

56
29j.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**“UN PROYECTO DE INVESTIGACION:
ANALISIS ESTATICO DE ESFUERZOS DE UNA
PRESA CON LOZA DE CONCRETO, POR EL
METODO DE ELEMENTOS FINITOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

I N G E N I E R O C I V I L

P R E S E N T A N :

**PAUL GARNICA ANGUAS
HECTOR RODRIGUEZ SANCHEZ**

MEXICO, D. F.

1987



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

CAPITULO I .- <u>Introducción</u>	pag.
1.1 Generalidades	1
1.2 Descripción del problema	2
1.3 Objetivos	5
CAPITULO II .- <u>Estado del arte en presas con losa de concreto</u>	
2.1 Evolución de la moderna presa de enrocamiento ..	9
2.1.1 Primer período	10
2.1.2 Período de transición	11
2.1.3 Período moderno	16
2.2 Práctica común en presas con losa de concreto ..	26
2.2.1 Práctica de diseño	26
2.2.2 Cimentación de la losa	26
2.2.3 Losa de concreto	34
2.2.4 Zona de respaldo de la losa	36
2.3 Futuro de las grandes presas con losa de concreto	43
CAPITULO III .- <u>La investigación y su metodología</u>	
3.1 El método, la teoría y la técnica	46
3.2 La caracterización de la investigación	50

3.3 Metodología de la investigación	52
3.4 Criterios para la elección del tema	54
3.5 Investigación bibliográfica	55
3.6 Formulación del modelo matemático	55
3.7 Criterios para la selección de modelos matemáticos	56
3.8 Criterios para elegir hipótesis	57
3.9 Fases para el diseño de experimentos	58
3.10 Organización de la investigación	59
3.11 Ordenación e interpretación de resultados	60
3.12 Generalización	60
3.13 Conclusiones	61
3.14 Recomendaciones	61
3.15 Análisis de información y redacción de informes	61

CAPITULO IV .- Método del elemento finito

4.1 Generalidades	63
4.2 Aspectos históricos	64
4.3 Ecuaciones de equilibrio de la elasticidad	65
4.3.1 Tensor de esfuerzos	66
4.3.2 Tensor de deformaciones	66
4.3.3 Ecuaciones constitutivas	68
4.3.4 Estado plano de deformaciones	72
4.3.5 Estado plano de esfuerzos	76
4.4 Aspectos generales de calculo variacional	77
4.4.1 Propiedades del operador variacional	79

4.4.2	Métodos directos en problemas variacionales ..	79
4.4.3	Método de Ritz	81
4.4.4	Generalidades sobre formulaciones variacionales	82
4.4.5	Primera formulación variacional	83
4.4.6	Segunda formulación variacional	85
4.4.7	Tercera formulación variacional	86
4.5	Métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio.....	87
4.5.1	Método de los residuos pesados	89
4.5.2	Método de Galerkin	91
4.5.3	Método de los mínimos cuadrados	92
4.5.4	Método de colocación puntual	92
4.6	Derivación de la matriz de rigideces de elementos finitos	93
4.6.1	Elemento unidimensional	95
4.6.2	Elemento bidimensional	97
4.6.3	Elemento tridimensional	101
4.7	Ecuaciones de equilibrio del medio continuo global	105
4.7.1	Ensamble de las ecuaciones	106
4.8	Aspectos numéricos de las ecuaciones del elemento finito	107
4.8.1	Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicos	108
4.8.2	Métodos directos generales	108
4.8.3	Método de Gauss	109

4.8.4 Método de Crout	109
4.8.5 Métodos directos para matrices simétricas	110
4.8.6 Método de Gauss modificado	110
4.8.7 Método de Crout modificado	112
4.8.8 Método de Cholesky	113
4.9 Determinación del estado de esfuerzos y deformación	114

CAPITULO V .- Desarrollo de análisis

5.1 Características del análisis	115
5.2 Procedimiento para simular el comportamiento no lineal de los suelos	117
5.2.1 Representación hiperbólica de un material de comportamiento no lineal	122
5.3 Descripción del programa de computadora utilizado	124
5.4 Primera modelación	125
5.4.1 Geometría	125
5.4.2 Simulación proceso constructivo	127
5.4.3 Presentación de resultados	132
5.5 Segunda modelación	
5.5.1 Geometría	134
5.5.2 Simulación proceso constructivo	139
5.5.3 Presentación de resultados	139

CAPITULO VI.- <u>Conclusiones</u>	173
APENDICE A.- <u>Convención suma</u>	178
APENDICE B.- <u>Triangularización de matrices</u>	181
BIBLIOGRAFIA	186

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.1 Generalidades

Las diferentes ramas de la investigación científica se pueden dividir en dos grupos fundamentales: las ciencias empíricas y las ciencias no empíricas. Las primeras pretenden explorar, describir, explicar y predecir los acontecimientos que tienen lugar en el mundo en que vivimos. Sus enunciados, por tanto, deben confrontarse con los hechos de nuestra experiencia, y solo son aceptables si están convenientemente apoyados en una base empírica. Este apoyo empírico se consigue de muchas maneras diferentes: mediante la experimentación, mediante la observación sistemática, mediante entrevistas o estudios, mediante pruebas psicológicas o clínicas, mediante el examen cuidadoso de documentos, etc. Esta dependencia de una base empírica distingue a las ciencias empíricas de las disciplinas no empíricas, como la lógica y la matemática pura, cuyas proposiciones se demuestran sin referencia esencial a los datos empíricos.

Sin duda alguna, el alto prestigio de que la ciencia goza hoy ha de atribuirse en gran medida a sus resonantes éxitos y al alcance cada vez mayor de sus aplicaciones. Muchas ramas de la cien-

cia empírica han sentado las bases para que, asociadas a ellas, surjan tecnologías. Esas tecnologías aplican los resultados obtenidos por la ciencia, y a su vez, proporcionan a la investigación pura o básica nuevos datos, nuevos problemas y nuevos instrumentos de trabajo.

Pero, aparte de ayudar al hombre en sus esfuerzos por controlar su medio, la ciencia responde a otra exigencia, desinteresada pero no menos profunda y persistente, a saber, su deseo de adquirir un conocimiento cada vez más amplio y una comprensión cada vez más profunda del mundo en que vive.

Pero como todo proceso sistemático, la investigación científica requiere de una metodología adecuada para la mejor consecución de sus fines. Esta metodología se basa en el método científico.

El método científico es el procedimiento planeado que se sigue en la investigación para descubrir las formas de existencia de los procesos objetivos, para desentrañar sus conexiones interna y externas, para generalizar y profundizar los conocimientos así adquiridos, para llegar a demostrarlos con rigor racional y para comprobarlos en el experimento y con las técnicas de su aplicación.

Nuestra tesis versa sobre un proyecto de investigación, sobre la metodología para su mejor desarrollo, investigación de un problema ingenieril.

1.2. Descripción del problema

Se construyen presas para crear un lago artificial o derivar

el río a una cota prefijada, con objeto de almacenar o captar los escurrimientos y regar tierras o generar energía, o bien dotar de agua potable a poblaciones o centros industriales. También sirven para regularizar el flujo de una corriente que provoca inundaciones en predios o poblados. Dichas estructuras no siempre responden a solo una de las finalidades antes enumeradas, mas bien se proyectan para funciones múltiples coordinando los servicios de riego, electricidad y regulación de avenidas, con miras al desarrollo integral de una región.

De lo anterior se infiere que una Presa es el resultado de un estudio general, en el que intervienen las características del río, la geología de la región, la existencia de sitios apropiados para crear el embalse y cimentar la obra, de tierras de labor o necesidades de energía en la region, o bien de poblaciones que proteger o dotar de agua. En lo que se refiere a la Presa propiamente dicha, los estudios generales comprenden la selección del tipo de estructura, la disposición preliminar de las partes integrantes (cortina, obra de toma, vertedor, desvio, casa de máquinas, etc.) y una estimación global de su costo.

Atendiendo al procedimiento de construcción, son dos los tipos de cortina : la de relleno hidráulico y la de materiales compactados.

Atendiendo a la sección de la presa, estas pueden ser homogéneas, homogéneas con filtros, de materiales graduados, con delante o con pantalla, o bien presas de enrocamiento. Este último caso es el más empleado en México y un caso límite de este tipo es la presa de enrocamiento con pantalla impermeable, sea de con-

creto o de asfalto en el paramento mojado.

Nuestro interés estará fijado en una presa de enrocamiento con losa de concreto, presa que se piensa construir por parte de C.F.F. en el sitio de Aguamilpa, Nayarit, sobre el cauce del río Santiago.

Como otros trabajos de ingeniería, la selección del tipo de presa y sus obras auxiliares debe hacerse con base en un criterio predominantemente económico. Por supuesto, las alternativas que se estudien tienen que ser compatibles en cuanto a lograr las finalidades previstas.

Este es el caso de la presa con losa de concreto, de dimensiones más pequeñas que una presa tradicional de tierra y enrocamiento, con el subsecuente ahorro económico. Sin embargo no solo el punto económico es de tomarse en cuenta, sino también el aspecto técnico.

La presa de Aguamilpa sería la primera en su tipo en el país, en el período moderno, por lo que la experiencia que se obtendría al proyectarla, diseñarla y construirla sería mayúscula para el progreso técnico nacional en el campo de presas.

El diseño de altas presas con losa de concreto ha experimentado continuas y mayores mejoras en los últimos veinte años. Mejoras en detalles menores, principalmente relativas a juntas y tapajuntas. Los requerimientos de diseño básico son adoptados por considerar que provee una gran seguridad y es un tipo confiable de Presa para alturas arriba de los 245 m.

Para la presa de Aguamilpa se ha considerado una estructura de enrocamiento con losa de concreto en su paramento de aguas

arriba. El proyecto de investigación pretende el análisis de las condiciones de apoyo y de empotramiento de semejante losa.

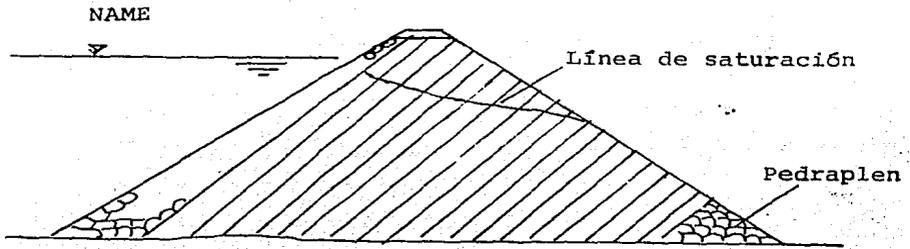
Se pretende efectuar un análisis paramétrico tridimensional variando la geometría y las propiedades mecánicas de las zonas de apoyo de la losa de concreto, a fin de optimizar su diseño. El análisis se efectuará mediante el método de los elementos finitos

1.3 Objetivos.

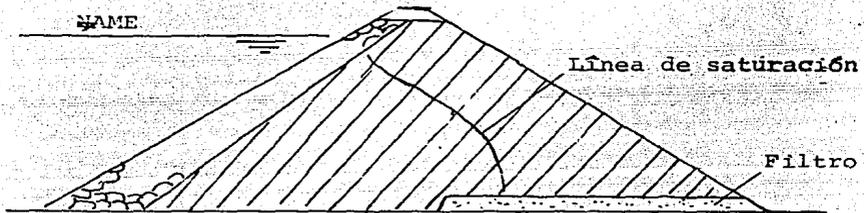
Pudieramos plantear una serie de objetivos, pero los resumiremos en el siguiente :

- Utilizar una metodología de investigación para la solución de un problema ingenieril.

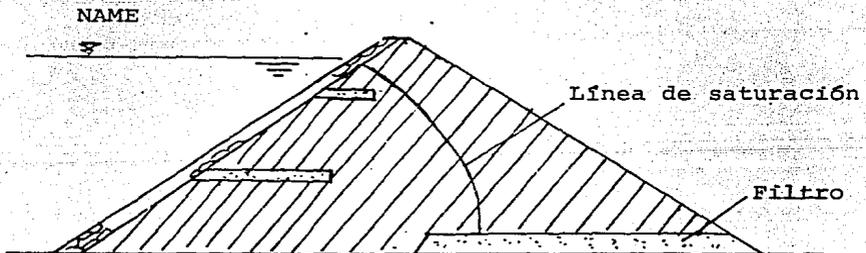
Esta metodología es útil para cualquier tipo de investigación que se realice, ya sea o no de tipo científico. Deseamos mostrar la utilidad de un procedimiento sistemático para realizar satisfactoriamente las cosas, y un resultado palpable de este procedimiento es el cuerpo mismo de esta tesis.



PRESA HOMOGENEA

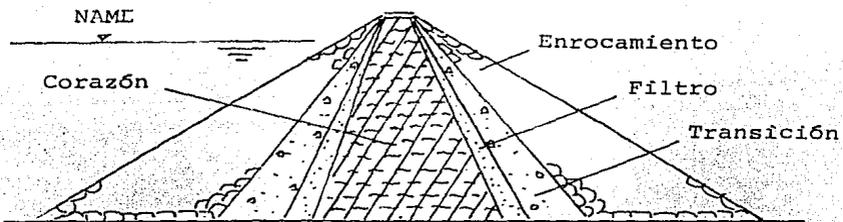


PRESA HOMOGENEA CON FILTRO HORIZONTAL

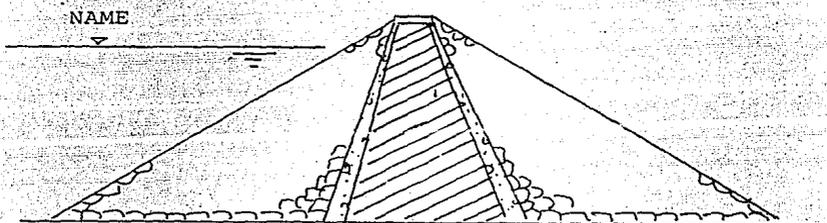


PRESA HOMOGENEA CON FILTROS
AGUAS ARRIBA Y AGUAS ABAJO

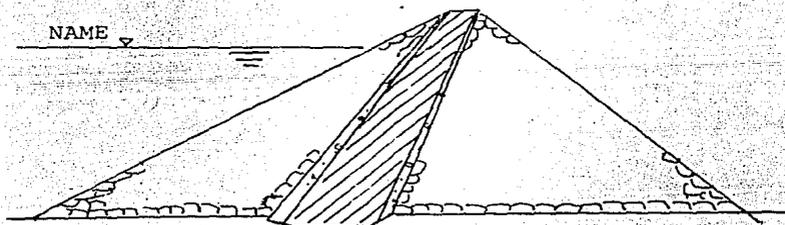
FIG. 1.1 .- Secciones de Presas



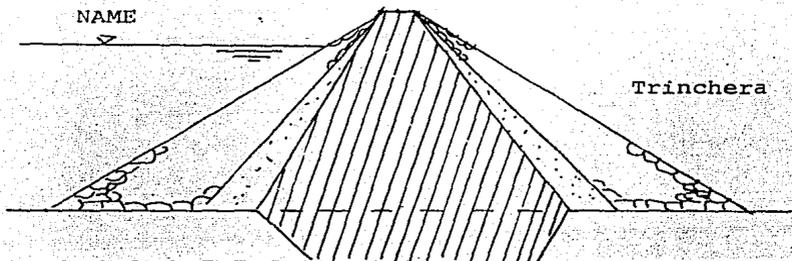
PRESA DE MATERIALES GRADUADOS



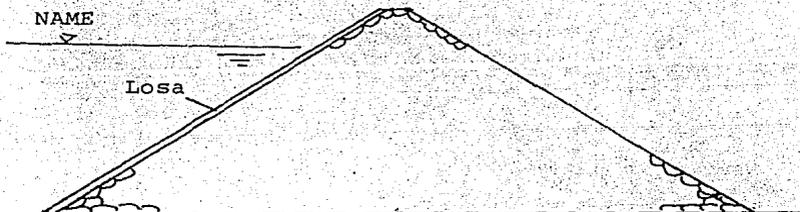
PRESA DE ENROCAMIENTO, CORAZON VERTICAL



PRESA DE ENROCAMIENTO? CORAZON INCLINADO



PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO CON TRINCHERA



PRESA DE ENROCAMIENTO CON LOSA DE CONCRETO
(CIMENTACION RIGIDA)

CAPITULO II

ESTADO DEL ARTE EN PRESAS CON LOSA DE CONCRETO

2.1 Evolución de la presa moderna de enrocamiento.

Las prácticas de construcción en presas de enrocamiento han evolucionado considerablemente desde el siglo pasado. En estas últimas dos décadas, las grandes presas de enrocamiento, principalmente con losa de concreto han estado en una etapa de diseño experimental por parte de muchas de las grandes constructoras del mundo. En efecto, durante la década pasada, la mayoría de las presas construidas arriba de los 30 m de altura han sido de enrocamiento. Sin embargo, en contraste con el desarrollo de las presas de tierra, el presente estado del arte en presas de enrocamiento, en diseño y en tecnología de construcción, se ha desarrollado más por la observación de resultados de campo, prácticas de construcción e instrumentación que por la teoría y pruebas de laboratorio. Dicha metodología es más extendida para presas con losa de concreto que para presas con corazón impermeable.

La evolución de la tecnología de las presas de enrocamiento contemporánea puede clasificarse en tres períodos.

El siglo diecinueve y los principios del siglo veinte pueden ser considerados como el período del enrocamiento colocado a volteo, seguido por dos décadas a partir de los años 40's de vigorosa experimentación, con nuevos diseños y técnicas de construcción. Los últimos veinte años constituyen el período contemporáneo, en el cual, el diseño estandarizado para presas de corazón impermeable y presas con losa de concreto ha sido aplicado con refinamientos, y ha sentado confianza para el diseño y construcción de presas cada vez mas altas.

2.1.1 Primer período (1850 - 1940)

Aunque si bien el uso de la roca como material para la construcción de presas se remonta a la antigüedad, la presa moderna de enrocamiento es generalmente considerada como producto de la fiebre de oro en California. Los mineros, gracias al conocimiento del manejo de explosivos y de la disponibilidad de roca, construían presas de enrocamiento para el almacenamiento de agua que en época de sequía era conducida a los depósitos minerales para el lavado de los mismos.

Estas primeras presas eran construidas por enrocamiento a volteo y sobrepasaban en ocasiones los 25 m de altura, configuradas con taludes de 0.5:1 a 0.75:1, y con un entarimado de madera como cubierta impermeable en la cara aguas arriba de la presa.

Durante este período se construyeron enrocamientos que excedían los 30 m de altura. Ejemplos notables de estas primeras pre-

sas de gran altura son la de Dix River en Kentucky con 84 metros de altura y Salt Springs en California, con 100 m.

El diseño de presas de enrocamiento con membrana impermeable comenzó a desarrollarse alrededor de 1940.

La seguridad de las presas de enrocamiento con losa de concreto en el aspecto de filtraciones era un problema que se agravaba con la altura de la presa.

2.1.2 Período de transición (1940 - 1965)

El uso extensivo de los enrocamientos colocados a volteo para la construcción de presas en los comienzos de la década de los 60's trajo consigo limitaciones y problemas potenciales en la construcción de presas altas (mayores de 90 m).

La disponibilidad y el acarreo de los materiales para el enrocamiento eran considerados desde hace tiempo como un problema importante; se sabía que para enrocamientos colocados a volteo era necesario una roca con una alta resistencia a la compresión simple, puesto que un comportamiento estable de la estructura requería alta resistencia entre los contactos y bordes de la roca. Las especificaciones ingenieriles recomendadas en aquel entonces requerían de roca competente, y de calidad tal que pasara las especificaciones del ASTM para agregados del concreto.

La compresibilidad del enrocamiento era otra limitación para el uso del material colocado a volteo. Aún con roca de la mejor calidad, los asentamientos en el enrocamiento bajo la carga debido al llenado eran bastante grandes, lo suficiente para provocar fuertes movimientos de las juntas y agrietamiento de la losa, con

la subsecuente infiltración del agua almacenada, aunque esta pérdida era en ocasiones justificable económicamente. En presas de enrocamiento con losa de concreto, el asentamiento del enrocamiento está de algún modo limitado por el desplazamiento que puede ser tolerado por la losa.

La compañía norteamericana Pacific Gas and Electric Company hizo extensiva la construcción de presas con losa de concreto antes y durante este período, esto proporcionó a la profesión la oportunidad única de estudiar el comportamiento a largo plazo del enrocamiento a volteo. Seis presas construidas por esta compañía con alturas entre 23 y 43 metros, con taludes de 0.5:1 a 1.5:1 han proporcionado de 50 a 100 años de servicio. La historia del comportamiento de estas presas con taludes de 0.5:1 constituye una prueba para demostrar que se puede tener una estabilidad adecuada con enrocamiento a volteo y ángulos de fricción interna de 45°.

El excelente comportamiento de estas presas probablemente proporcionó el ímpetu y la confianza necesaria para la construcción de presas con losa de concreto cada vez más altas (46-110m) durante el período de 1930-50. Sin embargo, otras presas de enrocamiento a volteo arriba de los 61 m de altura desarrollaron daños en la losa y problemas de filtración. La Presa de Salt Springs con 100 m y la de Paradela con 110 m, mostraron serias filtraciones y problemas tales que llevaron a la suspensión temporal de la construcción de presas de enrocamiento con losa de concreto mayores de 90 metros durante el período de 1960 - 1965.

La última presa alta, New Exchequer (1958), durante este pe-

rudo combino el enrocamiento compactado en espesores de 1.2 a 3 metros, con el enrocamiento a volteo. Sin embargo, ocurrieron algunos problemas en la losa y de filtraciones debido al insuficiente uso del enrocamiento compactado y a la práctica utilizada en ese tiempo para el diseño de las juntas que ahora es considerada como obsoleta.

Una tendencia a colocar el enrocamiento en delgadas capas (alrededor de 3 m) y subsecuentemente compactadas por el tráfico de tractores y camiones de construcción se hizo comun; de esta forma fueron construidas las presas de Goschenen, Little Grass, Miboro y otras posteriores.

Debido al problema de filtraciones que presentaban las presas de losa de concreto, un nuevo y exitoso tipo de presa fue desarrollado. La historia muestra un cambio básico, comenzando en 1740, cuando las losas de concreto son reemplazadas por corazones impermeables de tierra en presas de enrocamiento a volteo, debido al problema de filtraciones y a la necesidad creciente de presas mas altas.

Comenzo a ser evidente para los diseñadores de presas altas que las características de deformación del enrocamiento a volteo y del concreto no eran compatibles. Por el contrario, la flexibilidad de los corazones centrales con filtros hacia posible el acomodarse al gran asentamiento del enrocamiento a volteo. En la década de los 50's, el desarrollo en el conocimiento y aplicación de los principios de la mecánica de suelos, esencialmente respecto a las pantallas de cimentación y el diseño de filtros, hicieron más seguras las presas con nucleo impermeable, incrementando

su popularidad.

La introducción de los corazones impermeables dió nueva vida a los enrocamientos a volteo. La terminación de la presa Goschenen en 1960 con corazón de tierra y con enrocamiento a volteo había excedido los 155 m de altura, algo sin precedentes en esa fecha.

Un tipo de presa con el corazón y los filtros inclinados de acuerdo al talud aguas arriba fue desarrollado por J.W. Growdon, con enrocamiento a volteo colocado en capas de 9 metros. Ejemplo de este tipo de presa es la de Kenney, y de corazón vertical es la presa Cherrie Valley.

La presa de Kenney con 99 m de altura, concluida en 1952 es un ejemplo notable de presas con corazón inclinado. El contacto del empotramiento para el corazón consistía de un recubrimiento de concreto de 1 m de espesor y una cortina de inyecciones. Fueron utilizadas cuatro zonas de filtros, tres aguas abajo y una aguas arriba. La última capa fue un "detenedor de agrietamiento" formado de arena y sugerido por Terzaghi. El revestimiento del talud aguas arriba fue mediante enrocamiento a volteo, con material obtenido directamente de la cantera. La historia de asentamientos ha sido satisfactoria, con un total de 0.8 m para la cresta en 30 años y 0.6 cm/año en los últimos 15 años. El perfil de asentamientos para la cresta y la berma es una curva suave a lo largo del eje, que es una característica favorable del enrocamiento, ya sea a volteo o compactado. Desde el punto de vista del costo de la construcción, la Presa Kenney fué construida justo antes de la introducción del enrocamiento compactado, y cerca

del 30% de la roca acarreada fue descartada por ser muy pequeña para utilizarse en un enrocamiento a volteo, siendo actualmente excelente material para enrocamientos compactados.

La presa de Cherrie Valley con 96 metros de altura y completada en 1956 fue también una experiencia donde no se observaron agrietamientos en la zona central y su comportamiento ha sido excelente. En sus primeros 26 años de vida tuvo un asentamiento total de 0.4 m, es decir, 0.3% de su altura máxima, y los últimos años ha experimentado 0.5 cm/año.

La transición al enrocamiento compactado para ambos tipos de presas, con corazón impermeable y con losa de concreto, ocurre durante el período entre 1955 y 1965. La necesidad de presas más altas, la falta de roca de alta calidad, la diversidad de sitios para desplantar presas y el desarrollo de maquinaria tal como rodillos vibratorios, fueron factores que contribuyeron a la transición al enrocamiento compactado.

Desde 1960, las presas de enrocamiento con corazón de tierra usan enrocamiento compactado, teniendo rápidos progresos en altura (entre 150 y 300 m). Desarrollando, además, equipo pesado que aminora el costo de mano de obra. El desarrollo del rodillo liso vibratorio permitió el uso de roca de baja calidad en el enrocamiento.

Tomó tiempo dejar fuera el temor de las grandes filtraciones en presas altas de losa de concreto y también tomó tiempo ganar experiencia en presas con enrocamiento compactado y desarrollar una económica y efectiva base de apoyo para la losa.

Terzaghi aceleró el pensamiento en cuestiones importantes pa-

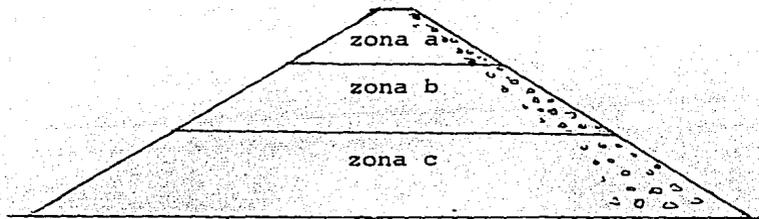
ra el desarrollo de presas de enrocamiento con losa de concreto en dos exposiciones en el simposium ASCE de presas de enrocamiento.

Terzaghi recomendó que las presas altas de enrocamiento a volteo deberían estar compuestas de tres zonas (fig.2.1.a); una zona superior de roca pequeña, una zona central con roca de tamaño medio y una inferior de roca grande. Esta zona inferior sería la más compresible. A Terzaghi no le gustaba la alta compresibilidad del enrocamiento a volteo y había notado también la pérdida de resistencia bajo saturación para varios tipos de roca. Como un remedio él sugirió el compactamiento del enrocamiento, con lo cual él creía poder mejorar el comportamiento de las presas con losa de concreto, logrando mayores alturas y permitir el uso de roca de menor calidad.

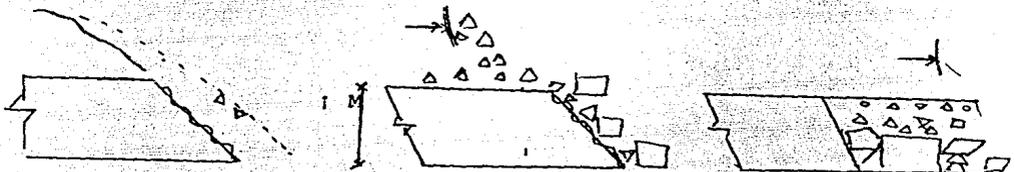
En el simposium de la ASCE de 1958 sobre enrocamientos, se dieron vastos cambios en las especificaciones de estos. En Ambuklao, en 1955, la mayor parte del enrocamiento a volteo fue cambiado a capas de espesores de 0.5 m debido a la baja resistencia y el pequeño tamaño de algunas de las rocas disponibles. El mismo cambio fue hecho en Bownlee en 1958 debido al tamaño del basalto encontrado. Ambas presas comenzaron como enrocamiento a volteo y terminaron con enrocamiento a volteo y compactado.

2.1.3 Período moderno

En el simposium de la ASCE para presas de enrocamiento en 1960 y en el octavo congreso de grandes presas efectuado en Edimburgo en 1964, la presa de enrocamiento se definió, de manera imprecisa



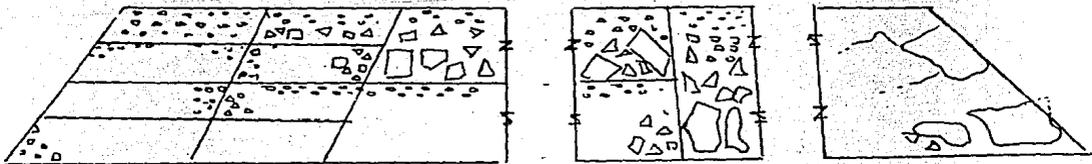
(a) ENROCAMIENTO A VOLTEO
(POR TERZAGHI)



(b) TENDIDO DE ENROCAMIENTO COMPACTADO



(c) VARIACION DE LA DENSIDAD



(d) ZONIFICACION DE ENROCAMIENTO
COMPACTADO.

FIG. 2.1.- ENROCAMIENTO A VOLTEO
Y COMPACTADO

como "una presa constituida por roca, colocada a volteo o compactada en capas, como principal elemento estructural"; esta definición incluía tanto presas de nucleo central como presas con losa de concreto. Aunque si bien el enrocamiento por volteo es aún usado efectivamente en otras zonas de la presa, como en la línea de base aguas abajo o en las ataguías, la compactación ha llegado a ser universal en toda presa de enrocamiento. Una definición más actualizada para una presa de enrocamiento sería: "Una presa donde la compactación de la roca en capas es el principal elemento estructural".

La transición del enrocamiento a volteo al compactado fue rápida e inevitable. Había una creciente necesidad de aumentar la altura de las presas, pero el requerimiento de rocas de gran tamaño y alta resistencia estaba limitado en muchos sitios.

La necesidad de utilizar el material que se encontrara en el lugar, también contribuyó de manera decisiva al desarrollo de enrocamientos compactados. La llegada del rodillo liso vibratorio facilitó el uso económico y adecuado de roca de mala calidad, compactada en capas. Con este equipo se logró una alta resistencia y una baja compresibilidad del material al compactar en delgados espesores, complementando con la adición de agua para obtener altas densidades.

La 'trabazón' entre rocas es de particular importancia en presas de enrocamiento con losa de concreto. Otra ventaja extra de las presas con enrocamiento compactado es su capacidad para tolerar el paso de una avenida sobre ella, estando incompleta.

Características del enrocamiento compactado.

Las figuras 2.1(b-c) muestran la colocación y el aspecto resultante de un enrocamiento compactado en capas entre 1 y 3 m de espesor. El enrocamiento resultante no es homogéneo, presenta segregación, lo cual dificulta a alcanzar las propiedades deseadas de densidad, resistencia y permeabilidad.

La fig. 2.1(b) muestra la colocación de la capa. Un tractor empuja las grandes rocas sobre su frente apoyándose en el espesor ya completado, las rocas pequeñas caen debajo de la hoja empujadora y se distribuyen proporcionando una superficie de rodamiento por la compactación y tráfico en la construcción.

El rodillo liso vibratorio es efectivo en la compactación de las rocas pequeñas y finos en la zona superior y para la trabazón entre rocas en la zona inferior. La acción de la trabazón causada por el rodillo es particularmente importante en el desarrollo de los contactos horizontales entre rocas.

En la figura 2.1(c) se muestra una capa de enrocamiento, donde se observa la diferencia de densidades entre la mitad superior y la inferior. El material de la mitad superior es de mucho menor tamaño. La permeabilidad horizontal en estas capas es mucho mayor que la permeabilidad vertical. La figura 2.1(d) muestra las zonas que más comunmente se encuentran en una capa compactada de una presa de enrocamiento.

Uso del agua en la compactación de enrocamientos.

El agua utilizada durante la colocación del enrocamiento es del orden del 20% del volumen de roca, mucho menor que la cantidad utilizada en enrocamientos a volteo. El agua es benéfica para

cualquier calidad de roca, especialmente en aquellos tipos que pierden resistencia después de la saturación. Sin embargo, algunas veces no es posible agregar mucha agua, ya que al drenar esta en el enrocamiento arrastra consigo gran cantidad de partículas en suspensión contaminando el agua de río abajo, especialmente en lugares donde el agua río abajo tiene usos múltiples o sobrepasa los límites de turbiedad para la vida de los peces. En tales casos, el espesor de la capa se reduce y se incrementan las pasadas para compactar la capa y alcanzar la densidad adecuada.

Calidad de la roca en enrocamientos compactados.

No hay alguna especificación sobre la calidad de la roca o sobre la graduación de ella para enrocamientos compactados. La roca que no pasa las especificaciones para agregados de concreto puede ser aun aceptable en enrocamientos cuando se tiene un manejo adecuado. Rocas de mala calidad como areniscas, esquistos o argilita pueden utilizarse como lo ha demostrado la experiencia.

Desde luego, es necesario conocer las características de la roca antes de escribir alguna especificación para cualquier trabajo.

El módulo de compresibilidad del enrocamiento, determinado a partir de niveles hidráulicos, es un parametro usado para medir la calidad del enrocamiento. La experiencia en muchos proyectos, indica que el rango en que se encuentra el módulo varía desde $0.21 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$ a $1.38 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$, dependiendo del tipo de roca, la graduación del enrocamiento, el espesor de la capa, la compactación, etc.

El módulo de compresibilidad en el enrocamiento es un parámetro utilizado tanto para presas de corazón impermeable como en presas con losa de concreto; este da base de comparación para el comportamiento de las presas existentes, y para establecer un diseño y procedimientos de colocación del enrocamiento para nuevas presas. Este módulo tiene significancia especial en presas altas, ya que aumenta con la presión en enrocamientos compactados.

El módulo de compresibilidad determinado mediante niveles hidráulicos para la presa Murchison fue de $1.5 \times 10^8 \text{ Kg/m}^2$. En esta presa el enrocamiento era de grava bien graduada, en capas de 1 m de espesor y compactadas con 8 pasadas de rodillo vibratorio de 10 toneladas.

Uso de la grava como enrocamiento compactado.

La grava natural queda fuera de la definición usual de enrocamiento, pero puede ser utilizada como material de cubierta para la presa, es un material más económico de manejar y se puede utilizar en combinación con el enrocamiento. Su módulo de compresibilidad es 5 a 10 veces mayor que el del enrocamiento compactado, y cerca de 40 veces mayor que el del enrocamiento a volteo.

Puesto que los movimientos de la losa se incrementan con el cuadrado de la altura de la presa, la grava puede ser utilizada en presas con losa de concreto para alcanzar alturas mayores que la de la presa más alta de este tipo construida en la actualidad, Foz do Areia con 160 m de altura.

Un módulo típico para gravas, basado en mediciones de campo es de 3.65×10^4 Kg/m² en la presa Orville y de 6.8×10^4 Kg/m².

El espesor especificado para una capa compactada de grava varía entre 0.3 y 1 m, dependiendo de la altura de la presa, tamaño de la grava y porcentaje de finos. Para grava con un porcentaje de finos entre 7 y 12 %, una excesiva humedad crea un terraplen elástico, aunque si bien puede ser conseguida una densidad adecuada.

Presas modernas de enrocamiento con núcleo impermeable.

Se ha afirmado en muchos lugares, que el advenimiento del enrocamiento compactado ha estimulado el diseño y construcción de altas presas. Las dos presas más altas de enrocamiento con corazón de tierra hasta 1982 son la de Esmeralda, en Colombia (235m) concluida en 1975 y Chicoasen en Mexico (261 m) terminada en el año de 1980; las alturas mencionadas son medidas a partir del punto más bajo de la cimentación. Ambas presas tienen 55 m. de excavación a partir del lecho del río. La experiencia con las presas de Esmeralda y Chicoasen ha sido excelente.

La presa Esmeralda, perteneciente al proyecto Chivor en Colombia, tiene un corazón inclinado. Los asentamientos en la cresta durante el primer llenado fueron de 1m., pero no se detectaron grietas en el corazón y la infiltración en la galería fue de solamente 90 L/s. El enrocamiento es una combinación de calizas, cuarcita, esquisto, argilita y algo de grava.

La presa Chicoasen ha tenido también excelente comportamiento. Tiene un enrocamiento a volteo en el talud de aguas arriba, que no es una característica muy frecuente.

Presas modernas de enrocamiento con losa de concreto.

El análisis del excelente comportamiento de presas altas de enrocamiento compactado con núcleo impermeable, no solo ha provisto de datos sobre el enrocamiento bajo altas presiones, sino también ha restaurado la confianza en los diseñadores de presas con losa de concreto.

Presas con losa de concreto como la de Cethana, Anchicaya y Areia han contribuido al estado del arte en el diseño de presas de enrocamiento, mediante el cual se ha mejorado el comportamiento de estas.

Resistencia sísmica del enrocamiento compactado

Las presas de enrocamiento con losa de concreto han sido usadas en mayor número en años recientes, primeramente como resultado de la eliminación de los problemas de asentamientos a través del uso del enrocamiento compactado.

Una pregunta importante que algunas veces se hace concerniente al uso de presas de enrocamiento con losa de concreto es su comportamiento bajo un fuerte sacudimiento sísmico. Muchos ingenieros argumentan que este tipo de presas tienen una reserva de resistencia sísmica grande en comparación con las presas de tierra y enrocamiento frente a un daño potencial. Algunos argumentos que respaldan esta posición son :

1. Debido a que la presión del agua actúa solamente en el paramento aguas arriba, esta provee estabilidad al conjunto del enrocamiento.

2. Debido a que no hay agua dentro del enrocamiento, no pueden producirse presiones de poro debido al sacudimiento sísmico, como consecuencia, las deformaciones serán pequeñas.

3. Las presas modernas de enrocamiento con losa de concreto están diseñadas con una zona aguas arriba compuesta de roca pequeña y suelo, de manera que se tiene una permeabilidad más pequeña que la que tiene el cuerpo del enrocamiento. De este modo aún si la losa de concreto fuera agrietada durante un fuerte sismo causando filtraciones a través de esta, el enrocamiento podría aún ser estable, ya que la cantidad de agua que pudiera pasar a través de la zona aguas arriba mas impermeable es mucho menor que la cantidad que pudiera poner en peligro la seguridad del cuerpo del enrocamiento.

Aunque todos estos argumentos tienen considerable mérito, es también verdad que la gran mayoría de este tipo de presas han sido construidas en regiones de relativa baja sismicidad y no ha sucedido el caso de que una presa halla sido sujeta a un fuerte sacudimiento sísmico para demostrar el buen comportamiento de una estructura real.

Los métodos de análisis de respuesta sísmica para presas de enrocamiento se han usado desde hace ya tiempo. Los análisis son generalmente hechos utilizando modelos de elementos finitos de la presa en cuestión en dos o tres dimensiones y evaluando la distribución de aceleraciones en la presa mediante programas de aná-

lisis de respuesta dinámica en los cuales las características no lineales de la relación esfuerzo-deformación del la presa son tomadas en cuenta por el uso de representaciones equivalentes.

Variación del almacenamiento y operación ciclica.

La carga debida a la variación del almacenamiento en el vaso ha provisto de algunos datos interesantes sobre la resistencia ciclica de los enrocamientos.

Para proyectos donde el almacenamiento varía, inicialmente existirá la duda de cuales son los efectos que producen los repetidos y largos ciclos del nivel del agua en los asentamientos de un enrocamiento con losa de concreto. La presa de Town Sauck de 43 m, construida a base de riolita colocada a volteo, terminada en 1963, con rango de operación diario de 24 m se asento 0.3, 0.1 y 0.04 m en el primer, segundo y tercer año de un período de cinco. Este es un comportamiento normal, en lo que a asentamientos se refiere, y estan en límites tolerables.

La presa de Cabin Creek, de enrocamiento compactado y terminada en 1967 tiene 67 metros de altura y se opera con un ciclo diario de 27 m. El asentamiento al cabo de 10 años de operación fué de 0.12 m, 0.02 % de su altura, y la infiltración nunca excedió los 28 l/s. Estos datos sugieren que la operación ciclica del nivel del embalse no afecta el comportamiento de las presas de enrocamiento con losa de concreto.

2.2 Práctica común en presas de enrocamiento con losa de concreto

2.2.1 Práctica de diseño.

El diseño de presas de enrocamiento con losa de concreto es esencialmente poco analítico, basado principalmente en la experiencia. En la tabla 2.1 se muestran los datos físicos de presas con losa de concreto en orden cronológico.

El súbito cambio de enrocamiento a volteo a enrocamiento compactado alrededor de 1962 fué bastante notorio, se realizó el abandono de las excavaciones de pie por los pie de losa, se incrementó el uso de rocas de baja resistencia, se aminoró el espesor de las losas y bajo el porcentaje de refuerzo.

2.2.2 Cimentación del pie de losa

La cimentación más recomendable para el pie de losa es en una roca de alta resistencia no erosionable, aunque pueden utilizarse rocas intemperizadas de mala calidad dandoles un tratamiento adecuado.

El criterio a seguir es el eliminar la posibilidad de erosión o socavación en la cimentación. La práctica de diseño y construcción del pie de losa consiste en excavar una zanja de profundidad adecuada que provea de una cimentación competente. Esta excavación requiere hacerse cuidadosamente para minimizar el fracturamiento de la roca en la superficie en que el pie de losa se colocará. Para obtener un buen contacto entre el concreto de la cimentación y la roca se debe de hacer un limpiado de la misma a base de agua o agua-aire.

TABLA 2.1.- Lista parcial de presas de enrocamiento con losa de concreto

Nombre	Altura (m)	Localización	Año de terminación	Taludes		Área de la losa (m ²)
				arr.	aba.	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Morena	54	California	1895	0.6	1.3	
Strawberry	50	California	1916	1.2	1.3	
Dix River	84	Kentucky	1925	1.0	1.4	
Salt Springs	100	California	1931	1.1	1.4	10,900
Cogswell	85	California	1934	1.35	1.6	
Malpaso	78	Perú	1936	0.5	1.33	
Cogotí	75	Chile	1939	1.6	1.8	
Lower Bear 1	71	California	1952	1.3	1.4	5,800
Lower Bear 2	50	California	1952	1.0	1.4	2,800
Paradela	112	Portugal	1955	1.3	1.3	55,000
La Joie	87	Canada	1955	1.1	1.5	
Pinzanes	67	México	1956	1.2	1.3	
Courtright	98	California	1958	1.0	1.3	6,700

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Wishon	82	California	1958	1.0	1.4	20,000
San Idelfonso	62	México	1959	1.4	1.4	
New Exchequer	150	California	1966	1.4	1.4	
Cabin Creek	76	Colorado	1967	1.3	1.3	
Fades	70	Francia	1967	1.3	1.3	16,500
Rama	110	Yugoslavia	1967	1.3	1.3	
Kangaroo Creek	59	Australia	1968	1.3	1.4	8,000
Pindari	45	Australia	1969	1.3	1.3	16,400
Cethana	110	Australia	1971	1.3	1.3	23,700
Alto Anchicaya	140	Colombia	1974	1.4	1.4	22,300
Le Rouchain	60	Francia	1976	1.4	1.4	16,000
Little Para	54	Australia	1977	1.3	1.4	10,200
Golillas	130	Colombia	1978	1.6	1.6	14,300
Outardes 2	55	Canada	1978	1.4	1.4	8,375
Winneke	85	Australia	1979	1.5	2.2	82,500
Bailey, R.D.	95	U.S.A.	1979	2.0	2.0	65,000

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Areia	160	Brazil	1980	1.4	1.4	139,000
Neveri	115	Venezuela	1981	1.4	1.5	53,000
Mackintosh	75	Australia	1981	1.3	1.3	27,100
Mangrove Creek	80	Australia	1981	1.5	1.6	29,100
Shiroro	130	Nigeria	1982	1.3	1.3	150,000
Yacambu	150	Venezuela	1982	1.5	1.5	13,000
Murchison	89	Australia	1982	1.3	1.3	16,200
Awonga	47	Australia	1982	1.3	1.3	
Fortuna	65	Panama	1982	1.3	1.4	
Glennies Creek	67	Australia	1983	1.3	1.3	50,000
Salvajina	145	Colombia	1983	1.5	1.5	
Bejar	71	España	1984	1.3	1.3	19,140
Terror Lake	58	Alaska	1985	1.5	1.4	
Alsasua	50	España	1985	1.3	1.4	13,850
Kotmale	97	Sri Lanka	1985	1.4	1.45	60,000
Lower Pieman	122	Australia	1986	1.3	1.5	35,000

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Iruru	50	Peru	1986			
Ita	123	Brazil	BD	1.3	1.3	110,000
Cirita	85	Indonesia	BD	1.3	1.4	
Segredo	145	Brazil	BD	1.3	1.3	21,000
Acena	65	España	BD	1.3	1.3	
Kaliwa	100	Filipinas	BD			
Machadinho	124	Brazil	BD	1.3	1.3	
La Miel	180	Colombia	BD	1.5	1.5	
Musa	150	Nueva Guinea	P	1.5	1.5	
Cuesta Blanca	80	Argentina	P	1.4	1.5	
Aguamilpa	180	México	BD	1.5	1.5	
Arr : Aguas Arriba ; Aba : Agua's Abajo P : Propuesta ; BD : Bajo Diseño						

Para los 140 m. de la presa de Salvajina , donde la parte superior de la cimentación de la presa contenía grandes áreas de roca severamente intemperizada con propiedades parecidas a las del suelo, la cimentación fué cubierta con dos capas de filtros finos de arena obteniendose buenos resultados, esto es considerado como una buena práctica de conservación en lugares donde existe alguna posibilidad de que el suelo como material de cimentación pueda migrar por erosión a los vacíos del enrocamiento.

Dimensiones.

El ancho del pie de losa para una cimentación en roca dura es del orden del $1/20$ a $1/25$ de la carga de agua. El ancho mínimo generalmente ha sido de 3m. y pensar en 2m. podría ser adecuado para presas con menos de 40 m. de altura con roca de buena calidad.

El diseño del espesor ha sido frecuentemente hecho semejante al espesor de la losa del paramento. Una excavación irregular y una topografía irregular requerirán de un espesor mayor, pero un espesor mínimo de 0.3 m. es generalmente razonable para la mayor parte de los pies de losa. Un diseño con espesores de 0.4 a 0.5 puede ser considerado en el caso de presas grandes.

Estabilidad.

El pie de losa debe estar diseñado de manera que resista la componente horizontal de la carga de agua que no toma el enrocamiento. Para pies de losa de espesor normal la resistencia debida a la fricción es suficiente para resistir la componente del agua,

a menos que la cimentación este orientada en planos de baja resistencia al corte .

La carga de agua que actúa sobre la losa del paramento abre las juntas perimetrales de manera que no existe interacción entre esta y el pie de losa.

Distribución.

La disposición del pie de losa dependerá principalmente de la pendiente de los empotramientos, y del espesor y naturaleza del suelo de cimentación.

Para lograr la orientación del pie de losa se pueden utilizar diversos métodos de excavación, como el uso de explosivos en roca. Ocasionalmente el movimiento de tierras es necesitado solo para exponer la roca de la cimentación.

En cañones escarpados de roca competente, el pie de losa es colocado ya sea directamente en la superficie o a poca profundidad de ella para evitar las dificultades de la excavación.

El pie de losa es tendido en toda su longitud en una serie de líneas rectas. Los puntos de desviación angular son seleccionados de acuerdo a condiciones topográficas y de cimentación, y no se requiere de una relación con las juntas verticales de la losa del paramento . La línea de referencia de la excavación del pie de losa se localiza sobre el plano de la losa del paramento.

Refuerzo, Juntas y Anclajes.

Los detalles usados en la práctica actual del pie de losa han

sido satisfactoriamente probados por la experiencia. Algunas mejoras recientes han simplificado la construcción y el diseño, lo cual ha producido cierta disminución en el costo.

El principal propósito del acero de refuerzo en el pie de losa es el mismo que el que se persigue en la losa de concreto, es decir protección contra cambios de temperatura y minimizar el ancho de las grietas que pudieran desarrollarse como consecuencia de esfuerzos de tensión debidos por flexión. Antiguamente se utilizaban dos capas de acero, en la actualidad una capa simple es suficiente. El acero se coloca en un 3% en cada dirección con un recubrimiento de 10 a 15 cm. desde la superficie superior como acero por temperatura desde donde es enganchado por las anclas.

Antiguamente, era común la construcción de juntas con protecciones hidráulicas a determinadas distancias. En la presa de Salvajina esta práctica fué cambiada permitiendo al contratista la elección de la localización de las juntas de construcción basándose en la topografía y en conveniencia de la construcción. Se considera como buena práctica, que el refuerzo longitudinal continúe a través de las juntas ya que evita el uso de las protecciones hidráulicas.

Las anclas no están diseñadas para soportar cargas producidas por subpresión. Su longitud, espaciamento y diámetros debe elegirse de acuerdo a las características de la roca de cimentación. El propósito de las anclas es simplemente el de ligar el concreto con la roca.

Las anclas utilizadas comúnmente se encuentran en el rango de los 25 a 35 mm (# 8 a # 11) de diámetro, espaciadas aproximadamente

de 1.0 a 1.5 m en cada dirección con longitudes de 3 a 5 m.

2.2.3 Losa de Concreto.

Las losas de concreto han demostrado su durabilidad bajo altos gradientes hidráulicos y condiciones climáticas extremas, aún en las presas de enrocamiento a volteo antes del uso de puzolanas. El espesor de la losa en este tipo de presas inicialmente se proporcionaba de acuerdo a la relación $0.3 \text{ m} + 0.0067 \text{ H}$ con respaldo de rocas de gran tamaño.

En presas de enrocamiento compactado con respaldo semipermeable, la colocación del concreto se hace en franjas verticales, y el espesor se ha reducido a 0.003 H . Estas losas han dado un comportamiento satisfactorio y la tendencia esta dirigida a tener espesores aún menores.

En Tasmania, donde la Comisión-Hidroeléctrica ha construido nueve presas de enrocamiento con losa de concreto desde 1966 y con cinco proyectos más a completar en 1992 la tendencia en el diseño es el uso de losas delgadas y de espesor constante. Para cuatro presas de 40 a 75 m. han usado un diseño constante de 0.25 m.

Para la presa de Murchison de 94 m. completada en 1982, el diseño de la losa consistió en un espesor constante de 0.30 m. Existe un espesor de 0.25 a 0.30 m. que es considerado como el mínimo necesitado para cubrir el acero y para formar una superficie donde el agrietamiento por contracción sea insignificante.

Refuerzo.

Refuerzo.

El uso de un 4% de refuerzo, en cada dirección, para presas de enrocamiento compactado, ha sido un cambio muy útil y económico en comparación al 0.5% para presas con enrocamiento a volteo. Actualmente existe una tendencia a hacer que el refuerzo pase a través de las juntas verticales, que va en contra de la práctica tradicional.

Cuando el refuerzo pasa a través de las juntas verticales existe menor riesgo a agrietamientos por contracción en las juntas de construcción.

El acero de refuerzo siempre se coloca en una capa al centro de la losa. El propósito es hacer que esta, con un espesor dado, sea lo más flexible posible, permitiendo pequeños asentamientos diferenciales sin desarrollar altos esfuerzos por flexión y proveer una resistencia a la flexión igual en ambas direcciones. Aún en losas con un espesor de 0.60 m., el acero en el centro funciona satisfactoriamente en el control de grietas por contracción.

Junta perimetral.

Cuando se llena el embalse, la junta perimetral se abre y sufre desplazamientos moderados, y puede ser objeto de filtraciones si no fue correctamente diseñada, construida e inspeccionada. Para presas de altura media (menos de 75 m.) este desplazamiento es de pocos milímetros pero puede ser hasta de varios centímetros para presas altas. En la presa de Areia de 160 m. las aberturas en la junta perimetral variaron de 2.5 cm. a 5 cm. no hubo fil-

tracciones por la junta , pero es probable que esta halla sido dañada.

La tendencia al respecto de juntas perimetrales esta enfocada al uso de 1 a 3 juntas impermeables separadas.

Construcción.

Comenzando con la presa de Piedras en España en 1967, todas las losas de concreto han sido colocadas en franjas verticales partiendo de la parte mas baja, usando en la mayoría de los casos solo simples juntas de construcción horizontal. Las franjas son de un ancho de 12-18 m, siendo 15 m. una medida usual.

Se ha pensado que se deba de empezar la colocación de la losa de concreto, una vez que todo el enrocamiento ha sido terminado , sin embargo, la experiencia en construcción y comportamiento que se tuvo en presas como Areia, Salvajina y Kahr Laem muestra que la losa puede colocarse en la secuencia que le convenga al constructor, dando como resultado un programa mas corto y económico.

7.2.4 Zona de respaldo de la losa.

Las ideas concernientes al diseño del respaldo de la losa se han desarrollado considerablemente desde 1965-70. A partir de esas fechas , la mayoría de las presas de este tipo han considerado una zona compuesta de roca cribada o triturada, con una graduación con tamaños máximos de 3" (75 mm) a 6" (150 mm) Este método directo de procesamiento no produce una elevada cantidad de partículas menores a la malla No. 4.

En algunos trabajos esta zona ha tenido especificaciones con una gran cantidad de partículas más finas que la malla No.4 con el propósito de eliminar la segregación y asegurar que el material compactado no sea altamente permeable.

Breve historia de la evolución del diseño del respaldo de la losa.

La mayoría de las presas con losa de concreto construidas antes de 1950 fueron construidas mediante enrocamiento colocado a volteo y con una zona delgada de grandes rocas colocadas con grúa en el paramento aguas arriba, justamente bajo la losa de concreto. Esta práctica cambió en el período 1955-60 cuando el respaldo empezó a ser colocado en estratos compactados y el uso de rocas de gran tamaño fue abandonado a favor del uso de rocas pequeñas. El propósito de esta zona fue proveer un buen soporte a la losa de concreto de tal manera que la carga de agua actuando sobre la losa fuera uniformemente distribuida eliminando la posibilidad de que una roca de gran tamaño bajo la losa provocara una carga altamente concentrada.

En las presas construidas durante los años 60's comúnmente el material del respaldo era horneado para eliminar todas las partículas menores de 2" (50 mm) a 1" (25 mm), la razón principal para eliminar estos tamaños de partículas finas y rocas pequeñas, era eliminar la posibilidad de que las fugas a través de las juntas en la losa de concreto pudieran transportarlas fuera de la zona del respaldo y depositarlas en los vacíos del enrocamiento principal, creando una indeseable pérdida de soporte bajo la losa de concreto causando la ruptura.

Algunas de las grandes presas construidas con un respaldo horneado para eliminar partículas pequeñas en este período fueron.

Presa	Año terminación	Altura	Esp.del respaldo.
New Exchequer (California)	1966	150 m.	2-25"
Cabin Creek (Colorado)	1967	70 m.	2-10"
Piedras (España)	1967	41 m.	3/4-12"
Pindari (Australia)	1969	45 m.	1-12"

Un cambio abrupto fue hecho en el respaldo de la losa en la presa de Cethana en Australia con 110 m. de altura completada en 1971. En esta presa se decidió usar el mismo principio de construcción para el respaldo pero usando rocas sin procesamiento para eliminar partículas de suelo y rocas pequeñas. Las especificaciones requerían que el material fuera una roca resistente con un tamaño máximo de 9" (22.5 cm.) . Aquí, los ingenieros no consideraron que existiera una real posibilidad de que las partículas finas fueran lavadas por las fugas en la losa de concreto y permitieran el subsecuente asentamiento de la losa.

Además de evitar el costo de cribado y separado del material para remover rocas de tamaños menores a 2", los diseñadores de Cethana creyeron que era técnicamente ventajoso dejar las rocas

pequeñas y finos en el material del respaldo por dos razones principales:

1.) Era conveniente que el material fuera menos permeable, tal que menos agua pudiera atravesar la presa en un evento de fuga a través de la losa de concreto.

2.) Con los tamaños de rocas pequeñas y finos se podría formar más fácilmente en la cara exterior una superficie lisa y lograr un espesor de la losa de concreto menor, además de lograr que la superficie inclinada fuera más estable bajo los pies de los trabajadores.

La presa de Cethana fue provista de más instrumentación de la usual, lo cual confirmó que el comportamiento fue excelente en todos aspectos. La construcción de la presa Cethana y la experiencia de su instrumentación, recibió mucha atención en el oficio e influenció en alguna medida los subsecuentes diseños.

En la mayoría de las presas con losa de concreto después de Cethana, el mismo tipo de material para la zona de respaldo fue especificado, sin remover las rocas de pequeño tamaño y finos del suelo. La siguiente gran presa de este tipo fue Alto Anchicaya, construida en Colombia durante 1970-74, con una altura máxima de 140 m. En la siguiente tabla se observa que el rango de especificación de tamaño para las partículas de la zona del respaldo fue muy similar a la de la presa Cethana. En Alto Anchicaya se desarrollaron grandes filtraciones en el perímetro de las juntas, con un máximo de 1800 l/s. en el primer llenado. Esta experiencia mostró que la zona de respaldo en esta presa no fue muy efectiva como una barrera secundaria para controlar las fugas a través

de la losa de concreto.

Especificaciones de graduación.

Porcentaje de partículas finas permitibles.

Tamaño	Cethana	Alto Anchicaya	Foz do Areia
12"		100	
9"	100		
6"	80-100		100
3"	51-100	50-100	55-100
3/4"	15-63	25-60	18-65
Malla No.4	0-40	0-30	5-22
Malla no.30	0-17	0-5	0-8
Malla No.200	0-5		0-1

Para los 160 m. de la presa Foz do Areia, terminada en Brasil en 1982, la zona del respaldo de roca triturada fue muy similar a la de la presa Cethana como se observa en la tabla. Las especificaciones de Foz do Areia requerían un tamaño máximo de 6" y un mínimo de 5% de partículas menores a la malla No.4. Las especificaciones previas de Cethana y Alta Anchicaya admitían tamaños máximos de 9" a 12" y no requerían de un porcentaje mínimo de partículas menores a la malla No.4

Las zonas compactadas de roca pequeña con tamaños cayendo dentro de las especificaciones anteriores son relativamente permeables, aún cuando el material es colocado cuidadosamente en una masa homogénea, ya que no hay una suficiente cantidad de partículas menores que la malla No.4 para llenar los vacíos entre las

grandes partículas. Si el material tiene una suficiente cantidad de finos para llenar los vacíos entre las grandes rocas, y si este no fue segregado, la permeabilidad de la masa compactada podrá ser determinada por las propiedades de la fracción fina y podría tener un coeficiente de permeabilidad (K) del orden de 0.001 cm/s o menor.

Control de la segregación con filtros de arena-grava.

La experiencia y conocimiento sobre filtros en presas de tierra y presas de tierra y enrocamiento puede aplicarse a la zona de respaldo para una presa con losa de concreto. En presas de tierra con corazón central el filtro principal aguas abajo del corazón es frecuentemente hecho de arena-grava o grava arenosa con un tamaño máximo de 2" a 3" y algunas veces mayor. Los tamaños de la grava pueden obtenerse por trituración de la roca. Una mezcla grava-arena bien graduada es un excelente filtro para proteger el corazón impermeable, sin embargo, el principal problema consiste en especificar la graduación del filtro de tal manera de evitar que durante la construcción las gravas gruesas se segregen en bolsas en las cuales haya muy poca arena, tales bolsas se presentan frecuentemente en la interface entre el corazón y el filtro.

La cantidad de segregación en un filtro de grava-arena está relacionada con la graduación del material y con el cuidado tomado en la construcción del mismo.

La relación entre la cantidad de arena para una mezcla grava arena y el cuidado necesario para evitar una importante segregación no puede ser determinada por un análisis teórico. La rela-

ción tiene que ser valuada por observación directa de la magnitud de los problemas de segregación que se desarrollan con diferentes mezclas grava-arena, siendo manejadas con diferentes métodos de construcción en diferentes obras.

Desde el punto de vista del problema de segregación, el contenido de partículas menores que el tamaño de la arena es el factor más importante. En base a experimentaciones llevadas a cabo por el Servicio Americano de conservación de suelos en un programa de investigación para filtros, y basados en observaciones de campo y experimentos de laboratorio, para mezclas grava-arena relativamente bien graduadas conteniendo todos los tamaños sobre un máximo de 3" y con poco porcentaje de tamaños abajo de la malla No.200 se tuvieron las siguientes conclusiones:

1. Para mezclas con 20% o menor de arena (menor malla No.4) es prácticamente imposible evitar una importante segregación, aún teniendo gran cuidado durante la construcción.

2. Para mezclas con 25-35% de arena es posible conseguir una disminución de la segregación a costa de grandes y continuos cuidados durante la construcción.

3. Para mezclas con 40% de arena o moderadamente mayor, una gran segregación puede ser evitada por medio de un cuidado razonable. En este caso la permeabilidad esta gobernada por la permeabilidad de la fracción de material menor que la malla No.4.

Influencia de la permeabilidad del respaldo en las filtraciones en la losa de concreto.

Cuando el respaldo situado bajo la losa de concreto es muy permeable, la cantidad de filtración a través de una ruptura de una junta o de una grieta en la losa, esta limitada por las dimensiones de la grieta y por la fricción hidráulica que actúa al paso de la filtración, es decir, que el control se encuentra en la trayectoria que recorre la filtración dentro de la losa de concreto. Cuando el respaldo es semipermeable, la cantidad de infiltración que puede pasar a través de las grietas en el concreto, esta limitada por la permeabilidad del respaldo bajo la losa, ya que la resistencia al flujo a través de este es considerablemente mayor que la carga de presión perdida en el paso a través de la grieta.

Al contrario de lo que se puede pensar, la experiencia muestra que el ancho de la grieta en la losa de concreto tiene relativamente poca influencia en el total de la infiltración, cuando esta es gobernada por la permeabilidad del respaldo.

2.4 Futuro de las grandes presas de losa de concreto.

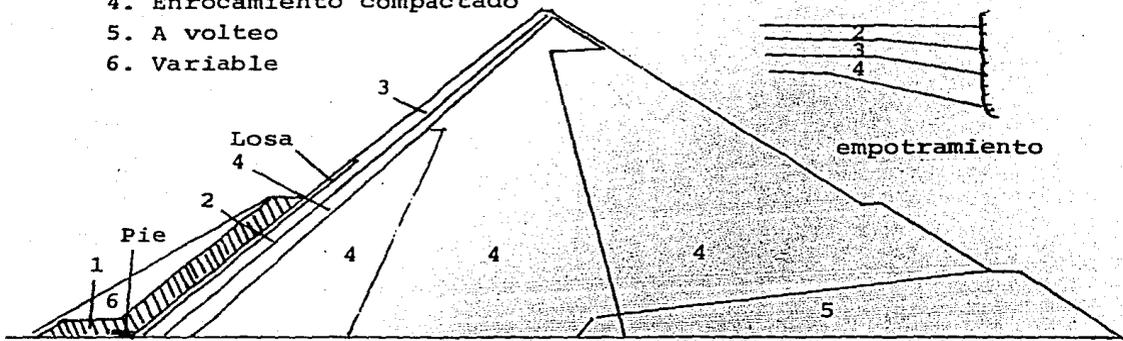
El diseño futuro de presas de enrocamiento con losa de concreto arriba de los 160 m de altura esta dirigido sobre la cuestión del movimiento de la losa bajo la carga de llenado. Para presas entre los 160 y 300 m de altura, los requisitos del sitio llevan a buscar una roca de cimentación no erosionable, con tratamientos especiales si así se requiere, y con un alto módulo de compresibilidad. Dado que los movimientos de la losa de concreto

son directamente proporcionales al módulo de compresibilidad, los movimientos de aquella pueden ser estimados.

La presa Esmeralda con 235 m de altura, y Chicoasen con 261 m., son presas de tierra con corazón impermeable, ambas están bien instrumentadas y por su excelente comportamiento hoy día, podemos establecer la factibilidad de construir más presas de ese tipo y con esa altura. Esta experiencia en presas de tierra, combinada con la experiencia ganada sobre los movimientos de la losa en presas pequeñas, sientan la base para el diseño de presas altas con losa de concreto. Un diseño conceptual propuesto para una presa de 244 m. de altura, de enrocamiento compartido con losa de concreto se muestra en la figura 2.2. El diseño emplea una combinación aguas arriba de corazón impermeable y losa de concreto en los primeros 122 m. de elevación y un enrocamiento simple con losa de concreto arriba de los 122 m.

Algunas de las condiciones existentes a favor del uso de presas de enrocamiento con losa de concreto son: una alta resistencia tanto sísmica como a las condiciones climáticas, el posible uso de materiales de baja calidad en sus propiedades y un programa de construcción más corto.

1. Impermeable
2. Filtro
3. Mat. triturado (menor 3")
4. Enrocamiento compactado
5. A volteo
6. Variable



SECCION MAXIMA

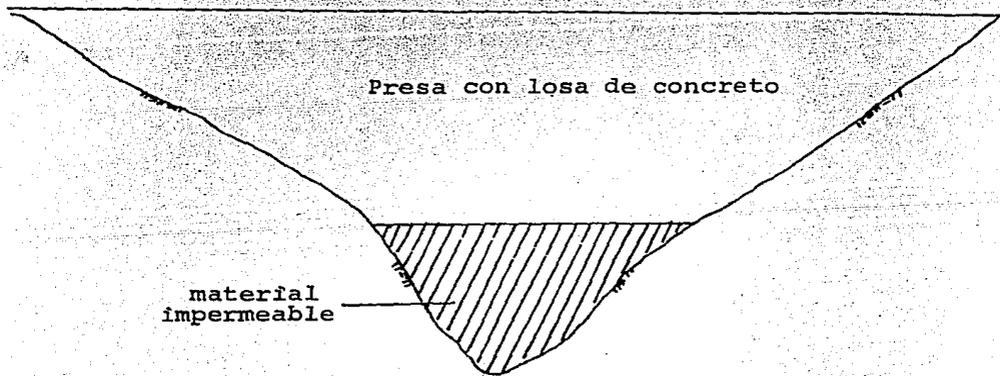


FIG. 2.2 . . . Sección de una Presa conceptual de enrocamiento con losa de concreto (245 m).

CAPITULO III

LA INVESTIGACION Y SU METODOLOGIA

3.1 El Método, la Teoría y la Técnica

El hombre es el único ser de la naturaleza que se ha transformado a sí mismo. Esto ha sido posible gracias a su actividad consciente, a la práctica humana. Los aspectos fundamentales de la práctica social son, por una parte, la acción recíproca del hombre sobre la naturaleza; y por otra parte, la acción recíproca del hombre sobre el hombre. El hombre al transformar la naturaleza se ha transformado a sí mismo. El ser humano para sobrevivir y desarrollarse requiere del éxito de su práctica social y la base de su éxito depende de la objetividad de su pensamiento; conocer, reflejar correctamente los fenómenos de la naturaleza, tanto en sus relaciones internas como externas, para poder intervenir en sus procesos de cambio de acuerdo con sus necesidades concretas. La noción de 'necesidad' es, en efecto, una noción histórica. El ser humano no se define por un registro de necesidades denominadas de una vez por todas. El proceso civilizador es creador de nuevas necesidades. Uno de los rasgos de este proceso, en el cual el hombre se eleva ante sí mismo, es que interviene cada vez de

una manera más consciente, empleando sus posibilidades de dirigir el cambio. La realización de esta posibilidad es lo que se ha llamado en ciencias sociales planificación, o bien desarrollo de la comunidad."

El hombre para poder transformar la realidad en forma consciente necesita descubrir el funcionamiento, el mecanismo que riga las relaciones en y entre los fenómenos, en esta forma está en posibilidad de predecir los cambios y dirigirlos de acuerdo con sus necesidades concretas.

La posibilidad de transformar conscientemente la realidad, o sea de dirigir los cambios, está en relación directa con la posibilidad de conocer objetivamente esa realidad. Este es el fundamento de la estrecha relación que existe entre la Teoría, el Método y la Técnica, que en su conjunto es lo que constituye la ciencia.

La Teoría es un sistema de un saber generalizado, explicación sistemática de determinados aspectos de lo que es la realidad. El término "teoría" posee diversas significaciones: como contraposición a la práctica o a la hipótesis. La teoría es distinta de la práctica, pues constituye un reflejo y una reproducción mental, ideal, de la verdadera realidad. Por otra parte, se halla indisolublemente ligada a la práctica, que plantea al conocimiento problemas acuciantes y exige su pronta solución. De ahí que la práctica entre en calidad de elemento orgánico en toda teoría. Las teorías pueden desempeñar y desempeñan un importante papel en la transformación revolucionaria de la sociedad. Tenemos pues, que la teoría, surgida como generalización de la actividad cognoscitiva

y de los resultados del hacer práctico, contribuye a transformar la naturaleza y la vida social. El criterio de la veracidad de una teoría es la práctica.

De acuerdo con esta definición la teoría científica presenta los siguientes rasgos:

1. La teoría es un sistema de conceptos, categorías y leyes.
2. Es el reflejo objetivo de la realidad.
3. Se encuentra indisolublemente ligada a la práctica.
4. Son estructuras complejas: (a) cálculos formales; (b) interpretación sustancial.
5. La teoría científica esta condicionada históricamente y social.
6. Las teorías pueden servir de guía para la transformación revolucionaria de la realidad; contribuyen a transformar la naturaleza y la vida social.
7. Las teorías sociales poseen un carácter de clase.

Esta definición de teoría ha sido producto de un largo y penoso desarrollo del pensamiento científico. Históricamente el método y la teoría no siempre han marchado de la mano. En la época primitiva, el escaso desarrollo de las fuerzas productivas, limitó el pensamiento y los procedimientos explicativos de la realidad, de tal modo el hombre primitivo acudió frecuentemente al mito y a la magia para satisfacer su necesidad de comprender los fenómenos y sistematizar sus conceptos.

La ciencia es una estructura, un sistema de teorías, principios, leyes y categorías que observa tres niveles: el teórico, el metodológico y el técnico. Y de acuerdo a sus objetivos y necesi-

sidades se encuentra estratificada en un "piso estratégico" y en otro práctico, aplicado -ciencia básica y ciencia aplicada-. Por otra parte, la ciencia como reflejo de una realidad dialéctica, estratificada e interrelacionada, se divide en un campo generalizador y en diversos campos específicos correspondientes a las ciencias particulares. Las ciencias particulares se caracterizan por el objeto que estudian y por métodos y técnicas específicas; tienen en común las leyes objetivas y los principios generales que constituyen su unidad y su base.

De acuerdo con esta definición la ciencia posee una serie de rasgos que la caracterizan:

1. Posee una estrecha relación entre la teoría y lo que es la práctica. Esta relación es de carácter dialéctico. La ciencia parte de los hechos, realiza su función generalizadora y crea modelos para modificar y transformar la realidad.
2. Es un sistema que por su forma es subjetivo, es decir, es un reflejo de la realidad; pero por su contenido es objetivo, es decir, corresponde a las propiedades y relaciones de los fenómenos.
3. La objetividad de la ciencia se comprueba en la práctica. La práctica es el criterio de la verdad. La práctica científica requiere de la creación de modelos.
4. La ciencia posee una estructura lógica; de aquí su íntima relación entre la teoría, método y la técnica.
5. La ciencia es un sistema abierto: al ser un reflejo objetivo de la realidad, posee un carácter dialéctico; su

veracidad es absoluta y relativa; parte de leyes y categorías comprobadas e investiga y realiza nuevos descubrimientos; afirma, niega y supera constantemente el pensamiento científico anterior.

6. La ciencia es concreta; o sea, es el análisis concreto de situaciones concretas.

7. Los fines de la ciencia están limitados por los intereses y necesidades concretas de la sociedad.

3.2 La caracterización de la Investigación

La Investigación científica, como todas las otras actividades humanas, se realiza con mayores probabilidades de éxito cuando previamente se elabora un proyecto del trabajo por realizar, en el cual se incluye el procedimiento para ejecutarlo. El método científico es justamente el procedimiento planeado que se sigue en la investigación, para descubrir las formas de existencia de los procesos del universo, desentrañar sus conexiones internas y externas, generalizar y profundizar los conocimientos adquiridos de ese modo, demostrarlos racionalmente con rigor y comprobarlos en el experimento y mediante sus aplicaciones técnicas. De esa manera, además de conocer los procesos, se hallan las condiciones y medios necesarios para permitir la intervención humana en el comportamiento de los propios sucesos, ya sea acelerándolos, retardándolos, perturbándolos de otras muchas maneras, o bien, induciéndolos a su transformación. En consecuencia, el método científico se funda estrictamente en las técnicas experimentales, las operaciones lógicas y la imaginación racional, para servir así

como instrumento de adquisición del conocimiento científico. En todo caso, el método se desarrolla mediante aproximaciones sucesivas, se comprueba reiteradamente en la práctica y se afina en contacto directo con la realidad.

La formulación lógica del método se ha conseguido y se sigue desarrollando a través del esfuerzo conjunto de los pensadores y los experimentadores. Para su formulación se requiere el análisis penetrante de la actividad científica, para determinar con precisión los diversos elementos que la integran. También se necesita el estudio sistemático de las relaciones que conectan mutuamente a dichos elementos, incluyendo tanto las que se ponen prácticamente de manifiesto, como las que resultan posibles mediante la reflexión racional. Igualmente se precisa la estructuración ordenada y armoniosa de esos elementos y sus conexiones, para poder reconstituir unitariamente las distintas operaciones metódicas en un nivel más amplio y profundo. En fin, dicha formulación implica la generalización de los procedimientos surgidos dentro de cada disciplina, para poner al descubierto todas sus posibilidades. De esta manera, la lógica desarrolla y vigoriza los métodos de la investigación científica, a la vez que muestra la riqueza de sus posibles alcances. Así, en cada investigación que se realiza, además de recogerse el fruto de adquirir un nuevo conocimiento, también se obtiene una comprobación concreta de la eficacia del método empleado.

El método científico, como procedimiento riguroso para la adquisición del conocimiento, es también un conocimiento adquirido a través de la multitud de experiencias acumuladas, racio-

nalizadas y probadas por la humanidad en el curso del desarrollo de la actividad científica. En este sentido, el método se distingue de los otros conocimientos científicos únicamente por la función peculiar que desempeña en la investigación. Pero, aún esta distinción es relativa, como lo prueba el hecho de que muchos conocimientos se convierten en instrumentos metódicos para la adquisición de otros conocimientos; y sucede incluso que disciplinas enteras pueden convertirse en métodos de investigación, como ocurre en la matemática. Por otra parte, de la misma manera en que el conocimiento científico en su conjunto expresa el grado de dominio ejercido por el hombre sobre los procesos existentes; así también, en el adelanto logrado en los métodos científicos se encuentra representado el dominio humano alcanzado sobre el propio conocimiento. En todo caso, jamás se debe perder de vista que el método es un instrumento de trabajo y que su finalidad práctica impone la necesidad de tener en cuenta siempre sus posibilidades de aplicación. Por otro lado, para que el método cumpla su función de ser el instrumento eficaz para la determinación científica de la experiencia, es indispensable que sirva para reproducir, con la mayor aproximación posible, el desenvolvimiento general del universo y, a la vez, que represente las diversas fases comunes a todos los procesos existentes.

3.3 Metodología de la Investigación

Presentaremos una metodología para la investigación, sin decir con esto que se trate de la única posible. Consiste en el establecimiento de una estrategia en la cual se combinan dife-

rentes elementos básicos para un mejor desempeño de esta actividad. El proceso de investigación es al mismo tiempo un trabajo científico, un arte y una aventura.

Para el diseño de la metodología deben considerarse los siguientes aspectos:

- A) Niveles de conocimiento: descriptivo, conceptual o teórico.
- B) Las siguientes etapas: Análisis, síntesis, inducción y deducción.
- C) Establecer un proceso de abstracción en el que se construyan y comprueben hipótesis.
- D) Planear las actividades en un experimento.

Con todo lo anterior se establece la metodología que se presenta a continuación:

- A) Elección del tema.
- B) Investigación Bibliográfica.
- C) Formulación del modelo matemático o experimental.
- D) Planeación del trabajo.
- E) Recolección de datos.
- F) Ejecución de los trabajos.
- G) Interpretación y comparación de resultados.
- H) Generalización.
- I) Conclusiones y recomendaciones.
- J) Comunicación mediante redacción del informe.

El trabajo de investigación tiene su base en el método científico, y cuando la investigación es aplicada tenemos lo que

sería el método ingenieril, a continuación enunciamos las etapas de cada uno de ellos:

FASES DEL METODO CIENTIFICO

- A) Observación.
- B) Experimentación.
- C) Formulación del modelo matemático.
- D) Comparación con mediciones experimentales
- E) Conclusiones.

FASES DEL METODO INGENIERIL.

- A) Planteamiento del problema.
- B) Búsqueda de alternativas de solución.
- C) Elección del método de análisis.
- D) Análisis de soluciones y elección de la óptima.
- E) Especificación de detalles.
- F) Realización.
- G) Mantenimiento o conservación.

3.4 Criterios para la elección del tema

Es importante cuando se va a elegir un tema de investigación el tener parámetros de referencia para decidir si el tema es de interés general, si va a resolver algún problema, si va a transformar la realidad socioeconómica- cultural y política del medio que nos rodea, si es de interés general o tecnológico, etc. Entre los parámetros se tienen:

- | | |
|---------------|-------------------|
| - FILOSOFICOS | - ADMINISTRATIVOS |
| - SOCIALES | - CIENTIFICOS |
| - ECONOMICOS | - TECNOLOGICOS |

- HISTORICOS
- HUMANISTICOS
- CULTURALES
- ETICOS
- POLITICOS
- MERCADOTECNICOS
- CREATIVOS.
- CURRICULARES
- ETC.

3.5 Investigación bibliográfica

La investigación bibliográfica consiste en realizar un estudio del tema de investigación elegido, con objeto de tomar en cuenta lo realizado hasta el momento sobre el tema y no repetir lo que ya se hizo. La investigación bibliográfica se realiza a través de:

- Recolección de fichas de artículos
- Lectura de artículos y libros
- Consultas con personas relacionadas con el tema
- Después de la revisión se deben sacar conclusiones del estado del arte en el problema atacado y ver de que manera la investigación planteada ayudará a su evolución

3.6 Formulación del modelo matemático o experimental

Esta fase es importante ya que normalmente no se capacita para el desarrollo de modelos adecuados a problemas físicos. En esta fase resulta crítico el establecimiento de hipótesis de partida, ya que si son incorrectas y no se logra la concordancia con

los hechos observados, deberá repetirse el trabajo con nuevas hipótesis hasta lograr resultados significativos.

Otro aspecto crítico es la elección del tipo de ecuaciones que simularan al problema en estudio, también en este caso si no es el adecuado al hacer la comparación debería iterarse con otras ecuaciones, siguiendo el mismo criterio que con las hipótesis. De la observación del fenómeno se determinan las variables que influyen en él, y se deberán incluir en el modelo matemático. También las necesidades prácticas de variables de salida influyen en la simplificación del modelo, ya que por ejemplo si solo es de interés para la toma de decisiones en el diseño, una sola variable bastaría con un modelo representado por una ecuación de tipo algebraico.

3.7 Criterios para selección de modelos matemáticos

Si se requiere una salida única basta una expresión del tipo algebraico (una función de una o más variables).



Si se necesita más de una salida, (interactuantes entre sí) puede ser adecuado un sistema lineal de ecuaciones, o bien una ecuación diferencial.

$$[K] \{a\} = \{b\}$$

↑
VECTOR DE SALIDAS

OPERADOR DIFERENCIAL

$$O(x(t)) = f(t)$$

FUNCION DE SALIDA

(SALIDA EN DIFERENTES TIEMPOS)

Si las variables de salida son independientes entre si pueden bastar varias funciones independientes que no formen un sistema de ecuaciones (por ejemplo sería una matriz diagonal). El análisis dimensional ayuda en estos casos.

3.8 Criterios para elegir hipótesis

Se debe partir de enfoques tanto teóricos como empíricos para suponer formas de comportamiento (no observables, únicamente intuídos) de la naturaleza. En una hipótesis se debe tratar de vincular lo conocido con lo que se busca y no es conocido. También debe vincularse lo subjetivo con lo objetivo, tratando de transformar lo primero en lo segundo. Esto es lo que constituye un avance en la ciencia.

En una hipótesis se construyen "puentes" entre las entradas y salidas, que si son correctos hacen valida la hipótesis. Es algo así como intuir lo que hay dentro de una "caja negra". Entre las hipótesis mas comunes asignadas a variables se tiene la de: linealidad, independencia, insensibilidad, continuidad y la discretización.

En el planteamiento de las hipótesis deben preverse los siguientes aspectos fundamentales para su comprobación:

1. Que las hipótesis se refieran a un ámbito específico de la realidad.

2. Que los conceptos que las integren sean claros y precisos.
3. Que los conceptos cuenten con referentes (vínculos) empíricos observables.
4. Que se prevean las técnicas para su comprobación.

3.9 Fases para el diseño de experimentos

Las diversas fases para el diseño de experimentos se pueden enumerar como sigue:

- A) Establecer la necesidad de realizar el experimento.
- B) Establecer condiciones óptimas de: Presupuesto, personal y tiempo, con programación de actividades.
- C) Modificar alcance del experimento debido a limitaciones detectadas en el paso anterior.
- D) Planificar el experimento al detalle de acuerdo al objetivo deseado (verificar el comportamiento de un diseño, o el análisis teórico de un fenómeno físico), verificando si no se ha hecho trabajo en ese campo por otros investigadores.
- E) Establecer las variables primarias que deben medirse.
- F) Determinar la precisión requerida en mediciones primarias y el número de ellas para un adecuado análisis de datos.
- G) Establecer procedimientos de cálculo para sintetizar datos.
- H) Establecer errores probables, para ver si es necesario cambiar los requisitos de exactitud de los instrumentos.
- I) Seleccionar los instrumentos para las diversas mediciones que igualen los requisitos de exactitud aceptados. Modificar la instrumentación de acuerdo a limitaciones económicas.
- J) Recopilar unos pocos datos y hacer un análisis preliminar de

ellos, para ver si el experimento esta de acuerdo a lo planeado.

- K) Modificar el experimento si el paso anterior indica que es necesario.
- L) Recopilar mas datos nuevos y analizar los resultados.
- M) Organizar, discutir y publicar los descubrimientos.

3.10 Organización de la Investigación

Consiste esta fase en fijar las funciones de lo que es la investigación realizando el organigrama necesario indicando cada función a desempeñar y coordinando al personal que va a participar en los trabajos de la investigación. Es importante destacar que siendo la investigación una actividad como cualquier otra es necesario que sea administrada eficientemente.

Claro está que existen ciertas particularidades que originan que la administración de ella tenga ciertos matices especiales. La característica principal es que por trabajar en terrenos vírgenes es difícil cuantificar exactamente las fechas de terminación de metas específicas, se debe aplicar el PERT.

Además existe el problema de fijar prioridades en cuanto a que líneas de investigación deben seguirse y los recursos para asignar a cada una de ellas; esto requiere de la aplicación de técnicas de investigación de operaciones y de aspectos sociales subjetivos.

Es a su vez importante destacar que además de la investigación global de un centro de investigación, cada investigador a su vez aplique las técnicas administrativas a cada uno de sus

proyectos para lograr más eficiencia en su trabajo en la medida de lo posible.

3.11 Ordenación e interpretación de resultados

Esta fase consiste en clasificar y ordenar los resultados obtenidos, a fin de detectar tendencias y posibles errores que se tengan si es que los resultados son incongruentes. Esto se puede determinar al compararlos con los obtenidos mediante otros modelos analíticos o bien con resultados de laboratorio o de instrumentaciones de campo.

En esta parte se puede aplicar la probabilidad y estadística para obtener datos como son: la media, la desviación estándar, el coeficiente de variación, así como la aplicación de regresiones. Todo esto ayuda a eliminar "ruidos" introducidos por truncación numérica o datos de entrada inexactos.

3.12 Generalización

En esta fase se extrapolan las relaciones obtenidas en el trabajo, considerándolas como leyes de validez más allá del dominio de valores manejados en el experimento. Esto permite ampliar el alcance de un experimento y su modelo matemático. Esto se obtiene a partir de las tendencias observadas en la interpretación.

Normalmente aunque no den comparaciones cien por ciento exactas los órdenes de magnitud son suficientes. Estas generalizaciones conducen a leyes muy generales aplicables incluso a fenómenos muy diferentes.

3.13 Conclusiones

Las conclusiones son afirmaciones hechas al respecto de la validez de las generalizaciones así como del método y modelo empleado. A través de ellas se resumen las relaciones más relevantes encontradas, así como las características principales de éstas. Esto se logra siendo observadores agudos que perciban cualquier característica notable en los resultados.

3.14 Recomendaciones

Estas son afirmaciones que se hacen y que proceden al considerar las conclusiones y se dan a fin de mejorar las formas de hacer las cosas y se introducen en criterios de decisión.

Las recomendaciones se refieren a información no del todo precisa y por lo tanto se hacen sugerencias para que en estudios futuros se completen. Esto pasa ya que por limitaciones de tiempo y costo un estudio no puede llevarse hasta las últimas consecuencias. Corresponden a sugerencias para el trabajo práctico que parten de nuevos conocimientos, y que evolucionan la tecnología del campo específico de que se trate.

3.15 Análisis de información y redacción de informes

El análisis de información es una actividad que debe considerarse como útil para transmitir lo más relevante del cúmulo de información bruta, permitiéndonos transmitirla en forma eficiente extractando y resaltando los puntos más importantes que se desprenden de la información obtenida de nuestra investigación.

Posterior al análisis de información, viene la fase de redacción, la cual toma en cuenta que lo investigado por nosotros será leído por otros. Esto se debe hacer redactando en forma clara, con buena ortografía, con buen estilo y en pocas palabras (sin exagerar) lo que queremos transmitir; de tal manera que se comunique la esencia de los resultados y recomendaciones. La idea es facilitar la comprensión de quienes serán nuestros lectores u oyentes.

CAPITULO IV

METODO DEL ELEMENTO FINITO

4.1 Generalidades

El método del elemento finito es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales, que se presentan en ingeniería y en la física-matemática. Esquemáticamente la secuencia del método del elemento finito se puede resumir en los pasos siguientes:

- 1) El medio continuo (dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales) se divide en varias regiones denominadas elementos finitos, de formas convenientes (lineas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, etc.).
- 2) Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos finitos, denominados puntos nodales, las variables de la ecuación diferencial se aproximan mediante una combinación lineal de funciones de interpolación (conocidas), seleccionadas adecuadamente, y de los valores (desconocidos) de las variables y en algunos casos de sus derivadas, especificados en los puntos nodales.

- 3) Mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se transforman en ecuaciones del elemento finito que gobiernan en forma aislada, a todos los elementos finitos.
- 4) Los elementos finitos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales (en el problema de valores en la frontera e iniciales) o de ecuaciones algebraicas (en el problema de valores en la frontera), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.
- 5) Los valores de las variables de las ecuaciones diferenciales quedan definidos al resolver el sistema de ecuaciones correspondiente.

4.2 Aspectos históricos

El elemento finito apareció, quizá simultáneamente, en las áreas de matemáticas aplicadas, física e ingeniería. A continuación mostramos una cronología del método:

1943 : Cudeante, en un intento de resolver un problema de tensión, empieza a subdividir el cuerpo en lo que él llamaba "subdominio triangular", pero jamás mencionó la palabra "elemento finito".

1943-1945 : Hrenkoff, McHenry observaron que para ciertas estructuras no había solución, ya que el medio no era continuo. Hablaron de "discretización" a base de "celdas"

- 1954 : Argyris empieza a pensar en el uso de la computadora y piensa en "elementos finitos", aunque no menciona la palabra.
- 1956 : Turner, Clough, Martin, Topp en una conferencia de métodos numéricos plantean las propiedades de un elemento finito en base al método de las rigideces.
- 1960 : Clough, Zienkiewicz, Melosh plantean el método del elemento finito de manera más formal.
- 1960-1966 : Aparece el primer libro de elementos finitos de Zienkiewicz y Choung. Empiezan a resolver problemas diversos con el método.

4.3 Ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad

Para poder estudiar el comportamiento de las estructuras es necesario establecer su modelación, ya sea experimental o matemática. La modelación que forma parte de este tema es la matemática y consiste en expresar, en un lenguaje formal o matemático, las leyes que gobiernan el comportamiento.

Toda estructura queda definida por los conceptos siguientes:

- 1) Geometría
- 2) Material
- 3) Cargas

Las leyes que gobiernan los conceptos anteriores son las leyes de la Mecánica, y en especial las correspondientes a la mecánica del medio continuo. Las estructuras que se estudian en este

tema son las que se construyen con material sólido, elástico, lineal e isotrópico. Las leyes que gobiernan a tales estructuras forman la base de la Teoría de la elasticidad lineal y las ecuaciones correspondientes a cualquier punto de la estructura, asociados a un sistema de referencia cartesiano (x_1, x_2, x_3) (o bien x, y, z de la figura 4.1) se muestran en los subpuntos siguientes.

4.3.1 Tensor de esfuerzos

Observando la figura 4.1.a, en el punto de coordenadas $P(x_1, x_2, x_3)$, notamos que hay tres esfuerzos normales $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ y seis esfuerzos cortantes $\tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{23}, \tau_{32}, \tau_{31}, \tau_{13}$.

$$\bar{\tau} = \tau_{ij} = \bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \dots \quad 4.3.1$$

El arreglo matricial mostrado es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano Tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden.

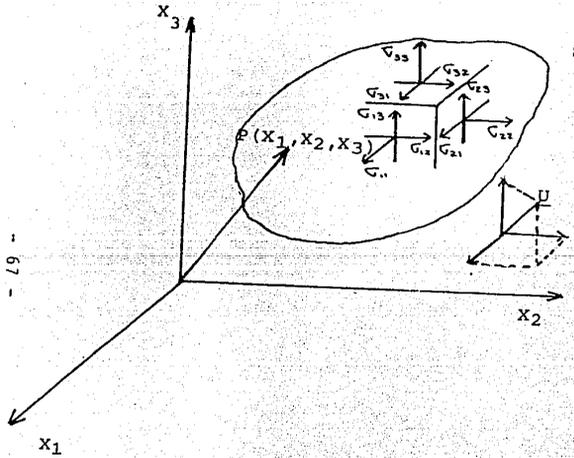
4.3.2 Tensor de deformaciones

La métrica utilizada para medir el cambio geométrico del cuerpo resulta ser:

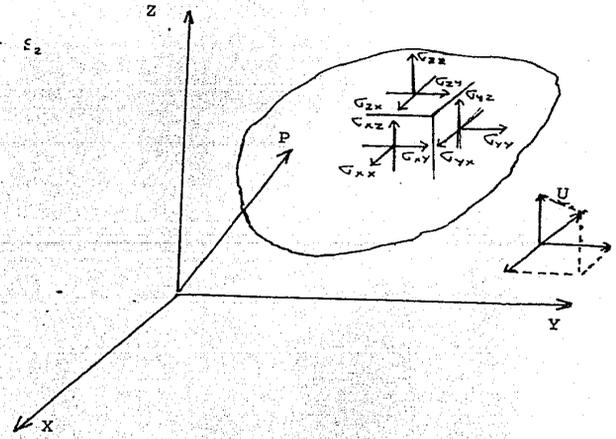
a) en notación indicial (Apendice A)

$$e_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i}) = 1/2 (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) \quad \dots \quad 4.3.2$$

donde e_{ij} son los componentes del tensor de deformaciones, simétrico, que en forma matricial se indica como:



$$E = \epsilon_1 + \epsilon_2$$



$$P = X_k i_k = X_1 i_1 + X_2 i_2 + X_3 i_3$$

$$P = X_i + Y_j + Z_k$$

a) Notacion indical

b) Notacion tradicional

FIG. 4.1 .- Sistemas de referencia cartesiana

$$\{e_{ij}\} = \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = e(\alpha_i, t) \dots 4.3.3$$

En la primera forma de la ecuación 4.3.2 se utiliza la convención de derivadas parciales mediante una coma.

b) En notación tradicional

$$e_{xx} = \partial u / \partial x \dots 4.3.4$$

$$e_{yy} = \partial v / \partial y \dots 4.3.5$$

$$e_{zz} = \partial w / \partial z \dots 4.3.6$$

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \dots 4.3.7$$

$$\gamma_{yz} = 2e_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \dots 4.3.8$$

$$\gamma_{zx} = 2e_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \dots 4.3.9$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} = e(\alpha, y, z, t) \dots 4.3.10$$

4.3.3 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas del material sólido, elástico, lineal e isotrópico están dadas por las ecuaciones de Hooke-Cauchy, conocidas también como la ley de Hooke generalizada.

a) En notación indicial

$$\tau_{ki} = \lambda e_{mm} \delta_{ki} + 2\mu e_{ki} \dots 4.3.11$$

o bien

$$e_{ki} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \tau_{mm} \delta_{ki} + \frac{1}{2} \tau_{ki} \dots 4.3.12$$

donde

λ y μ son las constantes de Lamé y δ_{kl} es la delta de Kronecker.

Las constantes de Lamé están relacionadas con las constantes de laboratorio, denominados módulos de Young o de elasticidad (E) y relación de Poisson (ν), mediante las expresiones siguientes:

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \dots 4.3.13$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots 4.3.14$$

donde a G se le conoce con el nombre de módulo de rigidez al cortante.

Con base en las ecs. 4.3.13 y 4.3.14, las ecuaciones 4.3.11 y 4.3.12 se pueden escribir como :

$$\tau_{kl} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu)e_{kl} + \lambda e_{mm} \delta_{kl} \right] \quad \dots 4.3.15$$

$$e_{kl} = \frac{1}{E} (1+\nu) \delta_{kl} - \nu \tau_{mm} \delta_{kl} \quad \dots 4.3.16$$

b) en notación tradicional

Las ecuaciones 4.3.15 y 4.3.16 se pueden escribir como:

$$xx = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy}+e_{zz}) \right] \quad \dots 4.3.17$$

$$yy = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx}+e_{zz}) \right] \quad \dots 4.3.18$$

$$zz = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{xx}+e_{yy}) \right] \quad \dots 4.3.19$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \dots 4.3.20$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \dots 4.3.21$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx} \quad \dots 4.3.22$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad \dots 4.3.23$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad \dots 4.3.24$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad \dots 4.3.25$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \dots 4.3.26$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \dots 4.3.27$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad \dots 4.3.28$$

Las ecs. 4.3.17 a 4.3.22 se pueden escribir en forma matricial, según se indica a continuación :

ecuación 4.3.29 :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

que en forma simbólica se escribe como :

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad \dots 4.3.30$$

donde

$\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ son los vectores de esfuerzo y deformación, respectivamente,

\underline{D} es la matriz de coeficientes elásticos, cuyas expresiones son:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{matrix} 4.3.31 & 4.3.32 \end{matrix} \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

ecuación 4.3.33:

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

también las ecuaciones 4.3.23 a 4.3.28, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\underline{\epsilon} = \underline{D}^{-1} \underline{\sigma} \quad \dots \quad 4.3.34$$

$$D = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad \dots \text{4.3.35}$$

4.3.4 Estado plano de deformaciones

En la figura 4.2 se muestran algunas estructuras que poseen las siguientes características :

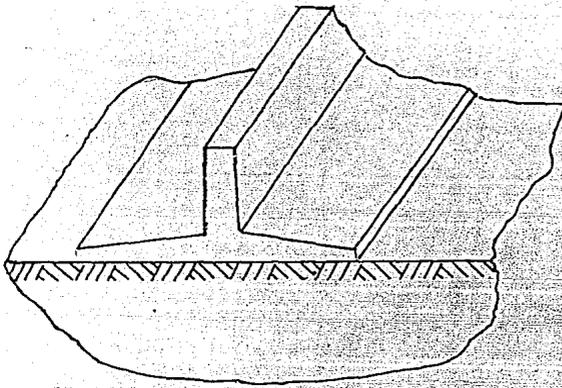
- La geometría corresponde a un cuerpo alargado y prismático, de tal manera que para definirla basta especificar la sección correspondiente a un plano perpendicular al eje.
- Las cargas que actúan a lo largo del eje son tales que basta con definir las, también, en un plano perpendicular al eje.

De acuerdo con las características anteriores, la estructura queda definida en un plano (fig. 4.3) de espesor unitario; todas las variables que aparecen en las ecuaciones de equilibrio son independientes de la variable z (a lo largo del eje), y el desplazamiento w en tal dirección es nulo, es decir :

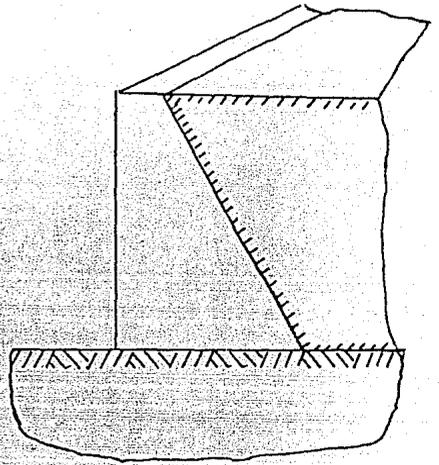
$$u = u(x, y, t) \quad \dots \text{4.3.36}$$

$$v = v(x, y, t) \quad \dots \text{4.3.37}$$

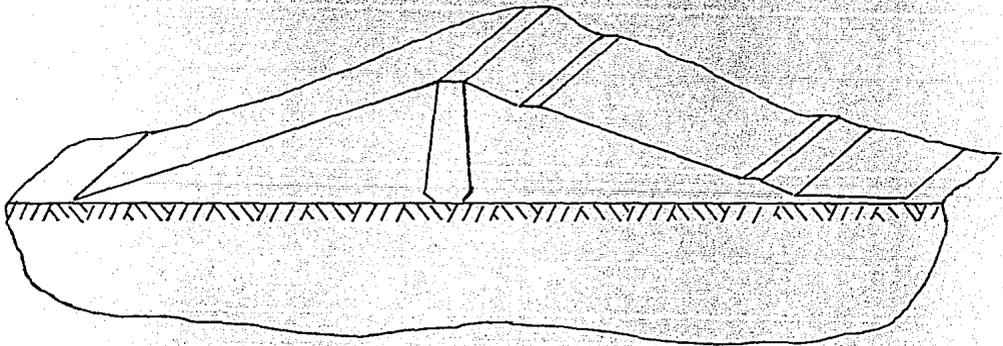
$$w = 0 \quad \dots \text{4.3.38}$$



Zapata corrida



Muro de retención



Presa de Tierra

FIG. 4.2 .-- Ejemplos de problemas de estados planos de deformación.

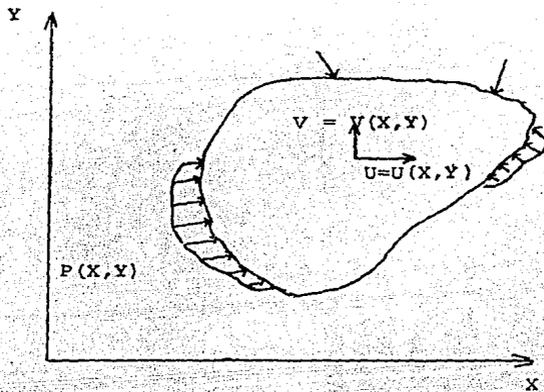


FIG. 4.3 .- Región para los estados planos.

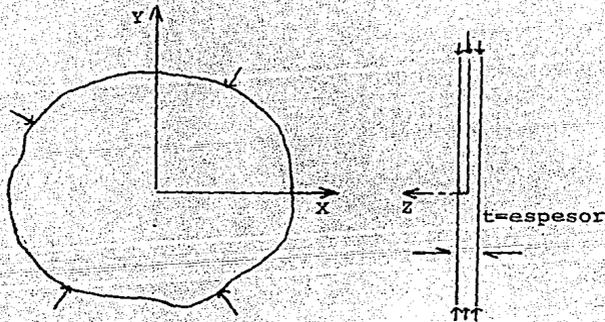


FIG. 4.4 .- Estado plano de esfuerzos.
Placa delgada con cargas en su plano.

A continuación se describe el efecto de las ecuaciones 4.3.36 a 4.3.38 en las ecuaciones de equilibrio de la estructura.

a) Tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs. 4.3.36 a 4.3.38 en las ecs. 4.3.4 a 4.3.9 se obtiene :

$$e_{xx} = \partial U / \partial x \quad \dots 4.3.39$$

$$e_{yy} = \partial V / \partial y \quad \dots 4.3.40$$

$$\gamma_{xy} = 2 e_{xy} = \partial U / \partial y + \partial V / \partial x \quad \dots 4.3.41$$

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad \dots 4.3.42$$

b) ecuaciones constitutivas

Al sustituir las ecs. 4.3.39 a 4.3.42 en las ecs. 4.3.17 a 4.3.22, y al ordenar el resultado en forma matricial se obtiene :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots 4.3.43$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \dots 4.3.44$$

La ecuación 4.3.43 se puede escribir en forma simbólica como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad \dots 4.3.45$$

donde :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \dots 4.3.46$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad 4.3.47$$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \dots 4.3.48$$

4.3.5 Estado plano de esfuerzos

Si las estructuras descritas en el estado plano de deformaciones, en vez de ser alargadas, son extraordinariamente delgadas (fig. 4.4), se puede aseverar que las componentes del tensor esfuerzo, asociadas a la dirección del espesor son nulas, es decir :

$$\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \dots 4.3.49$$

Al sustituir las ecs.4.3.49 en las ecs. 4.3.23 a 4.3.28, y reordenarlas se obtiene :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \quad \dots 4.3.50$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \quad \dots 4.3.51$$

$$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \quad \dots 4.3.52$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad \dots 4.3.53$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad \dots 4.3.54$$

A continuación se resumen las ecuaciones de equilibrio para los estados planos de esfuerzo.

a) Tensor de deformaciones

Queda igual que las deformaciones planas (ecs. 4.3.39- 4.3.42), excepto que existe la deformación e_{zz} dada por la ec. 4.3.53.

b) Ecuaciones constitutivas

Al poner en forma matricial las ecuaciones 4.3.50 a 4.3.52 se transforman en :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1(\alpha-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \dots 4.3.55$$

Las ecuaciones 4.3.55 en forma simbólica, se pueden escribir como se indica en las ecs. 4.3.30, donde los vectores $\underline{\epsilon}$ y \underline{e} están dados por las ecuaciones 4.3.31 y 4.3.32 y la matriz D se indica a continuación :

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1(\alpha-\nu)}{2} \end{bmatrix} \dots 4.3.56$$

4.4 Aspectos generales de Cálculo Variacional

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $z=f(x)$, con frecuencia surge en los problemas físicos la necesidad de hallar los valores má-

máximos o mínimos de un género especial de magnitudes, llamados funcionales. Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones.

El cálculo variacional trata de funcionales, que no son más que una función de funciones, tales como :

En una dimensión :

$$F = \int_a^b (Y, Y, Y, \dots, X) dx ; Y = f(x) \quad \dots 4.4.1$$

En dos dimensiones :

$$F = \int_a^b \int_c^d (Z, Zx, Zy, \dots) dx dy ; Z = f(x,y) \quad \dots 4.4.2$$

En tres dimensiones :

$$F = \int_a^b \int_c^d \int_e^f (W, Wx, Wy, Wz, \dots) dx dy dz ; w = f(x,y,z) \quad \dots 4.4.3$$

Se busca una función $W = f(x,y,z)$, que maximice o minimice el valor de F en los intervalos dados.

En todos estos ejemplos se tiene una dependencia que es característica para las funcionales: a una función (escalar o vectorial) le corresponde un número, mientras que en una función de cálculo diferencial $z=f(x)$ a un número le corresponde otro número.

El cálculo variacional estudia los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de los funcionales. Los problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de una funcional, se denominan problemas variacionales.

Muchas leyes de la mecánica y la física se reducen a la afirmación de que cierta funcional debe alcanzar su mínimo o su máximo en el proceso considerado. En este enunciado, dichas leyes re-

ciben el nombre de principios variacionales de la mecánica o de la física.

La solución de un variacional se da por : $\phi = \bar{\phi} + \delta \phi$
 (fig. 4.5) . A ' ' se le conoce como operador variacional.

4.4.1 Propiedades del operador variacional

Siendo $F = F(x, \phi, \phi', \phi'')$... 4.4.4

$$i) \quad \delta \int F dx = \int \delta F dx \quad \dots 4.4.5$$

$$ii) \quad \delta (dF/dx) = d(\delta F)/dx \quad \dots 4.4.6$$

$$iii) \quad F = \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \phi'} \delta \phi' + \frac{\partial F}{\partial \phi''} \delta \phi'' \quad \dots 4.4.7$$

4.4.2 Métodos directos en problemas variacionales

Las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales se integran en forma finita solo en casos excepcionales. Por esto surge naturalmente, la necesidad de obtener métodos directos para la resolución de estos problemas. La idea fundamental de estos métodos consiste en que el problema variacional se considera como límite para cierto problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables. Este último problema se resuelve por los métodos comunes, y luego se obtiene, mediante el paso al límite, la solución del problema variacional correspondiente.

La funcional $F(y(x))$ se puede considerar como una función de infinito número de variables. Esta afirmación se hace completamente evidente si se supone que las funciones admisibles pueden ser desarrolladas en series de potencias:

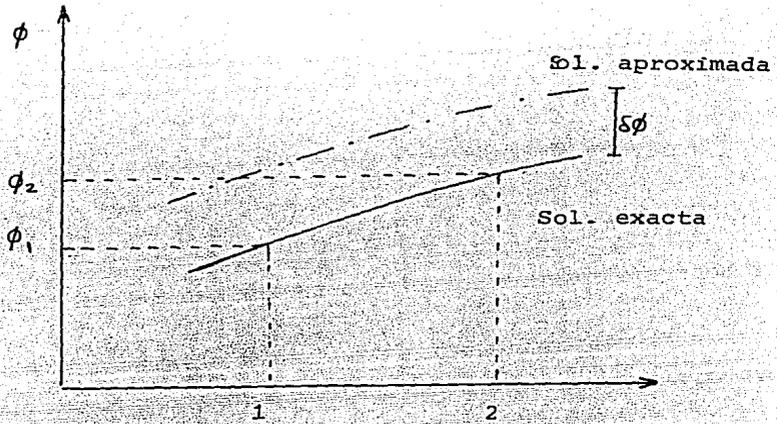


FIG. 4.5 .- Variación de una función

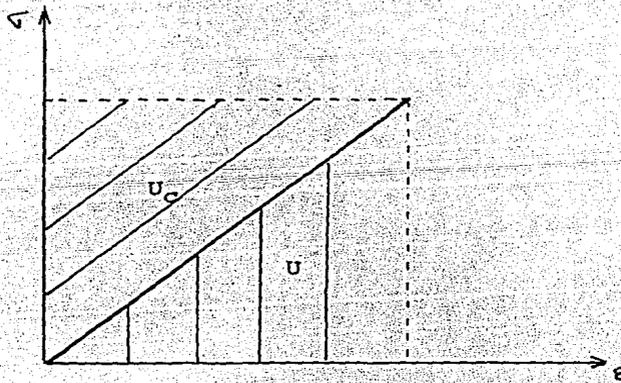


FIG. 4.6 .- Energía complementaria

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

o en series de Fourier:

$$y(x) = a/2 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x)$$

o en general, en algunas series del tipo :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x)$$

donde $\phi_n(x)$ son funciones dadas. Para determinar la función $y(x)$ que se puede representar en forma de la serie anterior, es suficiente dar los valores de todos los coeficientes C_n y, en consecuencia, el valor de la funcional $F(y(x))$ se determina en este caso fijando la sucesión infinita de términos $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, es decir, la funcional es una función de un conjunto infinito de variables:

$$F(y(x)) = \mathcal{F}(C_0, C_1, C_2, \dots)$$

Existen varios métodos directos para problemas variacionales, en el siguiente subpunto describimos el más conocido de ellos, el método de Ritz.

4.4.3 Método de Ritz

De todos los métodos variacionales (diferencias finitas, Kantorovich, Trefftz, etc.) el que actualmente tiene mayores aplicaciones es el método de Ritz o Rayleigh-Ritz.

Este método consiste en sustituir directamente la solución aproximada :

$$u = \sum_{r=1}^m C_r \phi_r \quad \dots 4.4.8$$

donde ϕ_r son m funciones conocidas, linealmente independientes, que existen en la región V ; y los coeficientes C_r son parámetros desconocidos que se determinarán con algún criterio.

La sustitución se da en la funcional $I(u)$ y se aplica la condición de extremo, en función de los parámetros C_r , como se indica a continuación:

$$\frac{\partial I(u)}{\partial C_r} = 0 \quad \dots 4.4.9$$

En caso de utilizarse la ecuación variacional, la ec. 4.4.8 se sustituye directamente a ella.

4.4.4 Generalidades sobre formulaciones variacionales

En el principio de energía potencial neutral nosotros variamos los desplazamientos en orden de llegar a una configuración de equilibrio. Usando técnicas de aproximación, empleamos campos de desplazamientos aproximados para obtener configuraciones de equilibrio aproximadas. Los resultados en general nos llevan a campos de deformaciones muy parecidos a los reales. Sin embargo, el correspondiente campo de esfuerzos puede tener un error considerable. Esto ocurre por la pérdida de exactitud en soluciones aproximadas. Las técnicas de aproximación basadas en el principio de energía complementaria llevan el problema inverso, mientras obtenemos buenas aproximaciones en los campos de esfuerzos, frecuentemente obtenemos pobres resultados en el campo de desplazamientos, debido al hecho de que tenemos que resolver ecuaciones diferenciales adicionales en el proceso. Por el contrario, el principio de Reissner toma en cuenta, para una variación arbitraria, tanto esfuerzos

como desplazamientos. Por esta razón, podemos manejar ambas cantidades en los procedimientos de aproximación y tener buenos resultados, simultáneamente, en ambas categorías.

4.4.5 Primera formulación variacional

El principio del trabajo virtual establece que la suma de la energía potencial de las cargas aplicadas a un cuerpo rígido, y la energía de deformación almacenada debida a desplazamientos virtuales es igual a cero.

El principio de energía potencial mínima establece que de todas las formas de desplazamiento posible, aquellas que satisfacen las condiciones de equilibrio hacen que la energía potencial asuma un valor estacionario.

De acuerdo con lo anterior, si :

$$\pi = U + W_p \quad \dots 4.4.10$$

donde π = Energía potencial

U = Energía de deformación interna

W_p = Energía potencial de las fuerzas aplicadas

$W_p = -W$ = Trabajo de las cargas aplicadas

Existe un valor estacionario en que $\delta\pi = 0$, entonces

$$\delta\pi = \delta U + \delta W_p = \delta U - \delta W = 0 \quad \dots 4.4.11$$

En forma general

$$U = \int_V \tau_{ij} e_{ij} dV = \int_V (\tau_{11} e_{11} + \tau_{22} e_{22} + \dots) dV \dots 4.4.12$$

donde τ_{ij} = tensor esfuerzo

e_{ij} = tensor deformación

dV = diferencial de volumen

entonces

$$\delta U = \int_V \delta(\tau_{ij} e_{ij}) dV \dots 4.4.13$$

$$\delta U = \int_V \tau_{ij} (\delta e_{ij}) dV \dots 4.4.14$$

El trabajo esta dado por

$$W = \int_S T_i U_i dS + \int_V X_i U_i dV \dots 4.4.15$$

donde T_i = tracción superficial

U_i = configuración inicial de desplazamientos

X_i = Tensor de fuerzas de cuerpo

dS = diferencial de superficie

$$\delta W = \left[\int_S T_i U_i dS + \int_V X_i U_i dV \right] \dots 4.4.16$$

$$\delta W = \int_S T_i \delta U_i dS + \int_V X_i \delta U_i dV \dots 4.4.17$$

como $\delta \Pi = 0$

$$\int_V \tau_{ij} (\delta e_{ij}) dV = \int_V X_i \delta U_i dV + \int_S T_i \delta U_i dS \dots 4.4.18$$

donde los simbolos empleados tienen el sentido ya descrito.

Esta ecuación representa el principio del trabajo virtual para un cuerpo deformable. Otro modo de ver esta ecuación es considerar el lado izquierdo como el trabajo virtual interno y el lado derecho como el trabajo virtual externo. Podemos entonces decir, que una condición necesaria para el equilibrio, es que, para un campo de deformaciones cinemáticamente admisible ($\delta u_i, \delta e_{ij}$), el trabajo virtual externo, con fuerzas de cuerpo y un campo de esfuerzos también compatibles, debe ser igual al trabajo virtual interno.

4.4.6 Segunda Formulación variacional

La energía complementaria mínima (Π_C) de una estructura esta dada por la suma de la energía de deformación complementaria (U_C) y la energía potencial complementaria de las fuerzas aplicadas (W_{PC}) actuando con desplazamientos prescritos. (El significado de energía complementaria se muestra en la fig. 4.6) :

$$\Pi_C = U_C + W_{PC} \quad \dots 4.4.19$$

Además :

$$\delta \Pi_C = \delta U_C + \delta W_{PC} \quad \dots 4.4.20$$

De la teoría de la elasticidad, Π_C es mínima :

$$\delta \Pi_C = \delta U_C + \delta W_{PC} > 0 \quad \dots 4.4.21$$

De manera similar a lo realizado para la primera formulación variacional, podemos escribir :

$$\delta \Pi_C = 0, \text{ entonces:} \\ \delta \Pi_C = \int_V (\delta \sigma_{ij}) e_{ij} dV = \int_V \delta x_i u_i dV + \int_S \delta t_i u_i dS = 0 \quad \dots 4.4.22$$

Como en el principio del trabajo virtual, la expresión de ningún modo incluye una ley constitutiva de ninguna clase. Tenemos una relación en la forma de una ecuación integral entre un campo de deformaciones cinemáticamente compatible y un campo de fuerzas y esfuerzos $(X_i, \sqrt{t_{ij}}, T_i)$. Este principio es una condición necesaria para tener una deformación admisible.

4.4.7 Tercera formulación variacional

Existe un concepto que es el de "multicampo", que es una aproximación híbrida para modificar los principios de energía potencial y energía complementaria, usando un campo dentro del elemento y uno o dos campos independientes en sus fronteras. Una aproximación usada es un principio variacional, que es intrínsecamente un multicampo, en el cual los campos de esfuerzo y de deformación se aplican solo una vez al elemento en su totalidad.

Podemos desarrollar este funcional usando la energía potencial como base. Por definición :

$$U_c + U = \int_V \sqrt{t_{ij}} e_{i,j} dV \quad \dots 4.4.23$$

o bien

$$U = \int_V \sqrt{t_{ij}} e_{i,j} dV - U_c \quad \dots 4.4.24$$

donde U_c es la energía de deformación complementaria.

Sustituyendo en la ec. 4.4.10, obtenemos el funcional de Reissner:

$$r = \int_V \sqrt{t_{ij}} e_{i,j} dv - U_c - W_p \quad \dots 4.4.25$$

Para tracciones (region S_T) y deformaciones prescritas, la ecuación 4.4.15 se puede escribir como

$$W_p = \int_V X_i U_i dv + \int_{S_T} T_i U_i dS + \int_{S_u} T_i (U_i - \hat{U}_i) dS = 0 \quad 4.4.26$$

donde los términos empleados tienen el significado descrito anteriormente y U_i son los desplazamientos prescritos en la región S_u .

4.5 Métodos aproximados para la solución de ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio resumidas en los incisos anteriores se pueden transformar mediante estos métodos a la forma matricial siguiente :

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{f} \quad \text{en } \underline{\Omega} \quad \dots 4.5.1$$

$$\underline{B} \underline{u} = \underline{g} \quad \text{en } \underline{\Gamma} \quad \dots 4.5.2$$

donde las componentes de las matrices \underline{A} y \underline{B} son operadores diferenciales, las componentes del vector \underline{u} son las funciones incógnitas del problema, y las componentes de los vectores \underline{f} y \underline{g} son funciones conocidas. La ecuación 4.5.1 representa el equilibrio en cualquier punto interior de la estructura (región $\underline{\Omega}$), y la ecuación 4.5.2 representa las correspondientes condiciones de frontera (región $\underline{\Gamma}$).

Para la resolución aproximada de problemas de frontera se aplican con frecuencia otros métodos directos no variacionales. Para entender la esencia de estos métodos nos auxiliaremos de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \quad \dots (A)$$

que se encuentran con particular frecuencia en la práctica, con las

condiciones de frontera $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$. Escribiendo la ecuación (A) de la forma :

$$\mathcal{L}(y) = f(x)$$

Tomemos un sistema de funciones continuas

$$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x), \dots \quad \dots \quad (B)$$

linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera en el segmento $\langle x_0, x_1 \rangle$.

Buscaremos la solución aproximada del problema de frontera en forma de la combinación lineal de las primeras n funciones del sistema (B)

$$Y = \sum_{i=1}^n C_i w_i(x)$$

Se sustituyen las Y_n en la ecuación (A) y se eligen los coeficientes C_i ($i=1,2,\dots,n$) de modo que la función

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n C_i w_i(x)\right) - f(x)$$

sea ortogonal en el segmento $\langle x_0, x_1 \rangle$ a cada función $w_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$), entonces se cumplirá que la integral siguiente sea nula :

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n C_i w_i(x)\right) - f(x) \right] w_i(x) dx = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad \dots \quad (C)$$

Es natural esperar que Y tienda para $n \rightarrow \infty$ a la solución exacta

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i w_i(x),$$

Puesto que si la serie obtenida converge y puede ser derivada dos veces término a término, la función $\mathcal{L}(\hat{y}) - f(x)$ es ortogonal en el segmento $\langle x_0, x_1 \rangle$ a cada función $w_i(x)$ del sistema (B), y como dicho sis-

tema es completo, entonces $\int (\hat{y}) - f(x) = 0$; esto precisamente significa que \hat{y} es la solución de la ecuación (A).

Como no es posible determinar todas las C_i del sistema (C) lineal con respecto a estas y pasar al límite para $n \rightarrow \infty$; por esto, por lo general hay que limitarse a un 'n' finito, y además no muy grande ($n = 2, 3, 4$ y a veces incluso $n=1$).

A la diferencia de las funciones

$$\int \left(\sum_{i=1}^n C_i w_i(x) \right) - f(x)$$

se le denomina comúnmente residuo, y el procedimiento para determinar estas C_i recibe el nombre de método de los residuos pesados. La forma de elegir las funciones continuas de prueba $w_i(x)$ le da nombre a otros métodos. Si $w_i(x)$ son las funciones de interpolación del elemento en cuestión tenemos el método de Galerkin, si estas funciones de prueba son el mismo residuo el método se denomina de mínimos cuadrados, y si $w_i(x)$ están definidos por la delta de Dirac, $\delta(x_i)$, el método es el de colocaciones. Estos métodos se describen brevemente en los siguientes subpuntos.

4.5.1 Método de los residuos pesados

Con la expansión del método del elemento finito más allá de la mecánica estructural, surge la necesidad de tener una aproximación más general en la formulación de las relaciones entre elementos. Como una aproximación esta el método de los residuos pesados, que supone una función de prueba, que es elegida para aproximar la variable dependiente en un problema físico matemático, que en general, no satisface las ecuaciones diferenciales que gobiernan dicho problema. De la sustitu-

ción de la función de prueba en las ecuaciones diferenciales mencionadas, se obtiene lo que se denomina residuo (r) o error (e). Tratando de obtener la mejor "solución", se busca minimizar la integral de residuo a través de la región (Ω) del problema.

$$\int_{\Omega} e \, d\Omega = \text{mínimo}$$

Podemos ampliar el rango de oportunidades para conseguir nuestro objetivo de minimizar el residuo. Las llamadas funciones de peso facilitan el lograr que la integral de residuos pesados tenga un valor de cero. Denotando por W_i la función de peso y e el error :

$$\int_{\Omega} e \cdot W_i \, d\Omega = 0$$

que es la ecuación general del método de los residuos pesados. A continuación presentamos una metodología del mismo :

Consideremos que :

$$\mathcal{L}\phi = f \quad \dots 4.5.3$$

donde

\mathcal{L} = operador diferencial

ϕ = variable

f = función

condiciones de frontera :

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{en } S_1 \quad \dots 4.5.4$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_i} = \hat{\phi}_i \quad \text{en } S_2 \quad \dots 4.5.5$$

por ejemplo, en la ecuación :

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2} = 0 \quad \dots 4.5.6$$

$$\mathcal{L} = \left[\frac{d}{dx^2} + \frac{d}{dy^2} \right] \quad \dots 4.5.7$$

El primer paso consiste en aproximar la solución general :

$$\phi = \hat{\phi} = \sum_{i=1}^m C_i \phi_i \quad \dots 4.5.8$$

m = No. de coeficientes

sustituyendo 4.5.8 en la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\hat{\phi} - f = e \quad \dots 4.5.9$$

e = error o residuo

se procede entonces a pesar el error, ya que variará de acuerdo a las W_i elegidas :

$$\int_{\Omega} \langle \mathcal{L}\hat{\phi} - f, W_i \rangle d\Omega = 0 \quad \dots 4.5.10$$

donde W_i = peso

queda :

$$\int_{\Omega} \langle e, W_i \rangle d\Omega = 0 \quad \dots 4.5.11$$

En los siguientes subincisos se verán algunos métodos para pesar el error.

4.5.2 Método de Galerkin

Consiste el método en hacer que el error e , sea ortogonal a las funciones de prueba, es decir, que las funciones de peso sean las funciones de prueba :

$$\hat{\phi} = \sum C_i \phi_i = \sum N_i \phi_i \quad \dots 4.5.12$$

entonces

$$\int_{\Omega} \langle e, N_i \rangle d\Omega = 0 \quad \dots 4.5.13$$

Las funciones de peso utilizadas son las mismas funciones de interpolación del elemento en cuestión.

4.5.3 Método de los mínimos cuadrados :

La secuencia del método es la que se muestra :

$$\hat{f} = \sum C_i f_i \quad \dots 4.5.14$$

$$e = \hat{f} - f \quad \dots 4.5.15$$

Lo primero que procede es :

$$\int_{\Omega} \langle e, e \rangle d\Omega = 0 \quad \dots 4.5.16$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_{\Omega} \langle e, e \rangle d\Omega = 0 \quad \dots 4.5.17$$

Las funciones de peso elegidas son tales que se busca minimizar el cuadrado del error o residuo.

4.5.4 Método de colocación puntual

Las funciones de peso se sustituyen por $\delta(x_i)$, que es conocida como la delta de Dirac, que vale cero para todo punto diferente de x_i : (este método equivale al de diferencias finitas)

Se procede de la siguiente forma :

$$\hat{f} - f = e \quad \dots 4.5.18$$

$$\int_{\Omega} \langle e, \delta(x_i) \rangle d\Omega = 0 \quad \dots 4.5.19$$

donde se cumple que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_i) f(x) dx = f(x_i) \quad \dots 4.5.20$$

Esto es la esencia del método de colocación por subdominios, donde una función $f(x)$ existe solo en el subdominio del elemento en cuestión una malla de elementos finitos, y no existe para los demás elementos.

4.6 Derivación de la matriz de rigideces de elementos finitos

Recordemos de cálculo variacional que :

$$\int_V \tau_{ij} \delta(\partial u_i / \partial x_j) dV = \int_V x_i u_i dV + \int_S T_i u_i dS \quad \dots 4.6.1$$

o bien

$$\int_V \tau_{ij} \delta(\epsilon_{ij}) dV = \int_V x_i \delta u_i dV + \int_S T_i \delta u_i dS \quad \dots 4.6.2$$

en notación matricial

$$\int_V [\delta e] \{r\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{x_i\} dV + \int_S [\delta u]^T \{T\} dS \quad \dots 4.6.3$$

Supongamos que para cada elemento las funciones de forma están dadas por :

$$u = \sum N_i \phi_i = [N] \{\phi\} \quad \dots 4.6.4$$

$$\{\delta u\} = [N] \{\delta \phi\} = [N] \{\delta\} \quad \dots 4.6.5$$

$$\{\delta u\}^T = \{\delta \phi\}^T [N]^T \quad \dots 4.6.6$$

sabemos que :

$$\{e\} = [L] \{u\} = [L] [N] \{\phi\} \quad \dots 4.6.7$$

[L] = matriz de operadores diferenciales

Entonces

$$\{\delta e\} = [L] [N] \{\delta \phi\} \quad \dots 4.6.8$$

$$\{\delta e\}^T = \{\delta \phi\}^T [N]^T [L] \quad \dots 4.6.9$$

sabiendo también que

$$[r] = [D] \{e\} \quad \dots 4.6.10$$

$$[r] = [D] [L] [N] \{\phi\} \quad \dots 4.6.11$$

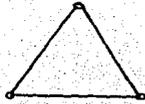
Sustituyendo en 4.6.3 :

$$\int_V \{\delta \phi\}^T [N]^T [L]^T [D] [L] [N] \{\phi\} dV = \int_V \{\delta \phi\}^T [N] \{x_i\} dV + \int_S \{\delta \phi\}^T [N]^T \{T\} dS \quad \dots 4.6.12$$

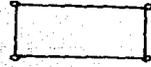
entonces



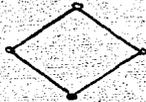
Unidimensional



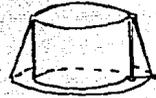
Triangular



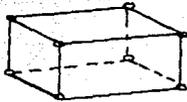
Rectangular



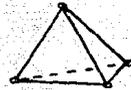
Cuadrilátero



Anillo triangular



Hexaedro regular



Tetraedro

FIG. 4.7 .- Elementos finitos de varias formas

$$\int_V [N]^T [L]^T [D] [L] [N] \{ \delta \} dV = \int_V [N]^T \{ x \} dV + \int_S [N]^T \{ T \} dS \quad \dots 4.6.13$$

llamando $[B] = [L] [N]$; $[B]^T = [N]^T [L]^T$

$$\int_V [B]^T [D] [B] \{ \delta \} dV = \int_V [N]^T \{ x \} dV + \int_S [N]^T \{ T \} dS \quad \dots 4.6.14$$

esto nos conduce a que :

$$[K] \{ \delta \} = \{ P \}$$

donde

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$[K]$ = matriz de rigideces del elemento finito.

$\{ \delta \}$ = vector de desplazamientos nodales

$\{ P \}$ = vector de cargas

4.6.1 Elemento Unidimensional

Sea un elemento barra de 2 nodos (fig. 4.8) :

$$U = N_1 U_1 + N_2 U_2$$

Las funciones de interpolación más simples son :

$$N_1 = 1 - X/L$$

$$N_2 = X/L$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} U_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} U_2 = -\frac{1}{L} U_1 + \frac{1}{L} U_2 \\ &= \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [B] [U] \end{aligned}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

Sabemos que :

$$[\epsilon] = E \{ \epsilon \} = [D] \{ \epsilon_{11} \}$$



FIG 4.8 .- Elemento Unidimensional

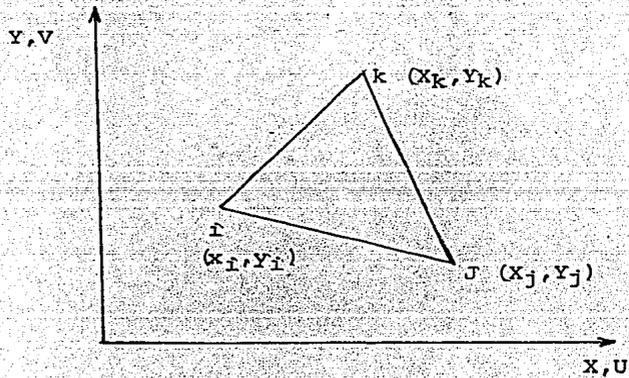


FIG. 4.9 .- Elemento Bidimensional

entonces :

$$K = \int_V B^T D B dV = \int_V B^T D B dA dx = A \int_0^L B^T D B dx$$

A = Area del elemento finito

$$K = A \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dx = A E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$K = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} L$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{matriz de rigideces de una barra}$$

4.6.2 Elemento Bidimensional

Se derivará a continuación la matriz de rigideces de un elemento triangular de tres nodos (fig 4.9) :

Considerando dos grados de libertad :

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

Para el desplazamiento u

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j$$

$$u_k = a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k$$

matricialmente :

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}$$

De la misma forma se puede escribir :

$$\begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}$$

Despejando los coeficientes α_i :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix}$$

resolviendo los sistemas anteriores :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} (a_i U_i + a_j U_j + a_k U_k)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} (b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} (c_i U_i + c_j U_j + c_k U_k)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2A} (a_i V_i + a_j V_j + a_k V_k)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2A} (b_i V_i + b_j V_j + b_k V_k)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{2A} (c_i V_i + c_j V_j + c_k V_k)$$

donde

$$A = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$$

$$b_i = Y_j - Y_k$$

$$c_i = X_k - X_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k$$

$$b_j = Y_k - Y_i$$

$$c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i$$

$$b_k = Y_i - Y_j$$

$$c_k = X_j - X_i$$

Podemos escribir :

$$U = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k$$

$$V = N_i V_i + N_j V_j + N_k V_k$$

donde :

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i X + c_i Y)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j X + c_j Y)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k X + c_k Y)$$

Para las deformaciones :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} &= \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \frac{\partial N_i}{\partial X} U_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} U_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} U_k = \\ &= \frac{1}{2A} (b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k) = e_x = e_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial Y} &= \frac{\partial U_2}{\partial X_2} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} V_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} V_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} V_k = \\ &= \frac{1}{2A} (c_i V_i + c_j V_j + c_k V_k) = e_y = e_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial N_i U_i}{\partial Y} + \frac{\partial N_i U_j}{\partial Y} + \frac{\partial N_k U_k}{\partial Y} + \frac{\partial N_i V_i}{\partial X} + \frac{\partial N_j V_j}{\partial X} + \frac{\partial N_k V_k}{\partial X} \right] = \\
&= \frac{1}{2A} \left[(c_i U_i + c_j U_j + c_k U_k) + (b_i V_i + b_j V_j + b_k V_k) \right] = \\
&= \gamma_{xy} = e_{xy}
\end{aligned}$$

Arreglando matricialmente de la forma :

$$[e] = [B] [U]$$

llegamos a :

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k & b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix}$$

reescribiendo la matriz anterior :

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{bmatrix}$$

En forma compacta :

$$[e] = [L] [N] [U]$$

llamando $[B] = [L] [N]$

$$[e] = [B] [U]$$

Recordemos que la matriz de rigideces se obtiene de acuerdo con la expresión :

$$K = \int_{R_v} D^T D B \, dV$$

para cada elemento finito :

$$K = (\text{area}) (\text{espesor}) B^T D B$$

$$K = A t B^T D B$$

4.6.3 Elemento tridimensional

Para la figura 4.10 que se muestra :

$$U = c_1 + c_2 X + c_3 Y + c_4 Z$$

$$V = c_5 + c_6 X + c_7 Y + c_8 Z$$

$$W = c_9 + c_{10} X + c_{11} Y + c_{12} Z$$

Tomando solo la variable U :

$$U_i = c_1 + c_2 X_i + c_3 Y_i + c_4 Z_i$$

$$U_j = c_1 + c_2 X_j + c_3 Y_j + c_4 Z_j$$

$$U_k = c_1 + c_2 X_k + c_3 Y_k + c_4 Z_k$$

$$U_l = c_1 + c_2 X_l + c_3 Y_l + c_4 Z_l$$

En forma matricial :

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ U_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i & c_1 \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j & c_2 \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k & c_3 \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l & c_4 \end{bmatrix}$$

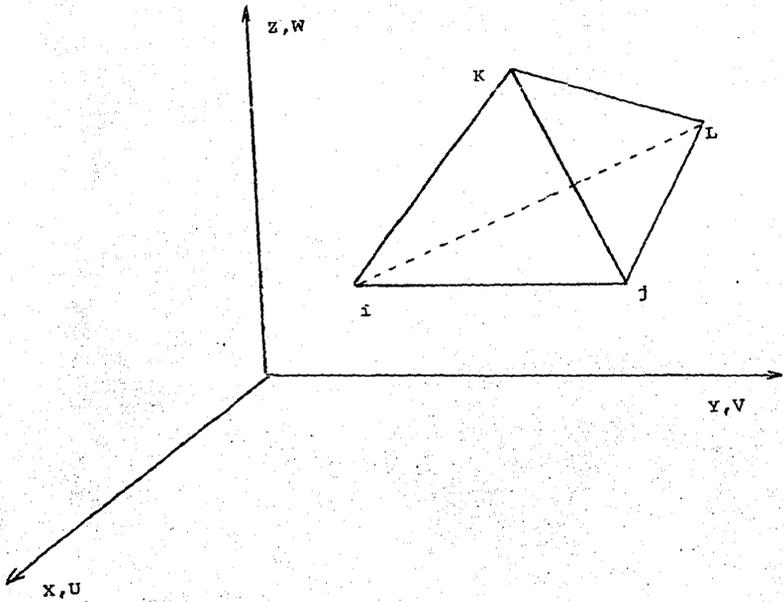


FIG. 4.10 -- Elemento tridimensional

entonces :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i & U_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j & U_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k & U_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l & U_l \end{bmatrix}$$

sustituyendo los valores de las constantes c_1, c_2, c_3, c_4 en las expresiones para U, V, W y agrupando términos :

$$U = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k + N_l U_l$$

$$V = N_i V_i + N_j V_j + N_k V_k + N_l V_l$$

$$W = N_i W_i + N_j W_j + N_k W_k + N_l W_l$$

donde :

$$N_i = \frac{1}{\Delta V} (a_i + b_i X + c_i Y + d_i Z)$$

$$N_j = \frac{1}{\Delta V} (a_j + b_j X + c_j Y + d_j Z)$$

$$N_k = \frac{1}{\Delta V} (a_k + b_k X + c_k Y + d_k Z)$$

$$N_l = \frac{1}{\Delta V} (a_l + b_l X + c_l Y + d_l Z)$$

a sabiendas que :

$$\Delta V = \det \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{vmatrix}$$

$$a_i = \det \begin{vmatrix} X_j & Y_j & Z_j \\ X_k & Y_k & Z_k \\ X_l & Y_l & Z_l \end{vmatrix}$$

$$b_i = - \det \begin{vmatrix} 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_k & Z_k \\ 1 & Y_l & Z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = - \det \begin{vmatrix} X_j & 1 & Z_j \\ X_k & 1 & Z_k \\ X_l & 1 & Z_l \end{vmatrix}$$

$$d_i = \det \begin{vmatrix} X_j & Y_j & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \\ X_l & Y_l & 1 \end{vmatrix}$$

En el campo de deformaciones :

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} U_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} U_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} U_k + \frac{\partial N_l}{\partial x} U_l$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} V_i + \dots + \frac{\partial N_l}{\partial y} V_l$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial z} W_i + \dots + \frac{\partial N_l}{\partial z} W_l$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial y} U_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i + \dots + \frac{\partial N_l}{\partial y} U_l + \frac{\partial N_l}{\partial x} V_l$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial z} V_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} W_i + \dots + \frac{\partial N_l}{\partial z} V_l + \frac{\partial N_l}{\partial y} W_l$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial z} U_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} W_i + \dots + \frac{\partial N_l}{\partial z} U_l + \frac{\partial N_l}{\partial x} W_l$$

La matriz $[B]$ queda :

$$B = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i \partial N_i}{\partial y \partial x} & 0 & \frac{\partial N_j \partial N_j}{\partial y \partial x} & 0 & \frac{\partial N_k \partial N_k}{\partial y \partial x} & 0 & \frac{\partial N_l \partial N_l}{\partial y \partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i \partial N_i}{\partial z \partial y} & 0 & \frac{\partial N_j \partial N_j}{\partial z \partial y} & 0 & \frac{\partial N_k \partial N_k}{\partial z \partial y} & 0 & \frac{\partial N_l \partial N_l}{\partial z \partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \\ U_k \\ V_k \\ W_k \\ U_l \\ V_l \\ W_l \end{bmatrix}$$

La matriz D esta dada por :

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Para cada elemento finito :

$$K = \int B^T D B dV$$

4.7 Ecuación de equilibrio del medio continuo global

Si una estructura está en equilibrio, cualquier parte de ella

La ecuación de equilibrio ordenada se puede escribir como

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$$

donde K se conoce como la matriz global de rigideces de la estructura, el vector P es el vector de cargas de dicha estructura. El ordenamiento de la matriz y el vector anteriores se expresa, simbólicamente a continuación :

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^n K(e)$$

$$\underline{P} = \sum_{e=1}^n f(e)$$

El vector U de la ecuación de equilibrio de la estructura, es el vector de desplazamientos de la estructura y se construye con los vectores desplazamiento de cada punto nodal.

4.8 Aspectos numéricos de las ecuaciones del elemento finito

Con base a lo ya desarrollado, se puede aseverar que para poder aplicar el método del elemento finito en la solución de los problemas que se presentan en la práctica profesional, es necesario el uso de una computadora digital. Por tanto, se requiere desarrollar programas de computadora que, con la información de la geometría, el material y las cargas, se construyan y se resuelvan las ecuaciones de equilibrio correspondientes, y se determinen, además, los elementos requeridos para el análisis y diseño de las estructuras.

4.8.1 Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

El modelo matemático correspondiente al sistema de ecuaciones algebraicas lineales se acostumbra representar como :

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad \dots 4.8.1$$

donde A es la matriz de coeficientes (de rigideces, K, en nuestro caso) cuadrada, de n renglones por n columnas, b el vector de cargas (P en nuestro caso) y x el vector incognita (los desplazamientos U, en nuestro caso):

Los métodos de solución para resolver el modelo matemático dado por la ecuación 4.8.1, conforman dos grandes grupos y son : los métodos directos y los métodos iterativos. Los que actualmente se encuentran en uso en el método del elemento finito son los directos y, de este grupo los denominados compactos, descritos a continuación.

4.8.2 Métodos directos generales

En el algebra lineal se demuestra que cualquier matriz A, no singular, se puede descomponer en el producto de dos matrices triangulares, una inferior L y otra superior U, con la condición de que alguna de ellas este normalizada (los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad). Entonces se puede escribir lo siguiente :

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad \dots 4.8.2$$

Las matrices triangulares L y U se cuantifican con la ec. 4.8.2 y a tal proceso se denomina triangulación. Al sustituir 4.8.2 en 4.8.1 se obtiene : (El proceso de triangulación se muestra en el apendice B)

$$\underline{L} \underline{U} \underline{x} = \underline{b} \quad \dots \quad 4.8.3$$

La ecuación 4.8.3 se puede escribir como :

$$\underline{L} \underline{y} = \underline{b} \quad \dots \quad 4.8.4$$

donde

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad \dots \quad 4.8.5$$

Las ecs. 4.8.4 y 4.8.5, conocidas como sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, respectivamente, establecen que el proceso de triangulación (ec. 4.8.2) transforma al sistema original, que es arbitrario, en dos sistemas triangulares que son mucho más simples de resolver.

De acuerdo con las posibilidades para seleccionar la matriz normalizada, se obtienen los dos métodos siguientes.

4.8.3 Método de Gauss

El método de eliminación de Gauss, en la forma compacta, se obtiene cuando la matriz triangular inferior está normalizada, es decir:

$$L_{ii} = 1, \quad i=1,2,\dots,n \quad \dots \quad 4.8.6$$

4.8.4 Método de Crout

El método de Crout, en forma compacta, se obtiene cuando la matriz normalizada es la triangular superior, o sea :

$$U_{ii} = 1, \quad i=1,2,\dots,n \quad \dots \quad 4.8.7$$

4.8.5 Métodos directos para matrices simétricas

Si la matriz de coeficientes es simétrica, es decir:

$$A^T = A \quad \dots 4.8.8$$

Los métodos de Gauss y de Crout se pueden modificar para tomar en cuenta tal situación. Para ello, la ec. 4.8.2, con base a la matriz identidad I , se puede escribir como :

$$A = \underline{L} \underline{I} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \underline{D} \underline{U} \quad \dots 4.8.9$$

donde D es una matriz diagonal, formada con la diagonal de U en el método de Gauss, o bien con la diagonal de L en el método de Crout.

4.8.6 Método de Gauss modificado

Si la ec. 4.8.9 queda arreglada como :

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \quad \dots 4.8.10$$

donde

$$\underline{\bar{U}} = \underline{D}^{-1} \underline{U} \quad \dots 4.8.11$$

Al hacer que la ec. 4.8.10 satisfaga la condición de simetría (ec. 4.8.8) se obtiene que :

$$\underline{U}^T \underline{D}^{-T} \underline{D}^T \underline{L} = \underline{U}^T \underline{D}^{-1} \underline{D} \underline{L}^T \quad \dots 4.8.12$$

si consideramos que :

$$\underline{L} = \underline{U}^T \underline{D}^{-1} \quad \dots 4.8.13$$

$$\text{transponiendo : } \underline{L}^T = \underline{D} \underline{U} \quad \dots 4.8.14$$

reemplazando en las ecs. 4.8.13 y 4.8.14 en 4.8.12

$$\underline{U}^T \underline{D}^{-1} \underline{D}^T \underline{L} = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \quad \dots 4.8.15$$

de donde se concluye lo siguiente :

$$\underline{U} = \underline{L}^T \quad \dots 4.8.16$$

Al sustituir la ec. 4.8.16 en la ec. 4.8.10 se obtiene el proceso de triangularización para el método de Gauss modificado para matrices simétricas y resulta ser :

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad \dots 4.8.17$$

La ecuación 4.8.17 establece que el proceso de triangularización queda definido por una matriz normalizada y una matriz diagonal. El proceso de sustitución se obtiene al colocar 4.8.17 en 4.8.1 y se obtiene :

$$\underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{x} = \underline{b} \quad \dots 4.8.18$$

la ec. 4.8.18 se puede escribir como :

$$\underline{L} \underline{y} = \underline{b} \quad \dots 4.8.19$$

$$\underline{D} \underline{L}^T \underline{x} = \underline{y} \quad \dots 4.8.20$$

La ec. 4.8.19 es la sustitución hacia adelante y la ec. 4.8.20 la sustitución hacia atrás.

4.8.7 Método de Crout modificado

Si la ec. 4.8.9 queda arreglada como :

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{D} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \quad \dots \quad 4.8.21$$

donde

$$\underline{\bar{L}} = \underline{L} \underline{D} \quad \dots \quad 4.8.22$$

Al hacer que la ec. 4.8.21 satisfaga la condición de simetría :

$$\underline{U}^T \underline{D} \underline{L}^T = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \quad \dots \quad 4.8.23$$

la ec. 4.8.23 establece que :

$$\underline{\bar{L}} = \underline{U}^T \quad \dots \quad 4.8.24$$

Al sustituir la ec. 4.8.24 en la ec. 4.8.21 se obtiene el proceso de triangularización para el método de Crout modificado para matrices simétricas, que se indica como :

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \quad \dots \quad 4.8.25$$

La ec. 4.8.25 establece que el proceso de triangularización queda definido por una matriz triangular superior normalizada y una matriz diagonal.

Al comparar la ec. 4.8.17 y la 4.8.25, que definen los procesos de triangulación para los métodos de Gauss y de Crout modificados para matrices simétricas, se puede concluir que no existe diferencia entre ellos, por lo que puede llamarse Método de Gauss - Crout.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, en notación de matriz triangular superior normalizada, se puede escribir como se indica a continuación ya que $\underline{U} = \underline{L}^T$:

$$\underline{U}^T \underline{y} = \underline{b} \quad \dots 4.8.26$$

$$\underline{D} \underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad \dots 4.8.27$$

4.8.8 Método de Cholesky

Se puede considerar como una variante del método de Gauss-Crout, para el caso en que la matriz \underline{A} sea positiva definida. Entonces, la ec. 4.8.25 se puede escribir como :

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D}^{1/2} \underline{D}^{1/2} \underline{U} = \underline{\bar{U}}^T \underline{\bar{U}} \quad \dots 4.8.28$$

donde la matriz triangular $\underline{\bar{U}} = \underline{D}^{1/2} \underline{U}$, ya está normalizada.

La sustitución hacia adelante y hacia atrás se obtienen al sustituir la ec. 4.8.2 en la ec. 4.8.1 y resulta ser :

$$\underline{U}^T \underline{y} = \underline{b} \quad \dots 4.8.29$$

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad \dots 4.8.30$$

4.9 Determinación del estado de esfuerzos y deformaciones

Conocidos los desplazamientos en cada nudo se calculan las deformaciones y los esfuerzos en cada elemento mediante las ecuaciones:

$$[e_e] = [B] [\delta_e] \quad \dots 4.9.1$$

$$[r] = [D] [B] [\delta_e] \quad \dots 4.9.2$$

donde δ_e = vector desplazamiento obtenido con la solución del sistema de ecuaciones

En este caso para $\{\delta_e\}$ se emplean solo los datos correspondientes a los desplazamientos de los nudos asociados a cada elemento. $\{\epsilon\}$ es uniforme en cada elemento, y así se obtiene el tensor esfuerzo en cada elemento, y a partir de este tensor pueden encontrarse los esfuerzos principales por métodos conocidos.

No obstante las limitaciones de precisión del método del elemento finito, las cuales son inherentes a cualquier método numérico, los resultados obtenidos son satisfactorios e incluso pueden graficarse mediante programación, además permiten el manejo de cualquier geometría irregular, distribución de cargas y de heterogeneidad de propiedades de los elementos, las cuales son limitaciones muy serias en otros métodos de análisis.

Notese además, que los errores numéricos involucrados pueden ser del mismo orden a los que se tienen por falta de datos experimentales completos en toda la región. Así pues, una mayor fineza en los resultados es engañosa.

CAPITULO V

DESARROLLO DEL ANALISIS

5.1 Características del análisis

La presa de Aguamilpa, en el edo. de Nayarit, se localizará sobre el río Santiago en una garganta estrecha. Su sección transversal al río dibuja una "V", relativamente regular, formada por masas fracturadas de Ignimbritas del terciario, surcadas además por diques de andesita porfídica, monzonita y diabasas.

Tomando en cuenta las características geológicas y sísmicas del sitio, se diseñó en una primera etapa, una presa de tierra y enrocamiento de $19 \times 10^6 \text{ m}^3$ de volumen. El volumen de arcilla de su núcleo central era de $2 \times 10^6 \text{ m}^3$, y la distancia de acarreo para este material resultaba de 30 km; en vista de lo cual se inició por parte de C.F.E., el diseño de una presa de enrocamiento con pantalla impermeable de concreto, cuyo comportamiento sísmico ha mostrado ser satisfactorio en numerosos ejemplos de presas de este tipo ya construidas.

Se pretende en Aguamilpa, construir una presa del tipo ya mencionado, de acuerdo a las normas modernas al respecto, que se describen en el capítulo correspondiente al estado del arte en presas con losa de concreto.

Sin embargo, tomando en cuenta su altura (190 m) y su localización en una zona de alta sismicidad, se busca ser conservador y analizar lo más detalladamente posible el estado de esfuerzos y deformaciones en esta presa.

La investigación que nos ocupa tiene por objetivo el análisis de las condiciones de apoyo de la losa de concreto, efectuando un análisis paramétrico tridimensional variando la geometría y las propiedades mecánicas de los materiales de las zonas de apoyo de la losa, a fin de optimizar su diseño.

El análisis estático se hace simulando el proceso constructivo de la presa, así como el llenado de su embalse mediante la modelación por elementos finitos y utilizando el programa de computadora que se describe brevemente en el punto 5.3.

Aprovechando la condición de simetría que se presenta en la boquilla de la presa, se vió la factibilidad de analizar únicamente la margen izquierda de ella, considerando que las ideas que se desprendieran del análisis de ésta puedan ser aplicadas al conjunto, logrando de ésta manera simplificar la modelación.

Es propósito de la simulación el aproximarse al verdadero comportamiento de losa y materiales componentes de la presa, variando el módulo de elasticidad de éstos, de acuerdo al incremento de esfuerzos que cada elemento tenga durante la construcción de la presa y el llenado de su embalse. Este comportamiento de los materiales es del tipo no lineal y se emplea el procedimiento descrito en el punto 5.2.

5.2 Procedimiento para simular el comportamiento no lineal de los suelos.

El éxito de la modelación de una presa de tierra por el método del elemento finito, depende en gran parte de que tan bien se puede describir analíticamente la respuesta no lineal del suelo y materiales rocosos bajo la carga aplicada.

Desde 1967, muchos procedimientos han sido propuestos para incorporar el comportamiento esfuerzo - deformación del suelo y roca en el análisis por elementos finitos. Pero aquellos procedimientos que cumplen satisfactoriamente con los requisitos de simplicidad y exactitud para un problema, pueden ser totalmente inadecuados para otro.

Muchos son los factores que afectan las características esfuerzo-deformación del suelo y de rocas, y un gran esfuerzo se realiza para estudiar el efecto de esos factores. Duncan divide estos factores en composicionales y ambientales. Los primeros pueden ser la densidad del suelo, el contenido de agua, el arreglo interno de las partículas del suelo, etc. Los factores ambientales incluyen las condiciones de carga bajo las cuales el suelo está sujeto, presión de confinamiento, historia de cargas, magnitud de deformación, etc. Hoy día, el estudio de los efectos de los mencionados factores se realiza mediante ensayos de laboratorio, representativos del suelo en campo y bajo condiciones de carga anticipadas. Los resultados de esas pruebas permiten formular un modelo adecuado del comportamiento del suelo para incluirlo en los análisis por elemento finito.

Un procedimiento muy usado para simular el comportamiento esfuerzo-deformación para terraplenes es el propuesto por Duncan y Chang (1970), mediante el cual, el comportamiento no lineal del suelo se simula usando una relación del tipo hiperbólico, como se muestra en la fig. 5.1. La figura 5.2 muestra el excelente grado de exactitud que puede obtenerse entre el modelo hiperbólico y las curvas de laboratorio.

Dado que los programas de elementos finitos están formulados para un comportamiento lineal del suelo, es necesario aproximar el comportamiento no lineal auxiliandonos de la herramienta matemática que es el Análisis lineal. Esto se logra usando incrementos lineales sucesivos (Fig 5.1.a), donde el valor del módulo para cada elemento de la malla de elementos finitos se ajusta de acuerdo con el estado de esfuerzos para cada incremento de carga.

La relación entre esfuerzo y deformación está gobernada por la ley generalizada de Hooke para deformaciones elásticas, la cual puede ser expresada como sigue, para condiciones de esfuerzo plano :

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

donde $\Delta \sigma_x$, $\Delta \sigma_y$ y $\Delta \tau_{xy}$ son los incrementos de esfuerzo durante un incremento de carga, y $\Delta \epsilon_x$, $\Delta \epsilon_y$ y $\Delta \gamma_{xy}$ son los correspondientes incrementos de deformación. Et es el módulo tangente de Young, que se ajusta en cada incremento de carga de acuerdo a la no linealidad, estado de esfuerzos e inelasticidad.

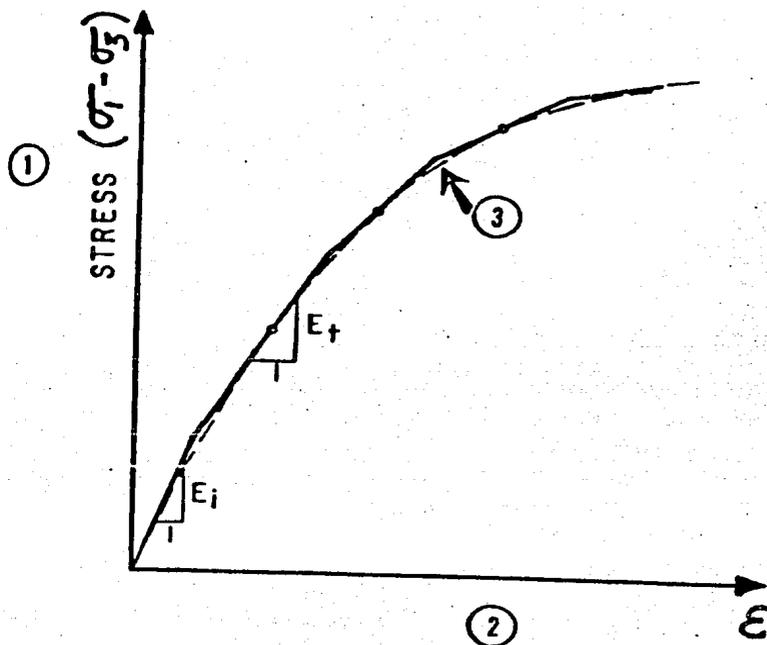
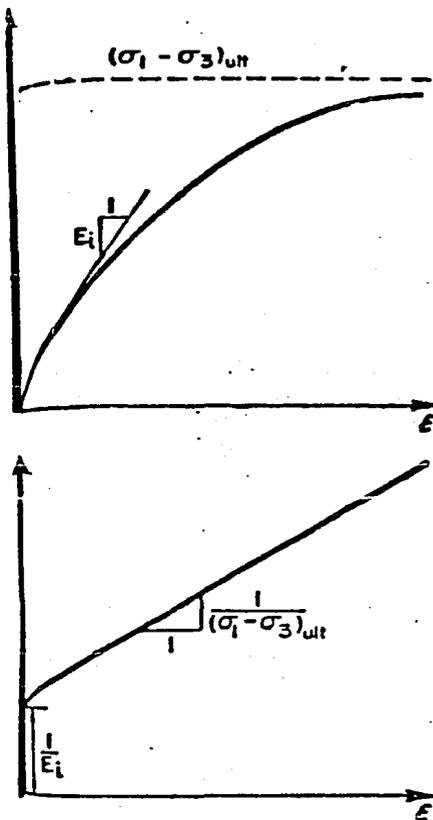


FIG. 5.1.a ANALISIS DE ELEMENTO FINITO, REPRESENTACION NO LINEAL ESFUERZO-DEFORMACION (MODELO ELASTICO INCREMENTAL).
 1. Esfuerzo 2. Deformación 3. Modelo de comportamiento del suelo ($\sigma_1 - \sigma_3$) - esfuerzo desviador, ϵ - deformación axial, E_i - modulo inicial, E_t - modulo tangente



$$\textcircled{1}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\epsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}}$$

$$\textcircled{2}$$

$$\frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{1}{E_i} + \frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$$

FIG. 5.1.b ANALISIS DE ELEMENTO FINITO, REPRESENTACION ESFUERZO-DEFORMACION NO LINEAL (REPRESENTACION HIPERBOLICA DE UNA CURVA ESFUERZO-DEFORMACION)

1. Real 2. Transformada $(\sigma_1 - \sigma_3)$ - esfuerzo desviador, ϵ - deformación axial, E_i - modulo inicial, $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ esfuerzo desviador último.

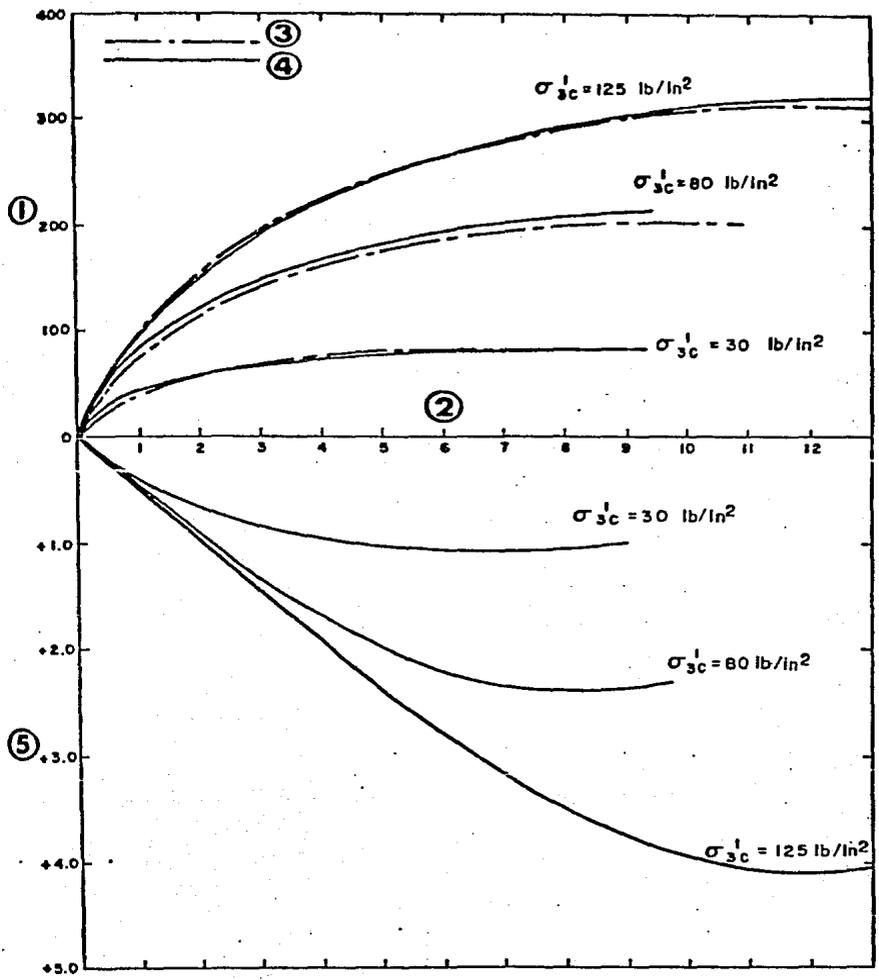


FIG. 5.2. RESULTADOS DE LA CURVA ESFUERZO-DEFORMACION PARA UN ENSAYE CONSOLIDADO-DRENADO PARA UN MATERIAL LIMOSO.

- 1. Esfuerzo desviador lb/in²
- 2. Deformación axial (%)
- 3. Representación hiperbolica
- 4. Laboratorio
- 5. Deformación volumétrica

5.2.1 Representación hiperbólica de un material de comportamiento no lineal.

Usando una hipérbola para representar la curva esfuerzo- deformación (Fig. 5.1.b), la relación queda expresada por :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\epsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}}$$

donde E_i es el módulo tangente y $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ es el valor asintótico del esfuerzo desviador, $(\sigma_1 - \sigma_3)$, aproximado en la hipérbola para una deformación infinita. Esos valores son determinados, para un ensaye dado, aproximando una línea recta a la colección de puntos determinados, como se muestra en la gráfica inferior de la figura 5.1.b.

5.3.2 Dependencia Módulo - Esfuerzo

Los valores de E_i y $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ se determinan a partir de una serie de ensayes de laboratorio para diferentes presiones de confinamiento (σ_3) , los cuales se incrementan al aumentar esta (fig 5.3). Janbu (1963) sugiere que esta variación de E_i con respecto a σ_3 puede expresarse mediante la ecuación :

$$E_i = K P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n$$

donde σ_3 es el esfuerzo principal menor, P_a la presión atmosférica expresada en las mismas unidades de E_i y σ_3 . K y n son valores adimensionales e independientes del sistema de unidades utilizado.

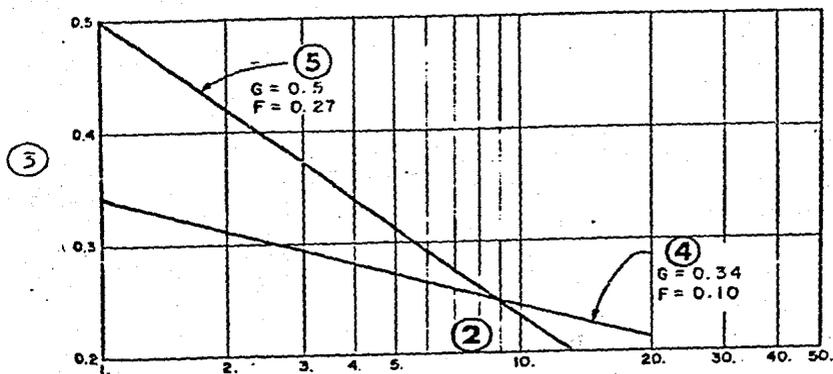
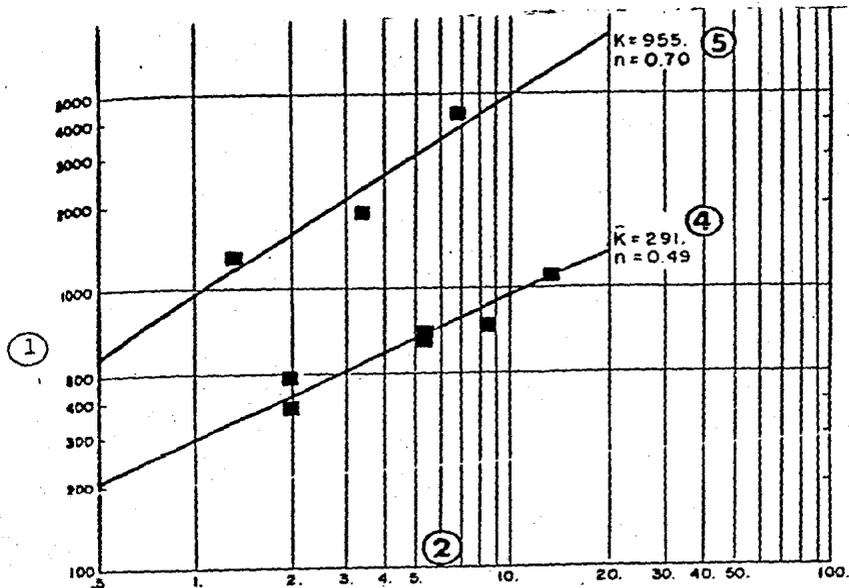


FIG. 5.3 VARIACION DEL MODULO TANGENTE INICIAL Y LA RELACION DE POISSON CON LA PRESION DE CONFINAMIENTO
 1. Módulo tangente inicial (E_t / P_a) 2. Presión de confinamiento (σ'_{3c} / P_a) 3. Relación de Poisson inicial

La variación de $(\sqrt{1-\nu_3})_{ult}$ puede relacionarse con el esfuerzo pico desviador $(\sqrt{1-\nu_3})_f$ de un ensaye por la siguiente expresión :

$$(\sqrt{1-\nu_3})_f = R_f (\sqrt{1-\nu_3})_{ult}$$

donde a R_f se le conoce como relación de falla y es un parametro adimensional cuyo valor es siempre menor que la unidad. La dependencia de $(\sqrt{1-\nu_3})_{ult}$ de acuerdo al estado de esfuerzos puede aproximarse usando el criterio de falla de Mohr Coulomb.

$$(\sqrt{1-\nu_3})_{ult} = \frac{1}{R_f} \left[\frac{2c \cos \theta + 2 \nu_3 \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right]$$

donde c es la cohesión y θ el ángulo de fricción interna. Se puede demostrar que el valor del módulo tangente de acuerdo con el estado de esfuerzos existente esta dado por la expresión de Kondner :

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1-\sin \theta)(\sqrt{1-\nu_3})}{2c \cos \theta + 2c \sin \theta} \right] K Pa \left(\frac{\nu_3}{Pa} \right)^n$$

En el procedimiento por elementos finitos, cada paso es usualmente analizado dos veces, la primera usando el valor tangente basado en el nivel de esfuerzos del elemento debido al incremento de carga previo, y la segunda es usando el valor del módulo tangente basado en el promedio del nivel de esfuerzos durante el incremento.

5.3 Descripción del programa de computadora utilizado

El programa empleado es una versión modificada del denominado

SAP IV y se basa en el método de los elementos finitos. Utiliza elementos cúbicos isoparamétricos de 8 nodos y permite simular tanto el proceso constructivo de una presa como el llenado de su embalse. El comportamiento esfuerzo-deformación no lineal de los materiales terrosos se modela utilizando una relación hiperbólica del tipo que se describe en el punto 5.2.

El programa está escrito en FORTRAN IV y adaptado para la computadora B-7800 de la Dirección General de Computo Académico de la UNAM. Su funcionamiento general se muestra de forma esquemática en la figura 5.4. Tiene las siguientes características:

- a) Una rutina principal y 14 subrutinas
- b) Requiere 3902 registros en disco
- c) No necesita cintas durante el proceso
- d) Graba resultados finales e intermedios en 15 archivos, los cuales también emplea para lectura.
- e) Utiliza memoria dinámica
- f) Maneja elementos finitos de forma paralelepípeda isoparamétricos de 8 nodos.

La cantidad de nudos y elementos para la malla que puede manejar el programa depende de la capacidad en disco que se le asigne en el computador .

5.4 Primera modelación

5.4.1 Geometría

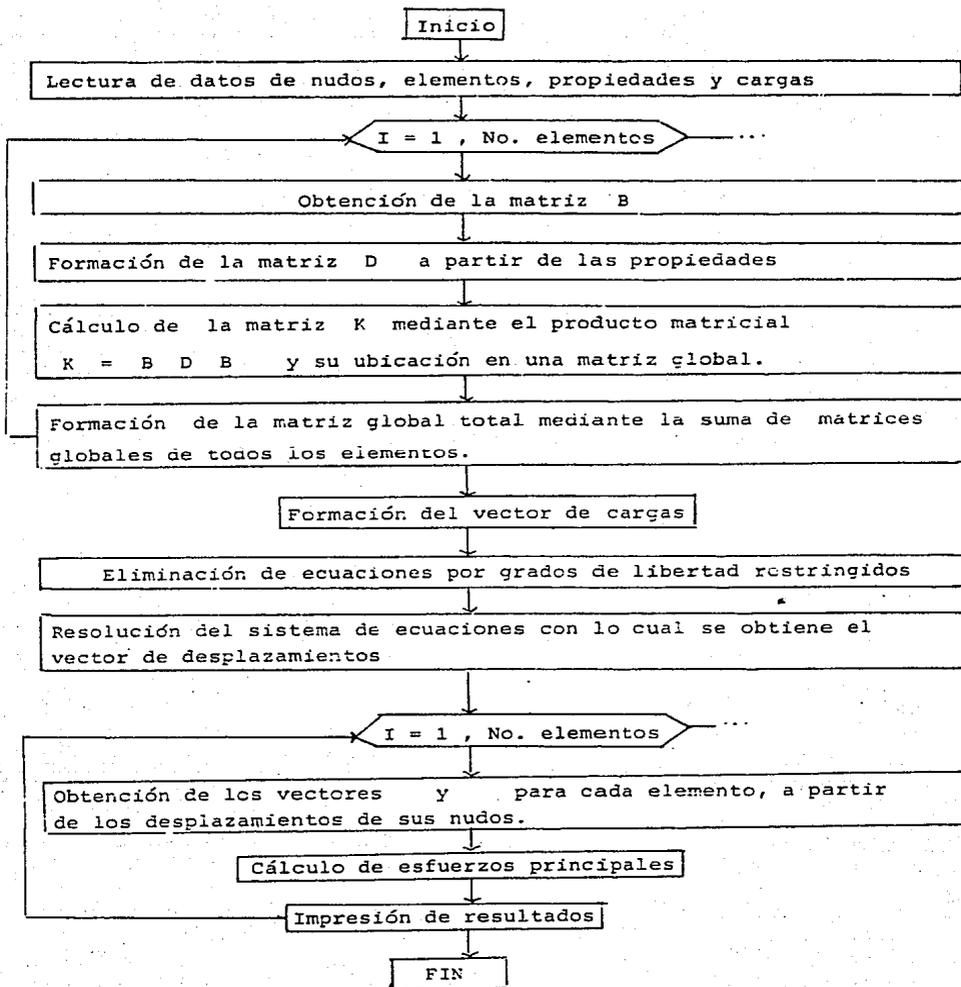


FIG. 5.4 .- Diagrama de flujo del programa de elementos finitos utilizado.

A partir de la condición actual del estado del arte en presas de enrocamiento con losa de concreto, se definió una geometría y una zonificación de materiales para la presa de Aguamilpa. Esta primera configuración se muestra en la figura 5.5.a.

La estructura de esta presa está formada por un macizo de enrocamiento (material 1) cubierto en su frontera de aguas arriba por una zona de transición y filtro (material 2) que subyace a una capa de material arcilloso (material 5) protegido finalmente por una losa de concreto. Las zonas constituidas por el material 4 corresponden a las ataguías de aguas arriba y abajo.

Los espesores de las capas formadas por los materiales 3, 5 y 2 son respectivamente, 0.6, 5 y 5 metros, en todo su desarrollo.

En la figura 5.5.b se presenta una vista desde aguas arriba de la presa, a fin de señalar la existencia de una junta perimetral en el contacto roca-concreto que se modeló con elementos finitos, cuyas características de rigidez son muy bajas. Así mismo, se pretende en ésta forma recalcar que no se modificó la geometría de la ladera en su contacto con la losa de concreto.

5.4.2 Simulación del proceso constructivo

Se puede observar en la figura 5.5.a, que la ataguía de aguas arriba no queda totalmente integrada a la presa, por lo que la losa de concreto deberá construirse en dos etapas, la primera hasta la elevación 117 m como elemento impermeable de la ataguía de aguas arriba, y la segunda de la elevación 117 m hasta la corona.

En el caso considerado, la malla de elementos finitos consiste de 397 nodos y 310 elementos (fig. 5.6.a y b), en general para-

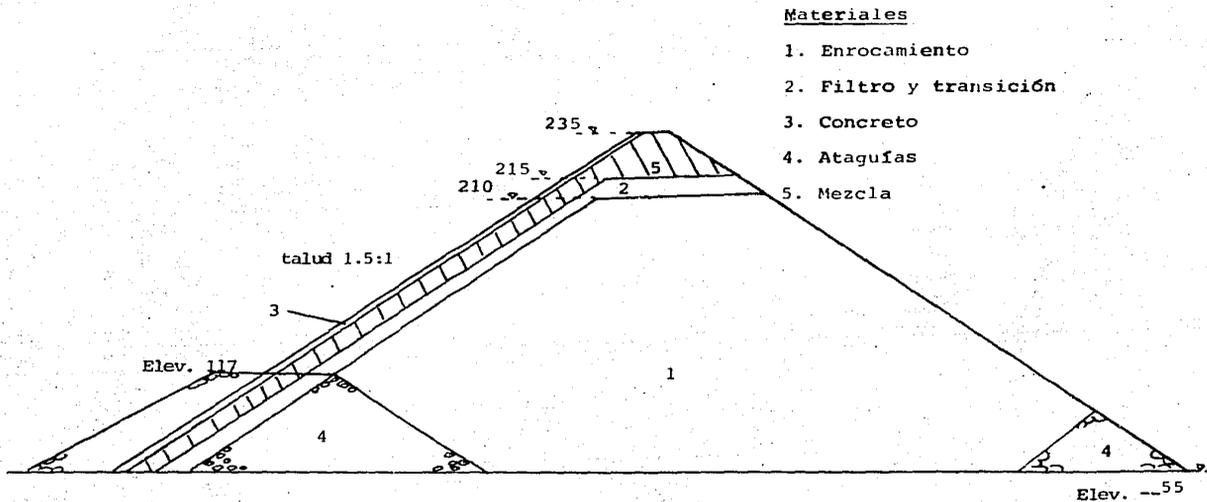


FIG. 5.5.a .- Zonificación de materiales

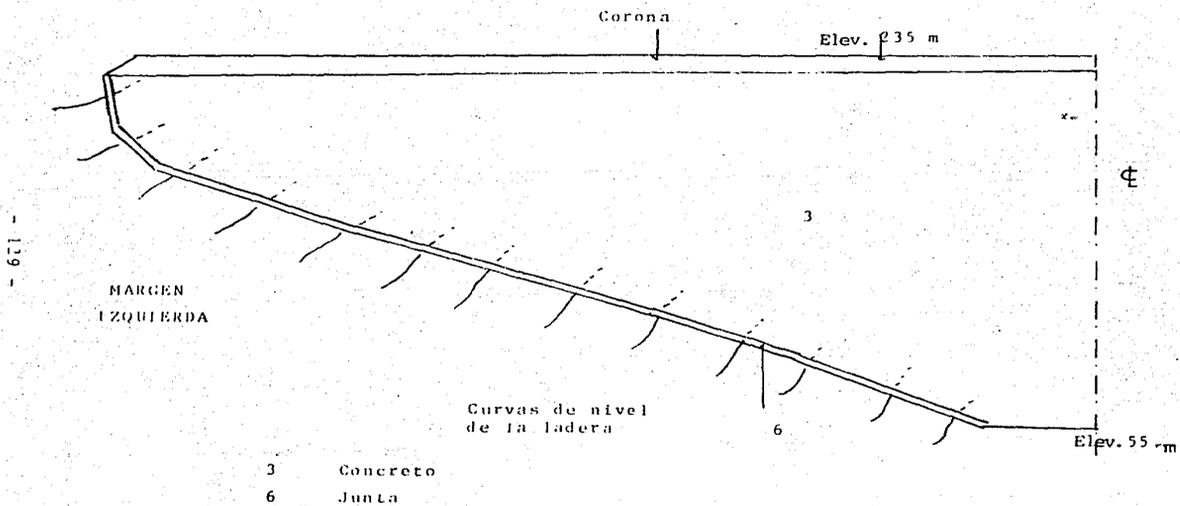


FIG. 5.5.b .- Vista desde aguas arriba

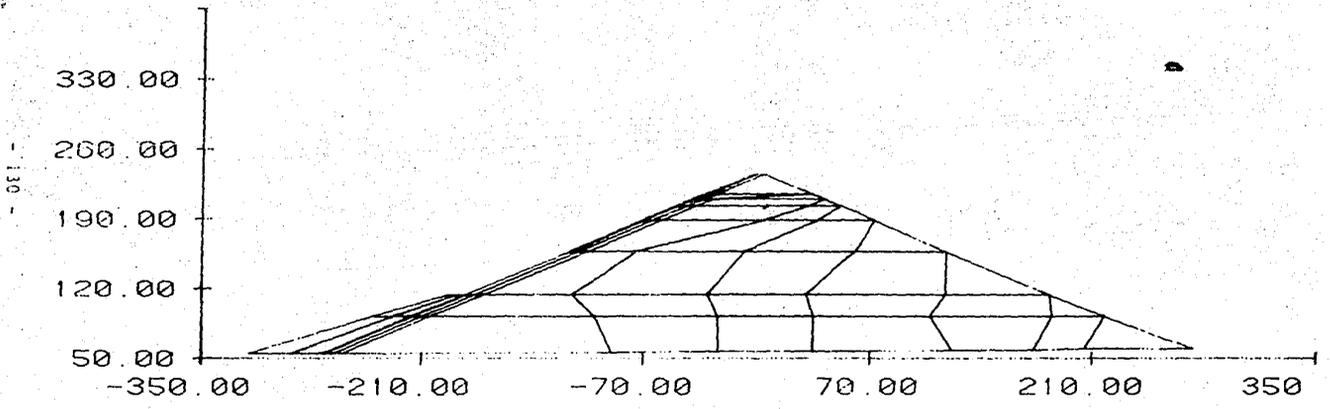


FIG. 5.6.a .- Malla de elementos finitos utilizada.
Corte longitudinal

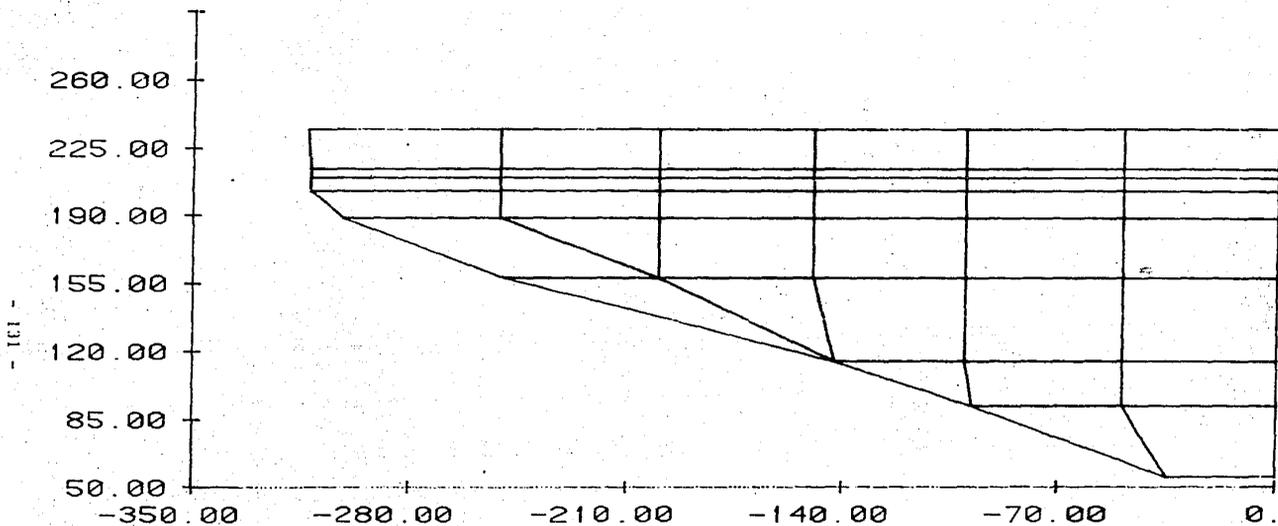


FIG. 5.6.b -- Malla de elementos finitos utilizada.

Corte transversal.

lelepípedos de 8 nodos, salvo en la cercanía de las laderas, en que se emplearon tetraedros. La construcción y primer llenado se idealizaron mediante 10 etapas; las dos primeras abarcan la construcción de la ataguía aguas arriba con su losa integrada. Las etapas 3 a 8 simulan la construcción del cuerpo de la presa. La etapa número 9 representa la construcción de la losa de concreto de las elevaciones 117 a 235 m, y la etapa 10 simula el primer llenado.

Tanto para esta modelación, como en la siguiente, las características mecánicas del concreto se consideraron constantes e iguales a :

$$E = 200\ 000\ \text{kg/cm}$$

$$\text{y } \nu = 0.30$$

Así mismo, la junta perimetral se idealizó en todos los casos mediante el uso de un material muy deformable, cuyas características de deformabilidad son :

$$E = 0.01\ \text{kg/cm}$$

$$\text{y } \nu = 0.40$$

5.4.3 Presentación de resultados

Las propiedades de los materiales del cuerpo de la presa para esta primera modelación se muestran en la tabla 5.1.

Los resultados de este análisis se presentan de las figuras 5.8 a 5.10. Se muestran el perfil deformado de la presa y curvas de isoesfuerzos normales x y z en el paramento de concreto de la presa dividido en dos franjas de 30 cm de espesor cada una y

MATERIAL	E_i (10^4 Kg/m^2)		c 10^4 Kg/m^2	Kg/m^3
1 Enrocamiento	2000	0.35	0	2100
2 Filtro y Trans.	2500	0.30	0	2200
3 Concreto	200000	0.30	250	2400
4 Ataguía	1500	0.35	0	2000
5 Mezcla	1000	0.30	1	2200

TABLA 5.1 .- Tabla de propiedades ()

denominadas en lo subsiguiente Losa I (superficial) y Losa II (inferior), como se muestra en la figura 5.7.

En el caso en cuestión, los esfuerzos \sqrt{x} y \sqrt{z} de tensión que se generan en la losa II alcanzan magnitudes superiores a 200 y 400 kg/cm², respectivamente, en la parte superior del paramento de concreto y en la cercanía del empotramiento. Analizando la topografía del terreno natural entre las elevaciones 200 y 235, se aprecia que existen prominencias de roca atrás de la traza de la losa de concreto que constituyen puntos duros nefastos para el buen comportamiento estructural de ésta.

En consecuencia, se modificó la geometría de la ladera, regularizándola a lo largo de la traza de la losa de concreto mediante una zanja, con el fin de disminuir la interacción de la ladera con la losa.

También se observa una alta concentración de esfuerzos en la parte inferior de la losa (I y II), debido probablemente en parte a los esfuerzos inducidos por el peso de la ataguía que la sobreyace.

Entonces, los subsiguientes casos analizados corresponden a la geometría de la ladera ya descrita, logrando evitar la aparición de altas tensiones en la parte superior de la losa en la cercanía de la ladera. También se decidió incorporar la ataguía de aguas arriba al cuerpo de la presa.

5.5 Segunda Modelación

5.5.1 Geometría

La geometría que se propone en ésta segunda modelación es con-

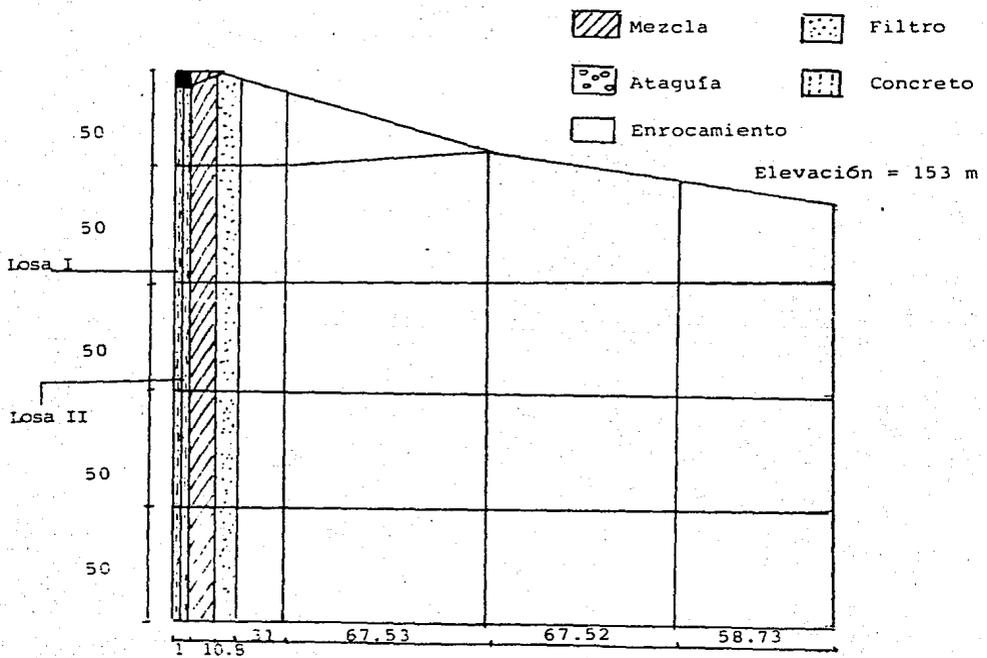
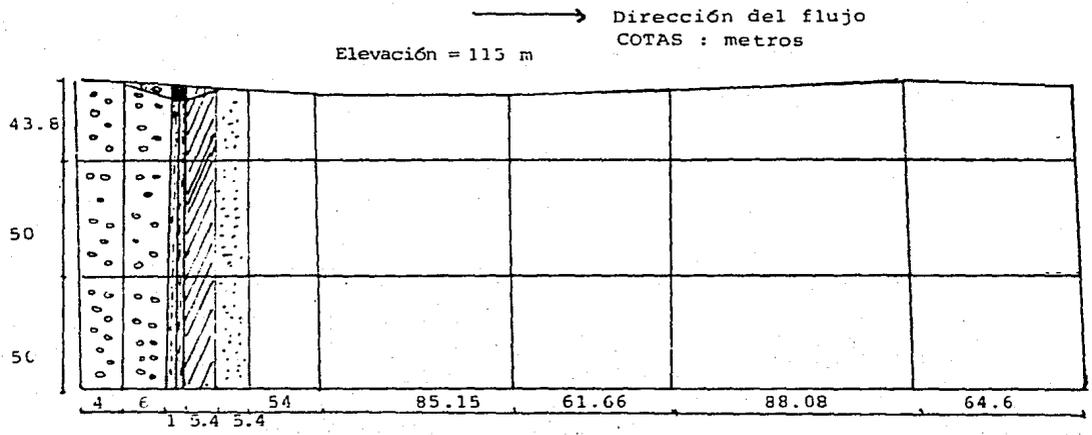


FIG. 5.7 .- Cortes a diferentes elevaciones
- 135 -

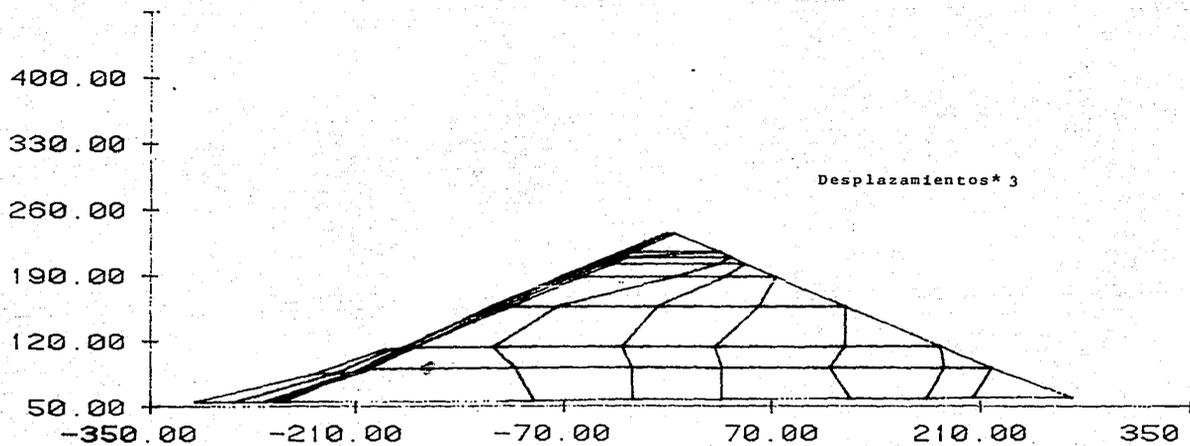


FIG. 5.8 .- Perfil desplazado
Corte longitudinal
Primera modelación.

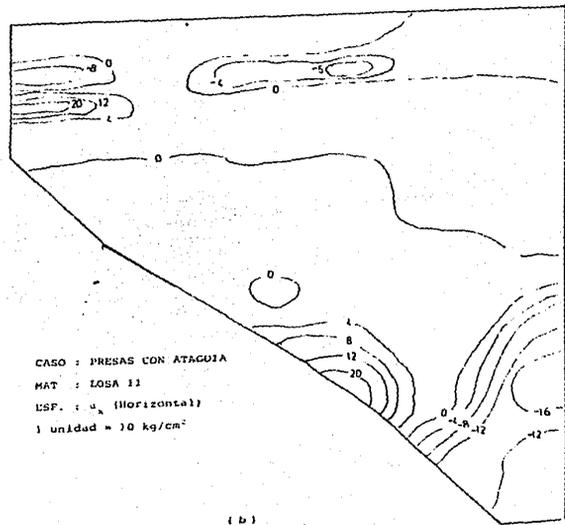
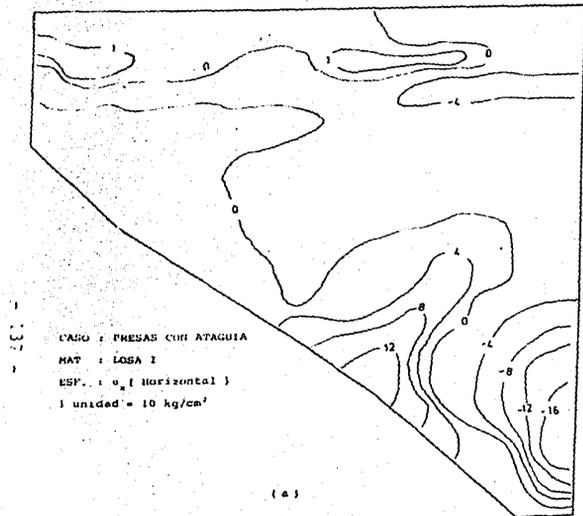


FIGURA No. 5.9

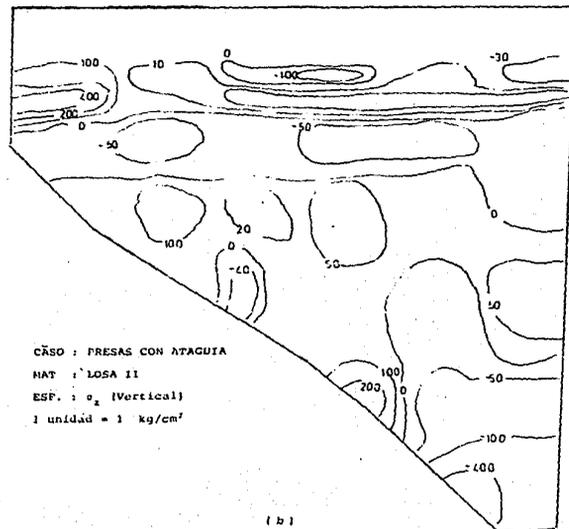
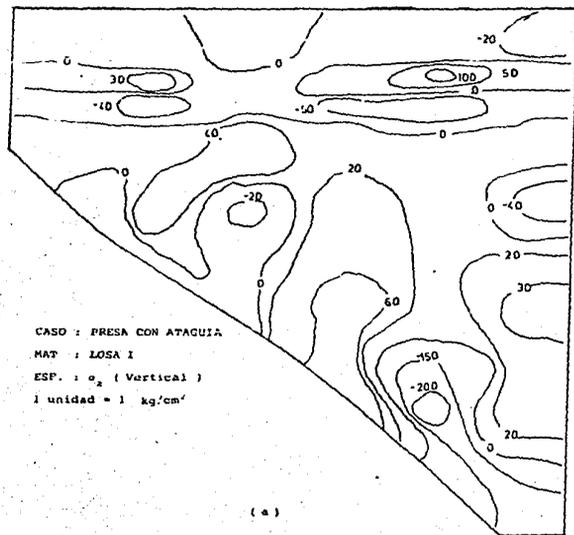


FIGURA No. 5.10

secuencia de los resultados obtenidos anteriormente, la zonificación de materiales es similar a la utilizada en la modelación anterior (fig. 5.11.a)

En ésta geometría se considera que la ataguía de aguas arriba queda integrada en el cuerpo de la presa.

En cuanto a regularización de la ladera se considera un cajón excavado de 7.5 m de ancho aguas abajo de la losa de concreto, a fin de eliminar en la cercanía de ésta última las protuberancias de la roca, según se muestra en la figura 5.11.b para varias secciones.

5.5.2 Simulación del proceso constructivo

En ésta segunda modelación, la malla de elementos finitos consta de 388 nudos y 314 elementos (fig. 12), la construcción se efectúa en 9 capas, siendo la novena correspondiente a la colocación de la losa de concreto desde el pie del talud hasta la corona. La décima capa corresponde al llenado de la presa.

Ahora bien, siendo el objetivo de ésta investigación la optimización de la distribución de esfuerzos en la losa de concreto del paramento mojado de la presa, se determina el campo de esfuerzos en ésta presa para diferentes casos, variando las características mecánicas de sus materiales constitutivos. Los ocho casos analizados en ésta segunda modelación se presentan en la tabla 5.2.

5.5.3 Presentación de resultados

Desplazamientos de la losa

Se variaron los módulos de deformabilidad tanto del enroca-

MATERIAL	CASO	$10^6 E$ Kg/m ²		$10^3 C$ Kg/m ²	α	Kg/m ³
1	I al IV	20	0.35	0	40°	2100
	V al VIII	15	0.35	0	40°	2100
2	I al IV	25	0.30	0	40°	2200
	V al VIII	18	0.30	0	35°	2200
3	Todos	2000	0.30	2500	40°	2400
4	Todos	15	0.35	0	38°	2000
5	I y V	5	0.40	20	25°	1850
	II y VI	10	0.40	10	30°	1900
	III y VII	15	0.38	5	32°	1950
	IV y VIII	20	0.35	0	35°	2000

Tabla 5.2 .- Propiedades de los materiales para cada caso probado.

Materiales

1. Enrocamiento
2. Filtro y transición
3. Concreto
4. Atagüfas
5. Mezcla

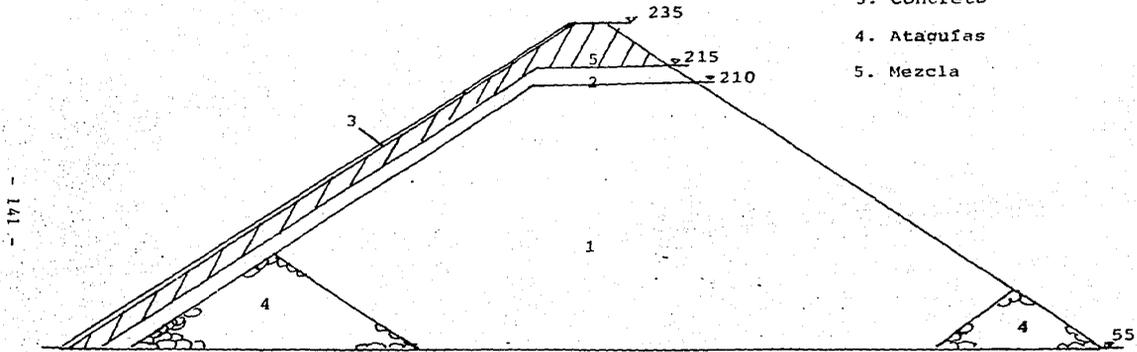
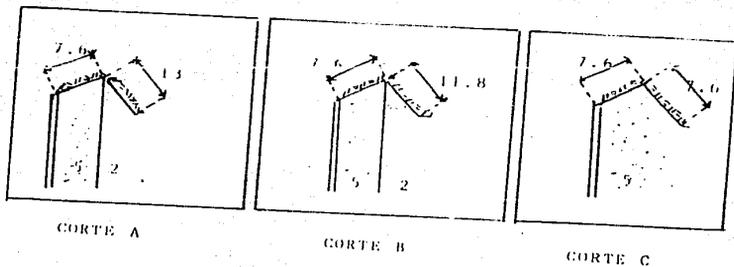


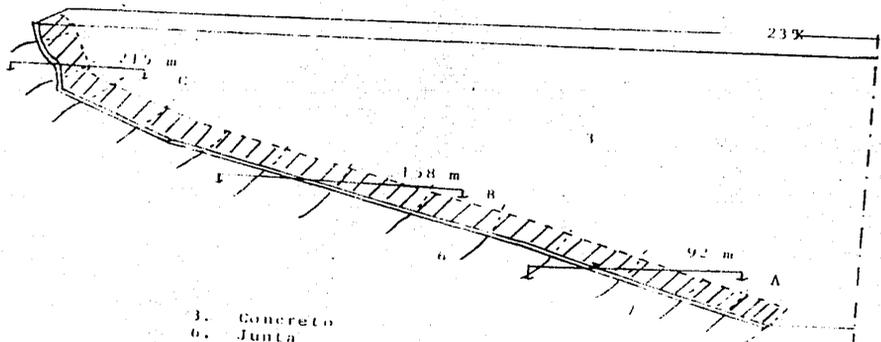
FIG. 5.11.a .- Zonificación de materiales

Segunda modelación



- 5 Mezcla de arcilla
Espesor = 5 m
- 2 Filtro y Trans.
Espesor = 5 m

COTAS : metros



- 3. Concreto
- 6. Junta
- 7. Zona de regularización
de la ladera. Ancho 7.5 m

FIG. 5.11.b .- Vista desde aguas arriba.
Segunda modelación.

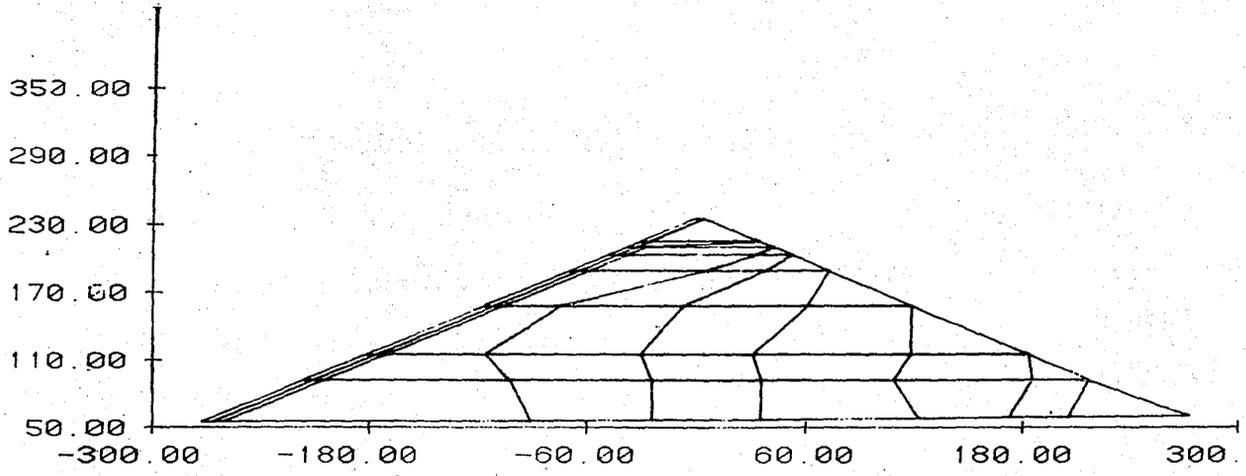


FIG. 5.12 .- Malla de elementos finitos
Corte longitudinal
Segunda modelación

miento (material 1), como el de la mezcla de arcilla (material 5). Se observa que había una variación importante en las magnitudes de los desplazamientos inducidos por el primer llenado, como se puede apreciar en la tabla 5.3.

Las magnitudes de los desplazamientos observados, aún para el caso III que tiene los menores desplazamientos, son del orden del doble de los reportados por Sherard y Cooke para una presa de 190 metros de altura.

En la figura 13.a y b, se muestran el perfil longitudinal deformado para la presa Aguamilpa en el caso III y el perfil correspondiente para la presa Foz do Areia obtenido mediante instrumentación.

Estos desplazamientos son consecuencia, en gran medida, al hecho de que al final de la construcción, el material de filtro y transición (material 2) está plastificado entre las elevaciones 55 y 158 m, como se muestra en la figura 14. La rigidez de éste material en comparación con la de los materiales de enrocamiento y de mezcla (materiales 1 y 5) propicia por efectos de interacción, tal plastificación. Por lo que convendría para aminorar sus efectos negativos, tratar de uniformizar las rigideces de los materiales 1,2 y 5.

Las hipótesis de cálculo suponen un módulo de deformación muy reducido al material 2 en la zona plastificada, propiciando la generación de desplazamientos notorios de la losa durante el primer llenado.

Sin embargo, es discutible ésta forma de efectuar el cálculo. Si bien durante la construcción el material 2 alcanza un estado de fa-

CASO	d_x (cm)	d_y (cm)	d_z (cm)
I	15	- 120	- 180
II	15	-120	- 180
III	12	- 120	- 170
IV	20	- 190	- 230
V	18	- 160	- 210
VI	15	- 140	- 200
VII	25	- 120	- 190
VIII	50	- 280	- 300

d_x : desplazamiento horizontal hacia la margen izquierda.

d_y : desplazamiento horizontal hacia aguas arriba.

d_z : desplazamiento vertical

TABLA 5.3 .- Desplazamientos máximos de la losa de concreto
a raíz del primer llenado.

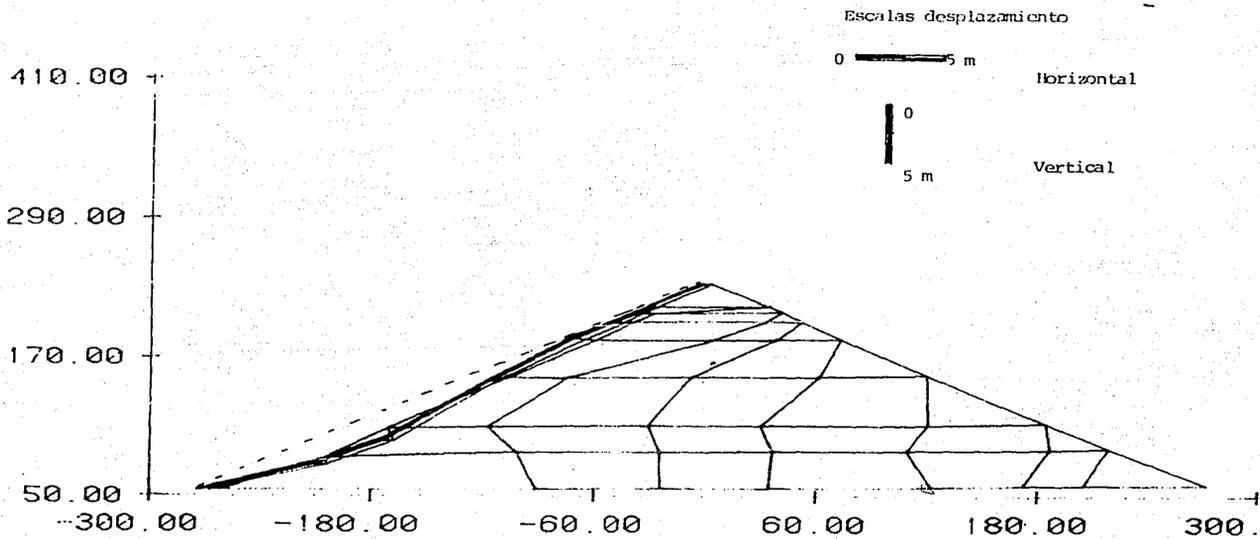
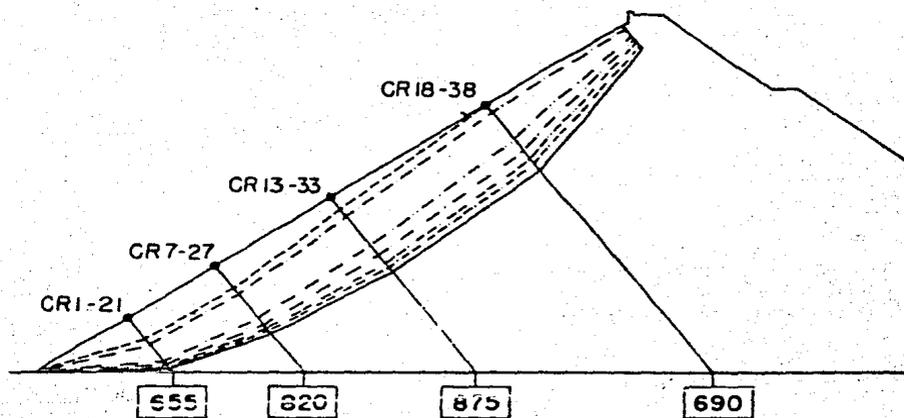


FIG. 5:13 .a.- Perfil desplazado.
Caso III



CR	DEFLECTION (cm)						
	05/80	06/80	07/80	08/80	11/80	10/82	03/84
1-21	21.8	27.7	44.0	47.4	50.1	52.5	52.5
7-27	22.8	30.9	55.8	61.4	64.8	68.1	70.0
13-33	12.6	20.7	50.4	61.2	69.2	72.8	77.5
18-38	—	8.7	35.6	47.0	56.6	62.1	68.9

FIG. 5.13.b .- Perfil deformado instrumentado para la presa Foz do Areia

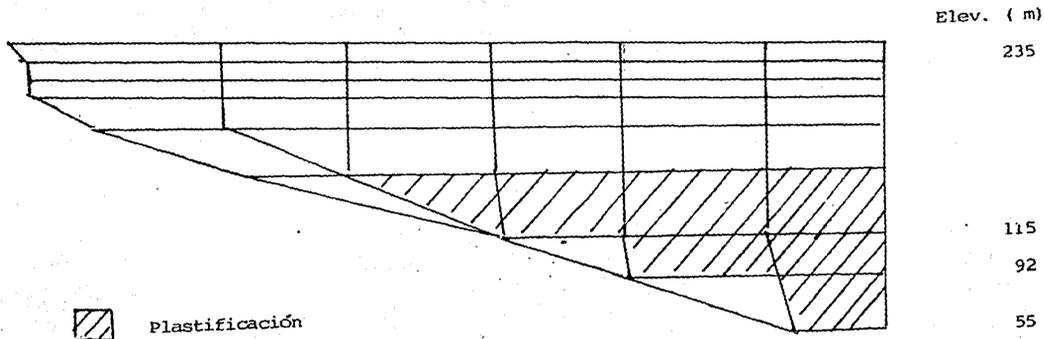


FIG. 5.14 .- Elementos plastificados después de la construcción en el material de filtro y transición (material 2)

lla con esfuerzos principales máximos casi paralelos al talud de aguas arriba, durante el llenado la trayectoria de esfuerzos actuante cambia radicalmente y es difícil predecir, en forma realista, la magnitud del módulo de deformación durante ésta última etapa.

En pruebas triaxiales o de deformación plana realizadas en especímenes de roca se ha observado que las curvas (1 - 3) vs. σ tiene la forma que se muestra en la figura 15 para el Gneiss granítico de Mica.

Al aumentar bruscamente el esfuerzo principal menor σ_3 , el módulo de deformabilidad aumenta considerablemente, y este hecho no se toma en cuenta en la simulación.

Convendría simular el llenado de la presa en varias etapas de carga en la modelación por elementos finitos. En la practica se tendría que, antes de colocar la losa de concreto, compactar el material 5 mediante un rodillo que caminara según la línea de mayor pendiente del talud de aguas arriba, a fin de precargar este material en una dirección conveniente para aminorar los desplazamientos de la losa a raíz del primer llenado.

De acuerdo con lo indicado en la tabla 5.3, para el caso IV y VIII los desplazamientos aumentan considerablemente al generarse un esfuerzo de plastificación en el material 5. De hecho, al atribuir a este material un ángulo de fricción igual a 35° y una cohesión nula, el factor de seguridad del talud de aguas arriba de la presa alcanza apenas el valor de 1.05, al final de la construcción.

Tomando en cuenta ésto último, conviene asegurarse que la resistencia al esfuerzo cortante del material 5 proporcione un factor

$\sigma_1 = \sigma_3$
(kg/cm²)

Gráfica gráfica de Mica

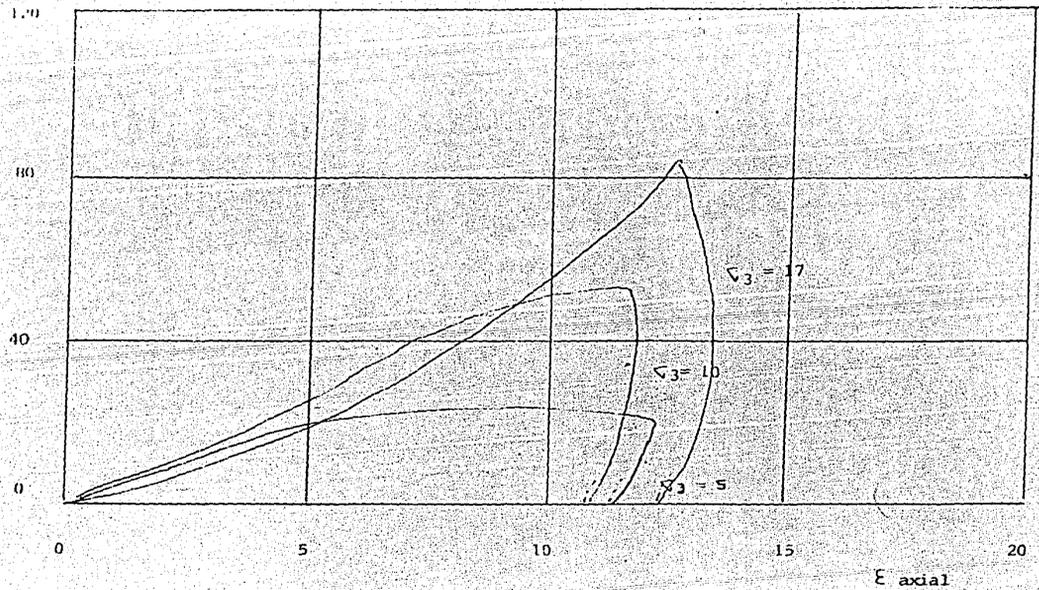


FIG. 5.15 .- Prueba de deformación plana

Esfuerzo desviador vs. deformación axial

- 130 -

de seguridad de por lo menos 1.3 al talud de aguas arriba para una pendiente 1:1.5.

Tensiones en la losa de concreto en la cercanía del empotramiento

En las figuras 16 a 32 se muestran las curvas de isoesfuerzo normal \sqrt{x} y \sqrt{z} , tanto para losa I como losa II para cada uno de los 8 casos analizados. También se muestra la distribución de esfuerzos \sqrt{x} y \sqrt{z} en el material 5 (mezcla de arcilla) para el caso II.

Los desplazamientos inducidos por el primer llenado ocasionan esfuerzos de tensión considerables en la cercanía del empotramiento y a la elevación 100 m aproximadamente. En la tabla 5.4 se muestra la magnitud de dichos esfuerzos para todos los casos probados.

La generación de estos esfuerzos de tensión en la losa de concreto y en ambas direcciones parecen relacionarse cualitativamente con la zona de plastificación que se presenta al final de la construcción en el material 2 de filtro y transición. Esta franja de material 2 se comporta, durante la etapa de llenado, como un material blando rodeado por materiales relativamente rígidos.

Ahora bien, cuando variamos las características de resistencia al cortante del material 5, estamos modificando el factor de seguridad del talud de aguas arriba (tabla 5.4). Conforme disminuye éste, se reduce el módulo de elasticidad del material 5, supuesto para la etapa de llenado y correlativa-

CASO	LOSA I		LOSA II		F.S.
	∇_x	∇_z	∇_x	∇_z	
I	80	150	50	160	1.35
II	90	190	60	170	1.20
III	110	200	90	210	1.08
IV	50	180	40	180	1.05
V	60	150	60	150	1.35
VI	70	190	50	160	1.20
VII	90	200	80	190	1.08
VIII	90	300	80	60	1.05

F.S. : Factor de seguridad al final de la construcción del talud aguas arriba (material 5)

Esfuerzos en kg/cm^2

TABLA 5.4 .- Esfuerzos de tensión en la losa de concreto en la cercanía del empotramiento y a la elevación 100 m.

mente tienden a aumentar los esfuerzos de tensión en la losa a la elevación 100 m.

De nuevo, y de acuerdo con estos resultados, conviene asegurarse de que las características de resistencia al cortante del material 5 elegido, aseguren un factor de seguridad del talud igual a por lo menos 1.3.

Tensiones en la zona central superior de la losa

En la cercanía de la corona de la presa, el material 5 está sometido a esfuerzos de tensión (fig. 20.a y b), tornándose muy deformable y dando lugar a esfuerzos de tensión en la losa de concreto como se indica en la tabla 5.5.

Cuantitativamente estos resultados no son realistas, ya que en particular, no se introdujo en la modelación la presencia de las juntas entre tableros de la losa. Sin embargo, cualitativamente muestran que los casos III y VII parecen ser los más favorables en cuanto a magnitud de los esfuerzos desarrollados en la losa.

Concentración de esfuerzos en la zona superior de la losa en la cercanía con el empotramiento

Se observan concentraciones de esfuerzos tanto de tensión como de compresión en la cercanía de la losa con el empotramiento en la parte superior de la primera. Se consideran causados por la forma de la ladera, y el cajón excavado logró disminuirlos en forma considerable pero no llegó a eliminarlos. No se puede regularizar más la ladera en la margen iz-

Esfuerzos en Kg/cm²

CASO	LOSA I		LOSA II	
	∇_x	∇_z	∇_x	∇_z
I	20	60	- 10	- 40
II	30	40	- 20	- 30
III	10	50	- 10	- 30
IV	10	60	10	20
V	20	60	- 30	- 60
VI	10	40	- 10	- 20
VII	10	20	- 20	- 20
VIII	60	140	- 60	60

Convención : + tensión
 - compresión

TABLA 5.5 .- Máximos esfuerzos en la parte superior central de la losa.

quiera porque en ese lugar se localiza el vertedor de la presa, por lo que en la práctica se tendrían que construir un mayor número de juntas verticales a fin de disminuir el efecto de la ladera sobre la losa.

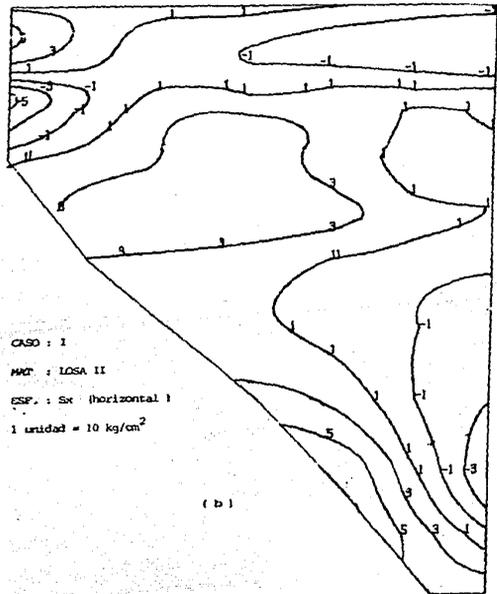
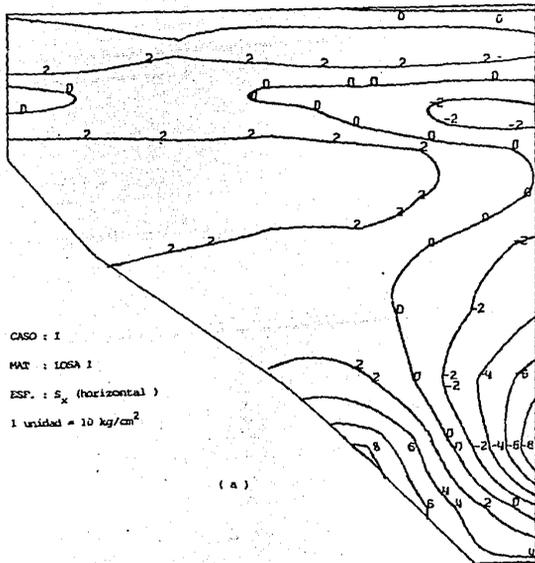


FIGURA No. 5.16

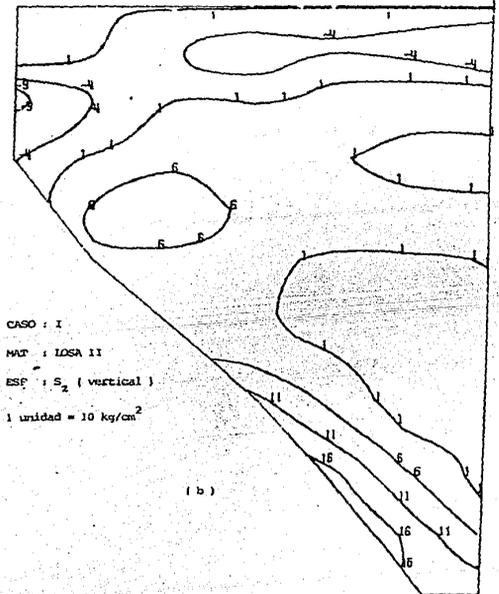
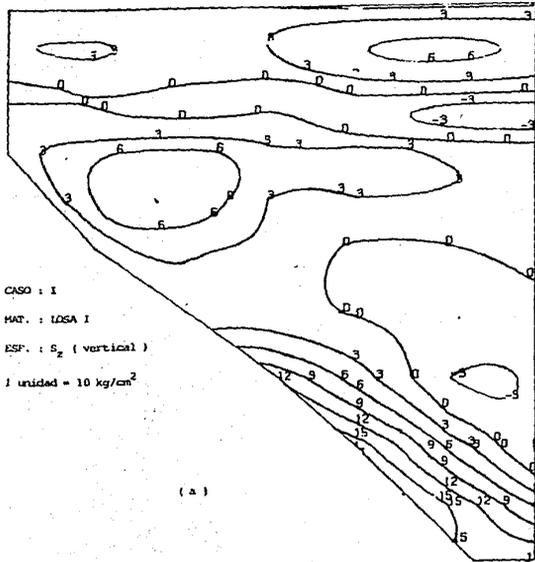


FIGURA No. 5.17

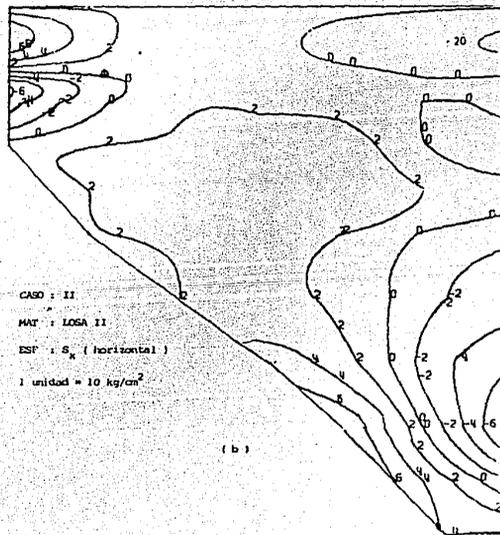
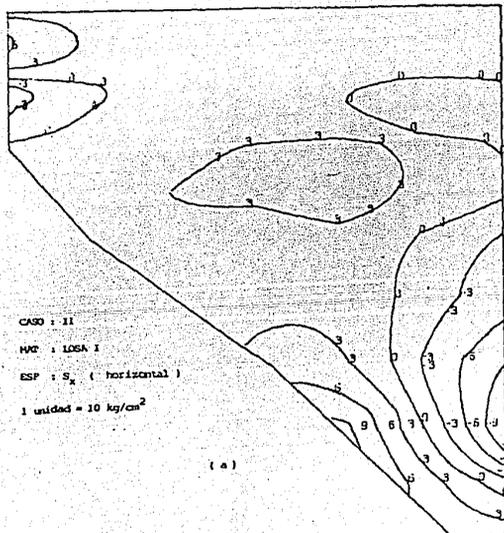


FIGURA 5.18

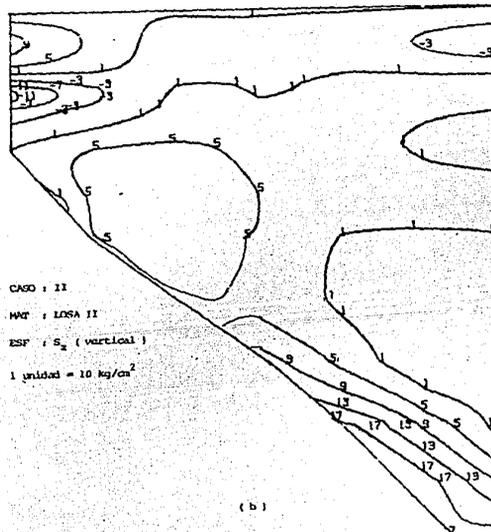
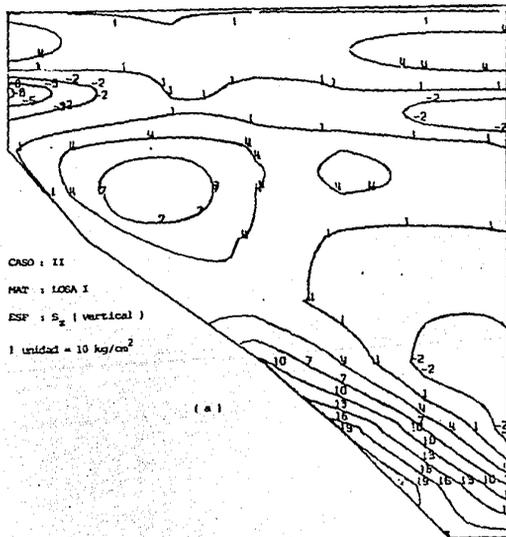


FIGURA No. 5.19

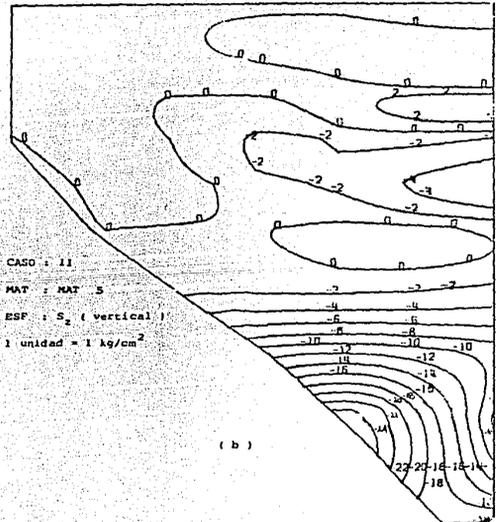
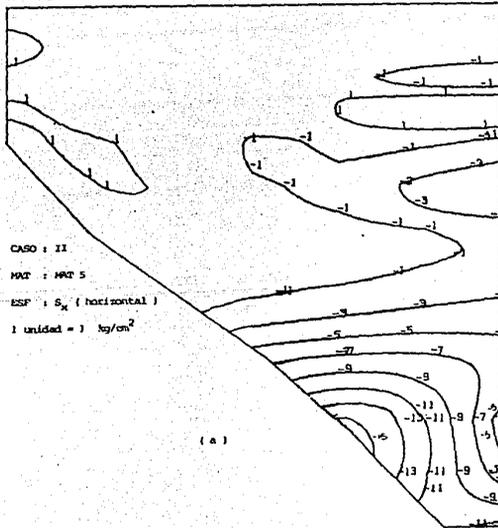


FIGURA No. 5.20

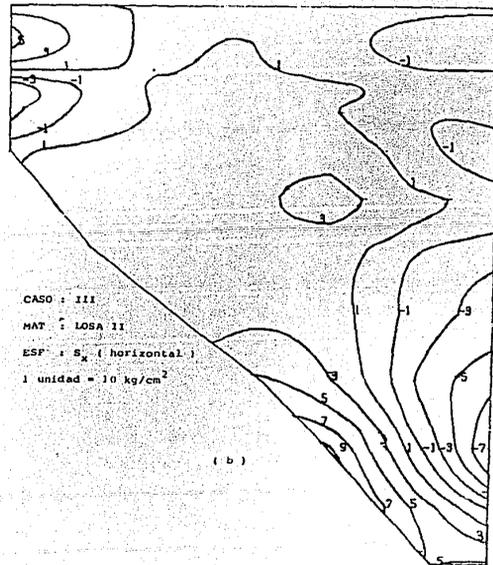
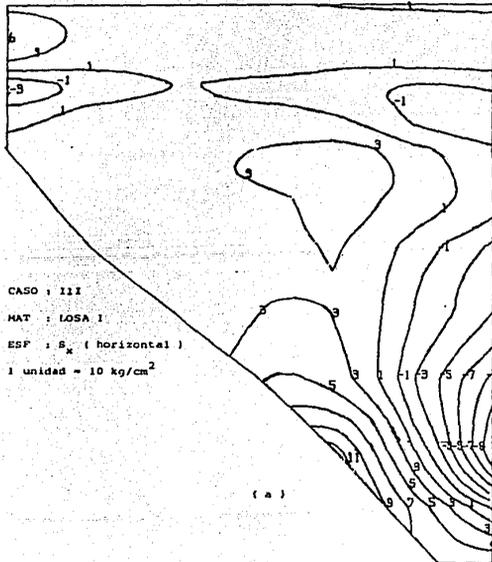


FIGURA No. 5.21

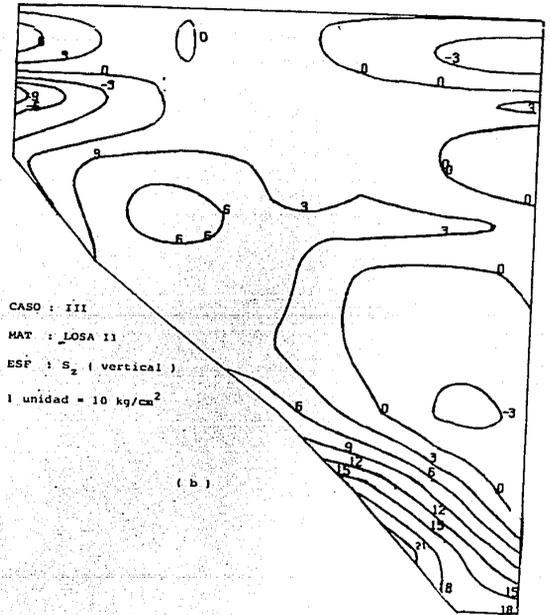
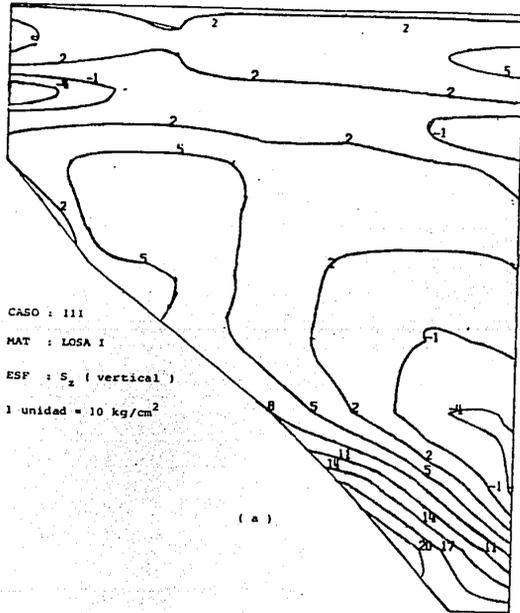


FIGURA No. 5.22

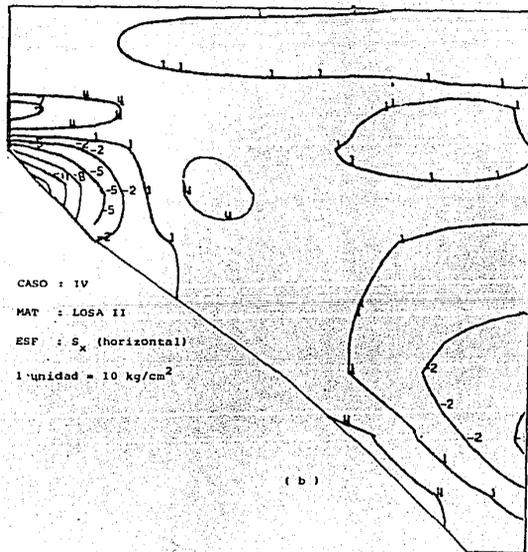
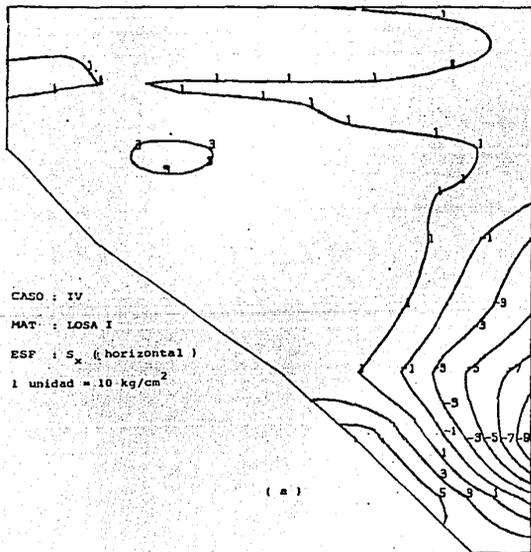


FIGURA 5.23

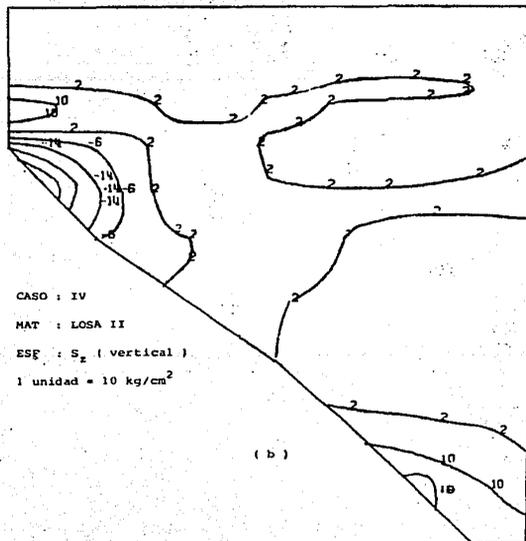
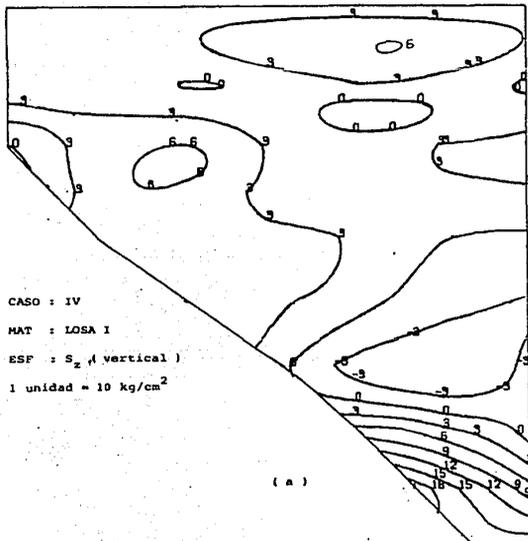


FIGURA No. 5.24

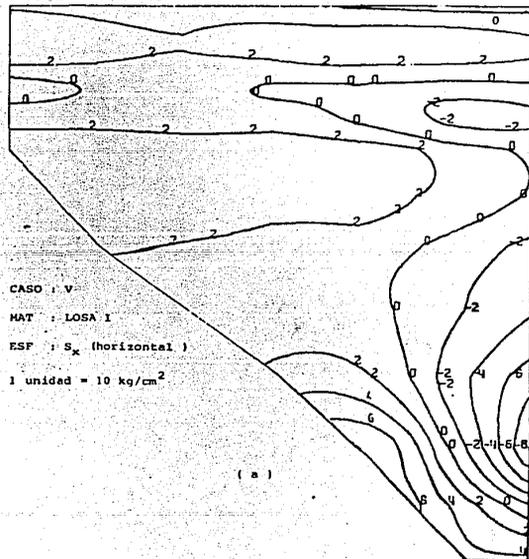
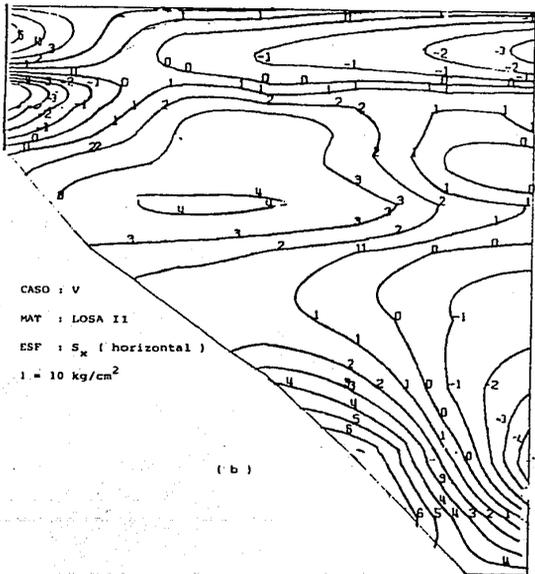


FIGURA No. 5.25

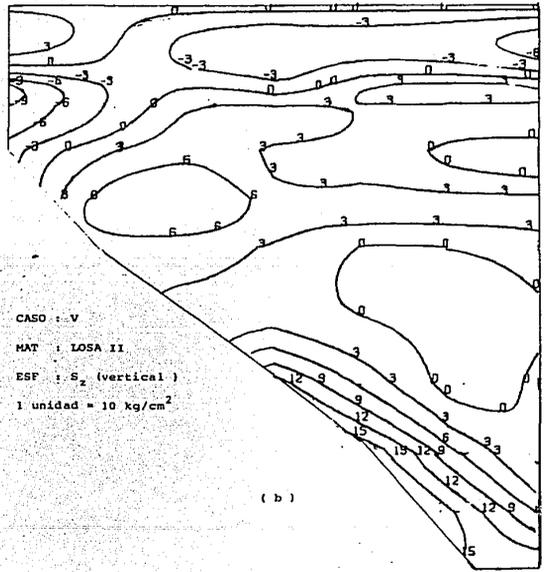
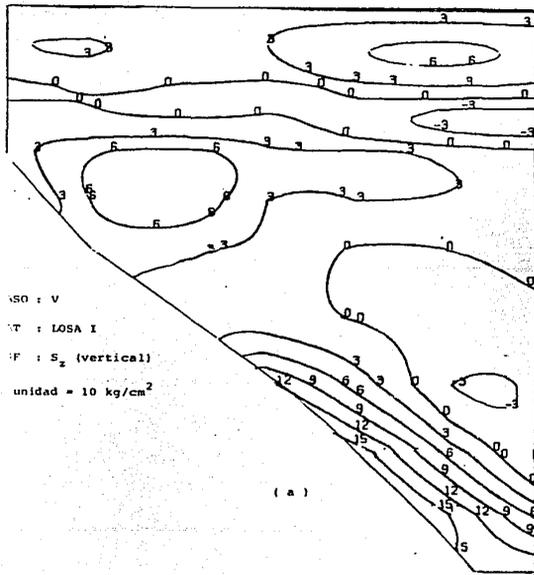


FIGURA No. 5.26

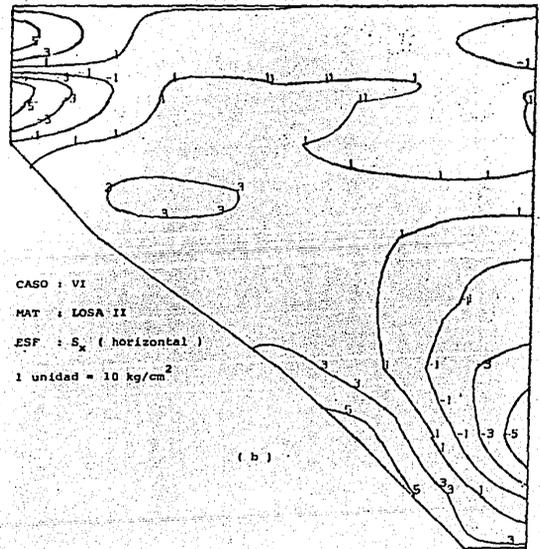
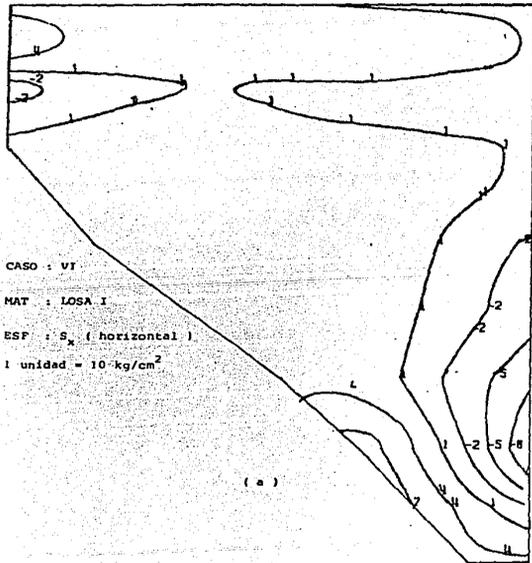


FIGURA No. 5.27

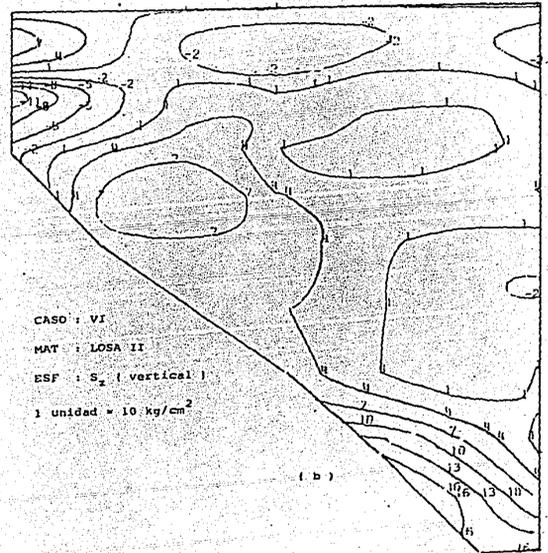
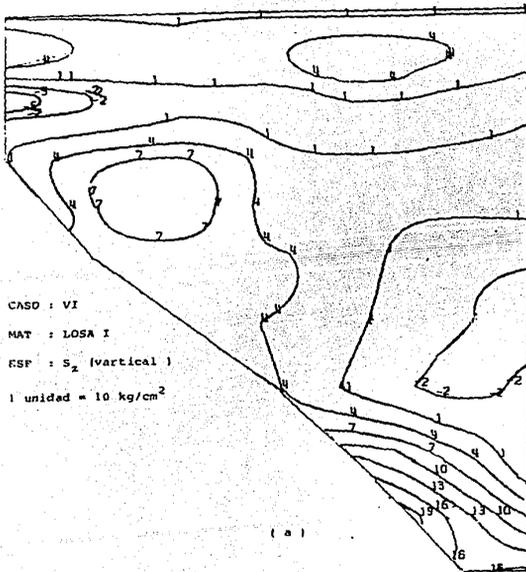


FIGURA No. 5.28

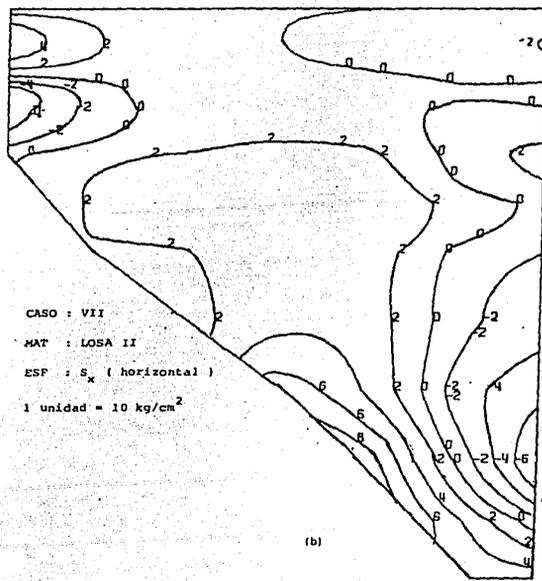
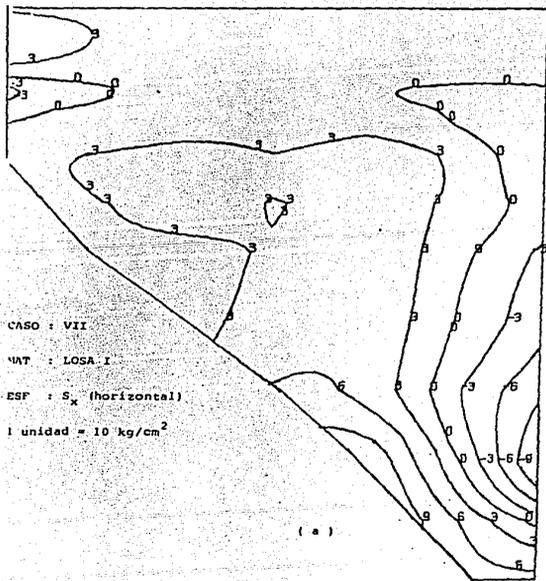


FIGURA No. 5.29

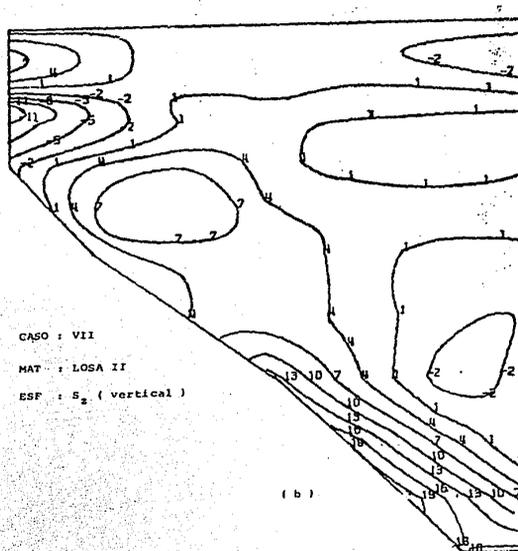
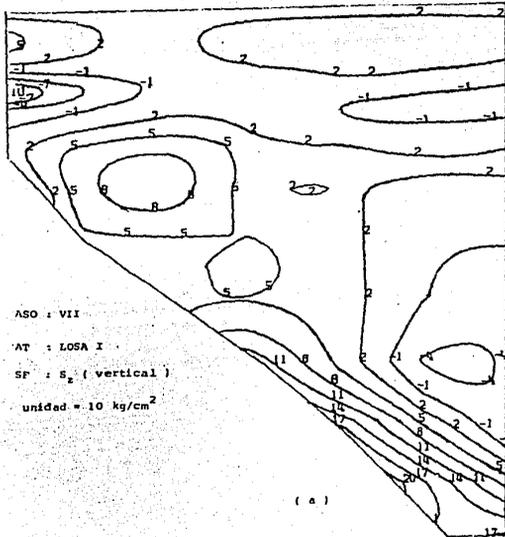


FIGURA No. 5.30

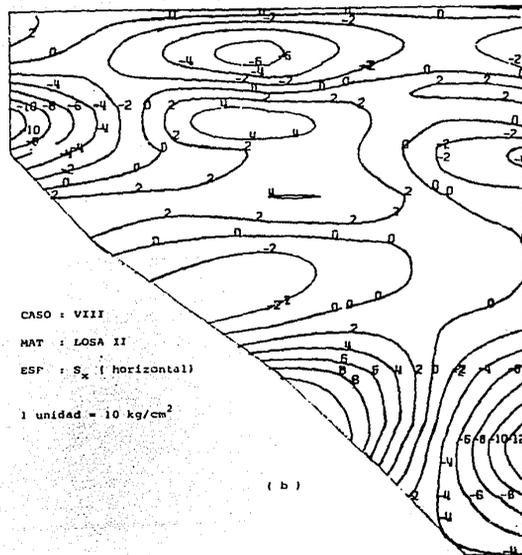
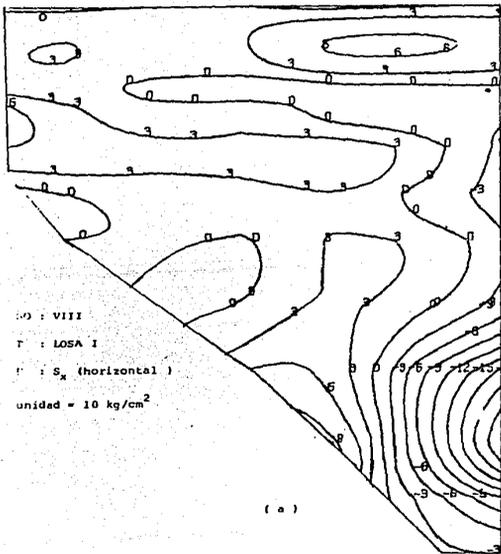


FIGURA No. 5.31

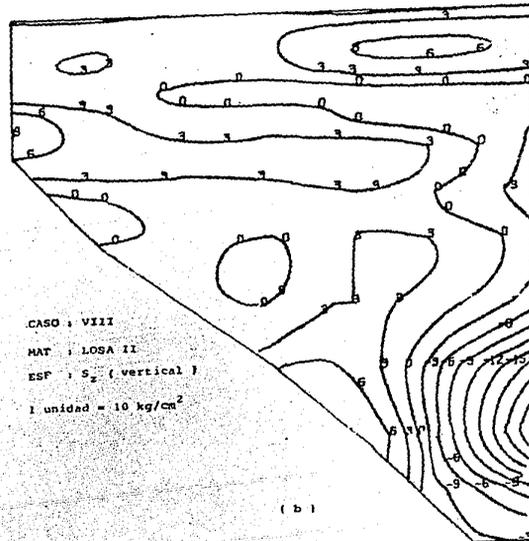
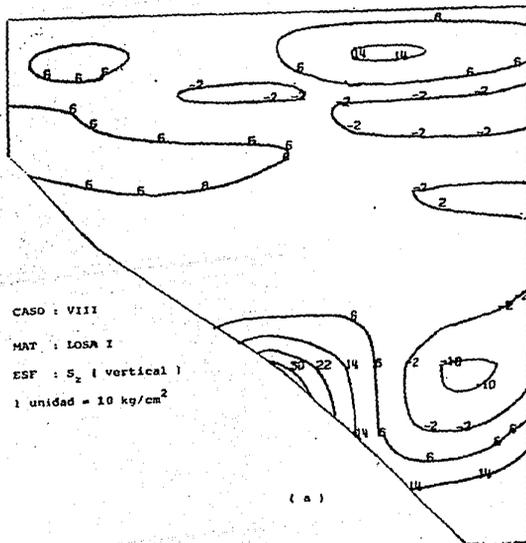


FIGURA No. 5.32

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

En este capítulo llegamos a la etapa de la investigación en que hay que emitir una serie de conclusiones en relación a las características más relevantes encontradas durante el proyecto de investigación en consideración.

Del conjunto de resultados que se discutieron en el capítulo anterior se sugiere que :

- a) Los casos más favorables en lo relativo a magnitud de esfuerzos y desplazamientos en la losa son los que corresponden a elementos estructurales (material 1,2 y 5) homogéneos en cuanto a módulo de deformación.
- b) Los casos mas favorables constan de elementos estructurales cuya resistencia al esfuerzo cortante sea suficientemente elevada como para asegurar un factor de seguridad igual a 1.4, para un talud 1.5:1.
- c) Convendría analizar detalladamente y a futuro, el caso III o el caso VII, introduciendo las juntas verticales en la losa de concreto. En lo relativo al llenado de la presa, y a fin de tomar en cuenta la trayectoria de esfuerzos en forma más realista, conviene hacer la simulación en varias etapas de cálculo.

Se derivan entonces, de todo lo tratado en la investigación, las siguientes conclusiones :

- 1) Regularizar la ladera a lo largo de la traza de la losa de concreto, eliminando las prominencias rocosas en una faja del orden de 15 m de ancho hacia aguas abajo de la losa.
- 2) Se debe asegurar durante la construcción un factor de seguridad contra la falla del talud de aguas arriba superior a 1.3.
- 3) Compactar el material de mezcla (material S) en su cara externa, próxima al talud de aguas arriba mediante rodillos que caminen a lo largo de la pendiente del talud.
- 4) Utilizar materiales terrosos homogéneos en cuanto a sus características de deformabilidad (módulo de deformación y relación de Poisson).
- 5) Analizar detenidamente la influencia de las juntas verticales en la generación de esfuerzos de tensión en la losa, así como simular el llenado del embalse de la presa en varias etapas de cálculo.

Después de todas las conclusiones mencionadas arriba con relación al análisis desarrollado durante el proyecto de investigación en cuestión, hemos visto los estados de esfuerzos para la losa de concreto y para los materiales que le sirven de apoyo (mezcla de arcilla, filtro y transición), y podemos

hacer una justificación desde un punto de vista físico para la presa de Aguamilpa, y dar una serie de conclusiones al respecto :

a) El hecho de colocar la losa de concreto nos permite reducir el volúmen de materiales utilizados en la construcción de la presa. Permittiendonos también el hacer los taludes un poco más parados con respecto a su diseño original. Este punto es muy interesante, ya que el solo hecho de colocar la losa provoca de alguna manera una " disipación de esfuerzos " en su contacto con la ladera, y nos permite hacer el talud de aguas abajo estable para una mayor pendiente.

b) El material de mezcla de arcilla (material 5), tiene dos funciones definidas :

- Proporcionar una base de apoyo lo suficientemente lisa para la losa.
- Impedir el paso del agua que puede filtrarse a través de la losa.

Sin embargo, además de estas dos funciones, tiene otra adicional que es la de proporcionar estabilidad a la losa ante la plastificación del material 2 (filtro y transición), y evitar que los desplazamientos de esta, y por ende los esfuerzos de tensión, fuesen mayores.

c) El copete de material 5 que se aprecia en la zonificación de la presa para ambas modelaciones, debe su presencia a motivos constructivos solamente, ya que se facilita la compactación de este material y el de filtro a elevaciones cercanas a la corona. Mecánicamente, su comportamiento quizá no es el ideal, ya que se presentaron tensiones en el mencionado copete, que indujo una disminución en el módulo de deformabilidad de dicho material y por lo tanto esfuerzos bajos de tensión en la parte superior central de la losa.

A partir de lo anterior, la presa de Aguamilpa tiene también una justificación de tipo físico.

Por otro lado, referente al planteamiento realizado en este trabajo para una metodología de la investigación, podemos emitir las siguientes conclusiones :

- 1) Toda investigación científica se realiza con mayores probabilidades de éxito cuando previamente se elabora un proyecto del trabajo por realizar, en el cual se incluye el procedimiento para realizarlo.
- 2) El proceso de investigación requiere de ingenio, creatividad y mucha paciencia para lograr la comprobación de las hipótesis planteadas para la explicación del problema.

Se ha tratado pues, a lo largo de todo el trabajo que se presenta, el ilustrar la metodología de la investigación para la solución de un problema ingenieril. Pensamos que en base a un procedimiento ordenado y sistemático se pueden dar soluciones más rápidas y mejores a los problemas de investigación que el país demande, todo para tratar de lograr un desarrollo tecnológico propio en el país.

El apoyo a las firmas de ingeniería nacionales y el fomento de la investigación no bastan, eso es evidente. Pero son condiciones necesarias, pues la tecnología propia es indispensable para impulsar el desarrollo de un país de manera sostenida. Y esta verdad, que ha sido el descubrimiento económico más notable del siglo XX, será el hecho más dominante en el futuro de la civilización. Por qué ? . Por que la tecnología está directamente ligada con la productividad, es decir, con la relación entre el producto y sus insumos.

Creemos que el objetivo que se perseguia se ha cumplido, y la metodología presentada lleva a buen término un proyecto real de investigación en ingeniería, y al mismo tiempo, da fin a la realización de esta tesis.

APENDICE A

CONVENCION SUMA

En el presente apéndice mostraremos la forma de emplear la convención suma, para ello nos auxiliaremos de algunos ejemplos del álgebra matricial.

De acuerdo con esta convención, se tiene lo siguiente :

- a) En cualquier término que aparezca repetido dos veces un subíndice, se entiende que hay suma en dicho término y sobre este subíndice desde 1 hasta 3.
- b) A los subíndices que se repiten dos veces en el mismo término se les llama subíndices mudos.
- c) A los subíndices que no se repiten en el mismo término se les conoce como subíndices libres.
- d) Los subíndices no se deben repetir mas de dos veces en cada término.

A título de ejemplo, siendo \underline{A} una matriz de orden $m \times n$:

1) Siendo $\text{tr } \underline{A}$ = traza de la matriz A

$$\text{tr } \underline{A} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii}$$

2) Siendo δ_{ij} la delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} A_{jk} = A_{ik}$$

3) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

4) La definición de determinante toma la forma :

$$\det A = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo alternante, definido como sigue :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar} \\ 0 & \text{si cualquiera de los subíndices se repite} \end{cases}$$

Ahora bien, se llama permutación par a la sucesión ijk , si ésta presenta un número par de anomalías, y será impar si el número de anomalías también lo es.

Se llama anomalía a la existencia, en una sucesión matricial creciente, si a la izquierda (en contra del sentido de crecimiento de la sucesión) de cualquier valor del índice aparece uno de mayor magnitud (ej: 132).

5) Sean $A = A_{ij}$ y $B = B_{ij}$ dos matrices rectangulares de orden $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, entonces el elemento en el i -ésimo renglón y j -ésima columna de la matriz $C = A \cdot B$ sera :

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + A_{i3}B_{3j} = A_{ik}B_{kj}$$

6) Si $\underline{B} = \underline{A}^T$, entonces:

$$B_{ij} = A_{ji}$$

7) Si \underline{a} y \underline{b} son matrices columna tales que:

$$\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3) ; \underline{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$$

entonces, $\underline{a}^T \underline{b}$ es una matriz de orden 1×1 cuyo único elemento es :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1 b_1$$

APENDICE B

TRIANGULARIZACION DE MATRICES

B.1 TRIANGULARIZACION DE UNA MATRIZ CUALQUIERA

Se dice que una matriz es triangular si todos los elementos abajo o arriba de la diagonal principal son cero. Si se da el primer caso, la matriz es triangular inferior, si es el segundo, la matriz es triangular superior.

Una matriz dada se puede triangularizar por medio de transformaciones elementales, las cuales son las siguientes :

- a) El intercambio de dos lineas paralelas cualesquiera de una matriz.
- b) La multiplicación de todos los elementos de cualquier linea por una constante diferente de cero.
- c) La suma de cualquier linea de un múltiplo arbitrario de cualquier otra linea paralela.

El proceso para obtener una matriz triangular superior puede esquematizarse como sigue. Para una matriz $A = a_{ij}$:

- 1) Utilicence transformaciones del primer tipo, si se desea, para obtener un elemento diferente de cero en el primer renglón y primera columna de una matriz dada.
- 2) En caso de querer una matriz triangular normalizada, con 1 en la diagonal principal, divídase el primer renglón entre el elemento a_{11} .
- 3) Restense de los otros renglones los múltiplos apropiados del primer renglón para obtener ceros en el resto de la primera columna.
- 4) Repetir los pasos anteriores, empezando con el elemento del segundo renglón y segunda columna.
- 5) Continuar de este modo con los demás elementos de la diagonal principal, hasta el final de ella y hasta que sean ceros todos los elementos abajo de la misma.

B.2 SUBDIVISION DE UNA MATRIZ CUALQUIERA EN DOS TRIANGULARES

Una matriz A se puede dividir en el producto de una matriz triangular inferior (L) y una matriz triangular superior normalizada (U), es decir:

$$L U = A \quad \dots (1)$$

Podemos aprovechar lo anterior y encontrar las matrices triangulares L y U , veámos :

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & U_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la ec (1) :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & U_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nuestro objetivo es encontrar los coeficientes L_{ij} y U_{ij} , así que procederemos de la siguiente forma :

Si multiplicamos L por la primer columna de U :

$$L_{11} (1) = a_{11}$$

$$L_{21} (1) + L_{22}(0) + 0 + \dots + 0 = a_{21}$$

.

.

$$L_{n1} (1) + L_{n2}(0) + 0 + \dots + 0 = a_{n1}$$

Concluimos que la primera columna de \underline{L} esta dada por :

$$\underline{L_{1j}} = A_{1j} \quad \dots (2)$$

Multiplicando el primer renglón de \underline{L} por \underline{U} :

$$L_{11}U_{12} + 0 + \dots + 0 = a_{12} \quad \rightarrow \quad U_{12} = a_{12}/L_{11}$$

$$L_{11}U_{13} + 0 + \dots + 0 = a_{13} \quad \rightarrow \quad U_{13} = a_{13}/L_{11}$$

$$L_{1n}U_{1n} + 0 + \dots + 0 = a_{1n} \quad \rightarrow \quad U_{1n} = a_{1n}/L_{11}$$

El primer renglón de \underline{U} esta dado por :

$$\underline{U_{1j}} = a_{1j} / L_{1j} \quad \dots (3)$$

Multiplicando \underline{L} por la segunda columna de \underline{U} :

$$L_{21}U_{12} + L_{22}(1) + 0 + \dots + 0 = a_{22} \quad \rightarrow \quad L_{22} = a_{22} - L_{21} U_{12}$$

$$L_{31}U_{12} + L_{32}(1) + 0 + \dots + 0 = a_{32} \quad \rightarrow \quad L_{32} = a_{32} - L_{31} U_{12}$$

$$L_{n1}U_{12} + L_{n2}(1) + 0 + \dots + 0 = a_{n2} \quad \rightarrow \quad L_{n2} = a_{n2} - L_{n1} U_{12}$$

De acuerdo con lo anterior, el resto de los elementos de \underline{L} estaran dados por :

$$\underline{L_{ij}} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} U_{rj} \quad \dots (4)$$

Multiplicando el segundo renglón de L por U :

$$L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} + 0 + \dots + 0 = a_{23} \quad \rightarrow \quad U_{23} = (a_{23} - L_{21} U_{13}) / L_{22}$$

$$L_{21}U_{14} + L_{22}U_{24} + 0 + \dots + 0 = a_{24} \quad \rightarrow \quad U_{24} = (a_{24} - L_{21} U_{14}) / L_{22}$$

.

.

$$L_{21}U_{1n} + L_{22}U_{2n} + 0 + \dots + 0 = a_{2n} \quad \rightarrow \quad U_{2n} = (a_{2n} - L_{21} U_{1n}) / L_{22}$$

El resto de los elementos de U estaran dados por :

$$U_{ij} = (a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} U_{rj}) / L_{ii} \quad \dots (5)$$

Las expresiones (2) a (5) nos permiten encontrar las matrices triangulares \underline{L} y \underline{U} , que son de especial interés en el método de Crout para sistemas de ecuaciones lineales.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- A.S.C.E.
"Journal of Geotechnical Engineering"
Vol 110 No.10 Octubre 1984
pp. 1381 - 1415

- 2.- Casagrande, Arthur
"Dynamic Analysis of embankments dams"
Marzo 19, 1976
ASCE

- 3.- Cervantes Beltran, Ramon
" Introduccion al Metodo del elemento finito"
DEPFI, UNAM

- 4.- Comision Federal de Electricidad (CFE)
"Comportamiento de presas construidas en Mexico"
Vol. II.
1974 - 1984

- 5.- Cooke, Barry
"Concrete Face Rockfill Dams"
Design, Construction & Performance
1986

- 6.- Dym & Shames
"Solid Mechanics"
Mc. Graw - Hill

- 7.- Elgotz
" Ecuaciones diferenciales y calculo variacional"
Ed. Mir
- 8.- Gallagher, Richard
"Finite Elemente Analysis"
Prentice-Hall,INC
- 9.- Gomez,Roberto
"Introduccion al metodo del elemento finito"
Apuntes de clase
- 10.- Holman,J.P.
"Metodos experimentales para ingenieros"
Mc. Graw - Hill
- 11.- International comission on large Dams
" Fifteenth congress on large dams"
Vol. I pp 417-451
- 12.- Leliavsky,Serge
"Design of dams for percolation and erosion"
Chapman and Hall LTD
- 13.- Marsal y Resendiz
" Presas de tierra y enrocamiento"
Ed. LIMUSA
- 14.- Magana del Toro R,Sanguines Garcia H,Padilla Velazquez R.
"Curso sobre la metodologia de la investigacion"
UNAM

- 15.- Magana del Toro, Roberto
"Programas de computadora para el graficador incremental"
Instituto de Ingenieria, UNAM
- 16.- Resendiz, Daniel
" La Investigacion en Ingenieria"
Instituto de Ingenieria, UNAM
- 17.- Rojas Soriano, Raul
"El proceso de la investigacion cientifica"
Ed. Trillas
- 18.- S.R.H.
"Comprtamiento de Presas construidas en Mexico"
Vol. I
1970
- 19.- S.R.H.
"Presas de Mexico"
Tomo II, 1969
pp. 871 - 891
- 20.- Tamez, Enrique
" Principios de diseno y construccion de presas de tierra"
S.R.H.
- 21.- Zubizarreta, Armando F
"La aventura del trabajo intelectual"
Ed. Fondo Educativo Interamericano