Dig. 7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán

Teoria del riesgo, fundamentos

T E S I S

Que para obtener el título de :

Actuario

P r e s e n t a :

MA. GUADALUPE MARTINA RODRIGUEZ GOMEZ DEL CAMPO

Acatlán Edo. de México 1986

INDICE

Introducción I

Capítulo I: Generalidades de la Teoría del Riesgo.

1.1 Semblanza Histórica 1

1.2 Objetivo de la Teoría del Riesgo 4

1.3 El riesgo y su clasificación 5

1.4 Métodos para enfrentar el riesgo 13

Capítulo II: Aspectos probabilísticos, demostraciones y ejemplos.

2.1 El riesgo y la probabilidad 16

2.2 Conceptos fundamentales

2.2.1 Variable Aleatoria 18

2.2.2 Variable Aleatoria Discreta 19

2.2.3 Variable Aleatoria Continua 20

2.2.4 Funciones de distribución acumulativa y Funciones de densidad 21

2.2.5 Valor esperado de una Variable Aleatoria 24

2.2.6 Varianza de una Variable Aleatoria 26

2.2.7 Convolución 29

2.3 Definición de Variable Aleatoria en el tiempo 31

2.4 Funciones de Distribución

2.4.1 Distribución de Poisson 35

2.4.2 Distribución Normal 41

2.5 Fundamentos de la Teoría del Riesgo Individual 45

2.6 Fundamentos de la Teoría del Riesgo Colectiva 55

2.7 Fundamentos de la Teoría de la Ruina 59

Capítulo III: Métodos aplicables a la Teoría del Riesgo, su justificación, sistematización, y una aplicación.

3.1 Aproximación de Rosenthal 65

3.2 Aproximación de Esscher 71

3.3 Método Normal Power 75

3.4 Método de Convoluciones 80

3.5 Método de Montecarlo 85

3.6 Programas de cada método y su aplicación

3.6.1 Programa Inicial 88

3.6.2 Programa Aproximación de Rosenthal 100

3.6.3 Programa Aproximación de Esscher 109

3.6.4 Programa Nomal Power 123

3.6.5 Programa Método de Convoluciones 132

3.6.6 Programa Método de-Montecarlo 144

3.7 Análisis, comparaciones y sugerencias 161

Conclusiones 166

Anexo A. Manual de Operaciones. 168

Citas Bibliográficas 175

Bibliografía 177

INTRODUCCION

A partir de la revolución industrial la tecnología utilizada por el hombre ha evolucionado a pasos agigantados. Los objetos que se crean para satisfacer diversas necesidades y la herramientas que se utilizan en su fabricación son muy diversas y se perfeccionan día con día. El ser humano ha ido incorporando y ha hecho indispensables para su vida diaria distintos elementos que antes ni siquiera imaginaba llegarían a existir.

Pero, no solo han surgido cambios en la relación del hombre con el medio ambiente que lo rodea, con el avance tecnológico se han generado también cambios, transiciones y diversificaciones en las relaciones humanas, creándose con ello un nuevo tipo de derechos y obligaciones.

Paralelamente a este desarrollo,la actividad aseguradora ha tenido que incorporar nuevas coberturas para proteger los intereses de tipo personal y material, que se han convertido en indispensables para la vida del hombre, por lo cual es cierto que ésto representa un importante ingreso para las compañías de seguros pero a su vez, éstas deben contar con una base técnica sólida para hacer frente a todas las responsabilidades que han ido adquiriendo. Para ello la Teoría del Riesgo resulta ser la herramienta más útil y acertada, ya que se apoya en bases totalmente científicas y, detecta las variaciones o irregularidades dentro del negocio antes de que se presenten, pudiéndose así preveer muchas situaciones adversas.

Gracias al surgimiento y desarrollo de las computadoras, la teoría cuenta con una valiosa ayuda sin la cual sería muy dificil llevar a la práctica las distintas técnicas que se han desarrollado dentro de ella y, se han podido resolver problemas que por su magnitud, no era posible manejar.

Lamentablemente, los pricipios, métodos y aplicaciones de esta teoría , no son practidados y quizá en ocasiones resultan desconocidos a los actuarios dedicados al área del seguro, sobre todo en nuestro país. La razón principal de ello es quizá que aunque existen diversas publicaciones sobre el tema, su difusión no ha sido la más acertada y particularmente en México, se tiene el inconveniente de que la gran mayoría de ellas se han realizado fuera del país, siendo muy dificil y costoso adquirirlas.

Este trabajo se elaboró con la idea de englobar y exponer en él los aspectos fundamentales en los que se apoya la teoría del riesgo.

En el primer capítulo se presenta a manera de intoducción, la semblanza histórica de dicha teoría, cuyo inicio se remonta a principios de este siglo, así como el obetivo que persigue, una definición de riesgo, la clasificación de éste y los diversos métodos que existen para hacerle frente.

Para iniciarse en el estudio de la teoría del riesgo, es importante recordar y analizar algunos conceptos básicos de la teoría de probabilidades; para ello, el segundo capítulo presenta un compendio de los conceptos probabilísticos fundamentales para la comprensión de la primera. Dividida en dos ramas muy importantes, presenta dos aspectos: La teoría individual, raíz y principio del desarrollo de esta área que aunque, como veremos posteriormente, presenta ciertas limitaciones, fue posible gracias a ella el surgimiento de la teoría colectiva, la cual en un principio buscó alternativas para vencer esas limitaciones y proporcionar resultados más certeros y confiables.

Se da también una pequeña introducción a la teoría de la ruina, definiéndola y señalando su importancia dentro del estudio de la actividad aseguradora, sin profundizar más en ella, pues por si misma es materia de un trabajo tan extenso o más que éste.

La tercera parte presenta las diferentes técnicas que se utilizan para evaluar las funciones de probabilidad obtenidas en la segunda, siendo éstas: La aproximación de Rosenthal, la aproximación de Esscher, el método Normal Power, el método de convoluciones y el método de Montecarlo.

Una aportación muy importante de este trabajo, es la automatización de los métodos anteriores a través de programas de cómputo. Como se verá más adelante, en la mayoría de los casos resulta dificil, en realidad imposible, realizar la aplicación de los mismos simplemente con la ayuda de una máquina calculadora, por lo que al llevarlos a la computadora, se agiliza el tiempo de cálculo, es posible manejar gran cantidad de información y logicamente, los resultados obtenidos serán más confiables.

C A P I T U L O I.

GENERALIDADES DE LA TEORIA DEL RIESGO.

1.1 Semblanza Histórica.

La teoría clásica del riesgo se asocia directamente con la matemática del seguro de vida y trata principalmente, de las desviaciones que se esperaban fuesen producidas por las fluctuaciones en las reclamaciones de pólizas individuales. Estos primeros trabajos fueron publicados por Bohlmann en 1909, sin embargo no resultaron ser muy apropiados para propósitos prácticos, ya que dejaban sin respuesta preguntas como: ¿Dentro de qué límites la posible pérdida o ganancia de una compañía, depende de la duración de diferentes períodos?. Una nueva fase de desarrollo comenzó con los estudios realizados por Filip Lundberg(1909-1919) que, junto con H. Cramer(1926), C.O. Segerdhal y otros autores suizos, pasaron a ser conocidos como "la colectividad de la teoría del riesgo". Considerando los cuestionamientos del seguro, para ellos resultó esencial el estudio del progreso del negocio asegurador desde el punto de vista probabilístico. De aquí que la aplicación de la teoría asi desarrollada, tanto al seguro de vida como al seguro de daños, sea efectiva.

En años recientes los supuestos fundamentales de la teoría y su rango de aplicación se han extendido significativamente, gracias al avance de la teoría de probabilidades, sus numerosas ramificaciones y alcances; asimismo, el crecimiento explosivo de las computadoras ha hecho posible el tratamiento de problemas que por sus.

dimensiones, anteriormente no era posible manejar.

Pese a que la teoría del riesgo genera un interesante y amplio campo para la investigación, el desarrollo de la misma está aun lejos de ser completo, como lo demuestran las múltiples publicaciones hechas sobre el tema. Sin embargo, como muchas otras áreas del conocimiento humano que han tenido un reciente y rápido desarrollo, presenta la dificultad de poder ser seguida ampliamente por los actuarios dedicados a la práctica del seguro, lo cual resulta ser lamentable, pues proporciona las herramientas necesarias para la comprensión del negocio como un proceso en el cual se encuentran involucradas variaciones y fluctuaciones de un año a otro y pude ser vista como una ayuda concreta con aplicación práctica. Es cierto a su vez, la existencia de diversos problemas como son, la solvencia de la compañía de seguros, requerimientos de reaseguro y otros, para los cuales no puede proporcionar una solución por si sola. La razón principal es que en la práctica se deben tomar en cuenta aspectos de tipo legal, con los cuales la teoría del riesgo se ve limitada.

Por otro lado, la teoría del riesgo, proporciona medios efectivos para estimar las fluctuaciones en la cartera de clientes captada por la compañía, que solo pueden ser retenidas dentro de los límites de los recursos de ésta , resultando asi una a -

yuda para facilitar consideraciones importantes de tipo financiero y en la toma de decisiones finales.

Como se mencionó anteriormente, se han hecho diversas publicaciones sobre el tema, entre las cuales podemos destacar la primera de todas, realizada por Bohlmann en 1909 y posteriores las de Lundberg, Cramer y Segerdahl. En 1955 Teivo Pentikäinen publicó un libro de texto elemental, escrito en finlandés, diseñado para el uso de los estudiantes de la Actuaría y que en 1969 sería traducido al inglés, añadiéndosele aplicaciones prácticas. Desde entonces a la fecha se han editado diversos libros como son los escritos por Bülmann en 1970, Gerber en 1979 y Seal en 1966 y 1978.

1.2 Objetivo de la Teoría del Riesgo.

El objetivo principal de la teoría del riesgo es el estudio de diferentes clases de fluctuaciones que surgen en las reclamacio - nes de la cartera de una compañía de seguros.

Sabemos que cualquier empresa está sujeta a distintos tipos de riesgo, por lo que podemos concluir que una compañía de seguros puede llegar a sufrirlos, pero la gran diferencia radica en que a demás asume otros y sus consecuencias. Las pérdidas que puede sufrir debidas a fluctuaciones en las reclamaciones, esto es, que las reclamaciones reales difieran de las reclamaciones esperadas, aun y cuando la causa de esta variación no sea del todo evidente, se convierten en la materia de estudio principal de la teoría del riesgo.

Pero, ¿Qué es el riesgo?, ¿Existe un sólo tipo de riesgo o éste puede clasificarse?, si es así, ¿Cuál es el criterio que se utiliza para su clasificación? y los distintos tipos de riesgo, ¿Son todos materia de la teoría del riesgo? o ¿Cuáles específica mente lo son?. Para responder a estas preguntas procederemos a definirlo y clasificarlo.

1.3 El Riesgo y su Clasificación.

El riesgo se define como la **probabilidad de que ocurra un evento distinto del esperado.**

Todos desde que nacemos estamos expuestos a sufrir distintos tipos de siniestros como pude ser, contraer una enfermedad, sufrir un accidente y el suceso que todos habremos de enfrentar que es la muerte. Pero no sólo las personas somos sujeto del riesgo, también los bienes materiales están expuestos a distintas eventualidades, como puden ser: incendio, robo, descompostura, etc. Existen riesgos de ocurrencia inminente, es decir, que no se pueden evitar, sin embargo es posible aminorar sus concecuencias.

Son tan diversas las situaciones en las que el riesgo está presente que no es posible efectuar una clasificación única, es por ésto que se toman en cuenta distintos factores como:

A. Según el objeto al que afecta.

B. De acuerdo a su probabilidad de ocurrencia.

C. Si ocasiona pérdidas económicas.

D. Por la intensidad de su ocurrencia.

E. Si la ocurrencia depende de fluctuaciones en la economía.

F. Por el tipo de afectación.

G. Si su ocurrencia es o no favorable.

para clasificarlo. Asi tenemos:

A. Riesgos sobre bienes materiales y sobre las personas.

Los primeros son aquellos que afectan directamente a los objetos, como puden ser: el incendio de una casa, el robo de una joya, pérdida de bultos caídos al mar, etc. Los segundos son aquellos que atañen directamente a las personas, v. gr.: una enfermedad, un accidente y la muerte.

B. Riesgos estacionarios y riesgos variables.

Los riesgos estacionarios son aquellos en los que la probabilidad de ocurrencia del siniestro no varía a través del tiempo, v. gr.: la rotura de un cristal. Los riesgos variables son aquellos en los que la probabilidad de ocurrencia cambia con el transcurso del tiempo, v. gr.: la descompostura de una máquina.

C. Riesgos financieros y no financieros.

Esta diferencia radica esencialmente en el hecho de que la ocurrencia del siniestro puede traer, en ocasiones, pérdidas económicas y se hablará entonces de un riesgo de tipo financiero, en caso contrario se tratará de un riesgo no financiero. De entre los primeros podemos mencionar un incendio en una fábrica y de los segundos, la muerte de una persona.

D. Riesgos homogádos y riesgos heterógrados.

En el caso de los riesgos homográdos el efecto que producen siempre se da con el mismo grado o intensidad. Si se trata de un riesgo heterógrado el efecto que produce su ocurrencia, varía en grado o intensidad, según el caso. Un ejemplo de riesgo homográdo es la muerte, un accidente es un riesgo heterógrado.

E. Riesgos dinâmicos y riesgos estâticos.

Dinâmicos son aquellos riesgos cuya ocurrencia está sujeta a fluctuaciones dentro de la economía, como pueden ser las variaciones que se dan en el mercado de valores, en el que el inversionista tiene la posibilidad de obtener una ganancia o sufrir una pêrdida. Los riesgos estâticos no dependen de éstas variaciones o de la situación económica, así tenemos como ejemplo la pérdida de una coseha.

F. Riesgos fundamentales y riesgos particulares.

Los primeros son aquellos cuya ocurrencia afecta al total de la población, o a un núcleo amplio de la misma. Los riesgos particulares ocacionan pérdidas a un sólo individuo o a un grupo reducido de personas. Un ejemplo de riesgo fundamental es un terremoto, un riesgo particular es el robo de un automóvil.

G. Riesgos especulativos y riesgos puros.

Cuando las consecuencias que del riesgo se derivan puden ser o no favorables, éste es especulativo, por ejemplo: un artículo de nuevo lanzamiento al mercado, puede ser o no aceptado por los consumidores. La mayoría de estos riesgos puden identificarse a su vez como particulares.

Por el contrario, un riesgo puro es aquel cuya ocurrencia traerá siempre consecuencias adversas, v. gr.: el incendio de una fábrica, el robo de un banco, la muerte de una persona, etc. En general son desafortunados no sólo para un individuo, sino para la sociedad en su conjunto, por lo que a su vez resultan ser riesgos fundamentales y es importante buscar protección contra su ocurrencia.

Son precisamente los riesgos puros el objeto principal de la actividad aseguradora y por lo tanto indispensables en el estudio de la teoría del riesgo.

Existe otra forma de clasificar al riesgo, en base a la aceptacion del mismo por parte de la actividad aseguradora, la cual se presenta en el siguiente diagrama (1):

Cuadro #1.

- Clasificación del riesgo.
  - I. Pérdida del poder ganancial
    - a. Personal
      - fallecimiento
      - herida accidental
      - enfermedad
      - vejez
      - maternidad
    - b. Comercial
      - interrupción de negocios
      - pérdida de utilidades o arrendamiento
  - II. Pérdida de bienes
    - a. Destrucción o Daños
      - incendio
      - daños de guerra
      - averías por agua derramada
      - motín o insurrección
      - daño físico por automóviles,etc.
    - b. Improbidad
      - robo, asalto, hurto
      - fraude
      - infidelidad
    - c. Fallas ajenas
      - malas deudas
      - contratos
    - d. Responsabilidad civil
      - para los empleados
      - para el público
    - e. Gastos futuros
      - gastos de enfermedad
      - gastos de escombro y derribo
      - gastos de sustitución
      - gastos de mantenimiento
      - arrendamiento adicional

I. La pérdida del poder ganancial se refiere a la falta de una propiedad que pudiera ser adquirida en el futuro , es decir, que por la ocurrencia del siniestro la persona dejase de percibir beneficios que podría obtener mediante el esfuerzo futuro. La pérdida del poder ganancial de las personas puede ser consecuencia de sucesos como la muerte, una enfermedad o un accidente y la de las empresas puede ser el resultado de diversos hechos que pudieran o no estar cubiertos.

II. La pérdida de bienes se refiere esencialmente a propiedades ya adquiridas. Este campo se encuentra ampliamente cubierto por la actividad aseguradora. Muestra de ello son los seguros de incendio, robo, rotura de maquinaria, automóviles, etc.

a. Destrucción o Daños: Las posesiones de un individuo están sujetas a sufrir descomposturas o pérdidas debidas a sucesos adversos como son: incendio, rotura y explosión.

b. Improbidad o Infidelidad: Se refiere a la pérdida de bienes por la acción dolosa de terceras pesonas, v. gr.: el robo, el fraude, etc.

c. Fallas ajenas: En este caso "se corre un riesgo con la propiedad porque otras personas pueden fallar en la realización de un acto que se espera" (2). Un ejemplo podría ser el que un arquitecto no entregue la obra terminada el día estipulado en el contrato por la falta del trabajo de carpintería.

d. Responsabilidad Civil: En este ramo se engloban las posibles pérdidas financieras ocasionadas por ciertos actos u omisiones. Los riesgos por responsabilidad civil son muy numerosos por lo que cada día se crean nuevas formas de seguro para proteger a las personas y a los negocios en la responsabilidad que tienen ante la ley por daños a personas o bienes, así tenemos por ejemplo los daños causados por la condición nociva o defectuosa de los productos fabricados, preparados o vendidos.

e. Gastos futuros: Es un siniestro resultante de riesgos que pueden llegar a suceder en un futuro o no. Pueden citarse aqui los gastos ocacionados por una enfermedad prolongada.

Como se estableció con anterioridad, son los riesgos puros la materia principal de la actividad aseguradora y al ser objeto de la teoría del riesgo el análisis de las fluctuaciones dentro de la misma, este tipo de riesgos serán los que se consideren.

Es importante a su vez, tomar en cuenta la clasificación hecha en base a los riesgos contra los cuales protege el seguro, pues sabemos que existen riesgos puros para los que no hay una cobertura o bien, ésta está sujeta a límites o a una participación directa del asegurado. En genral, las pérdidas ocasionadas por huelgas o motines se encuentran excluídas de todas las pólizas, y el seguro de gastos médicos mayores, está sujeto a ciertos límites económicos, mientras que el seguro de incendio y el de automóviles establecen que el asegurado participe con un deducible.

1.4 Métodos para enfrentar el Riesgo.

Una vez definido el riesgo y planteadas la distintas clasificaciones que existen para agruparlo, podemos determinar las alternativas que tiene una persona para afrontarlo.

En general existen cuatro medios para hacer frente aun riesgo que pueden aplicarse solos o combinados y son:

a. Previsión y protección.

b. Transferencia.

c. Aceptación por cuenta propia.

d. El seguro.

a. Previsión y protección. Ambas constituyen una medida ideal para evitar sucesos adversos o para disminuírlos en intensidad. Resultaría muy favorable el hecho de que los empresarios tuvieran al día sus medidas de seguridad para evitar los incendios o que todos manejásemos con precaución evitando así los accidentes automovilísticos; sin embargo, como no siempre son posibles y en ocasiones no son suficientemente eficaces o resultan muy costosas, deben buscarse otras opciones cuando no se pudan implementar.

b. Transferencia. Consiste esencialmente en que una persona que enfrenta un riesgo, induce a otra para que asuma las consecuencias de la ocurrencia del mismo; en general, la aceptación de la responsabilidad se efectúa sin cobrar honorarios por ello.

c. Aceptación por cuenta propia. La persona que enfrenta el riesgo lo asume, incluyendo todas las consecuencias que éste encierre.

d. El Seguro. Un riesgo resulta asegurable cuando puede medirse su grado o nivel de afectación y por el control limitado que de él tenga el comprador de la póliza.
El seguro puede definirse como un contrato por el cual la empresa aseguradora se obliga, mediante el pago de pequeñas contribuciones (primas) por parte del asegurado, a resarcirlo del daño, al verificarse la eventualidad prevista en el convenio, dicha eventualidad puede ser prevista o calculada.
Podría decirse que el seguro es una forma de transferencia de riesgo que se caracteriza por:
- La combinación de riesgos.
- El cálculo de pérdidas futuras.
Por lo que se refiere a este punto, sabemos que es necesaria la medición del azar implicado en la actividad aseguradora a

través de un cálculo matemático aproximado, para que la compañía de seguros venda una garantía de protección futura, considerando las fluctuaciones en las reclamaciones basándose en los principios y técnicas utilizadas en la teoría del riesgo, permitiendo asi el cumplimiento de las obligaciones adquiridas.

C A P I T U L O II.

ASPECTOS PROBABILISTICOS
DEMOSTRACIONES Y EJEMPLOS.

2.1 El Riesgo y la Probabilidad.

Para introducirnos en el estudio de la teoría del riesgo es esencial proporcionar una introducción a la misma basada en los elementos de la teoría de probabilidades, la cual brinda las bases para el desarrollo de la primera.

Como sabemos, la teoría de probabilidades es el estudio de fenómenos aleatorios, es decir, aquéllos cuya ocurrencia es fortuita. Pese a que no es posible predecir su ocurrencia, podemos encontrar en ellos cierta regularidad que nos permita planear su segimiento y análisis, auxiliados con las herramientas que para ello proporciona esta rama de las matemáticas. Así, se tienen valores entre 0 y 1 que representan la frecuencia relativa con la cual se observan esos resultados. En el área del riesgo esta frecuencia es conocida como <u>coeficiente de siniestros</u> o <u>índice de siniestralidad</u> y está dado por:

$$f=\frac{n}{N}$$

donde: n=número de siniestros

N=total de riesgos o pólizas

Existen dos conceptos estrechamente ligados al de fenómeno aleatorio y son el de evento aleatorio y la probabilidad del mismo. El primero tiene como propiedad que la frecuencia relativa con la que ocurre en una sucesión amplia de observaciones, se acerca o tiende a un valor límite, a medida que el número de observaciones tiende a infinito, a este valor límite es a lo que llamamos probabilidad del evento aleatorio, es decir:

$$p = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

donde n es el número de ocurrencias del evento(siniestros) en N ensayos(total de riesgos).

2.2 Conceptos Fundamentales.

En este punto definiremos distintos conceptos probabilísti - cos esenciales para el desarrollo de la teoría del riesgo, proporcionando además ejemplos especificos aplicables a esta área.

2.2.1 Variable Aleatoria.

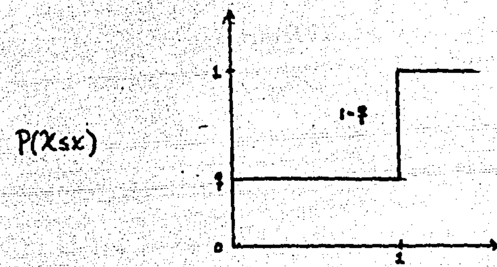
X es una variable aleatoria si la probabilidad del evento $X \leq x$ está definida para $\forall x \in R$, es decir, X es una variable a - leatoria si $P[X \leq x] \exists \; \forall x \in R$.

Se emplearán letras mayúsculas para denotar variables alea - torias y minúsculas para los valores que éstas puedan asumir.

Para hacer más clara la definición anterior consideraremos el siguiente ejemplo: Tomemos en cuenta a un individuo, en el transcurso del año puede ocurrir que esta persona muera o por el contrario, que al finalizar el mismo, continue con vida. Si identificamos el hecho de que muera con un cero y de que sobreviva con un uno, sabiendo además que la probabilidad de que fallezca durante el año es q y de que viva 1-q, entonces tendremos :

$$X : \{0,1\} \qquad P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

graficando lo anterior:



En este caso la variable aleatoria X representa el heco de que durante el año la persona fallezca(cero) o sobreviva(uno).

2.2.2 Variable Aleatoria Discreta.

Una variable aleatoria es discreta si existe un número finito o una secuencia infinita contable de números reales, $x_1, x_2, \ldots$, con $P\{X=x_i\}>0$ para $i=1,2,\ldots$ y $\sum_i P(X=x_i)=1$.

Ejemplo 2.

En el ejemplo del punto anterior la situación que se presenta representa el caso de una variable aleatoria de tipo discreto.

2.2.3 Variable Aleatoria Continua.

Una variable aleatoria es continua si existe un número infinito de números reales x ,x ,..., con P $X=x_i$ =0 para i=1,2,... y P(X x)=1.

Ejemplo 3.

Consideremos la variable aleatoria Z que representa el monto de una reclamación individual, es decir, la suma que será pagada por el asegurador al momento de ocurrir el fuego, el accidente o cualquier otro evento contra el cual se esté asegurado la probabilidad P(Z z), puede representar un caso de tipo continuo. En el seguro de daños esta continuidad resulta más evidente, debido a la cobertura por daños parciales, lo cual resulta un incremento sustancial en la incidencia relativa de las reclamaciones pequñas.

2.2.4 Funciones de Distribución Acumulativa y Funciones de Densidad.

Si f(x) es una función de variable real definida para $-\infty<x<\infty$, entonces se tiene que:

$$f(\infty)=\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \wedge \qquad f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

tomando en cuenta que ambos límites existen.

También decimos que f(x) es continua por la derecha en $x=x_0$ si:

$$\lim_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} f(x_0+h)=f(x_0) \qquad \forall x$$

De acuerdo a lo anterior, definimos F(x), una función de variable real, como una función de distribución acumulativa si:

i) $F(\infty)=1$ y $F(-\infty)=0$, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x)=0$$

ii) F(x) es una función monótona no decreciente, es decir:

si $x_1< x_2 \Rightarrow F(x_1)< F(x_2)$.

iii) F(x) es continua por la derecha, es decir:

$$\lim_{h\to 0} F(x+h)=F(x) \qquad h>0$$

si X es una variable aleatoria y $F(X)=P\{X\leq x\}$, es su función acumulativa de probabilidad y se llama función de probabilidad.

Por otra parte, una función de densidad, en el caso discreto, representa la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor igual a una cantidad dada. Esta relación se da por $P\{X = x\}=p(x)$. Además:

i) $p(x) \geqslant 0$

ii) $\sum_{x} p(x)=1$

Para el caso continuo ésta corresponde a una función de densidad de probabilidad y $P\{x < X < x+dx\}=f(x)dx$. Además:

i) $f(x) \geqslant 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

Si, tanto la función de distribución acumulativa como la función de densidad existen, éstas se relacionan de la siguiente forma:

$P(X)=\sum_{i=-\infty}^{x} p(x_i)$ caso discreto.

$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ caso continuo.

Con el fin de aclarar la diferencia entre estos dos conceptos presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.

El proceso de reclamación puede analizarse desde un punto de vista muy simple: Supongamos que se tiene una urna con bolas numeradas de 1 a N y donde X=número que contiene la bola extraída. Si agrupamos las distintas sumas aseguradas e identificamos los distintos montos, asignándoles un número de 1 a N, la probabilidad de obtener un monto de reclamación determinado se asocia con el evento de extraer una bola de la urna, conteniendo ésta un número específico; entonces, la probabilidad de que al extraer una bola, ésta contenga un número del intervalo [1,N], está dada por:

$$p(x)=P\{X=x\}=\frac{1}{N} \quad \text{para } x\in[1,N]$$

demostraremos ahora que p(x) es una función de densidad.

i) Como sabemos las reclamaciones solo puden tomar valores positivos, ya que no podemos tener reclamaciones negativas, durante el período se presentaran o no las mismas, identificándose éste último hecho como el monto cero, por lo que: $p(x)\geqslant 0$.

ii) Por otra parte: $\sum_{i=1}^{N} p(x_i)=1$, ya que:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1=\frac{N}{N}=1 \blacksquare$$

Entonces la función de distribución acumulativa de X, estará dada por: $P(X)=\sum_{i=1}^{N}p(x_i)$.

2.2.5 Valor Esperado de una Variable Aleatoria.

Dada una variable aleatoria X, definimos su valor esperado E(X) como:

$E(X)=\sum_{x} xp(x)$ caso discreto

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ caso continuo

también se le conoce como valor medio o media de la distribución.

Para consideraciones futuras, es importante analizar el valor esperado de casos específicos, como son:

a. E(c)=c, donde c es una constante (2.2.5.1)

b. E(X+c)=E(X)+c (2.2.5.2)

c. E(-X)=-E(X) (2.2.5.3)

d. E(cX)=cE(X) (2.2.5.4)

demostrando cada caso se tiene:

a. E(c)=c

caso discreto:

Por definición $E(c)=\sum_{x} c\, p(x_i)$

$$E(c)=c\sum_{x} p(x_i)$$

si p(x) es una función de densidad, entonces p(x)=1, por lo que:

$$E(c)=c(1)$$

$$E(c)=c \quad \blacksquare$$

caso continuo:

Por definición $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f(x)\, dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

si f(x) es una función de densidad, entonces f(x)dx=1, por lo que:

$$E(c) = c\,(1)$$
$$E(c) = c \quad ■$$

b. E(X+c)=E(X)+c

caso discreto:

Por definición

$$\begin{aligned} E(X+c) &= \sum_x [(X+c)\, p(x)] \\ &= \sum_x [X p(x) + c\,p(x)] \\ &= \sum_x x\,p(x) + c \sum_x p(x) \\ &= E(X) + c \quad ■ \end{aligned}$$

caso continuo:

Por definición

$$\begin{aligned} E(X+c) &= \int_{-\infty}^{\infty} (X+c)\, f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx + c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \\ &= E(X) + c \quad ■ \end{aligned}$$

c. E(-X)=-E(X)

caso discreto:

Por definición

$$\begin{aligned} E(-X) &= \sum_x -X\, p(x) \\ &= -E(X) \quad ■ \end{aligned}$$

caso continuo:

Por definición
$$E(-X)=\int_{-\infty}^{\infty}-x f(x)\,dx$$
$$=-E(X) \blacksquare$$

d. $E(cX)=cE(X)$
$$E(cX)=E(c)\cdot E(X)$$
$$=c\,E(X) \blacksquare$$

Ejemplo 5.

A continuación obtendremos el valor esperado de la distribución del ejemplo 4:
$$E(X)=\sum_x x\,p(x)$$
$$=\sum_x^N x\,\frac{1}{N}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_x^N x$$

como sabemos la suma de los primeros N naturales está dada por:
$$1+2+\ldots+N=\frac{N(N+1)}{2}$$

por lo que:
$$E(X)=\frac{1}{N}\,\frac{N(N+1)}{2}$$
$$E(X)=\frac{N+1}{2}$$

2.2.6 Varianza de una Variable Aleatoria.

Dada una variable aleatoria X, denotamos su media cuadrática $E(X^2)$ y el cuadrado de su media por $E^2(X)$. En particular, la va rianza de una variable aleatoria denotada por V(X), se define por:

$$V(X)=E[X-E(X)]^2$$
$$=E(X^2)-E^2(X)$$

"La varianza es una medida del esparcimiento o dispersión de los valores que puede tomar la variable X correspondiente" (3).

Como para el caso del valor esperado, también consideraremos la varianza de algunos casos específicos como son:

a. $V(X+c)=V(X)$ (2.2.6.1)

b. $V(-X)=V(X)$ (2.2.6.2)

a. $V(X+c)=V(X)$

caso discreto y continuo:

Por definición
$$\begin{aligned} V(X+c) &= E[(X+c)^2] - E^2(X+c) \\ &= E(X^2+2cX+c^2) - [E(X)+c]^2 \\ &= E(X^2)+E(2cX)+E(c^2)-E^2(X)-2cE(X)-c^2 \\ &= E(X^2)+2cE(X)+c^2-E^2(X)-2cE(X)-c^2 \\ &= E(X^2)-E^2(X) \\ &= V(X) \ \blacksquare \end{aligned}$$

b. $V(-X)=V(X)$

caso discreto y continuo:

Por definición $V(-X) = E[(-X)^2] - E^2(-X)$

$$
\begin{aligned}
V(-X) &= E(X^2) - [-E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - E^2(X) \\
&= V(X) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6.

Ahora obtendremos la varianza de la distribución del ejemplo 4:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \sum_{x}^{N} x^2 \frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right] - \frac{(N+1)^2}{4} \\
&= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} \\
&= \frac{2N^2+N+2N+1}{6} - \frac{N^2+2N+1}{4} \\
&= \frac{4N^2+2N+4N+2-3N^2-6N-3}{12} \\
&= \frac{N^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

2.2.7 Convolución.

Sean F y G funciones de distribución, su convolución F*G es también una función de distribución y está definida por:

$$F*G\ (X)=\int_{-\infty}^{\infty} F(X-Y)\,dG(Y)$$

Si X y Y son variables aleatorias independientes con funciones de distribución F y G respectivamente, entonces la función de distribución de su suma X+Y, estará dada por F*G.

La convolución es una operación conmutativa y asociativa, es decir:

$$F*G=G*F$$

$$F*(G*H)=(F*G)*H$$

Si X_1 y X_2 son variables aleatorias continuas con funciones de densidad de probabilidad $f(x_1)$ y $f(x_2)$, respectivamente, entonces:

$$g(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1-x_2)\,f(x_2)\,dx_2$$

y en el caso de variables aleatorias discretas se tiene:

$$p(Y)=\sum_{x_2} p(x_1-x_2)\,p(x_2)$$

ambas funciones se conocen como la convolución de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ o $p(x_1)$ y $p(x_2)$.

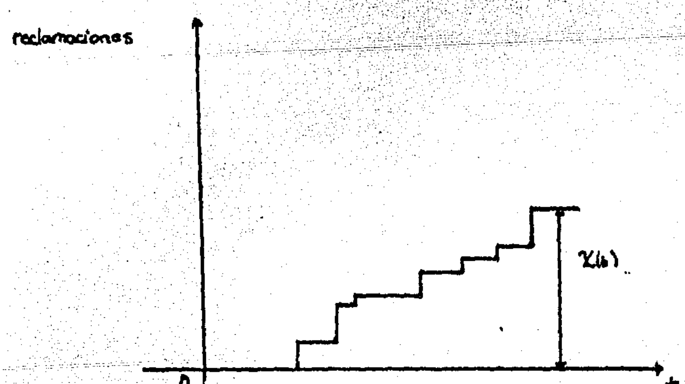
Este último punto no fue ejemplificado ya que ésta defini - ción nos servirá unicamente de apoyo para el desarrollo del mé- todo de convoluciones que se verá en el capítulo III.

2.3 Definición de Variable Aleatoria en el Tiempo.

Sea X una variable aleatoria, entonces la situación de X durante el tiempo t se denota por X(t).

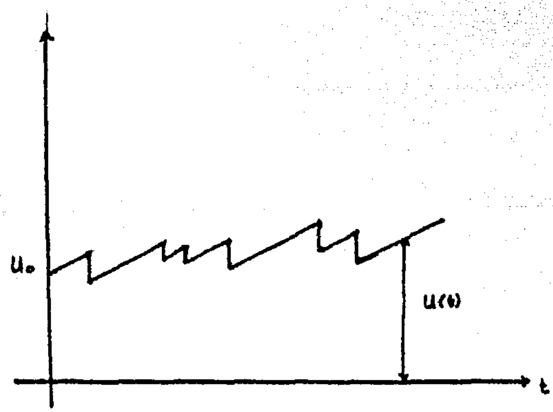
Para el caso que nos ocupa es fundamental el concepto de variable aleatoria en el tiempo, ya que la mayoría de los fenómenos invòlucrados se analizan bajo la realación directa que guardan con éste, por ejemplo, el monto total de las reclamaciones en un intervalo (0,t] o el monto total de la reserva dentro de ese mismo intervalo.

El proceso de raclamación puede describirse graficamente como lo muestra la siguiente figura:



Cada ocurrencia de una reclamación se representa por un salto vertical, la longitud del salto representa el monto o importe de la reclamación. El tiempo se mide a lo largo del eje de las abscisas y la altura X de la linea escalonada, muestra el monto total de las reclamaciones durante el intervalo de tiempo (0,t]. Si el tiempo observado t es fijo, entonces el resultado X(t) es una variable aleatoria con una función de distribución $F(X,t)=P\{X(t)\leq x\}$.

Por otra parte, si consideramos todo el negocio del riesgo en una cartera de una compañía aseguradora, éste pude ilustrarse graficamente así:



La prima neta de riesgo K(t), junto con el márgen de seguridad $\lambda\alpha$ producen una entrada continua; ésto se acumula a una cantidad inicial U_0 , constituyendo así la reserva de riesgo U, de esta forma, la utilidad se representa por la linea inclinada hacia la derecha. Las reclamaciones, que pueden considerarse como utilidades negativas, son pagadas de esta reserva y se representan por lineas verticales hacia abajo. La diferencia:

$$U(t)-U_0=[K(t)+\lambda\alpha]-X(t)$$

nos da la utilidad o pérdida obtenida durante el tiempo t.

Como se vió anteriormente, X(t) representa el monto total de las reclamaciones en un intervalo de tiempo cuya longitud es t. Consideraremos además la variable aleatoria Y(t) que representa el número total de reclamaciones en ese mismo intervalo. Ambas variables aleatorias tendrán definidas sus funciones de distribución acumulativa y su función de densidad y la relación entre estas dos funciones puede expresarse como sigue:

$$F(X,t)=\sum_{j=0}^{x} f(j,t)$$

caso discreto

$$G(Y,t)=\sum_{j=0}^{y} g(j,t)$$

$$F(X,t)=\int_0^x f(j,t)\,dj$$

caso continuo

$$G(Y,t)=\int_0^y g(j,t)\,dj$$

como sólo se considerarán reclamaciones positivas, para nuestro propósito de estudio, los límites inferiores se fijarán en cero en lugar de menos infinito, en las expresiones anteriores.

La función de distribución de la variable aleatoria Z, que puede definirse como el monto promedio de las reclamaciones, será denotada por P(Z) y p(z) su función de densidad. P(Z) expresa la probabilidad de que dado que ocurre una reclamación, el monto de ésta sea menor o igual que z.

2.4 Funciones de Distribución.

Conviene ahora recordar algunas funciones de distribución de probabilidad, tanto discretas como continuas ya que, como veremos posteriormente, el comportamiento que siguen las reclamaciones puede adecuarse a ciertas funciones de probabilidad dadas.

2.4.1 Distribución de Poisson.

Un fenómeno aleatorio cuyo espacio muestral consiste en todos los enteros, incluyendo el cero, de tal forma que $S=\{0,1,2,...\}$, obedece a una distribución Poisson , cuando en cada subconjunto de S, está definida una función de probabilidad P(X) en términos de λ, donde $\lambda>0$ y dada por:

$$P(X)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda} \qquad x=\{0,1,2,\cdots\}$$

La distribución Poisson se obtiene a partir de la distribución Binomial ya que el número de éxitos en n eventos Bernoulli repetidos e independientes, se distribuye como una Poisson con parámetro $\lambda=np$.

Recordaremos que una sucesión de eventos Bernoulli ès un experimento que se repita n veces y donde:

i) Para cada evento hay dos resultados poibles: éxito (E) o fracaso (F).

ii) Solo uno de estos dos resultados ocurre en cada ensayo.

iii) El resultado de cada ensayo es independiente del resultado de los otros ensayos.

iv) La probabilidad de éxito P(E)=p, no cambia de ensayo a ensayo.

En una distribución Binomial, se tienen n eventos Bernoulli en donde la variable aleatoria X=número de éxitos del experimento en n ensayos para la cual:

$$P(X=x)=kp^{x}q^{n-x}$$

k=número de formas en que se pude obtener los éxitos o los fracasos.

p=probabilidad de éxito.

q=1-p=probabilidad de fracaso.

$k=C_n^x=\binom{n}{x}$ por lo que en una distribución Bino - mial se tiene:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} \qquad (2.4.1.1)$$

Por otra parte, si $n\to\infty$ y $p\to 0$ tal que np permanezca comstante y np=número de éxitos en la población total. Sea $np=\lambda$ con $\lambda>0$

$p=\frac{\lambda}{n}$ sustituyendo en (2.4.1.1) se tiene:

$$P(X=x) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,\frac{\lambda^{x}}{n^{x}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)(n-x)!}{n^{x}\,(n-x)!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^{x}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\;1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}$$

si obtenemos el $\lim\limits_{n\to\infty} P(X=x)$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} P(X=x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^{x}}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\right]$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\,e^{-\lambda} \quad \blacksquare$$

En los últimos años, la distribución Poisson ha adquirido gran importancia , ya que se emplea para el estudio de multiplicidad de fenómenos aleatorios, los cuales pertenecen a muy diversos ramos de la ciencia y del conocimiento humano, que van desde la Física y la Química, hasta la Administración y las

Finanzas y por supuesto, los Seguros.

El tipo de situaciones donde se aplica esta distribución es en la observación de n ocurrencias independientes, de un determinado experimento y donde se puede establecer:

i) El número de éxitos o el número de ensayos en donde un evento especial ha ocurrido.

ii) El número de fracasos o el número de esayos en donde ese evento en especial no ha ocurrido.

Existen eventos aleatorios cuya ocurrencia no es concecuencia directa de ensayos predeterminados de un experimento, sino que ocurren en puntos aleatorios del espacio o del tiempo y es posible determinar el número de ocurrencias de dichos eventos, que obedece a una distribución Poisson si: $\exists\ \mu > 0 \ni \forall\ \tau > 0$ y $\tau = 0, t$ y se cumple que:

i) La probabilidad de que ocurra exactamente un evento en el intervalo es igual a $\mu\tau$.

ii) La probabilidad de que ocurran exactamente cero eventos en ese intervalo es $1 - \mu\tau$.

iii) La probabilidad de que dos o más eventos ocurran en el intervalo es igual a $r(\tau)$ $r(\tau)/\tau \to 0$ cuando $\tau \to 0$.

El parámetro μ se interpreta como la razón media de ocurren cia de los eventos por unidad de tiempo.

Supondremos además que si se divide el intervalo de tiempo τ en n subintervalos y si para $i=\widehat{1,n}$, Ai denota la ocurrencia de por lo menos un evento en el i-ésimo subintervalo; entonces, para cualquier n, Ai,...,An, son eventos independientes, es decir que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Ai)$$

lo que significa que la ocurrencia de uno de éstos eventos no depende ni está condicionada a la ocurrencia de otro u otros.

Se demostrará que, bajo estas suposiciones, el número de ocurrencias del evento, en nuestro caso el número de reclamaciones, en un intervalo de tiempo de longitud t, obedece a la distribución Poisson con parámetro μt; es decir, la probabilidad de que ocurran exactamente k reclamaciones en un período de tiempo de longitud t, es igual a:

$$\frac{(\mu t)^K}{K!} e^{-\mu t}$$

Para ello dividiremos el intervalo de tiempo t en n subintervalos de longitud $\tau=t/n$, por lo que, la probabilidad de que ocurran k reclamaciones en el tiempo t, es aproximadamente i -

gual a la probabilidad de que ocurra una reclamación en exactamente k de los n subintervalos, en que dividimos el intervalo. Por las suposiciones hechas anteriormente, ésto es igual a la probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos, repetidos e independientes, en donde la probabilidad de éxito en cada ensayo es: p=$t\mu$= t/n, es decir:

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\mu t}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n-k}$$

desarrollando ésta expresión:

$$\frac{(\mu t)^{k}}{n^{k}}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n}/\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{k}$$

$$\frac{(\mu t)^{k}}{k!}\frac{1}{n^{k}}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n}/\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{k}$$

$$\frac{(\mu t)^{k}}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n}/\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{k}$$

$$\frac{(\mu t)^{k}}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n}/\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{k}$$

si el número de subintervalos aumenta a infinito, es decir, si $n\to\infty$, tendremos:

$$\frac{(\mu t)^{k}}{k!}e^{-\mu t} \quad \blacksquare$$

2.4.2 Distribución Normal.

La distribución normal con parámetros μ y σ, donde $\mu<\infty$ y $\sigma>0$ se especifica mediante la función de densidad:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{para} \quad -\infty<x<\infty$$

su función de distribución está dada por:

$$F(x;\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dv \qquad (2.2.4.1)$$

Si una variable aleatoria X está distribuída normalmente, entonces la probabilidad de que X tome cualquier valor en un intervalo $a<X\leq b$ es:

$$P(a<X\leq b)=F(a)-F(b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dv \qquad (2.2.4.2)$$

El caso particular :

$$f(x,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

recibe el nombre de distribución normal estandarizada, la cual nos permite evaluar cualquier distribución normal con parámetros $\mu\neq 0$ y $\sigma\neq 1$ a través de la transformación:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

donde $$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du \qquad (2.2.4.3)$$

Para expresar (2.2.4.1) en términos de (2.2.4.3), hagamos

$$u=\frac{v-\mu}{\sigma}$$

entonces:

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{\sigma}$$

$$dv = \sigma du$$

Los límites de intergración sobre v de $-\infty$ a x, corresponden a los límites de integración de u de $-\infty$ a $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$, por lo que de (2.2.4.1) se tiene:

$$F(X;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-u^2/2}\,\sigma du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-u^2/2}\,du$$

obteniendo así la relación básica:

$$F(X,\mu,\sigma^2)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(z)$$

Los valores de la función $\Phi(Z)$ se encuentran ya tabulados y a partir de ellos podemos determinar el valor de $F(X;\mu,\sigma^2)$.

La distribución normal fue planteada por C.F. Gauss en relación con la teoría de los errores de medidas físicas. La distribución normal es la distribución continua más importante ya que

1. Algunas variables aleatorias resultantes de diferentes experimentos u observaciones están distribuídas normalmente.
2. Otras variables se distribuyen normalmente en forma aproximada.
3. En ocasiones una variable aleatoria no está distribuída nor-

malmente, ni siquiera en forma aproximada, pero conociendo su media y su varianza, podemos convertirla en una variable aleatoria con distribución normal.

4. La importancia principal de la distribución normal radica en el hecho de que la mayoría de las distribuciones de probabilidad se aproximan o tienden a ella; esta situación se define perfectamente a través del Teorema del Límite Central, el cual establece que: "la suma de un gran número de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con medias y varianzas finitas, que se normalizan para que tengan media cero y varianza uno, está distribuída aproximadamente como la normal"(4), es decir:
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variables aleatorias independientes que tienen la misma función de distribución y, por lo tanto, la misma media μ y varianza σ^2, sea $Yn=X_1+X_2+\ldots+X_n$, entonces la variable aleatoria $Zn=Yn-n\mu/\sigma\sqrt{n}$, es asintóticamente normal con media cero y varianza uno, es decir la función de distribución Fn(X) de Zn, satisface la relación:

$$\lim_{n\to\infty} Fn(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}\,du$$

Apoyándonos en este teorema, veremos en el capítulo siguiente que una vez determinada la media y la varianza de la utilidad total de una cartera o del monto total de las reclamacio - nes, podremos calcular la probabilidad de obtener cierta utili- dad en un período o de que el monto de las reclamaciones ascien da una cantidad determinada, es decir, podremos determinar la función F(X,t), valiéndonos del Teorema del Límite Central.

2.5 Fundamentos de la Teoría del Riesgo Individual.

"El principio fundamental de la teoría individual del riesgo es que la ganancia o pérdida que se obtiene en un período determinado en una póliza dada, se considera como la variable aleatoria básica. La utilidad total de la cartera se obtiene sumando las utilidades de cada póliza"(5).

El primer problema práctico con el cual hubo de enfrentarse la teoría del riesgo fue el de encontrar una expresión para la utilidad o pérdida de cada póliza individual y, efectuando la suma de todas estas expresiones, obtener así información para la totalidad de la cartera.

Los fundamentos o principios de la teoría individual son relativamente simples; en un grupo de personas aseguradas contra la muerte, la probabilidad de que una reclamación ocurra puede asociarse directamente con cada vida individual. El principio fundamental que rige esta teoría es el de <u>independencia</u> y significa que la probabilidad de ocurrencia de una reclamación y el monto de ésta, para un sólo miembro del grupo, no pueden ser afectadas por otro miembro del mismo. Este principio de independencia puede comprenderse mejor si consideramos el modelo de una urna que contiene bolas numeradas, es decir:

Cada vida dentro de la cartera al principio del período y cada vida que pasa a formar parte de ella durante el mismo, tiene asociada una probabilidad de muerte. Supongamos que cada una de esas probabilidades se denota por qi y se encuentra acotada por:

$$0.00001 \leq qi \leq 1.0000$$

Se prepara una urna conteniendo 100,000 bolas numeradas, cada una asociada con un número del intervalo [0.00001,1.0000]. A su vez, se tiene una lista de las vidas que forman parte de la cartera, cada una con la probabilidad de muerte que le corresponde. Por cada vida efectuaremos una extracción, una vez que hemos anotado su número, la bola es regresada a la urna. Si el número extraído para una vida determinada, es menor o igual que la probabilidad de muerte de la misma, entonces supondremos que esta persona fallece; por consecuencia, si el número soteado es mayor que la probabilidad de muerte, supondremos que esa persona sobrevive. Evidentemente, la muerte o la supervivencia de cada persona, es completamente independiente de lo que suceda con cualquier otra. La cartera en sí misma, sin embargo, debe considerarse de un período a otro, como el resultado de las reclamaciones ocurridas en el período anterior.

Dentro de la teoría individual del riesgo es importante además la asunción de que la variable aleatoria que se obtiene sumando las utilidades de cada póliza, se distribuye normalmente.

Cramer realizó diferentes investigaciones para probar la validez de este principio, deduciendo los margenes de error bajo diversas circunstancias. Los resultados obtenidos mostraron que la distribución normal da una aproximación muy cercana cuando los montos de las reclamaciones son aproximados y cuando el número de pólizas asciende a 5,000 o más.

Debido a que el uso de la distribución normal presenta estos inconveneientes, nuevas investigaciones comenzaron a ser desarrolladas, surgiendo así la teoría colectiva del riesgo, pudiéndose encontrar aproximaciones más cercanas y obteniéndose resultados más satisfactorios. Sin embargo, las investigaciones referentes a este tema han continuado, pues resulta de mucho interés bajo el punto de vista puramente teórico.

La teoría del riesgo individual se asocia directamente con con el seguro de vida y la utilidad obtenida en un período determinado, en este ramo específico.

Para poder establecer la función de distribución que habremos de utilizar en esta división de la teoría del riesgo, mencionaremos el tratamiento que iremos dando a la cartera para obtener así nuestro objetivo:

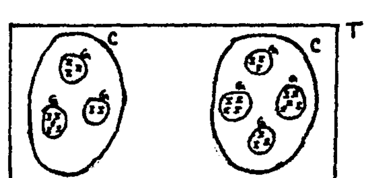
1er Paso: Analizaremos el valor esperado de la utilidad y la varianza de la misma con respecto a un solo asegurado, denotando a dicha utilidad como I.

2° Paso: Obtendremos el valor esperado y la varianza de la utilidad de un grupo, el cual estará formado por todos los asegurados de edad x y suma asegurada z y será denotada por G.

3er Paso: Haciendo variar x y permaneciendo la suma asegurada z fija, obtendremos el valor esperado y la varianza de la utilidad de la clase z, denotada por C.

4° Paso: Para finalizar, haciendo variar la suma asegurada z, obtendremos expresiones para el valor esperado y la varianza de la utilidad de toda la cartera, denotada por T.

La relación que guardan los diferentes tipos de utilidad puede expresarse mediante el siguiente diagrama de Euler-Venn:



Sea:

n_x=número de asegurados en un grupo con una misma edad x y suma asegurada z, independientes uno de otro.

z =suma asegurada de cada póliza.

qx=probabilidad de muerte en un año de una persona de edad x.

1er Paso:

Ignorando el interés y las salidas también y tomando la prima neta como el valora esperado de las reclamaciones (principio de equivalencia), cada asegurado paga como prima zq al principio del año, pudiendo sobrevivir o fallecer durante el mismo.

Si sobrevive tendremos:

$$I=zq_x \qquad \text{con probabilidad } p_x$$

si muere:

$$I=-z+zq_x$$

$$I=-z(1-q_x)$$

$$I=-zp_x \qquad \text{con probabilidad } q_x$$

El valor esperado de la utilidad con respecto a un asegurado será entonces:

$$E(I)=(zq_x)p_x+(-zp_x)q_x$$

$$E(I)=0$$

La varianza de la utilidad para un asegurado es:

$$V(I)= [zq_x - E(I)]^2 p_x + [-zp_x - E(I)]^2 q_x$$

$$V(I)= [zq_x - 0]^2 p_x + [-zp_x - 0]^2 q_x$$

$$V(I)= (zq_x)^2 p_x + (-zp_x)^2 q_x$$

$$V(I)= z^2 q_x p_x (q_x + p_x)$$

$$V(I)= z^2 q_x p_x (1)$$

$$V(I)= z^2 q_x p_x$$

Esta expresión también puede utilizarse para obtener la varianza del monto de reclamación R_i, ya que la variablea aleatoria que se asocia al valor de la reclamación es igual al valor negativo de la variable aleatoria utilidad I más una constante, que es la prima Π, entonces se tiene:

$I=\Pi-R_i$ donde Π es constante

$R_i=-I+\Pi$

$V(R_i)=V(-I+\Pi)$

$V(R_i)=V(-I)$ por (2.2.6.1)

$V(R_i)=V(I)$ por (2.2.6.2)

La relación anterior expresa que la forma en que se distribuyen las reclamaciones al rededor de su media zq_x, es la misma en que se distribuye la utilidad al rededor de su media cero.

2° Paso:

Ahora consideraremos al grupo total de asegurados n_x^z, tomando un valor fijo para z y para x, entonces el valor esperado de la utilidad para todo el grupo estará dado por:

$$E(G)=\sum_{n_x^z} E(I)$$

$$E(G)=0$$

La varianza de la utilidad total del grupo será igual a la suma de las varianzas de cada utilidad individual, ya que consideramos a los asegurados independientes uno de otro, es decir:

$$\begin{aligned} V(G) &= \sum_{n_x^z} V(I) \\ &= \sum_{n_x^z} z^2 q_x p_x \\ &= z^2 n_x^z q_x p_x \end{aligned}$$

y sea Rg el monto total de las reclamaciones en el grupo, como se vió anteriormente:

$$V(G)=V(Rg)$$

por lo que:

$$V(Rg)=z^2 n_x^z q_x p_x$$

3er Paso:

Si ahora hacemos variar x, mientras z permanece fija, para así obtener la media y varianza para la utilidad total de la clase, tendremos:

$$E(C)=\sum_{x} E(G)$$

$$E(C)=0$$

para la varianza:

$$V(C)=\sum_{x} z^2 n_x^2 p_x q_x$$

la que es igual a la varianza del monto total de las reclamaciones dentro de la clase Rc, es decir

$$V(C)=V(Rc)$$

$$=\sum_{x} z^2 n_x^2 p_x q_x$$

4° Paso:

Por último, obtendremos el valor esperado y la varianza para todas las clases z, haciendo variar la suma asegurada y obteniendo así el valor esperado y la varianza de la utilidad total de la cartera como sigue:

$$E(T)=\sum_{z} E(C)$$

$$E(T)=0 \qquad (2.5.1)$$

y

$$V(T)=\sum_{z} V(C)$$

$$V(T)=\sum_{z}\sum_{x} z^2 n_x^2 p_x q_x \qquad (2.5.2)$$

y $$V(T)=V(Rt)$$

donde Rt=monto total de las reclamaciones.

Por lo que respecta al valor esperado del monto de las reclamaciones que como vimos, para un sólo individuo es zq_x podemos seguir el mismo procedimiento y obtener el valor esperado de las reclamaciones para toda la cartera, es decir:

1er Paso:

$$E(Ri)=zq_x$$

2° Paso:

$$E(Rg)=\sum_{n_x^z} zq_x$$

$$E(Rg)=z n_x^z q_x$$

3er Paso:

$$E(Rc)=\sum_x z\, n_x^z q_x$$

$$E(Rc)=z \sum_x n_x^z q_x$$

$$E(Rc)=z N_z q_z$$

4° Paso:

$$E(Rt)=\sum_z z N_z q_z \qquad (2.5.3)$$

con varianza

$$V(Rt)=\sum_z \sum_x z^2\, n_x^z\, p_x q_x \qquad (2.5.4)$$

Para poder utilizar las expresiones (2.5.1) a (2.5.4), debemos hacer ciertas consideraciones: Así, el principio de independencia resulta básico y utilizando el Teorema del Limite Central, podemos justificar el principio de la normalidad de la distribución de la utilidad y el monto de las reclamaciones de toda la cartera, pudiéndose determinar, la probabilidad de ocurrencia de diversos montos de utilidad o de reclamación.

2.6 Fundamentos de la Teoría Colectiva del Riesgo.

El principio fundamental de la teoría colectiva del riesgo es la consideración de la cartera como una entidad y las conclusiones obtenidas para los problemas bajo estudio, están basados en ciertas características de la colectividad. Este concepto fue descrito por primera vez por Filip Lundberg en 1903 y desde entonces ha sido desarrollado por otros, entre los cuales destacan: Cramer, Esscher, Ammeter, de Finetti y Pentikäinen.

En los modelos utilizados en la teoría colectiva, la colectividad en si misma es una entidad, con características variables o fijas y cualquier variación en ellas no será el resultado de reclamaciones pasadas.

El principio de independecia utilizado aqui, difiere del empleado en la teoría individual y puede definirse como: "las reclamaciones no tienen efectos posteriores"(6), es decir, no importa cual sea el número se reclamaciones ocurridas, ni el monto de las mismas, ni los principios que rigen el número esperado de reclamaciones futuras, ni la distribución de probabilidad de los montos, se ven afectados.

Para el desarrollo de esta teoría sólo se consideran dos características de la cartera:

1. La distribución de probabilidad del número de reclamaciones en un tiempo determinado.
2. La distribución de probabilidad P(Z) del monto del pago aplicable a cualquier reclamación.

derivándose de ambas, la distribución de probabilidad del monto total de las recalmaciones.

El principio particular de independencia es esencial para casi todo el trabajo desarrollado en eta área de la teoría del riesgo. La diferencia entre el principio de independencia individual y colectivo puede comprenderse si se compara el modelo de la urna, utilizado anteriormente, con el siguiente modelo, considerando ahora dos urnas:

Supongamos que la primera urna contiene N bolas numeradas cada una con un entero no negativo; existen n bolas marcadas con el entero k. La probabilidad de extraer una bola con el entero k, será la misma que la probabilidad de que ocurran exactamente k reclamaciones en la cartera, en un período dado.

La segunda urna contiene un gran número de bolas marcadas con cantidades o montos y la probabilidad de extraer un bola marcada con un monto específico, es la misma probabilidad de que si ocurre una reclamación, ésta sea por esa cantidad.

El comportamiento de la cartera para un período de tiempo da do, puede simularse extrayendo una bola de la primera urna, anotando su número antes de regresarla y entonces efectuar ese número de extracciones, con reemplazo, de la segunda urna. La extacción de la primera urna nos da el número de reclamaciones ocurridas durante el período. La extracción con reemplazo de la segunda urna, nos da en su totalidad, el monto de esas recalmaciones para ese período.

Puede advertirse en este modelo, que las vidas individuales que forman parte de la cartera, no están directamente relacionadas con los resultados obtenidos. El número de veces que un monto de reclamaciones puede obtenerse de la segunda urna , no se encuentra limitado por el número de personas en la colectividad que están aseguradas por esa cantidad. También resulta obvio que, un conjunto de extracciones de ambas urnas no tiene efecto en ningún conjunto futuro de extracciones.

Por las consideraciones hechas en el punto anterior y en el presente, pueden obtenerse tres conclusiones:

1. Si el grupo bajo consideración es cerrado, los principios de la teoría individual nos dan una mejor representación de los hechos. Recordaremos que un grupo cerrado es aquel en el cual la tasa de crecimiento es decreciente es decir, si

algún miembro del grupo sale de éste por cualquier causa, no se verá reemplazado por la entrada de otro miembro.

2. Para el caso de un grupo abierto, caracterizado por una exposición constante al riesgo, los principios bajo la perspectiva colectiva, representan mejor los hechos. Un grupo abierto es aquel en el cual la salida de algún miembro, por cualquier causa, se ve reemplazada por el ingreso de otro miembro al grupo.

3. Ninguna situación real corresponde exactamente a cualquiera de ambos modelos.

A diferencia también de la teoría individual del riesgo, no existe un único procedimiento para encontrar la función F(X,t), que representa la probabilidad de que en un intervalo de tiempo de longitud t, el monto de las reclamaciones X(t), sea menor o igual que x y se mencionan en él tercer capítulo tres métodos:

1. Aproximación de Esscher
2. Método de Convoluciones
3. Método Normal Power.

así como el desarrollo de los mismos, el programa de cómputo de cada uno y una aplicación de éstos últimos con datos reales.

2.7 Fundamentos de la Teoría de la Ruina.

La ruina ocurre, si en cualquier tiempo t, la reserva de riesgo U(t), toma un valor negativo. El objetivo fundamental de la teoría de la ruina es la búsqueda de medios para poder estimar la probabilidad de que surja la ruina.

Utilizando el principio de independencia de la teoría colectiva que establece que las reclamaciones no tienen efectos posteriores, es decir, que los ingresos no se ven afectados por las reclamaciones, entonces la reserva de riesgo estará dada como se vió en el punto 2.3, por :

$$U(t)=U_0+K(t)+\lambda\alpha-X(t)$$

donde:

U_0=reserva de riesgo inicial en t=0

K(t)=prima neta de riesgo=valor esperado de las reclamaciones

$\lambda\alpha$=margen de seguridad=cantidad adicional a las primas netas como un margen para fluctuacionos adversas

X(t)=monto total de las reclamaciones.

Para hacer más claros estos conceptos a continuación se presenta un ejemplo gráfico:

Ejemplo 7.

Sea:

$U_0=100$

$K(t)=150$ por unidad de tiempo

$\lambda\alpha=0.1K(t)$

y las siguientes reclamaciones que ocurren en los siguientes tiempos:

t	0.0	0.5	1.4	2.0	2.7	3.8	
monto	-	40	120	260	80	250	
K(t)	0	75	210	300	405	570	(150) (t)
$\lambda\alpha$	0	7.5	21	30	40.5	57	
U(t)	100	142.5	171	10	45.5	-23	

Los valores graficados de U(t) se presentan en la figura (2.7.1).

Para poder advertir el fenómeno de la ruina en su conjunto, resulta también útil graficar la utilidad de la compañía dada por:

$$\text{utilidad}=K(t)-X(t) \qquad (2.7.2)$$

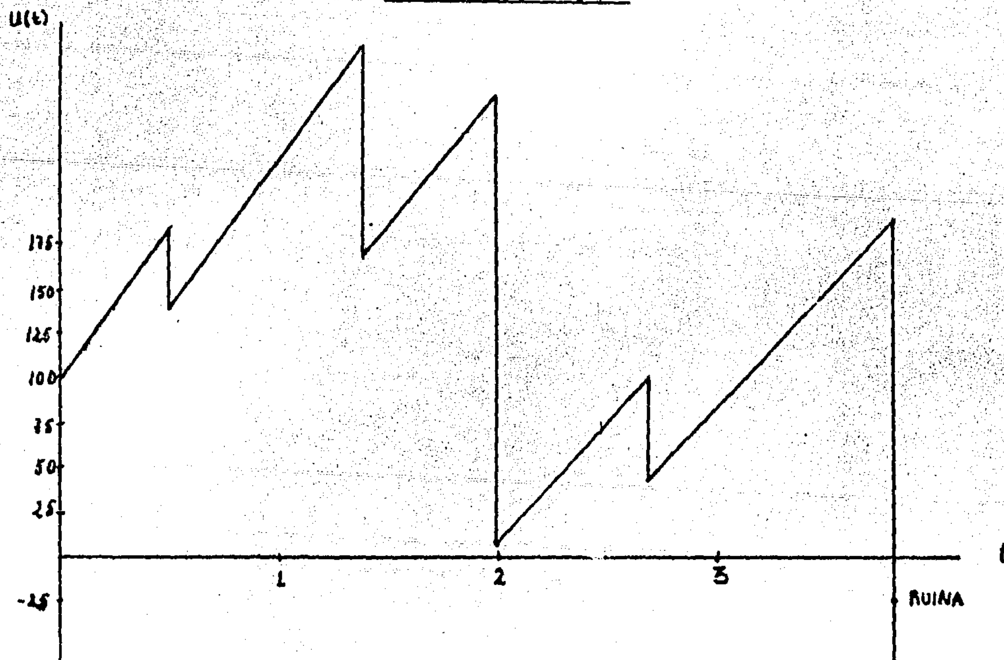
y observar cuando esta función satisface la igualdad:

Gráfica #1.

Figura(2.7.1)

OCURRENCIA DE LA RÙINA

(Reserva de Risgo)



$$\text{utilidad}=-U_0-\lambda\alpha \qquad (2.7.3)$$

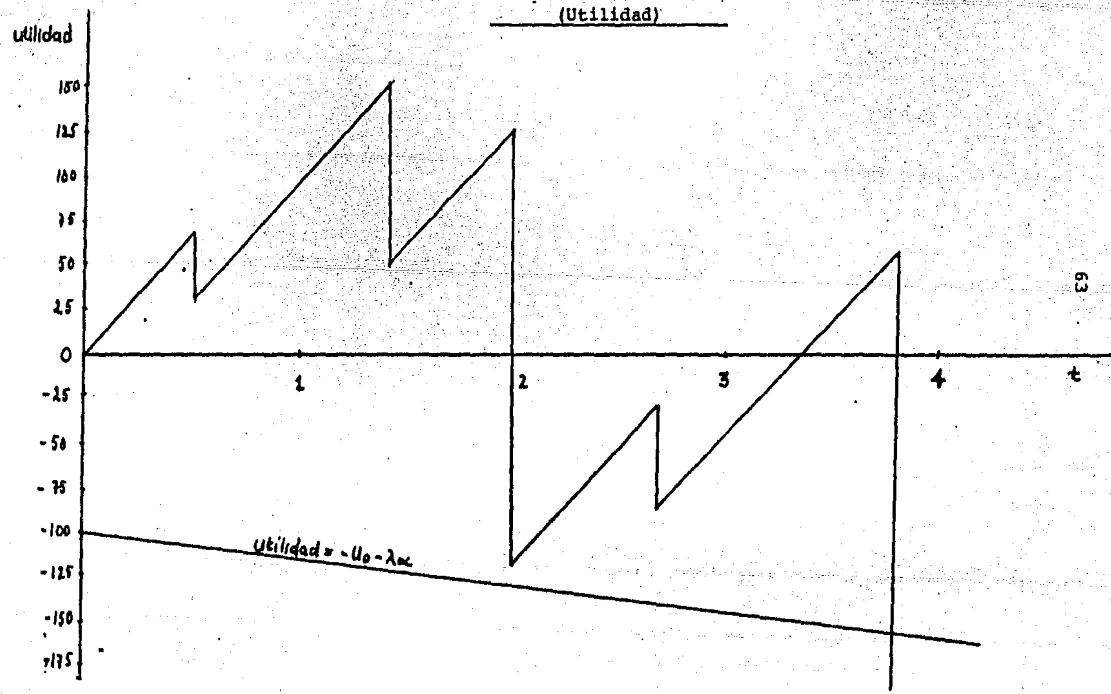
Para el caso de nuestro ejemplo, los valores tabulados de (2.7.2) y (2.7.3) son los siguientes:

t	0.0	0.5	1.4	2.0	2.7	3.8	
utilidad	0	35	50	-120	-95	-180	(2.7.2)
utilidad	-100	-107.5	-121	-130	-140	-157	(2.7.3)

La gráfica de estos valores se presenta en la figura (2.7.4).

Gráfica #2. figura(2.7.4)

OCURRENCIA DE LA RUINA
(Utilidad)



En la figura (2.7.1) se puede apreciar que la reserva de riesgo U(t) no resulta suficiente para hacerle frente a las reclamaciones ocurridas durante el tiempo t, ya que en el punto t=3.8 ocurre la RUINA.

La gráfica (2.7.4) de la función utilidad nos sirve también, para apreciar el comportamiento de la misma y durante el tiempo de análisis y como podemos observar, la RUINA ocurre en que las ecuaciones (2.7.2) y (2.7.3) se intersectan, es decir, en t=3.8.

C A P I T U L O III.

METODOS APLICABLES A LA TEORIA DEL RIESGO, SU JUSTIFICACION, SISTEMATIZACION Y UNA APLICACION.

Objetivo fundamental de este capítulo es presentar las diversas técnicas que utiliza la teoría del riesgo, para poder evaluar las funciones obtenidas.

3.1 Aproximación de Rosenthal.

Comenzaremos con la teoría individual del riesgo y recordaremos la expresión que obtuvimos para la varianza de la utilidad total de la cartera, que es la siguiente:

$$V(T)=\sum_{z}\sum_{x} z^2 n_x^z p_x q_x$$

Rosenthal desarrolló una aproximación de la fórmula anterior la cual se denota σ_R^2 y está dada por:

$$\sigma_R^2 \approx V(T) \approx Npq \sum_z z^2 \frac{N_z q_z}{Nq}$$

donde N=número total de vidas en la cartera.

q=valor promedio de q_x, dentro de la cartera.

q_z=valor promedio de q_x, dentro de la clase z.

N_z=número total de vidas dentro de la calse z.

y

$$N=\sum_z\sum_x n_x^z$$

$$N_z=\sum_x n_x^z$$

$$N=\sum_z N_z$$

$$q=\frac{\sum_z\sum_x n_x^z q_x}{N}=\sum_z\frac{N_z q_z}{N}$$

$$q_z = \sum_x \frac{n_x^2 q_x}{N_z}$$

No obstante, el valor de σ_R^2 dado por la aproximación de Rosenthal, resulta ser mayor que si se calcula el valor exacto de la expresión obtenida para determinar la varianza de la utilidad total, denotada por σ_E^2, es decir, $\sigma_E^2 < \sigma_R^2$. A continuación se demostrará ésto:

Considerando cada vida asegurada en particular, sabemos que:

$$p_x = 1 - q_x$$
$$n_x^2 p_x = n_x^2 - n_x^2 q_x$$
$$\sum_x n_x^2 p_x = \sum_x (n_x^2 - n_x^2 q_x)$$
$$\sum_z \sum_x n_x^2 p_x = \sum_z \sum_x (n_x^2 - n_x^2 q_x)$$
$$= \sum_z \sum_x n_x^2 - \sum_z \sum_x n_x^2 q_x$$
$$= N - \sum_z N_z q_z$$
$$= N - Nq$$
$$= N(1-q)$$

dividiendo ambos lados de la igualdad entre N, se tiene:

$$\sum_z \sum_x \frac{n_x^2 p_x}{N} = 1 - q$$
$$= p$$

Por otra parte:

$$q_x = q + \varepsilon_x \qquad \text{donde } \varepsilon_x \in Z$$
$$p_x = p + \delta_x \qquad \text{donde } \delta_x \in Z$$

$$(1-q_x) = (1-q) + \delta_x$$
$$1 - q - \varepsilon_x = 1 - q + \delta_x$$
$$-\varepsilon_x = \delta_x$$

si expresamos el producto $p_x q_x$ en base a las relaciones obtenidas, tendremos:

$$\begin{aligned} p_x q_x &= (p+\delta_x)(q+\varepsilon_x) \\ &= (p-\varepsilon_x)(q+\varepsilon_x) \\ &= pq + p\varepsilon_x - q\varepsilon_x - \varepsilon_x^2 \end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros por n_x^z y sumando sobre x y z:

$$\begin{aligned} \sum_z \sum_x n_x^z p_x q_x &= \sum_z \sum_x n_x^z \left[pq + p\varepsilon_x - q\varepsilon_x - \varepsilon_x^2 \right] \\ &= \sum_z \sum_x n_x^z pq + \sum_z \sum_x n_x^z \varepsilon_x (p-q) - \sum_z \sum_x n_x^z \varepsilon_x^2 \\ &= pq \sum \sum n_x^z + (p-q) \sum_z \sum_x n_x^z \varepsilon_x - \sum_z \sum_x n_x^z \varepsilon_x^2 \\ &= Npq + (p-q) \sum_z \sum_x n_x^z \varepsilon_x - \sum_z \sum_x n_x^z \varepsilon_x^2 \end{aligned}$$

por la definición de ε_x tenemos que:

$$\varepsilon_x = q_x - q$$

multiplicando por n_x^2 y aplicando sumatorias:

$$\sum\sum n_x^2 \varepsilon_x = \sum_z\sum_x n_x^2 q_x - q\sum_z\sum_x n_x^2$$
$$= Nq - Nq$$
$$= 0$$

por lo que:

$$\sum_z\sum_x n_x^2 p_x q_x = Npq - \sum_z\sum_x n_x^2 \varepsilon_x^2$$

entonces como $\sum_z\sum_x n_x^2 \varepsilon_x^2 \geq 0$

$$Npq \geq \sum_z\sum_x n_x^2 p_x q_x$$

siendo igual solamente si todas las ε_x son cero, es decir, si todas las q_x son iguales.

Utilizando este mismo argumento de la cartera en general, para una sola clase en específico, podemos expresar la desigualdad anterior como sigue:

$$N_z p_z q_z \geq \sum_x n_x^2 p_x q_x$$

multiplicando por z y aplicando sumatoria en z se tiene:

$$\sum_z z^2 N_z p_z q_z \geq \sum_z z^2 \sum_x N_x^2 p_x q_x \qquad (3.1.1)$$

como todas las cantidades de z están correlacionadas positiva -

mente, es decir, si q_z crece z crece, entonces estarán correlacionados negativamente con p_z, cuando p_z decrece z decrece.

Podemas hacer $p_z = p + \delta_z$ donde $\delta_z \in \mathcal{U}$

$$\sum_z z^2 N_z q_z p_z = \sum_z z^2 N_z (p + \delta_z) q_z$$
$$= p \sum_z z^2 N_z q_z + \sum_z z^2 q_z \delta_z$$

como los valores de z están correlacionados negativamente con los valores de p_z, entonces los valores de z estarán asociados con valores negativos de δ_z por lo que:

$$\sum_z z^2 N_z \delta_z q_z < 0$$

$$\sum_z z^2 N_z p_z q_z < p \sum_z z^2 N_z q_z \qquad (3.1.2)$$

por (3.1.1) y (3.1.2), tenemos que:

$$\sum_z \sum_x z^2 N_x^z p_x q_x \leq \sum_z z^2 N_z p_z q_z < p \sum_z z^2 N_z q_z$$

por transitividad:

$$\sum_z \sum_x z^2 n_x^z p_x q_x < p \sum_z z^2 N_z q_z$$

multiplicando el miembro derecho por $\frac{Nq_\cdot}{Nq_\cdot}$ se tiene:

$$\sum_z \sum_x z^2 n_x^z p_x q_x < Npq \sum_z z^2 \frac{N_z q_z}{Nq}$$

$$\sigma_e^2 < \sigma_R^2 \quad \blacksquare$$

Por lo anterior, podemos establecer que la varianza de la utilidad total puede obtenerse aplicando la aproximación de Rosenthal, sabiendo que el valor obtenido será mayor que el valor real.

Una vez determinado el valor de V(T), podemos determinar a su vez el valor de F(X,t), si utilizamos la distribución normal como se vió en el punto 2.4.2 del capítulo anterior, es decir, conociendo la media y la varianza de la distribución, podemos utilizar la normal estandarizada, para poder determinar los valores de F(X,t).

3.2 Aproximación de Esscher.

Dentro de las distintas técnicas utilizadas para evaluar la función de distribución del monto total de las reclamaciones en la teoría colectiva del riesgo, se encuentra la aproximación de Esscher

Dicha aproximación es una transformación de la función original $F(X,t)$ denotada por $\bar{F}(X,\bar{t})$, tiene la misma forma que la primera pero, su media coincide con el punto en el cual se desea evaluar la función original.

A continuación señalaremos los símbolos equivalentes utilizados en la función original $F(X,t)$ y su transformada $\bar{F}(X,\bar{t})$:

$F(X,t)$	$X(t)$	$f(x,t)$	$P(Z)$	$p(z)$	p_1	m
$\bar{F}(X,\bar{t})$	$X(\bar{t})$	$\bar{f}(x,\bar{t})$	$\bar{P}(Z)$	$\bar{p}(z)$	$\bar{p}_1/\bar{p}_0$	$\bar{m}$

donde: m=valor esperado del número de reclamaciones.

p_n=n-ésimo momento no central de $P(Z)$.

$$f(x,t)=C(x)\bar{f}(x,\bar{t}) \qquad (3.2.1)$$

$$\bar{p}(z)=e^{hz}\, p(z)/\bar{p}_0 \qquad (3.2.2)$$

En la expresión anterior h se determina de tal forma que la media de $\bar{F}(X,\bar{t})$ se encontrará en el punto a, que es el punto en el cual se evaluará $F(X,t)$.

$$C(x)=e^{-hx-m+m\bar{p}_0}=e^{-hx-m(1-\bar{p}_0)} \qquad (3.2.3)$$

$$\bar{p}_n=\sum_{i=0}^{\infty} z_i^n\,[e^{hz_i}\,p(z_i)] \qquad (3.2.4)$$

el n-ésimo momento no central de $\bar{P}(Z)$ es $\bar{p}_n/\bar{p}_0$. En particular el primer momento no central o media de $\bar{P}(Z)$ es $\bar{p}_1/\bar{p}_0$ y por analogía con $F(X,t)$ cuya media es mp_1, la media de $\bar{F}(X,\bar{t})$ es $\bar{m}\bar{p}_1/\bar{p}_0$ donde:

$$\bar{m}=m\bar{p}_0$$

sustituyendo en la expresión de la media de $\bar{F}(X,\bar{t})$ se tiene:

$$m\bar{p}_0\,\bar{p}_1/\bar{p}_0=m\bar{p}_1$$

si evaluamos el punto a de la función original en este punto:

$$a=m\bar{p}_1 \qquad (3.2.5)$$

$$\bar{p}_1=a/m$$

sustituyendo este valor en (3.2.4):

$$\frac{a}{m}=\sum_{i=0}^{\infty} z_i\,e^{hz_i}\,p(z_i)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i e^{hz_i} p(z_i)-\frac{a}{m}=0 \qquad (3.2.6)$$

pudiéndose establecer la función anterior como una función de h denotada por H(h). El valor de h se determina a través del método de Newton de aproximaciones sucesivas, cuya fórmula es (7):

$$a' = a - f(a)/f'(a)$$

$$a'' = a' - f(a')/f'(a')$$

.

.

.

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)/f'(a_n)$$

aplicando la fórmula general en el caso de H(h), evaluada en el punto h_{n+1} se tiene:

$$h_{n+1} = h_n - H(h_n)/H'(h_n)$$

sustituyendo el valor de $H(h_n)$ de (3.2.6) se tiene:

$$h_{n+1} = h_n - \frac{\sum_{i=0}^{\infty} z_i e^{h_n z_i} p(z_i) - a/m}{\sum_{i=0}^{\infty} z_i^2 e^{h_n z_i} p(z_i)}$$

Para poder expresar la aproximación a la función original de tal forma que pudiera ser evaluada, Esscher utilizó a su vez, la serie de Edgeworth, la cual utiliza la normal estandarizada para obtener el valor de la función en cualquier punto x=a, la fórmula de Esscher así expresada será la siguiente:

$$F(X,t) = C(x)\left[A_0^{(0)}(w) + \frac{B}{3!}A_0^{(3)}(w)\right] \quad \text{para } x < mp_1$$

$$1 - F(X,t) = C(x)\left[A_0^{(0)}(w) - \frac{B}{3!}A_0^{(3)}(w)\right] \quad \text{para } x > mp_1$$

donde:

$w = | h\sqrt{m\bar{p}_2} |$

$B = \bar{p}_3 / \bar{p}_2 \sqrt{m\bar{p}_2}$

$A(w) = 1 - \Phi(w) / \phi(w)$

$A_o^{(0)}(w) = A(w) / \sqrt{2\pi}$

$A_o^{(1)}(w) = [w^3 A(w) - w^2 + 1] / \sqrt{2\pi}$

$\Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} e^{-z^2/2} dz$ función de distribución de la normal estandarizada.

$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}$ función de densidad de la normal estandarizada.

3.3 Método Normal Power.

Uno de los problemas al que ha tenido que enfrentarse la teoría del riesgo es el desarrollo de aproximaciones apropiadas para evaluar la función de distribución del monto de las reclamaciones F(X,t).

Como vímos en el punto 3.1, la teoría individual se apoya en la aplicación del teorema del límite central, por lo que se asume que F(X,t) se distribuye normalmente.

Dentro de la teoría colectiva se buscó desarrollar expresiones más exactas, ya que como se expuso con anterioridad, la asunción de la distribución normal no en todos los casos resulta apropiada , así se encontro que la aproximación:

$$F(X,t) \approx \Phi\left(\frac{X-mp_1}{\sigma}\right)$$

donde:

mp1= media de F(X,t)

m= no. esperado de reclamaciones

es en realidad solo un caso particular de la serie Edgeworth:

$$F(X,t) = \Phi\left(\frac{X-mp_1}{\sigma}\right) - \frac{p_3}{6mp_1^3}\,\Phi^{(3)}\left(\frac{X-mp_1}{\sigma}\right) + \frac{p_4}{24mp_1^4}\,\Phi^{(4)}\left(\frac{X-mp_1}{\sigma}\right)$$

$$+\frac{p_3^2}{72mp_1^6}\,\Phi^{(6)}\left(\frac{X-mp_1}{\sigma}\right) + O(n^{-3/2})$$

donde $\Phi^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de Φ y p_k el k-ésimo momento de P(Z). La aproximación normal no es sino la forma dada por la serie Edgeworth, en la cual solo se utiliza el primen término.

La serie Edgeworth no es convergente, sin embargo tomando en cuenta un número adecuado de términos, en general puede esperarse que el resultado obtenido será aceptable para valores cercanos a la media y para valores a una distancia de dos veces la desviación estandar $(x+2\sigma)$, pero para puntos fuera de este intervalo los resultados se deterioran rapidamente. Para la mayoría de los casos prácticos el interés principal de análisis surge en puntos a una distancia de la media de dos a tres veces la desviación estandar, por lo que resultó necesaria una modificación a ésta serie. La mejor, en el sentido de que da resultados más aproximados, es la llamada aproximación de Esscher, vista en el punto anterior. Existe, sin embargo, un método que lleva a cálculos más simples y que produce un error un poco más grande que la aproximación de Esscher y es el llamada método Normal Power, que se apoya en la apoximación normal y opera en base a una variable aleatoria U normalizada, con media cero y desviación estandar uno. La idea es corregir U en términos de la serie:

$$\mathcal{E} = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \ldots \qquad (3.3.1)$$

en donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se determinan por medio de la serie Edgeworth, es decir:

Se considera que la aproximación normal se establece en base a la ecuación:

$$1-\varepsilon = \Phi(y) \qquad (3.3.2)$$

que nos da la probabilidad de que $U \leq y$, la nueva variable e obedecerá a la ecuación:

$$1-\varepsilon = \Phi(y+\Delta y) - \frac{g_1}{6}\Phi^{(3)}(y+\Delta y) + \frac{g_2}{24}\Phi^{(4)}(y+\Delta y) + \frac{g_1^2}{72}\Phi^{(6)}(y+\Delta y) + O(n^{-3/2})$$

$$(3.3.3)$$

que nos da probabilidad $e \leq y+\Delta y$, donde:

$$g1 = \frac{P_3}{P_1^3\sqrt{m}} \qquad\qquad P_k = \sum_{k=0}^{n} z_i^k\, p(z_i)$$

$$g2 = \frac{P_4}{P_1^4\sqrt{m}}$$

Los coeficientes en (3.3.1) se determinan sustituyendo en - (3.3.3):

$$y+\Delta y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots \qquad (3.3.4)$$

e igualando (3.3.2) y (3.3.3), encontrando Δy a partir de:

$$f(\Delta y) = \Phi(y) - \left[\Phi(y+\Delta y) - \frac{g_1}{6}\Phi^{(3)}(y+\Delta y) + \frac{g_2}{24}\Phi^{(4)}(y+\Delta y) + \frac{g_1^2}{72}\Phi^{(6)}(y+\Delta y)\right] = 0$$

lo cual puede resolverse si utilizamos el método de Newton, de acuerdo a la expresion:

$$a = a' - \frac{f(a')}{f'(a')} - \frac{1}{2}\frac{f''(a')}{f'(a')}\left[\frac{f(a')}{f'(a')}\right]^2$$

que nos da la solución a la ecuación f(a)=0, donde a' es una solución aporximada. Sea a=Δy y a'=0, por lo que:

$$\Delta y = \frac{\frac{g_1}{6}(y^2-1) + \frac{g_2}{24}(y^3-3y) + \frac{g_1^2}{72}(y^5-10y^3+15y)}{1+\frac{g_1}{6}(y^3-3y) + O(n^{-1})}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{y+O(n^{-1/2})}{1+O(n^{-1/2})}\left[\frac{\frac{g_1}{6}(y^2-1)+O(n^{-1})}{1+O(n^{-1/2})}\right]^2 + O(n^{-3/2})$$

$$\Delta y = \frac{g_1}{6}(y^2-1) + \frac{g_2}{24}(y^3-3y) - \frac{g_1^2}{36}(2y^3-5y)$$

por lo que:

$$\frac{X - mp_1}{\sigma} = y + \Delta y = y + \frac{g_1}{6}(y^2-1) + \frac{g_2}{24}(y^3-3y) - \frac{g_1^2}{36}(2y^3-5y) \qquad (3.3.5)$$

Esta expresión no resulta más facil de manejar numericamente - que la aproximación normal, sin embargo si (3.3.5) se utiliza de la forma:

$$\frac{X - mp_1}{\sigma} = y + \frac{g_1}{6}(y^2-1) \qquad (3.3.6)$$

y 1-F(X,t)=$\mathcal{E}$ es dado, el punto y puede encontrarse por medio de la función normal estandarizada, utilizando la ecuación 1-$\mathcal{E}$ =Φ(y) y entonces X se determina de la ecuación (3.3.6), si por el contrario X es dado, entonces y se obtiene resolviendo (3.3.6):

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{g_1}{6}\right)\left(-\frac{g_1}{6} - \frac{x - mp_1}{\sigma}\right)}}{2\left(\frac{g_1}{6}\right)}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3} g_1 \left(-\frac{g_1}{6} - \frac{x - mp_1}{\sigma}\right)}}{\frac{g_1}{3}}$$

$$y = \frac{-1}{\frac{g_1}{3}} + \frac{\sqrt{1 + \frac{g_1^2}{9} + \frac{2}{3} g_1 \left(\frac{x - mp_1}{\sigma}\right)}}{\frac{g_1}{3}}$$

$$y = -\frac{3}{g_1} + \sqrt{\frac{9}{g_1^2}\left(1 + \frac{g_1^2}{9} + \frac{2 g_1 (x - mp_1)}{3\sigma}\right)}$$

$$y = -\frac{3}{g_1} + \sqrt{\frac{9}{g_1^2} + 1 + \frac{6(x - mp_1)}{g_1 \sigma}}$$

$$\Phi\left[-\frac{3}{g_1} + \sqrt{\frac{9}{g_1^2} + 1 + \frac{6(x - mp_1)}{g_1 \sigma}}\right]$$

Este método será conocido como el método normal power, siendo esta fórmula útil solamente cuando la cantidad bajo la raiz es positiva.

3.4 Método de Convoluciones.

El método de convoluciones resulta ser la técnica más utilizada para evaluar la función de distribución del monto total de las reclamaciones, $F(X,t)$. Este método se apoya en tres condiciones muy importantes que cumple el proceso de reclamaciones:

1. Independencia: Las reclamaciones que ocurren en dos intervalos de tiempo diferentes, son independientes.
2. Estacionaridad: El número de reclamaciones en un intervalo de tiempo $t=(t_1,t_2)$, depende unicamente de la longitud del intervalo $t=t_2-t_1$ y no del valor inicial t_1, es decir, no depende del punto donde se inicia el intervalo.
3. Exclusión de eventos múltiples: La probabilidad de que más de una reclamación ocurra en un mismo instante y la probabilidad de que un número infinito de reclamaciones ocurran en un intervalo de tiempo finito, son ambas cero.

Como se vió en el punto 2.4.1 del capítulo anterior, la variable aleatoria $Y(t)$, número de reclamaciones en un intervalo de tiempo t, obedece a la distribución Poisson con parámetro μt la cual tiene la siguiente función de densidad:

$$g(y,t) = \frac{(\mu t)^y}{y!} e^{-\mu t}$$

si $\mu t=m$, entonces:

$$g(y,t)=\frac{m^y}{y!}e^{-m}$$

donde:

$g(y,t)$=probabilidad de que ocurran y reclamaciones en un intervalo de tiempo t.

m= número esperado de reclamaciones en el tiempo t.

Para continuar con el desarrollo de la función $F(X,t)$, debemos considerar además la función de distribución del monto de las reclamaciones dado que una reclamación ha ocurrido, $P(Z)$. Por consiguiente, si encontramos el valor de m, obteniendo de esta forma el parámetro Poisson y si determinamos el valor de $P(Z)$, $F(X,t)$ quedará completamente definida.

Sea P la función de distribución acumulativa y sea X la variable aleatoria que representa el monto de las reclamaciones, denotando además el número de reclamaciones ocurridas por medio de un supraíndice, es decir:

$P^{o*}(X)$= función de distribución acumulativa del monto de las reclamaciones, dado que no ocurre reclamación alguna, donde:

$$P^{o*}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

$P^{1*}(X)$= función de distribución acumulativa del monto de las reclamaciones dado que ocurre una reclamación, donde:

$$P^{1*}(x)= \begin{cases} P(X) & si \ x>0 \\ 0 & si \ x\leq 0 \end{cases}$$

$P^{2*}(X)$= función de distribución acumulativa del monto de las reclamaciones dado que ocurren dos reclamaciones.

.

.

.

$P^{y*}(X)$= función de distribución acumulativa del monto de las reclamaciones dado que ocurren y reclamaciones, conocida como la y-ésima convolución de P(Z).

Como $P^{1*}(X)$ es equivalente a P(Z) y por lo tanto es conocida cualesquiera de las demás funciones de distribución acumulativa puede determinarse si se desarrolla una relación entre funciones sucesivas, es decir:

1° Denotemos el valor de una reclamación como v, en el caso de que se tengan dos reclamaciones, la probabilidad de que se de una reclamación será $p(v)$.

2° Si una reclamación tiene el valor v, la probabilidad de que la suma de las dos reclamaciones sea menor o igual que x, es la misma que la probabilidad de que la otra reclamación sea menor o igual que x-v, siendo ésta $P(X-v)=p^{1}*(X-v)$.

3° La probabilidad compuesta de que ocurran dos reclamaciones es: $p^{1}*(X-v)\,p(v)$.

4° Para cualquier valor dado de x, v puede tomar valores de cero a x, entonces:

$$p^{2}*(X)=\sum_{0\le v\le x} p^{1}*(X-v)\,p(v)$$

5° Siguiendo un razonamiento similar en el caso de que ocurran exactamente tres reclamaciones, denotando el valor de la ocurrencia de una por v y de la ocurrencia de las dos restantes por x-v, tendremos:

$$p^{3}*(X)=\sum_{0\le v\le x} p^{2}*(X-v)\,p(v)$$

y así sucesivamente:

$$p^{4}*(X)=\sum_{0\le v\le x} p^{3}*(X-v)\,p(v)$$

$$\vdots$$

$$p^{n}*(X)=\sum_{0\le v\le x} p^{n-1}*(X-v)\,p(v)$$

De esta forma, F(X,t) puede expresarse en términos de la dis tribución de Poisson con parámetro conocido y las convoluciones anteriores como sigue:

$$F(X,t)=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-m}m^{y}}{y!}P^{y*}(X)$$

lo cual representa que la función de distribución del monto de las reclamaciones es igual a la suma de la probabilidad de que ocurran y reclamaciones, por la probabilidad de que dado que ocurren esas y reclamaciones, su monto sea x.

3.5 Método de Montecarlo.

"El método de Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias"(8).

El término <u>simulación</u> puede definirse como la construcción de una representación de un proceso físico con el fin de facilitar su análisis, sin incluir todas las propiedades del sistema real, ya que el propósito es mostrar el efecto de ciertos factores bajo observación.

Su desarrollo se inicia a partir del año de 1943, durante la Segunda Guerra Mundial, aunque se tienen noticias de que en 1773 Buffon logró estimar el valor de π a través de un método similar. Pero no fue sino hasta el año de 1949 en el que apareció el primer artículo titulado THE MONTECARLO METHOD, hecho por S. Ulman y N. Metropolis. La creación de este método se debe directamente a S. Ulman y J. Von Neumann y fue desarrollado para resolver el problema específico de la construcción de reactores nucleares. Sin embargo, no es sino hasta el surgimiento de las máquinas calculadoras electrónicas, cuando comienza a tener amplias aplicaciones.

Su nombre se debe a la capital del Principado de Mónaco, famosa por sus casas de juegos, ya que uno de los aparatos mecánicos más sencillos para obtener números aleatorios es la ruleta.

El método de Montecarlo al ser la simulación de un proceso físico cuyo análisis directo resulta difícil e incluso altamente costoso, se utiliza en diversas áreas del conocimiento humano como son: la ingeniería, la investigación de operaciones, la física y en la teoría del riesgo como auxiliar en el análisis del proceso de reclamación, siendo una herramienta muy poderosa, ya que resulta muy dificil recopilar un número adecuado de muestras reales de reclamaciones, requiriéndose para ello de tiempo y, mientras se acumula esta experiencia, la situación va cambiando, así el método de Montecarlo proporciona el número de muestras necesarias para la obtención de resultados confiables.

Su algoritmo tiene una estructura muy sencilla. Como regla general, se elabora primero un programa para realizar una prueba aleatoria, la cual es repetida N veces, de modo que cada experimento sea independiente de todos los demás, tomándose a la vez, la media de los resultados de cada uno, es por eso que en ocasiones resibe el nombre de método de pruebas estadísticas. El error que se obtiene es proporcional a la magnitud D/N, donde D es una constante y N el número de ensayos.

A través de este método puede simularse cualquier proceso de pendiente de factores aleatorios, pero también para problemas matemáticos que no tengan ninguna relación con cuestiones aleatorias, se puede crear un modelo probabilístico artificial que permita resolverlos, por lo tanto podemos decir que el método de Montecarlo es un método universal en la resolución de problemas matemáticos.

El objeto de utilizar este método dentro de la teoría del riesgo, es el poder determinar el valor de la función F(X,t) a través de la simulación del proceso de reclamación. Una aplicación práctica de él se expondrá en el punto 3.6.6 de este capítulo.

3.6 Programas de cada método y su aplicación.

Podemos observar que cada uno de los métodos anteriores requiere de un procedimiento que, aunque no es muy extenso, si es muy elaborado, por lo cual realizar la valuación con la única ayuda de una máquina calculadora sería un proceso largo, tedioso y expuesto a múltiples errores. Para evitar ésto, recurrimos a la computadora y se hizo un programa de cada método en PASCAL, que es un lenguaje dinámico, estructurado, con grandes ventajas en su legibilidad, manejo de información y procesamiento de la misma. La corrida se efectuó con datos rales proporcionados por una conotada firma de corredores de seguros en México, cuyo nombre se omite por razones de confidencialidad, analizándose así una situación con datos reales.

3.6.1 Programa Inicial.

Contamos con la información de una pequeña cartera de 100 asegurados, sabiendo cual es la suma asegurada de cada uno de ellos y su fecha de nacimiento, siendo estos datos los siguientes:

CARTERA DE ASEGURADOS SEGURO TEMPORAL
A UN AÑO

SUMA ASEGURADA	FECHA DE NACIMIENTO
1,188,000	59/08/27
1,188,000	63/04/17
1,188,000	66/06/08
1,188,000	66/10/21
1,200,000	64/07/01
1,368,000	61/10/24
1,368,000	63/11/10
1,440,000	59/11/22
1,440,000	61/04/17
1,440,000	64/12/08
1,464,000	59/10/16
1,488,000	61/01/18
1,500,000	64/07/23
1,500,000	64/08/24
1,560,000	56/12/30
1,560,000	63/12/25
1,560,000	67/08/08
1,632,000	56/10/22
1,632,000	60/10/05
1,728,000	38/02/01
1,740,000	62/10/28
1,776,000	65/04/07
1,800,000	49/06/19
1,800,000	57/11/30
1,800,000	58/07/21
1,800,000	64/05/05
1,812,000	58/05/16
1,896,000	60/09/13
1,920,000	60/12/31
1,920,000	61/06/25
2,040,000	50/06/15
2,124,000	30/03/04
2,124,000	36/06/18
2,124,000	49/08/15
2,160,000	62/02/28
2,172,000	63/12/03
2,280,000	51/03/22
2,352,000	58/03/15
2,400,000	53/09/29

(continuacion...)

2,400,000	56/03/20
2,448,000	50/09/29
2,448,000	53/03/09
2,520,000	55/12/20
2,592,000	57/07/01
2,760.000	34/04/28
2,880,000	60/08/14
3,000,000	55/08/01
3,072,000	56/11/17
3,072,000	56/11/18
3,120,000	48/06/29
3,120,000	53/10/01
3,120,000	57/05/13
3,120,000	61/03/28
3,120,000	61/09/22
3,240.000	59/08/24
3,240,000	59/10/21
3,360.000	55/02/22
3,360,000	58/02/02
3,360,000	59/11/01
3,384,000	54/11/07
3,552,000	57/10/09
3,600,000	43/06/15
3,638,000	38/04/09
3,744,000	52/11/29
3,744,000	57/10/21
4,032,000	53/09/14
4,104,000	58/01/23
4,200.000	53/03/15
4,200,000	58/09/26
4,560,000	48/07/26
4,560,000	57/08/28
4,800,000	53/06/09
5,280,000	57/05/26
5,760,000	49/02/03
6,000,000	51/06/27
6,600,000	57/07/09
6,960,000	28/10/12
7,200,000	47/03/13
7,200,000	47/09/07
7,200,000	51/08/25
7,200,000	58/12/08
7,920,000	40/02/09
8.040,000	47/03/28
8,400,000	52/08/14

(continuacion...)

9,000,000	54/04/26
9,192,000	45/01/10
9,792,000	34/01/29
10,320,000	41/08/17
10,440,000	37/06/30
10,440,000	47/08/08
10,440,000	56/07/16
10,680,000	40/05/28
10,680,000	46/12/28
11,088,000	48/07/18
11,520,000	53/09/06
12,696,000	49/03/23
13,440,000	39/07/22
13,656,000	30/12/07
15,600,000	32/01/05
15,600,000	53/01/18

Este primer programa sirve de base para los subsecuentes ya que, a través de él se asocia a cada individuo su probabilidad de muerte durante el año, qx, que es el período de análisis, pues se trata de un seguro de vida temporal a un año. Para ello utilizaremos la tabla de mortalidad mexicana 62-67(9). Enton - ces, con la fecha de nacimiento de la persona y la fecha en cur so, determinamos su edad y se le asocia la probabilidad qx co - rrespondiente.

El listado del programa y los resultados obtenidos se presen tan a continuación:

3.6.1 Programa inicial

```
PROGRAM Inicial;

  CONST
    finarchivo=100;
    inicio=15;
    fin=99;

  TYPE
    fecha=STRING[8];
    vector=ARRAY[inicio..fin] OF integer;
  VAR
    anio,mes,dia:ARRAY[1..finarchivo] OF integer;
    sumaseg:ARRAY[1..finarchivo] OF real;
    fechact:fecha;
    i,j,anionac,anioact,edad,indice:integer;
    xi:ARRAY[1..finarchivo] OF integer;
    qxi:ARRAY[1..finarchivo] OF real;
    x,lx,dx:vector;
    qx:ARRAY[inicio..fin] OF real;
    DATOS,TABMOR,PROBAS:text;


BEGIN {Inicial}
  ASSIGN(DATOS,'DATO.DAT');
  ASSIGN(TABMOR,'TABMOR.DAT');
  ASSIGN(PROBAS,'ASIGNADO.DAT');
  REWRITE(PROBAS);
  RESET(DATOS);
  RESET(TABMOR);

  { Lectura de la fecha en curso}
  writeln;write('Fecha:AA/MM/DD:   ');
  readln(fechact);
  anioact:=10*(ord(fechact[1])-48)+(ord(fechact[2])-48);
  writeln;

 {Lectura tabla de mortalidad}
  FOR i:=inicio to fin DO readln(TABMOR,x[i],qx[i]);

  {Lectura de datos de la cartera de asegurados}
  FOR i:=1 TO finarchivo DO  readln(DATOS,sumaseg[i],anio[i]);

  {Asignacion de qx a cada individuo}
  FOR i:=1 TO finarchivo DO
    BEGIN
      edad:=anioact-anio[i];
      read(TABMOR,x[edad],qx[edad]);
```

Continuacion...

3.6.1 Programa inicial

```
    xi[i]:=x[edad];
    qxi[i]:=qx[edad];
    {Escritura de resultados en archivo}
    writeln(PROBAS,sumaseg[i]:19:0,qxi[i]:35:7);
  END; {for}

 CLOSE(PROBAS)

END. {Inicial}
```

TABLA DE MORTALIDAD EXPERIENCIA
MEXICANA 62-67

x	qx	lx	dx
15	.001781	10,000,000	17,810
16	.001799	9,982,190	17,958
17	.001819	9,964,232	18,125
18	.001841	9,946,107	18,311
19	.001866	9,927,796	18,525
20	.001893	9,909,271	18,758
21	.001923	9,890,513	19,019
22	.001957	9,871,494	19,319
23	.001994	9,852,175	19,645
24	.002035	9,832,530	20,009
25	.002080	9,812,521	20,410
26	.002131	9,792,111	20,867
27	.002187	9,771,244	21,370
28	.002249	9,479,874	21,927
29	.002318	9,727,947	22,549
30	.002395	9,705,398	23,244
31	.002480	9,682,154	24,012
32	.002574	9,658,142	24,860
33	.002679	9,633,282	25,808
34	.002795	9,607,474	26,853
35	.002923	9,580,621	28,004
36	.003066	9,552,617	29,288
37	.003224	9,523,329	30,703
38	.003399	9,492,626	32,265
39	.003594	9,460,361	34,001
40	.003809	9,426,360	35,905
41	.004048	9,390,455	38,013
42	.004314	9,352,442	40,346
43	.004608	9,312,096	42,910
44	.004934	9,269,186	45,734
45	.005295	9,223,452	48,838
46	.005696	9,174,614	52,259
47	.006141	9,122,355	56,020
48	.006634	9,066,335	60,146
49	.007180	9,006,189	64,664
50	.007786	8,941,525	69,619
51	.008457	8,871,906	75,030
52	.009201	8,796,876	80,940
53	.010026	8,715,936	87,386

54	.010940	8,629,550	94,396
55	.011954	8,534,154	102,017
56	.013076	8,432,137	110,259
57	.014620	8,321,878	119,169
58	.015697	8,202,709	128,759
59	.017223	8,073,951	139,058
60	.018912	7,934,893	150,065
61	.020783	7,784,828	161,792
62	.022854	7,623,036	174,217
63	.025146	7,448,819	187,308
64	.027682	7,261,511	201,013
65	.030488	7,060,498	215,260
66	.033590	6,845,238	229,932
67	.037019	6,615,306	244,892
68	.040809	6,370,414	259,970
69	.044995	6,110,444	274,939
70	.049618	5,835,505	289,546
71	.054718	5,545,959	303,464
72	.060344	5,242,495	316,353
73	.066546	4,926,142	327,815
74	.073376	4,598,327	337,407
75	.080894	4,260,920	344,683
76	.089163	3,916,237	349,183
77	.098247	3,567,054	350,452
78	.108217	3,216,602	348,091
79	.119148	2,868,511	341,777
80	.135115	2,526,734	331,293
81	.144200	2,195,441	316,583
82	.158483	1,878,858	297,767
83	.174048	1,581,091	275,186
84	.190976	1,305,905	249,397
85	.209348	1,056,508	221,178
86	.229238	835,330	191,489
87	.250717	643,841	161,422
88	.273841	482,419	132,106
89	.298658	350,313	104,624
90	.325194	245,689	79,897
91	.353455	165,792	58,600
92	.383421	107,192	41,100
93	.415037	66,092	27,431
94	.448214	38,661	17,328
95	.482819	21,333	10,300
96	.518669	11,033	5,722
97	.555536	5,311	2,950
98	.593136	2,361	1,400
99	1.00000	961	961

SUMA ASEGURADA (miles)	PROBABILIDAD DE MUERTE qx
1188	0.0021870
1188	0.0019940
1188	0.0018930
1188	0.0018930
1200	0.0019570
1368	0.0020800
1368	0.0019940
1440	0.0021870
1440	0.0020800
1440	0.0019570
1464	0.0021870
1488	0.0020800
1500	0.0019570
1500	0.0019570
1560	0.0023950
1560	0.0019940
1560	0.0018660
1632	0.0023950
1632	0.0021310
1728	0.0066340
1740	0.0020350
1776	0.0019230
1800	0.0032240
1800	0.0023180
1800	0.0022490
1800	0.0019570
1812	0.0022490
1896	0.0021310
1920	0.0021310
1920	0.0020800
2040	0.0030660
2124	0.0130760
2124	0.0077860
2124	0.0032240
2160	0.0020350
2172	0.0019940
2280	0.0029230
2352	0.0022490
2400	0.0026790
2400	0.0023950
2448	0.0030660
2448	0.0026790

(continuacion...)

2520	0.0024800
2592	0.0023180
2760	0.0092010
2880	0.0021310
3000	0.0024800
3072	0.0023950
3072	0.0023950
3120	0.0033990
3120	0.0026790
3120	0.0023180
3120	0.0020800
3120	0.0020800
3240	0.0021870
3240	0.0021870
3360	0.0024800
3360	0.0022490
3360	0.0021870
3384	0.0025740
3552	0.0023180
3600	0.0046090
3638	0.0066340
3744	0.0027950
3744	0.0023180
4032	0.0026790
4104	0.0022490
4200	0.0026790
4200	0.0022490
4560	0.0033990
4560	0.0023180
4800	0.0026790
5280	0.0023180
5760	0.0032240
6000	0.0029230
6600	0.0023180
6960	0.0156970
7200	0.0035940
7200	0.0035940
7200	0.0029230
7200	0.0022490
7920	0.0056960
8040	0.0035940
8400	0.0027950
9000	0.0025740
9192	0.0040480
9792	0.0092010

(continuacion...)	0.0052950
10320	0.0071800
10440	0.0035940
10440	0.0023950
10440	0.0056960
10680	0.0038090
10680	0.0033990
11088	0.0026790
11520	0.0032240
12696	0.0061410
13440	0.0130760
13656	0.0109400
15600	0.0026790
15600	

3.6.2 Programa Aproximación de Rosenthal.

Una vez obtenida la probabilidad de muerte de cada individuo se procedió a agruparlos por suma asegurada de la siguiente forma:

1° Número de individuos de la clase z donde:

$$n_z = \sum_x n_x^*$$

2° Probabilidad de muerte promedio de la clase z:

$$q_z = \sum_x \frac{q_x^*}{n_z}$$

3° Valor esperado del monto de reclamaciones mpl=$z n_z q_z$

4° p(z), que es la probabilidad de que dado que ocurre una reclamación el monto de ésta sea z y donde $p(z) = \frac{n_z q_z}{\sum_z n_z q_z}$

5° La varianza del monto de reclamaciones, llamada también varianza estandariazada y denotada por: $\sigma_E^2 = \sum_z n_z z^2 p_z q_z$

6° La varianza por la aproximación de Rosenthal $\sigma_R^2 = Npq \sum_z z^2 \frac{N_z q_z}{Nq}$

7° El número esperado de reclamaciones; $\sum_z n_z q_z$.

Contando con la media mpl y la varianza σ_{ε}^{2} y σ_{A}^{2} y valiéndonos del teorema del Límite Central, podemos determinar la probabilidad de ocurrencia de un monto de reclamación X, utilizando además la normal estandarizada:

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2/2} dz$$

donde

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

como se vió en el punto 2.4.2 del capítulo anterior.

Para poder determinar la probabilidad de que X≤ x, asumiendo la distribución normal, se utilizó la siguiente aproximación(10)

$$P(X \leq x) = 1 - Q(X)$$

donde:

$$Q(X) = Z(X)\,(b1t + b2t^2 + b3t^3 + b4t^4 + b5t^5) + \varepsilon(X) \qquad (3.6.2.1)$$

y donde:

t=1/(1+pX)

$|\varepsilon(X)| < 7.5x10$

p=.2316419

b1=.319381530

b2=-.356563782

b3=1.781477937

b4=-1.821255978

b5=1.330274429

$X=\frac{a-mp1}{\sigma}$ a:valor a evaluar

$Z(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

A continuación se presenta el listado del programa y los resultados obtenidos:

3.5.2 Programa A. de Rossenthal

```
PROGRAM Rosenthal;

  CONST
    finciclo=100;

  TYPE
    vector1=ARRAY[1..finciclo] OF integer;
    vector2=ARRAY[1..finciclo] OF real;

  VAR
    nz:vector1;
    sumaseg,qx,z,qz,media,varianza,frecuencia,prob:vector2;
    totnz,i,j,contador,total:integer;
    totz,totqz,totmed,totvar,totfrec,totprob,pr,monto,x,varros,
    qu,temp,sumtot,montot:real;
    PROBAS,RESUL:text;

  {Aproximacion para evaluar la distribucion normal}
  FUNCTION Q(u:real):real;
    CONST
      p=0.2316419;
      b1=0.31938153;
      b2=-0.356563782;
      b3=1.781477937;
      b4=-1.821255978;
      b5=1.330274429;
      error=7.0E-08;
      pi=3.131592654;

    VAR
      e,f,t,t2,t3,t4,t5:real;

  BEGIN {Q}
    e:=-sqr(u)/2;
    f:=(1/sqrt(2*pi))*exp(e);
    t:=1/(1+p*u);
    t2:=sqr(t);
    t3:=t*t2;
    t4:=sqr(t2);
    t5:=t*t4;

    Q:=f*(b1*t+b2*t2+b3*t3+b4*t4+b5*t5)+error

  END {Q};


BEGIN{Rosenthal}

 Continuacion...
```

3.5.2 Programa A. de Rossenthal

```
ASSIGN(PROBAS,'ASIGNADO.DAT');
RESET(PROBAS);
ASSIGN(RESUL,'RESUL.DAT');
REWRITE(RESUL);
{Lectura}
FOR i:=1 TO finciclo DO readln(PROBAS,sumaseg[i],qx[i]);

{Agrupar datos por suma asegurada}
contador:=1;
z[contador]:=sumaseg[1];
qz[contador]:=qx[1];
nz[contador]:=1;
FOR i:=2 TO finciclo DO
  BEGIN
    IF sumaseg[i]=z[contador]
      THEN
        BEGIN
          nz[contador]:=nz[contador]+1;
          qz[contador]:=qz[contador]+qx[i]
        END
      ELSE
        BEGIN
          qz[contador]:=qz[contador]/nz[contador];
          contador:=contador+1;
          nz[contador]:=1;
          z[contador]:=sumaseg[i];
          qz[contador]:=qx[i]
        END
  END;
qz[contador]:=qz[contador]/nz[contador];
total:=contador;

{Inicializacion contadores}
totz:=0;totnz:=0;totqz:=0;totmed:=0;
totvar:=0;totfrec:=0;totprob:=0;

{Escritura encabezados}
FOR i:=1 TO 9 DO writeln(RESUL);
writeln(RESUL,'          S. Ase-','  No.de','    Tasa de',
        '          Monto de',  '         Varianza','      p(z)');
writeln(RESUL,'          gurada',' polizas','  mortalidad',
        '     reclamacion');
writeln(RESUL,'          (miles)','                        ',
        '(miles)','      (miles)');
writeln(RESUL,'          --------','------------','-----------',
        '------------','-----------','-----------');

{Obtencion de m,p(zi) y varianza estandarizada}
FOR i:=1 TO total DO
```

Continuacion...

3.5.2 Programa A. de Rossenthal

```
  BEGIN
    totnz:=totnz+nz[i];
    totqz:=totqz+qz[i];
    totz:=totz+(z[i]*nz[i]);
    media[i]:=z[i]*nz[i]*qz[i];
    varianza[i]:=sqr(z[i])*nz[i]*(1-qz[i])*qz[i];
    frecuencia[i]:=nz[i]*qz[i];
    totmed:=totmed+media[i];
    totvar:=totvar+varianza[i];
    totfrec:=totfrec+frecuencia[i];
  END;
FOR i:=1 TO total DO
  BEGIN
    prob[i]:=frecuencia[i]/totfrec;
    totprob:=totprob+prob[i];
    writeln(RESUL,z[i]:13:0,nz[i]:7,qz[i]:14:7,media[i]:13:4,
            varianza[i]:16:4,prob[i]:12:7);
    IF i=41 THEN
              BEGIN
                writeln(RESUL,#12);
                FOR j:=1 TO 9 DO writeln(RESUL);
                writeln(RESUL,'          (continuacion...)');
                writeln(RESUL);
              END
  END;

{Escritura totales}
writeln(RESUL,'        ---------','----------','---------',
        '----------','----------','----------','---------');
writeln(RESUL,totz:13:0,totnz:8,totqz:13:7,totmed:13:4,
totvar:16:4,totprob:12:7);
writeln(RESUL);writeln(RESUL);writeln(RESUL);
writeln(RESUL,'                 Total de polizas emitidas:',
        totnz:4);
writeln(RESUL);
sumtot:=totz*1000;
writeln(RESUL,'                 Suma asegurada total: $',
        sumtot:13:2);
writeln(RESUL);
writeln(RESUL,'                 Reclamaciones esperadas:',
        totfrec:10:7);
montot:=totmed*1000;
writeln(RESUL);
writeln(RESUL,'                 Monto esperado de reclamacion: $
        montot:11:2);


{Calculo de la varianza por la Aproximacion de Rosenthal}
temp:=0;
qu:=totfrec/totnz;
FOR i:=1 TO total DO
```

Continuacion...

3.5.2 Programa A. de Rossenthal

```
  temp:=temp+sqr(z[i])*prob[i];
 varros:=totnz*(1-qu)*qu*temp;

 {Calculo de la prob. de ocurrencia de X asumiendo la distribu-}
 {cion normal}
 writeln;
 writeln('monto?');
 readln(monto);
 FOR i:=1 TO 4 DO writeln(RESUL);
 writeln(RESUL,'                De acuerdo al valor de la varianza',
         ' estandarizada:',totvar:13:4);
 write(RESUL,'              la probabilidad de ocurrencia de $ ',
       monto:5:0,'000  es: ');
 x:=(monto-totmed)/sqrt(totvar);
 pr:=1-Q(x);
 write(RESUL,pr:9:7);
 writeln(RESUL);writeln(RESUL);
 writeln(RESUL,'                De acuerdo al valor de la varianza',
         ' de Rosenthal:',varros:13:4);
 write(RESUL,'              la probabilidad de ocurrencia de $ ',
       monto:5:0,'000  es: ');
 x:=(monto-totmed)/sqrt(varros);
 pr:=1-Q(x);
 writeln(RESUL,pr:9:7);

 CLOSE(RESUL);

END.{Rosenthal}
```

S. Asegurada (miles)	No. de polizas	Tasa de mortalidad	Monto de reclamacion (miles)	Varianza (miles)	p(z)
1188	4	0.0019917	9.4648	11221.7821	0.0235093
1200	1	0.0019570	2.3484	2812.5650	0.0057748
1368	2	0.0020370	5.5732	7608.6509	0.0120217
1440	3	0.0020747	8.9626	12979.3106	0.0183660
1464	1	0.0021870	3.2019	4677.1370	0.0064535
1488	1	0.0020800	3.0950	4595.8402	0.0061377
1500	2	0.0019570	5.8710	8789.2657	0.0115496
1560	3	0.0020850	9.7578	15190.4298	0.0184575
1632	2	0.0022630	7.3864	12027.3773	0.0133555
1728	1	0.0066340	11.4636	19677.6048	0.0195758
1740	1	0.0020350	3.5409	6148.6280	0.0060050
1776	1	0.0019230	3.4152	6053.8163	0.0056745
1800	4	0.0024370	17.5464	31506.5510	0.0287648
1812	1	0.0022490	4.0752	7367.6335	0.0066364
1896	1	0.0021310	4.0404	7644.2283	0.0062882
1920	2	0.0021055	8.0851	15490.7458	0.0124260
2040	1	0.0030660	6.2546	12720.3451	0.0090473
2124	3	0.0080287	51.1587	107788.5994	0.0710738
2160	1	0.0020350	4.3956	9475.1747	0.0060050
2172	1	0.0019940	4.3310	9388.1052	0.0058840
2280	1	0.0029230	6.6644	15150.5084	0.0086253
2352	1	0.0022490	5.2896	12413.2717	0.0066364
2400	2	0.0025370	12.1776	29152.0930	0.0149725
2448	2	0.0028725	14.0638	34329.1898	0.0169526
2520	1	0.0024800	6.2496	15709.9345	0.0073181
2592	1	0.0023180	6.0083	15537.3004	0.0068400
2760	1	0.0092010	25.3948	69444.6438	0.0271506
2880	1	0.0021310	6.1373	17637.7002	0.0062882
3000	1	0.0024800	7.4400	22264.6464	0.0073181
3072	2	0.0023950	14.7149	45095.8475	0.0141345
3120	5	0.0025112	39.1747	121918.1947	0.0370507
3240	2	0.0021870	14.1718	45816.0830	0.0129070
3360	3	0.0023053	23.2378	77898.8758	0.0204080
3384	1	0.0025740	8.7104	29400.1764	0.0075955
3552	1	0.0023180	8.2335	29177.7288	0.0068400
3600	1	0.0046080	16.5888	59444.4917	0.0135975
3638	1	0.0066340	24.1345	87218.8082	0.0195758
3744	2	0.0025565	19.1431	71488.4330	0.0150876
4032	1	0.0026790	10.8017	43435.8900	0.0079053
4104	1	0.0022490	9.2299	37794.3022	0.0066364
4200	2	0.0024640	20.6976	86715.7247	0.0145417

(continuacion...)

4560	2	0.0028585	26.0695	118537.2013	0.0168699
4800	1	0.0026790	12.8592	61558.8010	0.0079053
5280	1	0.0023180	12.2390	64472.3371	0.0068400
5760	1	0.0032240	18.5702	106619.7286	0.0095135
6000	1	0.0029230	17.5380	104920.4186	0.0086253
6600	1	0.0023180	15.2988	100738.0267	0.0068400
6960	1	0.0156970	109.2511	748451.9880	0.0463193
7200	4	0.0030900	88.9920	638762.5060	0.0364723
7920	1	0.0056960	45.1123	355254.4530	0.0168080
8040	1	0.0035940	28.89 3	231486.9455	0.0106053
8400	1	0.0027950	23.4780	196663.9835	0.0082475
9000	1	0.0025740	23.1660	207957.3364	0.0075955
9192	1	0.0040480	37.2092	340642.5877	0.01194[illegible]
9792	1	0.0092010	90.0962	874104.5882	0.0271506
10320	1	0.0052950	54.6444	560944.1975	0.0156247
10440	3	0.0043897	137.4844	1429036.0686	0.0388596
10680	2	0.0047525	101.5134	1079010.6268	0.0280477
11088	1	0.0033990	37.6881	416465.3921	0.0100299
11520	1	0.0026790	30.8621	354578.6936	0.0079053
12696	1	0.0032240	40.9319	517996.0324	0.0095135
13440	1	0.0061410	82.5350	1102458.9048	0.0181211
13656	1	0.0130760	178.5659	2406609.5646	0.0385851
15600	2	0.0068095	212.4564	3291750.9790	0.0401874
446486	100	0.2307243	1897.6886	16589128.9960	1.0000000

Total de polizas emitidas: 100

Suma asegurada total: $ 446486000.00

Reclamaciones esperadas: 0.3388870

Monto esperado de reclamacion: $ 1897688.65

De acuerdo al valor de la varianza estandarizada: 16589128.9960
la probabilidad de ocurrencia de $ 8500000 es: 0.9474078

De acuerdo al valor de la varianza de Rosenthal: 16645966.0550
la probabilidad de ocurrencia de $ 8500000 es: 0.9471097

3.6.3 Programa Aproximación de Esscher.

A diferencia del programa anterior en el que la agrupación de personas se efectuó por sumas aseguradas, en éste y los siguientes, se realizará por medio de intervalos de clase. La razón principal de ésto es que, como se vió anteriormente, el punto de vista de estudio de una cartera dentro de la teoría colectiva difiere del de la teoría individual; mientras que en el programa anterior fue sencillo efectuar el análisis, ya que éste se realizó sin tomar en cuenta el factor de variación entre las sumas, no obstante tanto para la aproximación de Esscher, como para el método de convoluciones y el de Montecarlo también, es más acertado efectuar el proceso de valuación si se consideran una diferencia constante en las mismas.

Por lo antes expuesto, es importante recordar ahora los aspectos generales del proceso para agrupar muestras por intervalos:

Para una muestra dada se escoge un intervalo que contenga todos los valores de ésta. El intervalo se subd'vide a su vez en subintervalos llamados intervalos de clase, iendo el punto medio de éstos lo que se conoce como marca de clase. Los valores de la muestra dentro del intervalo forman una clase y el número de valores dentro de ésta se llama frecuencia de clase.

En la mayoría de los casos será posible seguir las siguientes reglas y así evitar complicaciones innecesarias:

1° Todos los intervalos de clase tendrán la misma longitud.

2° Los intervalos de clase se escogerán de tal forma que las marcas de clase correspondan a números símples (números con pocos dígitos).

3° Entre menor número de clases se elijan la muestra agrupada será más simple, pero se perderá información. Por lo general resulta apropiado escoger entre 10 y 20 intervalos de clase.

Aplicando lo anterior a nuestro programa y con el fin de escoger marcas de clase que correspondieran a números simples, se eligieron intervalos de clase con una amplitud de 999,999, de tal forma que las marcas de clase resultaran: \$0.°°,\$1,000,000 y así hasta \$16,000,000 ya que el dato mayor de la muestra es \$15,600,000, quedando los intervalos y sus marcas como sigue:

INTERVALO DE CLASE	MARCA DE CLASE z_i (en millones)
-499,999-500,000	0
500,001-1,500,000	1

INTERVALO DE CLASE	MARCA DE CLASE zi (en millones)
1,500,001-2,500,000	2
2,500,001-3,500,000	3
3,500,001-4,500,000	4
4,500,001-5,500,000	5
5,500,001-6,500,000	6
6,500,001-7,500,000	7
7,500,001-8,500,000	8
8,500,001-9,500,000	9
9,500,001-10,500,000	10
10,500,001-11,500,000	11
11,500,001-12,500,000	12
12,500,001-13,500,000	13
13,500,001-14,500,000	14
14,500,001-15,500,000	15
15,500,001-16,500,000	16

zi es la marca de clase que corresponde a la suma asegurada expresada en millones, nzi es la frecuencia de clase y $qzi = \sum_x \frac{q_{xi}}{n_{zi}}$ es la probabilidad de muerte promedio de la clase zi.

En este programa se utiliza el procedimiento intervalos para agrupar los datos bajo las características anteriores. Una vez que contamos con este agrupamiento procederemos a aplicar la aproximación de Esscher:

1° Se obtiene el número esperado de reclamaciones, $m=\sum_i nziqzi$

2° Determinamos la probabilidad $p(zi)=\frac{n_{zi}\,q_{zi}}{\sum_i n_{zi}\,q_{zi}}$

3° El valor esperado del monto de reclamaciones $mp1=\sum_i zinziqzi$

4° Se señala cual es el monto cuya probabilidad de ocurrencia se quiere evaluar, es decir, aquel monto a para el cual se determinará su función de distribución F(a,t).

5° Por el método de Newton de aproximaciones sucesivas, se determina el valor de h que satisface la ecuación:

$$\sum_{i=0}^{\infty} zie^{hzi}\,p(zi)\;-\;\frac{a}{m}=0 \qquad (3.2.6)$$

y cuya fórmula es:

$$b_{n+1}=b_n-f(b_n)/f'(b_n)$$

donde:

$$h_{n+1}=h_n-\frac{\sum_{i=0}^{\infty} e^{h_n zi}p(zi)-\frac{a}{m}}{\sum_{i=0}^{\infty} zi^2 e^{h_n zi}p(zi)}$$

para lo cual, en el programa se pide el valor inicial h1 y el número n de iteraciones a efectuar.

6°Una vez determinado el valor de h se procede a obtener el valor de $\bar{p}_0,\bar{p}_2,\bar{p}_3$, donde:

$$\bar{p}_0=\sum_{i=0}^{\infty} e^{hzi}p(zi)$$

$$\bar{p}_2=\sum_{i=0}^{\infty} zi^2e^{hzi}p(zi)$$

$$\bar{p}_3=\sum_{i=0}^{\infty} zi^3e^{hzi}p(zi)$$

7° Contando con estos valores es posible determinar:

$w=|h\sqrt{m\bar{p}_2}|$

$B=\bar{p}_3/\bar{p}_2\sqrt{m\bar{p}_2}$

$A(w)=(1-\Phi(w))/\phi(w)$

$A_0^{(0)}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(w)$

$A_0^{(3)}(w)=(w^3A(w)-w^2+1)/\sqrt{2\pi}$

$\Phi(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{w}e^{-z^2/2}dz$ función de distribución de la normal estandarizada, para evaluarla se utilizó la misma aproximación del programa anterior (3.6.2.1).

$\phi(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2}$

$C(a)=e^{-ha-m(1+\bar{p}_0)}$

pudiéndose obtener así:

8° La función F(a,t), donde:

$$F(a,t)=C(a)\left[A_0^{(0)}(w)+\frac{B}{3!}A_0^{(3)}(w)\right] \qquad \text{para } a<mp1$$

$$1-F(a,t)=C(a)\left[A_0^{(0)}(w)-\frac{B}{3!}A_0^{(3)}(w)\right] \qquad \text{para } a\geq mp1$$

El listado del programa y los resultados son:

3.6.3 Programa A. de Esscher

```
PROGRAM Esscher;

  CONST
    finciclo=99;
    pi=3.141592654;

  TYPE
    vector1=ARRAY[0..finciclo] OF real;
    vector2=ARRAY[0..finciclo] OF integer;

  VAR
    z,qz,frecuencia,prob,media,e,f,df,hn,hz,ex,
    ep,z2ep,z3ep:vector1;
    nz:vector2;
    k,j,i,total,totnz,numiter:integer;
    totz,totqz,totfrec,totprob,totmed,tote,totf,
    totdf,monto,monmill,h,h1,sumtot,montot,tothz,
    totex,p0,p2,p3,c,b,w,Aw,A0w,A3w,Fxt:real;
    LEE,ESCRI:text;


  {Funcion para elevar un numero 'a' a una potencia 'b'}
  FUNCTION expon(VAR a:real;b:integer):real;
    BEGIN
      expon:=exp(b*ln(a))
    END;


  {Funcion de densidad de la normal estandarizada}
  FUNCTION qu(x:real):real;
    BEGIN
      qu:=1/sqrt(2*pi)*exp(-sqr(x)/2)
    END;

  {Funcion de distribucion de la normal estandarizada}
  FUNCTION Q(x,y:real):real;
    CONST
      p=0.2316419;
      b1=0.31938153;
      b2=-0.356563782;
      b3=1.781477937;
      b4=-1.821255978;
      b5=1.330274429;
      error=7.0E-08;
    VAR
      t,t2,t3,t4,t5:real;

    BEGIN {Q}

 Continuacion...
```

3.6.3 Programa A. de Esscher

```
    t:=1/(1+p*x);
    t2:=sqr(t);
    t3:=expon(t,3);
    t4:=expon(t,4);
    t5:=expon(t,5);

    Q:=y*(b1*t+b2*t2+b3*t3+b4*t4+b5*t5);
  END; {Q}


{Procedimiento para agrupar la muestra en intervalos}
PROCEDURE intervalos;
  CONST
    amplitud=999;
    dosmil=2000;
  VAR
    sumaseg,qx:vector1;
    n,contador:integer;
    q,extrinf,extrsup,clase:real;

  BEGIN {intervalos}
    ASSIGN(LEE,'ASIGNADO.DAT');
    RESET(LEE);
    FOR i:=0 TO finciclo DO readln(LEE,sumaseg[i],qx[i]);
    extrsup:=500;
    extrinf:=extrsup-amplitud;
    n:=0;q:=0;contador:=-1;i:=0;
    WHILE i<finciclo DO
      BEGIN
        IF(sumaseg[i]>=extrinf) and (sumaseg[i]<=extrsup)
          THEN
            BEGIN
              n:=n+1;
              q:=q+qx[i];
              i:=i+1
            END
          ELSE
            BEGIN
              contador:=contador+1;
              IF n=0
                THEN q:=0
                ELSE q:=q/n;
              clase:=(extrinf+extrsup-1)/dosmil;
              z[contador]:=clase;
              nz[contador]:=n;
              qz[contador]:=q;
              n:=0;q:=qx[i];
              extrsup:=extrsup+amplitud+1;
              extrinf:=extrsup-amplitud
            END
      END;
```

Continuacion...

3.6.3 Programa A. de Esscher

```
      n:=n+1;
      q:=(q+qx[i])/n;
      contador:=contador+1;
      clase:=(extrinf+extrsup-1)/dosmil;
      z[contador]:=clase;
      nz[contador]:=n;
      qz[contador]:=q;
      total:=contador;
    END; {intervalos}



BEGIN {Esscher}

  ASSIGN(ESCRI,'SAL2.DAT');
  REWRITE(ESCRI);
  totz:=0;totnz:=0;totqz:=0;
  totfrec:=0;totprob:=0;totmed:=0;

  intervalos;

  {Escritura de encabezados}
  FOR i:=1 to 9 DO writeln(ESCRI);
  writeln(ESCRI);writeln(ESCRI,'      Marca de','        No. de'
                      '          Tasa de','       Monto de',
                      '           p(zi)');
  writeln(ESCRI,'      clase zi','      polizas',
          '        mortalidad','     reclamacion');
  writeln(ESCRI,'        (millones)','
          '        (millones)');
  writeln(ESCRI,'        ----------','----------','----------',
        '----------','----------','----------','---------');

  {Determinacion de:m, p(zi) y mp1}
  FOR i:=0 TO total DO
    BEGIN
      totz:=totz+(z[i]*nz[i]);
      totnz:=totnz+nz[i];
      totqz:=totqz+qz[i];
      frecuencia[i]:=nz[i]*qz[i];
      media[i]:=z[i]*frecuencia[i];
      totfrec:=totfrec+frecuencia[i];
      totmed:=totmed+media[i];
    END;
  FOR i:=0 TO total DO
    BEGIN
      prob[i]:=frecuencia[i]/totfrec;
      totprob:=totprob+prob[i];
      writeln(ESCRI,z[i]:12:0,nz[i]:17,qz[i]:18:7,
```

Continuacion...

3.6.3 Programa A. de Esscher

```
    media[i]:13:4,prob[i]:16:7);
   END;

 {Escritura de totales}
 writeln(ESCRI,'          ----------','-----------','----------',
        '----------','----------','----------','---------');
 writeln(ESCRI,totz:12:0,totnz:18,totqz:17:7,totmed:13:4,
        totprob:16:7);
 writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'                       Total de polizas emitidas',
        totnz:4);
 writeln(ESCRI);
 sumtot:=totz*1000000.0;
 writeln(ESCRI,'                       Suma asegurada total: $',
        sumtot:13:2);
 writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'                       Reclamaciones esperadas:',
        totfrec:10:7);
 writeln(ESCRI);
 montot:=totmed*1000000.0;
 writeln(ESCRI,'                       Monto esperado de',
        ' reclamacion: $',montot:11:2);
 writeln(ESCRI,#12);


 {Monto a evaluar}
 writeln;write('monto a evaluar? (millones): ');
 readln(monto);

 {Escritura de encabezado}
 FOR i:=1 to 8 DO writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'                  Calculo de F(',monto:4:2,
        ',t) por la aproximacion de Esscher');
 write(ESCRI,'                  ---------------',
       '----------------------------------');
 writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'             Determinacion del valor de h',
        ' el metodo de Newton de aproxi-');
 write(ESCRI,'        maciones sucesivas:');
 writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);


 {Valor inicial para h?}
 writeln;write('valor inicial de h ');
 readln(h1);

 {Numero de iteraciones a efectuar?}
 writeln;write('numero de iteraciones para h? ');
 readln(numiter);
 hn[1]:=h1;
 tote:=0;totf:=0;totdf:=0;  {inicalizacion}
```

Continuacion...

3.6.3 Programa A. de Esscher

```
writeln(ESCRI,'                 valor inicial h1=',h1:3:2);
writeln(ESCRI,'                 numero de iteraciones=',numiter);
writeln(ESCRI,'                 valor de:');

{Metodo de Newton de aproximaciones sucesivas para}
{obtener el valor de h}
FOR j:=2 TO  numiter DO
  BEGIN
    FOR i:=0 TO total DO
      BEGIN
        e[i]:=exp(z[i]*hn[j-1]);
        f[i]:=z[i]*e[i]*prob[i];
        df[i]:=z[i]*f[i];
        tote:=tote+e[i];
        totf:=totf+f[i];
        totdf:=totdf+df[i]
      END;
    hn[j]:=hn[j-1]-(totf-(monto/totfrec))/totdf;
    tote:=0;totf:=0;totdf:=0
  END;
FOR j:=1 TO numiter DO writeln(ESCRI,'                    h',
                             j,'=',hn[j]:8:7);

{Asignacion del valor de h}
h:=hn[numiter];
writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'              por lo que  h=',h:8:7);
writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'                          hzi','          hzi',
        '              hzi','        hzi');
writeln(ESCRI,'              hzi','           e',
        '            e  p(zi)','    zie  p(zi)',
        '    zie  p(zi)');
writeln(ESCRI,'              -----------------------------',
        '------------------------------');

{Obtencion del valor de p0, p2 y p3}
tothz:=0;totex:=0;p0:=0;p2:=0;p3:=0;    {Inicializacion}
FOR i:=0 TO total DO
  BEGIN
    hz[i]:=h*z[i];
    ex[i]:=exp(hz[i]);
    ep[i]:=ex[i]*prob[i];
    z2ep[i]:=sqr(z[i])*ep[i];
    z3ep[i]:=z[i]*z2ep[i];
    tothz:=tothz+hz[i];
    totex:=totex+ex[i];
    p0:=p0+ep[i];
    p2:=p2+z2ep[i];
```

Continuacion...

3.5.3 Programa A. de Esscher

```
    p3:=p3+z3ep[i];
    writeln(ESCRI,hz[i]:17:6,ex[i]:13:6,ep[i]:14:6,
  . z2ep[i]:13:6,z3ep[i]:13:6);
  END;
writeln(ESCRI,'         -------------------------------------',
       '----------------------------');
writeln(ESCRI,tothz:17:6,totex:13:6,p0:14:6,p2:13:6,p3:13:6);
writeln(ESCRI,#12);


{Determinar los valores de C(a),b,w,A(w),A0(w) y A3(w)}
c:=exp(-h*monto-totfrec+totfrec*p0);
b:=p3/(p2*sqrt(totfrec*p2));
w:=abs(h*sqrt(totfrec*p2));
Aw:=(1-(1-0(w,qu(w))))/qu(w);
A0w:=1/sqrt(2*pi)*Aw;
A3w:=1/sqrt(2*pi)*(expon(w,3)*Aw-sqr(w)+1);


{Determina el valor de F(a,t)}
IF monto<totmed
  THEN Fxt:=c*(A0w+(b/6)*A3w)
  ELSE Fxt:=1-(c*(A0w-(b/6)*A3w));

{Imprime resultados}
FOR i:=1 to ? DO writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'            p0=',p0:7:6,'       p2:=',p2:7:6,
      '        p3=',p3:7:6);
writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'             C(',monto:4:2,')=',c:7:6,
      '               B=',b:7:6);
writeln(ESCRI,'                  w=',w:7:6,
      '               A(w)=',Aw:7:6);
writeln(ESCRI,'              A0(w)=',A0w:7:6,
      '              A3(w)=',A3w:7:6);
writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'          Entonces:');
monmill:=monto*1000000.0;
write(ESCRI,'          La probabilidad de que durante');
writeln(ESCRI,' el tiempo t el monto');
write(ESCRI,'          de reclamacion ascienda a $');
write(ESCRI,monmill:10:2,' es:  ',Fxt:8:7);
writeln(ESCRI);

CLOSE(ESCRI)

END.{Esscher}
```

Marca de clase zi (millones)	No. de polizas	Tasa de mortalidad	Monto de reclamacion (millones)	p(zi)
0	0	0.0000000	0.0000	0.0000000
1	14	0.0021850	0.0306	0.0745563
2	28	0.0031885	0.1786	0.2175976
3	18	0.0029056	0.1569	0.1274696
4	9	0.0034274	0.1234	0.0751827
5	4	0.0035282	0.0706	0.0343973
6	2	0.0046355	0.0562	0.0228397
7	6	0.0054488	0.2289	0.0796819
8	3	0.0059270	0.1422	0.0433372
9	2	0.0045980	0.0828	0.0224132
10	5	0.0073732	0.3687	0.0898526
11	3	0.0062000	0.2046	0.0453333
12	1	0.0053580	0.0643	0.0130589
13	2	0.0062945	0.1637	0.0306829
14	1	0.0261520	0.3661	0.0637397
15	0	0.0000000	0.0000	0.0000000
16	2	0.0122795	0.3929	0.0598571
443	100	0.0995513	2.6304	1.0000000

Total de polizas emitidas 100

Suma asegurada total: $ 443000000.00

Reclamaciones esperadas: 0.4102940

Monto esperado de reclamacion: $ 2630375.00

Calculo de F(8.50,t) por la aproximacion de Esscher

Determinacion del valor de h el metodo de Newton de aproximaciones sucesivas:

valor inicial h1=0.16
numero de iteraciones=7
valor de:
h1=0.1600000
h2=0.1227335
h3=0.1096266
h4=0.1083542
h5=0.1083435
h6=0.1083435
h7=0.1083435

por lo que h=0.1083435

hz_i	e^{hz_i}	$e^{hz_i}\,p(z_i)$	$z_i^2 e^{hz_i}\,p(z_i)$	$z_i^3 e^{hz_i}\,p(z_i)$
0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.108344	1.114431	0.083088	0.083088	0.083088
0.216687	1.241955	0.270247	1.080986	2.161972
0.325031	1.384073	0.176427	1.587845	4.763534
0.433374	1.542453	0.115966	1.855452	7.421808
0.541718	1.718957	0.059127	1.478186	7.390931
0.650061	1.915658	0.043753	1.575111	9.450667
0.758405	2.134868	0.170110	8.335404	58.347826
0.866748	2.379162	0.103106	6.598800	52.790396
0.975092	2.651410	0.059427	4.813553	43.321977
1.083435	2.954813	0.265498	26.549771	265.497713
1.191779	3.292933	0.149280	18.062842	198.691257
1.300122	3.669745	0.047923	6.900903	82.810842
1.408466	4.089676	0.125483	21.206631	275.686205
1.516809	4.557660	0.290504	56.938722	797.142110
1.625153	5.079195	0.000000	0.000000	0.000000
1.733496	5.660410	0.338816	86.736795	1387.788712
14.734719	46.387398	2.298754	243.804088	3193.349039

p0=3.298754 p2:=243.804088 p3=3193.349039

C(8.50)=0.678379 ß=1.309596
w=1.083605 A(w)=0.627945
A0(w)=0.250514 A3(w)=0.249250

Entonces:
La probabilidad de que durante el tiempo t el monto
de reclamacion ascienda a $8500000.00 es: 0.8669624

3.6.4 Programa Método Normal Power.

La muestra fue agrupada nuevamente de acuerdo al procedimiento intervalos determinándose así:

1° El número esperado de reclamaciones: $m=\sum_i nziqzi$.

2° La varianza del monto de las reclamaciones:

$\sigma=\sum_i zi\ nziqzi(1-qzi)$

3° El valor esperado del monto de las reclamaciones:

$mp1=\sum_i zinziqzi$

4° La probabilidad $p(zi)=\dfrac{nziqzi}{\sum_i nziqzi}$

5° Se indica cual es el monto cuya probabilidad de ocurrencia se desea evaluar, es decir, aquel monto para el cual se determinará el valor de F(X,t).

6° Una vez indicado dicho monto se determina el valor de y de acuerdo a la ecuación:

$$y=-\frac{3}{g_1}+\sqrt{\frac{9}{g_1^2}+1+\frac{6(X-mp_1)}{g_1\sigma}}$$

7° Para calcular el valor de $F(X,t)$ se utiliza la igualdad:

$$F(X,t)=\Phi(y)$$

donde $\Phi(y)$ es la normal estandarizada de y con media uno y varianza cero, para calcularla se utilizó la aproximación (3.6.2.1), del programa aproximación de Rosenthal.

El listado del programa y los resultados obtenidos se muestran a continuación:

3.6.4 Programa Normal Power

```
PROGRAM Normal_Power;

  CONST
    finciclo=99;
    pi=3.141592654;

  TYPE
    vector1=ARRAY[0..finciclo] OF real;
    vector2=ARRAY[0..finciclo] OF integer;

  VAR
    z,qz,frecuencia,prob,media,varianza:vector1;
    nz:vector2;
    k,j,i,total,totnz,numiter:integer;
    totz,totqz,totfrec,totprob,totmed,totvar,
    monto,monmill,y,sumtot,montot,p1,p3,p4,
    g1,g2,Fxt:real;
    LEE,ESCRI:text;


  {Funcion para elevar un numero 'a' a una potencia 'b'}
  FUNCTION expon(VAR a:real;b:integer):real;
    BEGIN
      expon:=exp(b*ln(a))
    END;


  {Funcion de densidad de la normal estandarizada}
  FUNCTION qu(x:real):real;
    BEGIN
      qu:=1/sqrt(2*pi)*exp(-sqr(x)/2)
    END;

  {Funcion de distribucion de la normal estandarizada}
  FUNCTION Q(x:real):real;
    CONST
      p=0.2316419;
      b1=0.31938153;
      b2=-0.356563782;
      b3=1.781477937;
      b4=-1.821255978;
      b5=1.330274429;
      error=7.0E-08;
    VAR
      t,t2,t3,t4,t5:real;

    BEGIN {Q}
      t:=1/(1+p*x);
```

Continuacion...

3.6.4 Programa Normal Power

```
      t2:=sqr(t);
      t3:=expon(t,3);
      t4:=expon(t,4);
      t5:=expon(t,5);

      Q:=qu(x)*(b1*t+b2*t2+b3*t3+b4*t4+b5*t5);
    END; {Q}

  {Procedimiento para agrupar la muestra en intervalos}
  PROCEDURE intervalos;
    CONST
      amplitud=999;
      dosmil=2000;
    VAR
      sumaseg,qx:vector1;
      n,contador:integer;
      q,extrinf,extrsup,clase:real;

    BEGIN {intervalos}
      ASSIGN(LEE,'ASIGNADO.DAT');
      RESET(LEE);
      FOR i:=0 TO finciclo DO readln(LEE,sumaseg[i],qx[i]);
      extrsup:=500;
      extrinf:=extrsup-amplitud;
      n:=0;q:=0;contador:=-1;i:=0;
      WHILE i<finciclo DO
        BEGIN
          IF(sumaseg[i]>=extrinf) and (sumaseg[i]<=extrsup)
            THEN
              BEGIN
                n:=n+1;
                q:=q+qx[i];
                i:=i+1
              END
            ELSE
              BEGIN
                contador:=contador+1;
                IF n=0
                  THEN q:=0
                  ELSE q:=q/n;
                clase:=(extrinf+extrsup-1)/dosmil;
                z[contador]:=clase;
                nz[contador]:=n;
                qz[contador]:=q;
                n:=0;q:=qx[i];
                extrsup:=extrsup+amplitud+1;
                extrinf:=extrsup-amplitud
              END
        END;
      n:=n+1;
```

Continuacion...

3.6.4 Programa Normal Power

```
      q:=(q+qx[i])/n;
      contador:=contador+1;
      clase:=(extrinf+extrsup-1)/dosmil;
      z[contador]:=clase;
      nz[contador]:=n;
      qz[contador]:=q;
      total:=contador;
    END;{intervalos}


BEGIN {Normal Power}

  ASSIGN(ESCRI,'SALE.DAT');
  REWRITE(ESCRI);
  totz:=0;totnz:=0;totqz:=0;totfrec:=0;
  totprob:=0;totmed:=0;totvar:=0;

  intervalos;

  {Escritura de encabezados}
  writeln(ESCRI);writeln(ESCRI,'    Marca de','    No. de',
                        '    Tasa de','     Monto de',
                        '     varianza','     p(zi)');
  writeln(ESCRI,'   clase zi','   polizas','   mortalidad',
          '   reclamacion');
  writeln(ESCRI,'  (millones)','                    ',
          '  (millones)','   (millones)');
  writeln(ESCRI,'  ----------','-----------','----------',
          '----------','----------','-----------','--------');

  {Obtencion de:m, p(zi) y mp1}
  FOR i:=0 TO total DO
    BEGIN
      totz:=totz+(z[i]*nz[i]);
      totnz:=totnz+nz[i];
      totqz:=totqz+qz[i];
      frecuencia[i]:=nz[i]*qz[i];
      media[i]:=z[i]*frecuencia[i];
      varianza[i]:=sqr(z[i])*nz[i]*(1-qz[i])*qz[i];
      totfrec:=totfrec+frecuencia[i];
      totmed:=totmed+media[i];
      totvar:=totvar+varianza[i];
    END;
  FOR i:=0 TO total DO
    BEGIN
      prob[i]:=frecuencia[i]/totfrec;
      totprob:=totprob+prob[i];
      writeln(ESCRI,z[i]:8:0,nz[i]:12,qz[i]:15:7,
```

Continuacion...

3.6.4 Programa Normal Power

```
     media[i]:13:4,varianza[i]:14:4,prob[i]:14:7);
   END;

 {Escritura de totales}
 writeln(ESCRI,'     ----------','----------','----------',
        '----------','----------','----------','-----------');
 writeln(ESCRI,totz:9:0,totnz:13,totqz:14:7,totmed:13:4,
         totvar:15:4,totprob:12:7);
 writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'                          Total de polizas emitidas',
         totnz:4);
 writeln(ESCRI);
 sumtot:=totz*1000000.0;
 writeln(ESCRI,'                          Suma asegurada total: $',
         sumtot:13:2);
 writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'                          Reclamaciones esperadas: ',
         totfrec:10:7);
 writeln(ESCRI);
 montot:=totmed*1000000.0;
 writeln(ESCRI,'                          Monto esperado de',
         ' reclamacion: $',montot:11:2);
 writeln(ESCRI,#12);


 {Monto a evaluar}
 writeln;write('monto a evaluar? (millones): ');
 readln(monto);

 {Escritura de encabezado}
 FOR i:=1 to 8 DO writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'                    Calculo de F(',monto:4:2,
         ',t) por el Metodo Normal Power');
 write(ESCRI,'                    ---------------',
       '--------------------------------');
 writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
 writeln(ESCRI,'              Obtencion del valor de y: ');


 {Obtencion de:p1,p3 y p4}
 p1:=0;p3:=0;p4:=0;
 FOR i:=0 TO total DO
   BEGIN
     p1:=p1+z[i]*prob[i];
     p3:=p3+z[i]*sqr(z[i])*prob[i];
     p4:=p4+sqr(z[i])*sqr(z[i])*prob[i]
   END;

 {Obtencion del valor de g1 y g2}
 g1:=p3/(expon(p1,3)*sqrt(totfrec));
```

Continuacion...

3.6.4 Programa Normal Power

```
  g2:=p4/(expon(p1,4)*sqrt(totfrec));


  {Obtencion del valor de y}
  y:=sqrt(9/sqr(g1)+1+6/(g1*sqrt(totvar))*(monto-totfrec))-3/g1;


  {Determinar el valor de F(X,t)}
  Fxt:=1-Q(y);

  {Imprime resultados}
  FOR i:=1 to 3 DO writeln(ESCRI);
  writeln(ESCRI,'                  p1=',p1:6:4,'        p3=',p3:8:4,
        '          p4=',p4:8:4);
  writeln(ESCRI);
  writeln(ESCRI,'                  g1=',g1:6:4,'        g2=',g2:6:4);
  writeln(ESCRI);
  writeln(ESCRI,'             Por lo que y=',y:7:6);
  writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
  writeln(ESCRI,'             Entonces:');
  monmill:=monto*1000000.0;
  write(ESCRI,'               La probabilidad de que durante');
  writeln(ESCRI,' el tiempo t el monto');
  write(ESCRI,'               de reclamacion ascienda a $');
  write(ESCRI,monmill:10:2,' es: ',Fxt:8:7);
  writeln(ESCRI);

  CLOSE(ESCRI)

END.{Normal Power}
```

Marca de clase zi (millones)	No. de polizas	Tasa de mortalidad	Monto de reclamacion (millones)	varianza (millones)	p(zi)
0	0	0.0000000	0.0000	0.0000	0.0000000
1	14	0.0021850	0.0306	0.0305	0.0745563
2	28	0.0031885	0.1786	0.3560	0.2175976
3	18	0.0029056	0.1569	0.4693	0.1274696
4	9	0.0034274	0.1234	0.4919	0.0751827
5	4	0.0035282	0.0706	0.3516	0.0343973
6	2	0.0046855	0.0562	0.3358	0.0228397
7	6	0.0054488	0.2289	1.5932	0.0796819
8	3	0.0059270	0.1422	1.1312	0.0433372
9	2	0.0045980	0.0828	0.7415	0.0224132
10	5	0.0073732	0.3687	3.6594	0.0898526
11	3	0.0062000	0.2046	2.2366	0.0453333
12	1	0.0053580	0.0643	0.7674	0.0130589
13	2	0.0062945	0.1637	2.1141	0.0306829
14	1	0.0261520	0.3661	4.9917	0.0637397
15	0	0.0000000	0.0000	0.0000	0.0000000
16	2	0.0122795	0.3929	6.2099	0.0598571
443	100	0.0995513	2.6304	25.4802	1.0000000

Total de polizas emitidas 100

Suma asegurada total: $ 443000000.00

Reclamaciones esperadas: 0.4102940

Monto esperado de reclamacion: $ 2630375.00

Calculo de F(8.50,t) por el Metodo Normal Power

Obtencion del valor de y:

p1=6.4110   p3=745.4042   p4=9680.8967

g1=4.4165   g2=8.9470

Por lo que y=1.228251

Entonces:
La probabilidad de que durante el tiempo t el monto de reclamacion ascienda a $8500000.00 es: 0.8903235

3.6.5 Programa Método de Convoluciones.

En él se utilizó también el procedimiento <u>intervalos</u> para agrupar la muestra como ya se describió y , de la misma forma, se determinó:

1° El número esperado de reclamaciones: $m=\sum_i$ nziqzi, que en este caso se trata a su vez del parámetro Poisson.

2° La probabilidad $p(zi)=\dfrac{n_{zi}q_{zi}}{\sum_i n_{zi}q_{zi}}$

3° El valor esperado del monto de reclamaciones: $mpl=\sum_i$ zinziqzi

4° Se señala cual es el número de convoluciones que se desea sean efectuadas (con un máximo de 20), procediendose así a calcular desde la primera hasta la y-ésima convolución indicada, de acuerdo a la fórmula:

$$P^{y*}(X)=\sum_{0\le v\le X} P^{(y-1)*}(X-v)\,p(v)$$

donde:

$$P^{0*}(X)=1.0 \quad \text{por definición}$$

5° Contando con el valor de cada convolución, se determina el valor de F(X,t) de acuerdo a:

$$F(X,t)=\sum_{y=0}^{\infty} g(Y)P^{y*}(X)$$

donde:

$$g(Y)=\frac{e^{-m}m^{y}}{y!}$$

el límite de y será el número de convoluciones que se sean señaladas.

Acontinuación se presenta el listado del programa y los re - sultados obtenidos:

3.6.5 Programa Convoluciones

```
PROGRAM Convoluciones;
 CONST
   finciclo=99;
   numx=60;
 TYPE
   vector1=ARRAY[0..finciclo] OF real;
   vector2=ARRAY[0..finciclo] OF integer;
 VAR
   z,qz,frecuencia,prob,media,g,Fx:vector1;
   nz:vector2;
   P,Fc:ARRAY[0..20] OF vector1;
   i,total,totnz,numc,x,c:integer;
   totz,totqz,totfrec,totprob,totmed,sumtot,montot:real;
   LEE,ESCRI:text;

 {Funcion para elevar un numero 'a' a una potencia 'b'}
 FUNCTION expon(VAR a:real;b:integer):real;
   BEGIN
     expon:=exp(b*ln(a))
   END;

 {Funcion para calcular el factorial de un numero}
 FUNCTION fact(n:integer):real;
   BEGIN
     IF n=0 THEN fact:=1.0
            ELSE fact:=n*fact(n-1)
   END;

 {Procedimiento para agrupar en intervalos de suma asegurada}
 PROCEDURE intervalos;
   CONST
     amplitud=999;
     dosmil=2000;
   VAR
     sumaseg,qx:vector1;
     n,contador:integer;
     q,extrinf,extrsup,clase:real;
 BEGIN {intervalos};
   ASSIGN(LEE,'ASIGNADO.DAT');RESET(LEE);
   FOR i:=0 TO finciclo DO readln(LEE,sumaseg[i],qx[i]);
   extrsup:=500;
   extrinf:=extrsup-amplitud;
   n:=0;q:=0;contador:=-1;i:=0;

   WHILE i<finciclo DO
```

Continuacion...

3.6.5 Programa Convoluciones

```
    BEGIN
      IF (sumaseg[i]>=extrinf) and (sumaseg[i]<=extrsup)
        THEN
          BEGIN
            n:=n+1;
            q:=q+qx[i];
            i:=i+1
          END
        ELSE
          BEGIN
            contador:=contador+1;
            IF n=0 THEN q:=0
                   ELSE q:=q/n;
            clase:=(extrinf+extrsup-1)/dosmil;
            z[contador]:=clase;
            nz[contador]:=n;
            qz[contador]:=q;
            n:=0;q:=qx[i];
            extrsup:=extrsup+amplitud+1;
            extrinf:=extrsup-amplitud
          END
    END;
   n:=n+1;
   q:=(q+qx[i])/n;
   contador:=contador+1;
   clase:=(extrinf+extrsup-1)/dosmil;
   z[contador]:=clase;
   nz[contador]:=n;
   qz[contador]:=q;
   total:=contador;
  END;{intervalos}


BEGIN {Convoluciones}

  ASSIGN(ESCRI,'SALIDA.DAT');
  REWRITE(ESCRI);

  {Inicializacion contadores}
  totz:=0;totnz:=0;totqz:=0;
  totfrec:=0;totprob:=0;totmed:=0;

  intervalos;

  {Escritura de encabezados}
  FOR i:=1 TO 9 DO writeln(ESCRI);
  writeln(ESCRI,'          Marca de','          No. de',
          '          Tasa de','          Monto de','          p(zi)');
  writeln(ESCRI,'          clase zi','          polizas',
          '          mortalidad','   reclamacion');
```

Continuacion...

3.6.5 Programa Convoluciones

```
writeln(ESCRI,'             (millones)','
        '              (millones)');
writeln(ESCRI,'            ----------','----------','----------',
        '----------','----------','--------->---','----------');

{Obtencion de m,p(zi) y mp1}
FOR i:=0 TO total DO
  BEGIN
    totz:=totz+(z[i]*nz[i]);
    totnz:=totnz+nz[i];
    totqz:=totqz+qz[i];
    frecuencia[i]:=nz[i]*qz[i];
    media[i]:=z[i]*frecuencia[i];
    totfrec:=totfrec+frecuencia[i];
    totmed:=totmed+media[i]
  END;
FOR i:=0 TO total DO
  BEGIN
    prob[i]:=frecuencia[i]/totfrec;
    totprob:=totprob+prob[i];
    writeln(ESCRI,z[i]:12:0,nz[i]:17,qz[i]:18:7,
            media[i]:13:4,prob[i]:16:7);
    END;

{Escritura totales}
writeln(ESCRI,'            ----------','----------','----------',
        '----------','----------','----------','----------');
writeln(ESCRI,totz:12:0,totnz:18,totqz:17:7,totmed:13:4,
        totprob:16:7);
writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'                         Total de polizas emitidas:',
        totnz:4);
writeln(ESCRI);sumtot:=totz*1000000.0;
writeln(ESCRI,'                         Suma asegurada total: $',
        sumtot:13:2);
writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'                         Reclamaciones esperadas:',
        totfrec:10:7);
writeln(ESCRI);montot:=totmed*1000000.0;
writeln(ESCRI,'                         Monto esperado de ',
        'reclamacion: $',montot:11:2);
writeln(ESCRI,#12);


{Calculo de las convoluciones}
FOR i:=total+1 TO finciclo DO prob[i]:=0;
{Numero de convoluciones?}
writeln;write('numero de convoluciones? (maximo 20) ');
readln(numc);
FOR i:=0 TO numx DO P[0,i]:=1.0;       {P[0,i]=1 por definicion}
FOR c:=1 to numc DO           {Para convoluciones c=1,2,...,numc}
```

Continuacion...

3.6.5 Programa Convoluciones

```
FOR x:=0 TO numx DO             {Calculo de P[c,x] para x=0,numx}
  BEGIN
    P[c,x]:=0.0;                          {Inicializacion}
    FOR i:=0 TO x DO P[c,x]:=P[c,x]+P[c-1,x-i]*prob[i];
    IF P[c,x]>1.0 THEN P[c,x]:=1.0;
  END;

{Escritura de resultados}
FOR i:=1 TO 9 DO writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'
      'y*');
writeln(ESCRI,'                                     Calculo de',
        ' P  (X)');
writeln(ESCRI,'                                     ----------',
        '-------');
writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
write(ESCRI,'          P0*(X)');
FOR c:=1 TO numc DO write(ESCRI,'      P',c,'*(X)');
writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'          ----------','----------','----------',
        '----------', '----------','----------','----------');
FOR x:=0 TO numx DO
  BEGIN
    write(ESCRI,'     ');
    FOR c:=0 TO numc DO  write(ESCRI,P[c,x]:12:7);
    writeln(ESCRI);
    IF x=37 THEN
             BEGIN
               writeln(ESCRI,#12);
               FOR i:=1 TO 9 DO writeln(ESCRI);
               writeln(ESCRI,'         (continuacion...)');
               writeln(ESCRI)
             END
  END;

{Escritura encabezado}
writeln(ESCRI,#12);
FOR i:=1 TO 6 DO writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'
        'Calculo de F(X,t)');
writeln(ESCRI,'
        '-----------------');

{Calculo de la distribucion Poisson para c=1,2,...,numc}
FOR c:=0 TO numc DO
  g[c]:=(exp(-totfrec)*expon(totfrec,c))/fact(c);
FOR c:=0 TO numc DO
  writeln(ESCRI,'           g','(',c,')= ',g[c]:9:7);
writeln(ESCRI);writeln(ESCRI);
```

Continuacion...

3.6.5 Programa Convoluciones

```
{Calculo de f(X,t)}
FOR c:=0 TO numc DO
FOR x:=0 TO numx DO
  Fc[c,x]:=g[c]*P[c,x];

{Calculo de F(X,t)}
FOR x:=0 TO numx DO
  BEGIN
    Fx[x]:=0.0;
    FOR c:=0 TO numc DO Fx[x]:=Fx[x]+Fc[c,x];
    IF Fx[x]>1.0 THEN Fx[x]:=1.0
  END;

{Escritura de totales}
write(ESCRI,'        X');
FOR c:=0 TO numc DO write(ESCRI,'   g(Y)P',c,'*');
write(ESCRI,'   F(X,t)');
writeln(ESCRI);
writeln(ESCRI,'  ----------','----------','----------',
        '----------','----------','----------',
        '----------');
FOR x:=0 TO numx DO
  BEGIN
    write(ESCRI,'     ');
    write(ESCRI,x:3);
    FOR c:=0 TO numc DO write(ESCRI,Fc[c,x]:10:7);
    write(ESCRI,Fx[x]:10:7);
    writeln(ESCRI);
    IF x=31 THEN
              BEGIN
                writeln(ESCRI,#12);
                FOR i:=1 to 9 DO writeln(ESCRI);
                writeln(ESCRI,'           (continuacion...)');
                writeln(ESCRI)
              END
  END;
 CLOSE(ESCRI)

END.{Convoluciones}
```

Marca de clase zi (millones)	No. de polizas	Tasa de mortalidad	Monto de reclamacion (millones)	p(zi)
0	0	0.0000000	0.0000	0.0000000
1	14	0.0021850	0.0306	0.0745563
2	28	0.0031885	0.1786	0.2175976
3	18	0.0029056	0.1569	0.1274696
4	9	0.0034274	0.1234	0.0751827
5	4	0.0035282	0.0706	0.0343973
6	2	0.0046855	0.0562	0.0228397
7	6	0.0054488	0.2299	0.0796819
8	3	0.0059270	0.1422	0.0433372
9	2	0.0045980	0.0828	0.0224132
10	5	0.0073732	0.3687	0.0898526
11	3	0.0062000	0.2046	0.0453333
12	1	0.0053580	0.0643	0.0130587
13	2	0.0062945	1637	.0306829
14	1	0.0261520	0.3641	0.0637397
15	0	0.0000000	0.0000	0.0000000
16	2	0.0122795	0.3929	0.0598571
443	100	0.0995513	2.6304	1.0000000

Total de polizas emitidas: 100

Suma asegurada total: $ 443000000.00

Reclamaciones esperadas: 0.4102940

Monto esperado de reclamacion: $ 2630375.00

Calculo de $P^{y*}(X)$

P0*(X)	P1*(X)	P2*(X)	P3*(X)	P4*(X)	P5*(X)
1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.0000000	0.0745563	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.0000000	0.2921339	0.0055586	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.0000000	0.4196235	0.0380052	0.0004144	0.0000000	0.0000000
1.0000000	0.4948062	0.1043612	0.0040431	0.0000309	0.0000000
1.0000000	0.5292034	0.1710461	0.0167592	0.0003916	0.0000027
1.0000000	0.5820432	0.2251435	0.0407237	0.0021821	0.0000357
1.0000000	0.6317251	0.2626850	0.0703564	0.0072395	0.0002513
1.0000000	0.6750623	0.2989290	0.0996589	0.0165614	0.0010661
1.0000000	0.6974755	0.3510622	0.1259058	0.0293392	0.0031167
1.0000000	0.7377231	0.3981959	0.1531674	0.0438045	0.0068909
1.0000000	0.8026615	0.4459492	0.1856702	0.0589332	0.0123911
1.0000000	0.8457204	0.5100461	0.2207999	0.0755836	0.0192416
1.0000000	0.8764033	0.5646306	0.2598566	0.0949875	0.0271740
1.0000000	0.9401429	0.6098177	0.3044509	0.1173380	0.0364039
1.0000000	0.9401429	0.6569325	0.3496001	0.1430897	0.0473730
1.0000000	1.0000000	0.7071306	0.3941087	0.1723365	0.0604507
1.0000000	1.0000000	0.7561505	0.4388910	0.2040691	0.0759167
1.0000000	1.0000000	0.8100664	0.4855031	0.2376160	0.0938778
1.0000000	1.0000000	0.8410909	0.5358305	0.2727927	0.1141336
1.0000000	1.0000000	0.8691302	0.5863808	0.3103527	0.1366246
1.0000000	1.0000000	0.8947977	0.6305994	0.3510254	0.1611421
1.0000000	1.0000000	0.9038334	0.6720509	0.3932973	0.1880330
1.0000000	1.0000000	0.9279275	0.7100998	0.4351770	0.2175500
1.0000000	1.0000000	0.9475224	0.7434052	0.4765055	0.2492784
1.0000000	1.0000000	0.9567860	0.7770312	0.5167229	0.2825387
1.0000000	1.0000000	0.9701489	0.8087755	0.5555526	0.3158313
1.0000000	1.0000000	0.9794875	0.8365975	0.5947725	0.3517603
1.0000000	1.0000000	0.9851134	0.8636699	0.6327676	0.3877195
1.0000000	1.0000000	0.9887866	0.8861751	0.6695811	0.4241797
1.0000000	1.0000000	0.9964171	0.9053304	0.7051293	0.4610862
1.0000000	1.0000000	0.9964171	0.9231229	0.7380003	0.4982465
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9394983	0.7686372	0.5352492
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9507895	0.7973960	0.5714735
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9625364	0.8237280	0.6067924
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9703597	0.8479558	0.6410740
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9766142	0.8701050	0.6740806
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9825512	0.8892141	0.7057749

(continuacion...)

1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9865228	0.9061668	0.7358489
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9898297	0.9212554	0.7639502
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9932218	0.9341395	0.7901771
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9950183	0.9456499	0.8144646
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9967111	0.9557487	0.8368044
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9979007	0.9640408	0.8574323
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9987706	0.9713077	0.8762342
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9991004	0.9772361	0.8931811
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9997855	0.9820123	0.9084715
1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9997855	0.9860614	0.9219841
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9893791	0.9338913
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9918351	0.9444250
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9939615	0.9535687
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9955075	0.9614573
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9966350	0.9682861
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9976090	0.9740233
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9983133	0.9788707
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9987947	0.9829882
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9992395	0.9863805
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9994895	0.9892040
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9996846	0.9915570
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9998076	0.9934146
1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9999062	0.9949346

Calculo de F(X,t)

g(0)= 0.6634552
g(1)= 0.2722117
g(2)= 0.0558434
g(3)= 0.0076374
g(4)= 0.0007834
g(5)= 0.0000643

X	g(Y)P0*	g(Y)P1*	g(Y)P2*	g(Y)P3*	g(Y)P4*	g(Y)P5*	F(X,t)
0	0.6634552	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6634552
1	0.6634552	0.0202951	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6837503
2	0.6634552	0.0795277	0.0003104	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.7432933
3	0.6634552	0.1142264	0.0021223	0.0000032	0.0000000	0.0000000	0.7798071
4	0.6634552	0.1346920	0.0058279	0.0000309	0.0000000	0.0000000	0.8040060
5	0.6634552	0.1440554	0.0095518	0.0001280	0.0000003	0.0000000	0.8171906
6	0.6634552	0.1502726	0.0125727	0.0003110	0.0000017	0.0000000	0.8266133
7	0.6634552	0.1719629	0.0146692	0.0005373	0.0000057	[illegible]	0.85[illegible]
8	0.6634552	0.1837578	0.0168772	0.0007611	0.0000136	0.0000001	0.8646327
9	0.6634552	0.1978610	0.0176045	0.0009616	0.0000230	0.0000002	0.8799054
10	0.6634552	0.2147199	0.0222766	0.0011698	0.0000343	0.0000004	0.9016162
11	0.6634552	0.2266602	0.0249033	0.0014180	0.0000462	0.0000008	0.9164837
12	0.6634552	0.2302150	0.0284827	0.0016853	0.0000592	0.0000012	0.9238996
13	0.6634552	0.2385672	0.0315303	0.0019346	0.0000744	0.0000017	0.9356135
14	0.6634552	0.2559179	0.0340543	0.0023257	0.0000919	0.0000023	0.9558469
15	0.6634552	0.2559179	0.0366853	0.0026700	0.0001121	0.0000030	0.9588476
16	0.6634552	0.2722117	0.0394886	0.0030100	0.0001350	0.0000039	0.9783043
17	0.6634552	0.2722117	0.0422260	0.0033520	0.0001599	0.0000049	0.9814096
18	0.6634552	0.2722117	0.0452335	0.0037080	0.0001861	0.0000060	0.9848005
19	0.6634552	0.2722117	0.0469694	0.0040924	0.0002137	0.0000073	0.9869496
20	0.6634552	0.2722117	0.0485352	0.0044724	0.0002431	0.0000088	0.9899224
21	0.6634552	0.2722117	0.0499685	0.0048161	0.0002750	0.0000104	0.9907369
22	0.6634552	0.2722117	0.0507521	0.0051330	0.0003081	0.0000121	0.9915723
23	0.6634552	0.2722117	0.0518136	0.0054233	0.0003409	0.0000140	0.9932637
24	0.6634552	0.2722117	0.0529139	0.0056777	0.0003733	0.0000160	0.9946457
25	0.6634552	0.2722117	0.0534302	0.0059349	0.0004048	0.0000182	0.9954547
26	0.6634552	0.2722117	0.0541764	0.0061769	0.0004355	0.0000204	0.9964760
27	0.6634552	0.2722117	0.0546979	0.0063894	0.0004659	0.0000226	0.9972428
28	0.6634552	0.2722117	0.0550121	0.0065962	0.0004957	0.0000249	0.9977959
29	0.6634552	0.2722117	0.0552172	0.0067631	0.0005245	0.0000273	0.9982039
30	0.6634552	0.2722117	0.0556433	0.0069148	0.0005524	0.0000296	0.9986670
31	0.6634552	0.2722117	0.0556433	0.0070503	0.0005791	0.0000320	0.9989706

(continuacion...)

32	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0071677	0.0006021	0.0000344	0.9993145
33	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0072616	0.0006247	0.0000367	0.9994332
34	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0073513	0.0006453	0.0000390	0.9995458
35	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0074113	0.0006643	0.0000412	0.9996270
36	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0074528	0.0006816	0.0000433	0.9996940
37	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0075041	0.0006966	0.0000454	0.9997564
38	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.00753[illegible]5	0.0007099	0.0000473	0.9998019
39	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0075597	0.0007217	0.0000491	0.9998408
40	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0075856	0.0007318	0.0000508	0.9998735
41	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0075994	0.0007408	0.0000524	0.9999029
42	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076123	0.0007487	0.0000538	0.9999251
43	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076214	0.0007552	0.0000551	0.9999420
44	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076280	0.0007609	0.0000563	0.9999555
45	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076305	0.0007656	0.0000574	0.9999678
46	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076359	0.0007693	0.0000584	0.9999737
47	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076358	0.0007725	0.0000593	0.9999778
48	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007751	0.0000600	0.9999828
49	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007770	0.0000607	0.9999854
50	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007797	0.0000613	0.9999876
51	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007799	0.0000618	0.9999893
52	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007808	0.0000622	0.9999907
53	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007815	0.0000626	0.9999918
54	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007821	0.0000629	0.9999927
55	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007825	0.0000632	0.9999933
56	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007828	0.0000634	0.9999939
57	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007830	0.0000636	0.9999942
58	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007831	0.0000637	0.9999945
59	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007832	0.0000639	0.9999948
60	0.6634552	0.2722117	0.0558434	0.0076374	0.0007833	0.0000640	0.9999949

3.6.6 Programa Método de Montecarlo.

Utilizando este método se hará la simulación del proceso de reclamación dentro de la cartera de 100 asegurados bajo estudio; el procedimiento utilizado fue el siguiente:

1° Un generador de números aleatorios da los valores de F(X), donde $0 \leq F(X) \leq 1$, así por ejemplo:

Para un miembro de la cartera, la probabilidad de que fallezca durante el año es 0.001893, por lo tanto la probabilidad de que sobreviva es 0.998107. La función de distribución acumulativa está definida por:

$$F(0)=0.001893$$
$$F(1)=1.000000$$

si x=1 significará que el individuo sobrevive en el primer ensayo.

si x=0 el individuo fallece en el primer ensayo.

si el primer número aleatorio generado es por ejemplo 0.00250 puede observarse que F(X)=0.002500 corresponde a x=1, es decir, esta persona sobrevive en el primer ensayo.

2° Un proceso similar es aplicado para los demás miembros de la cartera, para obtener el total de reclamaciones en el primer ensayo. Todos los individuos fallecidos, fueron considerados vivos nuevamente para efectuar el mismo procedimiento en el segundo, tercer,... y así hasta el número total de ensayos, cuyo máximo es 40.

3° Una vez efectuado el total de ensayos se obtiene una matriz, que representa el valor de X para cada ensayo y cuyas componentes son todas cero o uno, donde:

si $x_{ij}=0$, significará que el individuo i fallece en el ensayo j.

Valiéndonos de la matriz anterior, determinamos los tres vectores siguientes:

1. Número de sobrevivientes en cada ensayo, que será igual al número de unos que aparecen en cada ensayo.
2. Número de muertos en cada ensayo, que es igual al número de ceros en cada ensayo.
3. Número acumulado de muertos, para lo cual al numero de muertos en un ensayo determinado se le suman el número de fallecidos de ensayos anteriores.
4. Número acumulado mediode muertes, igual al número de muertos promedio en cada ensayo.

4° Por medio de la matriz anterior se obtiene también la matriz que representa el beneficio por muerte para cada ensayo es decir, en toda componente $x_{ij}=0$ habremos de pagar la suma asegurada correspondiente. De acuerdo a esta nueva matriz se determina:

1. Monto total de reclamación en cada ensayo, igual a la suma de las reclamaciones que ocurren en cada ensayo.
2. Monto acumulado de reclamación, corresponde al monto total de reclamación de un ensayo, más el de ensayos anteriores.
3. Monto acumulado promedio de reclamación que es igual al monto acumulado de reclamación proporcional a cada ensayo.

5° Contando ya con el monto total de reclamación en cada ensayo, se procedió a agrupar esta muestra de la misma forma que en los dos programas anteriores y poder determinar el número de ensayos en los cuales ocurre alguna reclamacion de: -499,999-500,000, de 500,001-1,500,000,etc.
La probabilidad de ocurrencia en cada intervalo se obtiene dividiendo la frecuencia de clase entre el total de ensayos efectuados, que corresponde a $f(X,t)$, siendo posible encontrar el valor de $F(X,t)$ de acuerdo con la relación :

$$F(X,t)=\sum_{x} f(x,t)$$

vista en el inciso 2.2.4 del capitulo anterior.

El listado del programa y los resultados obtenidos se prsen-
tan a continuación:

3.6.6 Programa M. de Montecarlo

```
PROGRAM Montecarlo;

  CONST
    finciclo=100;
    totensay=40;

  TYPE
    vector1=ARRAY[0..finciclo] OF real;
    vector2=ARRAY[0..finciclo] OF integer;
    matriz1=ARRAY[0..totensay] OF vector1;
    matriz2=ARRAY[0..totensay] OF vector2;

  VAR
    sumaseg,qx,f,Fxt,numrec,acumenufa,monrec,
    acumorec,acumemorec:vector1;
    z,nz:vector2;
    Fx,dx:matriz1;
    x:matriz2;
    numviv,numfall,acunufa:vector2;
    i,j,k,ensayos,total:integer;
    temp:real;
    LEE,ESCRI1,ESCRI2:text;


  {Procedimiento para agrupar la muestra resultante del total}
  {de ensyos efectuados}
  PROCEDURE agrupar;

    CONST
      amplitud=999;
      dosmil=2000;

    VAR
      extrsup,extrinf:real;
      n,contador,clase,totn:integer;

  BEGIN {agrupar}
    extrsup:=500;
    extrinf:=extrsup-amplitud;
    n:=0;contador:=-1;i:=1;totn:=0;
    WHILE totn<ensayos DO
      BEGIN
        IF(monrec[i]>=extrinf)and(monrec[i]<=extrsup)
          THEN
            BEGIN
              n:=n+1;
              i:=i+1;
```

Continuacion...

3.6.6 Programa M. de Montecarlo

```
          writeln(i)
        END
      ELSE
     BEGIN
       contador:=contador+1;
       clase:=trunc((extrinf+extrsup-1)/dosmil);
       z[contador]:=clase;
       nz[contador]:=n;
       totn:=totn+n;
       n:=0;
       extrsup:=extrsup+amplitud+1;
       extrinf:=extrsup-amplitud;
     END
   END;
  total:=contador;

 END; {agrupar}



BEGIN {Montecarlo}

 ASSIGN(LEE,'ASIGNADO.DAT');
 RESET(LEE);
 ASSIGN(ESCRI1,'B:SAL3.DAT');
 REWRITE(ESCRI1);
 ASSIGN(ESCRI2,'B:SAL4.DAT');
 REWRITE(ESCRI2);

 {Lectura de datos}
 FOR i:=1 TO finciclo DO readln(LEE,sumaseg[i],qx[i]);

 {Numero de ensayos a efectuar?}
 writeln;write('numero de ensayos a efectuar?');
 readln(ensayos);

 {Escritura encabezado}
 writeln(ESCRI1,'                         ',
       'Valor de F(X) para el ensayo:');
 writeln(ESCRI1);
 write(ESCRI1,'   ');
 FOR k:=1 TO 7 DO write(ESCRI1,'          ',k);
 write(ESCRI1,'...');
 writeln(ESCRI1);
 writeln(ESCRI1,'        --------------------------------',
       '-----------------------------------');


 {Determinar el valor de F(X) para el j-esimo ensayo}
 FOR i:=1 TO finciclo DO
```

Continuacion...

3.6.6 Programa M. de Montecarlo

```
    FOR j:=1 TO ensayos DO
      Fx[j,i]:=random;

  FOR i:=1 TO finciclo DO
    BEGIN
      write(ESCRI1,'        ');
      FOR k:=1 TO 7 DO
        BEGIN
          write(ESCRI1,Fx[k,i]:10:7);
        END;
      IF i=48 THEN
        BEGIN
          writeln(ESCRI1);
          writeln(ESCRI1,#12);
          writeln(ESCRI1,'              Continuacion...');
          writeln(ESCRI1)
        END;
      writeln(ESCRI1)
    END;

  {Valor de X para el j-esimo ensayo}
  FOR i:=1 TO finciclo DO
    FOR j:=1 TO ensayos DO
      BEGIN
        IF Fx[j,i]>qx[i]
          THEN x[j,i]:=1
          ELSE x[j,i]:=0;
          dx[j,i]:=sumaseg[i]*(1-x[j,i])
      END;


  {Escritura del valor de X en el ensyo j para el individuo i}
  writeln(ESCRI1,#12);
  writeln(ESCRI1,'
        'Valor de X para el ensayo:');
  writeln(ESCRI1);
  write (ESCRI1,'  ');
  FOR k:=1 TO 7 DO write(ESCRI1,'           ',k);
  write(ESCRI1,' ...');
  writeln(ESCRI1);
  writeln(ESCRI1,'         ------------------------------',
         '------------------------------------');
  FOR i:=1 TO finciclo DO
    BEGIN
      write(ESCRI1,'  ');
      FOR j:=1 TO 7 DO write(ESCRI1,x[j,i]:10);
      IF i=48 THEN
        BEGIN
          writeln(ESCRI1);
          writeln(ESCRI1,#12);
          writeln(ESCRI1,'              Continuacion...');
```

Continuacion...

3.6.6 Programama M. de Montecarlo

```
            writeln(ESCRI1);
          END;
        writeln(ESCRI1);
      END;

  {Escritura del beneficio por muerte para el idividuo i en}
  {el ensayo j}
  writeln(ESCRI2,'                              ',
          'Beneficio por muerte para el ensayo numero:');
  writeln(ESCRI2);
  write(ESCRI2,'            1');
  FOR k:=2 TO 7 DO write(ESCRI2,'         ',k);
  write(ESCRI2,'...');
  writeln(ESCRI2) ;
  Writeln(ESCRI2,'            ---------------------------',
          '------------------------------------');
  FOR i:=1 TO finciclo DO
    BEGIN
      write(ESCRI2,'     ');
      FOR j:=1 TO 7 DO write(ESCRI2,dx[j,i]:10:0);
      IF i=48 THEN
        BEGIN
          writeln(ESCRI2);
          writeln(ESCRI2,#12);
          writeln(ESCRI2,'            (Continuacion...)');
          writeln(ESCRI2);
        END;
      writeln(ESCRI2);
    END;


  {Calculo de totales}
  FOR j:=1 TO ensayos DO
    BEGIN
      numviv[j]:=0;numfall[j]:=0;monrec[j]:=0;
    END;
  acunufa[0]:=0;acumorec[0]:=0;
  FOR j:=1 TO ensayos DO
    BEGIN
      FOR i:=1 TO finciclo DO
        BEGIN
          numviv[j]:=numviv[j]+x[j,i];
          numfall[j]:=finciclo-numviv[j];
          monrec[j]:=monrec[j]+dx[j,i]
        END;
      acunufa[j]:=acunufa[j-1]+numfall[j]:
      acumenufa[j]:=acunufa[j]/j;
      acumorec[j]:=acumorec[j-1]+monrec[j];
      acumemorec[j]:=acumorec[j]/j
    END;
```

Continuacion...

3.6.6 Programa M. de Montecarlo

```
{Escritura de totales}
writeln(ESCRI1);
write(ESCRI1,'     numero vivos          ');
FOR j:=1 TO 7 DO  write(ESCRI1,numviv[j]:7);
write(ESCRI1,' ...');
writeln(ESCRI1);write(ESCRI1,'      numero muertos       ');
FOR j:=1 TO 7 DO write(ESCRI1,numfall[j]:7);
write(ESCRI1,' ...');
writeln(ESCRI1);write(ESCRI1,'      num. acum. muertos');
FOR j:=1 TO 7 DO write(ESCRI1,acunufa[j]:7);
write(ESCRI1,'  ...');
writeln(ESCRI1);write(ESCRI1,'      med. acum. muertos   ');
FOR j:=1 TO 7 DO write(ESCRI1,acumenufa[j]:7:2);
write(ESCRI1,'...');

{Escritura de beneficios totales}
writeln(ESCRI2);writeln(ESCRI2);
write(ESCRI2,'     mon. tot. recs.');
FOR j:=1 TO 7 DO write(ESCRI2,monrec[j]:6:0);
write(ESCRI2,'...');
writeln(ESCRI2);write(ESCRI2,'      mon. ac. recs.         );
write(ESCRI2,acumorec[1]:1:0);
FOR j:=2 TO 7 DO write(ESCRI2,acumorec[j]:8:0);
write(ESCRI2,'...');
writeln(ESCRI2);write(ESCRI2,'      med. ac. mon. recs.  ');
write(ESCRI2,acumemorec[1]:2:1);
FOR j:=2 TO 7 DO write(ESCRI2,acumemorec[j]:8:1);
writeln(ESCRI2,'...');

{Ordenamiento de las sumas aseguradas totales obtenidas}
{en cada ensayo}
FOR I:=1 TO ensayos -1 DO
  FOR j:=i+1 TO ensayos DO
    BEGIN
      IF monrec[i]>monrec[j]
        THEN
          BEGIN
            temp:=monrec[i];
            monrec[i]:=monrec[j];
            monrec[j]:=temp
          END
    END;
writeln;
FOR j:=1 TO ensayos DO write(monrec[j]:8:0);

agrupar;

{Calculo del valor de f(X,t) con la muestra ya agrupada}
FOR i:=0 TO total DO f[i]:=nz[i]/ensayos;
```

Continuacion...

3.6.6 Programa M. de Montecarlo

```
 {Calculo del valor de F(X,t) con la muestra ya agrupada}
 Fxt[0]:=f[0];
 FOR i:=1 TO total DO Fxt[i]:=Fxt[i-1]+f[i];

 {Escritura de encabezados}
 writeln(ESCRI2,#12);
 writeln(ESCRI2,'
        '         Valor de F(X,t)');
 writeln(ESCRI2,'
        '         ---------------');writeln(ESCRI2);
 writeln(ESCRI2);writeln(ESCRI2,'             Total',
                       ' de ensayos efectuados: ',ensayos);
 writeln(ESCRI2);
 writeln(ESCRI2,'                Marca de','         No. de',
        '          f(X,t)','          F(X,t)');
 writeln(ESCRI2,'                clase zi','     ocurrencias');
 writeln(ESCRI2,'               (millones)');
 writeln(ESCRI2,'               ----------------------------',
        '----------------------------');
 writeln(ESCRI2);

 {Escritura de totales}
 FOR i:=0 TO total DO
   writeln(ESCRI2,z[i]:21,nz[i]:16,f[i]:20:7,Fxt[i]:16:7);

 CLOSE(ESCRI1);
 CLOSE(ESCRI2)

END. {Montecarlo}
```

Valor de F(X) para el ensayo:

1	2	3	4	5	6	7...
0.2113249	0.4723325	0.1293148	0.3929333	0.3997190	0.7750724	0.1956636
0.2065282	0.8534609	0.3077851	0.9156044	0.3242920	0.0449905	0.0191125
0.7021455	0.7880972	0.8758601	0.1972502	0.6604729	0.4123229	0.4009349
0.3037372	0.3934203	0.9625376	0.3786773	0.0506967	0.0412235	0.5291537
0.5621759	0.7320217	0.6421279	0.0488247	0.1227115	0.0411388	0.5208041
0.9736471	0.5110057	0.9742578	0.7730640	0.3895782	0.4669079	0.4424340
0.9796436	0.5859385	0.8033506	0.9080472	0.3496655	0.3185622	0.3052576
0.9469905	0.9530995	0.1611661	0.0017466	0.4766682	0.5415261	0.0681357
0.2677958	0.7569901	0.8617605	0.3784360	0.0295751	0.0268159	0.6318557
0.1594997	0.7667844	0.7065068	0.3507083	0.4526995	0.5095606	0.5446414
0.8648500	0.7769788	0.4415903	0.1764677	0.9756642	0.0720019	0.4995731
0.5519071	0.4073425	0.7585086	0.0589309	0.8134044	0.1404909	0.3350333
0.3340437	0.7029670	0.3940721	0.1466267	0.1261680	0.4870030	0.0247073
0.2599452	0.0742564	0.6704037	0.5373965	0.0195154	0.7293093	0.2275941
0.3636097	0.1169272	0.2749395	0.3383953	0.5443192	0.4285014	0.4580033
0.5643464	0.0120085	0.7604245	0.3069897	0.3707644	0.0939061	0.3355531
0.7667792	0.1259418	0.4449219	0.5062560	0.4183500	0.1784795	0.3351899
0.8108431	0.8100812	0.7118036	0.0339388	0.5958852	0.0805107	0.5971515
0.4817358	0.3516903	0.8697548	0.4096912	0.0614930	0.1479200	0.7770615
0.5101677	0.0229570	0.1727733	0.4990797	0.5926058	0.6578627	0.0756170
0.5718615	0.9814539	0.8201694	0.0171834	0.9119505	0.3553050	0.7791703
0.2880527	0.3701181	0.9565660	0.6083437	0.5576681	0.9205260	0.9591727
0.2252338	0.2671362	0.6719984	0.3862149	0.3330449	0.9741171	0.3724297
0.3952304	0.6960472	0.0014143	0.3977637	0.0067958	0.0377325	0.5610636
0.7551501	0.5255926	0.9256740	0.5235852	0.6129187	0.2779386	0.0525106
0.2074333	0.9702266	0.3705504	0.9123309	0.3067240	0.5047147	0.3195179
0.5995275	0.5891155	0.2072287	0.9438257	0.9648340	0.6749521	0.2801459
0.2253939	0.2971385	0.2520068	0.7459989	0.4451851	0.6402050	0.7977677
0.3225044	0.5143874	0.2672949	0.6923698	0.5276241	0.1974399	0.6810627
0.0748445	0.8662653	0.9596159	0.0017797	0.4409117	0.0889356	0.6840456
0.6114121	0.0824905	0.9816051	0.2383229	0.3627206	0.0022844	0.5060099
0.0065176	0.0520906	0.9710102	0.7116458	0.4136362	0.5703896	0.7915840
0.2797836	0.3034075	0.3509916	0.4763475	0.5501561	0.3714680	0.1707373
0.3961485	0.3140950	0.7296221	0.3335796	0.1144909	0.9290405	0.0586122
0.2658511	0.3061265	0.5008870	0.6257460	0.7115632	0.7119733	0.0939609
0.7444609	0.2420625	0.0406340	0.6465634	0.4130083	0.1343957	0.5483721
0.6338472	0.2433124	0.5823275	0.3310696	0.0191241	0.5257926	0.9173751
0.6771957	0.5629744	0.6944283	0.7605798	0.3261308	0.2909129	0.4496279
0.3590042	0.2123652	0.2709337	0.1617744	0.0002213	0.3579792	0.4736163
0.9450829	0.1270137	0.5960975	0.1066111	0.9641609	0.5030627	0.2773913
0.3875345	0.2053514	0.7674300	0.2123691	0.6069373	0.5063428	0.5164429
0.4238546	0.8835626	0.3558959	0.0416378	0.9829610	0.4006376	[illegible]
0.2267707	0.1593636	0.7976047	0.1022274	0.4115545	0.3013596	[illegible]
0.1142432	0.9480073	0.5540800	0.8476483	0.5579504	0.1873091	[illegible]
0.5497650	0.1310140	0.1121307	0.6741716	0.4303053	[illegible]	[illegible]
0.1419814	0.5129190	0.1673782	0.9716190	0.7901706	0.5433721	[illegible]
0.1448906	0.9021352	0.5867692	[illegible]	0.7334031	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.7276414	0.0475210	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Continuacion...

0.1253380	0.3799294	0.2222239	0.8782078	0.5001373	0.7290378	0.2572045
0.3374355	0.7405032	0.7362407	0.1863766	0.2539092	0.9656060	0.7745045
0.4293415	0.5963793	0.1442567	0.8204446	0.0486834	0.4914829	0.6126227
0.3816164	0.4398368	0.9502698	0.7961285	0.9118933	0.8458225	0.3224317
0.1201329	0.7084672	0.6035902	0.0744571	0.8162928	0.5130914	0.4001169
0.5160764	0.7851745	0.4988407	0.5617722	0.6799360	0.9230686	0.2871760
0.3859446	0.9981754	0.9759566	0.1097277	0.3651978	0.4508457	0.3704195
0.4915479	0.6209989	0.3201858	0.5152902	0.6837636	0.4169267	0.9819700
0.5400090	0.8724865	0.7620885	0.5207388	0.3866310	0.0867282	0.3992629
0.1837633	0.9167923	0.4775375	0.8136650	0.1741105	0.6715792	0.8450460
0.0205586	0.8633829	0.5877182	0.0269729	0.6908248	0.3277214	0.4873795
0.5934551	0.7670372	0.1591283	0.7388789	0.5267092	0.1568086	0.4396364
0.3908258	0.6278469	0.2035782	0.4729123	0.2170115	0.2058076	0.7605019
0.8463557	0.3912160	0.6781906	0.6979145	0.2422920	0.4669973	0.4539737
0.3390429	0.9478611	0.4854009	0.8280395	0.0284236	0.8779693	0.4693623
0.1931976	0.1338111	0.4729568	0.2227540	0.9465915	0.3216276	0.7012903
0.6784425	0.7304077	0.4339187	0.1868370	0.3132935	0.5261389	0.9896932
0.0097130	0.4643049	0.1066593	0.9703900	0.3903400	0.5651821	0.1198187
0.3472569	0.0074693	0.1748640	0.7687870	0.3848537	0.3574489	0.8222270
0.7966345	0.9771799	0.2675306	0.7227748	0.4492699	0.1671431	0.7727911
0.4087166	0.9360283	0.9589694	0.9183722	0.6813765	0.1037316	0.5926962
0.1796945	0.3919184	0.7688031	0.3869208	0.1241137	0.2219931	0.8484402
0.0510600	0.7980670	0.1619671	0.1050748	0.7659744	0.0220194	0.0518332
0.9096254	0.5530030	0.5497091	0.9948006	0.5406038	0.9492145	0.6599982
0.5875135	0.0005679	0.2845896	0.9233773	0.3269998	0.3942949	0.0753704
0.8621596	0.4299159	0.6704812	0.7033965	0.9494726	0.6932897	0.6456976
0.4563115	0.0755135	0.9525693	0.0927622	0.1776451	0.1275404	0.6640402
0.0380296	0.1171397	0.3223517	0.7946909	0.7264525	0.9237011	0.3687709
0.2206865	0.6798862	0.9166387	0.4577118	0.2561427	0.2537384	0.9435750
0.5629677	0.8341568	0.8175530	0.6756663	0.3722760	0.2349312	0.5174504
0.5688709	0.5956683	0.0525301	0.9877085	0.6257252	0.9298712	0.1647073
0.6877064	0.9254496	0.5943177	0.8783050	0.5126755	0.3464624	0.9049685
0.3140970	0.7298423	0.3609760	0.7772349	0.4746248	0.4379213	0.7031694
0.7879781	0.8605004	0.2158780	0.0595896	0.8983833	0.1027770	0.4695578
0.3945974	0.1143906	0.9677089	0.0457732	0.1160740	0.1848711	0.0596939
0.3645152	0.2337918	0.3704665	0.0015024	0.4051320	0.4733576	0.2744506
0.8736044	0.9062956	0.1234611	0.1378060	0.9883053	0.7027030	0.8600131
0.0430502	0.7648061	0.8713155	0.6110258	0.0336540	0.5526865	0.5078793
0.9393505	0.3875398	0.2039650	0.5228157	0.6545510	0.6483995	0.8548595
0.5743155	0.2980258	0.6566575	0.9201423	0.9096816	0.5602461	0.4830764
0.9050681	0.9651056	0.7099532	0.7952846	0.8030436	0.8039429	0.9199654
0.8340435	0.8029333	0.7897249	0.0858343	0.2839472	0.8405190	0.6382743
0.2089895	0.1709754	0.2671579	0.6746953	0.2470154	0.0763158	0.0560633
0.8229666	0.3740110	0.4587501	0.3900842	0.5321834	0.8629874	0.5367054
0.4143473	0.6621317	0.6263117	0.0055300	0.9246990	0.4975005	0.3888857
0.6668172	0.2307414	0.9769655	0.2398744	0.1551226	0.2221339	0.8666021
0.2093739	0.2205568	0.6631469	0.7572713	0.8993268	0.2244794	0.1691648
0.6163278	0.7176069	0.7826036	0.1671874	0.7784970	0.6374409	0.4411968
0.4073016	0.7532331	0.3783959	0.0244016	0.3591311	0.5392349	0.7726333
0.0472307	0.3040897	0.4388967	0.8290055	0.1530393	0.9533907	0.1987220
0.9463629	0.2921432	0.8977913	0.0264032	0.6173444	0.8407496	0.7000234
0.4602395	0.5846725	0.5340774	0.0073117	0.1544817	0.1394658	0.2074101

Valor de X para el ensayo:

1	2	3	4	5	6	7 ...
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Continuacion...

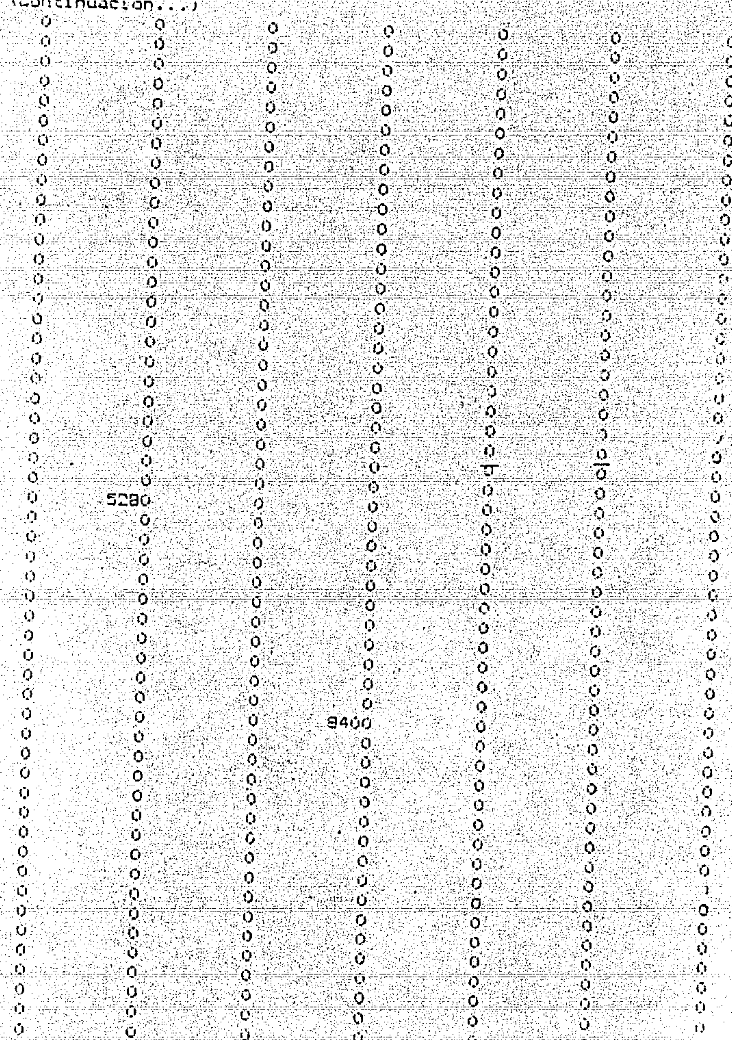
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

numero vivos	99	99	99	97	100	99	100	...
numero muertos	1	1	1	3	0	1	0	...
num. acum. muertos	1	2	3	6	6	7	7	...
med. acum. muertos	1.00	1.00	1.00	1.50	1.20	1.17	1.00	...

Beneficio por muerte para el ensayo numero(miles):

1	2	3	4	5	6	7...
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1440	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1800	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1920	0	0	0
0	0	0	0	0	2040	0
2124	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

(Continuacion...)



mon. tot. recs. 2124 5280 1800 11760 0 2040 0...
mon. ac. recs. 2124 7404 9204 20964 20964 23004 [illegible]...
med. ac. mon. recs. 2124.0 3702.0 3068.0 5241.0 4192.8 3834.0 [illegible]...

Valor de F(X,t)

Total de ensayos efectuados:38

Marca de clase zi (millones)	No. de ocurrencias	f(X,t)	F(X,t)
0	23	0.6052632	0.6052632
1	1	0.0263158	0.6315789
2	5	0.1315789	0.7631579
3	3	0.0789474	0.8421053
4	1	0.0263158	0.8684211
5	1	0.0263158	0.8947368
6	0	0.0000000	0.8947368
7	1	0.0263158	0.9210526
8	0	0.0000000	0.9210526
9	0	0.0000000	0.9210526
10	0	0.0000000	0.9210526
11	1	0.0263158	0.9473684
12	1	0.0263158	0.9736842
13	1	0.0263158	1.0000000

3.6 Análisis, comparaciones y sugerencias.

Podemos hacer un cuadro comparativo en el cual se expongan las diferencias entre los distintos métodos de acuerdo a su aplicación, resultando asi éstas más evidentes:

METODO	CARACTERISTICA
Aproximación de Rosenthal.	Se apoya en la teoría individual, se utiliza para determinar la varianza del monto de las reclamaciones y calcular así el valor de $F(X,t)$ haciendo uso del teorema del límite central por el cual: $F(X,t) \approx \Phi\left(\frac{X - mp_1}{\sigma}\right)$
Aproximación de Esscher.	Se basa en la teoría colectiva. Es una transformación a través de la cual la media de la distribución $F(X,t)$ se traslada al punto en que se desea evaluar la función y donde: $F(X,t) = C(X)[A_0^{(0)}(\omega) + \frac{\beta}{3!} A_0^{(3)}(\omega)]$ $X <$ $1-F(X,t) = C(X)[A_0^{(0)}(\omega) - \frac{\beta}{3!} A_0^{(3)}(\omega)]$ $X >$

(Continuación...)

METODO	CARACTERISTICA
Método Normal Power.	Similar al método anterior pues también utiliza la serie Edgeworth, sin embargo la función F(X,t) se evalua de acuerdo a su media original, suponiendo además la distribución normal, con la diferencia que utiliza más de un término de la serie Edgeworth: $F(X,t) = \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{g_1^2}+1+\frac{6(x-m_A)}{g_1\sigma}}-\frac{3}{g_1}\right]$
Método de Convoluciones.	Asume que la variable aleatoria correspondiente al número esperado de reclamaciones, se distribuye como una Poisson, constituyendo una parte de F(X,t), la parte complementaria es P(Z), que se determina desarrollando una relación entre funciones sucesivas obteniendo la y-ésima convolución de P(Z) representada por $P^{y*}(X)$, por lo que: $F(X,t) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-m}}{y!} m^y P^{y*}(x)$

(Continuación...)

METODO	CARACTERISTICA
Método de Montecarlo.	Se utiliza para simular la variable aleatoria X del monto total de las reclamaciones, determinándose así f(X,t) de acuerdo al número de ocurrencias de X del total de ensayos efectuados y: $F(X,t)=\sum_{x} f(X,t)$

En cuanto a la aplicación presentada se tuvieron los siguientes resultados:

	MEDIA		DESVIACION ESTANDAR		F(8.5,t)*
Individual	\$1,897,689.	est.	\$4,072,975.		0.9474078
		Ros.	\$4,079,947.		0.9471097
Colectiva.	\$2,630,375.		\$5,047,792.	A.E.	0.8669624
				N.P.	0.8903235
				M.C.	0.8646823
				M.M.	0.9210526

* a manera de ejemplo para comparación.

Se observa que en la teoría individual se obtuvieron una me - dia y una desviación estandar menores, pudiendose establecer que la mayoría de los datos se encontrarán agrupados en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x}+\sigma)$, es decir, (1 897 689,5 970 664) o (1 897 699,5 977 636) siendo este intervalo la variación estimada en los montos de re - clamación o márgen de seguridad, que para el caso de la teoría co lectiva es igual a (2 630 375,7 678 167). Considero que en éste caso la teoría colectiva proporciona un resultado más real, pues sabemos que existen varios montos que rebazan el limite de 8 mi - llones.

De la corrida prueba para un monto de reclamación de $8,500,000 es evidente que el valor de F(8.5,t) para el caso del método de convoluciones y la aproximación de Esscher es semejante, difirien do un poco para el método Normal Power y aun más para el método de Montecarlo y la aproximación de Rosenthal. La razón principal es que, como se vio anteriormente, el método de convoluciones , aunque resulta dificil de computar, no se apoya en aproximaciones ni en transformaciones, sino en una expresión exacta; la aproxi - mación de Esscher resulta adecuada para valuar puntos alejados de la media; el método normal power proporciona un error un poco ma- yor al anterior; el método de Montecarlo depende directamente del número de ensayos que se efectúen (que en este caso por capacidad de la máquina no pudieron ser más) y del generador de números a -

leatorios (que como sabemos siempre sigue una tendencia) y por último, la aproximación de Rosenthal nos da un valor muy grande para F(8.5,t) ya que este dato se encuentra muy alejado de la media que, en este caso es igual a 1'897,689.-

Se sugiere que en la práctica se analicen los puntos bajo estudio, observar que tan alejados se encuentran de la media y decidir entonces el método a utilizar, si se cuenta con el auxilio de una computadora efectuar la valuación por varios métodos y comparar los resultados obtenidos. Para valores cercanos a la media puede resultar correcto el método normal power, para valores alejados de ella, la aproximación de Esscher y en general el método de convoluciones será adecuado.

CONCLUSIONES

En este trabajo se expusieron los fundamentos y bases de la teoría del riesgo con el fin primordial de difundirla entre los alumnos de la carrera de Actuaría y los egresados de la misma, dedicados a la práctica del seguro.

A su vez se consideró importante la recopilación de los aspectos probabilísticos fundamentales para el desarrollo y la comprensión de esta teoría, la demostración de los mismos, asi como de los métodos aplicables a la técnica que utiliza y su justificación teórica.

Muy importante en el desarrollo de la presente tesis, es la sistematización de dichos métodos, efectuada con el auxilio de la computadora, elaborando los programas en un lenguaje dinámico, estructurado, que hace a los mismos legibles y entendibles.

En cuanto al caso práctico presentado, el cual consistió en el análisis bajo los diversos métodos y con la ayuda de la computadora, de una cartera de 100 asegurados del ramo vida, durante un período de un año y del cual se concluye:

- Se trata de un grupo joven, por lo que las probabilidades de muerte son bajas, de ahí que el número esperado de reclamaciones haya resultado pequeño: 0.4103.

- La desviación con respecto a la media fue amplia, siendo el valor promedio de reclamación igual a $2,630,375. y teniendo una desviación estandar de $5,047,792., el márgen de seguridad para éste caso va de 2,630,375 a 7,678,167.

ANEXO A

Manual de Operaciones.

El equipo que se utilizó en la elaboración de los programas fue un computador Multitech Modelo 5207 PC compatible, con sistema operativo MS-DOS versión 2.11, lenguaje TURBO Pascal versión 2.0.

El presente manual pretende orientar al usuario en el manejo de los programas presentados y se da una explicación de lo que debe hacerse para que éstos funcionen.

Lo primero que se debe hacer es encender la maquina e introducir un diskette del sistema operativo en la unidad de disco A y accionar el switch.

Se señalará con ( )* lo que deberá ser tecleado por el usuario.

Una vez cargado el sistema aparecerá:

DIOS VERSION 3.1

Microsoft MS-DOS version 2.11

Copyright 1981,82,83 Microsoft Corp.

```
Command V. 2.11

Current date is: Tue 1-01-1980

Enter new date: (MM-DD-AA)*

Current time is: 0:00:12.88

Enter new time: (H:MM)*


A>(B)*

B>(Turbo)*


-------------------------------

TURBO Pascal System Version 2.00 B

                      PC-DOS

Copyright (C) 1983,1984 by BORLAND Inc.

b/w display 80x25

Include error messages (Y/N)? (N)*


Logged drive:B

Active directory:\


Work file:
Main file:

Edit Compile Run Save
Dir  Quit    Compiler Options

Text:
Free:
```

1.- Captura de Datos.

>(E)*

Work file name:(Archivo.DAT)*

Teclear los datos de la forma siguiente:

SUMA ASEGURADA	FECHA DE NACIMIENTO
(miles)*	(AA/MM/DD)*

Una vez terminada la captura:
(ctrl kd)*
>(S)* (slvará la edición)

Para hacer uso de los programas es necesario ordenar los datos por suma asegurada (de menor a mayor), para lo cual se deberá:

1° Salir de TURBO con >(Q)*
2° Colocarse en el sistema operativo MS-DOS, es decir, volver a la unidad de disco A:
   B>(A:)*
3° A (SORT ARCHIVO.DAT DATO.DAT)*
4°Regresar a B:
   A>(B:)*
   B>

Podemos ahora correr los programas.

Programa Inicial.

```
B >(TURBO)*

Estando en turbo:

>(R)*
Work file name:(INICIO)*
LOADING INICIO.PAS
Compiling

Fecha:AA/MM/DD:(86/07/23)*   (por ejemplo)
>(W)*

Work file name: ASIGNADO.DAT
Loading B:ASIGNADO.DAT
>(E)*(desplegará resultados)

(ctrl kd)*
```

Programa Aproximación de Rosenthal.

```
>(W)*
Work file name:(INDIV)*
Loading B:INDIV.PAS
>(R)*
Compiling

monto? (miles)
8500  (pcr ejemplo)
```

```
>(W)*
Work file name: RESUL.DAT
Loading B:RESUL.DAT
>(E)*  (desplegará resultados)

(ctrl kd)*
```

Programa Aproximación de Esscher.

```
>(W)*
Work file name:(ESSCHER)*
Loading B:ESSCHER.PAS
>(R)*
Compiling

monto a evaluar? (millones):(8.5)* (por ejemplo)

>(W)*
Work file name:(SAL2.DAT)*
Loading B:SAL2.DAT
>(E)* (despliega resultados)

(ctrl kd)*
```

Programa Normal Power.

```
>(W)*
Work file name:(NPOWER)*
Loading B:NPOWER.PAS
>(R)*
Compiling

monto a evaluar? (millones):(8.5)* (por ejemplo)

>(W)*
Work file name:SALE.DAT)*
Loading SALE.DAT
>(E)* (despliega resultados)

(ctrl kd)*
```

Programa Convoluciones.

```
>(W)*
Work file name:(CONVOL)*
Loading B:CCNVOL.PAS
>(R)*
Compiling

número de convoluciones? (máximo 20) (6)* (por ejemplo)
```

```
>(W)*
Work file name:(SALIDA.DAT)*
Loading B:SALIDA.DAT
>(E)* (despliega resultados)

(ctrl kd)*
```

Programa Método de Montecarlo.

```
>(W)*
Work file name:(MONTECAR)*
Loading B:MONTECAR.PAS
>(R)*
Compiling

número de ensayos a efectuar? (máximo 40)  (38)*  (por ejemplo)

>(W)*
Work file name:(SAL3.DAT)*
Loading B:SAL3.DAT
>(E)*  (despliega primera parte resultados)
(ctrl kd)*
>(W)*
Work file name:(SAL4.DAT)*
Loading B:SAL4.DAT
>(E)*  (despliega segunda parte resulados)
(ctrl kd)*

>(Q)*  (para salir de TURBO)
Sacar los diskettes y apagar la máquina.
```

CITAS BIBLIOGRAFICAS

(1) Riegel Robert, Miller S. Jerome, SEGUROS GENERALES, PRINCIPIOS Y PRACTICAS, C.E.C.S.A., México, 1980, p.35

(2) misma p.33

(3) Kreyszig Erwin, INTRODUCCION A LA ESTADISTICA MATEMATICA, PRINCIPIOS Y METODOS, LIMUSA, México, 1981, p.100.

(4) Parzen Emmanuel, TEORIA MODERNA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES, LIMUSA, México, 1982, p.408.

(5) Woody C. John, STUDY NOTES OF RISK THEORY, p.15.

(6) misma p.11.

(7) Granville W., Smith P., Longley W., CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, LIMUSA, México, 1980, p.159.

(8) Sóbol I.M., METODO DE MONTECARLO, MIR, Moscú, 1983, p.9.

(9) Cueva de la Benjamín, TABLAS FINANCIERAS, decima segunda e

dición, México, 1981, p.75.

(10) Abramowitz & Stegun, HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS, National Bureau of Standars, 1964. Tomado de: TI PROGRAMABLE 58C/59 MASTER LIBRARY, Texas Instrument Incorpotated, 1979, p.51.

BIBLIOGRAFIA

Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E., RISK THEORY, THE SOCHASTIC BASIS OF INSURANCE, Chapman & Hall, New York, 1984.

Buhlmann Hans, MATHEMATICAL METHODS IN RISK THEORY, Sringer - Verlag, New York, 1970.

Riegel Robert, Miller S. Jerome, SEGUROS GENERALES PRINCIPIOS Y PRACTICAS, C.E.C.S.A., México, 1980.

Molinaro Luigi, LECCIONES DE TECNICA ACTUARIAL DE LOS SEGUROS CONTRA LOS DAÑOS, Textos Universitarios, México, !976.

Woody C. John, STUDY NOTES OF RISK THEORY.

Harris Bernard, THEORY OF PROBABILITY, Addison-Wesley Publishing Co., Menlo Park, California, 1966.

Parzen Emmanuel, TEORIA MODERNA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES, LIMUSA, México, 1982.

Probabilidad I y Probabilidad II, apuntes personales.

Kreyszig Erwin, INTRODUCCION A LA ESTADISTICA MATEMATICA, PRINCIPIOS Y PRACTICAS, C.E.C.S.A., México, 1980.

Sóbol I.M., METODO DE MONTECARLO, MIR, Moscú, 1983.

TI PROGRAMMABLE 58C/59 MASTER LIBRARY, Texas Instrument Incorporated, 1979.

Granville W.,Smith P.,Longley W., CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, LIMUSA, México, 1980.

Luthe Rodolfo, Olivera Antonio, Schutz Fernando, METODOS NUMERICOS, LIMUSA, México, 1981.

Grogono Peter, PROGRAMACION EN PASCAL, Fondo Educativo Interamericano, México, 1984.

Cueva de la Benjamín, TABLAS FINANCIERAS, Porrúa Hnos. y Cia., México, 1981.