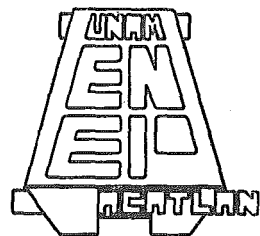




Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN



LOSAS

M-0028620

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
p r e s e n t a
FELIPE A. ESPINOSA MARTINEZ



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MI MAMA EDITH:

Quiero darte el mejor regalo de tu vida y así poder pagarte un poco - lo mucho que has hecho por mi, ya que con tus consejos y enseñanzas me has hecho un hombre de bien y este regalo es mi título profesional en el cual el mayor mérito es tuyo.

A MI ABUELITA AUGUSTA:

Por haberme ayudado durante mis estudios y haberme dado lo mejor de la vida que es mi Madre.

A MIS HERMANOS:

MANUEL, MA. EUGENIA Y MA. DE LOURDES

Con mucho cariño y agradecimiento por haberme ayudado a salir avante durante mis estudios, por sus consejos y por la ayuda desinteresada que me brindaron.

A MI TIO HIRAM:

Con cariño especial ya que siempre estuviste pendiente de mis estudios y que con tu experiencia me ayudaste mucho en mi formación profesional.

M A L E N A:

Lo que ahora soy te lo debo en parte a tí a tus consejos y comprensión que me ayudan a seguir adelante, ya que tu eres parte importante de mi vida, con todo mi amor y cariño por siempre tuyo FELIPE.

A MI DIRECTOR DE TESIS

El Ing. Adalberto López López, por su valiosa colaboración y ayuda para la terminación de mi Tesis Profesional.

Con agradecimiento para mis maestros y compañeros que supieron comprender mi inquietud de estudiante y a la U.N.A.M., por haberme brindado la oportunidad de hacer mis estudios.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

ENEP ACATLAN
COORDINACION DEL PROGRAMA
DE INGENIERIA Y ACTUARIA

CAI-C-0279-78

SR. FELIPE A. ESPINOSA MARTINEZ
Alumno de la Carrera de
Ingeniería Civil
P r e s e n t e

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 30 de mayo de 1978, me complace notificarle que esta Coordinación tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: Losas, el cual se desarrollará como sigue:

- I. Introducción.
- II. Teoría de losas.
- III. Análisis estructural y diseño de losas.
- IV. Procedimientos constructivos de diferentes tipos de losas.
- V. Análisis de costos y estudio comparativo de los mismos
- VI. Conclusiones.

Asimismo fue designado como Director de Tesis el señor Ing. Adalberto López López, profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A t e n t a m e n t e

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Sta. Cruz Acatlán, Edo. de México a 13 de junio de 1978

ING. IGNACIO LIZARRAGA G.,
Coordinador del Programa
de Ingeniería y Actuaría.

I N D I C E

C A P I T U L O	P A G I N A	
I	Introducción	
II	Teoría Pura de Losas	1
III	Análisis y Diseño de Losas	86
IV	Procedimientos Constructivos	113
V	Análisis de Costos	125
VI	Conclusiones	160
	Bibliografía	163

M-0028620

INTRODUCCION



I N T R O D U C C I O N

El objetivo del presente estudio realizado sobre losas, es en base a las necesidades del Ingeniero de saber y conocer a fondo estos elementos estructurales, los cuales se presentan en su carrera profesional ya que se manejan con exactitud técnica, seleccionando el mejor tipo o el más adecuado a nuestras necesidades; las cuales pueden ser arquitectónicas, estructurales o económicas.

Como se sabe las losas son elementos estructurales planos, cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes en comparación con su peralte, apoyadas generalmente en trabes perimetrales o columnas y que trabajan por flexión.

Las losas de concreto pueden ser macizas o aligeradas, estas últimas son también llamadas encasetonadas o reticulares, presentando estos dos tipos de losas y además las losas prefabricadas en sus diferentes variantes.

Las losas aligeradas se logran al incorporar bloques huecos o formando espacios con moldes recuperables de plástico u otro material; en este estudio se presentan con moldes recuperables de plástico o fibra de vidrio.

En algunos sistemas estructurales las losas se apoyan sobre muros, sobre vigas o trabes que a su vez se apoyan sobre columnas, estas losas reciben el nombre de losas perimetralmente apoyadas; existen otro tipo en las que se apoyan directamente sobre columnas o capiteles las cuales se denominan losas planas. Como el tamaño de las trabes o vigas de apoyo de las losas perimetralmente apoyadas puede ser cualquiera, las planas pueden considerarse como un caso particular de las perimetralmente apoyadas en el que las trabes o vigas se han ido reduciendo de sección hasta desaparecer; análogamente, las perimetralmente apoyadas pueden visualizarse como planas en las que se han rigidizado los ejes que unen las columnas. Las apoyadas sobre muros también pueden considerarse como un caso particular de perimetrales apoyadas sobre vigas infinitamente rígidas.

Aquí es presentado un estudio que comprende la teoría, el análisis y diseño, los procedimientos constructivos y los costos de los mismos, ya que a mi saber son los más importantes para el Ingeniero Civil. En su vida profesional debe estar capacitado no solo para los puntos anteriores sino para todo tipo de trabajos de Ingeniería.

Empezando con un enfoque a la teoría pura de losas en la cual se presentan y se desarrollan expresiones matemáticas para analizar la flexión y su comportamiento bajo diferentes condiciones de apoyo y carga.

En el aspecto de análisis y diseño de losas, se exponen una variedad de tipos para su dimensionamiento, lo más accesible en base al Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal y al American Concrete Institute (A.C.I.), también se mencionan las prefabricadas, las cuales se trabajarán en base a las especificaciones para control de calidad de la Dirección General de Normas (D.G.N.), A.C.I. y al American Society for testing of materials (A.S.T.M.).

En lo que se refiere a los procedimientos constructivos para cada tipo, se plantean como una alternativa a seguir en base a las experiencias de diferentes ingenieros, a las recomendaciones y normas del Reglamento de Construcciones del D.D.F. y al A.C.I., también se consideran las especificaciones de los fabricantes.

Para el aspecto de costos se realiza un estudio de los rendimientos de obra de los diferentes tabuladores, así como en libros especializados. Para obtener el costo ideal en el caso de losas prefabricadas, se solicitaron datos del fabricante.

Al final se presenta una conclusión con ayuda de dos tablas en las cuales se tienen los tiempos de construcción y el costo por M².

Espero sinceramente que este estudio sirva no solamente como tema de tesis, sino como un estudio que deben de tener en cuenta los futuros Ingenieros Civiles, ya que representa la mayoría de los conocimientos adquiridos dentro del ciclo escolar.

TEORIA PURA DE LOSAS



TEORIA PURA DE LOSAS

TEMA I.- FLEXION PURA EN LOSAS

1.- PENDIENTE Y CURVATURA EN LOSAS LIGERAMENTE DOBLADAS:

Para discutir las deflexiones en una losa tomaremos el plano medio de estas antes que la flexión se presente en el plano (xy). Durante la flexión, las partículas que están en el plano (xy) sufren pequeños desplazamientos (s) perpendiculares a el plano (xy) y a la superficie media de la losa, a estos desplazamientos de la superficie media son llamados deflexiones de una losa (ω).

Tomando una sección normal de la losa paralela al plano (xz) fig. 1-A, encontraremos que la pendiente de la superficie media en la dirección (x) es $i_x = \partial\omega/\partial x$. En la misma forma la pendiente en la dirección (y) es: $i_y = \partial\omega/\partial y$

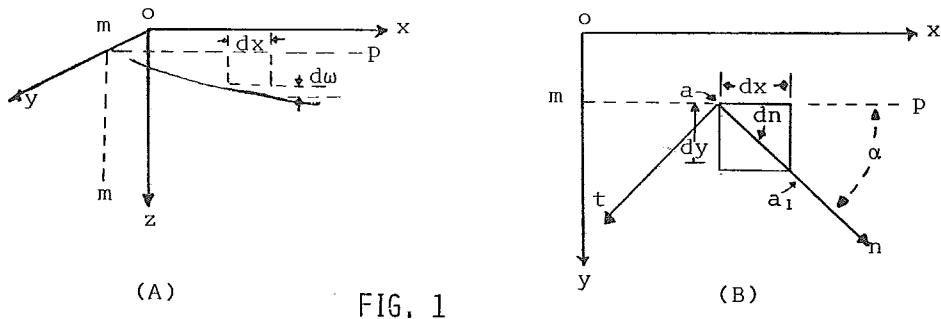


FIG. 1

Tomando ahora cualquier dirección (an) en el plano (xy), ver fig. 1-B formando un ángulo (α) con el eje (x), encontrando que la diferencia en las deflexiones de los 2 puntos adyacentes (a) y (a_1) en la dirección (an) es:

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy$$

Y que la pendiente correspondiente será:

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{\partial\omega}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = \frac{\partial\omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial\omega}{\partial y} \sin \alpha \quad (a)$$

Para encontrar la dirección α_1 en la cual la pendiente es un máximo, se iguala a cero la derivada con respecto a α en la expresión (a) y en esta forma se obtiene:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)} \quad (b)$$

Substituyendo los valores correspondientes de $\sin \alpha_1$ y $\cos \alpha_1$ en (a) obtenemos para la pendiente la expresión siguiente:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2} \quad (c)$$

Estableciendo la expresión (a) igual a cero se obtendrá la dirección para la cual la pendiente de la superficie es cero.

El ángulo correspondiente α_2 es determinado de la ecuación:

$$\tan \alpha_2 = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)} \quad (d)$$

De las ecuaciones (b) y (d) se obtiene que: $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1$

El cual muestra que las direcciones de la pendiente cero y de la máxima pendiente son perpendiculares una a la otra respectivamente.

Al determinar la curvatura de la superficie media de la losa, observamos que la deflexión de la losa, es pequeña. En un caso semejante la pendiente de la superficie en cualquier dirección puede ser tomada igual a el ángulo; que hace la tangente a la superficie en esta dirección con el plano (xy) y el cuadrado de la pendiente puede ser comparado a la unidad. La curvatura de la superficie en el plano paralelo a el plano (xz) (ver fig. 1), será numéricamente igual a:

$$\frac{1}{rx} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (e)$$

Consideraré una curvatura positiva si es convexa hacia abajo. El signo menos es tomado en la ecuación (e) para la deflexión convexa hacia abajo, como nuestro en la (fig. 1) la segunda derivada $\partial^2 \omega / \partial x^2$ será negativa.

En la misma forma obtenemos para la curvatura en un plano paralelo a el plano (yz).

$$\frac{1}{ry} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (f)$$

Esta expresión es similar a la usada para la determinación de la curvatura de una viga doblada.

Considerando en la superficie media la curvatura en cualquier dirección (an) en la fig.1, obtenemos :

$$\frac{1}{rn} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)$$

Y substituyendo en la expresión (a) para $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha$$

Donde encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{rn} &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \alpha \right) \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) \\ &= \frac{1}{rx} \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{rxy} \sin 2 \alpha + \frac{1}{ry} \sin^2 \alpha \right) \end{aligned} \quad (g)$$

Observando que la curvatura en cualquier dirección (n) en un punto de la superficie media puede ser calculado por:

$$\frac{1}{rx} = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \qquad \frac{1}{ry} = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

Y la cantidad $\frac{1}{rxy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$ (h)

La cuál es la torsión de la superficie con respecto a los ejes (x) e (y). Si en vez de la dirección (an) Fig. 1b, tomamos la dirección (at) perpendicular a (an), la curvatura en esta nueva dirección se obtiene de la expresión (g) al substituir $-\pi/2 + \alpha$ por α ; obteniendo la siguiente expresión.

$$\frac{1}{rt} = \frac{1}{rx} \sin^2 \alpha + \frac{1}{rxy} \sin 2\alpha + \frac{1}{ry} \cos^2 \alpha \quad (i)$$

Sumando las expresiones (g) e (i) encuentro:

$$\frac{1}{rn} + \frac{1}{rt} = \frac{1}{rx} + \frac{1}{ry} \quad (1)$$

la cuál muestra que en cualquier punto de la superficie media, la suma de las curvaturas en 2 direcciones perpendiculares semejantes como (n) y (t) es independiente el ángulo α . Esta suma es llamada la curvatura normal (promedio de la superficie en un punto).

La torsión de la superficie en (a) con respecto a las direcciones (an) y (at) es;

$$\frac{1}{rnt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\omega}{dn} \right)$$

Al calcular las derivadas con respecto a (t), observo que la dirección (at) es perpendicular a (an), así obtengo la derivada requerida; luego de substituir $\pi/2 + \alpha$ por α en la ecuación (a), en esta forma encuentro:

$$\frac{1}{rnt} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \left(\frac{1}{rx} - \frac{1}{ry} \right) + \cos 2\alpha \frac{1}{rxy} \quad (j)$$

Con el siguiente planteamiento encuentre en términos de α la dirección en la cuál la curvatura de la superficie es un máximo ó un mínimo obteniendo los correspondientes valores de la curvatura. Así mismo obtengo la ecuación necesaria para la determinación de α por la ecuación de la derivada de la expresión (g) con respecto a $\alpha = 0$; la cuál da

$$\frac{1}{rx} \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{2}{rxy} \cos. 2\alpha - \frac{1}{ry} \operatorname{sen} 2\alpha = 0 \quad (k)$$

donde:

$$\tan 2\alpha = - \frac{\frac{2}{rxy}}{\frac{1}{rx} - \frac{1}{ry}} \quad (2)$$

De esta ecuación encontramos 2 valores de α diferenciando por $\pi/2$ y substituyendo estos en la ecuación (g) se obtienen 2 valores de $1/rn$, uno representa la máxima y el otro la mínima curvatura en un punto (a) de la superficie. Estas 2 curvaturas son llamadas las curvaturas principales de la superficie y los correspondientes planos (n a z) y (t a z) son los planos principales de curvatura.

Observando que el lado izquierdo de la expresión (k) es igual al doble valor de la expresión (j) con esto concluyo que si las direcciones (an) y (at) ver fig.1, están en los planos principales; la torsión correspondiente $1/rnt$ es igual a cero.

Usando el círculo de Mohr representando los esfuerzos combinados y mostrando como la curvatura y la torsión de la superficie varía en el ángulo α . Para simplificar la discusión asumí que los planos coordenados (xz) e (yz) son tomados paralelos a los planos principales de curvatura en el punto (a) se obtiene de las ecuaciones (g) y (j) para cualquier ángulo (α) lo siguiente:

$$\frac{1}{rn} = \frac{1}{rx} \cos^2 \alpha + \frac{1}{ry} \sin^2 \alpha \quad (3)$$

$$\frac{1}{rnt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{rx} - \frac{1}{ry} \right) \sin 2\alpha$$

Tomando las curvaturas como abscisas y las torciones como ordenadas y construyendo un círculo en el diámetro $1/rx - 1/ry$, mostrado en la fig. 2 se nota que el punto "A" definido por el ángulo 2α tiene la abscisa.

$$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{rx} + \frac{1}{ry} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{rx} - \frac{1}{ry} \right) \cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{rx} \cos^2 \alpha + \frac{1}{ry} \sin^2 \alpha$$

y la ordenada

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{rx} - \frac{1}{ry} \right) \sin 2\alpha$$

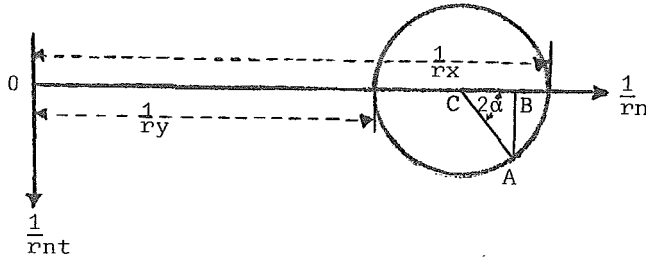


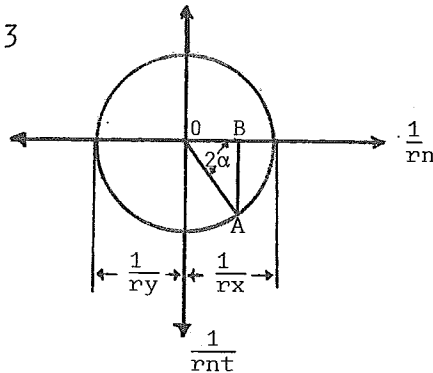
FIG. 2

Comparando estos resultados con las fórmulas (3), termino de indicar que las coordenadas de el punto A definen la curvatura y torsión de la superficie para cualquier valor del ángulo α . Se nota que la máxima torsión representada por el radio del círculo, toma lugar cuando $\alpha = \pi/4$.

En el ejemplo la curvatura en cualquier dirección es positiva, de aquí la superficie esta doblada convexa hacia abajo. Si las curvaturas $1/rx$ y $1/ry$ son ambas negativas, la curvatura en cualquier dirección es también negativa y se tiene una flexión de la losa convexa hacia arriba, las superficies en las cuales los planos tienen igual signo, son llamadas superficies sinclásticas. Algunas veces empezaremos con una superficie en la cual las 2 principales curvaturas tienen el signo opuesto, por ejemplo una hondanada, estas superficies

Son llamadas Anticlásticas. El círculo en la fig. (3) representa un caso particular de una superficie anticlástica cuando $1/r_y = -1/r_x$. Es visto que en este caso la curvatura llega a ser cero para $\alpha = \pi/4$ y para $\alpha = 3\pi/4$ y la torsión llega a ser igual a $\pm 1/r_x$.

FIG. 3

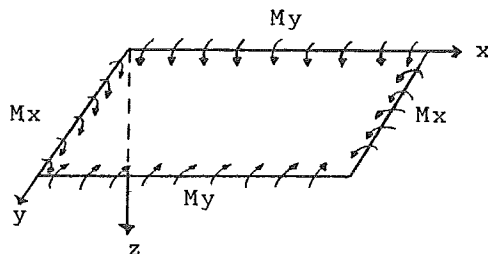


2.- RELACIONES ENTRE MOMENTOS FLEXIONANTES Y CURVATURAS, EN LOSAS CON FLEXION PURA.

En caso de flexión pura de una barra prismática será una solución rigurosa para la distribución de esfuerzos y es obtenida al asumir que en la sección transversal de la barra permanece plana durante la flexión y gira solamente con respecto a su eje neutro así es siempre normal a la curva de deflexión. Semejantes combinaciones para flexión en 2 direcciones perpendiculares nos ocasiona una flexión pura de losas.

Vamos comenzando con flexión pura de una losa rectangular por momentos que son uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes de la losa como se presenta en la fig. (4).

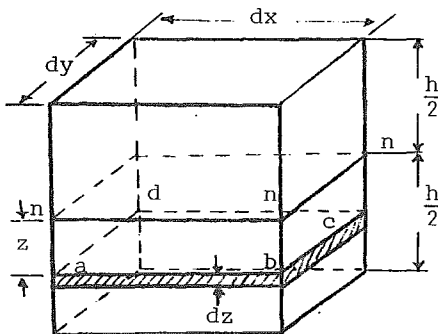
FIG. 4



Tomando el plano (xy) a coincidir con el plano medio de la losa, antes de la deflexión y los ejes (x) y (y) a lo largo de los bordes de las losas como se muestra. El eje (x) el cual es entonces perpendicular al plano medio es positivo hacia abajo y denotando por M_x el momento flexionante por unidad de longitud que actúa en el borde paralelo a el eje (x). Estos momentos los consideré positivos cuando producen compresión en la superficie de arriba de la losa y tensión en la inferior.

Al espesor de la losa la llamaré (h) y se consideró chico en comparación con las otras dimensiones. Considerando un elemento cortado fuera de la losa por dos pares de losas paralelas a los planos (xz) y (yz) como se muestra en la fig. (5).

FIG. 5



Como en el caso de la fig. (4) que representa la combinación de dos flexiones uniformes, las condiciones de esfuerzos son idénticos en todos los elementos como se muestran en la fig. (5) y se tiene una flexión uniforme de la losa. Asumiendo que durante la flexión de los lados laterales del elemento permanece plano y rotará cerca del eje neutro; no así permanecerá normal a la deflexión de la superficie media de la losa, de esto se concluye que el plano medio de la losa no sufre cualquier extensión durante esta flexión y la superficie media es por lo tanto la superficie neutra. Dejando $1/r_x$ y $1/r_y$ de notadas como antes, las curvaturas en esta superficie neutra será en secciones paralelas a los planos (xz) y (yz) respectivamente. Entonces las elongaciones unitarias en las direcciones (x) y (y) de la lámina (abcd) fig. 5 en una distancia (z) desde la superficie neutra; son encontradas como en el caso de una viga y son iguales a:

$$\epsilon_x = -\frac{z}{r_x} \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (a)$$

Usando ahora la Ley de Hooke, los esfuerzos correspondientes en la lámina (abcd) son:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \quad (b)$$

Estos esfuerzos normales distribuidos sobre los lados laterales del elemento en la fig. (5) pueden ser reducidos a pares, las magnitudes por unidad de longitud deben ser iguales a los momentos externos (M_x) y (M_y). En esta forma obtenemos las ecuaciones:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dy dz = M_x dy, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dx dz = M_y dx \quad (c)$$

Substituyendo las expresiones (b) por σ_x y σ_y obtenemos:

$$M_x = D(1/r_x + \nu 1/r_y) = -D(\partial^2 \omega / \partial x^2 + \nu \partial^2 \omega / \partial y^2) \quad (4)$$

$$M_y = D(1/r_y + \nu 1/r_x) = -D(\partial^2 \omega / \partial y^2 + \nu \partial^2 \omega / \partial x^2) \quad (5)$$

Donde D es la rigidez flexional de la losa, definida por la ecuación (3) y (ω) muestra una pequeña deflexión de la losa en la dirección (z)

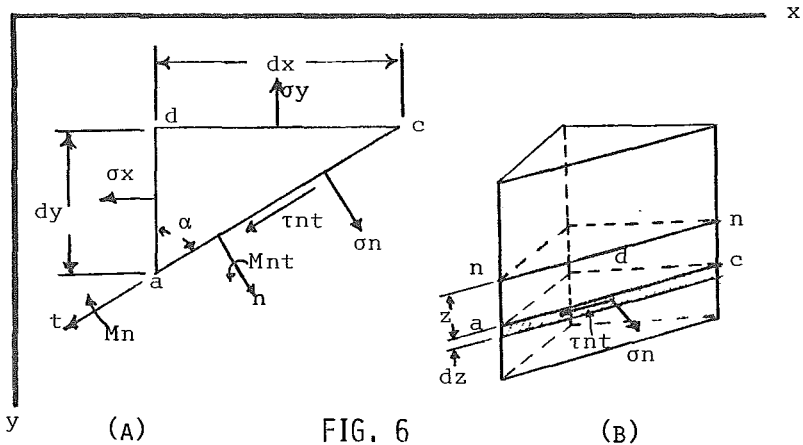


FIG. 6

Ahora consideraré los esfuerzos que actúan sobre una sección de la lámina (abcd) paralela al eje (z) e inclinada a los ejes (x) y (y). Si (abc) representada en la fig. (6) muestran una parte de la lámina dividida por una porción semejante, los esfuerzos actuantes en el lado (ac) podemos encontrarlos mediante las ecuaciones de la estática. Resolviendo estos esfuerzos dentro de una componente normal (σ_n) y una componente del esfuerzo cortante (τ_{nt}), las magnitudes de estas componentes son obtenidas por proyección de las fuerzas que actúan sobre el elemento (acd) en las direcciones (n) y (t) respectivamente con las cuales obtenemos las ecuaciones conocidas.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \quad \tau_{nt} = 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha \quad (d)$$

en la cuál (α) es el ángulo entre la normal (m) y el eje (x) ó entre la dirección (t) y el eje (y) ver fig. (6-a), este ángulo es considerado positivo si se consideran todas las láminas semejantes como (acd) en la fig. (6-b), encima de el espesor de la losa, los esfuerzos normales (σ_n) nos dan el momento flexionante actuando en la sección (ac) de la losa - el valor por unidad de longitud a lo largo de (ac) es:

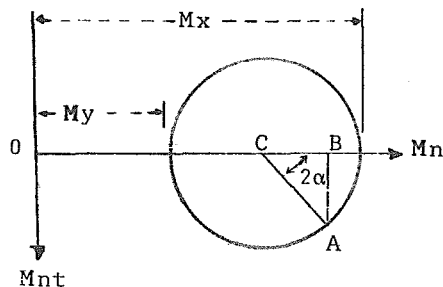
$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha \quad (6)$$

Los esfuerzos cortantes (τ_{nt}) nos dan el momento torsionante que actúa sobre la sección (ac) de la losa y la magnitud por unidad de longitud a lo largo de (ac) será

$$M_{nt} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z dz = 1/2 \sin 2\alpha (M_x - M_y) \quad (7)$$

Los signos de (M_n) y (M_{nt}) son escogidos en una forma semejante a los valores positivos de estos momentos y son representados por vectores en la dirección positiva de (n) y (t) fig. (6-a), si la regla de la rosca derecha es usada cuando (α) es cero ó π , la ecuación (e) es $M_n = M_x$. Para $\alpha = \pi/2$ ó $3\pi/2$, obtenemos $M_n = M_y$. El momento M_{nt} llega a ser cero para estos valores de (α). De este modo obtenemos las condiciones mostradas en la fig. (4). Las ecuaciones (6) y (7) son similares a las ecuaciones (3) y luego pueden ser rápidamente calculados los momentos flexionantes y torsionantes para cualquier valor de (α). Pudiendo usar también el método gráfico para la misma proposición y encontrar los valores de M_n y M_{nt} , del círculo de Mohr, el cuál puede ser construído como se demostró antes y tomando M_n como abscisa y el M_{nt} como ordenada, el diámetro del círculo sería igual a $(M_x - M_y)$ como se muestra en la fig. (7). Entonces las coordenadas \overline{OB} y \overline{AB} de un punto A, definido por el ángulo 2α , nos da los momentos M_n y M_{nt} respectivamente.

FIG. 7



Representando ahora M_n y M_{nt} como una función de las curvaturas y de la superficie media de la losa, substituyendo en la ecuación (e) para M_x y M_y su expresión (4) y (5), encontrando que la combinación de la ecuación (3) para la dirección (n) y (t) respectivamente.

Por lo tanto se obtiene:

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_n} + \nu \frac{1}{r_t} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) \quad (8)$$

Para obtener la expresión correspondiente para el momento torcionante M_{nt} , considero la distorsión de una lámina delgada (abcd) con los lados (ab) y (ad) paralelos a la dirección (n) y (t), y en una distancia (z) desde el plano medio como se muestra en la fig. (8). Durante la flexión de la losa los puntos (abcd) sufren pequeños desplazamientos. Las componentes de el desplazamiento de el punto (a) en las direcciones (n) y (t), las representaré por (u) y (v) respectivamente. Entonces el desplazamiento de el punto adyacente (d) en la dirección (n) es $u + (\partial u / \partial t) dt$ y el desplazamiento de el punto (b) en la dirección (t) será $v + (\partial v / \partial n) dn$.

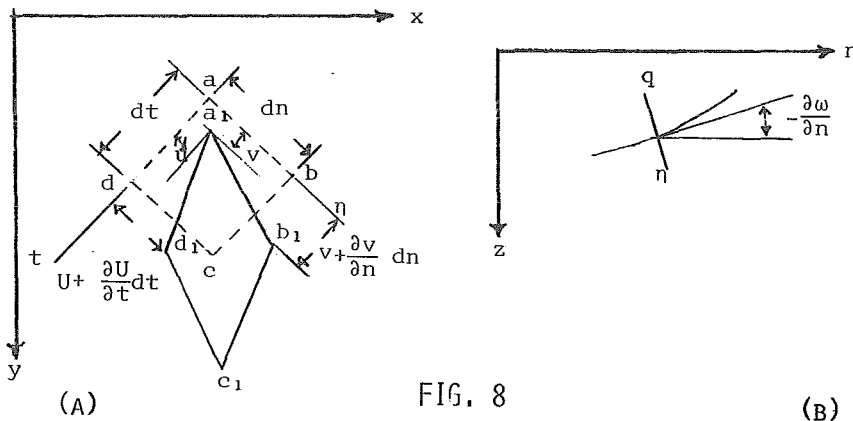
Particularmente a estos desplazamientos, obtengo para tensión cortante.

$$\tau_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \quad (e)$$

Donde el esfuerzo cortante es:

$$\tau_{nt} = G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \right) \quad (f)$$

De la fig. (8-b) representada la sección de la superficie media hecha por el plano normal a través de el eje (n), observando que el ángulo de rotación en sentido contrario de un elemento (pq), el cuál inicialmente era perpendicular a el plano (xy) alrededor de un eje perpendicular al plano (nz) es igual a:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial n}$$


Debido a esta rotación un punto de el elemento en una distancia (z) desde la superficie neutra tiene un desplazamiento en la dirección (n) igual a $u = -z \frac{\partial \omega}{\partial n}$ considerando la sección normal a través del eje (t), esto puede ser mostrado ya que en el mismo punto tiene un desplazamiento en la dirección (t) igual a:

$$v = -z \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Substituyendo estos valores de los desplazamientos (u) y (v) en la expresión (f) encontrando que:

$$tnt = -2Gz \frac{\partial^2 \omega}{\partial n \partial t} \quad (9)$$

$$Mnt = - \int_{-h/2}^{h/2} tnt z dz = \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n \partial t} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial n \partial t} \quad (10)$$

y la expresión (7) para el momento torsionante es para las direcciones perpendiculares (n) y (t) dadas en proporción a la torsión de la superficie media correspondiente a estas direcciones. Cuando las direcciones (n) y (t) coinciden con los ejes (x) y (y), hay solamente momentos flexionantes M_x y M_y actuando en las secciones perpendiculares a estos ejes ver fig.(4). Por lo tanto la torsión correspondiente es cero, y las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son las curvaturas principales de la superficie media de la losa. Ellas pueden ser rápidamente calculadas de la ecuación (4) y de la (5) si los momentos flexionantes M_x y M_y son la curvatura en cualquier otra dirección definida por un ángulo α puede ser entonces calculado aparte, usando la primera de las ecuaciones (3).

Considerando los esfuerzos en una losa bajo flexión pura, se puede ver que el máximo esfuerzo normal que actúa sobre las secciones paralelas a el plano (xz) y (yz) se obtiene de la ecuación (d). Las magnitudes de estos esfuerzos son obtenidas de la ecuación (b), luego substituyendo $z = h/2$ y usando las ecuaciones (4) y (5), se encuentra lo siguiente.

$$(\sigma_x) \text{ máx.} = \frac{6 M_x}{h^2} \quad (\sigma_y) \text{ máx.} = \frac{6 M_y}{h^2} \quad (11)$$

Si estos esfuerzos son de signo opuesto, el máximo esfuerzo cortante que actúa en el plano, bisectando el ángulo entre los planos (xz) y (yz) es igual a:

$$\tau \text{ máx.} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3 (M_x - M_y)}{h^2} \quad (12)$$

Si los esfuerzos de las ecuaciones (11) son del mismo signo, el cortante máximo actuará en el plano bisectando el ángulo entre los planos (xz) y (yz) y es igual a $1/2 \sigma_y \text{ máx.}$ ó $1/2 \sigma_x \text{ máx.}$, dependiendo de los 2 esfuerzos principales (σ_y) máx. ó (σ_x) máx. sea mayor.

3.- ESFUERZOS TERMALES EN LOSAS CON BORDES SUJETOS.

La ecuación (3) para la flexión de una losa a una superficie esférica puede ser usada en cálculos de esfuerzos termales en una losa para ciertos casos de calentamiento no uniforme. Asumimos que la variación de la temperatura a través de el espesor de la losa sigue una lineal y que la temperatura no varía en losas paralelas a la superficie de la losa. En un caso semejante, midiendo la temperatura a partir de la temperatura de la superficie media, se concluye que las expansiones de temperatura y construcciones son proporcionales a la distancia desde la superficie media. Así tenemos exactamente la misma condición como en la flexión pura de una losa a una superficie esférica. Si los bordes de la losa calentada no uniformemente son libres, la losa será doblada a una superficie esférica. Dejando ser el coeficiente de expansión lineal del material de la losa y dejando (t) denotar la diferencia de las fases alta y baja de la losa, la diferencia entre la máxima expansión termal y la expansión en la superficie media es $\alpha t/2$, y la curvatura de el calentamiento no uniforme puede ser encontrada de la ecuación:

$$\alpha t/2 = h/2r \quad (a)$$

de la cuál:

$$1/r = \alpha t/h \quad (13)$$

Esta flexión de la losa no produce cualquier tensión, siempre que los bordes son libres y las deflexiones son pequeñas en comparación con el espesor de la losa. Asumimos ahora que el plano medio de la losa es libre a expandir, pero los bordes están sujetos, así que ellos no pueden rotar. En un caso semejante el calentamiento no uniforme producirá momentos flexionantes distribuidos uniformemente a lo largo de las orillas de la losa. Las magnitudes de estos momentos son semejantes como a eliminar la curvatura producida por recalentamiento no uniforme ya que solamente en esta forma puede la condición en el borde sujetado ser cumplido. Usando la ecuación (13) para la curvatura producida por los momentos flexionantes, encontramos para determinar la magnitud M de el momento por unidad de longitud de la frontera la ecuación es;

$$M/D(1 + \nu) = \alpha t/h$$

De la cuál: $M = \alpha t D(1 + \nu)/h$ (b)

El máximo esfuerzo correspondiente puede ser encontrado en las ecuaciones (11) y es igual a:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6\alpha t D(1 + \nu)}{h^3}$$

Substituyendo por D esta expresión (3), finalmente obtengo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{tE\alpha}{2(1-\nu)} \quad (14)$$

Viendo que el esfuerzo es proporcional a el coeficiente de expansión termal α , a la diferencia de temperaturas, (t) entre las 2 faces de la losa y a el módulo de elasticidad - (E). El espesor (h) de la losa no entra dentro de la fórmula (14), pero entonces la diferencia (t) de temperaturas usualmente incrementados en proporción a el espesor de la losa, con esto concluyo que grandes esfuerzos termales son esperados en losas gruesas que en unas más delgadas.

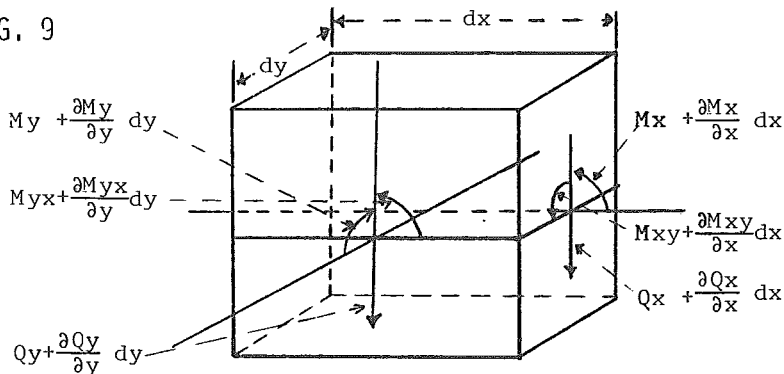
Mostrando después que la fórmula simple (14) puede ser también usada en cálculos de esfuerzos termales en calentamientos no uniformes de cubiertas delgadas, semejante a tubos cilíndricos delgados ó recipientes esféricos delgados. El cambio en curvatura durante el calentamiento no uniforme de cubiertas semejantes es previsto por la forma de la misma cubierta y los máximos esfuerzos flexionantes ecuación (14) son producidos. Entonces la diferencia de temperatura (t) es usualmente proporcional a el espesor de la cubierta.

TEMA II.- PEQUEÑAS DEFLEXIONES EN LOSAS CON CARGA LATERAL:

4.- ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA SUPERFICIE DE DEFLEXIÓN.

Como sabemos que la carga que actúa sobre una losa es normal a la superficie y sus deflexiones son pequeñas en comparación con el espesor de la losa. En la frontera asumimos que los bordes de la losa están libres a moverse en el plano de la losa, así las fuerzas reactivas en los bordes son normales a la losa y con estas suposiciones podemos despreciar cualquier tensión en el plano medio de la losa durante la flexión; tomando como antes los ejes coordenados (x) y (y) en el plano medio de la losa y el eje (z) perpendicular a este plano considerando al elemento cortado en la losa por 2 pares de planos paralelos a los planos (xz) y (yz) como se muestra en la fig. (9).

FIG. 9

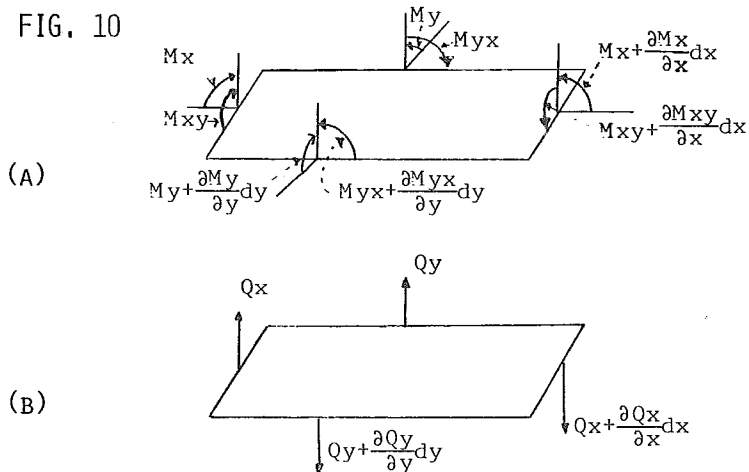


Al sumar los momentos flexionantes M_x y M_y a los momentos torsionantes M_{xy} ; los cuales se obtienen al considerar la flexión pura, presentándose fuerzas cortantes verticales que actúan sobre los lados del elemento de las cuales las magnitudes por unidad de longitud paralelas a los ejes (y) y (x) son representados por Q_x y Q_y respectivamente.

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (a)$$

Entonces los momentos y las fuerzas cortantes están en función de las coordenadas (x) y (y), las condiciones de equilibrio del elemento consideran los pequeños cambios de estas cantidades al cambiar (x) y (y) por (dx) y (dy). El plano medio del elemento es representado en la fig. (10) y las direcciones en las cuales los momentos y fuerzas son tomadas como positivas - se indican en la fig. (10).

FIG. 10



Se debe considerar también la carga distribuida arriba de la superficie de la losa, el valor de esta carga la denotamos por (q) , así que la carga que actúa sobre el elemento es $---(q dx dy)$ y peso de la losa puede ser considerada dentro de la carga (q) proyectando todas las fuerzas actuantes sobre el elemento en el eje (z) , con lo que obtengo la siguiente ecuación de equilibrio.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

De la cuál dividiendo todo entre $(dx dy)$ resulta:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (b)$$

Tomando momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento con respecto a el eje (x) , obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0 \quad (c)$$

Dividiendo la ecuación entre $dx dy$ obtengo la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (d)$$

De la misma forma tomando los momentos con respecto al eje (y) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (e)$$

Como no hay fuerzas en las direcciones (x) y (y) ni momentos con respecto a el eje (z) , las tres ecuaciones (b) , (d) y (e) completamente detienen el equilibrio del elemento, lo cuál permite substituir las fuerzas cortantes Q_x y Q_y determinadas en las ecuaciones (d) y (e) dentro de la ecuación (b) y de esta manera obtenemos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (f)$$

Observando que $M_{yx} = -M_{xy}$ por virtud de $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, finalmente se representa la ecuación de equilibrio (f) en la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (g)$$

Al representar esta ecuación en términos de las deflexiones (ω) de la losa, obtengo al asumir aquí que las expresiones (8) y (10), encontradas para el caso de flexión pura, pueden ser usadas también en el caso de losas cargadas lateralmente. Esta adopción es equivalente a desprestigiar el efecto sobre flexión de las fuerzas cortantes Q_x y Q_y y los esfuerzos comprensivos σ_x , producidos por la carga (q), al usar las direcciones (x) y (y) en lugar de (n) y (t) las cuales se mostraron en las ecuaciones (8) y (10) obteniendo lo siguiente:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D (1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

Y substituyendo estas expresiones en la ecuación (g) obtengo.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (17)$$

la cuál fué obtenida y desarrollada por Lagrange.

Observando que el problema de flexión por una carga lateral (q) se reduce a la integración de la ecuación (17) y las ecuaciones (d) y (e) son usadas para determinar fuerzas cortantes Q_x y Q_y en las cuales se tiene:

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

Los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} pueden ser determinados al asumir que ellos están distribuidos a través del espesor, conforme a una ley parabólica, con lo cual tendré:

$$(\tau_{xz})_{\text{máx.}} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}; \quad (\tau_{yz})_{\text{máx.}} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}$$

5.- CONDICIONES DE FRONTERA:

Empezaré con el planteamiento de las condiciones de fronteras para el caso general de una losa rectangular bajo diferentes condiciones de frontera, en la cuál los ejes (x) y (y) son tomados paralelos a los lados de la losa.

A) BORDE: COMO PARTE DE LA ESTRUCTURA.-

Si el borde de la losa forma parte de la estructura la deflexión a lo largo de este borde es 0 y adoptando que el eje (x) coincide con el borde que es parte de la estructura las condiciones de frontera serán:

$$(\omega)_{y=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (20)$$

B) BORDE: CON APOYO SIMPLE.-

Si el borde (y=0) de la losa está simplemente apoyado, la deflexión (ω) a lo largo de este será cero, al mismo tiempo este borde puede girar libremente con respecto al eje (x) donde no hay momentos flexionantes (M_y) a lo largo de este borde. Esta clase de apoyos es representada en la fig. (11) y las expresiones analíticas de las condiciones de frontera para este caso son:

$$(\omega)_{y=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (21)$$

C) BORDE: LIBRE.

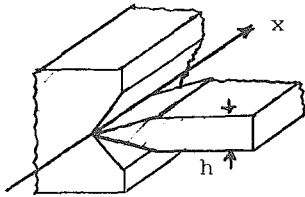
Si un borde de una losa por ejemplo el borde $x=a$ fig.(12) es enteramente libre, es natural asumir que a lo largo de este borde no hay momentos flexionantes torcionantes y también --- fuerzas cortantes verticales, del que se encuentra.

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_{xy})_{x=a} = 0, \quad (Q_x)_{x=a} = 0,$$

Las condiciones de frontera son representadas por Poisson en la forma anterior, pero después Kirchoff demostró que las 3 condiciones de frontera son demasiadas y que 2 condiciones son suficientes para la completa determinación de las deflexiones (ω) satisfaciendo la ecuación (10). El demostró también que los 2 requisitos de Poisson procediendo con los momentos torsionantes (M_{xy}) y con las fuerzas cortantes Q_x deben ser reemplazados por una condición frontera.

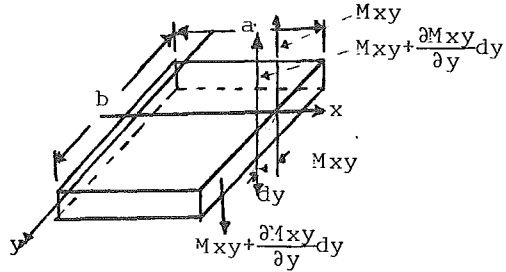
Procediendo con el reemplazamiento de pares torsionantes a lo largo del borde de la losa y considerando los elementos adyacentes del borde Fig. (12), encontrando que la distribución de momentos torsionantes M_{xy} es estáticamente equivalente a la distribución de la intensidad de fuerzas cortantes es:

FIG. 11



$$Q'_x = -\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a}$$

FIG. 12



De aquí los requerimientos en cuanto unir el momento torsionante M_{xy} y la fuerza cortante Q_x a lo largo de el borde libre $x=a$ llega a ser:

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0 \quad (a)$$

Substituyendo para Q_x y M_{xy} sus expresiones (18) y (16), finalmente obtengo para el borde libre $x=a$:

$$\left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (22)$$

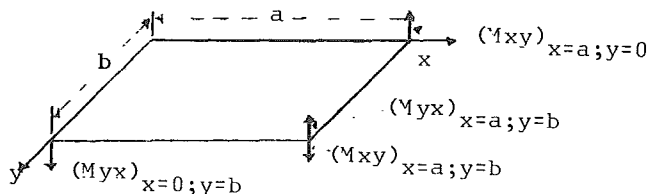
La condición de momentos flexionantes a lo largo del borde libre está representada por la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (23)$$

Las ecuaciones (22) y (23) representan las 2 condiciones de frontera necesarias a lo largo del borde libre $x=a$ de la losa.

Transformando los pares torsionantes como explicamos en el inciso anterior y como se muestra en la fig. (12), obtengo no solamente fuerzas cortantes Q'_x distribuidas a lo largo del borde $x=a$, sino también 2 fuerzas concentradas a los finales de la losa, como indico en la fig. (13)

FIG. 13

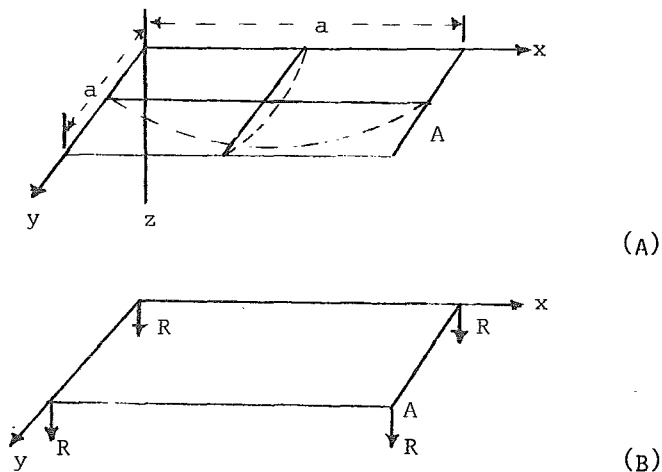


Las magnitudes de estas fuerzas son iguales a las magnitudes de el par torcionante M_{xy} en las correspondientes esquinas de la losa. Haciendo una transformación analoga de pares torsionantes M_{xy} a lo largo del borde $y=b$ se encuentra en este caso otra vez en adición a la distribución de fuerzas cortantes $Q'y$, que habrá fuerzas concentradas M_{yx} en las esquinas. Esto señala que una losa rectangular apoyada en alguna forma a lo largo de los bordes y cargada lateralmente usualmente producirá no solamente reacciones distribuidas a lo largo de la frontera sino también reacciones concentradas en las esquinas.

Se toma por ejemplo una losa cuadrada uniformemente cargada con los bordes simplemente apoyados, la forma general de la superficie de deflexión es indicada en la fig. (14) por líneas anchuradas, representando la sección de la superficie media de la losa por planos paralelos a los planos coordinados (xz) y (yz) se puede ver que cerca de la esquina A la derivada $\partial\omega/\partial x$, representa la pendiente de la superficie de deflexión en la dirección $-x$, es negativa y decrece numericamente con incrementos de (y) por esto $\partial^2\omega/\partial x\partial y$ es positiva en la esquina A y de la ecuación (16) concluire que M_{xy} es positivo y M_{yx} es negativo en las esquinas.

Cuando una losa cuadrada esta cargada uniformemente, las esquinas en general tienen una tendencia a crecer, esto es prevenido por las reacciones concentradas en las esquinas como se indica en la figura.

FIG. 14



6.- REDUCCIÓN DEL PROBLEMA DE FLEXION EN UNA LOSA A LA DEFLEXION EN UNA MEMBRANA.

Hay casos en los cuales esto es ventajoso para reemplazar la ecuación diferencial (17) desarrollada para una losa por 2 ecuaciones de 2º orden las cuales representan las deflexiones de una membrana. Este reemplazamiento puede facilmente hacerse si escribimos la ecuación (17) en la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{q}{D} \quad (a)$$

Y observando que por adición juntas las 2 expresiones (16) para momentos flexionantes tengo la siguiente ecuación.

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (b)$$

Introduciendo una nueva notación.

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (24)$$

las 2 ecuaciones (a) y (b) pueden ser representadas en la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (25)$$

Estas ecuaciones son de la misma clase como las obtenidas para una membrana extendida uniformemente y lateralmente cargada.

La solución de estas ecuaciones es mucho muy simplificada en el caso de una losa apoyada simplemente de forma poligonal, en caso de que a lo largo de cada porción rectilínea de la frontera nosotros tengamos $\partial^2 \omega / \partial s^2 = 0$ donde $\omega = 0$ en la frontera y observando que $M_n = 0$ en un borde simplemente apoyado, se concluye también que para $\partial^2 \omega / \partial n^2 = 0$ en la frontera, tendré lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} = 0 \quad (c)$$

Se observa que la solución del problema se reduce en este caso a la integración de las 2 ecuaciones (25) en serie. Empezamos con la primera de estas ecuaciones y encontramos su solución, satisfaciendo la condición $M = 0$ en la frontera. Substituyendo esta solución en la segunda ecuación e integrandola se encuentran las deflexiones (w). Ambos problemas son de la misma clase como el problema de la deflexión de una membrana extendida uniformemente y con carga lateral teniendo en la fron

tera la deflexión cero. Una losa apoyada simplemente de forma poligonal y doblada por momentos M_n uniformemente distribuidos a lo largo de la frontera, es otro caso simple de la aplicación de las ecuaciones (25) las que llegan a ser:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \frac{M}{D}$$
(26)

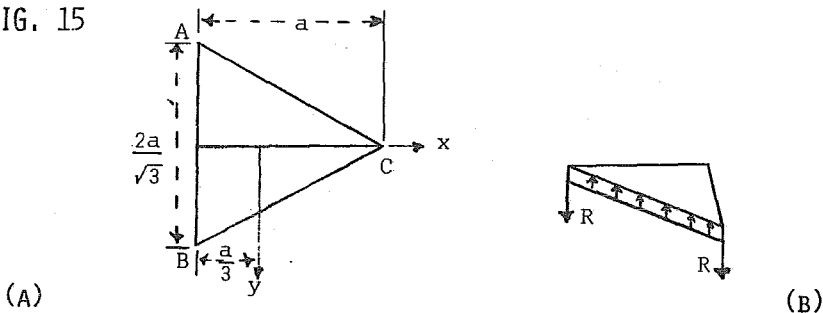
Esta condición de frontera y la primera de las ecuaciones (26) será satisfecha al tomar la cantidad M el valor constante $M=M_n$ en todos los puntos de la losa, los cuales mediante la suma de los momentos flexionantes M_x y M_y quedan constantes a través de la superficie entera de la losa. Las deflexiones de la losa entonces serán encontradas de la segunda de las ecuaciones --- (26) la cuál llega a ser:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \frac{M_n}{D}$$
(d)

De esto se concluye que en la losa la superficie de deflexión es la misma que en la membrana.

Tomando por ejemplo, una losa triangular equilátera apoyada simplemente fig. (15) y doblada por momentos distribuidos uniformemente a lo largo de la frontera. La superficie de deflexión será la misma como aquella de una membrana extendida y con carga uniforme.

FIG. 15



Lo anterior puede obtenerse experimentalmente por una membrana extendida en la frontera triangular y cargada uniformemente por la presión del aire.

La expresión analítica de la superficie de deflexión es también comparativamente simple en este caso al tomar el producto de los lados izquierdos de las ecuaciones de sus 3 lados

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) \\ = \frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27}$$

Esta ecuación llega a ser cero en la frontera. De aquí la condición de frontera $\omega=0$ para la membrana es satisfecha si tomo para las deflexiones la siguiente expresión.

$$\omega = N \left(\frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27} \right) \quad (e)$$

donde N es un factor constante, la magnitud de las cuales se eligen en una forma semejante como a satisfacer la ecuación (d). En esta forma obtengo la solución requerida.

$$\omega = \frac{Mn}{4aD} \left(x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right) \quad (f)$$

Substituyendo $x=y=0$ en esta expresión, obtengo la deflexión en el centro del triángulo.

$$\omega_0 = \frac{Mna^2}{27D} \quad (g)$$

Las expresiones para los momentos flexionantes y torsionantes, de las ecuaciones (15) y (16) son:

$$M_x = \frac{Mn}{2} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] \\ M_y = \frac{Mn}{2} \left[1 + \nu + \frac{(1 - \nu)3x}{a} \right] \quad (h) \\ M_{xy} = - \frac{3(1 - \nu)Mny}{2a}$$

Las fuerzas cortantes de las ecuaciones (18) y (19) son:

$$Q_x = Q_y = 0$$

El momento torsionante a lo largo del lado BC, fig.(9) y de las ecuaciones (c) del inciso (5) es:

$$M_{nt} = \frac{3(1 - \nu) Mn}{4a} (y - \sqrt{3}x)$$

Las reacciones verticales que actúan sobre la losa a lo largo del lado BC son:

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = - \frac{3(1 - \nu)}{2a} Mn \quad (i)$$

Por simetría concluyo que las mismas reacciones distribuidas uniformemente también actúan a lo largo de los otros 2 lados de esta. Estas fuerzas son balanceadas por las reacciones concentradas en las esquinas, la magnitud de ellas es:

$$R = 2 (Mnt)_{x=\frac{2}{3}a, y=0} = (1 - \nu) \sqrt{3} Mn \quad (j)$$

Los máximos esfuerzos flexionantes están en las esquinas y actúan sobre los planos bisectando los ángulos. La magnitud del correspondiente momento flexionante, de las ecuaciones (h) es:

$$(My)_{\text{máx.}} = (My)_{x=\frac{2}{3}a} = \frac{Mn (3 - \nu)}{2} \quad (k)$$

7.- TEORÍA EXACTA DE LOSAS .

La ecuación diferencial (17) la cual junto con las condiciones de fronteras definen las deflexiones de las losas que fueron derivadas con anterioridad olvidando el efecto sobre la flexión de los esfuerzos normales σ_z y fuerzas cortantes τ_{xz} y τ_{yz} . Estas formas que en cada derivación el estrato delgado de la losa paralela al plano medio fué condicionado a estar en el espacio del esfuerzo plano, en el cuál únicamente los componentes del esfuerzo σ_x , σ_y y τ_{xy} pueden ser diferentes a cero. Las componentes de estas son proporcionales a (z) e independientes de (x) y (y) .

Hay casos en los cuales la flexión de una distribución de esfuerzos planos toman lugar y los contiene la ecuación (17), - por ejemplo una losa circular con un hueco circular central - doblado por momentos M_r distribuidos uniformemente a lo largo de la frontera del hueco fig. (11) cada estrato ó capa delgada de esta recortado por dos planos paralelos adyacentes al plano medio, esta en la misma condición de esfuerzos como un muro grueso cilíndrico sujeto a una presión interna uniforme o una tensión fig. (11). La suma $\sigma_r + \sigma_t$ de los dos principales esfuerzos son constantes en cada caso, concluyendo con la deformación del estrato o capa en la dirección (z) que es también constante y no interfiere con la deformación de capas adyacentes.

Cuando la flexión resulta de una distribución de esfuerzos planos es necesario considerar las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio junto con las seis ecuaciones de compatibilidad, las cuales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 \sigma_x &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & \Delta_1 \tau_{xy} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\
 \Delta_1 \sigma_y &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} & \Delta_1 \tau_{xz} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} \\
 \Delta_1 \sigma_z &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} & \Delta_1 \tau_{yz} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z}
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

En la cuál $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$y \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Sumando las ecuaciones (b) obtuve que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \Delta_1 \theta = 0 \tag{d}$$

La suma de las tres componentes de los esfuerzos normales representan una función armónica. En el caso de esfuerzos planos, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ y se puede concluir de las dos últimas de las ecuaciones (c) y la última de las ecuaciones (b), que $\partial\theta/\partial z$ debe ser una constante, igual a β . De aquí la expresión general para θ es:

$$\theta = \theta_0 + \beta z \tag{e}$$

donde θ_0 es una función armónica plana con lo cuál:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} = \Delta \theta_0 = 0$$

En el caso de esfuerzos planos la función θ consiste en dos partes y es independiente de (z) y βz proporcional a z . La primera parte no varía a través del espesor, depende de la deformación en su plano particular y puede ser omitido al interesar solamente la flexión, con lo cuál se puede tomar $\theta = \beta z$. Las ecuaciones de equilibrio (a) se cumplen en el caso de una distribución de esfuerzos planos si se toma:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tag{f}$$

donde ψ es la función de esfuerzos. Considerando ahora la forma general de esta función y substituyendo las expresiones (f) en la igualdad anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \beta z \tag{g}$$

Además las ecuaciones (b) llegan a ser:

$$\Delta_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \delta \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta_1 \psi = 0$$

La cuál usando la ecuación (g) puede ser puesta en la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (h)$$

En la misma forma de la segunda y tercera de las ecuaciones (b) se deduce lo siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (i)$$

De las ecuaciones (h) e (i) encontré que $\partial^2 \psi / \partial z^2$ es una función lineal de (x) y (y). Esta función puede ser igual a cero sin afectar las magnitudes de las componentes de los esfuerzos dados por la expresión (f). En un caso semejante la expresión general de la función de esfuerzos es.

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 z$$

Donde ψ_0 es una función armónica plana y ψ_1 satisface la ecuación.

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \beta \quad (j)$$

Como no me interesa la deformación de la losa en su plano, se puede omitir ψ_0 en mi desarrollo y tomar como una expresión general para la función de esfuerzos.

$$\psi = \psi_1 z \quad (k)$$

Substituyendo esta en las ecuaciones (f) las componentes de esfuerzos pueden ahora ser calculados, y el desplazamiento puede ser encontrado de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma x - \nu \sigma y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma y - \nu \sigma x), \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma x + \sigma y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau xy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (l)$$

Para los desplazamientos (ω) perpendiculares se obtiene en este método:

$$\omega = -\frac{\beta}{2E} (x^2 + y^2 + \nu z^2) + \frac{1+\nu}{E} \psi_1$$

y la deflexión de la superficie media será:

$$\omega = -\frac{\beta}{2E} (x^2 + y^2) + \frac{1+\nu}{E} \psi_1 \quad (m)$$

Las componentes de los esfuerzos para las ecuaciones (f) y (k) son:

$$\sigma_x = z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}$$

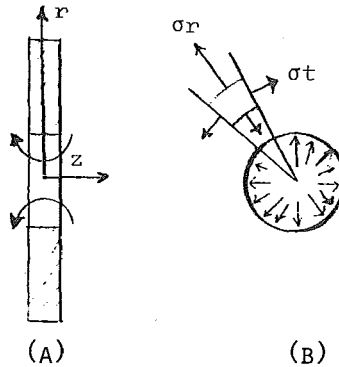
Y los momentos flexionantes y torsionantes son:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \quad (n)$$

De este análisis se concluye que en el caso de flexión de losas resultado de una distribución de esfuerzos planos, las deflexiones (ω) (ver ecuación n) cumplen con la ecuación (17) y también las ecuaciones (15) y (16) de los momentos flexionantes y torsionantes respectivamente. Si la solución de la ecuación (j) se toma en la forma de una función de segundo grado la cuál representa la deflexión por flexión pura, generalmente se concluirá que la deflexión en el caso de una distribución planar de esfuerzos es la misma como al de una membrana uniformemente extendida y con carga uniforme.

FIG. 16



La losa mostrada en la fig. (16) representa el caso particular de una flexión en la cuál la solución de la ecuación (j) será dada en coordenadas polares;

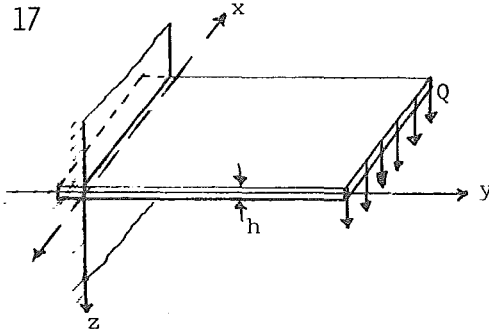
$$\psi_1 = Ar^2 + B \log. r + C,$$

Donde A, B y C son constantes que deben ser elegidas para cumplir las condiciones de frontera. Las losas de una forma poligonal simplemente apoyadas y dobladas por momentos uniformemente distribuidos a lo largo de la frontera (ver inciso 6), representa otro ejemplo de flexión en la cuál la superficie de deflexión tiene una forma de satisfacer la ecuación (n) y las ecuaciones (15), (16) y (17) como se nota de las ecuaciones (j) y (n) obtengo:

$$M_x + M_y = \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) = \frac{\beta h^3}{12}$$

Donde la suma de los momentos flexionantes en las dos direcciones perpendiculares permanecen constantes sobre la losa entera.

FIG. 17



Considerando el caso en el cuál la flexión de una losa producida por la distribución de esfuerzos planos donde los es esfuerzos normales σ_z , son cero en todos los puntos y las componentes de los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} son cero en la superficie $z = \pm h/2$, (ver fig. 17).

De la teoría de flexión de vigas rectangulares, se conoce - que en este caso $\sigma_z = 0$ en todos los puntos y τ_{xz} es cero - en la superficie y varía a lo largo de la profundidad de la losa acorde a una ley parabólica.

$$\tau_{xz} = \frac{6Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Usando otra vez las ecuaciones generales (a) (b) y (c), procediendo como en el caso previo de una distribución planar de esfuerzos encontramos que la expresión general para la - superficie de deflexión en este caso tien la forma:

$$\omega = \frac{1}{E} \left(\frac{h^2 \psi}{4} + (1 + \nu) \psi_1 \right) \quad (p)$$

La solución para este caso fué dado por Saint Venant; en la cuál ψ es una función armónica planar de (x) y (y), y ψ_1 satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = - \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \psi$$

Y las ecuaciones para los momentos flexionantes y torcionantes para las fuerzas cortantes en este caso serán:

$$\begin{aligned} M_x &= - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{8 + \nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \omega \\ M_y &= - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \frac{8 + \nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta \omega \quad (q) \\ M_{xy} &= D (1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{8 + \nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \omega \end{aligned}$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta \omega, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta \omega$$

Observando que la expresión para las fuerzas cortantes coinciden con las expresiones (18) y (19) dada por la teoría aproximada pero las expresiones para momentos son diferentes.

Considerando la curvatura en el plano (xz), se puede condicionar que la curvatura total sea producida por dos factores, los momentos flexionantes M_x y M_y y la fuerza cortante Q_x . La curvatura producida por los momentos flexionantes son obtenidos substrayendo de su curvatura total $-\partial^2 \omega / \partial x^2$ la porción $-\partial(kQ_x/hG)/\partial x$ producidas por fuerzas cortantes. Substituyendo $-(\partial^2 \omega / \partial x^2) + (\partial(kQ_x/hG)/\partial x)$ y $-(\partial^2 \omega / \partial y^2) + (\partial(kQ_y/hG)/\partial y)$ por $-\partial^2 \omega / \partial x^2$ y $-\partial^2 \omega / \partial y^2$ en las ecuaciones (15) usando las dos últimas ecuaciones del sistema (q) se encuentra para los momentos flexionantes las expresiones.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{kDh^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \omega$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \frac{kDh^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta \omega$$

Estas ecuaciones coinciden con las primeras 2 ecuaciones del sistema (q) si tomo lo siguiente:

$$\frac{k}{6} = \frac{8 + \nu}{40} \quad \text{Para } \nu = 0.3 \quad \text{será } k=1.245$$

De la teoría de flexión en vigas, se conoce la corrección debida a la acción de la fuerza cortante y puede ser quitada si el peralte (h) es chico en comparación con la longitud de la viga. La misma conclusión rige también para el caso de losas, la expresión exacta para las componentes de los esfuerzos serán:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2 - \nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \omega,$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2 - \nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta \omega,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2 - \nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \omega,$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \omega, \quad \tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \omega,$$

$$\sigma_z = 0. \quad (r)$$

El segundo término sobre los lados derechos de las ecuaciones para σ_x , σ_y , y τ_{xy} son las correcciones debidas al efecto de las fuerzas cortantes en flexión. Es visto que los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} no son proporcionales a la distancia z del plano medio pero contienen un término proporcional a (z) . Los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} varían de acuerdo a la misma ley parabólica como para vigas rectangulares, en el caso de una

distribución plana de esfuerzos, Δw es una constante, y las fórmulas (s) coinciden con estas dadas por la teoría aproximada.

El problema de una losa uniformemente cargada puede ser tratada también en la misma forma. De este modo puede mostrarse que la expresión general, para deflexiones en este caso es obtenida por adición a la expresión (q) el término.

$$\frac{1}{64} \frac{q}{D} (x^2 + y^2) \left(x^2 + y^2 - \frac{2h^2}{1 - \nu} \right) \quad (t)$$

El cuál cumple la ecuación (17) de la teoría aproximada.

Las ecuaciones para momentos flexionantes no coinciden con las ecuaciones (15) de la teoría aproximada pero contienen algunas correcciones adicionales a los terminos. Si el espesor de la losa es pequeño en comparación con las otras dimensiones, estos términos son pequeños y pueden ser dejados.

TEMA III.- LOSAS RECTANGULARES CON APOYO SIMPLE

8.- SOLUCIÓN DE NAVIER PARA LOSAS RECTANGULARES CON APOYO SIMPLE.

Para calcular las deflexiones producidas en una losa rectangular con apoyo simple por cualquier clase de carga dada por la ecuación:

$$q = f(x, y) \quad (a)$$

Para este propósito represento la función $f(x, y)$ en la forma de una serie trigonométrica doble.

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} amn \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (b)$$

Para calcular cualquier coeficiente de $am'n'$ de estas series se tiene que multiplicar ambos lados de la ecuación (b) por $\sin(n'\pi y)/b$ dy e integrando de cero a b. Obteniendo que:

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = 0, \quad \text{cuando } n \neq n',$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}, \quad \text{cuando } n = n'$$

Encontrando para esto:

$$\int_0^b f(x, y) \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} amn' \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

Multiplicando ambos lados por $\sin((m'\pi x)/a)$ dx e integrando de cero a (a) se obtiene:

$$am'n' = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \quad (27)$$

Ejecutando la integración indicada en la expresión (27) se encuentran los coeficientes de las series (b) y se representa en esta forma la carga dada como una suma de cargas senoidales parciales. La deflexión total será entonces la suma de los términos semejantes a:

$$\omega = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{amn}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (28)$$

Tomando el caso de una carga uniformemente distribuida sobre la superficie entera de la losa, para la ecuación (28) será:

$$f(x, y) = q_0$$

donde q_0 es el valor de la carga distribuida.

De la fórmula (27) para este caso será:

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{mn}$$

donde (m) y (n) son números enteros impares, pero si son pares entonces será, $a_{mn} = 0$. Sustituyendo en la ecuación (28) se tendrá;

$$\omega = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (29)$$

donde $m=1,3,5$ ----- y $n=1,3,5$ -----

En el caso de una carga uniforme la superficie de deflexión si métrica con respecto al eje $x= a/2$ y $y= b/2$ desaparecen del todo todos los términos con números pares para (m) ó (n) en la serie (29), después ellos son asimétricos con respecto a los ejes ya mencionados. La deflexión máxima de la losa esta en su centro y es encontrada substituyendo $x= a/2$ y $y= b/2$ en la fórmula la (29) dando:

$$\omega_{\text{máx.}} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} - 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (30)$$

Es una serie que converge rapidamente y una satisfactoria aproximación es obtenida tomando solamente el primer término de las series, el cuál, por ejemplo, en el caso de una losa cuadrada dará.

$$\omega_{\text{máx.}} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0.0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3}$$

Este resultado es cerca del 2-1/2% en error (ver tabla #1)

La expresión para momentos flexionantes y torcionantes pueden ser obtenidas de la solución general (29) usando las ecuaciones (15) y (16). Las series obtenidas en esta forma no son tan convergentes como en las series (29). Después los momentos son expresados por la segunda derivada de las series (29), su máximo valor, si conservamos (q_0) y (D) los mismos, son proporcionales al cuadrado de las dimensiones lineales. La carga total sobre la losa, igual a ($q_0 ab$), es también proporcional al cuadrado de las dimensiones lineales, concluyendo que para 2 losas de igual espesor y del mismo valor de proporción a/b los máximos momentos flexionantes y los máximos esfuerzos son iguales si la carga total sobre las 2 losas son iguales.

Usando la expresión general (27) para los coeficientes de las series trigonométricas (b), Navier también obtuvo soluciones para el caso donde la carga distribuida uniformemente sobre un rectángulo con lados paralelos a los lados de la losa y pa

ra el caso de cargas concentradas, cabe señalar que las series anteriores no son convenientes usar.

9.- SOLUCIÓN ALTERNA PARA LOSAS RECTANGULARES APOYADAS SIMPLEMENTE Y CON CARGAS UNIFORMES.

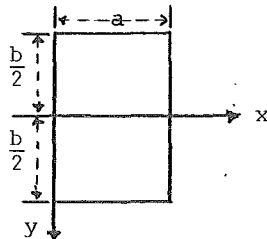
En la discusión de problemas de losas rectangulares con flexión que tienen 2 bordes opuestos simplemente apoyados, M. Levy sugirió la deflexión tomando la solución en la forma de una serie - la cuál es:

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

Donde Y_m es una función de (y) solamente. Asumiendo que los lados $x=0$ y $y=0$ fig.(18) están simplemente apoyados. De aquí cada término de la serie (a) satisface las condiciones de frontera $\omega=0$ y $\partial^2\omega/\partial x^2=0$ en estos 2 lados queda para determinar Y_m en una forma semejante como a satisfacer las condiciones de frontera en los lados $y=\pm b/2$ y también la ecuación de la superficie de deflexión.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (b)$$

FIG. 18



Aplicando este método a losas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas se puede hacer una simplificación tomando la ecuación (b) en la forma:

$$\omega' = \omega_1 + \omega_2 \quad (c)$$

y dejando

$$\omega_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) \quad (d)$$

Donde ω_1 representa la deflexión de una faja cargada uniformemente paralela al eje x , esto cumple la ecuación (b) y también las condiciones de frontera en el borde $x=0$ y $x=a$. La expresión ω_2 tiene que cumplir la ecuación:

$$\frac{\partial^4 \omega_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega_2}{\partial y^4} = 0 \quad (e)$$

Se debe escoger en una forma semejante como al hacer la suma (c) cumpla todas las condiciones de frontera de la losa, tomando en la forma de las series (a) y por simetría $m=1,3,5,-----$ y substituyendo dentro de la ecuación (e):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_m'''' - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \quad (f)$$

La integral general para esta ecuación será:

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (g)$$

Observando que la superficie de deflexión de la losa es simétrica con respecto al eje (x) fig. (18) en la expresión (g) solamente en funciones pares de (y) y dejando las constantes de integración $C_m=D_m=0$

La superficie de deflexión es representada por la siguiente expresión:

$$\omega = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (h)$$

La cuál satisface la ecuación (b) y también las condiciones de frontera en los lados $x=0$ y $x=a$ Queda ahora ajustar las constantes de integración A_m y B_m en una forma que cumpla las condiciones de frontera, en los bordes $y = \pm b/2$

$$\omega = 0 \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad (i)$$

La superficie de deflexión (h) ahora será representada en la forma de:

$$\omega = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (j)$$

donde $m=1,3,5,-----$; y substituyendo esta expresión en las condiciones de frontera (i) y usando la anotación:

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha m \quad (k)$$

Obteniendo la siguiente ecuación para determinar las constantes A_m y B_m .

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh \alpha m + \alpha m B_m \sinh \alpha m = 0$$

$$(A_m + 2B_m) \cosh \alpha m + \alpha m B_m \sinh \alpha m = 0$$

de la cuál:

$$A_m = \frac{2 (\alpha m \tanh \alpha m + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha m} \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha m} \quad (1)$$

Substituyendo estos valores de las constantes en la ecuación (j) obtengo la superficie de deflexión de la losa, satisfaciendo la ecuación (b) y las condiciones de frontera, en la siguiente forma:

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha m \tanh \alpha m + 2}{2 \cosh \alpha m} \right) \cosh \frac{2\alpha my}{b} + \frac{\alpha m}{2 \cosh \alpha m} \frac{2y}{b} \operatorname{senh} \frac{2\alpha my}{b} \operatorname{senh} \frac{m\pi x}{a} \quad (31)$$

De la cuál la deflexión en cualquier punto puede ser calculada usando tablas de funciones hiperbólicas. La máxima deflexión está en la mitad de la losa ($x=a/2, y=0$) donde:

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha m \tanh \alpha m + 2}{2 \cosh \alpha m} \right) \quad (m)$$

La sumatoria de las primeras series de términos representa la deflexión de la media de una faja uniformemente cargada. De aquí represento la expresión (m) en la siguiente forma.

$$\omega \text{ máx} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cdot \frac{\alpha m \tanh \alpha m + 2}{2 \cosh \alpha m} \quad (32)$$

La serie en esta expresión converge muy rápidamente y una exactitud suficiente es obtenida tomando solamente el primer término. Al tomar una losa cuadrada como un ejemplo de la ecuación (32) resulta:

$$\omega \text{ máx} = \frac{5}{384} \cdot \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} (0.68562 - 0.00025 + \dots) = 0.00406 \frac{qa^4}{D}$$

Se nota que el segundo término de las series en el parentesis es insignificante y que al tomar solamente el primer término de la fórmula para la deflexión es obtenida correctamente a 3 figuras significativas. Substituyendo la expresión (ω) para (D) en la fórmula (4) represento la deflexión máxima de una losa en la forma:

$$\omega \text{ máx} = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (33)$$

donde (α) es un factor numérico dependiendo de la proporción de los lados de la losa y de la proporción de Poisson (ν). Algunos valores de (α) calculados para $\nu=0.3$ son dados en -

la tabla #1. Al obtener (α) para un material con un valor diferente de (ν) los valores (α) dados en la tabla deben ser multiplicados por $(1 - \nu^2)/0.91$.

Los momentos flexionantes M_x y M_y son calculados por medio de la expresión (m). Substituyendo la igualdad algebraica de esta expresión en las ecuaciones (15) se llega a lo siguiente.

$$M'_x = \frac{qx(a-x)}{2} \quad M'_y = \nu \frac{qx(a-x)}{2} \quad (n)$$

Los valores máximos de estos momentos sonen el centro de la losa ($x=a/2, y=0$) para este punto será:

$$(M_x)_{\text{máx}} = \frac{qa^2}{8} + (1 - \nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} m^2 (A_m - \frac{2\nu}{1-\nu} B_m) \quad (o)$$

$$(M_y)_{\text{máx}} = \nu \frac{qa^2}{8} - (1 - \nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} m^2 (A_m + \frac{2}{1-\nu} B_m)$$

donde A_m y B_m son dados por las expresiones (1). Estas series convergen muy rapidamente y se puede representar los momentos máximos en la forma.

$$(M_x)_{\text{máx}} = \beta qa^2, \quad (M_y)_{\text{máx}} = \beta_1 qa^2 \quad (p)$$

Los factores numéricos β y β_1 dependen de la razón a/b de los lados de la losa y sobre la magnitud de (ν) son dadas en la tabla #1 para $\nu=0.3$. De esta tabla vemos que la razón b/a se incrementa, la máxima deflexión y los máximos momentos rapidamente se aproximan a los valores calculados para una faja y la losa es cerca del 6 1/2%. Para $b/a=5$ esta diferencia es menor que 1/2%. Las diferencias entre los máximos momentos flexionantes para las mismas proporciones de b/a son 5 y 1/3%, respectivamente. Concluyendo de esta comparación que para $b/a > 3$ los cálculos para una losa pueden ser reemplazados por estas para una faja sin un error substancial.

La expresión (h) puede ser usada también para calcular las fuerzas cortantes y las reacciones en la frontera.

Estos esfuerzos cortantes tienen su máximo valor numérico en la mitad de los lados, donde:

$$(Q_x)_{x=a, y=0} = -\frac{qa}{2} + \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh \alpha m} = -\gamma qa, \quad (q)$$

$$(Q_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = -\frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \tanh \alpha m = -\gamma_1 qa$$

Los factores numéricos γ y γ_1 son también dados en la tabla #1

y las fuerzas reactivas son dadas por la siguiente expresión a lo largo del lado $x=a$:

$$(V_x)_{x=a,y=0} = -qa \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh \alpha m} + \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\alpha m \sinh \alpha m}{m^2 \cosh^2 \alpha m} \right] = -\delta qa, \quad (r)$$

donde (δ) es un factor numérico dependiendo de (ν) y de la proporción b/a , los valores numéricos de (ν) y de (δ) la cuál corresponde a la mitad de los lados paralelos al eje (x) siendo dados en la tabla #1. La distribución de las presiones (r) a lo largo de los lados de una losa cuadrada es mostrada en la fig. (19). La porción de las presiones producidas por los momentos flexionantes M_{xy} son también mostrados. Estas presiones después son balanceadas por fuerzas reactivas concentradas en las esquinas de la losa. La magnitud de estas fuerzas son dadas por la expresión:

$$R = 2(M_{xy})_{x=a,y=\frac{b}{2}} = 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a,y=\frac{b}{2}} = \frac{4(1-\nu)qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \cosh \alpha m} ((1+\alpha m \tanh \alpha m) \sinh \alpha m - \alpha m \cosh \alpha m) = nqa^2$$

Las fuerzas son directas hacia abajo y previene las esquinas de una losa de la elevación durante la flexión. Los valores del coeficiente (n) son dados en la tabla #1. Los valores de los factores α, β, β_1 y δ son funciones de la proporción b/a y es representada por la curvas en la fig. (20)

FIG. 19

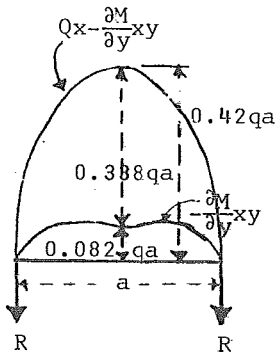


FIG. 20

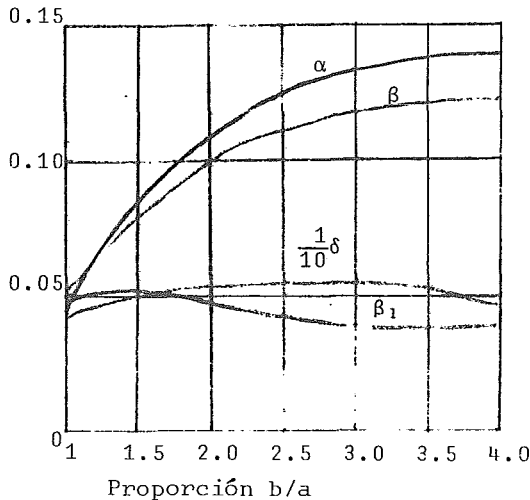


TABLA. 1

 $(\nu = 0.3)$

b/a	$\omega \text{máx.}$ $= \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}$	$(M_x) \text{máx}$ $= \beta qa^2$	$(M_y) \text{máx}$ $= \beta_1 qa^2$	$(Q_x) \text{máx}$ $= \gamma qa$	$Q_y \text{máx}$ $= \gamma_1 qa$	$V_x \text{máx}$ $= \delta qa$	$V_y \text{máx}$ $= \delta_1 qa$	R $= nqa^2$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1.0	0.0443	0.0479	0.0479	0.338	0.338	0.420	0.420	0.065
1.1	0.0530	0.0553	0.0494	0.360	0.347	0.440	0.440	0.070
1.2	0.0616	0.0626	0.0501	0.380	0.353	0.455	0.453	0.074
1.3	0.0697	0.0693	0.0504	0.397	0.357	0.468	0.464	0.079
1.4	0.0770	0.0753	0.0506	0.411	0.361	0.478	0.471	0.083
1.5	0.0843	0.0812	0.0499	0.424	0.363	0.486	0.480	0.085
1.6	0.0906	0.0862	0.0493	0.435	0.365	0.491	0.485	0.086
1.7	0.0964	0.0908	0.0486	0.444	0.367	0.496	0.488	0.088
1.8	0.1017	0.0948	0.0479	0.452	0.368	0.499	0.491	0.090
1.9	0.1064	0.0985	0.0471	0.459	0.369	0.502	0.494	0.091
2.0	0.1106	0.1017	0.0464	0.465	0.370	0.503	0.496	0.092
3.0	0.1336	0.1189	0.0404	0.493	0.372	0.505	0.498	0.093
4.0	0.1400	0.1235	0.0384	0.498	0.372	0.502	0.500	0.094
5.0	0.1416	0.1246	0.0375	0.500	0.372	0.501	0.500	0.095
∞	0.1422	0.1250	0.0375	0.500	0.372	0.500	0.500	0.095

Factores numéricos α , β , γ , δ , n para losas rectangulares con apoyo simple y carga uniforme.

10.- LOSAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE APOYADAS CARGADAS PARCIALMENTE.

Considerando una losa cargada solamente por encima de la porción sombreada (prst) ver fig. (21), los lados de la cuál estan paralelos al eje (x). La ecuación diferencial para la porción cargada de esta es:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (a)$$

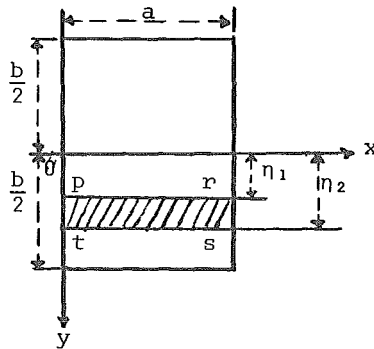
Para la porción descargada se tiene la ecuación:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = 0 \quad (b)$$

La superficie de deflexión de la porción cargada tomará la forma de:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (c)$$

FIG. 21



en la cuál ω_1 satisface la ecuación (a) y ω_2 cumple la ecuación (b). Al asumir que la intensidad de la carga que es una función de (x) solamente se considera la porción cargada (prst) como una faja y se toma la deflexión por una serie trigonométrica, la cuál es:

$$\omega_1 = \sum_{m=1}^{\infty} am \text{ sen } \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

donde am es un coeficiente numérico que depende de la distribución de la carga para las deflexiones ω_2 se toma la expresión general dada en el inciso (9). Entonces las deflexiones totales de la porción cargada es representada por la ecuación (c) que será:

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m + A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Para la porción descargada de la losa después de la línea -- (ts) se puede tomar la superficie de deflexión como sigue:

$$\omega' = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A'm \cosh \frac{m\pi y}{a} + B'm \sinh \frac{m\pi y}{a} + C'm \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + D'm \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

y similarmente para una porción descargada sobre la línea -- (pr) será:

$$\omega'' = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A''m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B''m \sinh \frac{m\pi y}{a} + C''m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + D''m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

La expresión (e) satisface la ecuación diferencial (a) y las expresiones (f) y (g) satisfacen la ecuación diferencial (b). Además de las 3 ecuaciones cumplen las condiciones de frontera $\omega=0$ y $\partial^2\omega/\partial x^2=0$ para los lados $x=0$ y $x=a$. Es necesario -- ahora escoger las constantes $A_m, B_m, \dots, C''m$ y $D''m$; en una forma semejante que las condiciones de frontera en $y=\pm b/2$ y las condiciones de continuidad a lo largo de las líneas (ts) y (pr) se cumplan al representar todas estas condiciones en una forma simple, se introducirá la notación siguiente:

$$\frac{m\pi\eta_1}{a} = 2\beta_m, \quad \frac{m\pi\eta_2}{a} = 2\gamma_m \quad (h)$$

En la cuál η_1 y η_2 son las distancias de los bordes de la faja cargada del eje (x). Al considerar la línea (ts) de las condiciones de continuidad a lo largo de esta línea será:

$$\omega' = \omega \quad \text{y} \quad \frac{\partial\omega'}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial y} \quad \text{para } y = \eta_2 \quad (i)$$

Como no hay momentos concentrados ó fuerzas concentradas aplicadas a lo largo de la línea (st), los momentos flexionantes M_y y las fuerzas cortantes Q_y deben ser continuas en esta línea, con lo que se tendrá:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\omega'}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3\omega}{\partial y^3} = \frac{\partial^3\omega'}{\partial y^3} \quad \text{para } y = \eta_2 \quad (j)$$

Substituyendo las expresiones (e) y (f) dentro de las ecuaciones (i) y (j) y usando la notación (h), con lo cuál se llega a:

$$\begin{aligned} A_m - A'm &= a_m(\gamma_m \sinh 2\gamma_m - \cosh 2\gamma_m), \\ B_m - B'm &= -a_m(\gamma_m \cosh 2\gamma_m - \sinh 2\gamma_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m - C'_m &= \frac{am}{2} \cosh 2\gamma m, \\ D_m - D'_m &= -\frac{am}{2} \sinh 2\gamma m. \end{aligned} \quad (k)$$

Obteniendo 4 ecuaciones similares también para la línea (pr) en la frontera ($y = \eta_1$). Substrayendolas entonces de las ecuaciones (k) se tiene:

$$\begin{aligned} A''_m - A'_m &= 2am \sinh(\gamma m - \beta m) \left(\sinh(\gamma m + \beta m) - \frac{\gamma m + \beta m}{2} \cosh(\gamma m + \beta m) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma m - \beta m}{2} \sinh(\gamma m + \beta m) \coth(\gamma m - \beta m) \right), \\ B''_m - B'_m &= 2am \sinh(\gamma m - \beta m) \left(-\cosh(\gamma m + \beta m) + \frac{\gamma m + \beta m}{2} \sinh(\gamma m + \beta m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma m - \beta m}{2} \cosh(\gamma m + \beta m) \coth(\gamma m - \beta m) \right), \end{aligned} \quad (l)$$

$$\begin{aligned} C''_m - C'_m &= -am \sinh(\gamma m + \beta m) \sinh(\gamma m - \beta m), \\ D''_m - D'_m &= am \sinh(\gamma m - \beta m) \cosh(\gamma m + \beta m). \end{aligned}$$

Estas 4 ecuaciones contienen 8 constantes A''_m, \dots, D''_m , donde sumando las ecuaciones que representan las condiciones de frontera en los bordes $y = b/2$. Para $y = +b/2$ se tiene $\omega' = 0$ y $-\partial^2 \omega' / \partial y^2 = 0$, luego la deflexión y el momento M_y será cero. Al substituir la expresión (f) en estas condiciones se tiene:

$$\begin{aligned} A''_m \cosh \alpha m + B''_m \sinh \alpha m + C''_m \alpha m \sinh \alpha m \\ + D''_m \alpha m \cosh \alpha m = 0 \end{aligned} \quad (m)$$

$$C''_m \cosh \alpha m + D''_m \sinh \alpha m = 0$$

donde $\alpha m = \frac{m\pi b}{2a}$

y similarmente para los bordes $y = -b/2$ se tendrá:

$$\begin{aligned} A''_m \cosh \alpha m - B''_m \sinh \alpha m + C''_m \alpha m \sinh \alpha m \\ - D''_m \alpha m \cosh \alpha m = 0 \end{aligned} \quad (n)$$

$$C''_m \cosh \alpha m - D''_m \sinh \alpha m = 0$$

Las ecuaciones (m) y (n), junto con las ecuaciones (l) son suficientes para determinar las 8 constantes A''_m, \dots, D''_m y se encuentran para sus valores las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} A''_m &= \frac{am \sinh(\gamma m - \beta m)}{\cosh \alpha m} \left(\sinh(\alpha m + \beta m + \gamma m) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma m + \beta m}{2} \cosh(\alpha m + \beta m + \gamma m) - \frac{\gamma m - \beta m}{2} \coth(\gamma m - \beta m) \sinh(\alpha m + \beta m + \gamma m) \right. \\ &\quad \left. - \alpha m \frac{\cosh(\gamma m + \beta m)}{2 \cosh \alpha m} \right) \end{aligned}$$

$$A''_m = \frac{am \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m)}{\cosh \alpha m} \left(\operatorname{senh}(\alpha m - \beta m - \gamma m) + \frac{\gamma m + \beta m}{2} \operatorname{cosh}(\alpha m - \beta m - \gamma m) - \frac{\gamma m - \beta m}{2} \operatorname{coth}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m - \gamma m - \beta m) - \alpha m \frac{\operatorname{cosh}(\gamma m + \beta m)}{2 \cosh \alpha m} \right)$$

$$B''_m = \frac{am \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m)}{\operatorname{senh} \alpha m} \left(-\operatorname{senh}(\alpha m + \beta m + \gamma m) + \frac{\gamma m + \beta m}{2} \operatorname{cosh}(\alpha m + \beta m + \gamma m) + \frac{\gamma m - \beta m}{2} \operatorname{coth}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m + \beta m + \gamma m) - \alpha m \frac{\operatorname{senh}(\gamma m + \beta m)}{2 \operatorname{senh} \alpha m} \right)$$

$$B''_m = \frac{am \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m)}{\operatorname{senh} \alpha m} \left(\operatorname{senh}(\alpha m - \beta m - \gamma m) + \frac{\gamma m + \beta m}{2} \operatorname{cosh}(\alpha m - \beta m - \gamma m) - \frac{\gamma m - \beta m}{2} \operatorname{coth}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m - \beta m - \gamma m) - \alpha m \frac{\operatorname{senh}(\gamma m + \beta m)}{2 \operatorname{senh} \alpha m} \right)$$

$$C''_m = -\frac{am}{2 \cosh \alpha m} \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m + \beta m + \gamma m),$$

$$C''_m = -\frac{am}{2 \cosh \alpha m} \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m - \beta m - \gamma m),$$

$$D''_m = \frac{am}{2 \operatorname{senh} \alpha m} \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m + \beta m + \gamma m),$$

$$D''_m = \frac{am}{2 \operatorname{senh} \alpha m} \operatorname{senh}(\gamma m - \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m - \beta m - \gamma m).$$

Sustituyendo A''m, B''m, C''m y D''m en las ecuaciones (k), se obtiene:

$$A_m = \frac{am \operatorname{cosh}(\gamma m + \beta m)}{\cosh \alpha m} \left(\operatorname{cosh}(\alpha m - \gamma m + \beta m) - \frac{\gamma m + \beta m}{2} \operatorname{tanh}(\gamma m + \beta m) \operatorname{cosh}(\alpha m - \gamma m + \beta m) + \frac{\gamma m - \beta m}{2} \operatorname{senh}(\alpha m - \gamma m + \beta m) + \alpha m \frac{\operatorname{senh}(\gamma m - \beta m)}{2 \cosh \alpha m} \right)$$

$$B_m = \frac{am \operatorname{senh}(\gamma m + \beta m)}{\operatorname{senh} \alpha m} \left(\operatorname{senh}(\alpha m - \gamma m + \beta m) - \frac{\gamma m + \beta m}{2} \operatorname{coth}(\gamma m + \beta m) \operatorname{senh}(\alpha m - \gamma m + \beta m) + \frac{\gamma m - \beta m}{2} \operatorname{cosh}(\alpha m - \gamma m + \beta m) - \alpha m \frac{\operatorname{senh}(\gamma m - \beta m)}{2 \operatorname{senh} \alpha m} \right)$$

$$C_m = \frac{am \operatorname{cosh}(\gamma m + \beta m)}{2 \cosh \alpha m} \operatorname{cosh}(\alpha m - \gamma m + \beta m)$$

$$D_m = -\frac{am \operatorname{senh}(\gamma m + \beta m)}{2 \operatorname{senh} \alpha m} \operatorname{senh}(\alpha m - \gamma m + \beta m).$$

Así todas las constantes, encontradas en las expresiones (e), (f) y (g) son determinadas y se puede ahora calcular la deflexión en cualquier punto de la losa. Después los coeficientes am en las series (d) disminuye rápidamente como (m) se incrementa, solamente algunos términos de las series (e), (f) y -

(g) necesitan ser calculados para obtener las deflexiones -- con una mayor exactitud.

En la tabla 2 se presentan las deflexiones máximas para losas rectangulares con apoyo simple y cargada a lo largo del eje de simetría paralelo a la dimensión (a).

TABLA 2

($\nu = 0.3$)

$w_{\text{máx}} = \alpha \frac{q_0 a^3}{Eh^3}$	b/a=	2.0	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
	$\alpha =$	0.1078	0.0995	0.0963	0.0922	0.0872	0.0810
	b/a=	1.0					
	$\alpha =$	0.0736					

$w_{\text{máx}} = \alpha \frac{q_0 b}{Eh}$	a/b=	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.0
	$\alpha =$	0.0876	0.1011	0.1138	0.1257	0.1366	0.1779
	a/b=	∞					
	$\alpha =$	0.2275					

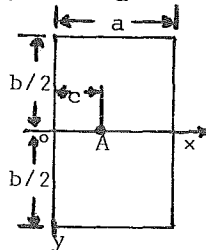
11.- LOSAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE APOYADAS CON CARGA CONCENTRADA.

La solución anterior puede ser usada en la discusión del problema de flexibilidad bajo una carga concentrada.

Esta clase de carga puede ser obtenida haciendo los lados a_1 y b_1 del rectángulo cargado más chicos que el inciso anterior y tomando $q a_1 b_1 = P$. Empezando con un caso simple, en el cuál la carga actúa en el punto A sobre el eje (x), el cuál es el eje de simetría, ver fig. (22). La deflexión de la faja a lo largo del eje (x) en este caso será.

$$w_1 = \frac{2Pa^3}{b_1 D \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

FIG. 22



Donde (c) es la coordenada del punto de aplicación de la carga concentrada P y b es el ancho de la faja. De esto se obtiene la siguiente expresión para los coeficientes en la serie

(d) del inciso anterior:

$$A_m = \frac{2Pa^3}{b_1 D \pi^4} \frac{\text{sen} \frac{m\pi c}{a}}{m^4}$$

Tomando $y=0$ la deflexión a lo largo del eje (x) tomará la siguiente forma.

$$(\omega)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2D\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi c}{a}}{m^3} \left(\tanh \alpha m - \frac{\alpha m}{\cosh^2 \alpha m} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

Estas series convergen rápidamente y con los primeros términos darán la deflexión con suficiente exactitud. En un caso particular de una carga P. aplicada al centro de la losa la máxima deflexión la cuál esta al centro, es obtenida por la substitución $x=c=a/2$ en la expresión (c) la cuál da:

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{Pa^2}{2D\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\tanh \alpha m - \frac{\alpha m}{\cosh^2 \alpha m} \right) = \alpha \frac{Pa^2}{Eh^3} \quad (34)$$

Los valores del factor α para varios valores de la proporción b/a son dados en la tabla #3, con ($\nu = 0.3$)

TABLA 3

b/a	1.0	1.1	1.2	1.4	1.8	2.0	3.0	∞
α	0.1265	0.1381	0.1478	0.1621	0.1769	0.1803	0.1846	0.1849

Se nota que la deflexión máxima es casi igual al de una losa de longitud infinita.

12.- LOSAS RECTANGULARES DE LONGITUD INFINITA CON BORDES SI SIMPLEMENTE APOYADOS.

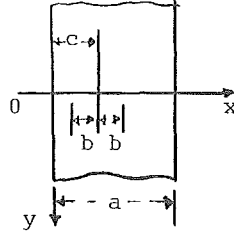
Las deflexiones y momentos en losas iguales son usualmente - obtenidas de las soluciones correspondientes para una losa fi nita y dejando que el ancho se incremente indefinidamente, es to es ventajoso para obtener soluciones para una losa infinitamente larga primero, y combinando estos en una forma semejante para obtener la solución de una finita.

Para el caso de una infinitamente larga de ancho (a) cargado a lo largo del eje (x) como se muestra en la fig. (23). La deflexión será simétrica con respecto al eje (x), se necesita - considerar unicamente la posición correspondiente a valores - positivos de (y). La carga esta distribuida unicamente a lo largo del eje (x) y la deflexión (ω) satisface la ecuación si guiente:

guiente:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

FIG. 23



Tomando la solución de esta ecuación en la siguiente forma:

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

la cuál satisface las condiciones de frontera a lo largo de los bordes longitudinales simplemente apoyados.

Para satisfacer la ecuación (a) las funciones de Y_m deben ser escogidas de la ecuación:

$$Y_{4m} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_{2m} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0$$

Y tomando la solución de esta ecuación en la forma:

$$Y_m = A_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B_m \frac{m\pi y}{a} e^{\frac{m\pi y}{a}} + C_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + D_m \frac{m\pi y}{a} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \quad (c)$$

Se observa que las deflexiones y sus derivaciones se aproximan a 0 a una distancia del eje (x), de aquí se concluye que las constantes A_m y B_m pueden tomarse igual a 0 de aquí la solución (b) puede ser:

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m + D_m \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

De la condición de simetría se tiene al igualar $C_m = D_m$

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Las constantes C_m pueden calcularse fácilmente en cada caso particular provisto de distribución de la carga a lo largo del eje (x). Como un ejemplo y asumiendo que la carga esta uniformemente distribuida a lo largo del ancho entero de la

losa, la intensidad de la carga puede ser presentada por la siguiente serie trigonométrica:

$$q = \frac{4}{\pi} q_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

En la cuál q_0 es la carga por unidad de longitud. Entonces la carga es igualmente dividida entre las 2 mitades de la losa, llegandose a lo siguiente:

$$(Qy)_{y=0} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

Substituyendo la expresión (e) para (ω) se tendrá:

$$\frac{2D\pi^3}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} C_m m^3 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

de la cuál

$$C_m = \frac{q_0 a}{D\pi^4 m^4}, \quad \text{donde } m = 1, 3, 5, \dots$$

llegando a:

$$\omega = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

La deflexión será la máxima al centro de la losa ($x=a/2$, $y=0$) donde:

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} = \frac{5\pi q_0 a^3}{24 \cdot 64 D} \quad (h)$$

Y la expresión (e) para las deflexiones de una carga de longitud $2b$ ver figura (23) será:

$$\omega = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi b}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

El caso particular de una fuerza concentrada aplicada a una distancia (c) del origen es obtenido haciendo la longitud (2b) de la porción de carga del eje (x) infinitamente pequeño y -- substituyendo.

$$2bq_0 = P \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \frac{m\pi b}{a} \approx \frac{m\pi b}{a}$$

En la ecuación (i) se tendrá

$$\omega = \frac{Pa}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (35)$$

13.- ESFUERZOS POR TEMPERATURA EN LOSAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE APOYADAS.

Asumiendo que en la superficie superior de una losa rectangular esta guardando una temperatura mayor que la superficie inferior, por lo que en la losa se presenta una tendencia a doblarse convexamente hacia arriba a causa del calentamiento no uniforme.

El calentamiento no uniforme produce ciertas reacciones a lo largo de la frontera de la losa y ciertos esfuerzos flexionantes a una distancia de los bordes.

Para el desarrollo de estos la losa estará sujeta en los bordes y el calentamiento no uniforme producirá momentos flexionantes con distribución uniforme a lo largo de la frontera -- cuya magnitud es:

$$M_n = \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h} \quad (a)$$

donde (t) es la diferencia entre las temperaturas de la superficie de arriba y abajo y (α) es el coeficiente de expansión de temperatura o termal. Al dejar los momentos flexionantes - M_x y M_y para una losa simplemente apoyada ver fig. (18), se debe superponer sobre los momentos uniformes distribuidos dados por la ecuación (a) los momentos que son producidos por $M'_n = -\alpha t D (1 + \nu) / h$ uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes. Después la curvatura en la dirección de un borde es cero en el caso de bordes simplemente apoyados, se tiene con esto $M'_t = \nu M'_n$. Con lo cuál en la frontera se tiene:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = \frac{M'_n + M'_t}{1 + \nu} = - \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h} \quad (b)$$

De este modo la primera de las ecuaciones (25) se cumple tomando M constante a lo largo de la losa entera e igual a su valor en la frontera (b). Entonces la 2a. de las ecuaciones dará:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\alpha t (1 + \nu)}{h} \quad (c)$$

La superficie de deflexión producida por el calentamiento no uniforme será la misma como para la de una membrana rectangular extendida uniformemente cargada, obtenida a partir de la solución de la ecuación (c) que cumple la condición de frontera.

Procediendo como antes se toma la superficie de deflexión en la siguiente forma:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (d)$$

en la cuál ω_1 es la deflexión de una cuerda flexible cargada uniformemente y extendida axialmente, donde la intensidad de la carga dividida por la fuerza axial es igual a: $-\alpha t(1+\nu)/h$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= - \frac{\alpha t (1 + \nu)}{h} \frac{x (a - x)}{2} \\ &= - \frac{\alpha t (1 + \nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,..}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3}\end{aligned}\quad (e)$$

Esta expresión cumple con la ecuación (c). La deflexión la cuál debe cumplir la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

Puede ser tomada en la forma de la serie siguiente:

$$\omega_2 = \sum_{m=1,3,5,..}^{\infty} Y_m \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

En la cuál es una función Y_m de (y) . Al substituir (g) en la ecuación (f) se tiene

$$Y_{2m} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m = 0$$

$$\text{De aquí } Y_m = A_m \text{senh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \text{cosh} \frac{m\pi y}{a} \quad (h)$$

Por simetría de la superficie de deflexión con respecto al - eje (x) se concluye que Y_m es una función impar de (y) . La - constante A_m en la expresión (h) debe ser tomada igual a cero con lo que finalmente se tendrá:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \sum_{m=1,3,5,..}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(-\frac{\alpha t(1+\nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} + B_m \text{cosh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (i)$$

Esta expresión satisface las condiciones de frontera $\omega=0$ en los bordes $(x=0)$ y $(x=a)$. Al cumplir la misma condición en - los bordes $y= b/2$ se debe tener lo siguiente:

$$B_m \text{cosh} \frac{m\pi b}{2a} - \frac{\alpha t (1 + \nu)}{h} \cdot \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} = 0$$

Substituyendo el valor de B_m obtenido de esta ecuación en - (i) se obtiene lo siguiente:

$$\omega = - \frac{\alpha t(1+\nu)4a^2}{\pi^3 h} \sum_{m=1,3,5,..}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \left(1 - \frac{\text{cosh} \frac{m\pi y}{a}}{\text{cosh} \alpha m} \right) \quad (j)$$

En la cuál $\alpha m = m\pi b/2a$

Teniendo esta expresión para las deflexiones ω , se pueden - encontrar los valores correspondientes de momentos flexionan

tes y combinandolos entonces con los momentos de (a), con lo cual se obtiene:

$$M_x = \frac{\alpha t D(1+v)}{h} - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{4D\alpha t(1-v^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}}{m \cosh \alpha m}$$

$$M_y = \frac{\alpha t D(1+v)}{h} - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha t(1-v^2)D}{h} - \frac{4D\alpha t(1-v^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}}{m \cosh \alpha m} \quad (k)$$

La suma de las series que aparecen en estas expresiones pueden ser rapidamente encontradas al ponerlas en la siguiente forma:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}}{m \cosh \alpha m} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}}{m \cosh \alpha m} - \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha m}} \right)$$

$$+ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}}}{m e^{\alpha m}} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (l)$$

La primera serie sobre el lado derecho de esta ecuación converge rapidamente, luego $\cosh(m\pi y/a)$ y $\cosh \alpha m$ rapidamente se aproximan a $e^{m\pi y/a}$ y $e^{\alpha m}$ cuando m se incrementa la segunda serie puede representarse como sigue:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha m}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\text{sen} \frac{\pi x}{a}}{\sinh \left(\frac{\pi b}{2a} - \frac{\pi y}{a} \right)} \quad (m)$$

Los momentos flexionantes M_x y M_y tiene sus máximos valores en la frontera, los cuales son:

$$(M_x)_{y=\pm b/2} = (M_y)_{x=0, x=a} = \frac{\alpha t(1-v^2)D}{h} = E h^2 \frac{\alpha t}{12} \quad (n)$$

Observando que estos momentos son obtenidos al multiplicar el valor de M_n en la fórmula (a) por $1-v$. La misma conclusión se alcanza si se observa que los momentos M'_n los cuales fueron aplicados a lo largo de la frontera producidos en la dirección perpendicular a los momentos:

$$M'_t = v M'_n = - \frac{v \alpha t D(1+v)}{h}$$

Los cuales superponiendolos sobre el momento (a) dan los valores de la expresión (n).

14.- FLEXIÓN DE LOSAS ANISOTROPAS.

En incisos anteriores se ha asumido que las propiedades elásticas del material son las mismas en todas direcciones. Hay sin embargo casos en los cuales el material anisotropo puede existir si deseamos tener la teoría de losas de acuerdo con los experimentos. Como se sabe el material de la losa tiene 3 planos de simetría con respecto a sus propiedades elásticas. Al tomar estos planos como planos coordenados, las relaciones entre el esfuerzo y los componentes de la tensión para un caso de esfuerzos planos en el plano (xy) puede ser representado por las siguientes funciones.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E'x \epsilon_x + E'' \epsilon_y \\ \sigma_y &= E'y \epsilon_y + E'' \epsilon_x \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{a}$$

Para el caso de esfuerzos planos las 4 constantes $E'x$, $E'y$, E'' y G son necesitadas para caracterizar las propiedades elásticas del material.

Considerando la flexión hecha en una clase de material igual se asume que los elementos lineales perpendiculares a la mitad del plano (xy), antes y después de la flexión permanecen estrechos y normales a la superficie de la deflexión. Con lo cual se usarán las expresiones siguientes.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\tag{b}$$

Las correspondientes fuerzas y componentes para la ecuación (a) son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -z \left(E'x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -z \left(E'y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{c}$$

Con estas expresiones para las fuerzas componentes de la flexión y los momentos de torsión son:

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = - \left(D_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz = - \left(D_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right),\end{aligned}$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (36)$$

En la cuál:

$$D_x = \frac{E' x h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E' y h^3}{12}, \quad D = \frac{E'' h^3}{12}, \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad (d)$$

Substituyendo las expresiones 36 en la ecuación diferencial - de equilibrio, se obtiene la siguiente ecuación para losas - anisotropas:

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q$$

e introduciendo la notación siguiente:

$$H = D_1 + 2D_{xy} \quad (e)$$

con lo cuál se obtiene:

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q \quad (37)$$

En el caso particular de isotropía se tendrá:

$$E'x = E'y = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad E'' = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

De aquí finalmente se obtendrá:

$$D_x = D_y = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$H = D_1 + 2D_{xy} = \frac{h^3}{12} \left(\frac{\nu E}{1 - \nu^2} + \frac{E}{1 + \nu} \right) = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (f)$$

y la ecuación (37) se reducirá a la ecuación (17).

La ecuación (37) puede usarse en la investigación de la flexibilidad de losas de material no homogéneo, semejantes a la losa de concreto reforzado, la cuál tiene diferente flexión rígida en todas las direcciones perpendiculares. Las cantidades D_x , D_y y D_1 pueden calcularse aproximadamente para una losa reforzada de concreto por los métodos usados en investigaciones de flexión de vigas de concreto reforzado. La rigidez torcional D_{xy} puede calcularse aproximadamente tomando - en el concreto unicamente sus módulos y rompiendose por la - fuerza cortante G .

15.- LOSAS RECTANGULARES DE ESPESOR VARIABLE.

Derivando las ecuaciones diferenciales de equilibrio se puede asumir que no hay variación brusca en el espesor de la losa, con lo cuál las expresiones para momentos flexionantes derivados para una losa, de espesor constante, se puede aplicar con suficiente exactitud, con lo que se tendrá:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (a)$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial de equilibrio. (Ver ecuación (g), inciso. 4).

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (b)$$

Y observando que la rigidez flexional (D) no es una longitud constante prolongada si no es una función de las coordenadas (x) y (y), se obtiene lo siguiente:

$$D \Delta \Delta \omega + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \omega + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \omega + \Delta D \Delta \omega$$

$$- (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = q \quad (38)$$

Donde igual que antes emplearé la notación

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Como un ejemplo particular de la aplicación de la ecuación (38) se considerará el caso en el cuál, la rigidez flexional (D) como una función lineal de (y) expresada en la forma:

$$D = D_0 + D_1 y \quad (c)$$

Donde D_0 y D_1 son constantes, en este caso las ecuaciones --- (38) se reduce a:

$$(D_0 + D_1 y) \Delta \Delta \omega + 2 D_1 \frac{\partial}{\partial y} \Delta \omega = q,$$

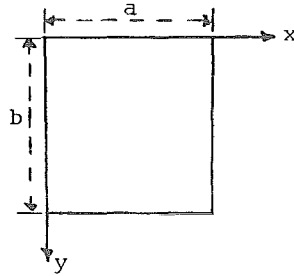
ó de esta forma

$$\Delta ((D_0 + D_1 y) \Delta \omega) = q. \quad (39)$$

Considerando el caso en el cuál la intensidad de la carga (q) es proporcional a (D) y asumiendo la deflexión de una losa - mostrada en la figura (24) en la forma de:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

FIG. 24



Y dejando ω_1 igual a la deflexión de una faja paralela al eje (x) cortada y cargada con una carga de intensidad.

$$q = q_0 \left(1 + \frac{D_1}{D_0} y \right) \quad (d)$$

Esta deflexión puede ser representada, como antes, por las series trigonométricas.

$$\omega_1 = \frac{4q_0 \left(1 + \frac{D_1}{D_0} y \right) a^4}{(D_0 + D_1 y) \pi^5} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_0} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Por substitución se puede fácilmente mostrar que esta expresión para ω_1 cumple la ecuación (39) y cumple también las condiciones de frontera $\omega=0$ y $\partial^2 \omega / \partial x^2 = 0$ a lo largo de los bordes apoyados $x=0$ y $x=a$.

La deflexión ω_2 debe entonces satisfacer la ecuación homogénea

$$\Delta ((D_0 + D_1 y) \Delta \omega) = 0 \quad (f)$$

Tomando en la forma de una serie a ω_2

$$\omega_2 = \sum_{m=1,3,5, \dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

y substituyendo esta serie en la ecuación (f) se tiene que las funciones Y_m , cumplen la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) ((D_0 + D_1 y) (Y_{2m} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m)) = 0 \quad (h)$$

usando las notaciones siguientes:

$$f_m = (D_0 + D_1 y) (Y_{2m} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m), \quad \frac{m\pi}{a} = \alpha m \quad (i)$$

Encontrando de la ecuación (h)

$$f_m = A_m e^{\alpha m y} + B_m e^{-\alpha m y}$$

Entonces de la ecuación (i) se tendrá:

$$Y_{2m} - \alpha^2 m Y_m = \frac{A_m e^{\alpha m y} + B_m e^{-\alpha m y}}{D_0 + D_1 y} \quad (j)$$

Y la solución general de esta ecuación será:

$$Y_m = C_m e^{\alpha m y} + D_m e^{-\alpha m y} + g_m \quad (k)$$

En la cuál (g_m) es una integral particular de la ecuación (j) Al encontrar esta integral particular se usará el método de Lagrange de variación de constantes y asumiendo que (g_m) tiene la forma de:

$$g_m = E_m e^{\alpha m y} + F_m e^{-\alpha m y} \quad (l)$$

En la cuál (E_m) y (F_m) son funciones de (y). Estas funciones tienen que ser determinadas por las ecuaciones siguientes, - las cuales son derivadas con respecto a (y) de (E_m) y (F_m).

$$\begin{aligned} E'_m e^{\alpha m y} + F'_m e^{-\alpha m y} &= 0 \\ E'_m e^{\alpha m y} - F'_m e^{-\alpha m y} &= \frac{A_m e^{\alpha m y} + B_m e^{-\alpha m y}}{\alpha m (D_0 + D_1 y)} \end{aligned}$$

De las cuales se obtiene:

$$E'_m = \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha m y}}{2\alpha m (D_0 + D_1 y)} \quad F'_m = -\frac{A_m e^{2\alpha m y} + B_m}{2\alpha m (D_0 + D_1 y)}$$

Integrando y Substituyendo estas expresiones en las ecuaciones (l) y (k) y usando la notación siguiente: (E_i)

$$E_i(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^u}{u} du, \quad E_i(-u) = \int_{\infty}^u \frac{e^{-u}}{u} du$$

Donde (E_i)(u) es la integral llamada integral exponencial. Y representando las funciones Y_m en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_m = A'_m &\left\{ \log \frac{2\alpha m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - e^{(-2\alpha m/D_1)(D_0 + D_1 y)} \right. \\ &E_i \left[\frac{2\alpha m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \left. \right\} e^{\alpha m y} - B'_m \left\{ e^{(-2\alpha m/D_1)(D_0 + D_1 y)} \right. \\ &\log \frac{2\alpha m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - E_i \left[\frac{-2\alpha m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \left. \right\} e^{\alpha m y} \\ &+ C_m e^{\alpha m y} + D_m e^{-\alpha m y} \quad (m) \end{aligned}$$

Las 4 constantes de integración A'_m , B'_m , D_m son obtenidas de las condiciones de frontera a lo largo de los lados $y=0$ e $y=b$ En el caso de bordes simplemente apoyados estos serán:

$$(\omega)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0$$

$$(\omega)_{y=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0$$

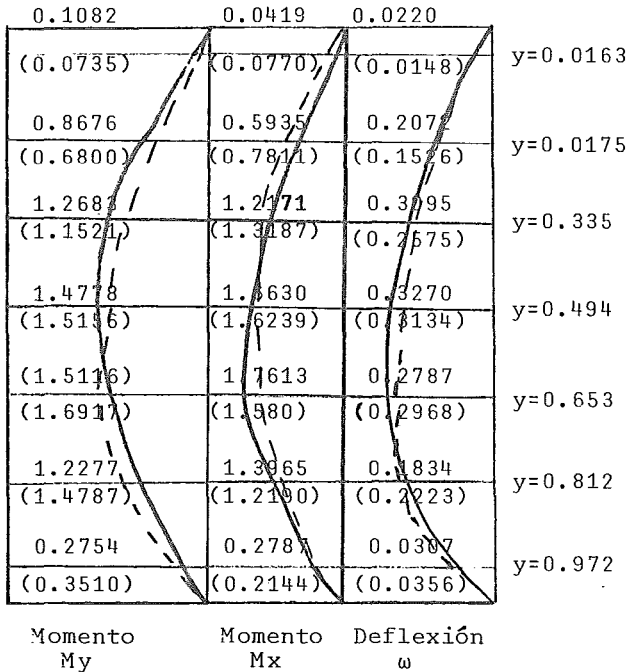
Los resultados numéricos obtenidos para una losa cuadrada simplemente apoyada al tomar solamente los primeros dos términos de la serie (g) son mostrados en la fig. (25). La deflexión y los momentos M_x y M_y a lo largo de la línea $x=a/2$ para la losa de espesor variable son mostrados por líneas completas; las mismas cantidades calculadas para una losa de una rigidez constante $D=1/2 (D_0 + D_1b)$ es mostrada por las líneas punteadas. Se asumió para los cálculos que $D_1b = 7D_0$ y $\nu=0.16$

FIG. 25

$$M_y = \frac{4q_0 a^2}{\pi^3}$$

$$M_x = \frac{4q_0 a^2}{\pi^3}$$

$$\omega = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_0}$$



TEMA IV.- LOSAS RECTANGULARES CON VARIAS CONDICIONES DE BORDE

16.- FLEXIÓN DE LOSAS RECTANGULARES CON MOMENTOS DISTRIBUIDOS A LO LARGO DE LOS BORDES.

Considerando una losa rectangular apoyada a lo largo de los bordes y dobladas por momentos distribuidos a lo largo de los bordes $y=\pm b/2$ ver fig. (26). La deflexión ω deberá satisfacer la ecuación diferencial homogénea.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

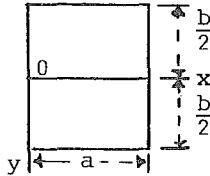
Y las siguientes condiciones de frontera son:

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x=0 \text{ y } x=a; \quad (b)$$

$$\omega = 0 \quad \text{para } y = \pm \frac{b}{2} \quad (c)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_{y=\frac{b}{2}} = f_1(x), \quad -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_{y=-\frac{b}{2}} = f_2(x) \quad (d)$$

FIG. 26



En la cual f_1 y f_2 representan los momentos flexionantes distribuidos a lo largo de los bordes $y = b/2$. Tomando la solución de la ecuación anterior (e) en la forma de la serie.

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

De la cual cada término cumple las condiciones de frontera (b) y tomando las funciones Y_m , en la forma:

$$Y_m = A_m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \quad (f)$$

La cual satisface la ecuación (a).

Para simplificar la exposición empezaré con los 2 casos particulares.

1.- El simétrico en el cual $(My)_{y=b/2} = (My)_{y=-b/2}$.

2.- El antisimétrico en el cual $(My)_{y=b/2} = -(My)_{y=-b/2}$.

Y el caso general puede ser obtenido por combinación de estos 2 casos particulares.

En el caso de simetría Y_m debe ser una función constante de y y es necesario hacer $A_m = D_m = 0$ en la expresión (f). Entonces se obtiene la ecuación (e).

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

Para cumplir la condición de frontera (c) se debe hacer:

$$B_m \cosh \alpha m + C_m \alpha m \sinh \alpha m = 0$$

Donde como antes,

Y se tiene,

$$\alpha m = \frac{m\pi b}{2a} \quad B_m = -C_m \alpha m \tanh \alpha m,$$

Y la deflexión en el caso simétrico es:

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (h)$$

Usando las condiciones de frontera (d) para determinar las constantes C_m . Representando la distribución de momentos flexionantes a lo largo de los bordes $y = b/2$ por una serie trigonométrica, se tiene para el caso de simetría:

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

Substituyendo las expresiones (h) e (i) dentro de la condición (d) se obtiene lo siguiente:

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a} C_m \cosh \alpha m \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

De la cuál:

$$C_m = - \frac{a^2 E_m}{2D m^2 \pi^2 \cosh \alpha m}$$

Y:

$$\omega = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \cosh \alpha m} E_m \left(\alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (40)$$

En el caso particular de momentos distribuidos uniformemente de intensidad M_0 se obtiene:

$$\omega = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3 \cosh \alpha m} \left(\alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

La deflexión a lo largo del eje de simetría ($y=0$) es:

$$(\omega)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3} \frac{\alpha m \tanh \alpha m}{\cosh \alpha m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (j)$$

Y para el caso antisimétrico obtendré con un procedimiento semejante la siguiente ecuación:

$$\omega = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{m^2 \sinh \alpha m} \left(\alpha m \coth \alpha m \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (41)$$

Se puede obtener para el caso general y representando las condiciones de frontera (d) la superficie de deflexión en las soluciones (40) y (41) para los casos simétrico y antisimétrico. Para este propósito dividiré el momento distribuido dentro de una distribución simétrica de Momentos $M'y$ y una distribución antisimétrica $M''y$ como sigue:

$$\begin{aligned} (M'y)_{y=b/2} &= (M'y)_{y=-b/2} = 1/2 (f_1(x) + f_2(x)), \\ (M''y)_{y=b/2} &= (M''y)_{y=-b/2} = 1/2 (f_1(x) - f_2(x)). \end{aligned}$$

Estos momentos pueden ser representados, por la serie trigonométrica:

$$\begin{aligned} (M'y)_{y=b/2} &= \sum_{m=1}^{\infty} E'm \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ (M''y)_{y=b/2} &= \sum_{m=1}^{\infty} E''m \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (k)$$

La deflexión total es obtenida usando las expresiones (40) y (41), superponiendo las deflexiones producidas por cada dos momentos distribuidos, ecuaciones (k); por lo tanto se tendrá:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2} &\left(\frac{E'm}{\cosh \alpha m} \left(\alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi x}{a} - \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{m\pi x}{a} \right) \right. \\ &\left. + \frac{E''m}{\sinh \alpha m} \left(\alpha m \coth \alpha m \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Si los momentos de flexión :

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

son distribuidos, unicamente a lo largo del borde $y=b/2$, se tiene $f_2(x)=0$ $E'm=E''m=1/2 E_m$; y la deflexión en este caso llega a ser:

$$\omega = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left(\frac{1}{\cosh \alpha m} (\alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{\operatorname{senh} \alpha m} (\alpha m \coth \alpha m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}) \right) \quad (43)$$

Las soluciones (40) a (43) pueden ser aplicadas a la investigación de losas con varias condiciones de bordes.

17.- LOSAS RECTANGULARES CON DOS BORDES OPUESTOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y LOS OTROS DOS BORDES SUJETOS.

Asumiendo que los bordes $x=0$ y $x=a$ de la losa rectangular mostrada en la fig. (26) están simplemente apoyadas y que los otros 2 bordes están sujetos. La deflexión de la losa bajo cualquier carga lateral puede ser obtenida primero, resolviendo el problema y asumiendo que todos los bordes están simplemente apoyados y entonces aplicando momentos de flexión a lo largo de los bordes $y= b/2$ en una magnitud semejante para eliminar las rotaciones producidas a lo largo de estos bordes por la acción de la carga lateral.

a) Losas uniformemente cargadas. Al presentar los bordes de la losa están simplemente apoyados, la deflexión es:

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha m \tanh \alpha m + 2}{2 \cosh \alpha m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \cosh \alpha m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (a)$$

Y la pendiente de la superficie de deflexión a lo largo del borde $y= b/2$ es:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} (\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m)) \quad (b)$$

Para eliminar esta carga y de este modo satisfacer las condiciones de frontera actuales distribuimos a lo largo de los bordes $y=\pm b/2$ los momentos M_y dados por la serie

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m)}{\alpha m - \tanh \alpha m (\alpha m \tanh \alpha m - 1)} \quad (c)$$

El máximo valor numérico de este momento será en la mitad de los lados, donde $x=a/2$. Las series (c) convergen rápidamente y el máximo momento puede ser fácilmente calculado en cada caso particular. Por ejemplo los primeros tres términos de la serie (c) dan $-0.070qa^2$ como máximo momento en una losa cuadrada. En el caso general este momento puede ser representado por la fórmula βqa^2 donde β es un factor numérico, la magnitud de la cuál depende de la proporción a/b de los lados de la losa. Algunos valores de este coeficiente son dados en la tabla 4.

TABLA 4

Constantes α , β , β_1 , β_2 ; para $\nu=0.3$ y $b < a$

$\frac{a}{b}$	$\omega_{\text{máx}} = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3}$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $My = \beta qb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $Mx = \beta_1 qb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $My = \beta_2 qb^2$
∞	0.0284	-0.083	0.013	0.042
2.0	0.0284	-0.084	0.014	0.042
1.5	0.0270	-0.083	0.017	0.041
1.4	0.0262	-0.081	0.019	0.040
1.3	0.0255	-0.079	0.020	0.039
1.2	0.0243	-0.077	0.022	0.037
1.1	0.0228	-0.074	0.023	0.036

$\frac{b}{a}$	$\omega_{\text{máx}} = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}$	$My = \beta qa^2$	$Mx = \beta_1 qa^2$	$My = \beta_2 qa^2$
1.0	0.0209	-0.070	0.024	0.033
1.1	0.0274	-0.079	0.031	0.037
1.2	0.0340	-0.087	0.038	0.040
1.3	0.0424	-0.094	0.045	0.043
1.4	0.0502	-0.100	0.052	0.045
1.5	0.0582	-0.105	0.059	0.046
2.0	0.0987	-0.119	0.087	0.047
3.0	0.1276	-0.125	0.114	0.042
∞	0.1422	-0.125	0.125	0.038

La deflexión en el centro, la cuál es producida por los momentos My distribuidos a lo largo de los bordes será:

$$(\omega_1)_{\text{máx}} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \frac{\alpha m \tanh \alpha m}{\cosh \alpha m} \frac{\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m)}{\alpha m - \tanh \alpha m (\alpha m \tanh \alpha m - 1)} \quad (d)$$

Es una serie que converge rápidamente y la deflexión puede ser obtenida con una gran exactitud tomando solamente términos impares. En el caso de una losa cuadrada el primer -

término solo da la deflexión correcta a las 3 cifras significativas y obteniendo para $\nu = 0.3$; $\omega_1 = 0.0234 (qa^4)/(Eh^3)$

Substrayendo esta deflexión de la deflexión producida en el centro por carga uniforme (ver tabla 1), se obtiene finalmente para la deflexión de una losa cuadrada cargada uniformemente con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes sujetos el valor siguiente: $\omega = 0.0209 (qa^4)/(Eh^3)$.

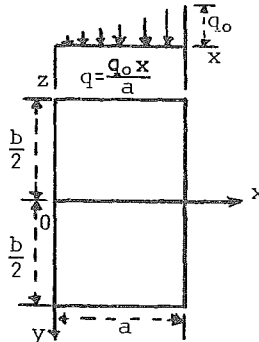
En el caso general la deflexión en el centro puede ser representado por la fórmula siguiente:

$$\omega = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Algunos valores del factor α son dados en la tabla #4.

b) Losas bajo presión hidrostática.- La superficie de deflexión de una losa rectangular simplemente apoyada sometida a la acción de una presión hidrostática, como se muestra en la figura (27).

FIG. 27



$$\omega = \frac{q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + \alpha m \tanh \alpha m}{\cosh \alpha m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\cosh \alpha m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

La pendiente de la superficie de deflexión a lo largo del borde $y=b/2$ es:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} (\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m)) \quad (e)$$

Esta pendiente es eliminada por la distribución de los momentos M_y dados en las series (c) a lo largo de los bordes $y=\pm b/2$ y determinando los coeficientes E_m de estas series así que al hacer la pendiente producida por el momento igual y opuesto al dado por la expresión (e). En esta forma se obtiene para E_m :

$$E_m = \frac{2q_0 a^2 (-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m)}{\alpha m - \tanh \alpha m (\alpha m \tanh \alpha m - 1)}$$

Substituyendo esto en la serie (c) la expresi3n para momentos flexionantes a lo largo de los bordes de la parte de la estructura llega a ser:

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{2q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m)}{\alpha m - \tanh \alpha m (\alpha m \tanh \alpha m - 1)} \quad (f)$$

Los t3rminos en las series (f) en la cu3l (m) desaparece a la mitad de los lados de la parte de la estructura donde $x=a/2$, y el valor de la serie llega a ser igual a la 1/2 que para -- una losa cargada uniformemente (ver ecuaci3n c). Las series -- convergen rapidamente y los valores del momento flexionante -- en cualquier punto del borde pueden ser f3cilmente obtenidos. Algunos valores de este momento son dados en la tabla 5

TABLA 5 Momentos flexionantes M_y a lo largo de los bordes como parte de la estructura.

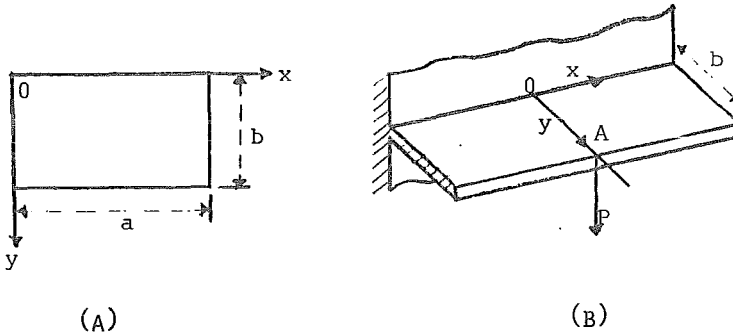
b/a	x = a/4	x = a/2	x = 3a/4
∞	-0.039 $q_0 a^2$	-0.062 $q_0 a^2$	-0.055 $q_0 a^2$
2.0	-0.037 $q_0 a^2$	-0.060 $q_0 a^2$	-0.053 $q_0 a^2$
3/2	-0.032 $q_0 a^2$	-0.052 $q_0 a^2$	0.048 $q_0 a^2$
1.0	-0.020 $q_0 a^2$	0.035 $q_0 a^2$	0.035 $q_0 a^2$
2/3	-0.021 $q_0 b^2$	-0.041 $q_0 b^2$	-0.048 $q_0 b^2$
1/2	-0.021 $q_0 b^2$	0.042 $q_0 b^2$	-0.062 $q_0 b^2$
0	-0.021 $q_0 b^2$	-0.042 $q_0 b^2$	-0.062 $q_0 b^2$

c) Fuerza concentrada actuando sobre la losa. En este caso la deflexi3n de la losa es obtenida por superposici3n en la deflexi3n de una simplemente apoyada (inciso 11), la deflexi3n producida por momentos distribuidos a lo largo de los bordes sujetos tomando el caso de una cargada centralmente y con los bordes $y=\pm b/2$ sujetos, se obtiene la expresi3n siguiente para la deflexi3n bajo la carga concentrada:

$$\omega_{\text{m3x}} = \frac{Pb^2}{2\pi^3 D} \left(\frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\tanh \alpha m - \frac{\alpha m}{\cosh^2 \alpha m} \right) - \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{\tanh^2 \alpha m}{\operatorname{senh} \alpha m \cosh \alpha m + \alpha m} \right) \quad (g)$$

La primera suma en el parentesis corresponde a la deflexi3n de una losa simplemente apoyada (ver ecuaci3n 34) y la segunda -- representa la deflexi3n debida a la acci3n de los momentos --

FIG. 28



Considerando el caso particular de una carga uniformemente distribuida y asumiendo como antes que la deflexión total consiste en 2 partes: $\omega = \omega_1 + \omega_2$ donde ω_1 representa la deflexión de la carga uniforme y la faja es de longitud (a) simplemente apoyada, la cuál puede ser representada por la serie:

$$\omega_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

Y ω_2 esta representada por las series:

$$\omega_2 = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Donde:

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (f)$$

Las series (d) y (e) cumplen las condiciones de frontera (a) y las 4 constantes de la expresión (f) deben ser determinadas para cumplir las condiciones de frontera (b) y (c). Usando las condiciones (b), se tendrá:

$$A_m = -\frac{4}{\pi^5} \frac{1}{m^5}, \quad C_m = -D_m \quad (g)$$

De las dos condiciones de frontera restantes ecuación (c) se tendrá:

$$B_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{(3 + \nu)(1 - \nu) \cosh^2 \beta_m + 2\nu \cosh \beta_m - \nu(1 - \nu) \beta_m \sinh \beta_m - (1 - \nu^2)}{(3 + \nu)(1 - \nu) \cosh^2 \beta_m + (1 - \nu)^2 \beta_m^2 + (1 + \nu)^2}$$

$$C_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{(3 + \nu)(1 - \nu) \sinh \beta_m \cosh \beta_m + \nu(1 + \nu) \sinh \beta_m - \nu(1 - \nu) \beta_m \cosh \beta_m - (1 - \nu)^2 \beta_m}{(3 + \nu)(1 - \nu) \cosh^2 \beta_m + (1 - \nu)^2 \beta_m^2 + (1 + \nu)^2} \quad (h)$$

Donde $\beta_m = m\pi b/a$.

Substituyendo las constantes (g) y (h) en la ecuación (f) y usando las series (e) y (d) se obtiene la expresión para la superficie de deflexión.

Tomando el caso extremo, cuando (a) es muy grande en comparación con (b) la máxima deflexión es la misma como para una faja uniformemente cargada de longitud (b) que es parte de la estructura a un extremo y libre al otro. Algunos valores de la máxima deflexión calculada para varios valores de la proporción b/a son dados en la tabla 6. En la misma tabla está dado también el máximo valor de los momentos flexionantes. Los cálculos mostrados de (M_x) máxima ocurre a la mitad del borde sin apoyo y el máximo (M_y) ocurre a la mitad del borde que es parte de la estructura.

Si la losa está doblada por una carga distribuida a lo largo del borde libre, en lugar de una carga distribuida sobre la superficie, la segunda de las condiciones de frontera (c) debe ser modificada poniendo el valor de la carga distribuida en lugar de cero en el lado derecho de la ecuación. El caso particular de una fuerza concentrada aplicada en el borde libre se representa por la ecuación:

$$(w)_{y=b} = k \frac{Pb^2}{\pi D}$$

El factor (k) rápidamente disminuye como la distancia desde el punto de aplicación (A) de la carga se incrementa.

Algunos valores de este factor son dados en la tabla 7.

El momento flexionante M_y a lo largo del borde como parte de la estructura es un máximo en cero donde su valor numérico es

$$(M_y)_{x=0, y=0} = -0.508P$$

TABLA 6

Deflexiones y momentos flexionantes para una losa uniformemente cargada con dos bordes opuestos simplemente apoyados, el -tercero borde libre y el cuarto como parte de la estructura.
 $\nu = 0.3$

b/a	$\omega_{\text{máx.}}$	x = a/2, y = b	
		Mx	My
0	$1.37 qb^4/Eh^3$	0	$-0.500qb^2$
1/3	$1.03 qb^4/Eh^3$	$0.0078qa^2$	$-0.428qb^2$
1/2	$0.635 qb^4/Eh^3$	$0.0293qa^2$	$-0.319qb^2$
2/3	$0.366 qb^4/Eh^3$	$0.0558qa^2$	$-0.227qb^2$
1	$0.123 qb^4/Eh^3$	$0.0972qa^2$	$-0.119qb^2$
3/2	$0.154 qa^4/Eh^3$	$0.123 qa^2$	$-0.124qa^2$
2	$0.164 qa^4/Eh^3$	$0.131 qa^2$	$-0.125qa^2$
3	$0.166 qa^4/Eh^3$	$0.133 qa^2$	$-0.125qa^2$
∞	$0.166 qa^4/Eh^3$	$0.133 qa^2$	$-0.125qa^2$

TABLA 7

x	2b	0	b/4	b/2	b
k	0.050	0.527	0.470	0.380	0.213

El caso de una losa rectangular con carga uniforme y simplemente apoyada a lo largo de los tres bordes, con el borde libre - y = b, fig.(28-b) puede ser tratado en la misma forma como en el caso anterior; en el cuál el borde y = 0 es parte de la estructura. Es necesario solamente reemplazar la segunda de las condiciones de frontera (b) por la condición:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right)_{y=0} = 0$$

Se tendrá aquí solamente el resultado final obtenido para este caso, la deflexión máxima ocurre a la mitad del borde libre y en el mismo punto el máximo momento flexionante Mx toma lugar, estos valores de deflexiones $\omega_{\text{máx}}$ y $(M_x)_{\text{máx}}$ son dados en la - primera y segunda columnas de la tabla 8. Las 2 últimas columnas dan los momentos flexionantes en el centro de la losa.

TABLA 8

Deflexiones y momentos flexionantes en losas rectangulares uniformemente cargadas con los 3 bordes simplemente apoyados y el 4º borde libre.

b/a	v = 0.3 x=a/2, y=b/2		x=a/2, y=b/2	
	ω máx.	(M _x) máx.	M _x	M _y
1/2	0.0775qa ⁴ /Eh ³	0.060qa ²	0.039qa ²	0.022qa ²
2/3	0.1057qa ⁴ /Eh ³	0.083qa ²	0.055qa ²	0.030qa ²
1	0.1404qa ⁴ /Eh ³	0.112qa ²	0.080qa ²	0.039qa ²
1.1	0.1464qa ⁴ /Eh ³	0.117qa ²	0.085qa ²	0.040qa ²
1.2	0.1511qa ⁴ /Eh ³	0.121qa ²	0.090qa ²	0.041qa ²
1.3	0.1547qa ⁴ /Eh ³	0.124qa ²	0.094qa ²	0.042qa ²
1.4	0.1575qa ⁴ /Eh ³	0.126qa ²	0.098qa ²	0.042qa ²
1.5	0.1596qa ⁴ /Eh ³	0.128qa ²	0.101qa ²	0.042qa ²
2	0.1646qa ⁴ /Eh ³	0.132qa ²	0.113qa ²	0.041qa ²
3	0.1660qa ⁴ /Eh ³	0.133qa ²	0.122qa ²	0.039qa ²
∞	0.1662qa ⁴ /Eh ³	0.133qa ²	0.125qa ²	0.037qa ²

19.- LOSAS RECTANGULARES CON TODOS LOS BORDES EMPOTRADOS O COMO PARTE DE LA ESTRUCTURA.

Para exponer este problema, usaré el mismo método como en el caso anterior y comenzando con la solución del problema para una losa rectangular simplemente apoyada y superponiendo en la deflexión producida por los momentos distribuidos a lo largo de los bordes (ver inciso 16). Estos momentos se ajustan de tal manera que cumplan las condiciones de frontera $\partial\omega/\partial n=0$ en la frontera sujeta. El método puede ser aplicado a cualquier clase de carga lateral.

Para el caso de una carga distribuida uniformemente las deflexiones y los momentos en este caso serán simétricos con respecto a los ejes coordenados (ver fig. 29).

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha m \tanh \alpha m + 2}{2 \cosh \alpha m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \cosh \alpha m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (a)$$

Donde: $\alpha m = m\pi b/2a$. La rotación en el borde $y=b/2$ será:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} (\alpha m - \tanh \alpha m (1 + \alpha m \tanh \alpha m))$$

$$= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{\alpha m}{\cosh^2 \alpha m} - \tanh \alpha m \right) \quad (b)$$

Considerando ahora la deflexión por momentos distribuidos a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ será:

$$(My)_{y=b/2} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

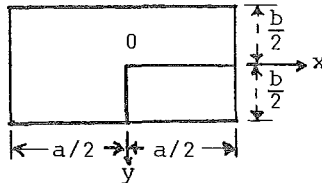
La deflexión correspondiente w_1 es obtenida de la expresión - (40) al sustituir $(x + a/2)$ por (x) y tomando $m=1,3,5,\dots$

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2 \cosh \alpha m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (d)$$

La rotación en el borde $y=b/2$, correspondiente a esta deflexión es:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\tanh \alpha m + \frac{\alpha m}{\cosh^2 \alpha m} \right) \quad (e)$$

FIG. 29



Se considera la rotación en los bordes paralelos al eje (y) y formando la derivada de la expresión (d) con respecto a (x) y poniendo $x=a/2$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=a/2} &= \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{m \cosh \alpha m} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha m \tanh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \\ &= -\frac{1}{4D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{\cosh^2 \alpha m} \\ &\quad \left(b \sinh \alpha m \cosh \frac{m\pi y}{a} - 2y \cosh \alpha m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (f) \end{aligned}$$

La expresión en parentesis es una función impar de (y) la cual desaparece en los bordes $y=\pm b/2$. Una función semejante puede ser representada por la serie:

$$\sum_{i=1,3,5}^{\infty} A_i \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (g)$$

en la cual los coeficientes A_i son calculados al usar la fórmula siguiente:

$$A_i = \frac{16ia(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{m^3 \pi^2} \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cosh^2 \alpha m$$

y substituyendo lo anterior en las expresiones (g) y (f) dará:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=a/2} = -\frac{4b^2}{\pi^2 D a} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (h)$$

En una forma similar las expresiones pueden ser obtenidas para las deflexiones w_2 y para la rotación en los bordes en el caso donde los momentos M_x son distribuidos a lo largo de los bordes $x = \pm a/2$. Asumiendo una distribución simétrica y tomando:

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} F_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (i)$$

Encontrando para este caso, al usar las expresiones (e) y (h):

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} F_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\tanh \beta_m + \frac{\beta_m}{\cosh^2 \beta_m}\right) \quad (j)$$

Donde $\beta_m = m\pi a/2b$:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{4a^2}{\pi^2 D b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} \quad (k)$$

Los momentos (c) e (i) que actúan simultáneamente harán que la rotación en los bordes sean obtenidos por el método de superposición. Tomando por ejemplo el borde $y=b/2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} &= -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \left(\tanh \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m}\right) \\ &\quad - \frac{4a^2}{\pi^2 D b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} \end{aligned} \quad (l)$$

Teniendo las expresiones (b) y (l) se puede ahora derivar las ecuaciones para el cálculo de las constantes E_m y F_m en las series (c) e (i) las cuales representan los momentos actuando a lo largo de los bordes de una losa sujeta, en el caso de una losa sujeta los bordes no rotan, de aquí se deduce para los bordes $y = \pm b/2$ lo siguiente

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0 \quad (m)$$

En una forma similar, para los bordes $x = \pm a/2$,

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{x=a/2} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = 0 \quad (n)$$

Substituyendo las expresiones (b) y (l) en la ecuación (m) y -agrupando juntos los términos que contienen el mismo factor - $\cos(i\pi x/a)$, se puede concluir que el coeficiente por el cuál - $\cos(i\pi x/a)$ es multiplicado debe ser igual a cero para cada valor de (i). En esta manera se obtiene un sistema que consiste en un infinito número de ecuaciones lineales para calcular los coeficientes E_i y F_i como sigue:

$$\frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha i}{\cosh^2 \alpha i} - \tanh \alpha i \right) - \frac{E_i}{i} \left(\tanh \alpha i + \frac{\alpha i}{\cosh^2 \alpha i} \right) - \frac{8ia}{\pi b} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} = 0 \quad (o)$$

Un sistema similar de ecuaciones son obtenidas también de la -ecuación (n). Las constantes E_1, E_3, \dots ; F_1, F_3, \dots pueden determinarse en cada caso particular por el método de aproximaciones sucesivas.

Para ilustrar este método consideré el caso de una losa cuadrada, la cual tiene momentos flexionantes distribuidos a lo largo de todos los lados de ella; donde $E_i = F_i$. Con lo cual se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{E_i}{i} \left(\tanh \alpha i + \frac{\alpha i}{\cosh^2 \alpha i} \right) + \frac{8i}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha i}{\cosh^2 \alpha i} - \tanh \alpha i \right)$$

Substrayendo el valor numérico de los coeficientes en estas --ecuaciones y considerando los cuatro primeros; se llega al siguiente sistema de ecuaciones, el cual tiene las mismas incógnitas como ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1.8033E_1 + 0.0764E_3 + 0.0188E_5 + 0.0071E_7 &= 0.6677K \\ 0.0764E_1 + 0.4045E_3 + 0.0330E_5 + 0.0159E_7 &= 0.0123K \\ 0.0188E_1 + 0.0330E_3 + 0.2255E_5 + 0.0163E_7 &= 0.0016K \\ 0.0071E_1 + 0.0159E_3 + 0.0163E_5 + 0.1558E_7 &= 0.0004K \end{aligned} \quad (p)$$

donde $K = -4qa^2/\pi^3$. Se puede ver que los términos en diagonal tienen el mayor valor numérico.

Del anterior sistema se obtiene las primeras aproximaciones de las constantes E_1, \dots, E_7 al considerar en los lados iz---

quierdos de las ecuaciones (p) solamente los términos a la izquierda de la línea gruesa. Se obtiene de la primera ecuación $E_1=0.3702K$, esto se sustituye en la segunda ecuación con lo cual se obtiene $E_3=0.0394K$; substituyendo los valores de E_1 y E_3 en la tercera ecuación se llega al valor $E_5=-0.01797K$. Para la última ecuación se tiene $E_7=-0.0083K$. Substituyendo estas primeras aproximaciones en los términos de la línea gruesa a la derecha de las ecuaciones (p) se puede calcular las segundas aproximaciones, las cuales son:

$$E_1 = 0.3722K, \quad E_3 = -0.0380K, \quad E_5 = -0.0178K, \quad E_7 = -0.0085K.$$

Repitiendo los cálculos otra vez para la tercera aproximación y así sucesivamente para obtener los valores deseados para los coeficientes E_1, E_3, \dots en las series (c), con lo cual se obtendrán los momentos flexionantes a lo largo de los bordes sujetos de la losa. El máximo valor absoluto de estos momentos esta a la mitad de los lados del cuadrado.

Con la cuarta de las ecuaciones (p) y tomando este valor:

$$(M_y)_{y=b/2, x=0} = |E_1 - E_3 + E_5 - E_7| = 0.0517qa^2$$

Al substituir los valores de E_1, E_3, \dots en la expresión (d), se obtiene la deflexión producida por los momentos distribuidos a lo largo de los bordes $y=\pm b/2$. Para el centro ($x=y=0$) esta deflexión es:

$$(\omega_1)_{x=y=0} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{m^2 \cosh \alpha_m} = -0.0153 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Duplicando este resultado, y tomando dentro del cálculo la acción de los momentos distribuidos a lo largo de los bordes $x=\pm a/2$, y sumando la deflexión de la losa cuadrada simplemente apoyada (tabla 1) se obtiene para la deflexión en el centro de la losa:

$$(\omega)_{\text{máx.}} = (0.0443 - 0.0306) \frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0137 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (q)$$

Cálculos similares se pueden hacer para cualquier proporción de los lados de una losa rectangular, estos resultados son dados en la tabla 9.

TABLA 9

Deflexiones y momentos flexionantes en una losa rectangular - con carga uniforme y bordes como parte de la estructura.

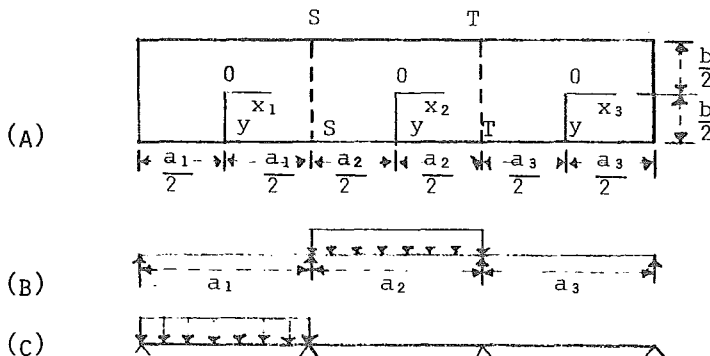
$v = 0.3$

b/a	$(w)_{x=0,y=0}$	$(M_x)_{x=a/2,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=b/2}$	$(M_x)_{x=0,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=0}$
1.0	$0.0138qa^4/Eh^3$	$-0.0513qa^2$	$-0.0513qa^2$		
1.1	$0.0164qa^4/Eh^3$	$-0.0581qa^2$	$-0.0538qa^2$	$0.0264qa^2$	$0.0231qa^2$
1.2	$0.0188qa^4/Eh^3$	$-0.0639qa^2$	$-0.0554qa^2$	$0.0299qa^2$	$0.0228qa^2$
1.3	$0.0209qa^4/Eh^3$	$-0.0687qa^2$	$-0.0563qa^2$	$0.0327qa^2$	$0.0222qa^2$
1.4	$0.0226qa^4/Eh^3$	$-0.0726qa^2$	$-0.0568qa^2$	$0.0349qa^2$	$0.0212qa^2$
1.5	$0.0240qa^4/Eh^3$	$-0.0757qa^2$			
1.6	$0.0251qa^4/Eh^3$	$-0.0780qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0381qa^2$	$0.0193qa^2$
1.7	$0.0260qa^4/Eh^3$	$-0.0799qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0392qa^2$	$0.0182qa^2$
1.8	$0.0267qa^4/Eh^3$	$-0.0812qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0401qa^2$	$0.0174qa^2$
1.9	$0.0272qa^4/Eh^3$	$-0.0822qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0401qa^2$	$0.0165qa^2$
2.0	$0.0277qa^4/Eh^3$	$-0.0829qa^2$	$-0.0571qa^2$		

20.- LOSAS RECTANGULARES CONTINUAS:

Una losa rectangular de ancho (b) y longitud = $a_1 + a_2 + a_3$ apoyada a lo largo de los bordes y también a lo largo de las líneas intermedias SS y TT, como se muestran en la fig. (30), - forma una losa continua simplemente apoyada. La flexión de cada espacio de una losa tipo, puede ser fácilmente investigado al combinar las soluciones conocidas para losas rectangulares simplemente apoyadas y cargadas lateralmente, con estas losas rectangulares dobladas por momentos distribuidos a lo largo de los bordes.

FIG. 30



Considerando el caso simétrico en el cual $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Al centro del espacio esta uniformemente cargado y el espacio del lado esta sin carga Fig. (30b). Considerando el espacio de en medio como una losa rectangular simplemente apoyada y usando la expresión (b) del inciso anterior, se concluye que la pendiente de la superficie de deflexión a lo largo del borde $x_2 = a/2$ es:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{x_2 = a/2} = \frac{2qb^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} \tanh \beta m \right) \quad (a)$$

donde $\beta m = m\pi a/2b$. Debido a la continuidad de la losa, los momentos flexionantes M_x están distribuidos a lo largo de los bordes $x_2 = \pm a/2$. Por simetría los momentos pueden ser representados por la siguiente serie

$$(M_x)_{x_2 = \pm a/2} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (b)$$

La deflexión ω_1 producida por estos momentos pueden ser obtenidos de la ecuación (69) y la correspondiente pendiente a lo largo del borde $x_2 = a/2$.

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)_{x_2 = a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\tanh \beta m + \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} \right) \quad (c)$$

De la condición de continuidad se llega a la suma de las expresiones (a) y (c) que representan la pendiente a lo largo de la misma línea de la superficie de deflexión en el espacio adyacente. Considerando este espacio posterior, como una losa rectangular simplemente apoyada y doblada por los momentos (b), distribuidos a lo largo del borde $x_3 = -a/2$, se encuentra la deflexión correspondiente ω_2 de la losa al usar la ecuación (43) de la cual se tiene:

$$\omega_2 = \frac{b^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \left(\frac{1}{\cosh \beta m} (\beta m \tanh \beta m \cosh \frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b} \sinh \frac{m\pi x_3}{b}) - \frac{1}{\sinh \beta m} (\beta m \coth \beta m \sinh \frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b} \cosh \frac{m\pi x_3}{b}) \right) \quad (d)$$

La pendiente correspondiente a lo largo del borde (x_3) = -a/2 :

$$\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right)_{x_3 = -a/2} = \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{m} (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$\cosh \frac{m\pi y}{b} \left(\tanh \beta m + \coth \beta m + \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} - \frac{\beta m}{\sinh^2 \beta m} \right) \quad (e)$$

La ecuación para calcular los coeficientes E_m es:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)_{x_2 = a/2} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)_{x_2 = a/2} = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right)_{x_3 = -a/2}$$

Entonces esta ecuación domina para cualquier valor de (y) , obteniendo para cada valor de (m) la siguiente ecuación:

$$\frac{2qb^3}{D} \frac{1}{m} \left(\frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} - \tanh \beta m \right) - \frac{b}{2\pi D} \frac{E_m}{m} \left(\tanh \beta m + \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} \right) =$$

$$\frac{b}{4\pi D} \frac{E_m}{m} \left(\tanh \beta m + \coth \beta m + \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} - \frac{\beta m}{\sinh^2 \beta m} \right) \quad (f)$$

De la cual:

$$E_m = \frac{8qb^2}{\pi^3 m^3} \cdot \quad (g)$$

$$\frac{\beta m - \tanh \beta m \cosh^2 \beta m}{3 \tanh \beta m \cosh^2 \beta m + \coth \beta m \cosh^2 \beta m + 3\beta m - \beta m \coth^2 \beta m}$$

Se nota que E_m decrece cuando (m) se incrementa y se aproxima - al valor $-2qb^2/\pi^3 m^3$. Teniendo los coeficientes E_m calculados de (g) se obtendrán los valores de los momentos flexionantes M_x a lo largo de la línea TT de la expresión (b). El valor de este momento en $y=0$, y en la mitad del ancho de la losa es:

$$(M_x)_{x_2 = \pm a/2, y=0} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{m} (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

Tomando como un ejemplo $b=a$, se tendrá $\beta m = m\pi/2$, y la fórmula - (g) dará:

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0.1555, \quad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0.0092,$$

$$E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0.0020, \quad (M_x)_{x_2 = \pm a/2, y=0} = -0.0381qa^2.$$

Si un lado del espacio está cargado uniformemente, como se muestra en la fig. (29) la superficie de deflexión no es mayor, con respecto al eje vertical de simetría y el momento flexionante -

distribuido a lo largo de las líneas SS y TT, no es idéntico, esto será:

$$(Mx)_{x_1 = \frac{a_1}{2}} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi y}{b}$$

$$(Mx)_{x_2 = \frac{a_2}{2}} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} F_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (h)$$

Al calcular los coeficientes E_m y F_m se derivan 2 sistemas de ecuaciones de las condiciones de continuidad en la línea SS y TT. Considerando el espacio cargado y usando las expresiones (a) y (e), se encuentra que la pendiente de la superficie de deflexión en los puntos del apoyo SS, para $a_1 = a_2 = a$ es:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)_{x_1 = a/2} = \frac{2qb^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} - \tanh \beta m \right)$$

$$- \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cosh \frac{m\pi y}{b} (\tanh \beta m + \coth \beta m + \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} - \frac{\beta m}{\sinh^2 \beta m}) \quad (i)$$

Considerando ahora el espacio medio de esta, como una losa rectangular doblada por los momentos Mx distribuidos a lo largo de las líneas SS y TT dada por la serie (h), se llega al usar la ecuación (42).

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)_{x_2 = -a/2} = \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m + F_m) \left(\frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} + \tanh \beta m \right) + (E_m - F_m) \left(\coth \beta m - \frac{\beta m}{\sinh^2 \beta m} \right) \right] \quad (j)$$

De las expresiones (i) y (j) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes E_m y F_m :

$$A_m \frac{8qb}{m} + E_m(B_m + C_m) = -B_m(E_m + F_m) - C_m(E_m - F_m) \quad (k)$$

donde se tiene:

$$A_m = \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} - \tanh \beta m, \quad B_m = - \left(\frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} + \tanh \beta m \right)$$

$$C_m = \frac{\beta m}{\sinh^2 \beta m} - \coth \beta m \quad (l)$$

La pendiente de la superficie de deflexión del espacio medio en la línea apoyada TT, y usando la expresión (j) es:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)_{x_2 = a/2} = -\frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m + F_m) \left(\frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} + \tanh \beta m \right) + (F_m - E_m) \left(\coth \beta m - \frac{\beta m}{\sinh^2 \beta m} \right) \right]$$

Esta pendiente debe ser igual a la pendiente en el espacio adyacente sin carga, la cual es obtenida de la expresión (c) al substituir F_m por E_m . En esta forma se llega al segundo sistema de ecuaciones las cuales, usando la notación (l) pueden ser escritas en la forma siguiente:

$$B_m(E_m + F_m) + C_m(F_m - E_m) = -(B_m + C_m)F_m \quad (m)$$

De esta ecuación se obtiene:

$$F_m = E_m \frac{C_m - B_m}{2(B_m + C_m)} \quad (n)$$

Substituyendo en las ecuaciones (k), se tendrá:

$$E_m = A_m \frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{2(B_m + C_m)}{(C_m - B_m)^2 - 4(B_m + C_m)^2} \quad (o)$$

Substituyendo en cada caso particular para A_m, B_m y C_m su valor numérico, obtenidos de las ecuaciones (e), se encuentran los coeficientes E_m y F_m . De las expresiones (h) se obtienen los momentos flexionantes a lo largo de las líneas SS y TT. Tomando como un ejemplo, $b=a$ y se tiene $\beta_m = \pi m / 2$ y de las ecuaciones (l) se llega a:

$$\begin{array}{lll} A_1 = -0.6677 & B_1 = -1.1667 & C_1 = -0.7936 \\ A_3 = -0.9983 & B_3 = -1.0013 & C_3 = -0.9987 \end{array}$$

Para (m) mayor que 3 se puede tomar con suficiente exactitud:

$$A_m = B_m = C_m = -1$$

Substituyendo estos valores en la ecuación (o)

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0.1720, \quad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3 3^3} 0.2496, \quad E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^3 5^3} 0.2500.$$

El momento a la mitad del apoyo SS es:

$$(M_x)_{x_1=a/2, y=0} = (E_1 - E_3 + E_5 - \dots) = -0.0424qa^2$$

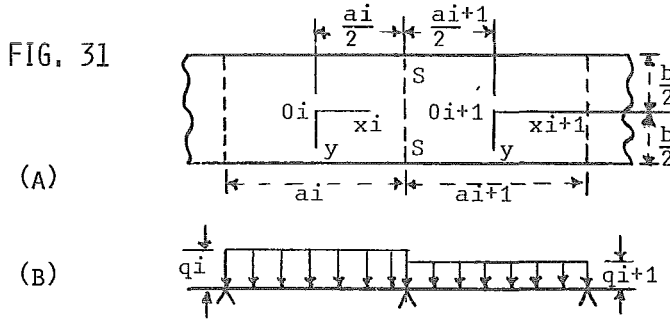
Y para el apoyo TT será:

$$(M_x)_{x_2=a/2, y=0} = (F_1 - F_3 + F_5 - \dots) = 0.0042qa^2$$

Teniendo los momentos flexionantes a lo largo de las líneas de apoyo, las deflexiones en cada espacio pueden ser practicamente obtenidas por superposición en las deflexiones producidas por la carga lateral en las deflexiones debidas a los momentos en los apoyos.

Las ecuaciones obtenidas para los tres espacios se pueden generalizar para cualquier número de espacios o claros.

De esta forma una ecuación similar a las tres ecuaciones de momento en vigas continuas se obtiene al considerar solamente dos partes adyacentes (i) e (i+1) de longitud (ai) y (ai+1), respectivamente. ver fig. (31)



Los valores correspondientes de las funciones (1) para este caso son representadas por A_m^i , B_m^i , C_m^i y A_m^{i+1} , B_m^{i+1} , C_m^{i+1}

Los momentos flexionantes a lo largo de las tres líneas consecutivas de apoyo que pueden ser representadas por las series.

$$M_x^{i-1} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m^{i-1} \cos \frac{m\pi y}{b},$$

$$M_x^i = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m^i \cos \frac{m\pi y}{b},$$

$$M_x^{i+1} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m^{i+1} \cos \frac{m\pi y}{b}.$$

Considerando el espacio (i+1) y usando las expresiones (a) y (j) se obtiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_{i+1}} \right)_{x_{i+1} = -a_{i+1}/2} = - \frac{2q_{i+1}b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^4} A_m^{i+1}$$

$$- \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m} \left[(E_m^i + E_m^{i+1}) B_m^{i+1} - (E_m^{i+1} + E_m^i) C_m^{i+1} \right] \quad (p)$$

En la misma manera al considerar el espacio (i) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)_{x_i = a_i/2} = \frac{2q_i b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^4} A_m^i$$

$$+\frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m^{i-1} + E_m^i) B_m^i + (E_m^i - E_m^{i-1}) C_m^i \right] \quad (q)$$

De las condiciones de continuidad se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_{i+1}} \right)_{x_{i+1} = -a_{i+1}/2} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)_{x_i = a_i/2}$$

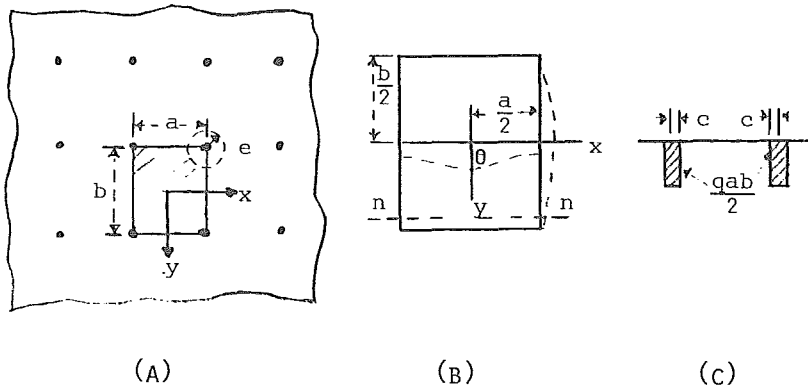
Substituyendo las expresiones (p) y (q) en esta ecuación y observando que se cumple para cualquier valor de (y), en la cual se llega a la siguiente ecuación para calcular: E_m^{i-1} , E_m^i y E_m^{i+1}

$$E_m^{i-1}(B_m^i - C_m^i) + E_m^i(B_m^i + C_m^i + B_m^{i+1} + C_m^{i-1}) + E_m^{i+1}(B_m^{i+1} - C_m^{i+1}) = -\frac{8b^2}{\pi^3 m^3} (q_{i+1} A_m^{i+1} + q_i A_m^i) \quad (44)$$

21.- FLEXIÓN EN LOSAS APOYADAS EN COLUMNAS EQUIDISTANTES.

Si las dimensiones de la losa son mayores en comparación con las distancias (a) y (b) entre las columnas; ver fig. (32) y la carga lateral esta uniformemente distribuida, se puede concluir que la flexión en todos los tableros, los cuales no estan cerca de la frontera son identicos en lo que respecta a las de flexiones en ellos y se puede limitar el problema a un tablero unicamente. Tomando los ejes coordenados paralelos a las columnas y el origen al centro de un tablero, se puede considerar este tablero como una losa rectangular uniformemente cargada con lados (a) y (b). Por simetría se concluye que la superficie de deflexión esta representada por la fig. (32-b) con líneas punteadas.

FIG. 32



La máxima deflexión está en el centro y en las esquinas serán cero. para simplificar el problema se hará un corte seccional con lo cual las dimensiones de las columnas serán chicas y -- pueden ser dejadas como hasta ahora, los momentos se concentran al centro.

Con lo anterior se tendrá una losa rectangular cargada uniformemente apoyada en las esquinas. Por simetría se sabe que la pendiente de la superficie de deflexión en la dirección de la normal a la frontera y la fuerza cortante es cero en todos los puntos a lo largo de los bordes, excepto en las esquinas.

Procediendo como en el caso de una losa simplemente apoyada - (ver inciso 9) y tomando la deflexión total (ω) en la forma de:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (a)$$

donde será:

$$\omega_1 = \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 \quad (b)$$

representa la deflexión de una faja uniformemente cargada sujeta en los extremos $y = \pm b/2$ y cumple la ecuación diferencial (17) así como las condiciones de frontera.

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right)_{x=\pm a/2} = 0, \quad (Qx)_{x=\pm a/2} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad (c)$$

La deflexión ω_2 se toma en la forma de la siguiente serie.

$$\omega_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,..}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

cada término cumple con las condiciones (c). Las funciones Y_m deben ser tomadas para cumplir la ecuación homogénea siguiente:

$$\Delta \Delta \omega_2 = 0 \quad (e)$$

Al hacer () cumplir las condiciones de frontera en los bordes $y = b/2$ en la ecuación (6) y las condiciones de simetría - se cumplen al tomar la serie (d) en la forma:

$$\omega_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,..}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

donde las constantes A_0 , A_m y B_m se determinan de las condiciones de frontera a lo largo del borde $y = b/2$. De la condición concerniente a la pendiente se tiene:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0,$$

Con lo cual facilmente se obtiene:

$$B_m = -A_m \frac{\tanh \alpha m}{\alpha m + \tanh \alpha m} \quad (g)$$

en la cual:

$$\alpha m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (h)$$

Considerando ahora la condición de frontera concierne a la fuerza cortante, se observa que sobre una sección normal nn - fig. (32-b) cerca a la frontera $y=b/2$, la fuerza cortante Q_y es igual a cero en todos los puntos excepto los que están cercanos a la columna, y en estos puntos Q_y debe ser infinitamente grande en orden a transmitir la carga finita $1/2qab$ a la columna fig. (32-c) a lo largo de una distancia infinitamente chica entre $x=a/2-c$ y $x=a/2+c$. Representando Q_y por una serie trigonométrica la cual, por simetría tiene la forma:

$$Q_y = C_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

y observando que

$$Q_y = 0 \quad \text{para } 0 < x < a/2 - c, \quad \text{y que } \int_{a/2-c}^{a/2} Q_y dx = -\frac{qab}{4}$$

Se encuentra por aplicación del método usual de cálculo que:

$$C_0 = -\frac{qab}{2a} = -\frac{P}{2a}$$

y:

$$C_m = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} Q_y \cos \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{P}{a} (-1)^{\frac{m}{2}}$$

donde $P=qab$ es la carga total sobre un tablero. Substituyendo este valor de los coeficientes C_0 y C_m en la serie (i), la condición de frontera requerida toma la siguiente forma:

$$(Q_y)_{y=b/2} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right)_{y=b/2} = -\frac{P}{a} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a} - \frac{P}{2a}.$$

Substituyendo la expresión (a) para (ω) y observando que el segundo término en el parentesis desaparece, una consideración de la condición de frontera $\partial \omega / \partial y = 0$, se obtiene:

$$-D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right)_{y=b/2} = -\frac{P}{a} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

de la cual, usando la expresión (f) se llega a:

$$D \frac{m^3 \pi^3}{a^3} \left[(Am + 3Bm) \sinh \alpha m + Bm \alpha m \cosh \alpha m \right] = \frac{P}{a} (-1)^{\frac{m}{2}} \quad (j)$$

Resolviendo las ecuaciones (g) y (j) para las constantes Am y Bm se obtiene:

$$Am = -\frac{Pa^2}{2m^3 \pi^3 D} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\alpha m + \tanh \alpha m}{\sinh \alpha m \tanh \alpha m}$$

$$Bm = \frac{Pa^2}{2m^3 \pi^3 D} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sinh \alpha m} \quad (k)$$

La deflexión de la losa tomará la forma:

$$\omega = \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 + A_0 + \frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \sinh \alpha m \tanh \alpha m}$$

$$\left| \tanh \alpha m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - (\alpha m + \tanh \alpha m) \cosh \frac{m\pi y}{a} \right| \quad (l)$$

La constante A_0 puede ser determinada de la condición que la deflexión se desaparece en las esquinas dando:

$$(\omega)_{x=a/2, y=b/2} = 0$$

y:

$$A_0 = -\frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha m - \frac{\alpha m + \tanh \alpha m}{\tanh^2 \alpha m} \right) \quad (m)$$

La deflexión en cualquier punto puede ser calculada usando las expresiones (l) y (m). La deflexión máxima esta en el centro, la cual tiene el punto:

$$(\omega)_{x=0, y=0} = \frac{qb^4}{384D} - \frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \alpha m + \tanh \alpha m}{m^3 \sinh \alpha m \tanh \alpha m}$$

$$- \frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha m - \frac{\alpha m + \tanh \alpha m}{\tanh^2 \alpha m} \right) \quad (n)$$

Los valores de esta deflexión calculada para algunos valores de la proporción b/a son dados en la tabla 10. En la cual se observa que para $b > a$ el máximo valor del momento flexionante en el centro no difiere mucho del momento en la mitad de una faja uniformemente cargada de longitud b sujeta en los extremos.

TABLA 10.-

Deflexiones y momentos en el centro de un tablero.

$\nu = 0.3$

$b/a =$	1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.0	∞
$\omega = \alpha \frac{qb^4}{EH^3}$	$\alpha = 0.0634$	0.0467	0.0423	0.0391	0.0368	0.0319	0.0284
$M_x = \beta qb^2$	$\beta = 0.0359$	0.0243	0.0210	0.0186	0.0169	0.0133	0.0125
$M_y = \beta_1 qb$	$\beta_1 = 0.0359$	0.0377	0.0385	0.0392	0.0393	0.0412	0.0417

En los puntos de apoyo hay reacciones concentradas actuando y los momentos calculados de la expresión (1) llegan a ser infinitamente grandes. Al obtener los esfuerzos actuantes en las porciones cerca de las columnas, las dimensiones de la sección transversal de la columna se consideran y empezando con el caso de una columna circular, los cálculos de los momentos flexionantes, al usar la expresión (1) muestran, que en el caso de un tablero cuadrado ($a=b$) los momentos flexionantes en la dirección radial prácticamente desaparecen a lo largo de un círculo de radio $e=0.22a$ fig. (32-a) así que la porción alrededor de la columna y dentro de un círculo esta en la forma de una losa simplemente apoyada. De aquí las condiciones de flexión alrededor de una columna se muestra en la fig. (33). y los momentos flexionantes correspondientes a los centros de las columnas de sección transversal rectangular pueden ser calculados asumiendo que las reacciones son uniformemente distribuida sobre los rectángulos, en la fig. (34), representa la sección transversal de las columnas. En el caso de tableros cuadrados y columnas cuadradas se tiene $c/a=d/b=k$, los momentos en los centros de las columnas y en los centros de los tableros son dados por la siguiente fórmula:

$$(M_x)_{x=y=a/2} = (M_y)_{x=y=a/2} = - \frac{(1 + \nu)qa^2}{4} \left| \frac{(1 - k)(2 - k)}{12} + \frac{1}{\pi^3 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^3 \sinh m\pi} \cdot \sinh \frac{m\pi k}{2} \cosh \frac{m\pi(2 - k)}{2} \sin m\pi k \right| \quad (o)$$

$$(M_x)_{x=y=0} = (M_y)_{x=y=0} = \frac{(1 + \nu)qa^2}{4} \left| \frac{1 - k^2}{12} + \frac{1}{\pi^3 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sinh m\pi k \sin m\pi k}{m^3 \sinh m\pi} \right| \quad (p)$$

FIG. 33

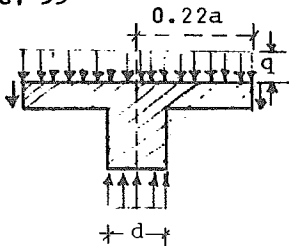
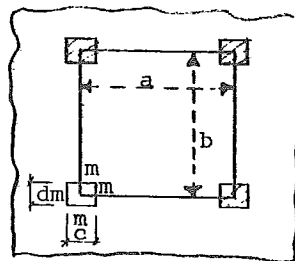


FIG. 34



Los valores de estos momentos, calculados para varios valores de (k) y para $\nu=0.3$ son dados en la tabla 11.

Los momentos en las columnas son mayores que en el tablero central, su magnitud depende de las dimensiones de la sección transversal de las columnas.

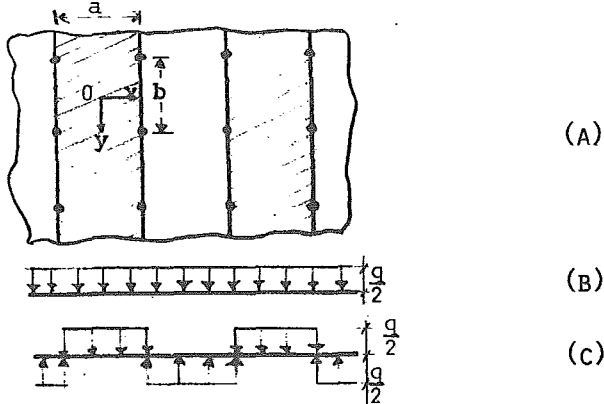
Los momentos en el tablero central permanecen prácticamente constante para el valor arriba de $k=0.2$ de aquí la solución previa, obtenida al asumir que las reacciones son concentradas en las esquinas del tablero, es suficientemente exacta para la porción central del tablero.

TABLA 11.-

Momentos en el centro y en las esquinas de un tablero cuadrado de una losa cargada uniformemente.

$c/a = k$	$k =$	0	0.1	0.3	0.4	0.5
$(M)_{x=y=a/2} = \beta q a^2$	$\beta =$	$-\infty$	-0.206	-0.101	-0.0735	-0.0528
$(M)_{x=y=0} = \beta_1 q a^2$	$\beta_1 =$	0.0359	0.0356	0.0334	0.0313	0.0287
$Q_{\text{máx.}} = \gamma q a$	$\gamma =$	∞	2.73	0.842	0.419

FIG. 35



Las fuerzas cortantes tienen su máximo valor en la mitad de los lados de las columnas, en los puntos (m) de la fig. 34. Este valor, para el caso de tableros cuadrados, dependen del valor de la proporción k y puede ser representado por la fórmula $Q = \gamma q a^2$. Algunos valores del factor γ son dados en la tabla 11.

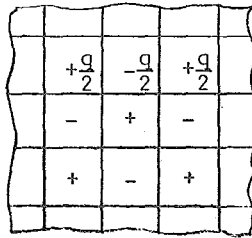
Cargando la losa uniformemente produce una condición desfavorable en la columna. Al dar el máximo momento flexionante en el centro del tablero, la carga debe ser distribuida como se muestra en la fig. (35-c), por áreas. La solución para este caso se obtiene por combinación de carga uniformemente distribuida de intensidad $q/2$ mostrada en la fig. (35-b), alternando el signo en espacios consecutivos. La superficie de deflexión para el caso posterior es evidentemente la misma que para una losa uniformemente cargada de longitud (a) y simplemente apoyada en los extremos, se asume que las columnas no están rigidamente conectadas con la losa y pueden producir solamente reacciones verticales. Tomando como un ejemplo, el caso de tableros cuadrados y usando los valores de la tabla 10 se llega para el centro del tablero ver (fig. 35-a).

$$(\omega)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0.0634 \frac{a^4}{Eh^3} + \frac{5}{384} \frac{q}{2} \frac{a^4}{D} = 0.1028 \frac{qa^4}{Eh^3},$$

$$(M_x)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0.0359a^2 + \frac{1}{16}qa^2 = 0.0805qa^2,$$

$$(M_y)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0.0359a^2 + \frac{1}{16}qa^2 = 0.0367qa^2.$$

FIG. 36



El caso en el cuál un tablero esta cargado uniformemente mientras que los cuatro adyacentes no lo están, se obtiene por superposición sobre una carga uniforme $q/2$ la carga $q/2$, el signo se alterna como se presenta en la fig. (36). En este caso cada tablero esta en las mismas condiciones de una losa simplemente apoyada, y toda la información necesaria que contiene a la deflexión puede ser tomada de la tabla 1.

Tomando el caso de un tablero cuadrado se tendrá para el centro:

$$(\omega)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0.0634 \frac{a^4}{Eh^3} + \frac{1}{2}q \cdot 0.0443 \frac{a^4}{Eh^3} = 0.0539 \frac{qa^4}{Eh^3},$$

$$(M_x) = (M_y)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0.0359a^2 + \frac{1}{2}q \cdot 0.0479a^2 = 0.0419qa^2$$

El caso de flexión de una losa rectangular larga, apoyada solamente por dos hileras de columnas equidistantes y paralelas ver fig. (37), puede también ser resuelta sin mucha dificultad para algunos tipos de carga. Empezando con el caso en el cuál está -doblada por los momentos M_y representados por las series:

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = M_o + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (q)$$

Como no hay carga lateral, la superficie de deflexión puede ser tomada en la forma de la serie siguiente:

$$\begin{aligned} \omega &= A_o + A_1 \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \\ &+ \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \quad (r)$$

Los coeficientes son determinados de las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b/2} &= M_o + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \\ D \left| \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} \right|_{y=\pm b/2} &= 0, \end{aligned} \quad (s)$$

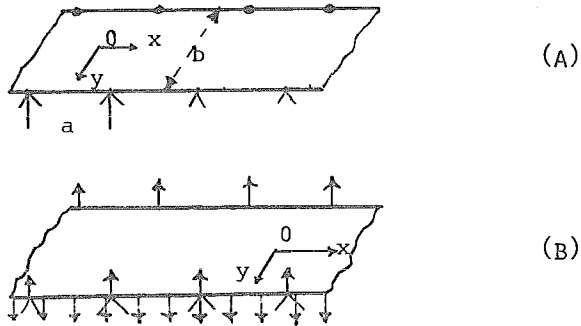
y de la condición que la deflexión se desvanece en las columnas al substituir la serie (r) en las ecuaciones (s), se tiene:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{M_o}{2D} \\ A_m &= -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D} \frac{(1+\nu) \sinh \alpha m - (1-\nu) \alpha m \cosh \alpha m}{(3+\nu)(1-\nu) \sinh \alpha m \cosh \alpha m - \alpha m (1-\nu)^2} \\ B_m &= -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D} \frac{\sinh \alpha m}{(3+\nu) \sinh \alpha m \cosh \alpha m - \alpha m (1-\nu)} \end{aligned} \quad (t)$$

Combinando esta solución con la solución (1), se puede investigar la flexión en la losa mostrada en la fig. (37-a); bajo la acción de una carga uniformemente distribuida. Para esta proposición se calculan los momentos flexionantes M_y de la expresión (o) usando la fórmula (15), se llega a:

$$\begin{aligned} (M_y)_{y=\pm b/2} &= -\frac{qb^2}{12} - \frac{qab}{2\pi} \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m} \left| \frac{1+\nu}{\tanh \alpha m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha m (1-\nu)}{\sinh^2 \alpha m} \right| \cos \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \quad (u)$$

FIG. 37



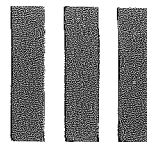
Igualando este momento al momento (q) que toma con respecto al signo negativo, se tienen los valores M_0 y M_m los cuales son - substituidos en las ecuaciones (t), por las constantes A_1 , A_m y B_m en la expresión (r). Sumando la expresión (r) con estos - valores de las constantes a la expresión (1) se obtendrá la solución deseada para la losa uniformemente cargada mostrada en la fig. (37-a).

Combinando esta solución con aquélla para una faja simplemente apoyada y uniformemente cargada de longitud (b) la cual está - dada por la ecuación:

$$\omega = - \frac{q}{24D} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left(\frac{5}{4} b^2 - y^2 \right)$$

Se obtiene la solución para el caso en el cual la losa esta do blada por la carga uniformemente distribuida a lo largo de los bordes de la losa como se mostró en la fig. (37-b).

ANALISIS Y DISEÑO DE LOSAS



ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOSAS

Para la presentación de este capítulo se toma el proyecto de un edificio para oficinas.

Usando una losa común, continua por los cuatro lados y perimetralmente apoyada, ya que es la más crítica. Se analiza la carga y se dimensiona en base al Reglamento de Construcciones del D.D.F., y con ayuda del manual A.C.I., para diferentes tipos.

El comportamiento y modos de fallas se representa en la siguiente gráfica, la cual se elaboró para el centro del claro llevado a la falla, distinguiéndose las siguientes etapas:

a) Una etapa lineal 0-A, en la que el agrietamiento del concreto en la zona de esfuerzos de tensión es despreciable. El agrietamiento del concreto por tensión, representado por el punto A, ocurre bajo cargas relativamente altas. Las cargas de servicio de losas se encuentran generalmente cerca de la carga correspondiente al punto A.

b) La etapa A-B, en la que existe agrietamiento del concreto en la zona de tensión y los esfuerzos en el acero de refuerzo son menores que el límite de fluencia. La transición de la etapa 0-A a la etapa A-B es gradual, puesto que el agrietamiento del concreto se desarrolla paulatinamente desde las zonas de momentos flexionantes máximos hacia las zonas de momentos flexionantes menores. Por la misma razón, la pendiente de la gráfica carga-deflexión en el tramo A-B disminuye poco a poco.

c) La etapa B-C, en la que los esfuerzos en el acero de refuerzo sobrepasan el límite de fluencia. Al igual que el agrietamiento del concreto, la fluencia del refuerzo empieza en las zonas de momentos flexionantes máximos y se propaga paulatinamente hacia las zonas de momentos menores.

d) Por último, la rama descendente C-D, cuya amplitud depende, como en el caso de las vigas, de la rigidez del sistema de aplicación de cargas.

Para ilustrar el avance del agrietamiento y de la fluencia del refuerzo en distintas etapas de carga, se presentan en la fig. (1), las configuraciones de agrietamiento en la cara inferior de una losa cuadrada simplemente apoyada sujeta a carga uniformemente repartida en su cara superior, para distintos valores de la carga aplicada. Puede verse en esta figura que el agrietamiento empieza en el centro de la losa, que es la zona de momentos flexionantes máximos, y avanza --

hacia las esquinas a lo largo de las diagonales. Los análisis elásticos de losas indican que los momentos principales en una losa de este tipo se presentan precisamente en las diagonales. En etapas cercanas a la falla, se forman grietas muy anchas a lo largo de las diagonales, que indican que el acero de refuerzo ha fluido y ha alcanzado grandes deformaciones. Las deformaciones por flexión de losa se concentran en estas líneas que reciben el nombre de líneas de fluencia, mientras que las deformaciones en las zonas comprendidas entre las líneas de fluencia son, en comparación, muy pequeñas.

La amplitud de las zonas de comportamiento inelástico depende del porcentaje de refuerzo de flexión. Generalmente, este porcentaje es pequeño en losas, por lo que tales elementos resultan subreforzados y las zonas inelásticas son amplias.

En la descripción anterior del comportamiento, se ha supuesto que la falla ocurre por flexión y que no hay efecto de cortante. En el caso de losas apoyadas directamente sobre columnas y de losas sujetas a cargas concentradas altas es frecuente que la falla ocurra en cortante por penetración antes de que se alcance la resistencia en flexión. Este tipo de falla se planteó anteriormente.

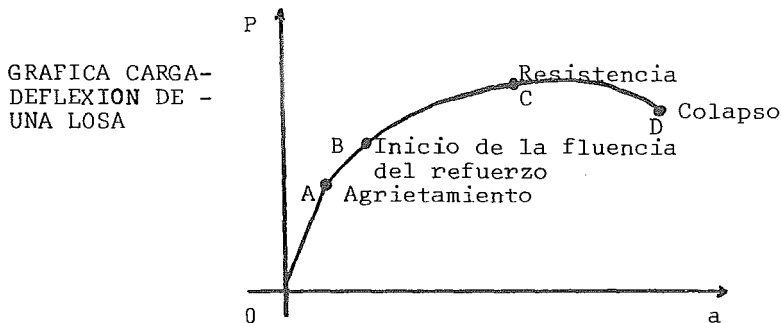
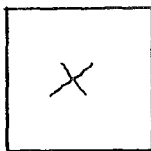


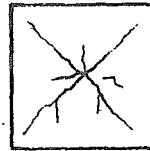
FIG. 1



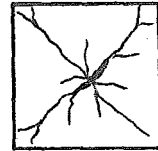
a) Carga Pequeña



b) Carga Regular



c) Carga Alta



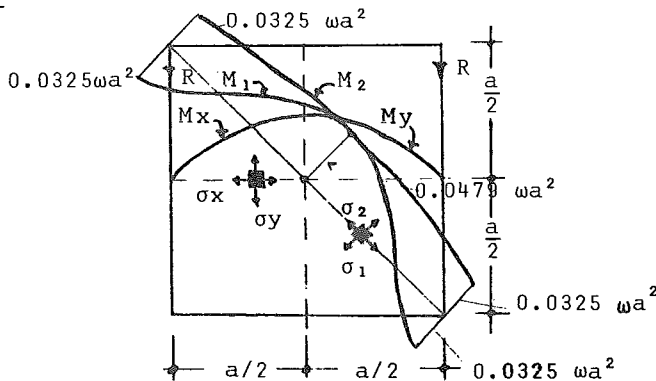
d) Carga de Falla

Para el análisis de losas en las que se conoce la carga aplicada, la cual produce acciones internas se determinará aplicando los métodos de la teoría de la elasticidad. Los resultados así obtenidos solo son válidos en la etapa de comportamiento lineal, o sea para cargas cuya magnitud es del orden de la correspondiente al punto A de la gráfica. Además los resultados son solo aproximados aún para estas cargas, debido a que el concreto reforzado no cumple con las características lineales, homogéneas y elásticos.

En base a las ecuaciones de equilibrio y de deflexión para una losa obtenidas en el Capítulo II y cumpliendo las condiciones de frontera se tendrá por ejemplo, para una losa con borde empotrado, la deflexión y la rotación serán nulas en el borde.

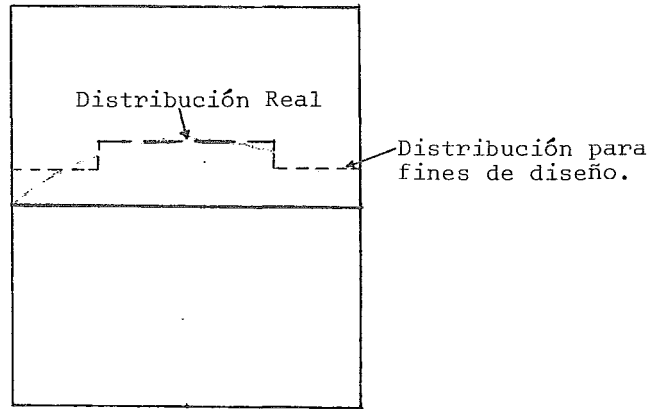
La distribución de momentos flexionantes de una losa cuadrada libremente apoyada sujeta a carga uniformemente distribuida en esta losa los momentos máximos se presentan a lo largo de las diagonales, lo cual explica la forma de su mecanismo de colapso, ya que el acero de refuerzo fluye siguiendo los ejes de momentos máximos. (ver fig. 2)

FIG. 2



Debido a que no resulta práctico distribuir el acero de refuerzo siguiendo la distribución teórica, es usual considerar 2 ó 3 zonas de momentos constantes. Por ejemplo, la distribución teórica a lo largo del eje central de la figura 2, puede simplificarse como se muestra en la figura 3. De esta forma, se logran separaciones uniformes del acero de refuerzo en zonas amplias de la losa.

FIG. 3



Para dimensionar por el método del Reglamento del Distrito Federal, se obtienen los momentos flexionantes utilizando los coeficientes que se presentan en la tabla 1. Para las franjas extremas se puede multiplicar el coeficiente por 0.60

El caso I, es para una losa colada monolíticamente con sus apoyos.

El caso II, es para una losa no colada monolíticamente con sus apoyos.

El coeficiente multiplicado por $10^{-4} \omega a^2$, da momentos por unidad de ancho.

La tabla 2 corresponde a los coeficientes para el método 2 del A.C.I.

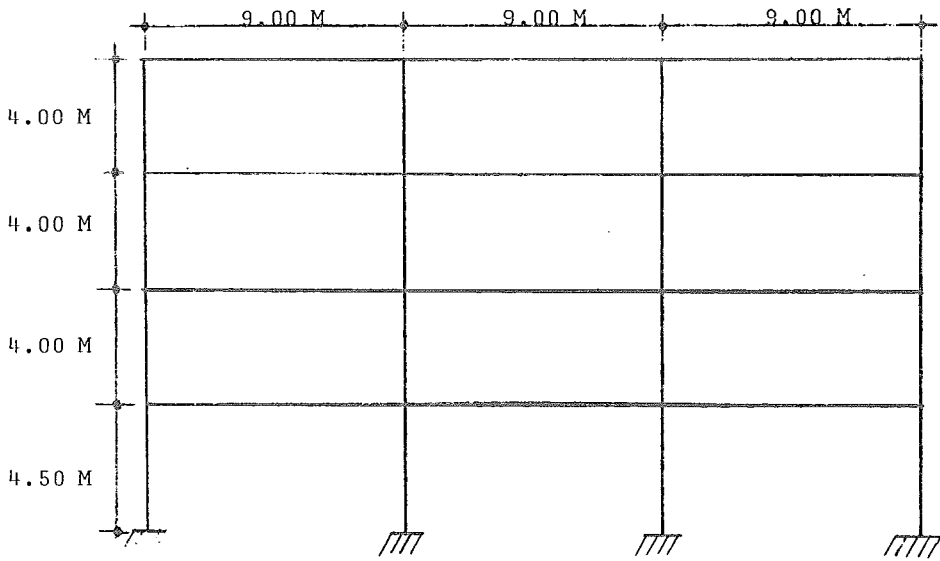
TABLA 1

Tablero	Momento	Claro	Relación de lados corto a largo, $m=a_1/a_2$															
			0		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0			
			I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II		
Interior Todos los bordes -- continuos	Negativo en interiores	Corto	998	1018	553	565	489	498	432	438	381	387	333	338	288	292		
		Largo	516	544	409	431	391	412	371	388	347	361	320	330	288	292		
	Positivo	Corto	630	688	312	322	268	276	228	236	192	199	158	164	126	130		
		Largo	175	181	139	144	134	139	130	135	128	133	127	131	126	130		
De borde Un lado - corto dis- continuo	Negativo en interiores	Corto	998	1018	568	594	506	533	451	478	403	431	357	388	315	346		
		Largo	516	544	409	431	391	412	372	392	350	369	326	341	297	311		
	Positivo	Corto	630	688	329	356	292	306	240	261	202	219	167	181	133	144		
		Largo	179	187	142	149	137	143	133	140	131	137	129	136	129	135		
De borde Un lado - largo dis- continuo	Negativo en interiores	Corto	1060	1143	583	624	514	548	453	481	397	420	346	364	297	311		
		Largo	587	687	465	545	442	513	411	470	379	424	317	384	315	346		
	Positivo	Corto	651	0	362	0	321	0	283	0	250	0	219	0	190	0		
		Largo	751	912	334	366	285	312	241	263	202	218	164	175	129	135		
Esquina Dos lados adyacen- tes dis- continuos	Negativo en interiores	Corto	1060	1143	598	653	530	582	471	520	419	464	371	412	324	364		
		Largo	600	713	475	564	455	541	429	506	394	457	360	410	324	364		
	Positivo	Corto	651	0	362	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0		
		Largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0		
Positivo	Corto	751	912	358	416	306	354	259	298	216	247	176	199	137	153			
	Largo	191	212	152	168	146	163	142	158	140	156	138	154	137	153			

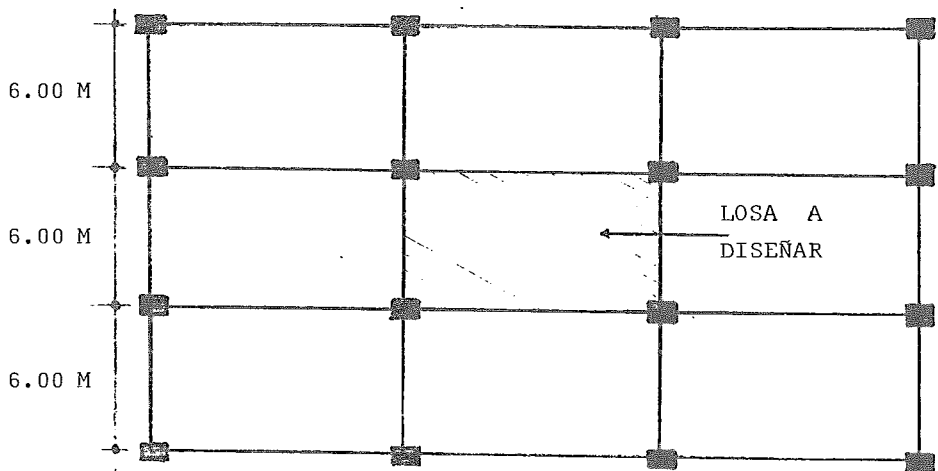
TABLA 2

COEFICIENTES DE MOMENTO PARA EL METODO 2 DEL A. C. I.

Momentos	CLARO CORTO						CLARO LARGO. Todos los valores de m.
	Valores de m.						
	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5 y menos	
Caso 1.- Continuidad en cuatro lados. Momento Extremo. Continuo.	0.033	0.040	0.048	0.055	0.063	0.083	0.033
Ext. discontinuo	-	-	-	-	-	-	-
Mom. positivo en	0.025	0.030	0.036	0.041	0.047	0.062	0.025
Caso 2.- Un - borde discontinuo.	0.041 0.021 0.031	0.048 0.024 0.036	0.055 0.027 0.041	0.062 0.031 0.047	0.069 0.035 0.052	0.085 0.042 0.064	0.041 0.021 0.031
Caso 3.- Dos - bordes discontinuos.	0.049 0.025 0.037	0.057 0.028 0.043	0.064 0.032 0.048	0.071 0.036 0.054	0.078 0.039 0.059	0.090 0.045 0.068	0.049 0.025 0.037
Caso 4.- Tres bordes discontinuos.	0.058 0.029 0.044	0.066 0.033 0.050	0.074 0.037 0.056	0.082 0.041 0.062	0.090 0.045 0.068	0.098 0.049 0.074	0.058 0.029 0.044
Caso 5.- Cuatro bordes discontinuos.	- 0.033 0.050	- 0.038 0.057	- 0.043 0.064	- 0.047 0.072	- 0.053 0.080	- 0.055 0.083	- 0.033 0.050



ELEVACION



PLANTA TIPO

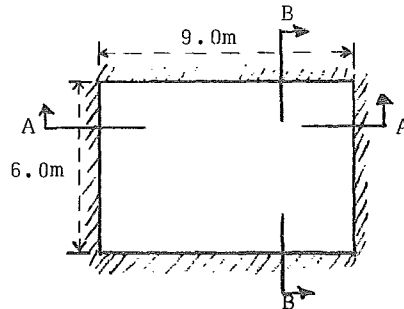
IA. PROPOSICIÓN

LOSA MACIZA

Se propone una losa maciza de un nivel intermedio y con todos los bordes continuos, con un peralte de 15 cm. propuesto. La cual se analizará y diseñará en base al reglamento de construcciones del Departamento del Distrito Federal, considerando el caso en el cual es colada monolíticamente con sus apoyos y enviando los coeficientes de la tabla 1. Así como las especificaciones de normas ACI-318-63 (Método 2).

Datos:

$f'c = 200 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ A.R.}$
 Claro corto = 6.00 mts.
 Claro largo = 9.00 mts.
 $a_1 = 5.70 \text{ mts.}$
 $a_2 = 8.70 \text{ mts.}$



1) Análisis de carga

Piso de granito de 40 x 40	65 Kg/m ²
Firme de concreto 1.0 x 1.0 x 0.03 x 1600	48 Kg/m ²
Plafón	60 Kg/m ²
Peso propio de losa 1.0 x 1.0 x 0.15 x 2400	360 Kg/m ²
Incremento por reglamento	20 Kg/m ²
Carga muerta	553 Kg/m ²
Por reglamento D.D.F. Carga viva	250 Kg/m ²
	803 Kg/m ²

Para diseño se toma la carga (ω) = 800 Kg/m²

2) Diseño

Relación de claros libres

$$m = \frac{a_1}{a_2} = \frac{5.7}{8.7} = 0.65 \quad (\text{como el valor de } m \text{ esta entre } 0.6 \text{ y } 0.7 \text{ se hará una iteración para } \alpha)$$

α = coeficiente de momento

ω = carga total de diseño

M_{ri} = momento resistente

Se procede a llenar la siguiente tabla una vez obtenidas las iteraciones para α .

Se revisa el peralte de la losa propuesta en la siguiente forma:

$$h = \frac{\text{Perímetro efectivo}}{200} = \frac{(570 + 870)2}{200} = 14.4 \text{ cm.} \quad \begin{array}{l} h = 15 \text{ cm.} \\ d = 12 \text{ cm.} \end{array}$$

Momento	Claro	α_i	M_{ri} (k-m)	Q (k-cm)	ω	ρ	$\frac{A_s}{m}$ $\frac{\text{cm}^2}{m}$	Sep. para Nº 3
Negativo en bordes Interiores	Corto	0.0460	1.325	0.0460	0.046	0.0023	2.76	25.72cm
	Largo	0.0381	1.097	0.0381	0.038	0.0019 <0.002	2.4	29.58cm
Positivo	Corto	0.0248	0.714	0.0248	0.024	0.0012 <0.002	2.4	29.58cm
	Largo	0.0132	0.380	0.0132	0.013	0.0065 <0.002	2.4	29.58cm

$$M_{ri} = \alpha_i \omega a_i^2 = 6.0^2 \times 0.8 \times \alpha_i = 28.8 \alpha_i$$

$$Q = \frac{M_{ri}}{b d^2 f'_c} = \frac{M_{ri}}{100 \times 12^2 \times 200} 10^5$$

ω = Se saca de la gráfrica para diseño por flexión

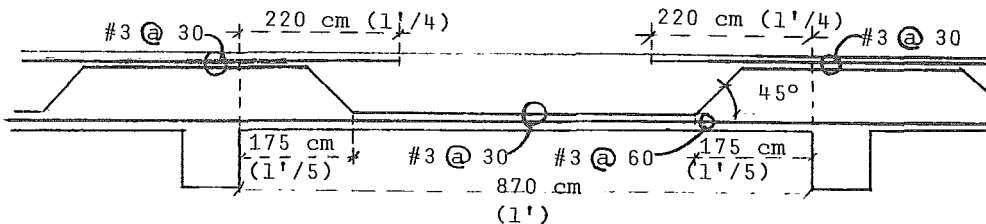
$$\rho_{min} = 0.002 = \omega \frac{f'_c}{f_y}$$

$$A_s = \rho b d$$

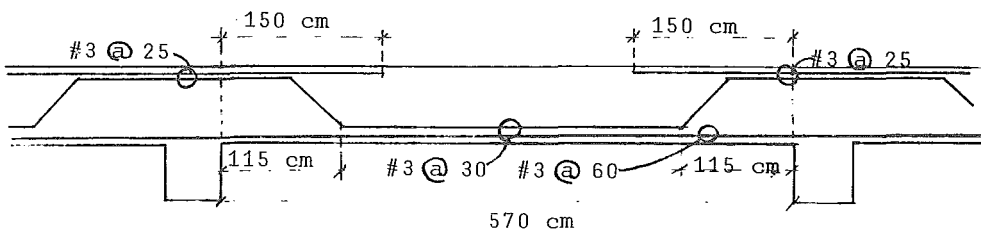
$$\text{Sep.} = \frac{100 A_b}{A_s} \quad \text{Sep. máx} = 3h = 45 \text{cm.}$$

$$A_b = \text{área de una varilla (para el Nº 3} = 0.71 \text{ cm}^2)$$

DETALLE DE ARMADO



CORTE A - A



CORTE B - B

Revisión por cortante:

$$\begin{aligned} V_r &= \left(\frac{a_1}{2} - d \right) \omega \\ &= \left(\frac{5.7}{2} - 0.12 \right) 0.8 = 2.1844 \text{ ton.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_c &= v_c b d = 0.5 \sqrt{f'_c} b d = 0.5 \sqrt{200} \times 100 \times 12 \\ &= 8,485 \text{ Kg.} = 8.485 \text{ ton.} \end{aligned}$$

$V_r < V_c$ con lo cual si pasa.

2A. PROPOSICIÓN

LOSA RETICULAR TIPO I

Datos:

$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ A.R.}$
 claro corto (B) = 6.0mts.
 claro largo (L) = 9.0mts.

Se diseñará en base al método #2 del ACI-318-63

1) Análisis de carga

Piso de granito de 40 x 40	65.00 Kg/m ²
Firme 1.0 x 1.0 x 0.03 x 1600	48.00 Kg/m ²
Yeso o tirol 1.0 x 1.0 x 0.01 x 1600	26.00 Kg/m ²
Zona de compresión 1.0 x 1.0 x 0.05 x 2400	120.00 Kg/m ²
Nervaduras 1.85 x 0.15 x 0.40 x 2400	266.40 Kg/m ²
Incremento por reglamento	20.00 Kg/m ²
Carga Muerta	535.40 Kg/m ²
Carga Viva	250.00 Kg/m ²
	<u>785.40 Kg/m²</u>

Para diseño se toma la carga (w) = 800 Kg/m²

2) Diseño

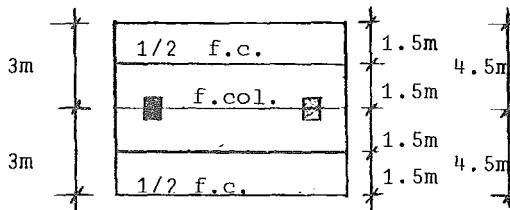
$$\text{Franjas centrales } \frac{L}{2} = \frac{9}{2} = 4.50\text{m}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{6}{2} = 3.00\text{m}$$

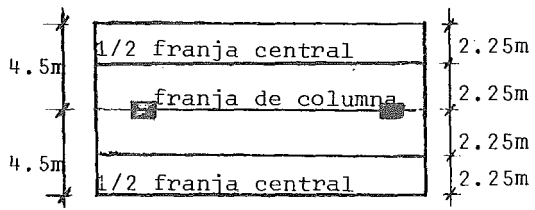
$$\text{Franjas de columnas } \frac{L}{4} = \frac{9}{4} = 2.25\text{m}$$

$$\frac{B}{4} = \frac{6}{4} = 1.50\text{m}$$

C O R T O



L A R G O



a) Dimensiones propuestas

Casetones de 60 x 60 x 40 cm.
Nervadura de 15 x 45

b) La obtención de momentos en base a la tabla del ACI para coeficientes del método 2, se tiene por interpolación los coeficientes, ya que se encuentra la relación (m) entre 0.6 y 0.7

$$m = \frac{B}{L} = \frac{6}{9} = 0.67$$

Momento	C. Corto	C. Largo
Extremo continuo	0.0574	0.033
Positivo	0.0428	0.025

0.033	0.0428	0.025	0.0574	0.033
	0.0574			

Usando la siguiente fórmula para los momentos, se tendrá:

$$M = C \omega B^2$$

C = Coeficiente de momento tabulado.
 ω = Carga de diseño
 B = Claro menor

Claro largo $M (-) = 0.033 \times 800 \times 6^2 = 950.4 \text{ Kg} - \text{m}$
 $M (+) = 0.025 \times 800 \times 6^2 = 720 \text{ Kg} - \text{m}$

Claro corto $M (-) = 0.0574 \times 800 \times 6^2 = 1,653.12 \text{ Kg} - \text{m}$
 $M (+) = 0.0428 \times 800 \times 6^2 = 1,232.64 \text{ Kg} - \text{m}$

c) Obtención del peralte:

$$M_{\text{máx.}} = 1,653.12 \text{ Kg} - \text{m} = 165,312 \text{ Kg} - \text{cm.}$$

$$d = \frac{M}{k b} = \frac{165312}{15.94 \times 15} = 26.29 \text{ cm.}$$

peralte total = $d + \text{rec.} + 5 \text{ cm.}$ (por especificación) = h
 $26.29 + 3 + 5 = 34.29 \text{ cm.}$

Comparando con la propuesta se tiene $34 < 45$, con lo cual si pasa.

d) Areas de Acero.

$$A_s = \frac{M}{f_s j d} = \frac{M}{2400 \times 0.872 \times 40} = \frac{M}{83712} = 0.000012 M$$

$$f_s = 0.6 f_y = 2400 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Claro largo } A_s (-) &= 0.000012 \times 95040 = 1.14 \text{ cm}^2 \\ A_s (+) &= 0.000012 \times 72000 = 0.86 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Claro corto } A_s (-) &= 0.000012 \times 165312 = 1.97 \text{ cm}^2 \\ A_s (+) &= 0.000012 \times 123264 = 1.47 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

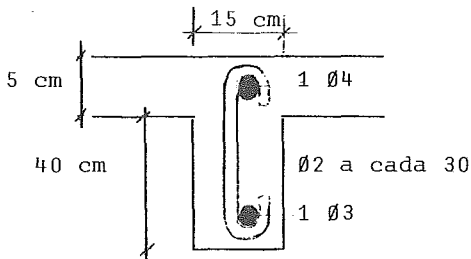
El acero por nervadura será:

$$\begin{aligned} \text{Claro largo } A_s/\text{nervadura} &= 1.14/1.3 = 0.88 \text{ cm}^2 \\ &= 0.86/1.3 = 0.66 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

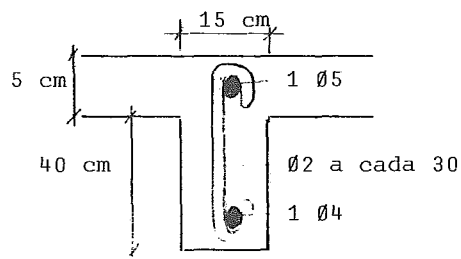
$$\begin{aligned} \text{Claro corto } A_s/\text{nervadura} &= 1.97/1.3 = 1.52 \text{ cm}^2 \\ &= 1.47/1.3 = 1.13 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Se colocan ganchos o estribos de $\emptyset 1/4''$ a cada 30 cm. por especificación.

CLARO LARGO



CLARO CORTO



e) Verificación de la zona maciza por cortante perimetral.

Carga sobre la columna

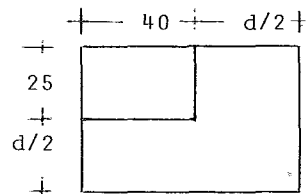
$$P_{\text{col}} = 3.0 \times 4.50 \times 800 = 10,800.00 \text{ Kg.}$$

Esfuerzo cortante perimetral

$$v_{\text{per}} = \frac{P}{l d} = \frac{10800}{105 \times 40} = 2.57 \text{ Kg/cm}^2$$

l = longitud perimetral de columna

$$l = 40 + 25 + 40 = 105 \text{ cm.}$$



Cortante admisible

$$v \text{ admisible} = FR \sqrt{f^*c}$$

$$f^*c = 0.8 f'c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ Kg/cm}^2$$

FR = 0.8 (factor de reducción)

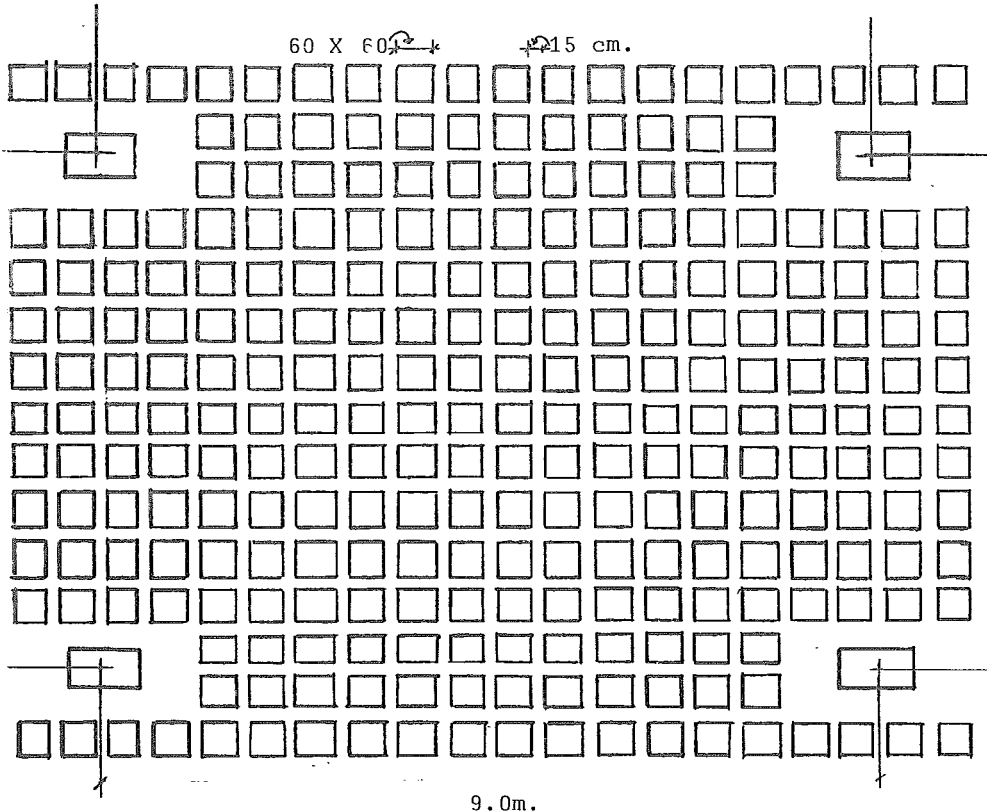
$$v \text{ ad} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ Kg/cm}^2$$

v permisible ó perimetral < v admisible.

Por lo tanto no necesita estribos pero se pondrá por especificación a cada 30 cm.

DISTRIBUCION DE CASETONES.

EJES DE COLUMNAS



TIPO II

El diseño se hará en base al Reglamento de Construcciones del D.D.F.

En base a los momentos obtenidos en el análisis de la losa maciza se tiene:

Claro Largo = M (-) = 1.097 ton-m
 M (+) = 0.380 ton-m

Claro Corto = M (-) = 1.325 ton-m
 M (+) = 0.714 ton-m

Sección propuesta b = 15 cm.
 d = 40 cm.

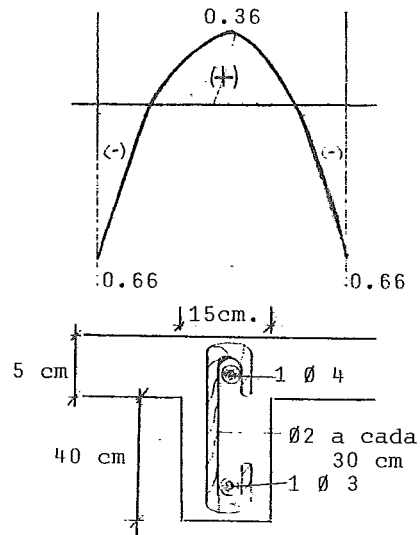
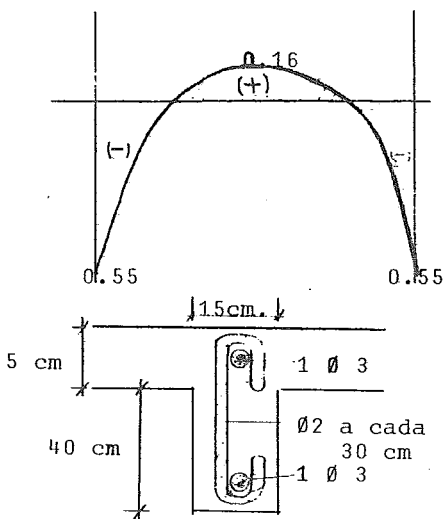
A los momentos anteriores se les divide entre dos.

Claro	Momento	$Q = \frac{1.8 M r_i}{b d^2 f'_c} 10^5$	ω	$\rho = \omega \frac{f'_c}{f_y}$	As cm ² /m	Ø
Largo	0.55t-m	0.0206	0.021	0.0011	0.66	3
	0.16	0.006	0.010	0.0005	0.30	3
Corto	0.66	0.0248	0.025	0.0013	0.78	4
	0.36	0.0135	0.015	0.0008	0.48	3

Diagrama de Momento:

Claro Largo

Claro Corto



N. 0028620

3A. PROPOSICIÓN LOSA PREESFORZADA.

Datos:

lado corto = 6.0 m

lado largo = 9.0 m

$f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$

$f_c = 0.45 f'c = 157.5 \text{ Kg/cm}^2$

$f_s = 10,000 \text{ Kg/cm}^2$

Peso volumétrico concreto (P_v) = $2400 \text{ Kg/m}^3 = 0.0024 \text{ Kg/cm}^3$

K = relación entre el preesfuerzo efectivo e inicial = 0.90

$\omega = 450 \text{ Kg/m}^2 = 0.045 \text{ Kg/cm}^2$

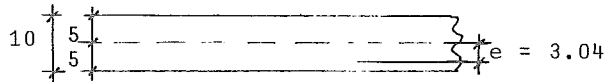
1) Determinación del peralte.

$$h = \frac{6\omega l^2}{8f_c} = \frac{6 \times 0.045 \times 600^2}{8 \times 157.5} = 8.78 \text{ cm.}$$

$$h_{\text{real}} = \frac{h}{K} = \frac{8.78}{0.90} = 9.75 \approx 10 \text{ cm.}$$

2) Excentricidad del preesfuerzo

$$e = \frac{P_v l^2}{4f_c} + \frac{h}{6} = \frac{0.0024 \times 600^2}{4 \times 157.5} + \frac{10}{6} = 3.04 \text{ cm}$$



3) Determinación de la fuerza preesforzante inicial (F_0)

$$F_0 = \frac{f_c A}{2} \quad A = 100 h_{\text{real}}$$

$$= \frac{157.5 \times 1000}{2} = 78,750 \text{ kg.}$$

4) Determinación de la fuerza preesforzante efectiva.

$$F = F_0 K = 78,750 \times 0.90 = 70,875 \text{ Kg.}$$

5) Area de acero necesaria.

$$A_s = \frac{F}{f_s} = \frac{70,875}{10,000} = 7.09 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Usando cables de 1/2" ($A = 1.27 \text{ cm}^2$)

$$N^{\circ} \text{ de cables} = \frac{7.09}{1.27} = 5.58/\text{ml.}$$

$$\text{Separación} = \frac{100}{5.58} = 17.92 \approx 18 \text{ cm.}$$

6) En el sentido largo, se pondrá acero por temperatura.

$$A_{st} = 0.003 A_c$$

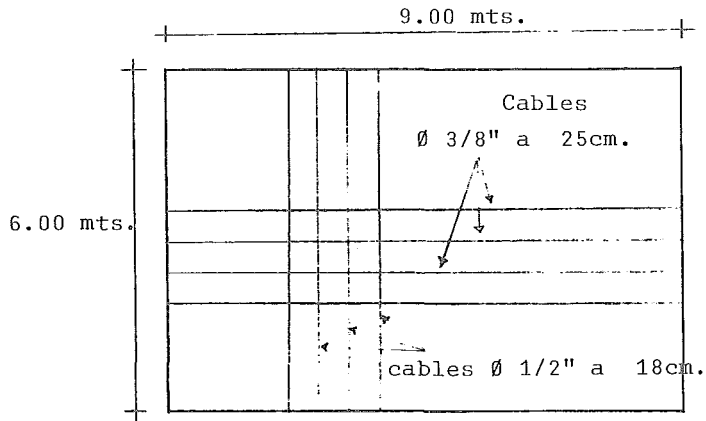
$$A_c = \text{Area de concreto} = 10 \times 100 = 1000 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = 0.003 \times 1000 = 3 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Usando cables de $\emptyset 3/8''$ ($A = 0.71 \text{ cm}^2$)

$$\text{N}^\circ \text{ de cables} = \frac{3.0}{0.71} = 4.23$$

$$\text{Separación} = \frac{100}{4.23} = 23.6 \approx 25 \text{ cm.}$$

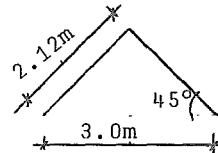


4A. PROPOSICIÓN LOSAS PLEGADAS TIPO A

Para este tipo de losas se analizarán como si fueran de azotea ya que es común su uso en esta forma, con lo cual se diseñará para toda la planta.

Datos:

Lado mayor = 27.0 m.
 $f'c = 200.0 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4000.0 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_s = 0.6 f_y = 2400.0 \text{ kg/cm}^2$
 sección = 2.12 por 3.0 m.



Análisis de carga.

Peso de losa = $1.0 \times 1.0 \times 0.1 \times 2400.0$	= 240.0 Kg/m ²
Impermeabilizante	= 10.0 Kg/m ²
Por reglamento	= 20.0 Kg/m ²
Yeso o tirol	= 16.0 Kg/m ²
	<hr/>
+ Carga Muerta	286.0 Kg/m ²
+ Carga Viva	100.0 Kg/m ²
Carga Total (ω)	<hr/>
	386.0 Kg/m ²

Carga para diseño (ω) = 400.0 Kg/m²

1.- Sentido transversal.

Proyección de la carga:

$\omega \cos \alpha = 400 \times \cos 45^\circ = 400 \times 0.7071 = 282.84 \text{ Kg/m}^2$

Como se toma una franja unitaria se considera 285 Kg/m²

a) Momentos negativos.

$$M = \frac{\omega \cos \alpha l^2}{12} = \frac{285 \times 2.12^2}{12} = 106.74 \text{ Kg-m}$$

Momentos positivos.

$$M = \frac{\omega \cos \alpha l^2}{24} = \frac{285 \times 2.12^2}{24} = 53.37 \text{ Kg-m}$$

b) Determinación del espesor

$$d = \frac{M}{k \cdot b} = \frac{10674}{15.94 \times 100} = 2.587 \text{ cm}$$

Por reglamento se adoptará $d = 6 \text{ cm.}$, recubrimiento = 2 cm.
 con lo cual se tendrá un peralte $h = 8 \text{ cm.}$

c) Areas de acero.

$$\text{Negativo} \quad A_s = \frac{M}{f_s \cdot j \cdot d} = \frac{10674}{2400 \times 0.872 \times 6} = 0.85 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Por especificación la separación será de:

$S_{\text{máx.}} = 3h = 3 \times 8 = 24 \text{ cm.}$

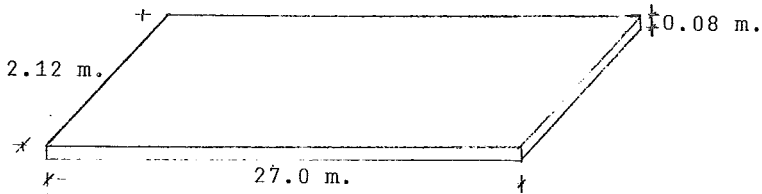
Ø 3/8 a cada 24 cm.

Positivo $As = \frac{5337}{2400 \times 0.872 \times 6} = 0.425 \text{ cm /m.}$

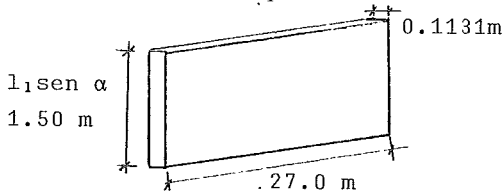
Por especificación se pondrá $\emptyset 3/8"$ a cada 20 cm.

2.- Sentido longitudinal

a) Dimensiones reales



b) Dimensiones equivalentes



$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \text{sen } 45^\circ \\ l_1 \text{ sen } \alpha &= 2.12 \times 0.7071 = \\ &= 1.50 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\frac{h}{\text{sen } \alpha} = \frac{0.08}{0.7071} = 0.1131$$

c) Carga por metro

$$400.0 \times 2.12 = 848 \text{ Kg/m}$$

d) Momento flexionante

$$M = \frac{(\omega l) L^2}{8} = \frac{(400.0 \times 2.12) 27^2}{8} = 77274 \text{ Kg-m}$$

e) Armada

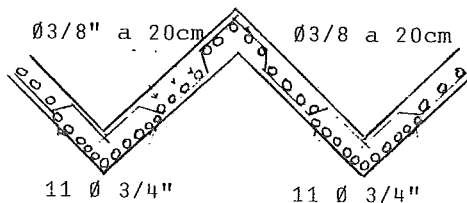
$$As = \frac{M}{f_s \cdot j \cdot d} = \frac{7727400}{2400 \times 0.872 \times 125} = 29.54 \text{ cm}^2$$

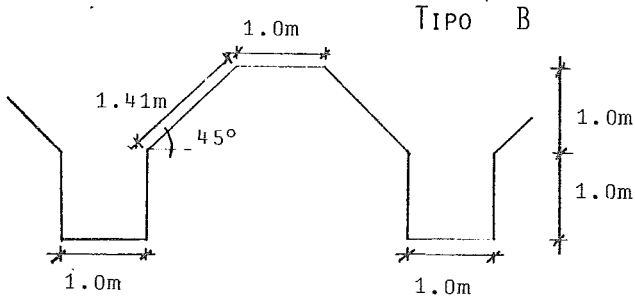
125 cm = Peralte efectivo supuesto

Usando varillas de $\emptyset 3/4"$ ($A = 2.87 \text{ cm}^2$)

$$\# \text{ de varillas} = \frac{29.54}{2.87} = 10.29 \approx 11.00 \text{ pzas.}$$

Estas varillas se pondrán en la zona baja de cada losa, el resto se pondrá $\emptyset 3/8"$ a cada 20 cm. por especificación.





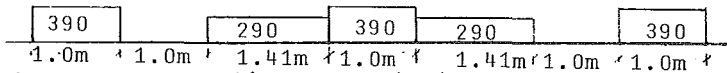
Análisis de Cargas.

$$\omega = 390.0 \text{ Kg/m}^2 \quad (\text{en secciones horizontales})$$

$$\omega = 290.0 \text{ Kg/m}^2 \quad (\text{en secciones inclinadas})$$

1.- Sentido transversal

a) Como viga continua sería



Aplicando la ecuación de continuidad:

$$M = \frac{\omega l_2^2}{12} \cdot \frac{1 + (l_1/l_2)^3 \cos \alpha}{1 + (l_1/l_2)} = \frac{390 \times 1^2}{12} \cdot \frac{1 + (1.41/1)^3 \cos 45^\circ}{1 + (1.41/1)}$$

$$M = -32.5 (1.237) = -40.20 \text{ Kg-m.}$$

Pudiéndose considerar el positivo como la mitad de este valor, ya que no es muy grande la diferencia entre las longitudes de los claros.

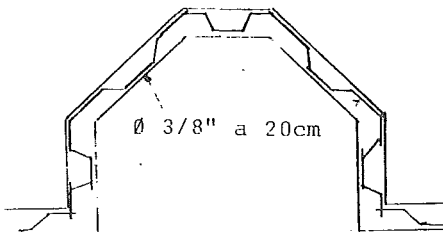
$$M (+) = 20.10 \text{ Kg-m.}$$

b) El espesor de la losa es:

$$d = \frac{M}{k \cdot b} = \frac{4020}{15.90 \times 100} = 1.59 \text{ cm}$$

por reglamento $d = 6 \text{ cm.}$ y el peralte será $h = 8 \text{ cm.}$

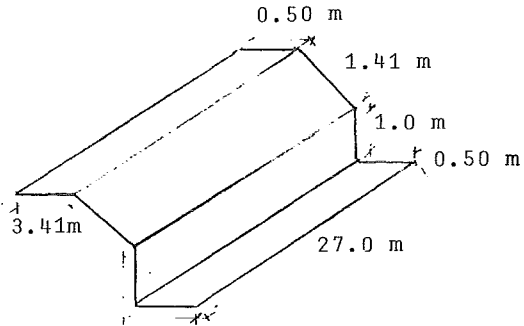
c) El armado tanto positivo como negativo será por lo tanto \emptyset 3/8 a cada 20 cm. por especificación.



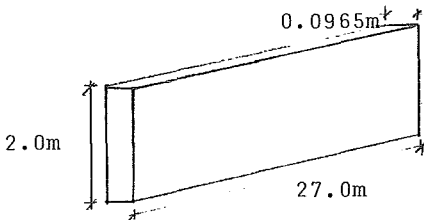
Es más práctico poner dos -
lechos iguales de varillas
corridas, viéndose la necesi-
dad de aumentar un poco el
espesor de la losa.

2.- Sentido longitudinal

a) Dimensiones reales.



b) Dimensiones equivalentes.



$$\frac{h_2+h_1/\text{sen}\alpha}{2} = \frac{0.08+0.08/\text{sen } 45^\circ}{2}$$

$$= 0.0965$$

$$l_1+l_2\text{sen } \alpha = 1.0+1.45 \text{ x sen } 45^\circ$$

$$= 2.0$$

c) Carga por metro.

$$3.41 \times 390 = 1329.9 \text{ Kg-m} \approx 1330 \text{ Kg-m}$$

d) Momento flexionante

$$M = \frac{(\omega l_1) L^2}{8} = \frac{390 \times 3.41 \times 27^2}{8} = 121,187 \text{ Kg-m}$$

e) Armado.

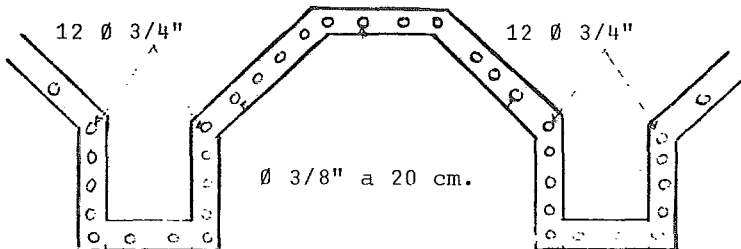
$$A_s = \frac{M}{f_s \cdot j \cdot d} = \frac{12,118,700}{2400 \times 0.872 \times 175} = 33.09 \text{ cm}^2$$

175 cm = Peralte efectivo supuesto.

Usando $\emptyset 3/4''$ ($A=2.87 \text{ cm}^2$)

$$N^\circ \text{ varillas} = \frac{33.09}{2.87} = 11.53 \approx 12 \text{ pzas.}$$

Varillas que se concentran en la zona baja de cada losa, el resto se pondrá $\emptyset 3/8''$ a cada 20 cm. por especificación.



3) Detalle armado del tímpano. Solución "A"

a) Carga sobre el tímpano

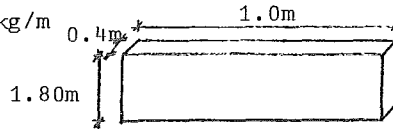
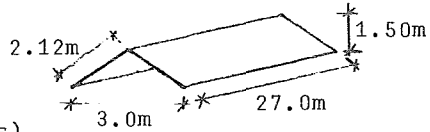
$$\omega = \frac{(212 + 212) \times 10 \times 400}{3} \div 100$$

$$\omega = 5653.3 \text{ Kg-m}$$

Peso propio (dimensiones supuestas).

$$1.8 \times 0.4 \times 1.0 \times 2400 = 1728 \text{ kg/m}$$

$$\omega_{\text{total}}/\text{ml} = 7381.3 \text{ Kg/ml}$$



b) Momentos:

$$\text{Negativo.- } M(-) = \frac{\omega \cdot l^2}{12} = \frac{7381.3 \times 10^2}{12} = 61510.83 \text{ Kg-m}$$

$$\text{Positivo.- } M(+) = 30755.42 \text{ Kg-m}$$

c) Peralte.

$$d = \frac{M}{k \cdot b} = \frac{6151083}{15.94 \times 40} = 98.22 \text{ cm.}$$

Por ser menor a la altura de la losa se adopta:

$$d = 150 \text{ cm.} \quad h = 180 \text{ cm.}$$

d) Armado.

$$\text{Negativo.- } A_s = \frac{M}{f_s \cdot j \cdot d} = \frac{6151083}{2400 \times 0.872 \times 150} = 19.59 \text{ cm}^2$$

$$\text{Positivo.- } A_s = 9.80 \text{ cm}^2$$

Nº varillas usando de \emptyset 1" ($A=5.07 \text{ cm}^2$)

$$\text{Negativo.- } \frac{19.59}{5.07} = 3.86 \approx 4.0 \text{ pzas.}$$

$$\text{Positivo.- } 1.93 \approx 2.0 \text{ pzas.}$$

Para el armado del tímpano para la solución "B" se sigue el mismo procedimiento.

5A. PROPOSICIÓN

LOSAS PREFEBRICADAS

A) LOSAS SIPOREX

1) Análisis de carga útil.

Firme de concreto 1.0 x 1.0 x 0.03 x 1600 =	48 Kg./m ²
Piso de granito de 40 x 40 cm.	= 65 Kg./m ²
Por reglamento	= 20 Kg./m ²
+ Carga Muerta	133 Kg./m ²
Carga Viva	250 Kg./m ²
Carga Util	383 Kg./m ²
Carga útil para diseño	390 Kg/m ²

2) Diseño.

En el diseño se toman en cuenta la carga útil y el claro a cubrir, en este tipo de losas se entra a la tabla del fabricante para encontrar el tipo ideal y que a continuación se presenta:

Carga útil Kg/m ²	Longitudes máximas en cm. Espesor de losas cm.					
	7.5	10	12.5	15	17.5	20
50	250	350	400	475	525	550
100	225	325	375	425	475	525
150	200	300	350	400	450	525
200	175	275	325	400	450	500
250	200	275	350	400	450	500
300	200	250	325	375	425	475
350	175	250	300	350	400	450
400	175	250	275	350	375	425
450	150	225	275	325	375	400
500	150	225	275	325	375	400
550	150	225	250	300	350	375
600	125	200	250	300	325	350
PESO Kg/m ²	49	65	81	98	114	130

Como el módulo que se desea cubrir es de una sección de 9.0 x 6.0 metros, se nota que no es posible cubrirlo por ningún tipo ya que la longitud mayor de la losa siporex es de 5.50 m. Por lo tanto se pondrá una trabe secundaria a la mitad del claro menor (a 3 m. del eje), y con un ancho uniforme de losa se tendrá en la tabla, entrando con la carga se obtiene el espesor y la longitud de la misma. Obteniéndose un espesor de 12.5 cm. y una longitud de --- 3 metros.

Se necesita el siguiente número de losas para cubrir el módulo.

$$\begin{aligned} \text{N}^\circ \text{ de losas para claros de 3.0 mts.} &= \frac{\text{longitud claro mayor}}{\text{longitud losa siporex}} \\ &= \frac{900 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 18 \text{ pzas} \\ \text{N}^\circ \text{ de piezas para el módulo} &= 36 \end{aligned}$$

B) LOSAS DE BOVEDILLAS (AUTOSUSTENTABLE):

DATOS:

- f'c = 400 a 500 Kg/cm² (Vigueta Pretensada)
- f's = 16000 a 20000 Kg/cm²
- f'c = 50 Kg/cm² (Concreto Ligero para Bovedillas)
- f'c = 100 a 200 Kg/cm² (Capa de Compresión)
- f'y = 5000 Kg/cm²
- Malla 66-10 o 1212

1) Análisis de carga.

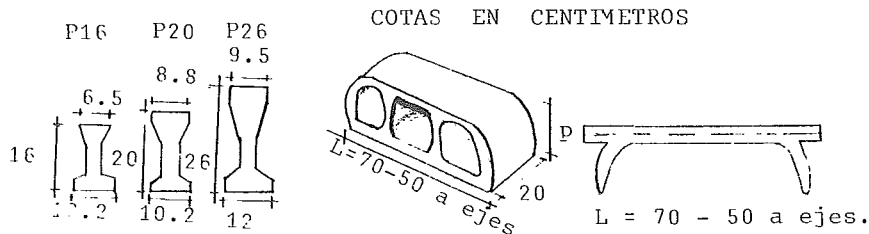
Procediendo como antes se obtiene $\omega = 350 \text{ Kg/m}^2$

2) Para el diseño se entra a la tabla del fabricante, el claro es independiente del diseño.

Entrando con la carga útil y el claro menor (6.0 mts.), se encuentra el peralte admisible de losa terminada.

Sobre carga	CLARO MAXIMO QUE CUBREN EN MTS.				
	Azotea	Entre piso	Estacionamiento	Almacén	Peralte de losa Terminada
Losa Tipo Autosustentable	200 Kg/m ²	350 Kg/m ²	600 Kg/m ²	1000Kg/m ²	
P/16	5.02	4.48	3.89	3.24	19 cm.
P/20	7.00	6.24	5.39	4.44	23 cm.
P/26	8.94	8.05	7.00	6.00	29 cm.

Las dimensiones de la bovedilla y de la vigueta serán:



Para calcular el N° de viguetas y bovedillas, se obtienen al hacer las siguientes ecuaciones.

$$\text{N}^\circ \text{ Viguetas} = \frac{\text{Claro mayor a cubrir (cm)}}{\text{Longitud de bovedillas (cm)}} + 1 = \frac{900}{50} + 1$$

$$= 19 \text{ pzas.}$$

$$\text{N}^\circ \text{ Bovedillas} = \frac{\text{Claro mayor a cubrir}}{\text{Longitud de bovedilla}} \times \frac{\text{Claro menor a cubrir}}{\text{Ancho de la bovedilla}}$$

$$= \frac{900}{50} \times \frac{600}{20} = 540 \text{ pzas.}$$

Para la capa de compresión se usará lo siguiente, en base a los datos del fabricante se pondrá de 3 a 5 cms. de espesor para dar el peralte terminado de 23 a 25 cms. según sea necesario.

c) LOSA EXTRUIDA Ó SPIROLL

1) Análisis de Carga.

$$\text{Carga útil} = 350 \text{ Kg/m}^2$$

2) Diseño.

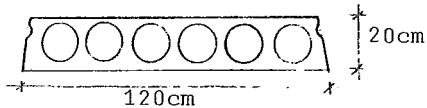
Con la carga sobrepuesta o útil y el claro a cubrir (6 mts.) se encuentra de la tabla del fabricante el tipo de la losa. Se puede también diseñar en base al momento que soporta el centro de la losa obteniéndose al igual el área de acero.

C l a r o (mts.)

Tipo	As	Mu	5	6	7	8	9	10	11	12
46-00	2.064	4.839	478	262	133	48				
18-45	2.417	5.607	590	340	190	92				
75-00	2.604	6.011	648	380	219	114	43			
18-46	2.993	6.832	768	464	281	167	80			
28-45	3.346	7.558	874	537	335	203	113	48		
76-00	3.612	8.101	953	592	375	233	135	68		
48-16	4.232	9.324		716	466	303	192	112	54	
48-26	4.748	10.304		815	539	359	236	148	83	
68-00	5.574	11.811		967	651	444	303	202	128	71
18-00	6.503	13.431			771	537	376	261	177	112
As (cm ²)										
Mu (Kg-m)		Cargas Sobrepuestas (Kg/m ²)								

Colocando una capa de compresión de 5 cm. se aumenta la capacidad en un 40%.

Las dimensiones de cualquier losa extruida son standard,



Se observa en la tabla que dos tipos de losa, el 18-45 y el 75-00 cumplen con las necesidades de carga, ya que la carga se encuentra entre 340 y 380 Kg/m².

Se usará el tipo 18-45 ya que al poner la capa de compresión de un espesor mínimo de 3 a 5 cm. se obtiene una mayor capacidad de carga aproximadamente del 15% al 40%.

Para saber el número de piezas necesarias se procede como antes:

$$\text{N}^{\circ} \text{ de losas} = \frac{\text{Claro a cubrir mayor}}{\text{Longitud de losa}} = \frac{900}{120} = 7.5 \text{ piezas.}$$

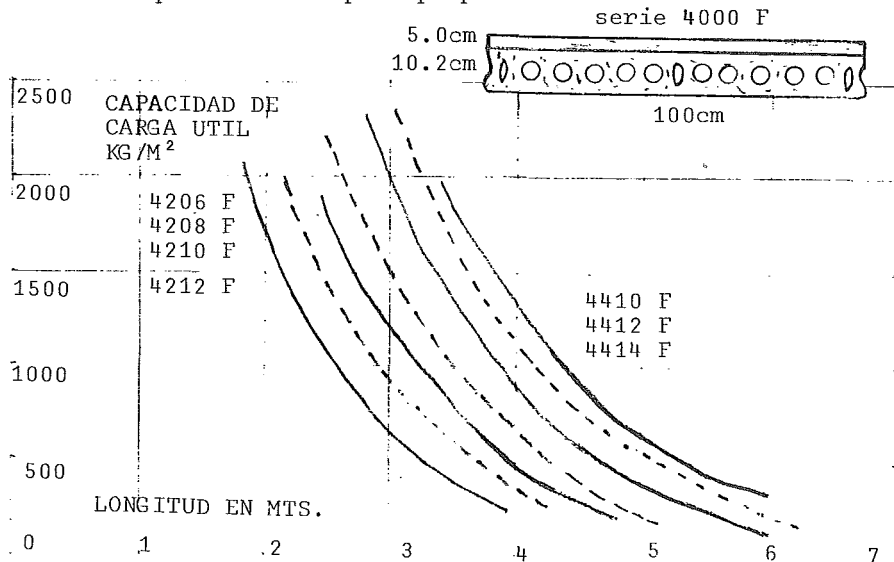
D) LOSA SPANCRETE

1) Análisis de carga.

$$\text{Carga útil} = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

2) Diseño

Con las dimensiones del claro a cubrir y con la carga se entra en la gráfica siguiente, en la cual se encuentra el tipo ideal afectado por el menor peso propio.



Se encuentra en la gráfica el tipo ideal que corresponde a la ---
4414 F, con un peralte de 15.02 cm, incluye el firme de 5 cm.

Para saber el número de piezas se divide el claro entre el ancho de la losa:

$$N^{\circ} \text{ de piezas} = \frac{\text{Claro a cubrir}}{\text{Ancho de losa}} = \frac{900}{100} = 9 \text{ pzas.}$$

Con el junteo longitudinal de la losa y el firme se garantiza el comportamiento similar al de una losa tradicional monolítica.

Las especificaciones del material son:

Concreto presforzado	$f'c = 300 \text{ Kg/cm}^2$	
Acero de presfuerzo	$f's = 17500 \text{ Kg/cm}^2$	
Firme de concreto	$f'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$	(hecho en obra)
Armado del firme con electromalla	66-66 ó similar	

Se pondrá un baston de conexión $\emptyset 5/16$ a la trabe.

PROCEDIMIENTOS CONSTRUCTIVOS

IV

PROCEDIMIENTOS CONSTRUCTIVOS

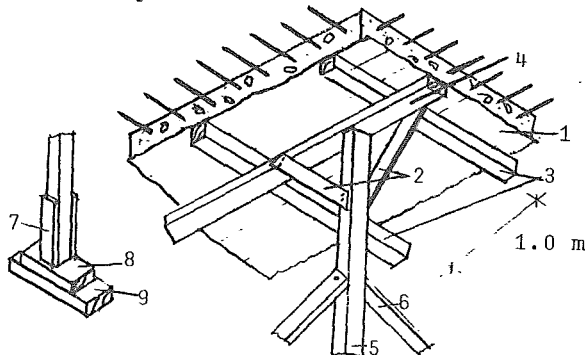
1.- LOSA MACIZA.-

En el proyecto que consiste en un edificio para oficinas de 4 niveles, para esta clase de losa se tendrá que seguir con el siguiente sistema constructivo.

Ya concluida la cimentación y desplantadas las columnas de la P.B., se dejan unas varillas salidas en estas, llamadas barras y se procede al cimbrado, armado y colado de la losa del primer nivel de entrepiso (incluyendo trabes principales y secundarias), esto se puede hacer de un solo ciclo o en secciones todo el primer nivel, lo más conveniente sería colarlo en un solo ciclo pero al considerar el factor económico podría ser en secciones dejando unas juntas de dilatación. Una vez ya terminado de colar y ya que este fraguado el concreto, se procede al armado y cimbrado de las columnas del primer nivel para después colarlas y proceder como antes, una vez ya terminadas. Esto se hace sucesivamente hasta la losa de azotea con la cuál se cierra el edificio; en cada piso se procederá a la colocación de instalaciones sanitarias e hidráulicas, rellenos y firmes en la parte superior de la losa y en el inferior se colocarán los acabados; en la losa de azotea se harán los pretilas para después poner el relleno de tezontle para dar la pendiente necesaria, un entortado con mortero de cemento, cal y arena; una capa ó varias de impermeabilización y por último un enladrillado y escobillado con jabón y alumbre; en las esquinas se pondrá un chaflan con pedacería de tabique, mortero de cemento, cal y arena; puede estar ó no recubierto y escobillado.

Al colar las losas se dejan ductos de poliducto para la instalación eléctrica.

Si por algún motivo no se colara la losa completa, se puede hacer una junta fría para continuar el colado al día siguiente consistiendo en una lechada de concreto expansor ó una lechada con aditivo para concreto (Fester Bond o Adhecon).

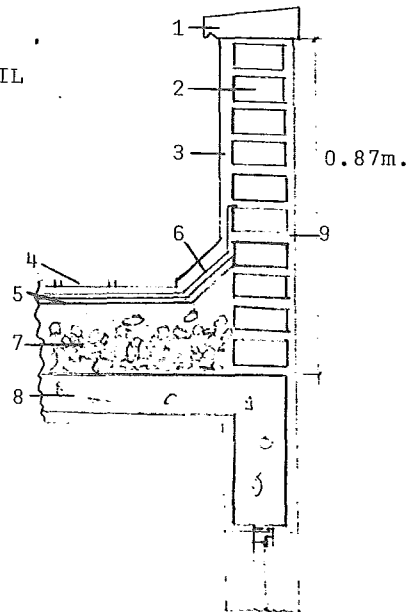


N O M E N C L A T U R A :

- 1.- Tarima o triplay
- 2.- Contravientö de 2" x 4"
- 3.- Polin 4" x 4"
- 4.- Viga madrina 3" x 6"
- 5.- Pie derecho 4" x 4"
- 6.- Contraviento de 2" x 4"
- 7.- Cachete 1 1/2" x 4"
- 8.- Cuña 2" x 6"
- 9.- Viga de Arrastre 4" x 8"

DETALLE DE PRETIL

- 1.- Repison con bota aguas
- 2.- Muro de tabique rojo recocido
- 3.- Aplanado de mezcla
- 4.- Ladrillo rojo recocido
- 5.- Impermeabilizante
- 6.- Chaflan
- 7.- Relleno de tezontle o tepetate
- 8.- Losa de concreto
- 9.- Acabado exterior

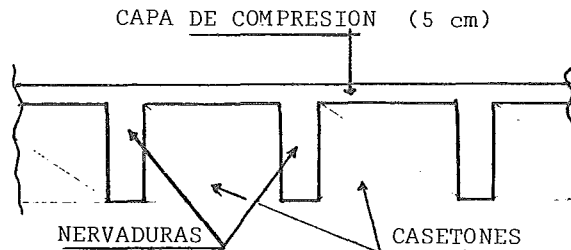


2.- LOSA RETICULAR O ALIGERADA.-

Para el proyecto se toma una losa reticular a base de casetones de fibra de vidrio; es la alternativa que se presenta por los acabados, podría ser a base de otro material tal como el tabicón de arena prensada, bloque precolado ó bloque de uni--sel en este tipo de losas se permite el aligeramiento de la losa con lo cual reduce una carga muerta menor para el diseño de la cimentación y de la estructura; ahorro en cantidad de acero de refuerzo, tiempos de trabajo etc.

Una vez ya terminada la cimentación y las columnas de la P.B. se empieza el cimbrado de la losa, pudiendo usar cimbra metálica y casetones ó bien usar cimbra de madera con casetones, se tiene que dejar en las columnas varillas salidas para el anclaje de las nervaduras de las losas, con esto se sigue al armado de la losa, ya fraguado el concreto (puede ser por medios naturales ó por medio de vapor, todo depende del tiempo de entrega de la obra o de las especificaciones), se procede al curado de concreto; esto se puede hacer una vez ya descimbrado o todavía con cimbra. Con esto se termina el ciclo de la losa del entrespaño del primer nivel, procediendo después al armado, cimbrado y colado de las columnas del primer nivel para hacer el ciclo anterior en la losa y así sucesivamente hasta llegar a la losa de azotea, en la cual se hará como en la losa maciza.

Las ventajas que presenta este tipo de losa es el aligeramiento del edificio, ahorro en cantidad de acero de refuerzo, tiempos de trabajo.



3.- LOSA PRE-ESFORZADA.-

Partiendo de la cimentación ya terminada y las columnas del primer nivel; seguirá el procedimiento constructivo, que consiste en pre-esforzado de la losa del primer nivel.

Esto se logra al poner dentro de ella uno ó varios cables en tensión, que al inducir en una sección una carga excéntrica, se produce un momento contrario al momento flexionante producido por efecto de la carga.

Se puede presentar en los casos diferentes:

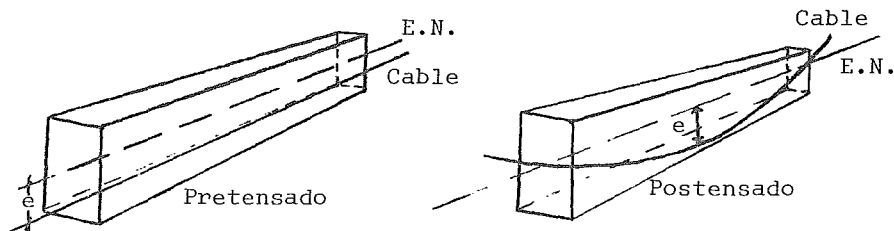
- a) Pretensado. Cuando el ó los cables son tensados antes del fraguado del concreto (los cables deberán llevar una trayectoria recta).
- b) Postensado. Cuando el ó los cables son tensados después del fraguado del concreto (los cables pueden tener una trayectoria recta ó curva).

En el pretensado el cable presenta adherencia en el concreto, en cambio en el postensado el cable va dentro de un ducto.

Para el proyecto se presenta en las losas el pretensado, ya que el pre-esfuerzo es siempre lineal, la cual después de tensionarla, se anclará en los extremos de las trabes; haciendo que el pre-esfuerzo se transmita como una carga aplicada en los extremos de la trabe, la cual se colará después para dejar ahogados los cables. Después de terminado este ciclo se continúa con el colado de las columnas del 2º nivel y el armado de las trabes del 2º nivel; para después hacer el ciclo de la losa.

Siguiendo con este procedimiento se llega hasta la losa de azotea, en el cual se colocará el relleno de tezontle para dar la pendiente necesaria, un entortado; capa correspondiente a la impermeabilización y un enladrillado común.

Este tipo de losas son más comunes de uso en claros grandes y no muy recomendables en construcciones de edificios u obras de tipo habitacional.



4.- LOSA PLEGADA.-

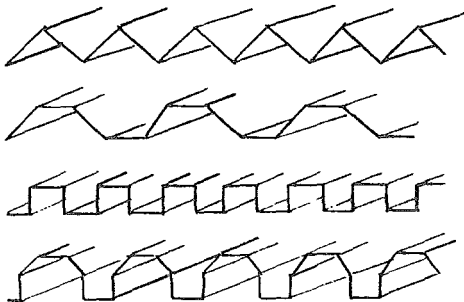
El procedimiento constructivo para este tipo de losas es el mismo que el de las losas macizas solamente hay una variante ó un elemento de más que es el llamado tímpano en el cual la losa es apoyada en sus extremos (quedando ahogados en el).

Una vez ya desplantada la cimentación y las columnas de apoyo - se procederá al cimbrado de la losa y el tímpano, armandolos y colandolos a un mismo tiempo para así lograr un elemento monolítico.

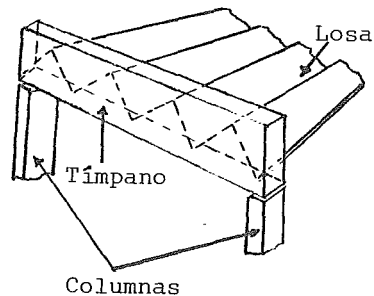
La función del tímpano es igual al de una trabe de apoyo perimetral en la losa. Considerandose aquí las dos variantes más usuales de este tipo de losas, las cuales son la triangular y pentagonal.

Este tipo de losas son ideales para construcciones de un solo nivel o de azoteas. Las ventajas de este tipo es que con un espesor bastante reducido se puede cubrir una área considerable. Estas se presentan en diferentes formas según convenga al diseñador, otra ventaja es que bajan los costos ya que se suprimen los rellenos, el entortado y enladrillado; etc., lo único que se agrega para su terminación final sería una capa de impermeabilización ya sea en frío o en caliente.

DIFERENTES TIPOS DE LOSAS PLEGADAS



DETALLE CONSTRUCTIVO



5.- LOSAS PREFABRICADAS.-

A) LOSA TIPO SIPOREX.-

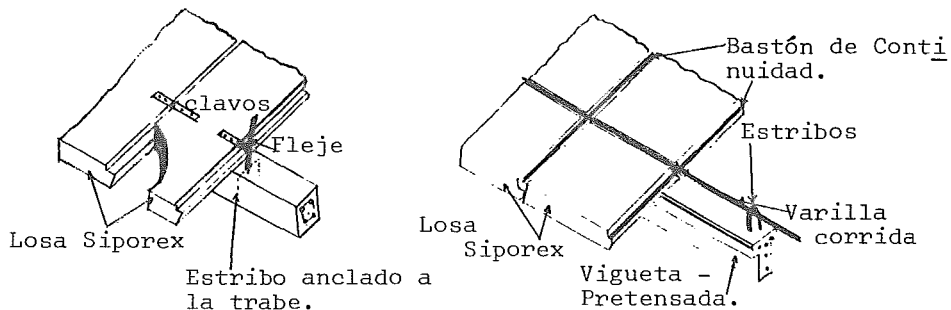
CARACTERISTICAS.- Son elementos prefabricados de carga, armados con parrillas de acero cuyas características varían en función de las cargas y los claros. Las losas tienen una ranura para su "junteo" con mortero de cemento y arena para alojar también en ellas las varillas de anclaje y bastones de continuidad, lo que da un elemento fijo y uniforme. Sus aristas longitudinales inferiores se achaflanán y la superficie presenta una textura uniforme apropiada para absorber sonido, la cuál para requerimientos usuales y de acabado puede dejarse aparente, o bien pintarse directamente sin necesidad de aplicación previa de aplanado.

DISEÑO, DIMENSIONES Y PESO.- Las losas tipo Siporex se diseñan como vigas simplemente apoyadas con un soporte mínimo de 5 cm. en cada extremo y cumplen con todos los requerimientos normales de sobrecarga. La flecha máxima que presentan las losas es igual a $1/360$ del claro. El factor de seguridad a la ruptura es igual a tres veces la sobrecarga del diseño.

Se fabrican con una longitud de 100 a 550cm. ancho 50 cm., espesor de 7.5 a 25cm. con un módulo de 2.5cm. siendo posible surtir losas especiales.

Longitudes máximas para diferentes sobrecargas; espesores y el peso propio para fines de diseño, se mostró en el capítulo correspondiente a diseño.

DETALLES Y PROCEDIMIENTOS CONSTRUCTIVOS.- Es necesario fijar las losas Siporex a los elementos de soporte, mediante algún sistema de anclaje como se muestra en las figuras siguientes:



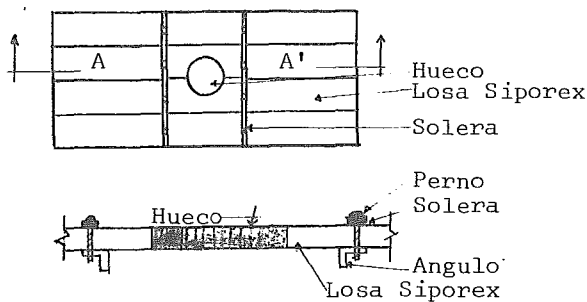
En las ranuras de las losas, precisamente a la altura de los apoyos, deberán alojarse varillas de ϕ 6.3 ó 7.9mm. (#2 ó # 2.5) y de longitud aproximadamente igual a $1/3$ de la longitud de la losa y como mínimo 80cm. Estas varillas se introducen a presión en el mortero de relleno, en forma tal que queden totalmente embebidas en el mismo y a 10 ó 15mm. de profundidad.

Las ranuras que quedan entre losa y losa, se rellenan con mortero de cemento y arena (1:3), teniendo cuidado de mojar previamente la ranura y de que el mortero se coloque suficientemente fluido. No debe caminarsse sobre las losas antes de que frague este mortero.

Las cubiertas grandes o muy largas deben tener juntas de dilatación que generalmente coincidirán con las de los elementos de soporte.

Las losas normales de techo no pueden cortarse porque se altera el anclaje del armado. Cuando sea necesario hacer cortes diagonales, chaflanes o agujeros, se requiere la fabricación de losas con armado especial, las cuales se identifican por un estampado que dice "ESPECIAL". En ningún caso el ancho de una losa de ajuste puede ser menor de 20cm.

Si se requieren agujeros mayores, por ejemplo para ductos de aire acondicionado, chimeneas, etc., pueden hacerse en la forma que ilustran las figuras.



En caso de que se requiera hacer algún resane a las losas el procedimiento a seguir es:

DOSIFICACION DEL MORTERO.-

Una parte en volumen de cemento.
 Dos partes en volumen de cal o yeso.
 Cinco partes de polvo Siporex.

PROCEDIMIENTO.-

- a) Limpiar bien el sitio a resanar
- b) Si la magnitud del resane lo amerita, ponerle algunos clavos.
- c) Mojar bien el lugar por resanar.
- d) No mojar más la mezcla de la que se va a usar en el resane y no abandonarla más de 2 horas.
- e) Aplicar la mezcla y cuando el resane tenga la consistencia suficiente, pasarle un pedazo de Siporex ó una tabla para afinarlo.

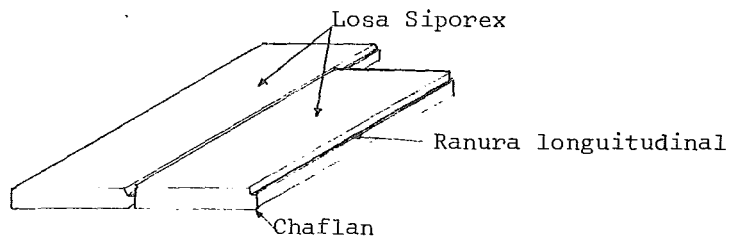
Las losas se colocan en la forma siguiente: Sobre traveses de concreto y dallas se apoyan sobre una capa delgada de mortero.

Sobre vigas de acero se apoyan directamente sobre el patín superior o inferior.

Sobre vigas de madera se colocan sobre una capa de fieltro asfáltico.

En todos los casos, el apoyo mínimo es de 5cm.

La posición de las losas deberá ser siempre con las ranuras para arriba y deberá colocarse un canto con ranura de una losa contra el canto sin ranura de la siguiente losa en forma tal que siempre quede una ranura entre losa y losa.



B.- LOSA TIPO AUTOSUSTENTABLE O DE BOVEDILLA.-

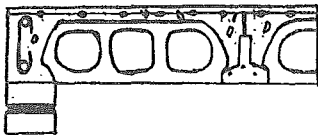
CARACTERISTICAS.- Son elementos prefabricados compuestos de bovedillas, viguetas pretensadas y una capa de compresión, a base de concreto y acero según especificaciones ASTM, SOP, - DGN, ACI, de dimensiones variables como se mostró con anterioridad.

VENTAJAS.- Ligereza de la losa terminada, economía, validez de instalación, eliminación de cimbra y aislante.

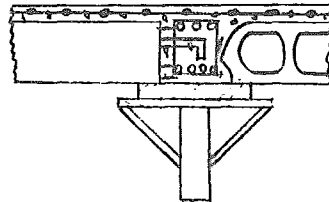
PROCEDIMIENTO CONSTRUCTIVO Y DETALLES.- Ya teniendo los elementos estructurales terminados de todo el edificio (vigas, traveses y columnas) y seleccionando el tipo de apoyo en el - cual vamos a asentar la losa autosustentable; según nuestro proyecto, se hará por niveles la colocación de la misma.

Seleccionando y colocando en un primer paso las viguetas según planos rayados con la separación exacta y asentandolo en los extremos de la vigueta con mortero y bovedilla, en cada lado, esto ayuda a mantener la separación correcta, con esto terminado, procedemos con un 2º paso, consistiendo en la colocación de las bovedillas restantes y por último el 3er. pa so consistiendo en el colado armado, colado y terminación de la capa de compresión, pero antes de mojarán perfectamente - las viguetas y las bovedillas. Todo lo anterior se hace por módulos que en nuestro proyecto será de 600cm X 900cm, se - pueden apuntalar las viguetas si se juzga necesario, consistiendo en poner una viga madrina en claros de 3.0 a 5mts. y 2 vigas mdrinas para claros mayores, lo cuál en este caso - será necesario hacerlo.

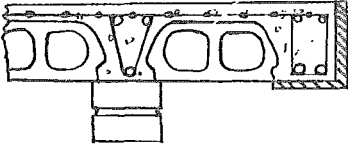
En las siguientes figuras mostraremos los 3 anteriores pasos y algunos detalles constructivos.



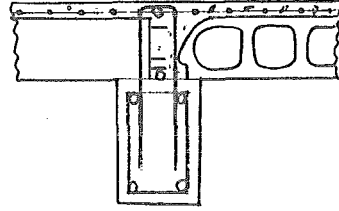
APOYO DE BOVEDILLA SOBRE MURO



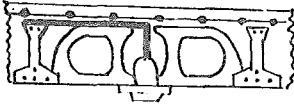
APOYO DE VIGUETA Y BOVEDILLA
EN TRABE



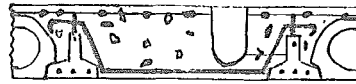
APOYO DE BOVEDILLA SOBRE MURO Y
DETALLE DE VUELO.



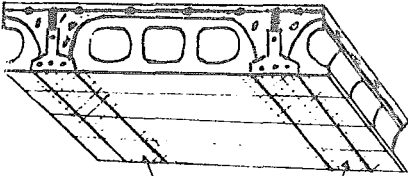
APOYOS SOBRE TRABE O CON-
TRATRABE PREVIAMENTE COLA-
DA.



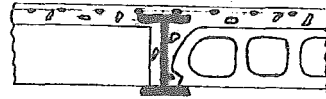
INSTALACION ELECTRICA



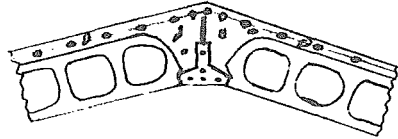
INSTALACION SANITARIA



METAL DESPLEGADO



APOYO DE VIGUETA Y BOVEDILLA
EN VIGA DE ACERO.



VIGUETA CUMBRERA.

C.- LOSA TIPO EXTRUIDA O SPIROLL.-

Es una losa de concreto pretensado, de resistencia alta y acabado aparente de gran perfección el diseño de su sección transversal, permite la colocación de instalaciones eléctricas, hidráulicas, térmicas, etc. dentro de sus núcleos logrando un proyecto más funcional.

El procedimiento a usar es el mismo que de las losas spancrete que a continuación describiremos.

D.- LOSA TIPO SPANCRETE.-

CARACTERISTICAS.- Son placas de concreto pretensado prefabricado elaboradas en planta mediante el procedimiento de extrusión y compactación. Los materiales cumplen con las normas ASTM; de ancho standard, con 5 peraltes y longitudes desde 3.00 MTS. hasta 15.00 MTS.

PROCEDIMIENTO CONSTRUCTIVO Y DETALLES.- Para nuestro ejemplo el sistema constructivo consistirá una vez terminado de colar en sitio cimentación, columnas y trabes del primer nivel, montar las losas spancrete correspondientes, repitiéndose el ciclo de colar columnas y trabes hasta el 2º nivel, sobre las que se montaron las losas repitiéndose este ciclo hasta cerrar con las losas del último nivel (azotea).

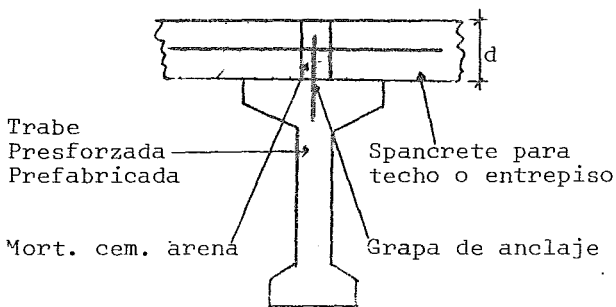
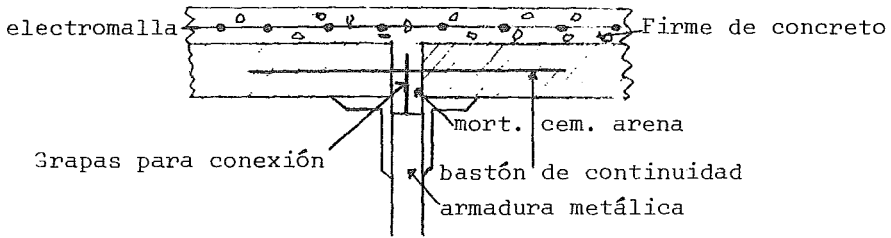
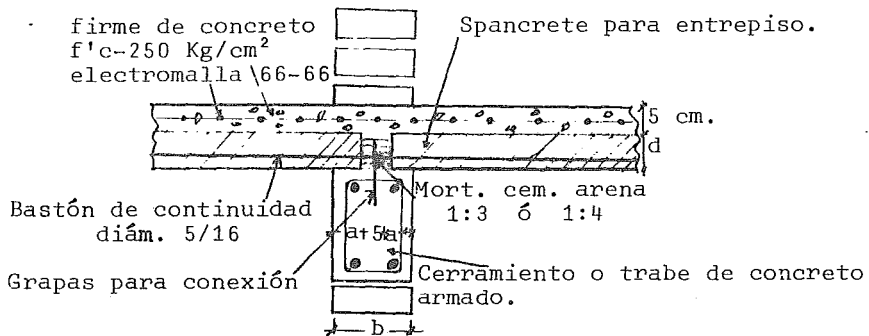
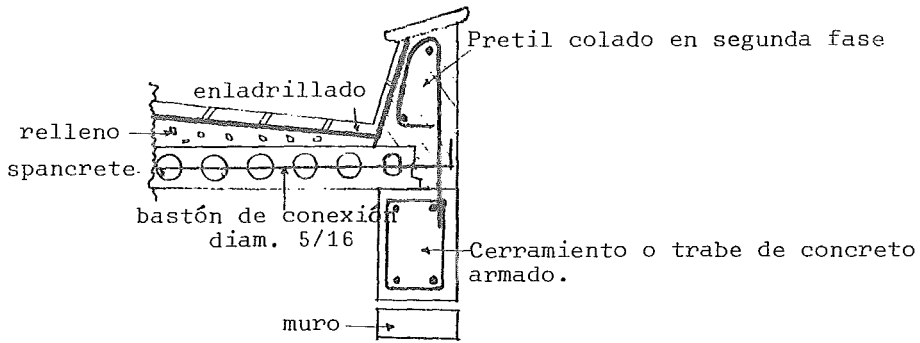
Otro sistema podría ser el siguiente, una vez ya terminada la cimentación y la estructura completa del edificio, proceder a la colocación de las losas nivel a nivel; lo cual reduce el costo de montaje; ya que es un montaje continuo, pero dificulta un poco la labor de la grúa por las dimensiones del edificio.

La elección final del procedimiento quedará sujeto al programa de obra vigente.

Se pondrán bastones de continuidad y se hará un junteo a base de mortero cemento-arena proporción 1.4 ó 1.3 tanto longitudinal como transversal; teniendo ya las losas se procederá a la colocación del firme de concreto armado con electromalla para dar el acabado final.

Es factible instalar un promedio de 1000 M2 de losas spancrete en un día de trabajo con solamente una cuadrilla de montaje, por lo que podemos considerar esta cifra como la mínima económica a contratar.

El junteo longitudinal de la losa y el firme garantizan un comportamiento similar al de una losa tradicional monolítica, en las figuras siguientes mostraremos algunos detalles constructivos.



ANALISIS DE COSTO



CALCULO DEL FACTOR DE INCREMENTO AL SALARIO NOMINAL.

DIAS NO TRABAJADOS:

Domingos	52	
1 ^o de Enero	1	
5 de Febrero	1	
21 de Marzo	1	
1 ^o de Mayo	1	
16 de Septiembre	1	
20 de Noviembre	1	
1 ^o de Diciembre	0.17	(cada 6 años)
25 de Diciembre	1	
Vacaciones mínimas	6	
Total	<u>65.17</u>	65.17

DIAS TRABAJADOS:

Calendario	365.00	
Año bisiesto	0.25	
	<u>365.25</u>	365.25

DIAS EFECTIVOS TRABAJADOS:

$$365.25 - 65.17 = \underline{300.08 \text{ Días.}}$$

PAGO AL PERSONAL MAS PRESTACIONES:

Salarios	365.25	
25% sobre 6 días		
Vacaciones mínimas	1.50	
Aguinaldo	15.00	
Suma	<u>381.75</u> días	<u>381.75</u>

CUOTA PATRONAL DEL I.M.S.S.

$$\text{Salario M\u00ednimo: } 0.196875 \times 381.75 = 75.157$$

$$\text{Salario superior al m\u00edn.: } 0.159375 \times 381.75 = 60.841.$$

IMPUESTOS 1% SOBRE REMUNERACIONES PAGADAS.

$$0.01 \times 381.75 \quad 3.817$$

SUMAS:

Salario M\u00ednimo	460.724	D\u00edas
Salario Superior al m\u00ednimo	446.408	D\u00edas
Factor salario m\u00ednimo $460.724 \div 300.08 =$	1.535	
Factor sup. al m\u00ednimo $446.408 \div 300.08 =$	1.488	

SALARIOS MINIMOS
 DEL 1º DE ENERO AL 31 DE DICIEMBRE DE 1979
 (D.F. Y AREA METROPOLITANA)

OFICIO	SALARIO MIN. OFICIAL.	SALARIO MIN. + 7º DIA.	FACTOR DE INCREMENTO	SAL. MIN. + DIAS NO TRA- BAJADOS + PRESTACIONES
Peón	\$ 138.00	\$ 161.00	1.535	\$ 184.20
Albañil	202.00	235.66	1.488	300.57
Chofer camión	194.00	226.33	1.488	288.67
Carpintero O.N.	187.00	218.16	1.488	278.25
Azulejero	197.00	229.83	1.488	293.13
Yesero	187.00	218.16	1.488	278.25
Fierrero	194.00	226.33	1.488	288.67
Electricista	197.00	229.83	1.488	293.13
Bodeguero	182.00	212.33	1.488	270.81
Herrero	194.00	226.33	1.488	288.67
Pintor	192.00	224.00	1.488	285.69
Plomero	193.00	225.16	1.488	287.18
Velador	178.00	207.66	1.488	264.86

Para obtener el precio unitario de la losa se hará el siguiente procedimiento, consistiendo que al costo directo se le incrementará un porcentaje que corresponde a los indirectos y a la utilidad. El cual será obtenido en la siguiente forma:

a) Seguro Social y Guarderías	8.0 %
b) Impuesto adicional sobre Remuneraciones pagadas (1%)	0.4 %
c) Administración	6.7 %
d) Financiamiento	2.6 %
e) Utilidad	10.0 %
f) Fianzas	0.3 %
g) Secretaría de Patrimonio Nacional	0.5 %
h) Infonavit (5% de O. M.)	1.5 %
T O T A L	<u>30.0 %</u>

LISTA DE MATERIALES BASICOS

(Precios de lista en el Mercado hasta la 2a. quincena de Marzo 79)

M A T E R I A L	UNIDAD	CANTIDAD	COSTO
1.- Arena	M3	1.0	\$ 150.00
2.- Grava	M3	1.0	150.00
3.- Cemento Normal	Ton.	1.0	1,300.00
4.- Varilla del 5/16" a 5/8"	Ton.	1.0	9,776.00
5.- Alambre recocido	Kg.	1.0	15.00
6.- Alambreón	Kg.	1.0	12.00
7.- Asfalto (cuñete de 100 Kg.)	Kg.	1.0	2.40
8.- Fieltro (rollo de 20 mts.)	M2	1.0	4.00
9.- Barrote de 2" x 4" x 8'	PT.	1.0	13.50
10.- Duela de 1" x 4"	PT.	1.0	13.50
11.- Polín de 4" x 4" x 8'	PT.	1.0	13.50
12.- Triplay de 16mm 1.22 x 2.44m	M2	1.0	220.10
13.- Claro	Kg.	1.0	22.00
14.- Electromalla 66-66 ó similar	M2	1.0	28.10
15.- Cables de alta-resistencia:			
Ø 3/8"	ML.	1.0	18.75
Ø 1/2"	ML.	1.0	42.50
16.- Concreto premezclado listo para bombear. (incluye 4% de I.S.I.M.)			

RESISTENCIA DE PROYECTO EN KGS/CM2	TAMAÑO MAXIMO DE AGREGADO MM.	RESISTENCIA NORMAL A LOS 28 DIAS.
150	20	\$ 889.20/M3
200	20	925.60/M3
250	20	951.60/M3
350	20	1,128.40/M3

CON REVENIMIENTO 10 ± 2.5CM.

17.- Bomba para elevación de concreto con una capacidad de bombeo 45M3/Día.			
Costo por tiempo	Día	1.0	5,616.00
Costo por volumen	M3	1.0	124.80

ANALISIS DE COSTO DIRECTO DEL
EQUIPO MINIMO EN LA OBRA.

MALACATE.

Marca: MNSA.
Modelo: 1000
Capacidad: 1 Ton.
Vida: _____ 15,000 Hrs.
12 C.P.

	C O N C E P T O	CANTIDAD	P.U.	IMPORTE
1	<u>INTERESES CAPITAL:</u> 1.5% mensual sobre el valor $0.015 \times \text{Pza.}/8\text{hrs.}$ entre 25 días.	0.000075	39,000.00	2.93
2	<u>DEPRECIACION.</u> 1 Pza. entre 15,000 hrs.	0.00007	39,000.00	2.73
3	<u>REPARACIONES.</u> 20% Depreciación	0.20	2.73	0.55
4	<u>CONSUMO DE GASOLINA.</u> 0.30 lts. x 12 C.P.	3.60	2.8	10.08
5	<u>CONSUMO DE LUBRICANTES.</u> 0.01 lts. x 12 x COSTO HORARIO	0.12	8.00	0.96 \$17.25/H
	COSTO / M3 20 M3 por jornada. $\frac{17.25 \times 8}{20}$ COSTO/ TON.			\$ 6.90/M3
	44 Ton. por jornada $\frac{17.25 \times 8}{44}$			\$ 3.14/Ton.

REVOLVEDORA.

Marca: KOHLER.
 Modelo: K - 181 de 8 C.P.
 Capacidad 1 SACO.
 Vida 6,000 Hrs.
 PRODUCCION 19 M3/ JORNADA

	CONCEPTO	CANTIDAD	P.U.	IMPORTE
1	<u>INTERES CAPITAL.</u> 1.5% mensual sobre el valor de la revoladora 0.015 x 1 Pza. entre 25 días.	0.000075	35,256.00	2.64
2	<u>DEPRECIACION.</u> 1 Pza. entre 6.000 hrs. de vida.	0.00017	35,256.00	5.99
3	<u>REPARACIONES.</u> 20% Depreciación	0.20	5.99	1.20
4	<u>CONSUMO DE GASOLINA</u> 0.45 lts. x 8 C.P./hora TOTAL COSTO HORARIO COSTO POR M3	0.24	9.00	<u>2.16</u> \$22.07/H \$ 9.29/M3
	<u>22.07 x 8</u> 19			

VIBRADOR DE CONCRETO

Marca: WYCO BOSCH.
 Capacidad: 1 C.P. (1 1/4")
 Vida 2,500 hrs.

1	<u>INTERES CAPITAL.</u> 1.5% mensual sobre el valor	0.000075	13,728.00	1.03
2	<u>DEPRECIACION.</u> 1 Pza. entre 2,500 hrs. de vida	0.00040	13,728.00	5.49
3	<u>REPARACIONES.</u> 20% Depreciación	0.20	5.49	1.10
4	<u>CONSUMO DE GASOLINA.</u> 0.35 lts. 1 C.P/Hra.	0.018	8.00	<u>0.14</u> \$ 8.74/H
	<u>2 vibradores x 8 hrs. a 8.74</u> 20 M3			\$ 6.99/M3

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD M3
Concreto f'c = 150 Kg/cm hecho en obra con revolvedora	
prop. 1:3:3; con agregado máximo 3/4"	

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	ton.	0.315	1300.00	409.50
2	Arena	M3	0.592	150.00	88.80
3	Grava	M3	0.643	150.00	96.45
4	Agua	M3	0.200	5.00	1.00
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					595.75

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para revolvedora	Jor	0.091	936.06	85.18
2	Curado de concreto	Jor	0.01	211.83	2.12
3	Cabo	%	5.0	87.30	4.36
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					91.66

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. 1 saco	M3	1.0	9.29	9.29
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					9.29

HERRAMIENTA

1	Palas, carretilla etc. (M.O)	%	3.0	87.30	2.62
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					2.62

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	699.32
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	209.80
PRECIO UNITARIO	\$	909.12

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD
Concreto f'c=200 Kg/cm ² hecho en obra con revolvedora prop. 1:2.5:2.75 con agregado máximo 3/4"	M3

MATERIALES

NO	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	ton	0.355	1300.00	461.50
2	Arena	M3	0.566	150.00	84.70
3	Grava	M3	0.643	150.00	96.45
4	Agua	M3	0.200	5.00	1.00
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					643.85

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para revolvedora	Jor	0.091	936.06	85.18
2	Curado de concreto	Jor	0.01	211.83	2.12
3	Cabo	%	5.0	87.30	4.36
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					91.66

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. 1 sacco	M3	1.0	9.29	9.29
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					9.29

HERRAMIENTA

1	Dalas, carretilla etc. (M.O)	%	3.0	87.30	2.62
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					2.62

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	747.42
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	224.23
PRECIO UNITARIO	\$	971.65

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE

BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD
Concreto f'c = 250 Kg/cm ² hecho en obra con revolovedora prop: 1:2:2.5 con agregado máximo 3/4"	M3

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	ton.	0.396	1300.00	514.80
2	Arena	M3	0.546	150.00	81.90
3	Grava	M3	0.643	150.00	96.45
4	Agua	M3	0.200	5.00	1.00
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					694.15

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para revolovedora of. y 3 pns	Jor.	0.091	936.06	85.18
2	Curado de concreto	Jor.	0.01	211.83	2.12
3	Cabo	%	5.0	87.30	4.36
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					91.66

EQUIPO

1	Revolovedora Kohler capacidad 1 saco.	M3	1.0	9.29	9.29
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					9.29

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	87.30	2.62
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					2.62

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	797.72
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	239.32
PRECIO UNITARIO	\$	1,037.04

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD M3
Concreto f'c = 350 Kg/cm ² hecho en obra con revolvedora	
prop: 1:7.5:1.5 con agregado máximo 3/4"	

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	ton.	0.435	1300.00	565.50
2	Arena	M3	0.470	150.00	70.50
3	Grava	M3	0.755	150.00	113.25
4	Agua	M3	0.200	5.00	1.00
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					750.25

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para la revolvedora	Jor.	0.091	936.00	85.18
2	Curado de concreto	Jor.	0.01	211.83	2.12
3	Cabo	%	5.0	87.30	4.36
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					91.66

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. 1 saco	M3	1.0	9.29	9.29
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					9.29

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	87.30	2.62
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					2.62

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	853.83
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	256.15
PRECIO UNITARIO	\$	1,109.98

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :

Acarreo de concreto vaciado y vibrado en losas a una distancia no mayor de 10 mts., altura máxima de 20 mts. (con malacate)

UNIDAD M3

M A T E R I A L E S

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					

M A N O D E O B R A

1	Cuadrilla de trabajo (1 oficial y 4 peones)	Jor.	0.350	1147.89	401.76
2	Cabo	%	5.0	401.76	20.09
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					421.85

E Q U I P O

1	Malacate	M3	1.0	6.90	6.90
2	Vibrador	M3	1.0	6.99	6.99
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					13.89

H E R R A M I E N T A

1	Herramienta menor	%	3.0	401.76	12.05
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					12.05

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	447.79
INTERESES Y UTILIDAD	\$	134.34
PRECIO UNITARIO	\$	582.13

UNAM	INGENIERÍA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE
BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD
Mortero de cemento - arena cernida con prop: 1:3. para junteo.	M3

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento con desperdicio de 3%	ton	0.556	1300.00	722.80
2	Arena con desperdicio del 3%	M3	1.082	150.00	162.30
3	Agua con desperdicio del 25%	M3	0.35	5.0	1.75
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					886.85

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para la hechura (1 of. y 2 peones) y colocación.	Jor.	0.091	724.23	65.90
2	Cabo	%	5.0	65.90	3.30
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					69.20

EQUIPO

COSTO DIRECTO DE EQUIPO					
-------------------------	--	--	--	--	--

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	65.90	1.98
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					1.98

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	958.03
IMPUESTOS Y UTILIDAD	\$	287.41
PRECIO UNITARIO	\$	1,245.44

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE
BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD
Cimbra en losa plana aparente a una altura máxima de --	M2
4.0 mts. y descimbrado con 4 usos y desperdicio del 20%.	

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Triplay de 16mm. con 20% desp. 4 usos	M2	0.30	220.10	66.03
2	Pies derechos, yugos, separadores y madrinas con 15% desp. y 5 usos.	Pt.	2.43	13.50	32.80
3	Clavo de 2 1/2" con 10% desp.	Kg.	0.19	22.00	4.18
4	Disel.	Lt.	0.4	1.00	0.40
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					103.41

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla de carpinteros.	Jor.	0.125	701.91	87.74
2	Cabo	%	5.0	87.74	4.39
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					92.13

EQUIPO

COSTO DIRECTO DE EQUIPO					

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	87.74	2.63
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					2.63

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	198.17
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	59.45
PRECIO UNITARIO	\$	257.62

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD
Cimbra en losa reticular ó aligerada con casetones de 60 x 60 x 40 cm. de fibra de vidrio, con un tiempo de -- duración de 10 días de trabajo.	M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Casetones de 60 x 60 x 40	M2	1.0	64.18	64.18
2	Pies derechos, yugos, separadores y madrinas con 15% desperdicio.	Pt.	3.50	13.50	47.25
3	Triplay de 16 mm. y 20% desp. y 5 usos	M2	0.24	220.10	52.82
4	Clavos de 2 1/2" con 10% desp.	Kg	0.19	22.00	4.18
5	Aceite quemado diesel	Lts.	0.40	1.0	0.40
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					168.83

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla de carpinteros para obra falsa (1 oficial y 2 peones).	Jor	0.167	701.91	117.22
2	Cabo	%	5.0	117.22	5.86
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					123.08

EQUIPO

COSTO DIRECTO DE EQUIPO					

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	5.0	117.22	3.52
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					3.52

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	295.43
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	88.63
PRECIO UNITARIO	\$	384.06

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE
BASICO

CONCEPTO : Acero de refuerzo alta resistencia fy= 4000 Kg/cm ² con varilla de \emptyset 5/16" a \emptyset 5/8" y alambre recocido.	UNIDAD Ton.
---	----------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Varilla	ton	1.0	9776.00	9776.00
2	Desperdicio	ton	0.03	9776.00	293.28
3	Traslapes	ton	0.023	9776.00	224.85
4	Ganchos	ton	0.045	9776.00	439.92
5	Alambre recocido #16	Kg	40.0	15.00	600.00
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					11334.05

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para habilitado y colocación.	Jor	6.25	500.50	3128.12
2	Cabo	%	5.0	3128.12	156.41
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					

EQUIPO

COSTO DIRECTO DE EQUIPO					

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	3128.12	93.84
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					93.84

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	14,712.42
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	4,413.73
PRECIO UNITARIO	\$	19,126.15

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE
BASICO

CONCEPTO :	UNIDAD
Firme de concreto f'c = 100 Kg/cm ² de 5 cm. de espesor armado con electromalla 66-66 ó similar.	M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	Kg	14.0	1.30	18.20
2	Arena	M3	0.032	150.00	4.80
3	Grava	M3	0.033	150.00	4.95
4	Electromalla 66-66 ó similar	M2	1.0	28.10	28.10
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					56.05

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para firme de concreto incluye concreto hecho en obra (of. y peón)	Jor.	0.055	512.40	28.18
2	Cuadrilla para colocación de electro-malla	Jor.	0.02	512.40	10.25
3	Cabo	%	5.0	38.43	1.92
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					40.35

EQUIPO

1	Malacate	M3	0.05	6.90	0.34
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					0.34

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	38.43	1.15
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					1.15

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	97.89
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	29.37
PRECIO UNITARIO	\$	127.26

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :

Firme de concreto f'c=150 Kg/cm² de 5 cm. de espesor armado con electromalla 66-66 ó similar.

UNIDAD M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	Kg	16.50	1.30	21.45
2	Arena	M3	0.031	150.00	4.65
3	Grava	M3	0.033	150.00	4.95
4	Electromalla 66-66	M2	1.0	28.10	28.10
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					59.15

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para firme incluye el concreto hecho en obra.	Jor	0.055	512.40	28.18
2	Cuadrilla para colocar electromalla	Jor	0.02	512.40	10.25
3	Cabo	%	5.0	38.43	1.92
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					40.35

EQUIPO.

1	Malacate	M3	0.05	6.90	0.34
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					0.34

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	38.43	1.15
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					1.15

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	100.99
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	30.30
PRECIO UNITARIO	\$	131.29

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO : Firme de concreto f'c = 250 Kg/cm ² de 5 cm. de espesor armado con electromalla 66-66 ó similar.	UNIDAD M2
--	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cemento	Kg	21.0	1.30	27.30
2	Arena	M3	0.030	150.00	4.50
3	Grava	M3	0.033	150.00	4.95
4	Electromalla 66-66 ó similar	M2	1.0	28.10	28.10
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					64.85

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para firme de concreto incluye concreto hecho en obra (of. y peón)	Jor.	0.055	512.40	28.18
2	Cuadrilla para colocación de electro malla.	Jor.	0.02	512.40	10.25
3	Cabo	%	5.0	38.43	1.92
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					40.35

EQUIPO

1	Malacate	M3	0.05	6.90	0.34
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					0.34

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	38.43	1.15
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					1.15

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	106.69
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	32.01
PRECIO UNITARIO	\$	138.70

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE BASICO

CONCEPTO :

Impermeabilización en azoteas con asfalto en caliente y
2 capas de fieltro y arena gruesa.

UNIDAD M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Asfalto	Kg	3.09	2.40	7.42
2	Fieltro	M2	2.40	4.00	9.60
3	Arena	M3	0.01	150.00	1.50
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					18.52

MANO DE OBRA

1	Peón	Jor.	0.143	211.83	30.29
2	Cabo	%	5.0	30.29	1.51
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					31.70

EQUIPO

COSTO DIRECTO DE EQUIPO					
-------------------------	--	--	--	--	--

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	30.29	0.91
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					0.91

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	51.13
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	15.34
PRECIO UNITARIO	\$	66.47

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE
LM-1

CONCEPTO : Losa maciza de 15 cm, con concreto f'c = 200. Kg/cm ² y armada con fy = 4000. Kg/cm ² según planos.	UNIDAD M2
---	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.L.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Concreto hecho en obra	M3	0.155	643.85	99.80
2	Cimbra aparente	M2	1.0	103.41	103.41
3	Acero de refuerzo	Kg.	13.0	11.33	147.29
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					350.50

MANO DE OBRA

1	Hechura de concreto	M3	0.155	91.66	14.21
2	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
3	Habilitado y colocación de acero.	Kg.	13.0	3.28	42.64
4	Acarreo de concreto, vaciado y vibrado.	M3	0.155	421.85	65.39
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					214.37

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. un saco	M3	0.155	9.29	1.44
2	Malacate	M3	0.155	6.90	1.07
3	Vibrador	M3	0.155	6.99	1.08
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					3.59

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	214.37	6.43
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					6.43

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	574.89
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	172.47
PRECIO UNITARIO	\$	747.36

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LM -1'

CONCEPTO : Losa maciza de 15 cm. con concreto premezclado en planta f'c=200Kg/cm ² armado con fy=4000Kg/cm ² y bombeado hasta una altura máxima de 5 niveles y de resistencia normal.	UNIDAD M2
--	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Concreto f'c=200. Kg/cm ² resistencia normal.	M3	0.16	925.60	148.10
2	Cimbra	M2	1.0	103.41	103.41
3	Acero de refuerzo	Kg	13.0	11.33	147.29
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					398.80

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Habilitado y colocación de acero	Kg	13.0	3.28	42.64
3	Vaciado y vibrado de concreto	M3	0.16	421.85	67.50
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					202.27

EQUIPO

1	Bomba para concreto hasta una altura de 5 niveles.	M3	0.16	124.80	19.97
2	Vibrador	M3	0.16	6.99	1.12
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					21.09

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	202.27	6.07
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					6.07

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	628.23
IMPUESTOS Y UTILIDAD	\$	188.47
PRECIO UNITARIO	\$	816.70

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LR-1

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa reticular de 45 cm. de espesor con casetones de --	M2.
60 x 60 x 40 con concreto f'c = 200 Kg/cm ² y acero de -	
refuerzo fy = 4000 Kg/cm ² Tipo I.	

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra de casetones de 60 x 60 x 40	M2	1.0	168.83	168.83
2	Acero de refuerzo	Kg	9.0	11.33	101.97
3	Concreto hecho en obra	M3	0.248	643.85	159.67
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					430.47

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	123.08	123.08
2	Habilitado y colocación de acero.	Kg	9.0	3.28	29.52
3	Hechura de concreto	M3	0.248	91.66	22.73
4	Acarreo de concreto, vaciado y vibra do.	M3	0.248	421.85	104.62
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					279.95

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. un saco	M3	0.248	9.29	2.30
2	Malacate	M3	0.248	6.90	1.71
3	Vibrador	M3	0.248	6.99	1.73
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					5.74

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	279.95	8.40
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					8.40

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	724.56
IMPUESTOS Y UTILIDAD	\$	217.37
PRECIO UNITARIO	\$	941.93

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LR - 1'

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa reticular de 45 cm. de espesor con casetones de 60 x 60 x 40 con concreto hecho en planta de $f'c=200 \text{ Kg/cm}^2$ y acero de refuerzo $f_y=4000 \text{ Kg/cm}^2$ (TIPO I)	M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra con casetones	M2	1.0	168.83	168.83
2	Acero de refuerzo	Kg	9.0	11.33	101.97
3	Concreto hecho en planta	M3	0.248	925.60	229.55
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					500.35

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	123.08	123.08
2	Habilitado y colocación de acero	Kg	9.0	3.28	29.56
3	Acarreo de concreto, vaciado y vibrado.	M3	0.248	421.85	104.62
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					257.26

EQUIPO

1	Bomba para concreto	M3	0.248	124.80	30.95
2	Vibrador	M3	0.248	6.99	1.73
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					32.68

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	257.26	7.72
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					7.72

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	798.01
INTERCIOS Y UTILIDAD	\$	239.40
PRECIO UNITARIO	\$	1,037.41

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LR - 2

CONCEPTO: Losa reticular de 45cm. de espesor con casetones de 60x60x40 cm. de concreto f'c = 250 Kg/cm ² y acero de refuerzo fy=4000 Kg/cm ²	UNIDAD M2
---	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra con casetones	M2	1.0	168.83	168.83
2	Acero de refuerzo	Kg.	8.5	11.33	96.31
3	Concreto	M3	0.248	694.15	172.15
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					437.29

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	123.08	123.08
2	Habilitado y colocación de acero	Kg.	8.5	3.28	27.88
3	Hechura de concreto	M3	0.248	91.66	22.73
4	Acarreo de concreto, vaciado y vibra	M3	0.248	421.85	104.62
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					278.31

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. 1 saco	M3	0.248	9.29	2.30
2	Malacate	M3	0.248	6.90	1.71
3	Vibrador	M3	0.248	6.99	1.73
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					5.74

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	278.31	8.35
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					8.35

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	729.69
INDIRECTOS Y UTILIDADES	\$	218.91
PRECIO UNITARIO	\$	948.60

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LR - 2'

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa reticular TIPO II con concreto hecho en planta f'c=	M2
250 Kg/cm ² y acero de refuerzo fy =4000 Kg/cm ²	

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra de casetones 60 x 60 x 40	M2	1.0	168.83	168.83
2	Acero de refuerzo	Kg	8.50	11.33	96.31
3	Concreto f'c =250 Kg/cm ² hecho en -- planta.	M3	0.248	951.60	236.00
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					501.14

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	123.08	123.08
2	Habilitado y colocación de acero	Kg	8.5	3.28	27.88
3	Acarreo de concreto vaciado y vibrado	M3	0.248	421.85	104.62
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					255.58

EQUIPO

1	Bomba para concreto	M3	0.248	124.80	30.95
2	Vibrador	M3	0.248	6.99	1.73
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					32.68

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	255.58	7.67
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					7.67

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	797.07
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	239.12
PRECIO UNITARIO	\$	1,036.19

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E W E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE
LPE -1

CONCEPTO : Losa pre-esforzada de 10cm. de espesor con concreto f'c=350 Kg/cm ² y cables de fs=10000 Kg/cm ² alta resistencia.	UNIDAD M2
--	--------------

MATERIALES

NO	CONCEPTO	U.L.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbrado	M2	1.0	103.41	103.41
2	Cables alta resistencia de 3/8"	ML	4.30	18.75	80.63
3	Cables alta resistencia de 1/2"	ML	5.75	42.50	244.38
4	Concreto f'c = 350 Kg/cm ²	M3	0.103	750.25	77.28
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					505.70

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Colocación y tensado de cables.	ML	10.00	7.15	71.50
3	Hechura de concreto f'c = 350 Kg/cm ²	M3	0.103	91.66	9.44
4	Acarreo de concreto, vaciado y vibrado	M3	0.103	421.85	43.45
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					216.52

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler	M3	0.103	9.29	0.96
2	Malacate	M3	0.103	6.90	0.71
3	Vibrador	M3	0.103	6.99	0.72
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					2.39

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	216.52	6.50
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					6.50

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	731.11
IMPUESTOS Y UTILIDAD	\$	219.33
PRECIO UNITARIO	\$	950.44

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LPE -1'

CONCEPTO : Losa pre-esforzada de 10cm de espesor con concreto f'c = 350 Kg/cm ² hecho en planta y cables de fs=10000 Kg/cm ² alta resistencia.	UNIDAD M2
---	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbrado	M2	1.0	103.41	103.41
2	Cables de 3/8" A.R.	ML	4.30	18.75	80.63
3	Cables de 1/2" A.P.	ML	5.75	42.50	244.38
4	Concreto f'c = 350 Kg/cm ²	M3	0.103	1128.40	116.23
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					544.65

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Colocación y tensado de cable	ML	10.0	7.15	71.50
3	Acarreo de concreto, vaciado y vibra- do.	M3	0.103	421.85	43.45
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					207.08

EQUIPO

1	Bomba para concreto	M3	0.103	124.80	12.85
2	Vibrador	M3	0.103	6.99	0.72
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					13.57

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	207.08	6.21
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					6.21

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	771.51
INDICIOS Y UTILIDAD	\$	231.45
PRECIO PUESTO	\$	1,002.96

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LP -1'

CONCEPTO : Losa plegada para azotea con 8 cm. de espesor y concreto f'c=200 kg/cm ² hecho en planta y con acero de refuerzo fy=4000 Kg/cm ² con impermeabilizador. (TIPO A)	UNIDAD M2
--	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra	M2	1.0	103.41	103.41
2	Acero de refuerzo	Kg	10.0	11.33	113.30
3	Concreto	M3	0.083	925.60	76.82
4	Impermeabilizante	M2	1.0	18.52	18.52
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					312.05

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Habilitado y colocación de acero	Kg	10.0	3.28	32.80
3	Extendido de concreto, vaciado y curado.	M3	0.083	421.85	35.01
4	Impermeabilización	M2	1.0	31.70	31.70
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					191.64

EQUIPO

1	Bomba para concreto	M3	0.083	124.80	10.36
2	Vibrador	M3	0.083	6.99	0.58
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					10.94

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	191.64	5.75
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					5.75

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	520.38
INTERES Y UTILIDAD	\$	156.11
PRECIO UNITARIO	\$	676.49

UNAM	INGENIERIA CIVIL	EHEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LP - 1

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa plegada para azotea con 8cm. de espesor y concreto f'c=200 Kg/cm ² con acero de refuerzo fy=4000 Kg/cm ² incluye impermeabilizante (tipo A).	M2

MATERIALES

NO	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra	M2	1.0	103.41	103.41
2	Acero de refuerzo	Kg.	10.0	11.33	113.30
3	Concreto f'c 200 Kg/cm ²	M3	0.083	643.85	53.44
4	Impermeabilizante	M2	1.0	18.52	18.52
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					288.67

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Habilitado y colocación de refuerzo	ton	0.010	3284.53	32.84
3	Hechura de concreto	M3	0.083	91.66	7.61
4	Acarreo de concreto, vaciado y vibrado	M3	0.083	421.85	35.01
5	Impermeabilización	M2	1.0	31.70	31.70
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					199.29

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler	M3	0.083	9.29	0.77
2	Malacate	M3	0.083	6.90	0.57
3	Vibrador	M3	0.083	6.99	0.58
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					1.92

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	199.29	5.98
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					5.98

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	495.86
INDICES Y UTILIDAD	\$	148.76
PRECIO UNITARIO	\$	644.62

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LP - 2

CONCEPTO : Losa plegada para azotea con 8 cm. de espesor y concreto f'c = 200 Kg/cm ² con acero de refuerzo fy=4000 Kg/cm ² in- cluyendo impermeabilización. (tipo B).	UNIDAD M2
---	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.L.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra	M2	1.0	103.41	103.41
2	Acero de refuerzo	Kg	6.0	11.33	67.98
3	Concreto	M3	0.098	643.85	63.10
4	Impermeabilizante	M2	1.0	18.52	18.52
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					253.01

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Habilitado y colocación de refuerzo	Kg	6.0	3.28	19.68
3	Hechura de concreto	M2	0.098	91.66	8.98
4	Acarreo de concreto, vaciado y vibra- do.	M3	0.098	421.85	41.34
5	Impermeabilización	M2	1.0	31.70	31.70
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					193.83

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. 1 saco	M3	0.098	9.29	0.91
2	Malacate	M3	0.098	6.90	0.68
3	Vibrador	M3	0.098	6.99	0.69
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					2.28

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	193.83	5.81
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					5.81

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	454.93
INDICES Y UTILIDAD	\$	136.48
PRECIO UNITARIO	\$	591.41

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LP -2'

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa plegada tipo B. $f'c=200 \text{ Kg/cm}^2$ con concreto hecho en planta y acero de refuerzo $f_y=4000 \text{ Kg/cm}^2$	M2

MATERIALES

#	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Cimbra	M2	1.0	103.41	103.41
2	Acero de refuerzo	Kg	5.0	11.33	67.98
3	Concreto	M3	0.10	925.60	92.56
4	Impermeabilizante	M2	1.0	18.52	18.52
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					282.47

MANO DE OBRA

1	Cimbrado y descimbrado	M2	1.0	92.13	92.13
2	Habilitado y colocación de acero	Kg	6.05	23.28	19.68
3	Acarreo de concreto, vaciado y vibrado	M3	0.10	421.85	42.18
4	Impermeabilización	M2	1.0	31.70	31.70
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					185.69

EQUIPO

1	Bomba para concreto	M3	0.1	124.80	12.48
2	Vibrador	M3	0.1	6.99	0.70
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					13.18

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	185.69	5.57
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					5.57

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	486.91
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	146.07
PRECIO UNITARIO	\$	632.98

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LPS -1

CONCEPTO : Losa prefabricada tipo losa siporex de espesor 15.0 cm. con una longitud de 3.00 mts. (se incluye una trabe se- cundaria a la mitad del claro).	UNIDAD M2
---	--------------

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CAJ.	C.D.	IMPORTE
1	Trabe secundaria (proporción a 1.0mt ²)	ML	0.20	1552.50	310.50
2	Losa siporex incluyendo anclaje	M2	1.0	353.18	353.18
3	Bastón de continuidad de varilla Ø3/8	Kg	1.0	11.33	11.33
4	Mortero cemento-arena prop: 1:3 para junteo y para asentarlas incluye he- chura del mismo y colocación.	M3	0.010	958.03	9.58
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					684.59

MANO DE OBRA

Nº	CONCEPTO	U.	CAJ.	C.D.	IMPORTE
1	Colocación de losas incluyendo trans- porte y anclaje.	M2	1.0	93.30	93.30
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					93.30

EQUIPO

Nº	CONCEPTO	U.	CAJ.	C.D.	IMPORTE
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					

HERRAMIENTA

Nº	CONCEPTO	U.	CAJ.	C.D.	IMPORTE
1	Herramienta menor	%	3.0	93.30	2.80
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					2.80

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	780.69
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	234.21
PRECIO UNITARIO	\$	1,014.90

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LPB - I

CONCEPTO:	UNIDAD
Losa prefabricada de bovedilla tipo autosustentable P50-20, con firme de concreto f'c= 150 Kg/cm ² armado con electromalla 66-66 ó similar.	M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Vigas	ML	3.20	144.65	462.88
2	Bovedillas	Pza.	10.0	11.75	117.50
3	Metal desplegado	ML	3.20	16.55	52.96
4	Firme de concreto con electromalla	M2	1.0	59.15	59.15
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					692.49

MANO DE OBRA

1	Cuadrilla para colocar vigas y bovedilla (1 of. 7 peones y 1 cabo)	Jor.	0.013	1872.55	24.34
2	Colocación de firme y electromalla	M2	1.0	40.35	40.35
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					64.69

EQUIPO

1	Revolvedora Kohler cap. 1 saco	M3	0.05	9.29	0.46
2	Malacate para concreto	M3	0.05	6.90	0.34
3	Malacate para vigas y bovedillas	ton	0.30	3.14	0.94
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					1.74

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	64.69	1.94
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					1.94

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	760.86
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	228.26
PRECIO UNITARIO	\$	989.12

UNAM	INGENIERIA CIVIL	ENEP ACATLAN
------	------------------	-----------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LPE -2

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa prefabricada tipo spiroroll ó extruida L18-45, con - firme de concreto f'c=250 Kg/cm ² de 5cm. de espesor, ar- mado con electromalla 66-66 o similar.	M2

MATERIALES

NO	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Losa spiroroll con transporte	M2	1.0	420.00	420.00
2	Firme de concreto con electromalla	M2	1.0	64.85	64.85
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					484.85

MANO DE OBRA

1	Colocación de losa nivel por nivel	M2	1.0	282.50	282.50
2	Firme de concreto hecho en obra, ar- mado con electromalla.	M2	1.0	40.35	40.35
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					322.85

EQUIPO

	Esta incluido en la colocación.				
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	322.85	9.69
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					9.69

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	817.39
IMPUESTOS Y UTILIDAD	\$	245.22
PRECIO UNITARIO	\$	1,062.61

UNAM	INGENIERIA CIVIL	E N E P ACATLAN
------	------------------	--------------------

ANALISIS DE PRECIOS UNITARIOS

CLAVE LPS -2

CONCEPTO :	UNIDAD
Losa prefabricas spancrete tipo 4414F con firme de concreto f'c = 250 Kg/cm ² de 5 cms. de espesor, armado por temperatura con electromalla 66-66 ó similar.	M2

MATERIALES

Nº	CONCEPTO	U.	CANT.	C.D.	IMPORTE
1	Losa spancrete	M2	1.0	413.27	413.27
2	Mortero cemento-arena 1:3 para junteo	M3	0.007	886.85	6.21
3	Bastones de continuidad Ø5/16	Kg.	0.8	11.33	9.06
4	Firme de concreto f'c=250 Kg/cm ² armado con electromalla 66-66	M2	1.0	64.85	64.85
COSTO DIRECTO DE MATERIALES					493.39

MANO DE OBRA

1	Colocación de losas	M2	1.0	260.00	260.00
2	Colocación de Mortero para junteo.	M3	0.007	69.20	0.48
3	Colocación de firme y electromalla - (hecho en obra)	M2	1.0	40.35	40.35
COSTO DIRECTO DE MANO DE OBRA					300.83

EQUIPO

1	Se incluye en la mano de obra.				
COSTO DIRECTO DE EQUIPO					

HERRAMIENTA

1	Herramienta menor	%	3.0	300.83	9.02
COSTO DIRECTO DE HERRAMIENTA					9.02

COSTO DIRECTO TOTAL	\$	803.24
INDIRECTOS Y UTILIDAD	\$	240.97
PRECIO UNITARIO	\$	1,044.21

CONCLUSIONES

VI

Como conclusión se tendrá que los tiempos de trabajo se pueden abatir en cada caso según sea necesario ya que en las losas prefabricadas, se considera un montaje discontinuo ó sea nivel por nivel y en las restantes se puede reducir el tiempo al usar aditivos para el concreto o curados por medio de vapor, para el rapido fraguado del concreto. Por ejemplo al usar un concreto de resistencia rapida se podrá descimbrar a las 72 horas después del colado o bien al hacer un curado por medio de vapor se descimbrará a las 24 horas del colado.

Por otra parte los costos están en función directa de la obra y del lugar donde se vaya a edificar, ya que no es el mismo rendimiento y costos en el área metropolitana que en cualquier estado de la República, ni tampoco el costo del material y el salario serán el mismo.

Por ejemplo el tiempo efectivo de la jornada para el área metropolitana es de 8:00 hrs. mientras que en el Estado de Oaxaca es de 6:00 hrs., con lo cual resulta que el rendimiento no es equivalente, con esto se aumentará el costo de mano de obra.

Para las prefabricadas el costo representa muy poco la diferencia entre las demás, ya que se trata de una obra con más de 1,500 M2 de construcción, por lo que se obtuvo este precio.

Con ayuda de las siguientes tablas se pueden ver los tiempos de trabajo y los costos, dando por resultado que las losas macizas, reticulares y preforzadas no varían mucho en su costo, pero en comparación con las prefabricadas su costo es casi igual, más no los tiempos de trabajo.

En cambio las losas plegadas tienen costos mucho más bajos que cualquier otra, sin embargo por su forma no es muy recomendable para este tipo de obras.

Por último se puede decir que la selección del tipo de losa para este ejemplo será en función directa del proyecto, de las necesidades de la obra y del tiempo para construir; ya que por ser una obra de gran magnitud el factor económico no influye entre los tipos antes mencionados. También se puede pensar en una combinación de ellas.

TIPO DE LOSA	PERSONAL	EQUIPO NECESARIO	TIEMPO MINIMO
1) Losa Maciza	Carpinteros, Peones, Fierros y Albañiles	Revolvedora, bomba para concreto, malacate y vibrador.	8 a 9 días.
2) Losa Reticular	Carpinteros, Peones y Albañiles, Fierros.	Revolvedora, bomba para concreto, malacate y vibrador.	10 a 11 días.
3) Losa Preesforzada	Carpinteros, Albañiles y Peones	Tensadora, revolvedora bomba para concreto, malacate y vibrador.	6 a 7 días.
4) Losa Plegada	Carpinteros, Fierros, Albañiles y -- Peones.	Revolvedora, bomba para concreto, malacate y vibrador.	7 a 8 días
5) Losa Siporex	Albañiles y Peones	Malacate y grúa	1 a 1 1/2 días.
6) Losa Autosustentable.	Albañiles y Peones	Malacate, revolvedora y vibrador	1 a 1 1/2 días.
7) Losa Extruida	Albañiles y Operadores.	Grúa	1 día.
8) Losa Spancrete	Albañiles y Peones Operadores.	Grúa, revolvedora y - malacate.	1 día.

RENDIMIENTOS COMPARADOS PARA UNA SUPERFICIE DE 50 M² A UN NIVEL DE ALTURA MAYOR A 5.0 M

TIPO DE LOSA	CLAVE	MATERIAL	M.DE OBRA	EQUIPO	HERRAMIENTA	INDIRECTOS	P. UNIT.
1) Losa Maciza	LM-1	\$350.50	\$214.37	\$ 3.59	\$6.43	\$172.47	\$747.36
2) Losa Maciza	LM-1'	398.80	202.27	21.09	6.07	188.47	816.70
3) Losa Reticular	LR-1	430.47	279.95	5.74	8.40	217.37	941.93
4) Losa Reticular	LR-1'	500.35	257.26	32.68	7.72	239.40	1037.41
5) Losa Reticular	LR-2	437.29	278.31	5.74	8.35	218.91	948.60
6) Losa Reticular	LR-2'	501.14	255.58	32.68	7.67	239.12	1036.19
7) Losa Preesforzada	LPE-1	505.70	216.52	2.39	6.50	219.33	950.44
8) Losa Preesforzada	LPE-1'	544.65	207.08	13.57	6.21	231.45	1002.96
9) Losa Plegada	LP-1	288.67	199.29	1.92	5.98	148.76	644.62
10) Losa Plegada	LP-1'	312.05	191.64	10.94	5.75	156.11	676.49
11) Losa Plegada	LP-2	253.01	193.83	2.28	5.81	136.48	591.41
12) Losa Plegada	LP-2'	282.47	185.69	13.18	5.57	146.07	632.98
13) Losa Prefabricada Siporex	LPS-1	684.59	93.30	-----	2.80	234.21	1014.90
14) Losa Prefabricada Bovedilla	LPB-1	692.49	64.69	1.74	1.94	228.26	989.12
15) Losa Prefabricada Extruida	LPE-2	484.85	322.85	-----	9.69	245.22	1062.61
16) Losa Prefabricada Spancrete	LPS-2	493.39	300.83	-----	9.02	240.97	1044.21

TABLA COMPARATIVA DE COSTO POR M2

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Theory of Plates and Shells.
S. Timoshenko, Mc. Graw - Hill Book Co.
- 2.- Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal
D.D.F. 1977.
- 3.- Reglamento de las Construcciones para Concreto Reforzado (A.C.I. 318-71) y Comentarios.
Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto A.C. 78
- 4.- Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado.
Oscar M. González C., Francisco Robles F.V., Juan Casillas G. de L. y Roger Díaz de Cossio.
Editorial Limusa, S.A. 1975
- 5.- Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto.
Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcción para el D.F.
Comentarios, Ayudas de Diseño y Ejemplos
Instituto de Ingeniería 1977. U.N.A.M.
- 6.- El Diseño de Losas Reticulares.
Ing. Federico Hernández.
- 7.- Concreto Armado
Dr. Ing. Gustavo Otto Fritz de la Orta.
- 8.- Apuntes de Clase de la E.S.I.A.
Ing. J. Heinen e Ing. J. Gutiérrez 1977 - I.P.N.
- 9.- Diseño Estructural, Facultad de Ingeniería.
Apuntes de la U.N.A.M. - 1977
- 10.- Normas y Costos de Construcción
Ing. Arq: Alfredo Plazola Cisneros
Editorial Limusa, S.A.
- 11.- Análisis de Precios Unitarios
C.N.I.C. 1978.
- 12.- Prontuario (Precios Unitarios)
Arq. Manuel Nava C. - 1978