$.

T es INYECTIVA si y sólo si $\operatorname{Ker} T = \left\{ 0_{\mathcal{V}} \right\}$.

Demostración a) condición necesaria:

Sean T una transformación lineal inyectiva de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ y $v \in \operatorname{Ker} T$. Por demostrar: $v = 0_{\mathcal{V}}$.

Ya que $v \in \operatorname{Ker} T$, $T(v) = 0_W$. Pero $0_W = T(0_V)$ por el teorema I-6. Y ya que T es inyectiva, $v = 0_V$. †

b) condición suficiente:

Sea T una transformación lineal de V en W tal que $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$ y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $T(v_1) = T(v_2)$ con $v_1 \neq v_2$. Por demostrar: $v_1 = v_2$, es decir, T es inyectiva.

$T(v_1) - T(v_2) = 0_W = T(v_1 - v_2)$ lo que significa que $(v_1 - v_2) \in \operatorname{Ker} T$ y como $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$, concluimos que $v_1 - v_2 = 0_V$ y por tanto $v_1 = v_2$. †

<u>Teorema I-8</u>

Sea $T: V \longrightarrow W$ un isomorfismo y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base de V. Entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de W.

(En particular la dimensión de V es igual a la de W).

Demostración

1) $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Prueba:

Sea $[k_1 \odot T(v_1)] \oplus \ldots \oplus [k_n \odot T(v_n)] =$
$= 0_W = T(k_1 \cdot v_1) \oplus \ldots \oplus T(k_n \cdot v_n)$
y por tanto $(k_1 \cdot v_1) + \ldots + (k_n \cdot v_n) = 0_V$.
Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, $k_1 = \ldots = k_n = 0$, donde 0 es el neutro bajo la operación $\cdot$ de $\mathbb{K}$. †

2) $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera a W.

Prueba: Sea $\omega \in W$. Como T es sobreyectiva, $\exists\, v \in V \ni T(v) = \omega$ y como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a V:

$v = (k_1 \cdot v_1) + \ldots + (k_n \cdot v_n)$ y por lo tanto

$T(v) = \omega = T[(k_1 \cdot v_1) + \ldots + (k_n \cdot v_n)] =$
$T(k_1 \cdot v_1) \oplus \ldots T(k_n \cdot v_n) =$
$[k_1 \odot T(v_1)] \oplus \ldots \oplus [k_n \odot T(v_n)] = \omega$. †

Definición I-16

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \end{cases}$$

donde los coeficientes a_{ij} de las incógnitas x_j y los términos libres k_i se supondrá que son números reales, aunque todo lo que se diga valdrá para el caso en que dichos números se tomen de un campo arbitrario.

Definición I-17

Al sistema anterior se le asocian dos matrices, la MATRIZ DEL SISTEMA de m renglones y n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y la <u>matriz</u> <u>aumentada</u> con los términos libres, de m renglones y n+1 columnas

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} & K_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} & K_m \end{bmatrix} .$$

<u>Convención I-2</u>

Denotaremos con $B_1, \ldots, B_n$ a las columnas de A :

$$B_1 = (a_{11}, \ldots, a_{m1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_n = (a_{1n}, \ldots, a_{mn}) \quad .$$

Con K denotaremos la columna de los términos libres :
$$K = (K_1, \ldots, K_m) .$$

$B_1, \ldots, B_n, K$ son vectores de $\mathbb{R}^m$. Entonces el sistema puede escribirse en forma vectorial con una sola ecuación:

$$x_1 B_1 + \ldots + x_n B_n = K \quad .$$

Definición I-18

Diremos que un vector $S=(s_1,\ldots,s_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es SOLUCION DEL SISTEMA, si S es solución de cada una de las ecuaciones del sistema, es decir, si

$$\begin{cases} a_{11}s_1+\ldots+a_{1n}s_n=K_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}s_1+\ldots+a_{mn}s_n=K_m \end{cases}.$$

En otras palabras, $S=(s_1,\ldots,s_n)$ es solución si y sólo si

$$s_1B_1+\ldots+s_nB_n=K \quad .$$

En este caso K pertenece al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ generado por $\{B_1,\ldots,B_n\}$.

Definición I-19

Un sistema se llama HOMOGENEO si $K=\overline{0}$, es decir, si $K_1=\ldots=K_m=0$.

Definición I-20

Se dice que EL RANGO DE UNA MATRIZ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} . & . & . a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} . & . & . a_{mn} \end{bmatrix}$$

es r si r es la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones

$$\begin{array}{l} R_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \end{array} .$$

Evidentemente se tiene que $r \leq m$. Además, ya que $R_1, \ldots, R_m$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, la dimensión r del subespacio que generan es menor o igual que n. Es decir:

$$r \leq m \quad y \quad r \leq n \quad .$$

Demostraremos ahora que el rango es igual también a la dimensión del espacio vectorial generado por las columnas. Esto será consecuencia del teorema I-10.

Empecemos demostrando el siguiente:

Teorema I-9

Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{A_1, \ldots, A_s\}$ $(s \leq n)$ es linealmente dependiente si y sólo si todos los determinantes de $s \times s$ formados con las coordenadas de los vectores son cero.

Demostración

Consideremos primero el caso $s=2$. Sean $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Supongamos que son linealmente dependientes, es decir, que

$$\alpha A + \beta B = \bar{0}$$

con α ó β distintos de cero. Digamos que $\beta \neq 0$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos que

$$\alpha a_i + \beta b_i = 0 .$$

Entonces

$$0 = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ \alpha a_i + \beta b_i & \alpha a_j + \beta b_j \end{vmatrix}$$

$$= \beta \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$ y como $\beta \neq 0$, tenemos

que $$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0$$, es decir, todos los determinantes de 2x2

formados con las coordenadas de A y B son cero.

Inversamente, supongamos que para toda pareja $$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0 .$$

Veremos entonces que A y B son linealmente dependientes. Si $A = \bar{0}$ no hay nada que demostrar. Supongamos pues que $A \neq \bar{0}$, por lo que alguna coordenada de A es distinta de cero. Supongamos, para facilitar la escritura que $a_1 \neq 0$. Entonces:

$$(-b_1)A + a_1 B = (-b_1)(a_1,\ldots,a_n) + a_1(b_1,\ldots,b_n) = \bar{0}$$

pues por hipótesis $a_i b_j - a_j b_i = 0$. Ahora bien, ya que $a_1 \neq 0$, la relación $(-b_1)A + a_1 B = \bar{0}$ prueba la dependencia lineal.

La demostración del teorema se hace por inducción. Para evitar una notación complicada, solamente señalaremos cómo del caso $s=2$ se deduce el caso $s=3$.

Sean $A=(a_1,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,\ldots,b_n)$, $C=(c_1,\ldots,c_n)$. Supongamos primero que $\{A, B, C\}$ es linealmente dependiente. Entonces hay una combinación lineal:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \bar{0}$$

con algún coeficiente distinto de cero. Supongamos que $\gamma \neq 0$. Tenemos entonces que, para toda i,

$$\alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i = 0 .$$

Por lo tanto,

$$0 = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i & \alpha a_j + \beta b_j + \gamma c_j & \alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k \end{vmatrix}$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} ,$$

y como $\gamma \neq 0$ resulta que todos los determinantes de 3×3 formados con las coordenadas de A, B, C son cero.

Inversamente, supongamos ahora que todos esos determinantes son cero. Si $\{A, B\}$ es linealmente dependiente, también $\{A, B, C\}$ lo es y no hay nada que probar. Supondremos pues que $\{A, B\}$ es linealmente independiente. Entonces, por hipótesis de inducción, algún determinante
$$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$
es distinto de cero. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que
$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Llamemos
$$\beta = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad y \ \alpha = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} .$$

Tenemos que para toda K :

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_K \\ b_1 & b_2 & b_K \\ c_1 & c_2 & c_K \end{vmatrix} = \alpha a_K + \beta b_K + \gamma c_K ,$$

de donde
$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \bar{0}$$
y como $\gamma \neq 0$, $\{A, B, C\}$ es linealmente dependiente, con lo que queda probado el teorema. †

Teorema I-10

El rango de una matriz A es r si y sólo si existe una submatriz de rxr de A cuyo determinante es distinto de cero y, además, los determinantes de todas las submatrices de sxs con s>r son cero.

Demostración

Si r es el rango de A, por definición existen r renglones linealmente independientes. Por el teorema anterior hay una submatriz de rxr cuyo determinante es distinto de cero. Ahora bien, si $s>r$, s renglones son siempre linealmente dependientes. Luego, según el teorema anterior, todos los determinantes de las submatrices de $s \times s$ son cero.

Corolario I-10-a

El rango de una matriz es igual a la dimensión del subespacio vectorial generado por las columnas.

Corolario I-10-b

Una matriz de $n \times n$ es de rango n si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Teorema I-11

Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución si y sólo si el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz aumentada.

Demostración

Que el sistema

$$x_1B_1 + \ldots + x_nB_n = K$$

tenga solución significa que existe $S=(s_1, \ldots, s_n)$

tal que

$$s_1B_1 + \ldots + s_nB_n = K .$$

Esto equivale a decir que K pertenece al subespacio V de $\mathbb{R}^m$ generado por $\{B_1, \ldots, B_n\}$, lo cual ocurre si y sólo si V es igual al subespacio U generado por $\{B_1, \ldots, B_n, K\}$. Y como $V \subset U$ esto ocurre si y sólo si V y U tienen la misma dimensión, o sea, si y sólo si los rangos de la matriz del sistema y de la matriz aumentada son iguales. †

En particular:

a) Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que el determinantre sea distinto de cero tiene solución. En efecto, la matriz aumentada es de $n \times (n+1)$ y su rango no puede ser mayor que n. Además, es n porque contiene como submatriz a la matriz del sistema que es de rango n pues su determinante es distinto de cero.

b) Todo sistema homogéneo tiene solución, pues el rango de la matriz aumentada es igual al rango de la matriz del sistema. (Observar simplemente que $(0,0,\ldots,0)$ es solución).

c) Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas con $m<n$ y rango $r=m$ tiene siempre solución. En efecto, el rango de la matriz aumentada no puede ser mayor que m pues ésta es de $m\times(n+1)$.

UN SISTEMA HOMOGENEO (ver def. I-19) de ecuaciones lineales es un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ .\ .\ .+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\ .\ .\ .+a_{mn}x_n=0 \end{cases} .$$

Si como antes denotamos con $B_1,\ldots,B_n$ a los vectores de $\mathbb{R}^m$ cuyas coordenadas son las columnas de la matriz del sistema, éste se puede escribir:

$$x_1B_1+\ .\ .\ .+x_nB_n=\bar{0}\ .$$

Observemos antes que nada que los sistemas homogéneos siempre tienen a $(0,0,\ldots,0)$ como solución, pues:

$$0B_1 + \ldots + 0B_n = \bar{0}.$$

Denotemos con W el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores $S=(s_1,\ldots,s_n)$ que sean solución del sistema:

$$S \in W \text{ si y sólo si } s_1B_1 + \ldots + s_nB_n = \bar{0}.$$

<u>Proposición I-5</u>

El conjunto W de todas las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$x_1B_1 + \ldots + x_nB_n = \bar{0}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

<u>Demostración</u>

Veremos que W cumple las tres condiciones de la definición de subespacio vectorial (ver def. I-5).

Sean $S=(s_1,\ldots,s_n)$, $T=(t_1,\ldots,t_n) \in W$. Entonces:

$$s_1B_1 + \ldots + s_nB_n = \bar{0}$$

$$t_1B_1 + \ldots + t_nB_n = \bar{0}$$

de donde,

$$(s_1+t_1)B_1 + \ldots + (s_n+t_n)B_n = \bar{0}\,.$$

Luego $(S+T) \in W$.

Evidentemente, como antes observamos, $\bar{0} \in W$.

Además, si $S \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$s_1B_1 + \ldots + s_nB_n = \bar{0}\,,$$

de donde

$$\lambda(s_1B_1 + \ldots + s_nB_n) = \bar{0}\,,$$

por lo que

$$(\lambda s_1)B_1 + \ldots + (\lambda s_n)B_n = \bar{0}\,.$$

Por consiguiente $(\lambda s_1, \ldots, \lambda s_n) = \lambda S \in W$, con lo que terminamos de demostrar la proposición.†

Teorema I-12

Sea $\{B_1, \ldots, B_r\}$ una base del subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas $\{B_1, \ldots, B_n\}$ del sistema:

$$x_1B_1 + \ldots + x_nB_n = K$$

que supondremos tiene solución.

Entonces, dados n-r números $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ existen r números, únicos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_r$ tales que:

$$S = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)$$

es una solución del sistema.

Demostración

Formemos el vector:

$$C = \lambda_{r+1} B_{r+1} + \ldots + \lambda_n B_n .$$

Ya que $\{B_1, \ldots, B_r\}$ generan a V, lo anterior indica que $C \in V$. Como también $K \in V$, pues suponemos que el sistema tiene solución, resulta que $(K-C) \in V$. Por consiguiente, K-C es combinación lineal de $\{B_1, \ldots, B_r\}$, es decir, existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tales que:

$$K-C = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_r B_r ,$$

de donde

$$\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_r B_r + \lambda_{r+1} B_{r+1} + \ldots + \lambda_n B_n = K ,$$

lo cual demuestra que S es solución.

Probaremos la unicidad de los números $s_1, \ldots, s_r$.
Si hubiera otros números $s_1', \ldots, s_r'$ tales que:

$$S' = (s_1', \ldots, s_r', s_{r+1}, \ldots, s_n)$$

fuera también solución, entonces $S - S' = K - K = \bar{0}$, de donde,

$$(s_1 - s_1') B_1 + \ldots + (s_r - s_r') B_r = \bar{0}$$

lo cual implica que $s_1 - s_1' = 0, \ldots, s_r - s_r' = 0$, puesto que $\{B_1, \ldots, B_r\}$ es linealmente independiente por ser base.
Luego, $s_1 = s_1', \ldots, s_r = s_r'$. †
Según la unicidad que acabamos de demostrar bajo la hipótesis anterior, para que dos soluciones sean iguales, basta que tengan iguales las últimas $n-r$ coordenadas.
Apliquemos ahora este resultado a sistemas homogéneos.

<u>Teorema I-13</u>
Si V es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de la matriz de un sistema

homogéneo :

$$x_1B_1 + \dots + x_nB_n = \bar{0}$$

y W es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado con todas las soluciones del sistema , entonces

$$\dim V + \dim W = n .$$

Demostración

Consideremos las siguientes n-r soluciones correspondientes a los valores de $\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$ que consten de 1 y 0 los demás (su existencia queda asegurada por el teorema I-12) :

$$S_1 = (\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots, \Delta_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$S_2 = (\Delta_{21}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{2r}, 0, 1, \dots, 0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{n-r} = (\Delta_{n-r\,1}, \Delta_{n-r\,2}, \dots, \Delta_{n-r\,r}, 0, 0, \dots, 1) .$$

Demostraremos que $\{ s_1, \dots, s_{n-r} \}$ es una base de W. En primer lugar, es linealmente independiente, pues uno de los determinantes formados con sus coordenadas es distinto de cero :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Veremos ahora que $\{s_1, \ldots, s_{n-r}\}$ genera a W.

Sea $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)$ una solución cualquiera. El vector:

$$s' = \lambda_{r+1} s_1 + \ldots + \lambda_n s_{n-r}$$

(construído usando las últimas n-r coordenadas de s) pertenece a W, pues $s_1, \ldots, s_{n-r} \in W$. Un cálculo directo prueba que s' es de la forma

$$s' = (\lambda_1', \ldots, \lambda_r', \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) .$$

Así pues, s y s' tienen sus últimas n-r coordenadas iguales, por lo que (véase la unicidad en el teorema I-12) $s = s'$ y $s \in W$, con lo que queda probado el teorema. †

<u>Corolario I-13</u>

La dimensión del subespacio W de soluciónes de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es

$$\dim V = n - r$$

en donde n es el número de incógnitas y r es el rango.

<u>Definición I-21</u>

(SISTEMA HOMOGENEO ASOCIADO).

Dado un sistema de ecuaciones lineales :

$$x_1 B_1 + \ . \ . \ . + x_n B_n = K \qquad (I)$$

<u>se le asocia el sistema homogéneo</u> :

$$x_1 B_1 + \ . \ . \ . + x_n B_n = \bar{0} \ . \qquad (II)$$

Supondremos que (I) tiene solución. Sea $\bar{S}$ una solución de (I). En el siguiente teorema se describen todas las soluciones de (I) a partir de $\bar{S}$ y del subespacio de soluciones de (II).

Teorema I-14

Toda solución T del sistema (I) es de la forma

$$T = S + \bar{S} ,$$

en donde $\bar{S}$ es una solución fija de (I) y S recorre todas las soluciones de (II).

Demostración

Sea $S = (s_1, \ldots, s_n)$ una solución de (II) y $\bar{S} = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$ la solución dada de (I). Entonces $S + \bar{S}$ es solución de (I) pues

$$(s_1 + \bar{s}_1) B_1 + \ldots + (s_n + \bar{s}_n) B_n =$$

$$= (s_1 B_1 + \ldots + s_n B_n) + (\bar{s}_1 B_1 + \ldots + \bar{s}_n B_n) =$$

$$= \bar{O} + K = K .$$

Inversamente, si $T = (t_1, \ldots, t_n)$ es solución de (I), tenemos que:

$$t_1 B_1 + \ldots + t_n B_n = K ,$$

de donde,

$$(t_1-\overline{s_1})\,B_1 + \ldots + (t_n-\overline{s_n})\,B_n =$$

$$= (t_1B_1 + \ldots + t_nB_n) - (\overline{s_1}B_1 + \ldots + \overline{s_n}B_n) =$$

$= K-K = \overline{0}$; o sea $T-\overline{S}$ es solución de(II). Si llamamos $S=T-\overline{S}$ a esta solución, tenemos que $T=S+\overline{S}$, con lo que queda probado el teorema. †

Este teorema sirve para describir convenientemente al conjunto de soluciones de un sistema. En efecto, basta dar un vector $\overline{S}$ [una solución particular de(I)] y un subespacio vectorial W [el de las soluciones de (II)]. Todas las soluciones del sistema son entonces de la forma $S+\overline{S}$ con $S \in W$.

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ANALISIS DIMENSIONAL

Definición II-1

Serán DIMENSIONES FUNDAMENTALES[2] : la masa, la longitud, el tiempo, la carga eléctrica y la temperatura.

Convención II-1

Las dimensiones fundamentales se representarán:

$$\mu = \text{masa} \quad , \quad \lambda = \text{longitud}$$

$$\tau = \text{tiempo} \quad , \quad \psi = \text{carga eléctrica}$$

$$\text{y} \quad \theta = \text{temperatura} .$$

Definición II-2

Se llamará PATRON PRIMARIO a cualquier unidad definida para medir alguna dimensión fundamental.

(2) Se han definido otros conjuntos de dimensiones fundamentales. Por ejemplo, uno muy semejante al escogido en este trabajo es el conjunto $\{\phi, \lambda, \tau, \psi, \theta\}$ en donde λ, τ, ψ, θ representan las mismas dimensiones que aquí y ϕ es la fuerza, que viene a sustituir a la masa como dimensión fundamental. Si ϕ es dimensión fundamental, entonces por la 2ª Ley de Newton, la dimensión de la masa será $\phi\tau^2\lambda^{-1}$.

Otro ejemplo es el siguiente: En ingeniería eléctrica el concepto de masa no es muy usado y en consecuencia

Nótese que la def. II-2 es muy amplia, pues por ejemplo, acepta como patrones primarios para la longitud al metro y a todos sus múltiplos. En realidad, para una dimensión fundamental dada podemos definir tantos patrones primarios como queramos.

Definición II-3

EL CONJUNTO Σ DE LAS UNIDADES se define como:

$$\Sigma = \left\{ U \;\middle|\; U = M^a \Lambda^b T^c \Psi^d \Theta^e, \quad a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \text{ y } M, \Lambda, T, \Psi, \Theta \text{ son respectivamente, cualesquiera patrones primarios para } \mu, \lambda, \tau, \psi \text{ y } \theta. \right\}$$

Convención II-2

En todo lo siguiente supondremos que $M, \Lambda, T, \Psi, \Theta$ CUMPLEN FORMALMENTE LAS LEYES DE LOS EXPONENTES.

es costumbre adoptar el potencial eléctrico υ o alguna otra variable "eléctrica" como dimensión fundamental en lugar de la masa. También, ya que los campos electrostáticos son comparativamente poco importantes en ingeniería eléctrica, es conveniente en la práctica emplear la corriente i como dimensión fundamental en vez de la carga eléctrica. Como el producto $i \times \upsilon$ es la potencia eléctrica, la dimensión de la masa es entonces: $\lambda^{-2}\tau^3 i \upsilon$. El conjunto de dimensiones fundamentales en ingeniería eléctrica es $\{\upsilon, \lambda, \tau, i, \theta\}$. †

Definición II-4

EL CONJUNTO DE LAS MEDIDAS ABSOLUTAS es:

$$\Xi = \left\{ X \mid X = rU \ , \ r \in \mathbb{R}^+ \ \text{y} \ U \in \Phi \right\} .$$

Definición II-5

Dada $X \in \Xi$, con $X = rU = r\, M^a \Lambda^b T^c \Psi^d \Theta^e$,

se define:

$$D(X) = \mu^a \lambda^b \tau^c \psi^d \theta^e .$$

A $D(X)$ se le llamará LA DIMENSION DE X.

Definición II-6

Si $D(X) = 1$, se dirá que X ES ADIMENSIONAL.

Adviértase que en tal caso, $X \in \mathbb{R}^+$.

Definición II-7

Dados $X_i \in \Xi$ y $U_j \in \Phi$,

con $X_i = r_i U_i = r_i\, M_i^a \Lambda_i^b T_i^c \Psi_i^d \Theta_i^e$

y $U_j = M_j^a \Lambda_j^b T_j^c \Psi_j^d \Theta_i^e$ (5), se define

$T_{ij} : \Xi \longrightarrow \Xi$ tal que:

(5) ver nota (4).

1) $T_{ij}(X_i) = X_j$ con $X_j = r_j U_j \in \Xi$.

2) $T_{ji} = (T_{ij})^{-1}$

cuyo algoritmo es:

$$T_{ij}(X_i) = F_{\mu_{ij}}^{a}\, F_{\lambda_{ij}}^{b}\, F_{\tau_{ij}}^{c}\, F_{\psi_{ij}}^{d}\, F_{\theta_{ij}}^{e}\, X_i \quad , \text{ donde}$$

$$F_{\mu_{ij}} = f_{\mu_{ij}} \frac{M_j}{M_i} \quad , \quad F_{\lambda_{ij}} = f_{\lambda_{ij}} \frac{\Lambda_j}{\Lambda_i} \quad ,$$

$$F_{\tau_{ij}} = f_{\tau_{ij}} \frac{T_j}{T_i} \quad , \quad F_{\psi_{ij}} = f_{\psi_{ij}} \frac{\Psi_j}{\Psi_i} \quad \text{y} \quad F_{\theta_{ij}} = 1^{(4)}.$$

$f_{\mu_{ij}}, f_{\lambda_{ij}}, f_{\tau_{ij}}, f_{\psi_{ij}} \in \mathbb{R}^+$ y para cada (i,j) el vector $(f_{\mu_{ij}}, f_{\lambda_{ij}}, f_{\tau_{ij}}, f_{\psi_{ij}}, 1) \in \mathbb{R}^5$ es UNICO.

Claramente:

$$T_{ij}(X_i) = (f_{\mu_{ij}}^{a}\, f_{\lambda_{ij}}^{b}\, f_{\tau_{ij}}^{c}\, f_{\psi_{ij}}^{d}\, r_i)(M_j^{a}\Lambda_j^{b}T_j^{c}\Psi_j^{d}\Theta_i^{e})$$

$$= r_j U_j = X_j \; .$$

Nótese que $D(X_i) = D(X_j)$.

(4) Se define así porque la transformación de temperaturas no es lineal. Ver definición de HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL (def. X-14).

$T_{ji}(X_j)$ tiene la forma:

$$T_{ji}(X_j) = F_{\mu_{ji}}^{a} F_{\lambda_{ji}}^{b} F_{\tau_{ji}}^{c} F_{\psi_{ji}}^{d} F_{\theta_{ji}}^{e} X_j \text{ , donde}$$

$$F_{\mu_{ji}} = \frac{1}{F_{\mu_{ij}}} \text{ , } \quad F_{\lambda_{ji}} = \frac{1}{F_{\lambda_{ij}}} \text{ ,}$$

$$F_{\tau_{ji}} = \frac{1}{F_{\tau_{ij}}} \text{ , } \quad F_{\psi_{ji}} = \frac{1}{F_{\psi_{ij}}} \text{ y } F_{\theta_{ji}} = 1 \text{ .}$$

A T se le llamará <u>transformación de unidades</u> y a $F_{\mu_{ij}}$, $F_{\lambda_{ij}}$, $F_{\tau_{ij}}$, $F_{\psi_{ij}}$, $F_{\theta_{ij}}$ respectivamente <u>factores de conversión</u> de la masa, la longitud, el tiempo, la carga eléctrica y la temperatura de la unidad U_i a la unidad U_j.

<u>Convención II-3</u>

En el desarrollo siguiente, dado un conjunto de variables $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \Xi$, todo elemento del conjunto estará expresado con los mismos patrones primarios, es decir,

$$X_i = r_i M^{a_i} \Lambda^{b_i} T^{c_i} \Psi^{d_i} \Theta^{e_i} \text{ , } i = 1, \ldots, n \text{ .}$$

Definición II-8

Dado $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \Xi$, LA MATRIZ DIMENSIONAL de este conjunto de variables es un arreglo:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & d_n \\ e_1 & e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_n \end{bmatrix}$$

donde a_i es el exponente de μ en $D(X_i)$

b_i " " " " λ " "

c_i " " " " τ " "

d_i " " " " ψ " "

e_i " " " " θ " " .

Para mayor claridad también se puede escribir:

$$\begin{array}{c|cccccc} & X_1 & X_2 & \cdot & \cdot & \cdot & X_n \\ \hline \mu & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ \lambda & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \\ \tau & c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ \psi & d_1 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & d_n \\ \theta & e_1 & e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_n \end{array}$$

Definición I-9

Dado $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \Xi$ se define el conjunto de los PRODUCTOS ADIMENSIONALES de las variables $X_1, \ldots, X_n$:

$$\Pi(X_1,\ldots,X_n) = \left\{ \pi \mid \pi = (X_1)^{k_1} \cdots (X_n)^{k_n}, \text{ con } (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{R}^n \text{ y } D(\pi) = 1 \right\}.$$

Nótese que todo $\pi \in \Pi$, también $\pi \in \mathbb{R}^+$.

Teorema II-1

Sea $\pi = (X_1)^{k_1} \cdots (X_n)^{k_n} =$

$$= (r_1 M^{a_1} \Lambda^{b_1} T^{c_1} \Psi^{d_1} \Theta^{e_1})^{k_1} \cdots$$

$$\cdots (r_n M^{a_n} \Lambda^{b_n} T^{c_n} \Psi^{d_n} \Theta^{e_n})^{k_n}.$$

$D(\pi) = 1$ si y sólo si el vector $K = (k_1, \ldots, k_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es una solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n = 0 \\ b_1 r_1 + \ldots + b_n r_n = 0 \\ c_1 r_1 + \ldots + c_n r_n = 0 \\ d_1 r_1 + \ldots + d_n r_n = 0 \\ e_1 r_1 + \ldots + e_n r_n = 0 \end{array}\right. \quad (I),$$

equivalente a $r_1 B_1 + \ldots + r_n B_n = \bar{0}$, con $B_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$, $i = 1,\ldots,n$ vectores de $\mathbb{R}^5$.

Demostración

Sea

$$\Pi = (r_1 M^{a_1} \Lambda^{b_1} T^{c_1} \Psi^{d_1} \Theta^{e_1})^{k_1} \cdots$$

$$\cdots (r_n M^{a_n} \Lambda^{b_n} T^{c_n} \Psi^{d_n} \Theta^{e_n})^{k_n} =$$

$$= (r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}) (M^{a_1 k_1 + \ldots + a_n k_n}) \cdots$$

$$\cdots (\Theta^{e_1 k_1 + \ldots + e_n k_n}) .$$

$D(\Pi) = 1$ si y sólo si :

$$\Pi = (r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}) (M^0 \Lambda^0 T^0 \Psi^0 \Theta^0) ,$$

es decir $k_1 B_1 + \ldots + k_n B_n = \bar{0}$

lo cual prueba que la condición es necesaria y suficiente.

Definición II-10

Dado $\prod(x_1, \ldots, x_n)$ se definen:

1) $\square : \forall \pi_1, \pi_2 \in \prod \ , \ \pi_1 \square \pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_2$
donde $\cdot$ es la multiplicación de números reales.

2) $\triangle : \mathbb{R} \times \prod \longrightarrow \prod$ tal que $r \triangle \pi = \pi^r$.

Teorema II-2

$\{\prod, \square, \triangle, \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración

$\{\prod, \square, \triangle, \mathbb{R}\}$ debe cumplir con la definición I-1. Por ello, primero demostraremos que $\{\prod, \square\}$ es un grupo abeliano y luego que $\triangle : \mathbb{R} \times \prod \longrightarrow \prod$ cumple con las propiedades (1), (2), (3) y (4).

1) $\{\Pi, \square\}$ es un grupo abeliano.

<u>Asociatividad</u>: $(\pi_1 \square \pi_2) \square \pi_3 = \pi_1 \square (\pi_2 \square \pi_3)$
$\forall\, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$.

<u>Prueba</u>: $(\pi_1 \square \pi_2) \square \pi_3 = (\pi_1 \cdot \pi_2) \cdot \pi_3 =$

$= \pi_1 \cdot (\pi_2 \cdot \pi_3) = \pi_1 \square (\pi_2 \square \pi_3)$. †

<u>Existencia de neutro</u>: $\forall\, \pi \in \Pi, \exists 1 \pi_n \in \Pi$ tal que $\pi \square \pi_n = \pi = \pi_n \square \pi$.

<u>Prueba</u>: 1) Existencia. Sean $\pi, \pi_n \in \Pi$, con $\pi_n = 1$.

$(\pi \square \pi_n) = \pi \cdot 1 = \pi = 1 \cdot \pi$. †

2) Unicidad. Sean $\pi, \pi_n, \pi_m \in \Pi$ con π_n, π_m dos neutros de $\{\Pi, \square\}$.

$(\pi_n \square \pi) \square \pi_m = (\pi_n \cdot \pi) \cdot \pi_m = \pi \cdot \pi_m =$
$= \pi_m \cdot \pi = \pi$.

$\pi_n \square (\pi \square \pi_m) = \pi_n \cdot (\pi \cdot \pi_m) = \pi_n \cdot \pi =$
$= \pi \cdot \pi_n = \pi$.

Como $\pi \cdot \pi_n = \pi \cdot \pi_m$, $\pi \,\square\, \pi_n = \pi \,\square\, \pi_m$ y por tanto $\pi_n = \pi_m = 1$. †

<u>Existencia de inversos</u> : $\forall\, \pi \in \Pi$, $\exists\, \pi_i \in \Pi \ni$
$$\pi \,\square\, \pi_i = 1 = \pi_i \,\square\, \pi .$$

<u>Prueba</u> : Sean $\pi, \pi_i \in \Pi$ con $\pi_i = 1/\pi$.

$(\pi \,\square\, \pi_i) = \pi \cdot \pi_i = \pi \cdot (1/\pi) = (1/\pi) \cdot \pi = 1$. †

<u>Conmutatividad</u> : $\pi_1 \,\square\, \pi_2 = \pi_2 \,\square\, \pi_1$, $\forall\, \pi_1, \pi_2 \in \Pi$.

<u>Prueba</u> : $\pi_1 \,\square\, \pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1 = \pi_2 \,\square\, \pi_1$. †

Por lo tanto $\{\Pi, \square\}$ es grupo abeliano.

2) $\triangle : \mathbb{R} \times \Pi \longrightarrow \Pi$ cumple con (1), (2), (3) y (4), de la def. I-1.

a) $(r_1 + r_2) \triangle \pi = (r_1 \triangle \pi) \,\square\, (r_2 \triangle \pi)$.

<u>Prueba</u>:
$$(r_1+r_2) \triangle \pi = \pi^{r_1+r_2} = \pi^{r_1} \cdot \pi^{r_2}$$
$$= \pi^{r_1} \,\square\, \pi^{r_2} = (r_1 \triangle \pi) \,\square\, (r_2 \triangle \pi) . †$$

b) $r \vartriangle (\Pi_1 \square \Pi_2) = (r \vartriangle \Pi_1) \square (r \vartriangle \Pi_2)$.

<u>Prueba</u>: $r \vartriangle (\Pi_1 \square \Pi_2) = r \vartriangle (\Pi_1 \cdot \Pi_2) =$

$= (\Pi_1 \cdot \Pi_2)^r = \Pi_1{}^r \cdot \Pi_2{}^r =$

$= (\Pi_1^r) \square (\Pi_2^r) = (r \vartriangle \Pi_1) \square (r \vartriangle \Pi_2).$ †

c) $r_1 \vartriangle (r_2 \vartriangle \Pi) = (r_1 \cdot r_2) \vartriangle \Pi$.

<u>Prueba</u>: $r_1 \vartriangle (r_2 \vartriangle \Pi) = r_1 \vartriangle (\Pi^{r_2}) =$

$= (\Pi^{r_2})^{r_1} = \Pi^{r_2 r_1} = \Pi^{r_1 r_2} =$

$= (r_1 \cdot r_2) \vartriangle \Pi$. †

d) $1 \vartriangle \Pi = \Pi$.

<u>Prueba</u>: $1 \vartriangle \Pi = \Pi^1 = \Pi$. †

Por lo tanto $\left\{ \prod, \square, \vartriangle, \mathbb{R} \right\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. †

<u>Definición II-11</u>

$$W = \left\{ K \mid K \text{ es solución del sistema I} \right\} .$$

Por la proposición I-5 sabemos que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ y podemos afirmar que

$\{W, \oplus, \odot, \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(Ver definición I-4 para $\oplus$ y $\odot$).

Definición II-12

Sean $\{W, \oplus, \odot, \mathbb{R}\}$ y $\{\Pi, \square, \Delta, \mathbb{R}\}$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Se define:

$\forall\, K = (k_1, \ldots, k_n) \in W$ y $\forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Xi$,

$T : W \longrightarrow \Pi$, cuyo algoritmo es

$$T(K) = (X_1)^{k_1} (X_2)^{k_2} \cdots (X_n)^{k_n}.$$

Teorema II-3

T es un isomorfismo.

Demostración

Demostraremos que T es una transformación lineal y que posee inversa (ver definiciones I-13 y I-14).

1) T es una transformación lineal.

Prueba: Sean $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Xi$, $r \in \mathbb{R}$

y $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $L = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in W$.

$$T(K \oplus L) = T[(k_1+\ell_1, \ldots, k_n+\ell_n)] =$$
$$= (X_1)^{k_1+\ell_1} \ldots (X_n)^{k_n+\ell_n} =$$
$$= (X_1)^{k_1} \ldots (X_n)^{k_n} (X_1)^{\ell_1} \ldots (X_n)^{\ell_n} = T(K) \square T(L). \dagger$$

$$T(r \odot K) = T[(rk_1, \ldots, rk_n)] =$$
$$= (X_1)^{rk_1} \ldots (X_n)^{rk_n} = [(X_1)^{k_1} \ldots (X_n)^{k_n}]^r =$$
$$= [T(K)]^r = r \vartriangle T(K). \dagger$$

2) T tiene inversa.

<u>Prueba</u> : Sea $\pi = (X_1)^{k_1} \cdots (X_n)^{k_n}$ un producto adimensional cualquiera.

$T^{-1} : \Pi \longrightarrow W$ es la función cuyo algoritmo es $T^{-1}(\pi) = (k_1, \ldots, k_n)$. $\dagger$

Por lo tanto T es un isomorfismo, o lo que es lo mismo $W \cong \Pi$.

<u>Corolario II-3-a</u>

$T(\bar{0}) = 1$. Esto lo garantizan los teoremas I-6 y II-3.

Corolario II-3-b

Si $\{K_1, \ldots, K_r\}$ es una base de W entonces $\{T(K_1), \ldots, T(K_r)\}$ es una base de Π. En particular $\dim W = \dim \Pi$. Esto es consecuencia de los teoremas I-8 y II-3.

Corolario II-3-c

Un conjunto $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\} \subset \Pi$ es linealmente independiente si y sólo si la igualdad:

$$\pi_1^{\lambda_1} \cdots \pi_p^{\lambda_p} = 1 \ , \quad \text{con } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$$

se cumple con $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ solamente. Esto es consecuencia de la proposición I-2, del teorema I-8 y del teorema II-3.

Definición II-13

Sean $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Xi$ y $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\} \subset \Pi$.

La matriz de exponentes de $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\}$ es un arreglo :

$$\begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \hline \pi_1 & K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ \pi_2 & K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_p & K_{p1} & K_{p2} & \cdots & K_{pn} \end{array}$$

donde el i-ésimo renglón está formado por los exponentes de $X_1, \ldots, X_n$ en el i-ésimo producto π_i.

<u>Corolario II-3-d</u>

Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\}$ de productos adimensionales sea linealmente independiente es que los renglones de su matriz de exponentes sean linealmente independientes.

Esto es consecuencia del teorema I-8 y del teorema II-3.

(5) Las funciones tratadas en el resto del capítulo se supondrá que son funciones "BIEN COMPORTADAS" en el sentido de que cumplen con los teoremas de las funciones implícitas y la regla de la cadena.

<u>Definición II-14</u>

Sean $Y=f(X_1,\dots,X_n)$, $X_1,\dots,X_n,Y \in \Xi$ y T una transformación de unidades cualquiera. $Y=f(X_1,\dots,X_n)$ es DIMENSIONALMENTE HOMOGENEA si :

$$T[f(X_1,\dots,X_n)]=f[T(X_1),\dots,T(X_n)].$$

Nótese que lo que pide esta definición es que :

$$T[f(X_1,\dots,X_n)]=f[T(X_1),\dots,T(X_n)]$$

sea una igualdad en el más estricto sentido de la palabra (una identidad).

<u>Teorema II-4</u>

Una suma de variables es dimensionalmente homogénea si y sólo si todos los sumandos tienen la misma dimensión que la suma.

<u>Demostración</u>

Sea $Y=f(X_1,\dots,X_n)=X_1+\dots+X_n$ con

$Y=r_y M^a \Lambda^b T^c \Psi^d \Theta^e$ y $X_i=r_i M^{a_i}\Lambda^{b_i}T^{c_i}\Psi^{d_i}\Theta^{e_i}$, $i=1,\dots,n$, una ecuación dimensionalmente homogénea; y T una transformación de unidades cualquiera.

Por la definición de homogeneidad dimensional :

$$T(X_1+\ldots+X_n) = T(X_1) + \ldots + T(X_n) =$$

$$= F_\mu^a F_\lambda^b F_\tau^c F_\psi^d F_\theta^e \, (X_1+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} F_\mu^{a_i} F_\lambda^{b_i} F_\tau^{c_i} F_\psi^{d_i} F_\theta^{e_i} X_i \, .$$

La ecuación anterior debe ser una identidad, lo que implica que :

$$F_\mu^a F_\lambda^b F_\tau^c F_\psi^d F_\theta^e = F_\mu^{a_i} F_\lambda^{b_i} F_\tau^{c_i} F_\psi^{d_i} F_\theta^{e_i} \quad , i=1,\ldots,n.$$

Entonces :

$a=a_i$, $b=b_i$, $c=c_i$, $d=d_i$ y $e=e_i$, $i=1,\ldots,n$.

Esto significa que $D(Y)=D(X_i)$, $i=1,\ldots,n$.

Es fácil ver que invirtiendo el argumento , la condición es también suficiente, lo cual demuestra el teorema. ┤

__Teorema II-5__

Sea $Y=(X_1)^{K_1}\cdots(X_n)^{K_n}$ con $X_1,\ldots,X_n \in \Xi$ y $(K_1,\ldots,K_n)\in\mathbb{R}^n$. El producto Y es dimensionalmente homogéneo si y sólo si $(K_1,\ldots,K_n)$ es una solución del sistema :

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 r_1 + \; . \; . \; . + a_n r_n = a \\ b_1 r_1 + \; . \; . \; . + b_n r_n = b \\ c_1 r_1 + \; . \; . \; . + c_n r_n = c \\ d_1 r_1 + \; . \; . \; . + d_n r_n = d \\ e_1 r_1 + \; . \; . \; . + e_n r_n = e \end{array}\right. \qquad (\mathrm{II})$$

Demostración

Sea $Y = (X_1)^{k_1} \cdots (X_n)^{k_n}$ un producto dimensionalmente homogéneo con:

$$Y = r_y M^a \Lambda^b T^c \Psi^d \Theta^e ,$$

$$X_i = r_i M^{a_i} \Lambda^{b_i} T^{c_i} \Psi^{d_i} \Theta^{e_i} \qquad i = 1, \ldots, n ,$$

y T una transformación de unidades cualquiera.

Por la definición de homogeneidad dimensional:

$$T[(X_1)^{k_1} \cdots (X_n)^{k_n}] = T(X_1^{k_1}) \cdots T(X_n^{k_n}) .$$

(Nótese que $T(X_i^{k_i}) = [T(X_i)]^{k_i}$).

Como la ecuación anterior debe ser una identidad, se cumple que:

$$F_\mu^a F_\lambda^b F_\tau^c F_\psi^d F_\theta^e[(X_1)^{k_1}\cdots(X_n)^{k_n}] =$$

$$\prod_{i=1}^{n} (F_\mu^{a_i} F_\lambda^{b_i} F_\tau^{c_i} F_\psi^{d_i} F_\theta^{e_i})^{k_i} X_i^{k_i} \quad ,$$

y se cumple:

$$F_\mu^a F_\lambda^b F_\tau^c F_\psi^d F_\theta^e = (F_\mu^{a_1k_1+\ldots+a_nk_n})(F_\lambda^{b_1k_1+\ldots+b_nk_n})\cdots$$

$$\cdots(F_\tau^{c_1k_1+\ldots+c_nk_n})(F_\psi^{d_1k_1+\ldots+d_nk_n})(F_\theta^{e_1k_1+\ldots+e_nk_n}).$$

Entonces $(k_1,\ldots,k_n)$ es solución del sistema II, lo cual prueba que la condición es necesaria. De nuevo, la prueba de suficiencia se obtiene fácilmente invirtiendo el orden de la prueba anterior.

Corolario II-5

Todo producto adimensional de $X_1,\ldots,X_n$ es dimensionalmente homogéneo.

Demostración

Sea $\pi = (X_1)^{k_1}\cdots(X_n)^{k_n}$ y $D(\pi)=1$.

Por el teorema II-1 sabemos que $(k_1,\ldots,k_n)$ es solución del sistema I. Pero el sistema I es un caso particular del sistema II, con $a=b=c=d=e=0$. Por tanto, π es dimensionalmente homogéneo. †

Teorema II-6

Sean $X_1, \ldots, X_n, Y \in \Xi$, con $Y = r_y M^a \Lambda^b T^c \Psi^d \Theta^e$ y $X_i = r_i M^{a_i} \Lambda^{b_i} T^{c_i} \Psi^{d_i} \Theta^{e_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Existe almenos un producto de la forma:

$$Y = (X_1)^{k_1} \cdots (X_n)^{k_n}$$

si y sólo si la matriz dimensional de las variables $X_1, \ldots, X_n$ posee el mismo rango que la matriz dimensional de las variables $Y, X_1, \ldots, X_n$.

Demostración

La condición de que el producto exista, es equivalente a la condición de que el sistema II sea consistente, pues $(k_1, \ldots, k_n)$ -si existe- es solución del sistema II. Ya se demostró que el sistema II tiene solución si y sólo si el rango de la matriz del sistema II es igual al rango de su matriz aumentada (ver teorema I-11).

Teorema II-7

Si $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$ es una función dimensionalmente homogénea, entonces existe un producto de potencias de las X_i que tiene la misma dimensión que Y.

Corolario II-7

Cualquier función $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$ dimensionalmente homogénea puede reducirse a la forma:

$$P=g(X_1,\ldots,X_n) \quad \text{en que } D(P)=1.$$

Demostración

Sabemos que si $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$ es dimensionalmente homogénea, entonces existe un producto de potencias de las X_i tal que su dimensión es igual a la de Y. Si dividimos la función por este producto, obtendremos una variable adimensional.

Sea $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$ una función dimensionalmente homogénea. Entonces existe:

$$Z=(X_1^{K_1})\cdots(X_n^{K_n}) \;/\; D(Z)=D(Y).$$

Si hacemos:
$$P = \frac{f(X_1,\dots,X_n)}{z(X_1,\dots,X_n)} = g(X_1,\dots,X_n)$$

es evidente que $D(P)=1$, es decir, P es una variable adimensional.[6] †

<u>Definición II-15</u>

El espacio Ξ^n se define:

$$\Xi^n = \left\{ (X_1,\dots,X_n) \;\middle|\; X_1,\dots,X_n \in \Xi \right\}.$$

<u>Definición II-16</u>

El espacio $S_{\bar{X}}$ se define:

$$S_{\bar{X}} = \Big\{ T(\bar{X}) \;\Big|\; \bar{X} = (X_1,\dots,X_n) \in \Xi^n \text{ y } T(\bar{X}) = (T(X_1),\dots,T(X_n)) \text{ y } T \text{ cualquier transformación de unidades} \Big\}.$$

(6) Se dirá que P es una variable adimensional y que g es una FUNCION ADIMENSIONAL.

Definición II-17

Dado $\bar{Y} \in S_{\bar{X}}$ se define R:

$$R = \left\{ (T_1(\bar{Y}), T_2(\bar{Y})) \;\middle|\; \begin{array}{l} T_1, T_2 \text{ son cualesquiera} \\ \text{transformaciones de unidades} \end{array} \right\}.$$

Teorema II-8

Un espacio $S_{\bar{X}}$ es generado por cualquiera de sus elementos.

Demostración

Sea $S_{\bar{X}}$ el espacio generado por $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ y sea $\bar{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ otro punto de este espacio.
Entonces:

$$Y_i = F_{\mu_{XY}}^{a_i} F_{\lambda_{XY}}^{b_i} F_{\tau_{XY}}^{c_i} F_{\psi_{XY}}^{d_i} F_{\theta_{XY}}^{e_i} X_i \;, \; i = 1, \ldots, n .$$

Consideremos ahora $\bar{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n) \in S_{\bar{X}}$. Esto implica:

$$Z_i = F_{\mu_{XZ}}^{a_i} F_{\lambda_{XZ}}^{b_i} F_{\tau_{XZ}}^{c_i} F_{\psi_{XZ}}^{d_i} F_{\theta_{XZ}}^{e_i} X_i \,, \; i = 1, \ldots, n .$$

De lo anterior se sigue:

$$Z_i = \frac{F_{\mu_{XZ}}^{a_i} F_{\lambda_{XZ}}^{b_i} F_{\tau_{XZ}}^{c_i} F_{\psi_{XZ}}^{d_i} F_{\theta_{XZ}}^{e_i}}{F_{\mu_{XY}}^{a_i} F_{\lambda_{XY}}^{b_i} F_{\tau_{XY}}^{c_i} F_{\psi_{XY}}^{d_i} F_{\theta_{XY}}^{e_i}} Y_i ;$$

$$Z_i = F_{\mu_{YZ}}^{a_i} F_{\lambda_{YZ}}^{b_i} F_{\tau_{YZ}}^{c_i} F_{\psi_{YZ}}^{d_i} F_{\theta_{YZ}}^{e_i} Y_i ,$$

$i = 1, \ldots, n$ y

$$F_{\mu_{YZ}} = \frac{F_{\mu_{XZ}}}{F_{\mu_{XY}}} , \ldots , F_{\theta_{YZ}} = \frac{F_{\theta_{XZ}}}{F_{\theta_{XY}}} .$$

Por lo tanto $\bar{Z} = T(\bar{Y})$. †

Teorema II-9

R es una relación de equivalencia sobre $S_{\bar{X}}$.

Demostración

Por la manera como está definida R (def. II-17) y como consecuencia del Teorema II-8 es claro que:

1) $\forall \bar{U} \in S_{\bar{X}}$, $(\bar{U},\bar{U}) \in R$.

2) si $(\bar{U},\bar{V}) \in R$ entonces $(\bar{V},\bar{U}) \in R$.

3) si $(\bar{U},\bar{V}),(\bar{V},\bar{W}) \in R$ entonces $(\bar{U},\bar{W}) \in R$.

Teorema II-10

La familia $\{S_{\bar{x}}\}$ es una partición de Ξ^n,

es decir:

1) Si $S_{\bar{x}} \neq S_{\bar{y}}$ entonces $(S_{\bar{x}} \cap S_{\bar{y}}) = \emptyset$.
2) $S_{\bar{x}} \neq \emptyset$, $\forall \bar{x} \in \Xi^n$.
3) $\vec{\bigcup} S_{\bar{x}} = \Xi^n$.

Demostración

Esto es consecuencia de que toda relación de equivalencia determina una partición y toda partición determina una relación de equivalencia.

Teorema II-11

Una función $P=f(X_1,\ldots,X_n)$ dimensionalmente homogénea, con $D(P)=1$ y $X_1,\ldots,X_n \in \Xi$, es constante en cualquier espacio $S_{\bar{x}}$ (tiene el mismo valor evaluada en todos los puntos de un espacio $S_{\bar{x}}$), del espacio Ξ^n.

Demostración

Como P es dimensionalmente homogénea:

$$F_\mu^a F_\lambda^b F_\tau^c F_\psi^d F_\theta^e P = f(F_\mu^{a_1} F_\lambda^{b_1} F_\tau^{c_1} F_\psi^{d_1} F_\theta^{e_1} X_1, \ldots$$
$$\ldots, F_\mu^{a_n} F_\lambda^{b_n} F_\tau^{c_n} F_\psi^{d_n} F_\theta^{e_n} X_n).$$

Y ya que $D(P) = 1$ entonces $a=b=c=d=e=0$ y

$$P = f(F_\mu^{a_i} F_\lambda^{b_i} F_\tau^{c_i} F_\psi^{d_i} F_\theta^{e_i} X_i), \quad i=1,\ldots,n$$

lo que significa que P es constante en el espacio $S_{\bar{X}}$ generado por $\bar{X} = (X_1,\ldots,X_n)$.

Corolario II-11

Si $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\}$ es una base de $\Pi(X_1,\ldots,X_n)$ entonces a cada espacio $S_{\bar{X}}$ del espacio Ξ^n le corresponde un solo conjunto de los valores de los π_i.

Demostración

Esto es consecuencia de que el teorema II-11 se cumpla para cada uno de los productos que forman la base dada.

Teorema II-12

Si $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\}$ es una base de $\Pi(X_1, \ldots, X_n)$, le corresponde a cada conjunto de valores fijos de las π_i un solo espacio $S_{\bar{x}}$ del espacio Ξ^n.

Demostración

Sea $\{\pi_1', \ldots, \pi_p'\}$ un conjunto de valores fijos del conjunto $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\}$ y sean $\bar{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $\bar{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ dos puntos del espacio $S_{\bar{x}}$ de Ξ^n que corresponden a estos valores, es decir:

$$\pi_i' = (Y_1^{K_{1i}}) \cdots (Y_n^{K_{ni}}) = (Z_1^{K_{1i}}) \cdots (Z_n^{K_{ni}}) \quad ,$$

con $i = 1, \ldots, p$.

Tomando logaritmos en base 10 a cada miembro de la ecuación anterior tenemos:

$$q_1 K_{1i} + \ldots + q_n K_{ni} = 0 \quad \text{con } q_j = \log_{10} \frac{Y_j}{Z_j}$$

y $i = 1, \ldots, p$ (Ecuación II-12).

Ahora, como $\{\pi_1, \ldots, \pi_p\}$ es una base de Π, los exponentes $(K_{1i}, \ldots, K_{ni})$ son soluciones del sistema I del teorema II-1.

Ya que las soluciones del sistema I son también soluciones de la ecuación (II-12), los coeficientes en esta ecuación están relacionados linealmente con los coeficientes del sistema I, es decir, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i + \lambda_4 d_i + \lambda_5 e_i =$$

$$= \log_{10} \frac{Y_i}{Z_i} .$$

La ecuación anterior la podemos escribir en la forma:

$$Y_i = Z_i \times 10^{(\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \ldots + \lambda_5 e_i)} .$$

Si hacemos $F_\mu = 10^{\lambda_1} \frac{M_Y}{M_Z}$, $F_\lambda = 10^{\lambda_2} \frac{\Lambda_Y}{\Lambda_Z}$,

$F_\tau = 10^{\lambda_3} \frac{T_Y}{T_Z}$, $F_\psi = 10^{\lambda_4} \frac{\Psi_Y}{\Psi_Z}$ y $F_\theta = 10^{\lambda_5} \frac{\Theta_Y}{\Theta_Z}$

tendremos: $Y_i = F_\mu^{a_i} F_\lambda^{b_i} F_\tau^{c_i} F_\psi^{d_i} F_\theta^{e_i} * Z_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Con esto se demuestra que $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ pertenecen al mismo espacio $S\bar{x}$. †

Teorema de Buckingham

"Si $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ es dimensionalmente homogénea, puede reducirse a una relación entre los productos adimensionales de una base de $\Pi(X_1, \ldots, X_n)$".

Demostración

Por el corolario II-7, cualquier ecuación dimensionalmente homogénea $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ puede expresarse como $P = g(X_1, \ldots, X_n)$ con $D(P) = 1$. Por el teorema II-12 a cada conjunto de valores fijos de $\{\Pi_1, \ldots, \Pi_p\}$ le corresponde un solo espacio $S\bar{x}$. Por el teorema II-11 a cada espacio $S\bar{x}$ le corresponde un solo valor de P. En consecuencia, a cada conjunto de valores fijos del conjunto $\{\Pi_1, \ldots, \Pi_p\}$ le corresponde un solo valor de P. Así, una función arbitraria $Y = f(X_1, \ldots$ $\ldots, X_n)$ dimensionalmente homogénea se reduce a la forma $P = g(\Pi_1, \ldots, \Pi_p)$. †

La afirmación inversa del Teorema de Buckingham es obvia.

EJEMPLOS DE APLICACIONES DEL ANALISIS DIMENSIONAL

COMENTARIOS GENERALES SOBRE EL ANALISIS DIMENSIONAL

La aplicación del Análisis Dimensional a un problema práctico se basa en tres aspectos esenciales :

1) La hipótesis de que la solución de un problema es expresable por medio de una ecuación dimensionalmente homogénea en términos de variables específicas.

Esta hipótesis está justificada por el hecho de que las ecuaciones fundamentales de la física son dimensionalmente homogéneas y que las relaciones deducibles de estas ecuaciones también lo son. Sin embargo no podemos suponer *a priori* que una ecuación desconocida es dimensionalmente homogénea, a menos que sepamos que la ecuación contiene todas las variables que aparecerían en una deducción analítica de la ecuación.

Por ejemplo, en el problema del arrastre de un cuerpo esférico en una corriente de aire, se argüiría que la viscosidad y la densidad deben descartarse, dado que son constantes para el aire estándar. La ecuación para la fuerza de arrastre F tendría entonces la forma F= f (V, D), en que V es la velocidad de la corriente y D es el diámetro del cuerpo. Obviamente, es imposible construir una ecuación dimensionalmente homogénea de esta forma, pues las variables V y D no contienen las dimensiones de fuerza o masa.

2) En el Teorema de Buckingham: "Si una ecuación es dimensionalmente homogénea entonces puede reducirse a una relación entre los productos adimensionales de una base de Π" y su afirmación inversa: "Una ecuación que relaciona productos adimensionales es dimensionalmente homogénea".

3) En el hecho empírico de que :

(a) Una gráfica de una función adimensional proporciona mucha más información que una gráfica en que las coordenadas posean dimensiones.

(b) Los puntos sobre las gráficas de funciones adimensionales con mucha frecuencia pueden determinarse por medio de modelos de prueba.

El primer paso en el Análisis Dimensional de un problema es decidir qué variables intervienen en éste. Si se introducen variables que realmente no intervienen en el fenómeno, aparecerán demasiados términos en la ecuación final. Si se omiten aquellas variables que lógicamente pueden influir en el fenómeno, los cálculos pueden llevar a un callejón sin salida, pero más frecuentemente, conducen a un resultado erróneo o incompleto. Aún a pesar de que algunas variables son prácticamente constantes (v. gr. la aceleración de la gravedad) pueden resultar esenciales al combinarse con otras variables "activas" para formar productos adimensionales.

Frecuentemente surge la pregunta: "¿Y cómo sabemos que cierta variable afecta un fenómeno?". Para responder esta pregunta, uno debe entender suficiente sobre el problema, para explicar por qué y cómo la variable influye en el fenómeno. Antes de que uno emprenda el Análisis Dimensional de un problema, debe tratar de construir una teoría del mecanismo del fenómeno. Aún una teoría muy burda, usualmente revela las acciones de las variables más importantes. Si se dispone de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno, éstas muestran directamente qué variables son significativas.

Existen algunos campos en los que el Análisis Dimensional tiene poca aplicación, pues el conocimiento presente en estos campos es inadecuado para sugerir las variables significativas.

Por ejemplo, los límites de duración de miembros que están sujetos a tensiones alternantes no se han correlacionado con otras propiedades medibles de los materiales. En consecuencia, el Análisis Dimensional todavía no puede usarse en estudios de fatiga de materiales.

En resumen, dado un fenómeno del que se desconoce la forma analítica de la ecuación que relaciona a las variables que lo afectan, el Análisis Dimensional nos permite obtener una función adimensional dependiente de algunos productos adimensionales formados con estas variables, que se puede graficar y en cuya gráfica está contenida la misma información que habría en varias cartas que describieran al fenómeno, en donde alternativamente se mantienen constantes las variables que intervienen. Esto quizá quede más claro en los siguientes ejemplos.

<u>Ejemplo III-1</u>

Considérese un cuerpo esférico liso de diámetro D inmerso en una corriente de fluído incompresible. Sea V la velocidad de la corriente a alguna distancia adelante del cuerpo. Entonces la fuerza F de arrastre sobre el cuerpo estará dada por una ecuación de la forma $F = f(V, D, \rho, \mu)$, en que ρ es la densidad másica del fluído, μ es el coeficiente dinámico de viscosidad del fluído y f representa una función no especificada. Esta ecuación significa simplemente que F depende de las variables V, D, ρ, μ pero no se dice nada acerca de esta dependencia.

Apliquemos ahora la teoría algebraica del Análisis Dimensional.

1) Tenemos $F = f(V, D, \rho, \mu)$ con $V, D, \rho, \mu \in \Xi$. Supondremos que esta función es dimensionalmente homogénea. Entonces sabemos por el teorema II-7 que existe al menos un producto $V^{k_1} D^{k_2} \rho^{k_3} \mu^{k_4} \ni D(F) = D(V^{k_1} D^{k_2} \rho^{k_3} \mu^{k_4})$.

La matriz dimensional del conjunto de variables $\{F, V, D, \rho, \mu\}$ será:

$$\begin{array}{c|ccccc} & F & V & D & \rho & \mu \\ \hline \mu & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ \tau & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Si el producto $V^{k_1} D^{k_2} \rho^{k_3} \mu^{k_4}$ tiene la misma dimensión que F, el vector $(k_1, \ldots, k_4)$ debe ser solución del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rl} + r_3 + r_4 &= 1 \\ r_1 + r_2 - 3 r_3 - r_4 &= 1 \\ -r_1 \qquad\qquad - r_4 &= -2 \end{array} \right. \quad (\text{III-1-A}).$$

Usando el Método de Gauss-Jordan (ver Apéndice IV-1) encontramos que toda solución $S = (s_1, \ldots, s_4)$ del sistema, se puede

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Si escogemos $t=0$, el producto $V^{k_1} D^{k_2} \rho^{k_3} \mu^{k_4}$ se convertirá en $V^2 D^2 \rho$, que como veremos tiene la misma dimensión que F:

$$D(F) = \mu \lambda \tau^{-2} ;$$

$$D(V^2 D^2 \rho) = (\lambda \tau^{-1})^2 (\lambda)^2 (\mu \lambda^{-3}) = \mu \lambda \tau^{-2}.$$

2) Encontraremos $\Pi(V, D, \rho, \mu)$ obteniendo las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \qquad\qquad r_3 + r_4 = 0 \\ r_1 + r_2 - 3r_3 - r_4 = 0 \\ -r_1 \qquad\qquad - r_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{III-1-B}) .$$

Sabemos que este sistema es el homogéneo asociado del sistema III-1-A y por tanto, sus soluciones S_h están dadas por:

$$S_h = t\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

$$\Pi = \left\{ (V^{-1}D^{-1}\rho^{-1}\mu)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\},$$

y una base de Π sería por ejemplo, tomando $t=-1$, $\left\{ VD\rho\mu^{-1} \right\}$ que consta de un solo producto, pues el rango de la matriz del sistema III-1-B es 3 y el número de incógnitas es 4.

3) Por el teorema de Buckingham y el teorema II-7 sabemos que:

$F = f(V, D, \rho, \mu)$ puede pasarse a:

$P_F = g(V, D, \rho, \mu)$, con $P_F = \dfrac{F}{V^2 D^2 \rho}$

y $g(V, D, \rho, \mu) = \dfrac{f(V, D, \rho, \mu)}{V^2 D^2 \rho}$, y además que P_F puede reducirse a:

$$P_F = h(VD\rho\mu^{-1}).$$

Finalmente tendremos:

$$\frac{F}{V^2 D^2 \rho} = h\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right) .$$

Nótese que $VD\rho/\mu$ es un número de Reynolds y $F/V^2 D^2 \rho$ es un coeficiente de presión (ver Apéndice IV-2).

El área proyectada de una esfera es $\frac{1}{4}\pi D^2$. En consecuencia, la ecuación precedente puede escribirse:

$$\frac{F}{V^2 A \rho} = \frac{1}{2}\,\frac{8}{\pi}\,h\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right) .$$

El término $(8/\pi)\,h(VD\rho/\mu)$ se llama coeficiente de arrastre, que se denota por C_a. La ecuación para el arrastre sobre una esfera puede entonces escribirse:

$$F = \frac{1}{2} C_a \rho V^2 A .$$

Ya que C_a es una función de $(VD\rho/\mu)$, podemos hacer una gráfica en que $VD\rho/\mu$ esté en las abscisas y C_a en las ordenadas. La figura III-1 es una gráfica experimental de esta relación para cuerpos esféricos lisos. La curva se grafica en una escala logarítmica, pues de lo contrario la parte descendente de la curva a la izquierda de la gráfica estaría muy "pegada" al eje vertical.

La figura III-1 da información completa relativa a las fuerzas de arrastre sobre cuerpos esféricos lisos de todos los tamaños en un fluído incompresible con cualesquiera densidad, viscosidad y velocidad de flujo.

Proporcionar la misma información sin un Análisis Dimensional del problema requeriría cerca de 25 cartas que mostrarían separadamente los efectos de cada una de las variables V, D, ρ y μ.

La figura III-1 sigue siendo aproximadamente válida para un fluído compresible como el aire, si la velocidad de flujo es menor que la mitad de la velocidad del sonido en ese fluído. Se ha encontrado que la localización de la caída repentina en la curva, que se debe al desarrollo de turbulencia en la capa limítrofe, depende de la turbulencia inicial de la corriente del fluído.

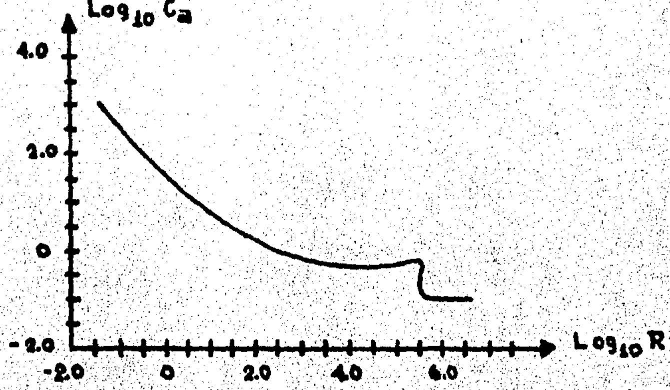

Fig. III-1 . Coeficiente de arrastre para esferas lisas.

Cualquier punto sobre la curva de esta figura puede obtenerse por un modelo de prueba. Supóngase por ejemplo, que el prototipo es una esfera lisa de 10 pies de diámetro, que se sumerge en aire a 60°F con velocidad de 50 pies seg^{-1}. El costo de un aparato de prueba para medir directamente el arrastre bajo estas condiciones sería prohibitivo. Sin embargo, el valor de C_a puede obtenerse probando una esfera modelo de 1 pie de diámetro en agua a 60°F con una velocidad de flujo de 38 pies seg^{-1}, pues el número de Reynolds $VD\rho/\mu$ para la esfera modelo bajo las condiciones especificadas es el mismo que para el prototipo.

Ejemplo III-2

EFECTO DE LA TEMPERATURA SOBRE LA VISCOSIDAD DE UN GAS.- En muchas aplicaciones de la Teoría Cinética de los gases es innecesario considerar los detalles de la estructura de una molécula. Una molécula puede considerarse una esferita pequeñísima. Pueden descartarse las fuerzas de atracción entre las moléculas. Sin embargo, cuando dos moléculas se acercan tanto que comienzan a interpenetrarse, ejercen ambas una poderosa fuerza repulsiva. Se cree que esta fuerza es proporcional al inverso de una potencia de la distancia entre los centros de las moléculas, es decir, $F = Kr^{-n}$, en que r es la distancia y n es un número probablemente mayor que 5. El coeficiente K es una propiedad característica de las moléculas.

Rayleigh basó su análisis en la ley que dice que la viscosidad de un gas no depende de la densidad. Este principio fue deducido por Maxwell a partir de consideraciones moleculares. Se ha encontrado que es medianamente exacto para presiones en el rango 0.02 atm – 1.00 atm. Para presiones superiores a unas pocas atmósferas casi no se cumple, en parte debido a que las atracciones intermoleculares entran en juego en gases densos.

Si la viscosidad de un gas no depende de la densidad, tampoco depende de las características moleculares relacionadas con la densidad: el número de moléculas por unidad de volumen o la trayectoria libre media de una molécula. En consecuencia, la viscosidad μ debe estar determinada por la masa m de la molécula, la velocidad media V de la molécula y el coeficiente de repulsión K. Esto lo indica la ecuación:

$$f(\mu, K, m, V) = 0 \quad .$$

La matriz dimensional del conjunto $\{\mu, K, m, V\}$ es:

$$\begin{array}{c|cccc} & \mu & K & m & V \\ \hline \mu & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & -1 & n+1 & 0 & 1 \\ \tau & -1 & -2 & 0 & -1 \\ \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

El sistema de ecuaciones que corresponde a la matriz dimensional es:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 0 \\ -r_1 + (n+1) r_2 + r_4 = 0 \\ -r_1 - 2 r_2 - r_4 = 0 \end{cases} .$$

Usando de nuevo el método de Gauss- Jordan encontramos que toda solución $s = (s_1, \ldots, s_4)$ del sistema, se puede expresar como :

$$S = t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{n-1} \\ -\frac{n+1}{n-1} \\ -\frac{n+3}{n-1} \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Escogiendo $t=1$, una base de $\Pi(\mu, K, m, V)$ constará del único producto:

$$\pi = \mu K^{2/(n-1)} m^{-(n+1)/(n-1)} V^{-(n+3)/(n-1)} .$$

El Teorema de Buckingham nos dice que:

$$f(\pi) = 0$$

y entonces π es una constante que llamaremos α. De aquí se sigue que:

$$\mu = \alpha m^{(n+1)/(n-1)} V^{(n+3)/(n-1)} K^{-2/(n-1)} .$$

En la Teoría Cinética de los Gases se demuestra que la temperatura absoluta θ de un gas es proporcional a la energía cinética media $1/2\ mV^2$ de una molécula. En consecuencia, la ecuación precedente pueda expresarse como:

$$\mu = \beta\, m^{1/2}\, K^{-2/(n-1)}\, \theta^{s} \quad , \qquad (\text{III-2})$$

con $s = \frac{1}{2} + \frac{2}{n-1}$.

El factor β es una constante. Para un gas en particular, m y K son constantes. Por tanto, dado que $n > 1$, la ecuación (III-2) muestra que la viscosidad de un gas se incrementa con la temperatura. Como por la ecuación (III-2) la viscosidad es proporcional a una potencia de θ , la relación entre μ y θ es representada por una línea recta si se grafica en papel logarítmico.

La ecuación (III-2) proporciona información acerca de las fuerzas de repulsión entre las moléculas. Para $n = 5$, μ es proporcional a la primera potencia de la temperatura absoluta y para $n = \infty$, μ es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta.

Rayleigh encontró experimentalmente que $s = 0.754$ para aire, $s = 0.782$ para oxígeno, $s = 0.681$ para hidrógeno y $s = 0.815$ para argón. Estos resultados muestran que n está entre 7 y 12 para los gases comunes.

Ejemplo III-3

DISTRIBUCION DE VELOCIDADES DE FLUJO TURBULENTO EN LA VECINDAD DE UNA PARED SOLIDA.– Considérese el flujo turbulento, en que las líneas de corriente promedio son rectas y paralelas. Este tipo de flujo se ejemplifica con el viento que sopla sobre los aeroplanos, o con el flujo en un conducto recto muy largo. La velocidad promedio u a una distancia y de la frontera depende de la altura de rugosidad e de la frontera, una longitud L que especifica el tamaño del sistema (por ejemplo el diámetro del conducto), la viscosidad cinemática ν del fluído, la densidad másica ρ del fluído y la tensión de corte τ_0 que el fluído ejerce sobre la frontera.

Por tanto, debe existir una relación del tipo:

$$f(u, y, e, L, \nu, \rho, \tau_0) = 0.$$

Evidentemente, los cocientes de longitudes y/e y y/L son productos adimensionales. Teniendo en cuenta esto, podemos eliminar por conveniencia e y L de la matriz dimensional. Entonces la matriz dimensional de $\{u, y, \nu, \rho, \tau_0\}$ nos queda:

$$\begin{array}{c|ccccc} & u & y & \nu & \rho & \tau_0 \\ \hline \mu & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ \tau & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

que origina el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_4 + r_5 = 0 \\ r_1 + r_2 + 2r_3 - 3r_4 - r_5 = 0 \\ -r_1 - r_3 - 2r_5 = 0 \end{array} \right. .$$

Las soluciones del sistema son de la forma:

$$S = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} .$$

Cualquier base de $\Pi(u, y, \nu, \rho, \tau_0)$ constará de dos elementos, pues el número de incógnitas es 5 y el rango de la matriz dimensional es 3.

Escogiendo primero $t_1 = -1$ y $t_2 = -1/2$ (VER EL APENDICE IV-4) tenemos:

$$\pi_1 = u^0 y \nu^{-1} \rho^{-1/2} \tau_0^{1/2} = \frac{y}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \; ;$$

y escogiendo luego $t_1 = 0$ y $t_2 = 1/2$ tenemos:

$$\pi_2 = u y^0 \nu^0 \rho^{1/2} \tau_0^{-1/2} = u\sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}} \; .$$

El cociente $(\tau_0/\rho)^{1/2}$ tiene la dimensión de una velocidad. En la literatura de mecánica de fluídos se le llama velocidad de fricción y se denota por v^*. De acuerdo con todo lo anterior, una base de $\Pi(u, y, \nu, \rho, \tau_0, L, e)$ sería:

$$\left\{ \frac{u}{v^*} , \frac{y v^*}{\nu} , \frac{y}{e} , \frac{y}{L} \right\} ,$$

donde el producto $y v^*/\nu$ es formalmente un número de Reynolds. Este producto se conoce con el nombre de parámetro fricción-distancia.

Y ahora, se sigue del Teorema de Buckingham que:

$$\frac{u}{v^*} = f\left(\frac{y v^*}{\nu} , \frac{y}{e} , \frac{y}{L} \right) \qquad (\text{III-3-A}) .$$

Si la frontera es un plano infinito, no hay longitud L que caracterize el sistema, pues el concepto de "tamaño del sistema" no entra en consideración. En consecuencia, en este caso, el término $y L^{-1}$ se retira de la ecuación (III-3-A) y la ecuación toma la forma simplificada:

$$\frac{u}{v^*} = f\left(\frac{y v^*}{\nu} , \frac{y}{e} \right) \qquad (\text{III-3-B}) .$$

En todo caso, la ecuación (III-3-B) es válida para la región de alto gradiente de velocidad cercana a la pared, pues en esta región el cociente $y L^{-1}$ es tan pequeño que puede descartarse.

Por tanto, en todos los casos de flujo uniforme en un conducto cilíndrico o prismático, la distribución de velocidades cerca de la pared está dada por una ecuación de la forma de la ecuación (III-3-B).

Las fluctuaciones de velocidad que caracterizan la turbulencia se desvanecen en una frontera lisa. Es por ello que estando muy cercanos a la frontera, las tensiones de corte son debidas principalmente a la acción viscosa. La región en que prevalece esta condición se llama subcapa laminar. A pesar de que existen fluctuaciones turbulentas a cualquier distancia finita de la pared, es útil considerar un grosor definido ε de la subcapa laminar. Como ε depende de τ_0, ρ y ν, obtenemos por análisis dimensional la relación:

$$\frac{\varepsilon v^*}{\nu} = \text{constante} \qquad (\text{III-3-C}).$$

El grosor de la subcapa laminar corresponderá entonces a un valor constante del parámetro fricción-distancia. El valor de la constante es indefinido, pues depende de una elección arbitraria del grosor de la subcapa laminar.

De acuerdo con el punto de vista usual, la rugosidad de la superficie no tiene efecto sobre el flujo si las irregularidades de la superficie están sumergidas en la subcapa laminar, es decir, si $e < \varepsilon$. Si esta condición se adopta como definición, la constante en la ecuación (III-3-C) es de alrededor de 4, ya que Nikuradse ha demostrado experimentalmente que una superficie se comporta como si fuera idealmente lisa, si $ev^*/\nu < 4$. Por otro lado, Nikuradse demostró que la viscosidad no ejerce una influencia perceptible sobre la distribución de velocidades cerca de una pared, si la pared es tan rugosa que $ev^*/\nu > 80$. En el caso de superficies lisas ($ev^*/\nu < 4$), el término y/e puede descartarse de la ecuación (III-3-B). Por tanto, la velocidad de distribución cerca de una superficie lisa estará determinada por una ecuación de la forma :

$$\frac{u}{v^*} = f\left(\frac{yv^*}{\nu}\right) \qquad (III-3-D).$$

No se conoce una expresión completa para la función f. Sin embargo, Prandtl dedujo de su hipótesis de "mezclado-longitud" la siguiente fórmula, que concuerda estrechamente con los resultados experimentales de Nikuradse para $yv^*/\nu > 50$:

$$\frac{u}{v^*} = 5.75 \log_{10} \frac{yv^*}{\nu} + 5.5 \qquad (III-3-E).$$

Esta ecuación fue también deducida por von Kármán, usando otro método.

Ya que en la subcapa laminar la tensión de corte se debe principalmente a la viscosidad, la ecuación de Newton para el corte es aproximadamente correcta para esta región:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad .$$

La tensión de corte a través de la subcapa laminar es prácticamente igual al corte en la pared, τ_0. De acuerdo con esto, la ecuación precedente puede escribirse:

$$(v^*)^2 = \nu \frac{du}{dy} \qquad (\text{III-3-F}).$$

La integración nos da:

$$\frac{u}{v^*} = \frac{y v^*}{\nu} \qquad (\text{III-3-G}).$$

Esta ecuación muestra que la distribución de velocidades en la subcapa laminar es lineal.

A veces es conveniente definir el grosor ε de la subcapa laminar como el valor de y para el cual las ecuaciones (III-3-E) y (III-3-G) dan el mismo valor de u/v^*. De acuerdo con esta definición, $\varepsilon v^*/\nu = 11.8$. Para valores del parámetro fricción-distancia mayores de 11.8, la ecuación (III-3-E) de Prandtl-von Kármán es razonablemente exacta, mientras que la ecuación (III-3-G) puede usarse para valores del parámetro fricción-distancia menores que 11.8.

La figura III-2 es un gráfico de las ecuaciones (III-3-E) y (III-3-G).

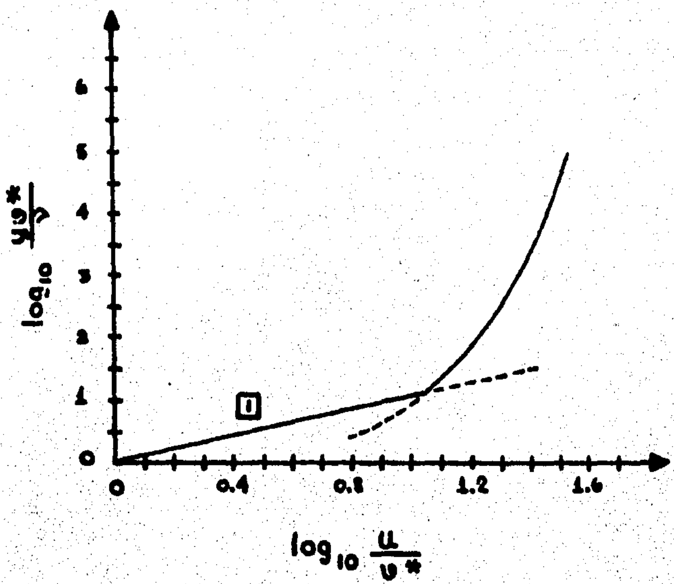

Fig. III-2 .- Distribución de velocidades medias de turbulencia cerca de una frontera lisa (Ecuaciones III-3-E y G). $\boxed{\mathrm{I}}$: Subcapa laminar.

En el caso de una superficie muy rugosa ($e\upsilon^*/\nu > 80$), el término de viscosidad $y\upsilon^*/\nu$ puede eliminarse de la ecuación (III-3-B). Prandtl y von Kármán dedujeron para este caso la ecuación:

$$\frac{u}{\upsilon^*} = 5.75 \log_{10} \frac{y}{e} + 8.5 \quad \text{(III-3-H)},$$

que concuerda con los resultados experimentales de Nikuradse para valores de y/e mayores que 1.0 .

Ejemplo III-4

CONDENSACION EN UN CONDUCTO VERTICAL.- Considérese un vapor a la temperatura de saturación θ pasando a través de un conducto vertical liso cuya pared está a una temperatura $\theta - \Delta\theta$. El condensado forma una película sobre la pared que constituye una capa aislante. En consecuencia, la velocidad de condensación es influída por el coeficiente de conductividad térmica k del condensado. La velocidad de condensación está determinada directamente por el coeficiente h de transferencia de calor promedio, ya que el calor que se extrae del vapor por unidad de tiempo es $hA\Delta\theta$, en que A es el área de la pared del conducto.

La principal variable geométrica en el problema es el grosor de la película de condensado. Este depende de la velocidad de condensación y de la naturaleza del flujo del condensado. La velocidad de condensación depende del calor latente de vaporización del fluído. Ya que el volumen de condensado (más bien que la masa) es significativo, el calor latente debe expresarse como "calor latente de vaporización por unidad de volumen*. Esto se representa por $\rho\lambda$, en que λ es el calor latente de vaporización por unidad de masa y ρ es la densidad másica del condensado.

La facilidad con que la película de condensado fluye sobre la pared está determinada principalmente por su viscosidad μ y su peso específico ρg. También la longitud L del conducto afecta el coeficiente de transferencia de calor, pues el grosor de la película no es constante a lo largo del conducto. El diámetro del conducto no afecta el grosor de la película (y en consecuencia no afecta a h) si es grande comparado con éste. La velocidad del vapor en el conducto influye en el grosor de la película en cierto grado, pero este efecto es pequeño si la velocidad no es muy grande. Si se descarta la interacción entre el flujo de vapor y el flujo del condensado, la densidad del vapor será irrelevante.

En vista de la discusión precedente, debe existir una relación de la forma:

$$f(h, \Delta\theta, L, \rho\lambda, k, \rho g, \mu) = 0 \quad . \quad \text{(III-4-A)}$$

La matriz dimensional es:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & h & \Delta\theta & L & \rho\lambda & k & \rho g & \mu \\
\hline
\mu & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\lambda & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\
\tau & -3 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & -1 \\
\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\theta & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}
$$

que origina el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
r_1 \qquad\qquad + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 &= 0 \\
r_3 - r_4 + r_5 - 2r_6 - r_7 &= 0 \\
-3r_1 \qquad\quad -2r_4 - 3r_5 - 2r_6 - r_7 &= 0 \\
-r_1 + r_2 \qquad\qquad -r_5 \qquad\qquad &= 0
\end{aligned}
$$

Las soluciones de este sistema son de la forma:

$$
S = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,
$$

$$t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Cualquier base de $\Pi(h, \Delta\theta, L, \rho\lambda, k, \rho g, \mu)$ tendrá tres productos, pues el rango de la matriz dimensional es 4 y existen 7 incógnitas.

- Escogemos primero $t_1 = t_2 = -1$, $t_3 = 0$ (Ver APENDICE IV-4). Entonces:

$$\pi_1 = \frac{h\lambda}{kg} .$$

- Escogiendo $t_1 = t_3 = 1$, $t_2 = 2$ tendremos:

$$\pi_2 = \frac{k\mu g^2 \Delta\theta}{\rho^2 \lambda^4} .$$

- Y por último, si $t_1 = t_3 = 0$, $t_2 = 1$:

$$\pi_3 = \frac{Lg}{\lambda} .$$

Por el teorema de Buckingham la ecuación II-4-A puede reducirse a la forma:

$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$; y suponiendo que f sea "bien comportada" (ver nota 5 a pie de página 80.), podemos escribir:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) ,$$

de donde :

$$\frac{h\lambda}{kg} = f\left[\frac{k\mu g^2 \Delta\theta}{\rho^2 \lambda^4}, \frac{Lg}{\lambda}\right] \quad (III-4-B).$$

En virtud de esta ecuación, el fenómeno puede ser descrito completamente por una gráfica adimensional en que la ordenada es $h\lambda / kg$, la abscisa es $k\mu g^2 \Delta\theta / \rho^2 \lambda^4$ y el parámetro de las curvas es Lg/λ. En la construcción experimental de la gráfica, π_2 puede variarse variando $\Delta\theta$ y π_3 puede variarse variando L. NOTESE LA GRAN SIMPLIFICACION QUE SE OBTIENE REDUCIENDO EL NUMERO DE VARIABLES INDEPENDIENTES DE 6 A 2.

W. Nusselt analizó el fenómeno suponiendo que el flujo sobre la película de condensado es laminar. Llegó a la fórmula:

$$h = 0.943 \sqrt[4]{\frac{g\rho^2 \lambda k^3}{L\mu \Delta\theta}},$$

que en términos de π_1, π_2 y π_3 se expresa:

$$\pi_1 = \frac{0.943}{\sqrt[4]{\pi_2 \pi_3}}.$$

La anterior es una forma especial de la ec. (III-4-B). En algunos casos, se observa que el condensado forma gotas en vez de película. Para tomar en cuenta este fenómeno es necesario introducir la tensión superficial en el análisis. También afectan a la condensación en gotas la rugosidad y limpieza de la pared.

Ejemplo III-5

COEFICIENTE DE INDUCTANCIA .- En una clase de circuitos similares geométricamente, un circuito se especifica por una sola longitud L. Entonces, el coeficiente de autoinductancia es determinado por la longitud L y por la capacidad de inducción magnética μ del medio en que el circuito se encuentra. Por tanto, debe existir :

$$f(\mathcal{L}, L, \mu) = 0 .$$

La matriz dimensional es:

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathcal{L} & L & \mu \\ \hline \mu & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 2 & 1 & 1 \\ \tau & 0 & 0 & 0 \\ \psi & -2 & 0 & -2 \\ \theta & 0 & 0 & 0 \end{array} ,$$

que conduce al sistema :

$$\begin{cases} r_1 \qquad + r_3 = 0 \\ 2r_1 + r_2 + r_3 = 0 \\ -2r_1 \qquad -2r_3 = 0 \end{cases} .$$

Las soluciones de este sistema son de la forma :

$$S = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Una base de $\Pi(\mathcal{L}, L, \mu)$ constará de un solo producto, pues hay 3 incógnitas y el rango de la matriz dimensional es 2. Escogiendo $t=-1$:

$\pi_1 = \dfrac{\mathcal{L}}{L\mu}$. En consecuencia, la única relación dimensionalmente homogénea entre las variables es:

$$\mathcal{L} = K\mu L$$

(o una potencia de esta ecuación) en que K es un factor adimensional que depende de la forma del circuito. De acuerdo con esto, la autoinducción de un circuito es proporcional al tamaño de éste.

APENDICES

APENDICE IV-1

Método de Gauss - Jordan

A continuación se expondrá un método para encontrar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, conocido como Método de Gauss- Jordan. No se dará la justificación del método, que es muy sencilla.
El método se basa en la idea de reducir la matriz aumentada que se asocia a un sistema de ecuaciones lineales a una forma que sea lo suficientemente simple como para poder resolver el sistema a simple vista. La forma que toma la matriz aumentada del sistema después de aplicar el Método de Gauss- Jordan es la de una MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA.

De una matriz que cumple con las siguientes propiedades:

1) Si un renglón no consta exclusivamente de ceros, entonces el primer elemento diferente de cero en el renglón es 1.

2) Si hay renglones que constan exclusivamente de ceros, entonces están agrupados en la par

te inferior de la matriz.

3) Si los renglones j y $j+1$ son dos renglones sucesivos cualesquiera que no constan exclusivamente de ceros, entonces el primer número diferente de cero en el renglón $j+1$ aparece a la derecha del primer número diferente de cero en el renglón j.

4) Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente de cero de algún renglón tienen ceros en todas las posiciones restantes.

Se dice que está en forma ESCALONADA REDUCIDA. Si la matriz sólo cumple con (1), (2) y (3) se le llamará simplemente MATRIZ ESCALONADA.

Ejemplos de matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Se ilustrará el Método de Gauss-Jordan con un ejemplo. Considérese la matriz :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} .$$

<u>ETAPA 1</u> Localizar en el extremo izquierdo la columna que no consta exclusivamente de ceros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>ETAPA 2</u> Si es necesario, intercambiar el renglón superior con otro renglón, de tal manera que el elemento superior de la columna señalada en la etapa 1 sea diferente de cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$ (se intercambiaron los dos primeros renglones de la matriz anterior).

<u>ETAPA 3</u> Si el elemento que ahora está en la parte superior de la columna que se encontró en la etapa 1 es a, entonces multiplicar el primer renglón por 1/a de tal manera que el primer elemento sea 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

(El primer renglón de la matriz anterior se multiplicó por 1/2).

<u>ETAPA 4</u> Sumar los múltiplos adecuados del primer renglón a los renglones que le siguen, de tal forma que en la columna localizada en la etapa 1, todos los elementos después del primero sean ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

(El primer renglón de la matriz anterior se multiplicó por -2 y el resultado se sumó al tercer renglón).

<u>ETAPA 5</u> "Cubrir" el primer renglón de la matriz y comenzar de nuevo con la etapa 1 aplicada a la submatriz resultante. Proseguir de esta manera, hasta que toda la matriz esté en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -5 \quad 3 \quad 6 \quad 14} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

(columna en el extremo izquierdo de la submatriz que no consta exclusivamente de ceros).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

(Se multiplico por $-1/2$ el primer renglón de la submatriz).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(El primer renglón de la submatriz se multiplicó por -5 y el resultado se sumó al segundo renglón de la submatriz).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Se "cubrió" el primer renglón de la submatriz y se regresó a la etapa 1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(El primero -y único- renglón de la nueva submatriz se multiplicó por 2).

Ahora la matriz completa está en forma escalonada.

<u>ETAPA 6</u> Comenzando por el último renglón y avanzando hacia arriba, sumar múltiplos adecuados de cada renglón a los renglones que estén encima de él, de tal manera que se satisfaga el cuarto requisito de la definición de matriz escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ (Al segundo renglón de la matriz anterior se le sumó el tercero multiplicado por 7/2).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ (Al primer renglón se le sumó el tercero multiplicado por -6).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ (Al primer renglón se le sumó el segundo multiplicado por -5).

Esta última matriz tiene la forma ESCALONADA REDUCIDA.

Ejemplo

Dado el sistema:

$$\begin{cases} r_1 + 3r_2 - 2r_3 \qquad + 2r_5 \qquad = 0 \\ 2r_1 + 6r_2 - 5r_3 - 2r_4 + 4r_5 - 3r_6 = -1 \\ \qquad\qquad 5r_3 + 10r_4 \qquad + 15r_6 = 5 \\ 2r_1 + 6r_2 \qquad\qquad + 8r_4 + 4r_5 + 18r_6 = 6 \end{cases}$$

la matriz aumentada de este sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sumando el primer renglón multiplicado por -2 al segundo y cuarto renglones se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando el segundo renglón por -1, y después, sumando el segundo renglón multiplicado por -5 al tercero, y el segundo renglón multiplicado por -4 al cuarto, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Intercambiando el tercero y cuarto renglones y despues, multiplicando el tercer renglón de la matriz resultante por $1/6$, se obtiene la forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Sumando el tercer renglón multiplicado por -3 al segundo renglón, y después, sumando el segundo renglón de la matriz resultante multiplicado por 2 al primero, se obtiene la forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

asociada al sistema:

$$\begin{cases} r_1 + 3r_2 \qquad + 4r_4 + 2r_5 = 0 \\ \qquad\qquad r_3 + 2r_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad r_6 = 1/3 \end{cases} .$$

(Se eliminó la última ecuación $0r_1 + \ldots + 0r_6 = 0$, dado que las soluciones de las ecuaciones restantes la satisfacen automáticamente).

Despejando las variables principales[7] se obtiene:

$r_1 = -3r_2 - 4r_4 - 2r_5$,

$r_3 = -2r_4$,

$r_6 = 1/3$.

Si hacemos $r_2 = s$, $r_4 = t$ y $r_5 = u$, con $s, t, u \in \mathbb{R}$ y expresamos vectorialmente las soluciones del sistema, tendremos :

$$S = s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-4\\0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1/3\end{bmatrix} .$$

(7) Se llamarán "variables principales" a aquéllas que inician un renglón en un sistema de ecuaciones derivado de una matriz en forma escalonada o escalonada reducida. En realidad, para expresar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se precisa solamente de n-r variables escogidas arbitrariamente como parámetros, donde n es el número de incógnitas y r es el rango de la matriz del sistema.

APENDICE IV-2

Productos Adimensionales Comunes

Existen algunos productos adimensionales con un nombre especial, debido a que aparecen en el análisis dimensional de innumerables problemas de la ciencia y la ingeniería. Mencionaremos sólo unos cuantos, los más conocidos.

NOMBRE	PRODUCTO
†*Número de Reynolds	$R = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad (\nu = \frac{\mu}{\rho})$.
†*Número de Froude	$F = \frac{V^2}{Lg}$.
†*Número de Mach	$M = \frac{V}{c}$ (c = vel. del sonido).
†*Número de Weber	$W = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$.
†*Coeficiente de presión	$P = \frac{F}{\rho V^2 L^2} = \frac{p}{\rho V^2}$ (p = presión).

NOMBRE	PRODUCTO
†Número de Grashof	$G = \dfrac{\beta \theta g L^3 \rho^2}{\mu^2}$.
†Número de Nusselt	$N = \dfrac{hL}{k}$.
†Número de Prandtl	$Q = \dfrac{C\mu}{k}$.

El producto adimensional $C\rho VL/k$ se conoce como Número de Peclet. Este producto es idéntico a QR.

* Usados en mecánica de fluídos.

† Usados en teoría del calor.

APENDICE IV-3

Tablas de Dimensiones

Con el fin de facilitar la construcción de la matriz dimensional de un conjunto dado de variables, se incluye esta tabla de dimensiones.

Tabla IV-3-A

VARIABLE	DIMENSION EN $\{\mu, \lambda, \tau, \psi, \theta\}$	DIMENSION EN $\{\phi, \lambda, \tau, \psi, \theta\}$
Longitud	λ	λ
Tiempo	τ	τ
Temperatura	θ	θ
Fuerza	$\mu\lambda\tau^{-2}$	ϕ
Masa	μ	$\phi\lambda^{-1}\tau^{2}$
Peso específico	$\mu\lambda^{-2}\tau^{-2}$	$\phi\lambda^{-3}$
Densidad másica	$\mu\lambda^{-3}$	$\phi\lambda^{-4}\tau^{2}$
Grado (de ángulo)	1	1
Presión, Tensión	$\mu\lambda^{-1}\tau^{-2}$	$\phi\lambda^{-2}$
Velocidad	$\lambda\tau^{-1}$	$\lambda\tau^{-1}$
Aceleración	$\lambda\tau^{-2}$	$\lambda\tau^{-2}$

VARIABLE	$\{\mu, \lambda, \tau, \psi, \theta\}$	$\{\phi, \lambda, \tau, \psi, \theta\}$
Velocidad angular	τ^{-1}	τ^{-1}
Aceleración angular	τ^{-2}	τ^{-2}
Energía, Trabajo	$\mu \lambda^2 \tau^{-2}$	$\phi \lambda$
Impetu (momentum)	$\mu \lambda \tau^{-1}$	$\phi \tau$
Potencia	$\mu \lambda^2 \tau^{-3}$	$\phi \lambda \tau^{-1}$
Momento de fuerza	$\mu \lambda^2 \tau^{-2}$	$\phi \lambda$
Coef. dinámico de viscosidad	$\mu \lambda^{-1} \tau^{-1}$	$\phi \lambda^{-2} \tau$
Coef. cinemático de viscosidad	$\lambda^2 \tau^{-1}$	$\lambda^2 \tau^{-1}$
Momento de inercia de un área	λ^4	λ^4
Momento de inercia de una masa	$\mu \lambda^2$	$\phi \lambda \tau^2$
Tensión superficial	$\mu \tau^{-2}$	$\phi \lambda^{-1}$
Módulo de elasticidad	$\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}$	$\phi \lambda^{-2}$
Relajación	1	1
Cociente de Poisson	1	1

Tabla IV-3-B

VARIABLE	$\{\mu, \lambda, \tau, \psi, \theta\}$	$\{\upsilon, \lambda, \tau, i, \theta\}$	Nombre de la unidad con: Kg, m, seg, coul, Kelvin.
Masa	μ	$\lambda^{-2}\tau^{3} i \upsilon$	Kilogramo
Carga eléctrica	ψ	τi	coulomb
Capacidad inductiva eléctrica ε	$\mu^{-1}\lambda^{-3}\tau^{2}\psi^{2}$	$\lambda^{-1}\tau i \upsilon^{-1}$	farad / metro
Capacidad inductiva magnética μ	$\mu \lambda \psi^{-2}$	$\lambda^{-1}\tau i^{-1}\upsilon$	$\frac{\text{ohm} \cdot \text{seg}}{\text{metro}}$
Densidad de corriente eléctrica J	$\lambda^{-2}\tau^{-1}\psi$	$\lambda^{-2} i$	ampere / metro^2
Corriente eléctrica	$\tau^{-1}\psi$	i	ampere
Desplazamiento eléctrico D	$\lambda^{-2}\psi$	$\lambda^{-2}\tau i$	$\frac{\text{ampere} \cdot \text{seg}}{\text{metro}^2}$
Intensidad de campo eléctrico E	$\mu\lambda\tau^{-2}\psi^{-1}$	$\lambda^{-1}\upsilon$	volt / metro
Potencial eléctrico	$\mu\lambda^{2}\tau^{-2}\psi^{-1}$	υ	volt
Capacitancia eléctrica	$\mu^{-1}\lambda^{-2}\tau^{2}\psi^{2}$	$\tau i \upsilon^{-1}$	farad

VARIABLE	$\{\mu,\lambda,\tau,\psi,\theta\}$	$\{\upsilon,\lambda,\tau,i,\theta\}$	Nombre de la unidad
Resistencia eléctrica	$\mu\lambda^2\tau^{-1}\psi^{-2}$	$i^{-1}\upsilon$	ohm
Intensidad de campo magnético H	$\lambda^{-1}\tau^{-1}\psi$	$\lambda^{-1}i$	ampere/metro
Inducción magnética B	$\mu\tau^{-1}\psi^{-1}$	$\lambda^{-2}\tau\upsilon$	weber / m²
Flujo de inducción magnética	$\mu\lambda^2\tau^{-1}\psi^{-1}$	$\tau\upsilon$	weber
Coeficiente de inductancia $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$	$\mu\lambda^2\psi^{-2}$	$\tau i^{-1}\upsilon$	henry
Energía eléctrica	$\mu\lambda^2\tau^{-2}$	$\tau i\upsilon$	joule
Potencia eléctrica	$\mu\lambda^2\tau^{-3}$	$i\upsilon$	watt

APENDICE IV-4

Criterio para escoger una base de

$\Pi(X_1, \ldots, X_n)$

Existe un número infinito de bases de $\Pi(X_1,\ldots,X_n)$. En lo que al teorema de Buckingham se refiere, es admisible cualquier base. Sin embargo, el mismo Buckingham ha demostrado, con ayuda de un ejemplo muy bien escogido, que algunas bases son más útiles en la práctica que otras y que ciertas transformaciones de las π_i de una base pueden lograr que una ecuación $P = f(\pi_1,\ldots,\pi_p)$ se encuentre en una forma más tratable. Mejor que desarrollar una teoría de transformaciones de productos adimensionales es preguntarse: "¿Cómo se puede seleccionar des-de el comienzo una base de $\Pi(X_1,\ldots,X_n)$ que sea la más ventajosa?". La respuesta a esta pregunta no depende enteramente de definiciones arbitrarias, ya que el investigador desea que cualquiera de las variables adimensionales independientes $\pi_1,\ldots,\pi_p$

sea susceptible de control por técnicas experimentales mientras que las otras se mantienen constantes. Esto en ocasiones es pedir demasiado, porque con frecuencia sólo unas cuantas de las variables originales pueden regularse experimentalmente. Por ejemplo, la velocidad de un fluído en un conducto puede regularse con una válvula. Por otro lado, la aceleración de la gravedad es una variable cuyo valor no podemos cambiar.

Buckingham ha señalado que el máximo control experimental sobre las variables adimensionales se obtiene si las variables originales que pueden regularse aparecen en un solo producto adimensional de una base de $\Pi(X_1, \ldots, X_n)$. Por ejemplo, si una velocidad V se regula fácilmente, entonces conviene que V aparezca en uno solo de los productos adimensionales de una base. El producto adimensional que contenga a V podrá ser regulado variando V.

De manera semejante, si una presión p puede variarse fácilmente sin afectar V, entonces es conveniente que p aparezca en un solo producto adimensional, pero no en el mismo que V.

Las variables dependientes del problema también deben considerarse. Si se desea saber cómo depende una variable del resto de las variables, aquélla no debe aparecer más que en un solo producto adimensional. A este producto se le llamará "variable adimensional dependiente".

Por tanto, el criterio seguido en el Análisis Dimensional para dar valores a las n-r variables independientes que determinan las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n = 0 \\ b_1 r_1 + \ldots + b_n r_n = 0 \\ c_1 r_1 + \ldots + c_n r_n = 0 \\ d_1 r_1 + \ldots + d_n r_n = 0 \\ e_1 r_1 + \ldots + e_n r_n = 0 \end{cases}$$

cuya matriz asociada es la matriz dimensional de $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es que los valores asignados sean tales que, dentro de lo posible, la variable cuya dependencia queremos estudiar y las variables fáciles de regular experimentalmente, aparezcan cada una en un solo producto adimensional.

En general, la asignación de valores se facilita si:

en la matriz dimensional se coloca como primera variable a la variable dependiente; como segunda variable, aquélla que sea más fácil de regular experimentalmente; como tercera variable, la siguiente en facilidad de control y así sucesivamente, tratando de escoger como variables independientes que determinan las soluciones del sistema de ecuaciones, a las primeras n-r.

BIBLIOGRAFIA

1.- Cárdenas, Humberto ; Lluis, Emilio ; Raggi, Francisco y Tomás, Francisco.
"ALGEBRA SUPERIOR"
Ed. Trillas
México (1973) .

2.- Strang , Gilbert .
"ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES"
Fondo Educativo Interamericano
México (1982).

3.- Lang , Serge .
"LINEAR ALGEBRA"
Addison-Wesley Publishing Co.
2nd edition
New York (1972).

4.- Langhaar, Henry L.
" DIMENSIONAL ANALYSIS AND THEORY OF MODELS"
John Wiley and Sons Inc.
New York (1951) .