

241176



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL
PARA FLUJO EN MEDIOS POROSOS



P R E S E N T A :

MARIA DEL ROSIO RUIZ URBANO

MEXICO, D. F.

1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

TITULO	PAG.
CAPITULO I	
<u>INTRODUCCION</u>	1
CAPITULO II	
<u>SERIE DE TAYLOR</u>	
SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL	4
INICIACION DE LA SOLUCION POR-SERIES DE TAYLOR	8
CAPITULO III	
<u>ESQUEMA DE DIFERENCIA FINITA</u>	
ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS	10
DIFERENCIA DE UNA FUNCION	11
LA PRIMERA DIFERENCIA DE UN POLINOMIO	14
EL OPERADOR DIFERENCIA HACIA ATRAS	15
EL OPERADOR DIFERENCIA CENTRAL	15
BREVE RESUMEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES O ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES	17
CONVERGENCIA	23
ESTABILIDAD	28
CONGRUENCIA, COMPATIBILIDAD O CONSISTENCIA	35

CAPITULO IV

PLANTEAMIENTO GEOHIDROLOGICO

POROSIDAD	38
VELOCIDAD DEL AGUA EN LOS MEDIOS POROSOS	39
GRADIENTE HIDRAULICO	39
LA LEY DE DARCY	40
DEMOSTRACION DE LA ECUACION - DIFERENCIAL PARA FLUJO EN MEDIOS POROSOS	42

CAPITULO V

PROGRAMA DE COMPUTADORA

FUNDAMENTOS DEL PROGRAMA DE- COMPUTADORA PARA EL ESQUEMA - DE DIFERENCIAS FINITAS	54
DIAGRAMA DE FLUJO	57
CODIFICACION DEL PROGRAMA	60
RESULTADOS	63

CAPITULO IV

PROBLEMA DE COMPROBACION

PROBLEMA DE COMPROBACION	66
PRUEBA DE PERMEABILIDAD	67
PRUEBA DE CEDENCIA ESPECIFICA	69
FORMACION DE LA PARABOLA O LINEA DE SATURACION EN LA MESA HIDROLOGICA	70

PAG.

USO DEL PROGRAMA DE COMPUTA
DORA

79

OBSERVACIONES

81

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

82

BIBLIOGRAFIA

86

CAPITULO I

INTRODUCCION.

La presente tesis pretende mostrar un criterio muy usado en los métodos numéricos para el análisis de una ecuación diferencial parcial aplicada a la Ingeniería Hidráulica. Su propósito es eminentemente didáctico, de manera que para un tema de tesis a nivel licenciatura se tocan solamente algunos puntos importantes dentro del amplio campo de los métodos numéricos.

Se ha hecho énfasis en mostrar una forma de aplicación en un problema cotidiano que pertenece al estudio de la hidráulica, con la intención de que el estudiante sea capaz en problemas de su práctica profesional de lograr aplicaciones semejantes.

Complementando el cálculo numérico con la aplicación de métodos computarizados que proporcionan los resultados acertados en un mínimo de tiempo, así como la obtención de resultados experimentales en un modelo hidráulico que representa en forma física la solución del problema a tratar, consiguiendo así una relación y comparación entre la teoría y la práctica.

El método de las diferencias finitas es una herramienta muy utilizada en el campo de los métodos numéricos ya que hace posible en muchas ocasiones encontrar una "solución", que si bien no cumple exactamente con la ecuación diferencial desde un punto de vista práctico se puede tomar como tal.

Se incluye una explicación del fundamento del método el cual implica un estudio de la solución de una ecuación diferencial por medio de la serie de Taylor, que es el punto de partida para definir las condiciones que debe cumplir dicho método.

Para mostrar las aplicaciones del método se ha escogido un problema del flujo con potencial, en el cual se desea calcular la línea de saturación en el transcurso del tiempo. La ecuación diferencial tema de esta tesis es la siguiente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Partiendo de esta ecuación y con la teoría estudiada podemos llegar a un esquema de diferencias finitas que nos presente en forma discreta el problema a tratar.

En base a la ecuación diferencial a estudiar se plantean las limitaciones del método y se analizan las posibles alternativas de solución que hacen que el problema sea congruente estable y convergente, pruebas que a su vez son indispensables

para el desarrollo del método.

Se incluye un programa de computadora con su respectivo diagrama de flujo, su codificación y sus resultados para distintas condiciones del problema que han sido diseñadas para una sencilla comprensión y que por lo tanto no son de uso general, pero que dan pie para una amplia gama de problemas de Ingeniería Hidráulica.

Por último se presenta un capítulo dedicado a la comprobación de resultados obtenidos en un modelo hidráulico que representa en forma física el problema de la ecuación diferencial, es decir, se comparan las respuestas del esquema de diferencias finitas de la computadora con las que arroja dicho modelo.

Al finalizar la tesis se plantean las conclusiones y/o recomendaciones a las que se llegaron tomando en cuenta todos los resultados obtenidos.

SERIE DE TAYLOR.

Solución de una Ecuación Diferencial.

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier grado, cuya forma más general es:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Se establece en matemáticas que en su solución general -- deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces, puede aceptarse que la solución general de la ecuación II.1, es la siguiente:

$$G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (\text{II.2})$$

CAPITULO II

Gráficamente, la ecuación II.2 representa a una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para valores particulares de las n constantes C_1, C_2, \dots, C_n , como se muestra en la figura 1. Cada una de éstas curvas corresponde a una solución particular de la ecuación diferencial II.1, y analíticamente puede obtenerse sujetando la solución general II.2 a n condiciones independientes que permitan valuar las constantes arbitrarias.

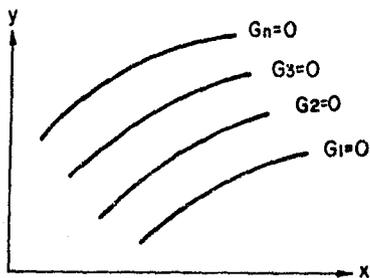


FIGURA 1

Dependiendo de como se establezcan estas condiciones, se distinguen dos tipos de problemas: los de valores iniciales y los de valores en la frontera.

Un problema de valores iniciales está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto inicial. Si la ecuación II.1 es la ecuación diferencial que define al problema y $x=a$ es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

$$\begin{aligned}
 y(a) &= y_0 \\
 y'(a) &= y'_0 \\
 y''(a) &= y''_0 \\
 &\vdots \\
 y^{(n)}(a) &= y^{(n)}_0
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

y se tratará de obtener una solución particular de la ecuación II.1 que verifique al II.3 como se presenta en la figura 2.

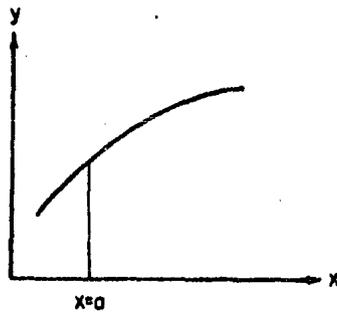


FIGURA 2

En los problemas de valores en la frontera deben establecerse condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema. En particular, en el espacio de una dimensión, hay dos puntos fronteras, por ejemplo: $x=a$ y $x=b$ si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$; por esto mismo el orden mínimo de la ecuación diferencial de un problema de valores en la frontera será dos, como se indica en la figura 3.

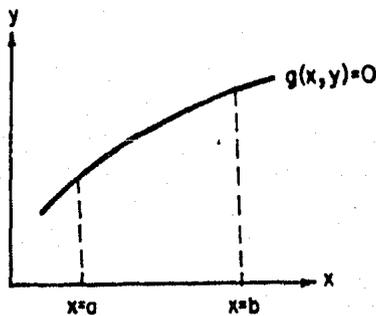


FIGURA 3

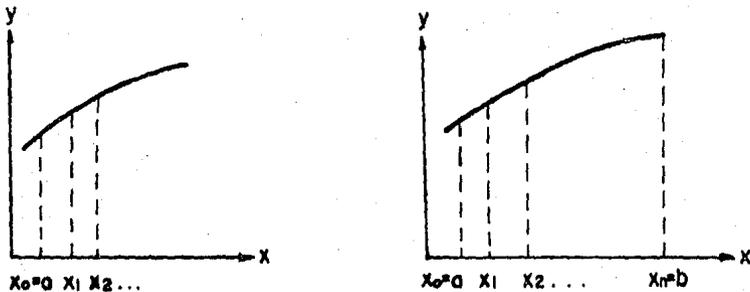
Básicamente, la solución numérica de ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre si. Así, en un problema de valores iniciales, el dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= a \\ \bar{x}_1 &= x_0 + h \\ \bar{x}_2 &= x_0 + 2h \\ \bar{x}_3 &= x_0 + 3h \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= x_0 + nh \end{aligned}$$

En el caso de valores en la frontera se sustituye el intervalo $a < x < b$ por el conjunto finito de puntos:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2h \\ x_3 &= x_0 + 3h \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + nh = b. \end{aligned}$$

obtenidos al dividir el intervalo en n partes iguales. La representación gráfica de estos dos casos se muestra en la figura 4:



a).-Valores iniciales

b).-Valores en la frontera.

Habiéndose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, y esto se hará, en general, sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen aproximaciones a las derivadas o tratando de integrar la ecuación diferencial.

Iniciación de la Solución por Series de Taylor.

La solución $y(x)$ de un problema de valores iniciales puede evaluarse formalmente en la vecindad inmediata del punto inicial $x=x_0$ en términos de la serie de Taylor.

Supóngase que la función $f(x)$ es la suma de la serie de potencias:

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \dots + A_n(x-x_0)^n \quad (\text{II. 4})$$

en un entorno del punto $x=x_0$ y que se conoce el valor de la función y el de sus derivadas de todos los órdenes, en el mismo punto.

Entonces:

$$f(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + 4A_4(x-x_0)^3 + \dots$$

$$f'(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x-x_0) + 3 \cdot 4A_4(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x-x_0) + \dots$$

⋮
⋮
⋮

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot nA_n + \dots$$

Haciendo en todas éstas $x=x_0$, se tiene:

$$f(x_0) = A_0$$

$$f'(x_0) = A_1$$

$$f''(x_0) = 2A_2$$

$$f'''(x_0) = 2 \cdot 3A_3$$

⋮
⋮

$$f^{(n)}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot nA_n$$

De las que se obtiene:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad A_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad A_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Sustituyéndolas en II.4, resulta:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad (\text{II. 5})$$

Haciendo $y=f(x)$ y dando además a x el valor $x_1 = x_0 + h$

tenemos:

$$y = y_0 + \frac{x_0+h-x_0}{1!} y'_0 + \frac{(x_0+h-x_0)^2}{2!} y''_0 + \frac{(x_0+h-x_0)^3}{3!} y'''_0 + \dots$$

simplificando:

$$y = y_0 + \frac{h}{1!} y'_0 + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0 + \dots \quad (\text{II. 6})$$

Esta expresión recibe el nombre de Fórmula de Taylor y permite expandir la función $y=f(x)$ en serie de potencias de h en un entorno del punto $x=x_0$.

CAPITULO III

ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS.

Una función continua $f(x)$ se caracteriza porque su variable independiente " x " puede tomar cualquier valor real dentro de un cierto intervalo $a < x < b$. En cambio, una función discreta $f(x)$ se caracteriza porque " x " solamente toma determinados valores $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, dentro de un cierto intervalo, por lo que el recorrido de la función es:

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_k).$$

En la figura 5, aparece graficada una función continua, y en la figura 6, se muestra la gráfica de una función discreta.

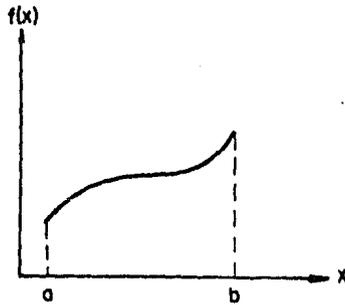


FIGURA 5

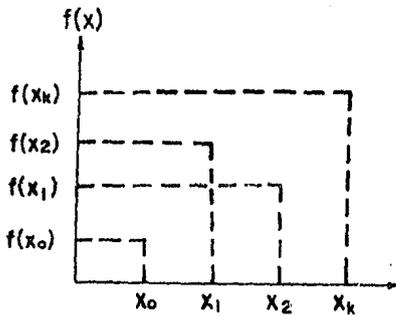


FIGURA 6

Diferencia de una Función.

Como el cálculo de diferencias finitas considera funciones continuas y discretas, será más sencillo establecer el concepto de diferencia de una función, considerando primero una función continua.

Sea la función continua $y(x)$ que aparece en la siguiente figura.

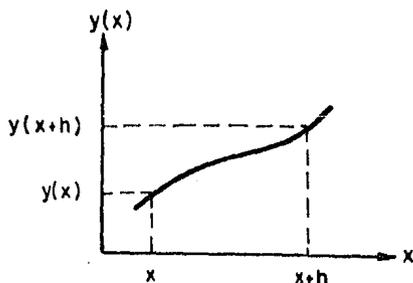


FIGURA 7

Partiendo del punto " x " del dominio de la función, se incrementa en una cantidad finita " h ", de tal manera que para $x+h$ el valor de la función es $y(x+h)$. Entonces el incremento de la función es:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x) \quad (\text{III.1})$$

y se le conoce como primera diferencia de la función.

De aquí podemos dar la siguiente definición:

El cambio de una función $y(x)$ debido a un incremento " h " de su argumento " x " se llama primera diferencia de la función y se representa por $\Delta y(x)$

De la misma manera como se obtuvo la primera diferencia de la función $y(x)$, se obtiene la segunda diferencia $\Delta^2 y(x)$, y esto es:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

entonces:

$$\Delta^2 y(x) = \Delta \{ \Delta y(x) \}$$

$$\Delta^2 y(x) = \{ v(x+h+h) - y(x+h) \} - \{ v(x+h) - y(x) \}$$

$$\Delta^2 y(x) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$

Por lo tanto:

$$\Delta^2 y(x) = \Delta y(x+h) - \Delta y(x) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$

La 3a. diferencia de $y(x)$ es:

$$\Delta^3 y(x) = \Delta \{ \Delta^2 y(x) \}$$

$$\Delta^3 y(x) = \Delta [y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$

$$\Delta^3 y(x) = y(x+3h) - 2y(x+2h) + y(x+h) - [y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$

$$\Delta^3 y(x) = y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x)$$

y así sucesivamente, de tal manera que:

$$\Delta^m y(x) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} y(x+mh-nh) \quad (\text{III.2})$$

desarrollando la expresión III.2 queda:

$$\Delta^m y(x) = y(x+mh) - \binom{m}{1} y(x+mh-h) + \binom{m}{2} y(x+mh-2h) - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} y(x)$$

donde:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

Ahora, si en lugar de una función continua, se tiene una función discreta $y(x_k)$, donde los elementos del dominio sean:

$$x_k = x_0, x_1, x_2, \dots$$

entonces la primera diferencia de la función es:

$$\Delta y(x_k) = y(x_{k+h}) - y(x_k)$$

donde x_{k+h} pertenece al dominio de la función.

Si representamos los elementos del dominio como:

$$y(k) ; k=0, 1, 2, 3, \dots$$

Obteniendo su primera diferencia:

$$\Delta y(k) = y(k+h) - y(k).$$

Otras formas de representar a una función discreta son:

$$y(x_k), y(k) \text{ o } y_k.$$

La Primera Diferencia de un Polinomio.

La primera diferencia del polinomio $y(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots + a_n k^n$ de grado "n", es otro de grado (n-1).

Demostración:

El polinomio de grado "n" se representará de la siguiente forma:

$$y(k) = \sum_{n=0}^n a_n k^n.$$

entonces:

$$\Delta y(k) = \sum_{n=0}^n \Delta a_n k^n.$$

$$\Delta y(k) = \sum_{n=0}^n a_n \Delta k^n.$$

$$\Delta y(k) = \sum_{n=0}^n a_n \left[(k+1)^n - k^n \right]$$

$$\Delta y(k) = \sum_{n=0}^n a_n \left[nk^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} k^{n-2} + \dots \right]$$

que es un polinomio de grado n-1, por lo que queda demostrada la primera diferencia de un polinomio.

Por ejemplo, si se tiene un polinomio de grado 3.

$$f(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3.$$

Su primera diferencia será un polinomio de grado 3-1=2

$$\Delta f(k) = (a_1 + a_2 + a_3) + (2a_2 + 3a_3)k + 3a_3 k^2.$$

La segunda diferencia será un polinomio de grado $3-2=1$ -

$$\Delta^2 f(k) = (2a_2 + 6a_3) + 6a_3 k$$

y la tercera diferencia es un polinomio de grado $3-3=0$

$$\Delta^3 f(k) = 6a_3$$

El Operador Diferencia hacia Atrás ∇ .

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-h) \quad (\text{III.3})$$

El Operador Diferencia Central δ .

$$\delta f(k) = f(k + \frac{h}{2}) - f(k - \frac{h}{2}) \quad (\text{III.4})$$

Otros dos operadores que son algunas veces usados son llamados OPERADORES PROMEDIO y están denotadas por M y μ respectivamente. Están definidos por las siguientes expresiones:

$$Mf(x) = \frac{1}{2} [f(x+h) + f(x)] \quad (\text{III.5})$$

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} [f(x + \frac{h}{2}) + f(x - \frac{h}{2})] \quad (\text{III.6})$$

En conclusión y en base a lo antes escrito podemos escribir los cuatro esquemas fundamentales para el desarrollo de las pruebas a usar, por lo que la Fórmula o Serie de Taylor se puede escribir así:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2!} h^2 u''(x) + \frac{1}{3!} h^3 u'''(x) + \dots \quad (\text{III.7})$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2!} h^2 u''(x) - \frac{1}{3!} h^3 u'''(x) + \dots \quad (\text{III.8})$$

ahora, considerando solo dos términos θ^2 de la ecuación III.7, tenemos:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x)$$

donde:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (a)$$

que es conocido como la DIFERENCIA FINITA HACIA ADELANTE.

Haciendo lo mismo pero con la ecuación III.8

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x)$$

luego:

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (b)$$

llamada comunmente DIFERENCIA FINITA HACIA ATRAS.

Si restamos las ecuaciones III.8 de III.7 considerando θ^2 obtenemos LA DIFERENCIA FINITA CENTRADA, esto es:

$$u(x-h) - u(x+h) = -2hu'(x)$$

por lo tanto:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (c)$$

Gráficamente estos tres esquemas se representan de la siguiente manera:

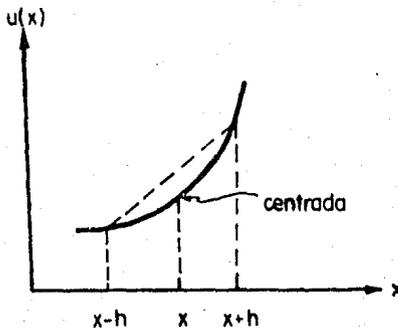


FIGURA 8

Sumando las ecuaciones III.8 y III.7 hasta el tercer término o^3

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x)$$

despejando la segunda derivada de "x"

$$u''(x) = \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2} \quad (d)$$

obtenemos LA DIFERENCIA FINITA DE LA SEGUNDA DERIVADA.

BREVE RESUMEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES O ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

CONCEPTOS FUNDAMENTALES:

Derivada.

Geométicamente es la ecuación de orden menor en un grado, que valuada en un punto nos da la pendiente de la tangente en ese punto

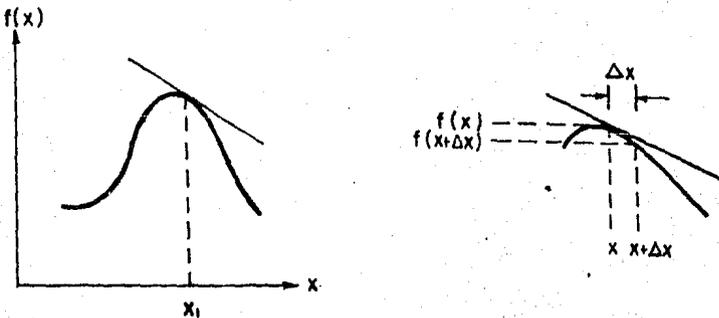


FIGURA 9

esto es:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En este caso la variable dependiente es función de una sola variable y por lo tanto, las derivadas que aparecen en la ecuación son derivadas ordinarias.

Si la variable dependiente, es función de dos o más variables, entonces las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial son derivadas parciales, y en este caso, la ecuación recibe el nombre de ECUACION EN DERIVADAS PARCIALES. Su representación general es:

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0$$

donde $u=u(x, y, \dots)$ es la variable dependiente.

Las ecuaciones en derivadas parciales se clasifican por su:

- a) orden.
- b) grado.
- c) linealidad.

a) El orden de una ecuación en derivadas parciales, es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

b) El grado de una ecuación en derivadas parciales, está dado por la potencia de la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación se puede expresar como un polinomio de esa derivada.

c) Una EDP es lineal, si lo es en la variable dependiente y en sus derivadas, es llamada cuasilineal, si es lineal en la derivada de mayor orden y no lineal en las otras derivadas o en la variable dependiente.

Tipos de EDP.

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0$$

donde a, b, c, d, e, f, g pueden depender de x, y.
ahora si el discriminante:

$b^2 - 4ac < 0$ la EDP es elíptica

$b^2 - 4ac = 0$ la EDP es parabólica

$b^2 - 4ac > 0$ la EDP es hiperbólica

Ejemplos:

Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$a = c = 1; \quad b = d = e = f = g = 0 \quad \therefore b^2 - 4ac = -4 < 0$$

luego es una ecuación elíptica, de segundo orden, primer grado y lineal.

Ecuación de Calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{donde } c \text{ es igual a una cte.}$$

$$a = b = 0; \quad c = -c^2 \quad \therefore b^2 - 4a(-c^2) = 0$$

por lo tanto es una ecuación parabólica, de segundo orden, primer grado y lineal.

Para el desarrollo de las tres pruebas se ejemplificará con la ecuación de Calor, más adelante se demostrará como rige dicha ecuación al flujo en medios porosos.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right]$$

$$c^2 = \frac{kh}{s}$$

donde:

k = permeabilidad

\bar{h} = tirante medio

s = cedencia específica

Por serie de Taylor hacia adelante

$$h(x+\Delta x, t) = h(x, t) + \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 h(x, t)}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

tomando solo 2 términos σ^2

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \frac{h(x+\Delta x, t) - h(x, t)}{\Delta x} \quad (a)$$

analogamente para $h(x, t+\Delta t)$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{h(x, t+\Delta t) - h(x, t)}{\Delta t}$$

Con diferencia finita de la segunda derivada, tomando hasta σ^3

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left[h(x+\Delta x, t) - h(x, t) - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \Delta x \right] \frac{2!}{\Delta x^2} \quad (b)$$

Con serie de Taylor hacia atrás, tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-h(x, t) + h(x-\Delta x, t)}{\Delta x} \quad (c)$$

Sustituyendo la ecuación (c) en la ecuación (b) (b)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h(x+\Delta x, t) - h(x, t) - h(x, t) + h(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h(x+\Delta x, t) + h(x-\Delta x, t) - 2h(x, t)}{\Delta x^2} \quad (d)$$

Sustituyendo la ecuación (d) en III.10

$$\frac{h(x, t+\Delta t) - h(x, t)}{\Delta t} = c^2 \left[\frac{h(x+\Delta x, t) + h(x-\Delta x, t) - 2h(x, t)}{\Delta x^2} \right]$$

donde:

$$c^2 = \frac{2kh}{s}$$

utilizando la siguiente notación.

$$h_i^{k+1} = h(x, t+\Delta t)$$

Tal que i sea la sección y k sea el periodo de tiempo en cuestión.

Queda la ecuación anterior como:

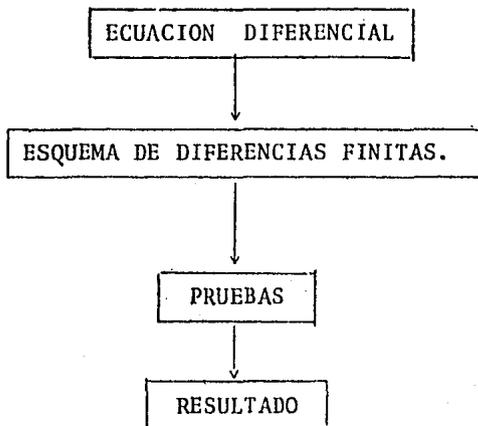
$$h_i^{k+1} - h_i^k = \frac{\Delta t c^2}{\Delta x^2} \left[h_{i+1}^k - 2h_i^k + h_{i-1}^k \right]$$

si denominamos a $\lambda = \frac{\Delta t c^2}{\Delta x^2}$

obtenemos el esquema de diferencias finitas siguiente :

$$h_i^{k+1} = \lambda h_{i+1}^k + (1-2\lambda) h_i^k + \lambda h_{i-1}^k \quad (III.11)$$

Como base general para la solución de una ecuación diferencial por medio del método de diferencias finitas debemos definir lo siguiente:



Como es un método numérico aparece cierto error en la solución de la ecuación diferencial, por lo que podemos decir que:

Sea H la solución exacta de la ecuación diferencial y h la solución exacta del esquema de diferencia finitas por lo tanto existirá un error de truncado o de discretización acumulado, tal que:

$$e = E = H - h$$

lo que nos define la congruencia y convergencia del método.

Ahora sea N la solución del esquema de diferencias finitas con un número limitado de cifras decimales, entonces aparecerá un error de redondeo por lo que:

$$R = h - N$$

provocando la estabilidad del método.

En base a lo antes dicho se puede decir que el error total será:

$$E_t = E+R = H-h + h-N = H-N$$

Convergencia:

Se dice que el esquema es convergente cuando:

$$h \rightarrow H$$

en nuestro problema $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ por lo que su primera derivada es:

$$f'_x = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Analizando la ecuación diferencial

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

si $c^2=1$ y tomamos un intervalo de x de 0 a 1 ($0 \leq x \leq 1$)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

el esquema explícito queda:

$$\frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[h_{i+1}^k - 2h_i^k + h_{i-1}^k \right] \quad (\text{III.12})$$

ahora, sabemos que $e = H-h$ por lo tanto $h = H-e$

podemos escribir:

$$h_{i+1}^k = H_{i+1}^k - e_{i+1}^k$$

$$h_{i-1}^k = H_{i-1}^k - e_{i-1}^k$$

$$h_i^k = H_i^k - e_i^k$$

$$h_i^{k+1} = H_i^{k+1} - c_i^{k+1}$$

Sustituyendo en la ecuación III.12 las ecuaciones anteriores:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[(H_i^{k+1} - e_i^{k+1}) - (H_i^k - e_i^k) \right] = \frac{1}{\Delta x^2} \left[(H_{i+1}^k - e_{i+1}^k) - 2(H_i^k - e_i^k) + (H_{i-1}^k - e_{i-1}^k) \right]$$

despejando e_i^{k+1}

$$-c_i^{k+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[H_{i+1}^k - e_{i+1}^k - 2H_i^k + 2e_i^k + H_{i-1}^k - e_{i-1}^k \right] \left[-H_i^{k+1} + H_i^k - e_i^k \right]$$

ahora:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \text{ ya que } c^2 = 1$$

entonces:

$$e_i^{k+1} = -\lambda H_{i+1}^k + \lambda e_{i+1}^k + 2\lambda H_i^k - 2\lambda e_i^k - \lambda H_{i-1}^k + \lambda e_{i-1}^k + H_i^{k+1} - H_i^k + e_i^k$$

acomodando términos:

$$e_i^{k+1} = \lambda e_{i+1}^k + (1-2\lambda) e_i^k + \lambda e_{i-1}^k - (\lambda H_{i+1}^k + (1-2\lambda) H_i^k + H_{i-1}^k) + H_i^{k+1} \quad (\text{III.13})$$

con serie de Taylor tomando hasta θ^3 para aproximar la solución exacta de la ecuación diferencial H, tenemos:

$$H_{i+1}^k = H_i^k + \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i\Delta x}^{k\Delta t} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i+\theta_1)\Delta x}^{k\Delta t}$$

$$H_{i-1}^k = H_i^k - \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i\Delta x}^{k\Delta t} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i-\theta_2)\Delta x}^{k\Delta t}$$

y

$$H_i^{k+1} = H_i^k + \frac{\Delta t}{1!} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{i \Delta x}^{(k+\theta_3) \Delta t}$$

donde θ es una constante que aproxima, tal que $0 < \theta_1$, $\theta_2 \leq 1$, sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación III.13.

$$e_i^{k+1} = \lambda e_{i+1}^k + (1-2\lambda) e_i^k + \lambda e_{i-1}^k - \lambda H_j^k - \frac{\lambda \Delta x}{1!} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i \Delta x}^{k \Delta t} +$$

$$\frac{\lambda \Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i+\theta_1) \Delta x}^{k \Delta t} + 2\lambda H_i^k - \lambda H_i^k + \lambda \Delta x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_i^k -$$

$$\frac{\lambda \Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i-\theta_2) \Delta x}^{k \Delta t} + H_i^k + \Delta t \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_i^{(k+\theta_3) \Delta t} - H_i^k$$

ahora, eliminando términos nos queda:

$$e_i^{k+1} = \lambda e_{i+1}^k + (1-2\lambda) e_i^k + \lambda e_{i-1}^k + \Delta t \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{i \Delta x}^{(k+\theta_3) \Delta t} -$$

$$\frac{\lambda \Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i+\theta_1) \Delta x}^{k \Delta t} - \frac{\lambda \Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i-\theta_2) \Delta x}^{k \Delta t}$$

esto es igual a:

$$e_i^{k+1} = \lambda e_{i+1}^k + (1-2\lambda) e_i^k + \Delta t \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{i \Delta x}^{(k+\theta_3) \Delta t} - \frac{\lambda \Delta x^2}{2!}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i+\theta_2) \Delta x}^{k \Delta t} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(i-\theta_2) \Delta x}^{k \Delta t} \right]$$

ahora si consideramos una nueva constante que aproxima θ_4 y -
 definimos su intervalo como $-1 \leq \theta_4 \leq 1$ podemos sumar θ_1 y θ_2
 tal que:

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{(i+\theta_1)\Delta t}^{k\Delta t} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{(i-\theta_2)\Delta x}^{k\Delta t} = 2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{i+\theta_4}^{k\Delta t}$$

por lo tanto la ecuación III.13 queda como sigue:

$$e_i^{k+1} = \lambda e_{i+1}^k + (1-2\lambda) e_i^k + 2e_{i-1}^k + \Delta t \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_i^{k+\theta_3} - \lambda \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{i+\theta_4}^k$$

si $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$e_i^{k+1} = \lambda e_{i+1}^k + (1-2\lambda) e_i^k + 2e_{i-1}^k + \Delta t \left[\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) \Big|_i^{k+\theta_3} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{i+\theta_4}^k \right] \quad (\text{III.14})$$

Sea E^k el máximo módulo del error en la fila i

$$E^k = \max \left| e_i^k \right| \text{ a lo largo de } i = \text{constante}$$

gráficamente puede verse:

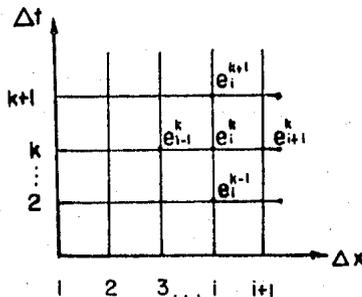


FIGURA 10

Existen dos casos con relación a los módulos de los errores en la ecuación III.14.

a) Si λ y $(1-2\lambda) > 0$

$$\left| e_i^{k+1} \right| \leq \lambda \left| e_{i+1}^k \right| - (1-2\lambda) \left| e_i^k \right| + \lambda \left| e_{i-1}^k \right| + \Delta t M$$

donde:

$$M = \left| \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_i^{k+\theta_3} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i+\theta_4}^k \right|$$

o sea $\lambda > 0$ y $\lambda \leq 1/2$

b) Si λ y $(1-2\lambda) < 0$

$$\left| e_i^{k+1} \right| \geq \lambda \left| e_{i+1}^k \right| + (1-2\lambda) \left| e_i^k \right| + \lambda \left| e_{i-1}^k \right| + \Delta t M$$

luego $\lambda \leq 1/2$

suponiendo que todos los módulos son máximos.

$$\left| e_i^{k+1} \right| \leq \lambda E^k + (1-2\lambda) E^k + \lambda E^k + \Delta t M$$

$$\left| e_i^{k+1} \right| \leq \lambda E^k + E^k - 2\lambda E^k + \lambda E^k + \Delta t M$$

$$\left| e_i^{k+1} \right| \leq E^k + \Delta t M$$

esta desigualdad vale para cualquier $\left| e_i^{k+1} \right|$

por lo que el máximo error para cualquier E^{k+1} será

$$\max \left| e_i^{k+1} \right| = E^{k+1}$$

$$E^{k+1} \leq E^k + \Delta t M$$

Analizando la forma en que varía el error.

$$\begin{aligned} \text{si } k = 0 & \quad E^1 \leq E^0 + \Delta t M \\ k = 1 & \quad E^2 \leq E^1 + \Delta t M \\ & \quad E^2 \leq E^0 + \Delta t M + \Delta t M \\ & \quad E^2 \leq E^0 + 2\Delta t M \\ k = 2 & \quad E^3 \leq E^0 + 3\Delta t M \\ k = k+1 & \quad E^k \leq E^0 + k\Delta t M \end{aligned}$$

de las condiciones iniciales sabemos que $E^0 = 0$

$$\therefore E^k \leq k\Delta t M$$

ahora si $\Delta t \rightarrow 0$; $E^k \rightarrow 0$

en conclusión el esquema es convergente para $\lambda \leq 1/2$

Estabilidad.

Sea N la solución numérica de la ecuación en diferencias, se le llama error de redondeo a:

$$R_i^k = h_i^k - N_i^k$$

luego, si R_i^k no crece indefinidamente al aumentar t , se dice que R está acotada y por lo tanto que el esquema es estable.

Del esquema explícito

$$\frac{1}{\Delta t} \left(h_i^{k+1} - h_i^k \right) = \frac{c^2}{\Delta x^2} \left[h_{i+1}^k - 2h_i^k + h_{i-1}^k \right]$$

Si $R=h-H \quad \therefore \quad N=h-R$ (III.15)

el Resultado numérico del esquema sería:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(N_i^{k+1} - N_i^k \right) = \frac{c^2}{\Delta x^2} \left[N_{i+1}^k - 2N_i^k + N_{i-1}^k \right]$$

sustituyendo III.15 en la ecuación anterior

$$\left(h_i^{k+1} - R_i^{k+1} \right) - \left(h_i^k - R_i^k \right) = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2} \left[\left(h_{i+1}^k - R_{i+1}^k \right) - 2 \left(h_i^k - R_i^k \right) + \left(h_{i-1}^k - R_{i-1}^k \right) \right]$$

como $\lambda = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2}$ tenemos:

$$h_i^{k+1} - h_i^k - \lambda h_{i+1}^k - 2\lambda h_i^k + \lambda h_{i-1}^k - \left[R_i^{k+1} - R_i^k - \lambda R_{i+1}^k + 2\lambda R_i^k - \lambda R_{i-1}^k \right] = 0$$

como h es la solución exacta del esquema

$$h_i^{k+1} - h_i^k - \lambda h_{i+1}^k - 2\lambda h_i^k + \lambda h_{i-1}^k = 0$$

entonces el error es el siguiente

$$R_i^{k+1} - R_i^k - \lambda R_{i+1}^k + 2R_i^k - \lambda R_{i-1}^k = 0 \quad (III.16)$$

despejando R_i^{k+1} obtenemos:

$$R_i^{k+1} = R_i^k + \lambda R_{i+1}^k - 2\lambda R_i^k + \lambda R_{i-1}^k$$

$$R_i^{k+1} = \lambda R_{i+1}^k + \lambda R_{i-1}^k + (1-2\lambda) R_i^k$$

Analizando como varía el error al variar Δt .

Tenemos dos condiciones:

- a) Si el error crece es inestable.
- b) Si el error decrece es estable.

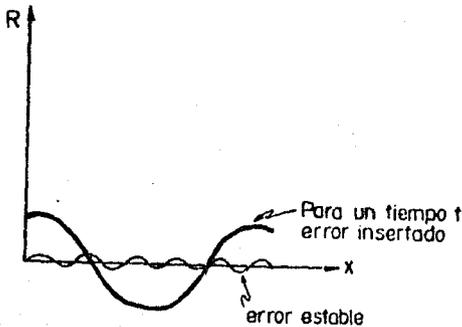


FIGURA II

Apoyándonos en el serie de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{2z \hat{i} n x / l}$$

donde:

$A_n = \text{constante}$

$$\hat{i} = \sqrt{-1}$$

$l = \text{intervalo en que se define la función}$

$$x = i\Delta x$$

$$\dots$$
$$f(x) = f(i\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{2\pi \hat{i} n i \Delta x / l}$$

si hacemos cambio de variable tal que $\beta_n = \frac{2\pi n}{l}$

la serie quedará expresada como:

$$f(i\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\hat{i} \beta_n i \Delta x}$$

Para un tiempo t fijo, analizamos las componentes.

como A_n es constante se puede eliminar, lo que nos queda como:

$$f(x) = e^{\hat{i} \beta_n \Delta x} \quad \text{y} \quad g(t) = e^{\alpha t} = e^{\alpha k \Delta t}$$

donde $\alpha = \text{constante compleja}$

el error se puede expresar de la siguiente manera

$$R_i^k = e^{\hat{i} \beta_i \Delta x} e^{\alpha k \Delta t} = e^{\hat{i} \beta_i \Delta x} s^k \quad (\text{III.17})$$

donde:

$$e^{\alpha \Delta t} = s^k$$

considerando como k exponente de s y superíndice en R_i^k .

Para que se cumplan las condiciones de estabilidad;
tomamos valores absolutos:

$$\left| R \right|_i^{k+1} \leq \left| R \right|_i^k \quad \text{lo que implica que}$$

$$\left| e^{\hat{i}\beta_i \Delta x} \right| \left| \xi^{k+1} \right| \leq \left| e^{\hat{i}\beta_i \Delta x} \right| \left| \xi^k \right|$$

por lo tanto:

$$\left| \xi \right|^{k+1} \leq \left| \xi \right|^k$$

dividiendo entre $\left| \xi \right|^k$

$$\left| \xi \right| \leq 1$$

que es la condición de estabilidad para el esquema de diferencias finitas expuesto.

Sustituyendo III.17 en la ecuación III.16 tenemos:

$$R_i^{k+1} = e^{\hat{i}\beta_i \Delta x} \xi^{k+1}$$

$$R_i^k = e^{\hat{i}\beta_i \Delta x} \xi^k$$

$$R_{i+1}^k = e^{\hat{i}\beta_{(i+1)} \Delta x} \xi^k$$

$$R_{i-1}^k = e^{\hat{i}\beta_{(i-1)} \Delta x} \xi^k$$

tenemos:

$$e^{\hat{i}\beta_i \Delta x} \xi^{k+1} - e^{\hat{i}\beta_i \Delta x} \xi^k - \lambda e^{\hat{i}\beta_{(i+1)} \Delta x} \xi^k + 2\lambda e^{\hat{i}\beta_j \Delta x} \xi^k - \lambda e^{\hat{i}\beta_{(i-1)} \Delta x} \xi^k = 0$$

dividiendo entre $e^{\hat{i}\beta\Delta x} \xi^k$

$$\xi - 1 - \lambda e^{\hat{i}\beta\Delta x} + 2\lambda - \lambda e^{-\hat{i}\beta\Delta x} = 0$$

por lo tanto ξ valdrá:

$$\xi = 1 + \lambda e^{\hat{i}\beta\Delta x} - 2\lambda + \lambda e^{-\hat{i}\beta\Delta x}$$

$$\xi = 1 + \lambda \left(e^{\hat{i}\beta\Delta x} + e^{-\hat{i}\beta\Delta x} - 2 \right) \quad (\text{III.18})$$

Por identidades de Euler . . .

$$\cos \theta = \frac{e^{\hat{i}\theta} + e^{-\hat{i}\theta}}{2}$$
$$\text{sen } \theta = \frac{e^{\hat{i}\theta} - e^{-\hat{i}\theta}}{2\hat{i}}$$

entonces sustituyendo en la ecuación III.18.

$$\xi = 1 + \lambda \left(2 \cos (\beta\Delta x) - 2 \right)$$

por identidades trigonométricas

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$$
$$\delta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \text{sen}^2 \theta$$

por lo que:

$$\cos (\beta\Delta x) = 1 - 2 \text{sen}^2 \left(\frac{\beta\Delta x}{2} \right)$$
$$2 \cos (\beta\Delta x) = 2 - 4 \text{sen}^2 \left(\frac{\beta\Delta x}{2} \right)$$

y

$$- 2 + 2 \cos (\beta\Delta x) = - 4 \text{sen}^2 \left(\frac{\beta\Delta x}{2} \right)$$

de la condición de estabilidad: $\xi = 1 - 4\lambda \text{sen}^2 \left(\frac{\beta\Delta x}{2} \right)$

Acotando su valor absoluto y con la condición de estabilidad:

$$\left| 1 - 4 \lambda \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1.$$

ó bien

$$-1 \leq \left| 1 - 4 \lambda \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1.$$

Tenemos 2 casos para resolver esta desigualdad.

a)
$$\left| 1 - 4 \lambda \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1.$$

si Δx y β son constantes el intervalo de la función trigonométrica es:

$$1 \geq \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2} \right) \geq 0 \quad (\text{III.19})$$

es decir cuando vale 1 la ecuación III.19 tenemos:

$$1 - 4\lambda \leq 1 \quad ; \quad -4\lambda \leq 0.$$

$$\therefore \lambda \geq 0$$

b) si vale 0 $1 \geq -1$.

$$\text{si vale } 1; 1 - 4\lambda \geq -1$$

$$\therefore \lambda \leq 1/2$$

Por lo que se concluye que el esquema es estable para

$$\lambda \geq 0 \quad \text{y} \quad \lambda \leq 1/2$$

Congruencia, Compatibilidad o Consistencia.

Sea $F_i^k(h) = 0$ la ecuación en diferencias finitas en i, k .

Si se reemplaza H por h en los puntos de la malla, por lo tanto:

$F_i^k(H) \neq 0$ y se le denomina error de truncado local en el punto i, k .

Si $F_i^k(H)$ tiende a cero cuando Δx e Δt tienden también a cero.

Se dice que el esquema es compatible con la ecuación diferencial.

De la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

y con el esquema de diferencias finitas.

$$h_i^{k+1} - h_i^k = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2} \left[h_{i+1}^k - 2h_i^k + h_{i-1}^k \right]$$

suponiendo $c=1$ para considerar las mismas condiciones que en la prueba de convergencia.

$$h_i^{k+1} - h_i^k = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[h_{i+1}^k - 2h_i^k + h_{i-1}^k \right]$$

si

$$\lambda = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \text{ por lo tanto}$$

$$h_i^{k+1} = \lambda h_{i+1}^k + (1-2\lambda) h_i^k + \lambda h_{i-1}^k \quad (\text{III.20})$$

acomodando con serie de Taylor los términos de la ecuación --
III.20.

$$h_i^{k+1} = h_i^k + \frac{\Delta t}{1!} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right) + \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right) + \frac{\Delta t^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 h}{\partial t^4} \right) + \dots$$

$$h_{i-1}^k = h_i^k - \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) + \dots$$

$$h_{i+1}^k = h_i^k + \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) + \dots$$

sustituyendo en la ecuación III.20.

$$h_i^k + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial t^4} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[h_i^k + \Delta x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) \right] + h_i^k - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} h_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[h_i^k - \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right]$$

esto es:

$$h_i^k + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial t^4} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\Delta x \Delta t}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\Delta t \Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + h_i^k - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} h_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$- \frac{\Delta x \Delta t}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\Delta t \Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \dots$$

Reduciendo los términos y dividiendo la ecuación entre Δt , -
tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^3}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial t^4} + \dots = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \dots$$

ahora, analizando las condiciones para que el esquema sea con-
gruente, es decir, Δx y Δt tienden a cero.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

que es igual a la ecuación diferencial de partida, $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$

por lo tanto, se puede concluir que el esquema es congruente para
la ecuación diferencial cuando $c = 1$.

En conclusión de las 3 pruebas a las que se sujeta un esquema-
de diferencias finitas y analizado para nuestro problema se es-
tablece que:

El esquema es convergente cuando $c = 1$ para $\lambda \leq 1/2$, estable-
para el intervalo de valores de λ entre 0 y $\frac{1}{2}$ y congruente -
cuando $c = 1$.

Lo que significa que nuestro esquema cumple con las 3 condicio-
nes del tema.

Es de mencionar que es necesario y suficiente cumplir con solo
dos pruebas para poder aplicar el método.

CAPITULO IV

PLANTEAMIENTO GEOHIDROLOGICO.

POROSIDAD.

Un medio poroso está formado por un agregado de granos entre los cuales existen espacios vacíos que pueden ser ocupados por un fluido; éstos espacios vacíos se llaman poros.

En el terreno existen muy diversas categorías; mientras puede existir una red de poros interconectados y el agua puede circular libremente por ellos, existen otros totalmente cerrados en los que el fluido está confinado; también existen poros semicerrados a través de los cuales el agua circula con cierta dificultad y lentitud y los intercambios de materia con el exterior se realizan principalmente por difusión.

La porosidad es una propiedad macroscópica que representa un volumen grande de material.

VELOCIDAD DEL AGUA EN LOS MEDIOS POROSOS.

El agua se mueve en el terreno a velocidad variable-según el tamaño y orientación de los poros; sin embargo, considerando un volúmen de medio suficientemente grande, puede definirse una velocidad media en una dirección media -vector de velocidad media-; a esa velocidad se le llama velocidad de filtración, velocidad intergranular o velocidad real del flujo.

Sin embargo, es usual considerar como velocidad lo que se obtiene al dividir el gasto que pasa por una cierta superficie perpendicular al flujo por el área de la misma; a esta velocidad se le llama velocidad de flujo, velocidad de Darcy o flujo específico: como es el concepto de velocidad más empleado en teoría del flujo.

GRADIENTE HIDRAULICO.

Si considera un cilindro de material poroso tal como se indica en la figura, con fluido en movimiento, puede escribirse la ecuación de Bernoulli para los puntos A y B, separados por una distancia Δs en la dirección del flujo.

$$\frac{P_A}{\gamma \Delta} + Z_A + \frac{V_A^{*2}}{2g} = \frac{P_B}{\gamma \Delta} + Z_B + \frac{V_B^{*2}}{2g} + \Delta h \quad (\text{IV. 1})$$

donde:

P = presión hidrostática medida con un piezómetro.

V* = velocidad real.

Δh = pérdida de carga total entre el punto A y B

γ = peso específico del fluido.

El nivel piezométrico en cada punto es:

$$h = \frac{P}{\gamma} + Z$$

El gradiente hidráulico viene definido por:

$$i = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = - \frac{dh}{ds} = - \text{grad } h.$$

midiendo ds en la dirección del flujo.

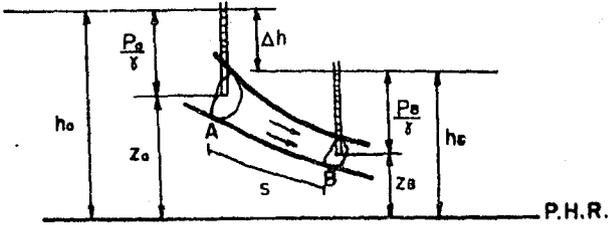


FIGURA 12

En la mayoría de los casos v^* es tan pequeña que el término que lo contiene puede despreciarse, quedando:

$$\frac{P_A}{\gamma \Delta} + z_A = \frac{P_B}{\gamma B} + z_B + \Delta h$$

de modo que en cualquier punto:

$$h = \frac{P}{\gamma} + z$$

define la energía por unidad de peso del agua.

LA LEY DE DARCY.

El término Δh de la ecuación IV.1 puede obtenerse en régimen laminar por la ley de Darcy (1856):

$$v = k \cdot i = - k \frac{dh}{ds} \quad (\text{IV. 2})$$

en la que:

v = velocidad de flujo

i = gradiente hidráulico

k = permeabilidad o conductividad hidráulica.

Esta ley fue experimentada en cilindros rellenos de material poroso y ha sido repetidamente confirmada por numerosos investigadores. (Por ejemplo los dispositivos de Terzaghi). La permeabilidad es un coeficiente de proporcionalidad definido por la ecuación IV.2.

Si se tiene un cilindro vertical de sección constante A y longitud L , y se hace circular agua a su través con una diferencia de niveles entre la entrada y la salida Δh (Fig. 13), puede escribirse:

$$V = k \cdot \frac{\Delta h}{L}$$

y el gasto que circula

$$Q = V \cdot A = k \cdot A \cdot \frac{\Delta h}{L}$$

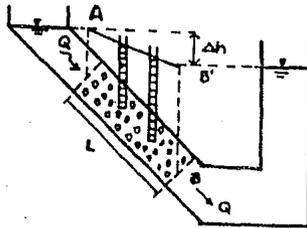


FIGURA. 13

La ley de Darcy es también una ley macroscópica que representa el comportamiento de un número elevado de poros. No representa en modo alguno el comportamiento del agua dentro de cada poro y permite tratar el flujo subterráneo como un flujo no viscoso.

DEMOSTRACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUJO EN MEDIOS POROSOS.

Para dicha demostración partiremos de la conservación de masa. Sea un cubo diferencial de lados dx, dy, dz en el punto (x, y, z) del medio. (Fig. 14).

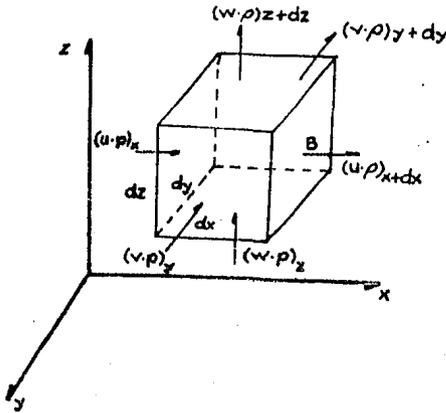


FIGURA. 14

Para la cara A, normal el eje O_x , entra una masa de fluido M_x en el tiempo dt , tal que:

$$M_x = (\rho \cdot u)_x \, dy \cdot dz \cdot dt$$

siendo u la velocidad según el eje x y ρ la densidad en x .

Por la cara B, opuesta a la cara A, sale una masa de fluido M_{x+dx} en el tiempo dt .

$$M_{x+dx} = (\rho \cdot u)_{x+dx} \, dy \cdot dz \cdot dt$$

La diferencia entre la entrada y la salida es:

$$\Delta M_x = M_x - M_{x+dx} = dy \cdot dz \cdot dt \left((\rho \cdot u)_x - (\rho \cdot u)_{x+dx} \right) = - dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x}$$

La variación de masa por unidad de tiempo y unidad de volúmen será:

$$\Delta M_x = \frac{\partial \rho \cdot u}{\partial x}$$

Similarmente para los ejes y, z, puede establecerse

$$\Delta M_y = - \frac{\partial \rho \cdot v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \Delta M_z = - \frac{\partial \rho \cdot w}{\partial z}$$

en los que v y w son los componentes de velocidad.

Sumando las tres ecuaciones se obtiene la diferencia entre la entrada y la salida que vale:

$$\Delta M = \Delta M_x + \Delta M_y + \Delta M_z = - \left(\frac{\partial \rho \cdot u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \rho \cdot w}{\partial z} \right)$$

Si en el elemento considerado se genera un volúmen de fluido F por unidad de tiempo y por unidad de volúmen.

$$\Delta M + F \cdot \rho = 0$$

de modo que:

$$\frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z} - F \cdot \rho = 0 \quad (\text{IV. 3})$$

Si el campo vectorial de velocidades v es irrotacional, existe una función ϕ tal que:

$$u = - \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v = - \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad w = - \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{IV. 4})$$

En la realidad el flujo no es irrotacional dentro de cada poro, pero macroscópicamente puede considerarse como tal, - que es cuando es válida la ley de Darcy que sirvió para definir el valor ϕ .

Introduciendo los valores IV.4 en IV.3 queda:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + F \cdot \rho = 0$$

En general es $\rho = \text{constante}$ de modo que:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + F = 0,$$

Como el problema que estudiamos se considera como régimen no estacionario, tenemos:

El coeficiente de almacenamiento específico S' viene definido por la variación de la masa de agua por unidad de volumen en un elemento de volumen medio al variar la presión en una unidad.

Luego:

$$S' = \frac{\text{variación}}{\partial A \cdot \partial z \cdot \partial \rho}$$

esto es, la acumulación por unidad de volumen en un tiempo dt es:

$$-S' \frac{\partial p}{\partial t} dt = F \cdot dt$$

Siendo $\frac{\partial p}{\partial t}$ el ritmo de variación de presión.

De acuerdo con la fórmula IV.3 se cumple que:

$$\frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z} = -S' \frac{\partial p}{\partial t}$$

Si se admiten algunas simplificaciones que consisten en suponer que el medio es homogéneo y que k y ρ son constantes en el acuífero en un mismo tiempo, así pues:

$$h = z + \frac{p}{\rho g} + \text{cte} ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2 g} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

pues $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$

y sabiendo que $\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot \beta \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$

donde β es la compresibilidad del agua.

Así pues:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} [1 - \rho \cdot \beta] \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot g} \frac{\partial p}{\partial t}$$

si ρ y $k =$ ctes; tenemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{S'}{k} \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

y dividiendo por b , espesor del acuífero y recordando que transmisibilidad $T = k \cdot b$ y llamando $a: S = b \cdot g \cdot S'$

entonces:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

si

$$c^2 = \frac{T}{S} = \frac{kb}{S}$$

y considerando que el ancho del acuífero es aproximadamente --
igual al tirante medio que se presenta entonces: $c^2 = \frac{kh}{S}$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) c^2 = \frac{\partial h}{\partial t}$$

que es la ecuación general para flujo en medios porosos.

Suponiendo la ecuación III.9 unidimensional para el problema de la figura 15, entonces:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

y con el esquema mencionado en el capítulo anterior

$$h_i^{k+1} = \lambda h_{i+1}^k + (1-2\lambda) h_i^k + \lambda h_{i-1}^k \quad \text{donde } \lambda = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2}$$

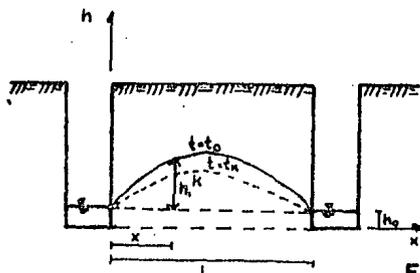


FIGURA. 15

Definamos las condiciones de frontera iniciales, es decir:

$$h(x,t) \dots \text{ si } t = 0 ; h = \phi(x)$$

luego:

$$h(x,0) = \phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es una variación conocida de h en x para $t = 0$

también si $x = 0 ; h = h_0$

$x = L ; h = h_0$

entonces; $h(0,t) = h_0$

$h(L,t) = h_0$

Para cálculos con calculadora o la escritura de un programa de cómputo es útil representar el esquema de diferencias finito para éste problema por la "molécula" de la figura 16

En la "molécula" aparecen en los "átomos" los coeficientes de los distintos valores de la función.

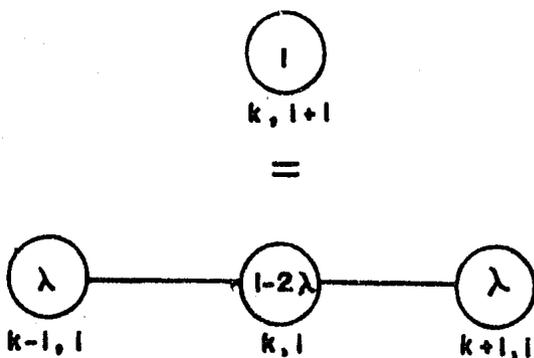


FIGURA 16

Como queremos calcular la posición del nivel de aguas freáticas en un determinado lugar y zona, es necesario hacer muestreos para conocer la posición del agua en un cierto tiempo y distancia para ajustar los valores obtenidos a una función -- que aproxima el comportamiento del nivel de agua freático.

En nuestro problema consideramos que sí tienen las -- condiciones iniciales:

$$h(x,0) = \phi(x) = \frac{4x(L-x)}{L^2}$$

que es una función que cumple con los requisitos antes expuestos.

Ahora si $L = 20$ m, $x = 2$ m ; $k = 0.001$ m/s, $S = 0.5$ y $\bar{h} = 0.5$ m y por condiciones de frontera $h_0^k = 0$.

a) Para $\Delta t = 2000$ seg ; $c^2 = \frac{2kh}{S} = \frac{2(0.001)(0.5)}{0.5} = 0.002$

∴

$$\lambda = 0.002 \frac{2000}{2^2} = 1$$

del esquema si $k = 0$ e $i = 1$

$$h_1^1 = 1 (h_2^0) + (1-2(1)) h_1^0 + 1 (h_0^0)$$

luego:

$$k_1^1 = h_2^0 - h_1^0 + h_0^0$$

sustituyendo valores en la función $\phi(x)$

como el problema es simétrico, sólo se analizará la mitad.

No	(m)	$\phi(x)$ m
0	0	0
1	2	0.36
2	4	0.64
3	6	0.84
4	8	0.96
5	10	1.00

sustituyendo en el esquema cuando: $i = 1$ y $k = 0$

$$h_1^1 = 0.64 - 0.36 = 0.28$$

si $i = 2$; $k = 0$

$$h_2^1 = h_3^0 - h_2^0 + h_1^0 = 0.84 - 0.64 + 0.36 = 0.56$$

Con la misma metodología obtenemos la siguiente tabla de resultados:

t	k	h_0^k	h_1^k	h_2^k	h_3^k	h_4^k	h_5^k	
0	0	0	0.36	0.64	0.84	0.96	1.0	...
2000	1	0	0.28	0.56	0.76	0.88	0.92	...
4000	2	0	0.28	0.48	0.68	0.80	0.84	...
6000	3	0	0.20	0.48	0.60	0.72	0.76	...
8000	4	0	0.28	0.32	0.60	0.64	0.68	...
10000	5	0	0.04	0.56	0.36	0.64	0.60	...
12000	6	0	0.52	-0.16	0.84	0.32	0.68	...
14000	7	0	-0.78	1.52	-0.68	1.20	-0.04	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Como se observa en los resultados obtenidos en diferentes instantes, el esquema es inestable, porque consideramos un valor de λ que no pertenece al intervalo en el cual el esquema es estable.

Por lo que concluimos que con $\lambda = 1$ el esquema es inestable como se puede ver en las pruebas del capítulo anterior, donde para dicho esquema la solución será convergente, estable y congruente para valores de $0 < \lambda \leq 1/2$.

b) Para obtener un $\lambda = 1/2$ consideramos $\Delta t = 1000$ seg. de la misma manera el esquema ahora reducido será:

$$h_i^{k+1} = \frac{1}{2} h_{i+1}^k + \frac{1}{2} h_{i-1}^k$$

$$h_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left(h_{i+1}^k + h_{i-1}^k \right)$$

si $k = 0$; $i = 1$

$$h_1^1 = \frac{1}{2} (h_2^0 + h_0^0) = \frac{1}{2} (0.64 + 0) = 0.32$$

si $k = 0$, $i = 2$

$$h_2^1 = \frac{1}{2} (h_3^0 + h_1^0) = \frac{1}{2} (0.84 + 0.36) = 0.60$$

la tabla de resultados es la siguiente:

t	k	h_0^k	h_1^k	h_2^k	h_3^k	h_4^k	h_5^k	
0	0	0	0.36	0.64	0.84	0.96	1	...
1000	1	0	0.32	0.60	0.80	0.92	0.96	...
2000	2	0	0.30	0.56	0.76	0.88	0.92	...
3000	3	0	0.28	0.53	0.72	0.84	0.88	...
4000	4	0	0.256	0.50	0.69	0.80	0.84	...
5000	5	0	0.25	0.48	0.65	0.76	0.80	...
6000	6	0	0.238	0.45	0.62	0.73	0.76	...
7000	7	0	0.225	0.43	0.59	0.69	0.73	...
.
.
.

Ahora los valores de los tirantes disminuyen en forma racional con variaciones en el tiempo y la distancia, lo que significa que el esquema con $\lambda = 1/2$ es estable, como antes se había demostrado.

- c) Probaremos el esquema para $\lambda = 1/4$. Para comprobar la validez del intervalo de valores en el cual el problema es congruente, convergente y estable.

Implica que $\Delta t = 500$ seg. ; por lo tanto:

$$h_i^{k+1} = \frac{1}{4} h_{i+1}^k + \frac{1}{2} h_i^k + \frac{1}{4} h_{i-1}^k$$

$$h_i^{k+1} = 0.25 h_{i+1}^k + 0.5 h_i^k + 0.25 h_{i-1}^k$$

si $k = 0$; $i = 1$

$$h_1^1 = 0.25 h_2^0 + 0.5 h_1^0 + 0.25 h_0^0$$

$$h_1^1 = 0.25 (0.64) + 0.5 (0.36) + 0 = 0.34$$

si $k = 0$; $i = 2$

$$h_2^1 = 0.25 h_3^0 + 0.5 h_2^0 + 0.25 h_1^0$$

$$= 0.25 (0.84) + 0.5 (0.64) + 0.25 (0.36) = 0.62$$

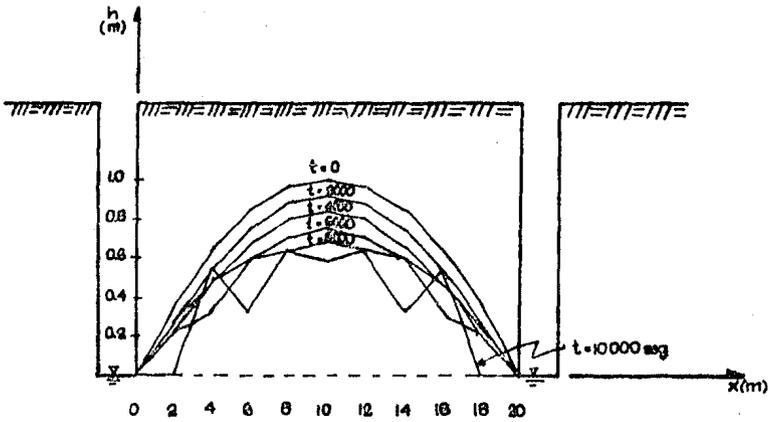
Por lo que obtenemos la siguiente tabla de resultados:

t	k	h_0^k	h_1^k	h_2^k	h_3^k	h_4^k	h_5^k	
0	0	0	0.36	0.64	0.84	0.96	1	...
500	1	0	0.34	0.62	0.82	0.94	0.98	...
1000	2	0	0.325	0.60	0.80	0.92	0.96*	...
1500	3	0	0.3125	0.5812	0.78	0.90	0.94	...
2000	4	0	0.301	0.563	0.7603	0.88	0.92*	...
2500	5	0	0.2913	0.5468	0.7409	0.8601	0.90	...
3000	6	0	0.2824	0.5315	0.7222	0.8403	0.8801*	...
3500	7	0	0.2740	0.5169	0.7041	0.8207	0.8602	...

* Resultados semejantes cuando $\lambda = 1/2$

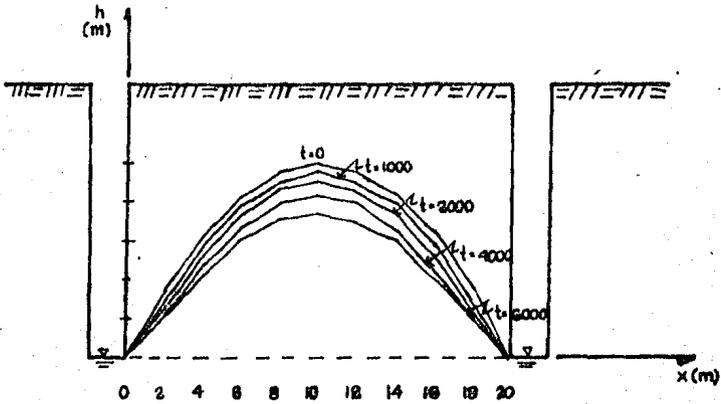
Que como vemos el esquema también es estable con $\lambda = 1/4$.

Graficamente los resultados son los siguientes:



ESQUEMA INESTABLE $\lambda = 1$

FIGURA 17



ESQUEMA ESTABLE $\lambda = 1/2$

FIGURA 18

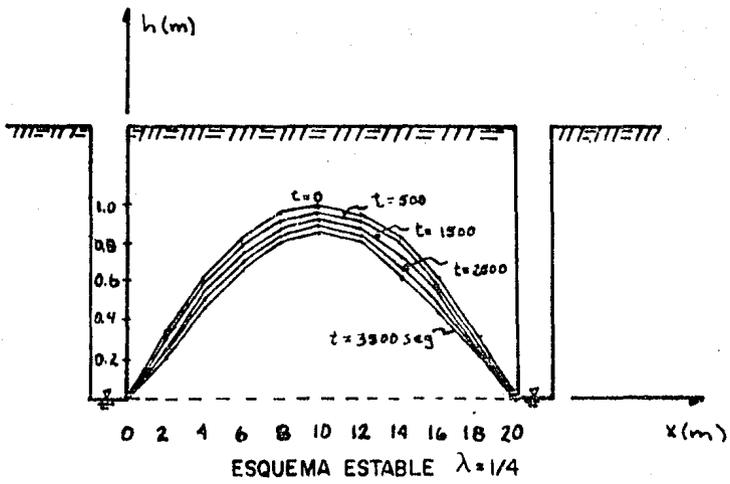


FIGURA 19

CAPITULO V

FUNDAMENTOS DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS.

Para el esquema de diferencias finitas para la solución de la ecuación diferencial para flujo en medios porosos se usó un programa de computadora codificado en lenguaje BASIC, el cual ha sido adaptado al sistema de cómputo RADIO SHACK perteneciente al Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería (U.N.A.M.).

Este programa se emplea para analizar diferentes tirantes en un flujo en medios porosos en base a condiciones iniciales del problema así como, características geohidrológicas del mismo, tales como la permeabilidad, cedencia específica, etc., que fueron explicados en el capítulo IV.

Es importante destacar que uno de los aspectos que se ha podido tomar en cuenta es la libertad con la que se han determinado los incrementos de distancia y los de tiempo impli- cando así, si es que se requiere un estudio más detallado del problema.

Se han considerado como condiciones de frontera la existencia de dos canales con un mismo tirante tomando como punto horizontal de referencia.

Cabe mencionar que si se hacen pequeños ajustes al programa, es fácil determinar cualquier otra situación con condiciones de frontera distintos, pero que satisfagan el esquema de diferencias finito.

Para proporcionar en forma eficiente la información necesaria a la computadora, se deben de preparar para cada caso los siguientes datos:

- Determinar el número de secciones requeridos.
- Definir el número de incrementos necesarios.
- Calcular la permeabilidad, que estará en función del tipo de suelo con el que se esté trabajando, etc.
- Para cada problema determinar el tirante medio.
- Cedencia específica.
- Así como introducir las condiciones iniciales requeridas para el uso del programa de computadora.

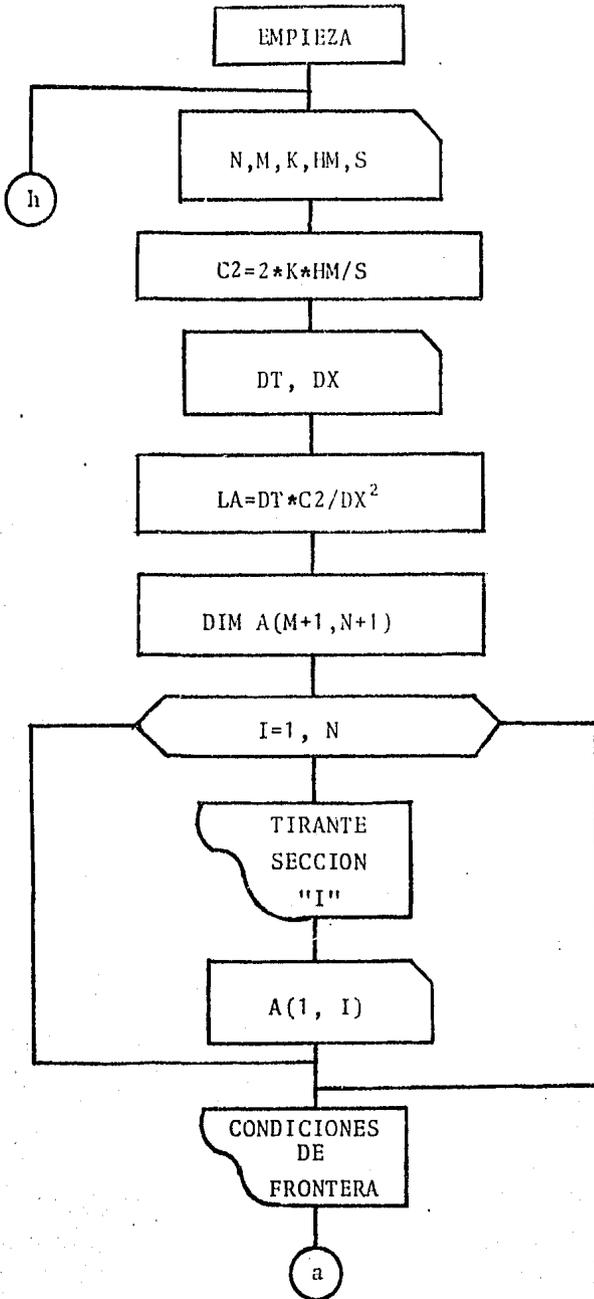
Los resultados que se obtienen es el comportamiento de la línea de saturación, indicando el número de intervalos especificados, así como, el tirante en cada una de las secciones requeridas.

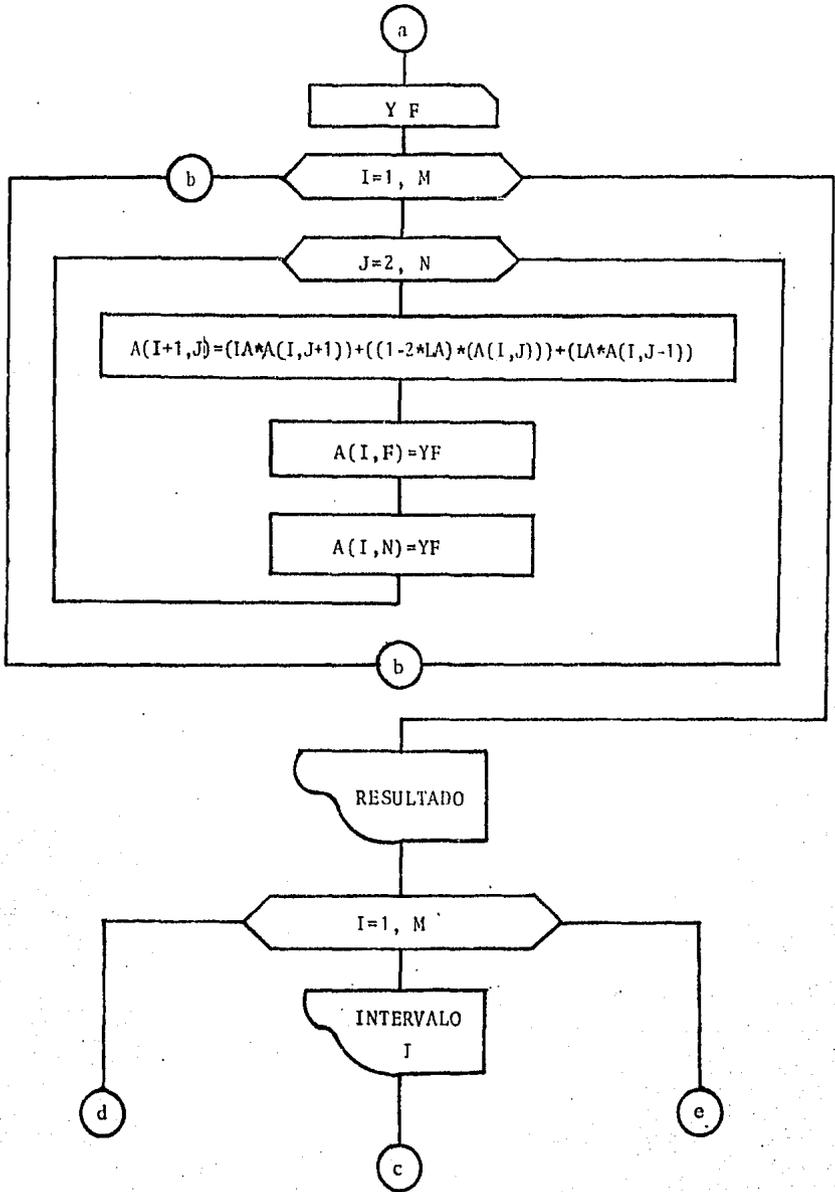
Por lo tanto es necesario señalar que aunque éste problema en especial es simétrico en cuanto a su comportamiento,

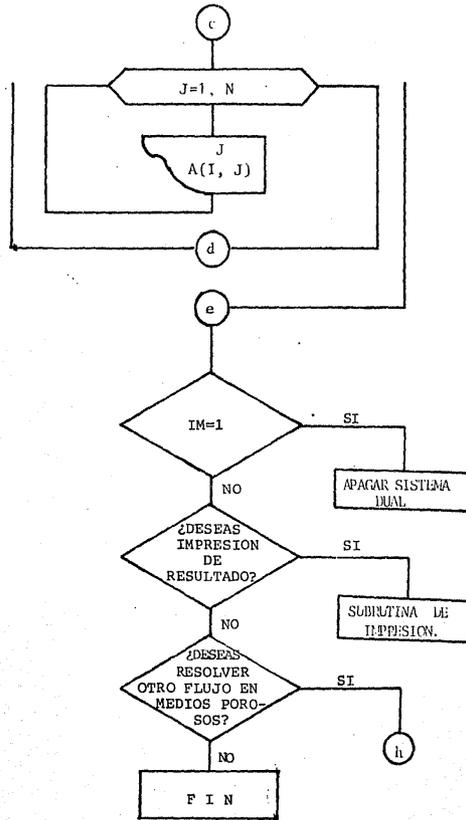
la máquina no es capaz de percibirlo, así que como comprensión para el lector se han calculado todas las secciones, notándose en los resultados dicha simetría.

A continuación se presenta el diagrama de flujo correspondiente al esquema de diferencias finitas del problema a tratar, así como la codificación del mismo.

DIAGRAMA DE FLUJO







```

10 CLEAR
20 REM ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS
30 REM PARA LA SOLUCION DE LA ECUACION DE
40 REM FLUJO EN MEDIOS POROSOS
50 REM **** TESIS DE LICENCIATURA DE ROSIO RUIZ URBANO
60 REM **** MAYO DE 1986
70 CLS:PRINT:PRINT,"LABORATORIO DE HIDRAULICA"
80 PRINT:PRINT,"FLUJO EN MEDIOS POROSOS"
90 PRINT:PRINT"INTRODUCE LOS SIGUIENTES VALORES"
100 PRINT:INPUT"NUMERO DE SECCIONES";N
110 INPUT"NUMERO DE INCREMENTOS";M
120 INPUT"PERMEABILIDAD [cm/s]";K
130 INPUT"TIRANTE MEDIO [m]";HH
140 INPUT"CEDENCIA ESPECIFICA" ;S
150 C2=2*K*HH/S
160 PRINT:INPUT"INCREMENTO TIEMPO [seg]";DT
170 INPUT"INCREMENTO EN DISTANCIAS [m]";DX
180 LA=DT*C2/(DX*2)
190 CLS:PRINT:PRINT"FLUJO EN MEDIOS POROSOS":PRINT
200 PRINT"INCREMENTO DE TIEMPO";DT;"seg", "VALOR DE Lambda";LA:PRINT:PRINT
210 PRINT"INTRODUCE LAS CONDICIONES INICIALES":PRINT
220 DIM A(M+1,N+1)
230 FOR I=1 TO N
240 READ A(1,I)
250 PRINT"TIIRANTE SECCION";I;"=";A(1,I)
260 NEXT I
270 PRINT:PRINT"CONDICIONES DE FRONTERA":PRINT
280 INPUT"TIIRANTE DE FRONTERA";YF
290 FOR I=1 TO M
300 FOR J=1 TO N
310 A(I+1,J)=(LA*A(I,J+1))+((1-2*LA)*(A(1,J)))+(LA*A(I,J-1))
320 A(I,1)-YF:A(I,N)=YF
330 NEXT J
340 NEXT I
350 REM RESULTADOS
360 CLS:PRINT:PRINT,"RESULTADO DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS"
370 PRINT
380 FOR I=1 TO M
390 PRINT "INTERVALO";I
400 FOR J=1 TO N
410 PRINT ;"TIIRANTE SECCION";J;A(I,J)
420 NEXT J
430 NEXT I
440 PRINT:PRINT
450 INPUT"DESEAS IMPRESION DE RESULTADOS (SI=1/NO=2)";W
460 IF W=1 THEN GOSUB 310
470 PRINT
480 INPUT"DESEAS RESOLVER OTRO FLUJO EN MEDIOS POROSOS (SI=1/NO=2)";W1
490 IF W1=1 THEN GOTO 20
500 END
510 REM SUBROUTINA DE IMPRESION
520 SYSTEM"FORMS
530 LPRINT:LPRINT,"L A B O R A T O R I O       D E       H I D R A U L I C A
";LPRINT:LPRINT,"INCREMENTO DE TIEMPO";D1:LPRINT,"INCREMENTO DE DISTANCIA";
DX:LPRINT"VALOR DE Lambda";LA:LPRINT:LPRINT
540 LPRINT"SECCION":FOR WW=1 TO 11:LPRINT(TAB(WW*10);WW);NEXT WW:LPRINT
550 LPRINT"TIEMPO"
560 R$="-----"
";LPRINT R$
570 FOR I=1 TO M

```

```
580 LPRINT DT*(I-1);
590 FOR J=1 TO 11
600 LPRINT TAB(J*10):A(I,J);
610 NEXT J
620 LPRINT:LPRINT R#
630 NEXT I
640 RETURN
650 DATA 0,0.36,0.64,0.84,0.96,1,.96,.84,.64,.36,0
```

Parte fundamental de la utilización de programas de computadora, es la correcta interpretación que se le da a los resultados que se obtienen de esos programas.

Para este caso los resultados obtenidos fueron los mismos del capítulo IV y se han plasmado en forma gráfica en las figuras 17, 18 y 19.

Se han tomado solo el efecto de once secciones para este caso con un incremento de distancia constante a lo largo de la sección transversal, además se ha calculado el comportamiento de la línea de saturación cuando las cargas no corresponden al problema físico, es decir, el resultado es inestable por lo tanto, se demuestra así la veracidad de los intervalos de la constante λ para la correcta solución del problema

Se tomaron intervalos de tiempo de 2000 seg., 1000-seg., y 500 seg., lo que implicó un valor de $\lambda = 1, 0.5$ y 0.25 respectivamente. Verificándose así los valores obtenidos en forma manual en el capítulo anterior.

LABORATORIO DE HIDRAULICA

INCREMENTO DE TIEMPO 2000
INCREMENTO DE DISTANCIA 2

VALOR DE Lambda 1

SECCION

TIEMPO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0	.36	.64	.84	.96	1	.96	.84	.64	.36	0
2000	0	.28	.56	.76	.88	.92	.88	.76	.56	.28	0
4000	0	.28	.48	.68	.8	.84	.8	.68	.48	.28	0
6000	0	.2	.48	.6	.719999	.760001	.719999	.6	.48	.2	0
8000	0	.28	.320001	.399999	.640002	.679998	.640002	.399999	.320001	.28	0
10000	0	.0400012	.039998	.360004	.639996	.640005	.639996	.360004	.039998	.0400012	0
12000	0	.519995	-.199993	.839989	.320013	.679985	.320013	.839989	-.199993	.519995	0
14000	0	-.679989	1.51998	-.679969	1.19995	-.039961	1.19996	-.679969	1.51998	-.679989	0
16000	0	2.19997	-2.07994	3.39991	-1.91989	2.43989	-1.91989	3.39991	-2.07994	2.19997	0
18000	0	-5.0799	8.47981	-8.19974	7.73969	-6.27967	7.73969	-8.19974	8.47981	-5.0799	0
20000	0	13.5597	-21.7595	24.4392	-22.2391	21.7991	-22.2391	24.4392	-21.7595	13.5597	0
22000	0	-35.3192	59.7384	-68.4378	68.4774	-66.2773	68.4774	-68.4378	59.7384	-35.3192	0
24000	0	95.0776	-163.513	196.674	-203.192	203.232	-203.192	196.674	-163.513	95.0776	0
26000	0	-258.593	455.266	-563.381	603.098	-609.617	603.098	-563.381	455.267	-258.593	0
28000	0	713.859	-1277.24	1621.75	-1776.1	1813.81	-1776.1	1621.75	-1277.24	713.859	0
30000	0	-1991.1	3612.84	-4675.08	5213.65	-5368	5213.65	-4675.08	3612.85	-1991.1	0
32000	0	5605.94	-10279	13501.6	-15236.7	15795.3	-15236.7	13501.6	-10279	5605.93	0
34000	0	-15883	29384.5	-39037.3	44553.6	-46308.8	44553.6	-39037.3	29384.6	-15883	0
36000	0	45267.5	-84384.8	112975	-129980	135416	-129980	112976	-84384.9	45267.5	0
38000	0	-129572	242548	-327180	378291	-395215	378291	-327180	242548	-129572	0

LABORATORIO DE HIDRAULICA

INCREMENTO DE TIEMPO 1000
INCREMENTO DE DISTANCIA 2
VALOR DE Lambda .5

SECCION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
TIEMPO											
0	0	.35	.84	.84	.96	1	.96	.84	.64	.35	0
1000	0	.32	.6	.8	.92	.96	.92	.8	.6	.32	0
2000	0	.3	.56	.76	.88	.92	.88	.76	.56	.3	0
3000	0	.28	.53	.72	.84	.88	.84	.72	.53	.28	0
4000	0	.265	.5	.685	.8	.84	.8	.685	.5	.265	0
5000	0	.25	.475	.65	.7625	.8	.7625	.65	.475	.25	0
6000	0	.2375	.45	.61875	.725	.7625	.725	.61875	.45	.2375	0
7000	0	.225	.428125	.5875	.690625	.725	.690625	.5875	.428125	.225	0
8000	0	.214063	.40625	.559375	.65625	.690625	.65625	.559375	.40625	.214063	0
9000	0	.203125	.384375	.53125	.625	.65625	.625	.53125	.384375	.203125	0
10000	0	.193359	.36188	.505839	.59375	.625	.59375	.505839	.36188	.193359	0
11000	0	.183994	.347689	.480469	.56543	.59375	.56543	.480469	.347689	.183994	0
12000	0	.174885	.332831	.45792	.537109	.56543	.537109	.45792	.332831	.174885	0
13000	0	.166016	.318162	.43437	.511473	.537109	.511473	.43437	.318162	.166016	0
14000	0	.158081	.303393	.413818	.48984	.511473	.48984	.413818	.303393	.158081	0
15000	0	.150146	.289393	.393866	.462647	.48984	.462647	.393866	.289393	.150146	0
16000	0	.142975	.271686	.374298	.439433	.462647	.439433	.374298	.271686	.142975	0
17000	0	.135883	.258636	.35533	.418472	.439433	.418472	.35533	.258636	.135883	0
18000	0	.129318	.243667	.338554	.397491	.418472	.397491	.338554	.243667	.129318	0
19000	0	.122833	.231936	.321979	.378313	.397491	.378313	.321979	.231936	.122833	0

LABORATORIO DE HIDRAULICA

INCREMENTO DE TIEMPO 300
INCREMENTO DE DISTANCIA 2

VALOR DE Lambda .25

SECCION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	.36	.64	.84	.96	1	.96	.84	.64	.36	0
500	0	.34	.62	.82	.94	.98	.94	.82	.62	.34	0
1000	0	.323	.6	.8	.92	.96	.92	.8	.6	.323	0
1500	0	.3123	.58125	.78	.9	.94	.9	.78	.58125	.3123	0
2000	0	.301563	.56375	.760313	.88	.92	.88	.760313	.56375	.301563	0
2500	0	.291719	.547344	.741094	.860078	.9	.860078	.741094	.547344	.291719	0
3000	0	.282695	.531875	.722403	.840313	.880039	.840313	.722403	.531875	.282695	0
3500	0	.274317	.517212	.704248	.820767	.860176	.820767	.704248	.517212	.274317	0
4000	0	.266461	.503247	.686619	.80149	.840472	.80149	.686619	.503247	.266461	0
4500	0	.259042	.489894	.669494	.782517	.820981	.782518	.669494	.489894	.259042	0
5000	0	.251995	.477081	.65285	.763877	.801749	.763877	.65285	.477081	.251995	0
5500	0	.245268	.464752	.636664	.745388	.782813	.745388	.636664	.464752	.245268	0
6000	0	.238822	.452859	.620917	.727664	.764201	.727664	.620917	.452859	.238822	0
6500	0	.232626	.441364	.605889	.710111	.745952	.710111	.605889	.441364	.232626	0
7000	0	.226634	.430236	.590664	.692936	.728022	.692936	.590664	.430236	.226634	0
7500	0	.220885	.419447	.576125	.676139	.710479	.676139	.576125	.419447	.220885	0
8000	0	.215305	.408976	.561959	.659721	.693309	.659721	.561959	.408976	.215305	0
8500	0	.209896	.398804	.548134	.643677	.676515	.643677	.548134	.398804	.209896	0
9000	0	.204649	.388915	.534697	.628006	.660096	.628006	.534697	.388915	.204649	0
9500	0	.199553	.379294	.521579	.612701	.644051	.612701	.521579	.379294	.199553	0

CAPITULO VI

PROBLEMA DE COMPROBACION.

En éste capítulo se plantea el problema tratado en un modelo hidráulico, que represente en forma física las condiciones del esquema con sus respectivas características físicas y geohidrológicas.

El objetivo fundamental de la prueba es la comparación de resultados obtenidos con el modelo y a su vez con el programa de computadora, de tal manera que se verifiquen los alcances de la teoría de diferencias finitas con un problema real expresado en forma de modelo.

Se trabajó con un modelo denominado "Mesa Hidrológica" que contiene material permeable (arena), pozos de descarga que permiten la formación y estabilización de la parábola así como - unos piezómetros que nos permiten leer rápidamente la carga que presenta en dicho material.

Para el uso del programa de computadora se necesitó - realizar las pruebas que servirán para conocer los datos necesarios que requiere dicho programa.

PRUEBA DE PERMEABILIDAD.

En primer lugar se realizó la prueba de permeabilidad en el material que expresará en forma aproximada el coeficiente de permeabilidad de la arena. Para tal efecto se utilizó la -- ecuación de Thiem que permite conocer el coeficiente representativo de la permeabilidad.

La ecuación de Thiem permite conocer en una zona circular el valor cuantitativo del coeficiente, es decir, se utilizó el modelo solo en una parte que representará un círculo y que por medio de los piezómetros obtuvieramos la información de las cargas en el material.

Dicha ecuación es:

$$k = \frac{Q}{\pi} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{h_2^2 - h_1^2}$$

donde:

k = coeficiente de permeabilidad (L/t)

Q = gasto (L /t)

r₂ = radio más alejado del centro del círculo (L)

r₁ = radio menos alejado del centro del círculo (L)

h_2 = carga piezométrica η (L)

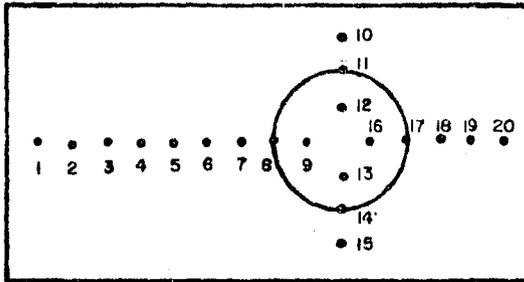
h_1 = carga piezométrica $\eta-1$ (L).

las unidades del coeficiente de permeabilidad serán:

$$k = \frac{L}{t}$$

los resultados obtenidos de la prueba fueron:

tomando como círculo los siguientes piezómetros:



AREA DE INFLUENCIA DE LA ECUACION DE THIEM.

FIGURA 20 .

$$Q = 0.0198 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

$$r_2 = 20 \text{ cm}$$

$$r_1 = 10 \text{ cm}$$

para los piezómetros 11 y 12 las cargas fueron .094 y .078 m -
respectivamente.

Para 13 y 14: .094 y .078 m respectivamente.

Para 8 y 9: .098 y .078 m respectivamente.

Para 16 y 17: .096 y .078 m respectivamente.

Obteniendo los coeficientes de permeabilidad para -- cada par de piezómetros tenemos:

Para 11 y 12:

$$k = \frac{0.098 \times 10^{-3}}{\pi} \frac{\ln \frac{0.20}{0.10}}{0.94^2 - 0.078^2} = 0.001587 \text{ m/s}$$

y haciendo la misma operación para las demás parejas:

$$k_{13-14} = 0.001587 \text{ m/s}$$

$$k_{8-9} = 0.001241 \text{ m/s}$$

$$k_{16-17} = 0.001395 \text{ m/s}$$

obteniendo un promedio de coeficientes

$$k_T = 0.001452 \text{ m/s.}$$

Verificando el valor del coeficiente en la tabla de la referencia 1, la permeabilidad corresponde a un material de arenas limpias o mezclas de grava y arenas limpias, lo cual concuerda con el material usado en el modelo.

PRUEBA DE CEDENCIA ESPECIFICA.

Para ésta prueba se utilizó un método muy primitivo, pero que nos permite conocer la relación que existe entre el cociente del volumen de agua desalojada por el material entre el volumen de la muestra.

Primero se saturó un determinado volumen de muestra y luego se colocó en una malla # 200 de tal manera que el material "cediera" o desalojara el agua en exceso.

Posteriormente con diferencias de pesos se obtiene la relación buscada.

Los datos del problema fueron:

Volumen de la muestra saturada = 1144.02 grs.

Volumen de agua desalojada = 178.67 grs.

Si la cedencia específica está expresada de la siguiente manera:

$$s = \frac{\text{volumen agua desalojada}}{\text{volumen de la muestra}}$$

sustituyendo valores:

$$s = \frac{178.67}{1144.02} = 0.1562$$

es decir, nuestro material desaloja o "cede" el 15.6% de agua aproximadamente estando el suelo en estado natural o en reposo.

FORMACION DE LA PARABOLA O LINEA DE SATURACION EN LA MESA HIDROLOGICA.

Para la obtención de la parábola y su comportamiento a través del tiempo son necesarios los siguientes pasos:

Saturar el material.

Estabilizar el flujo.

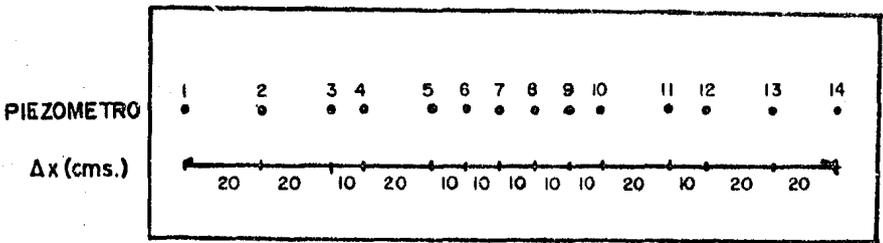
Definir las condiciones iniciales del problema por medio de los dos pozos de descarga localizados en los extremos de la mesa.

Estabilizar la parábola con las condiciones iniciales deseadas.

Abrir los pozos de descarga y observar el abatimiento de agua con ayuda de los piezómetros localizados al frente del modelo y esperar hasta que alcancen sus condiciones de frontera*.

El modelo cuenta con 20 piezómetros, 6 ubicados en sección transversal y 14 a lo largo del mismo localizados simétricamente que nos permiten observar perfectamente el comportamiento del flujo en el material.

Estos piezómetros tienen la siguiente configuración:



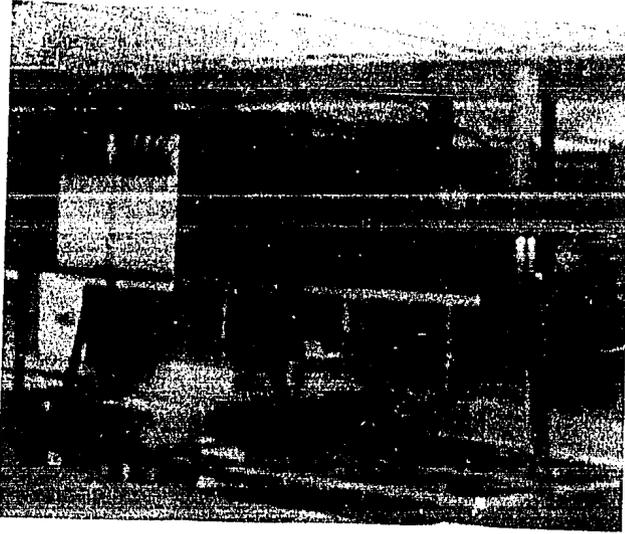
CORTE LONGITUDINAL.

FIGURA 21.

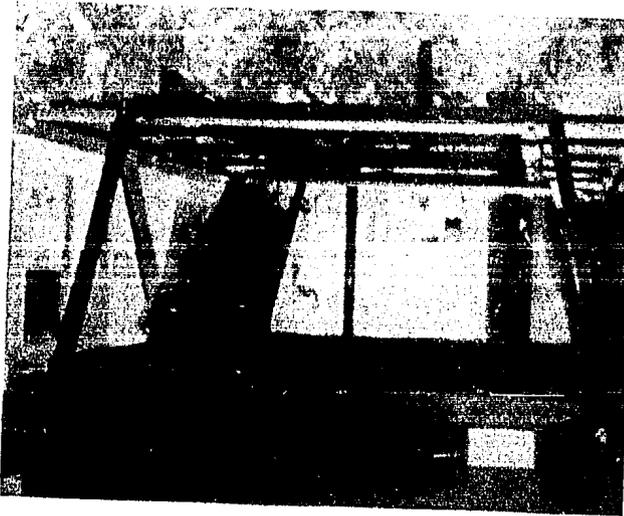
La prueba se realizó con ayuda de una filmación para video casetera que permite ver el comportamiento de la línea de saturación.

Tomando en cuenta la simetría las lecturas fueron:
(Ver tabla 1).

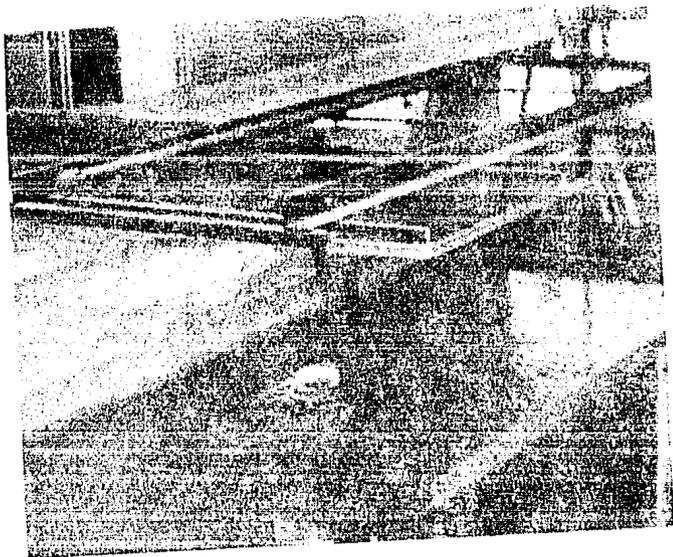
* Ver fotografía anexas.



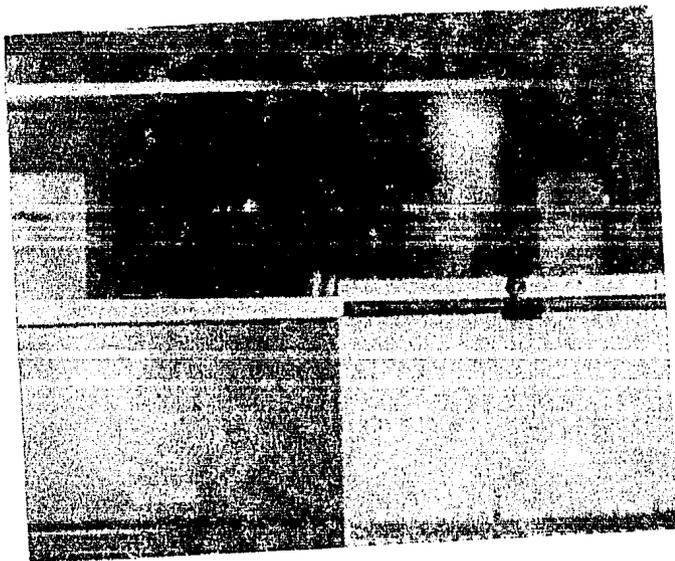
MODELO "MESA HIDROLOGICA". OBSERVESE LOS
PIEZOMETROS QUE NOS DEFINEN LA CARGA QUE
EXISTE SOBRE EL MATERIAL.



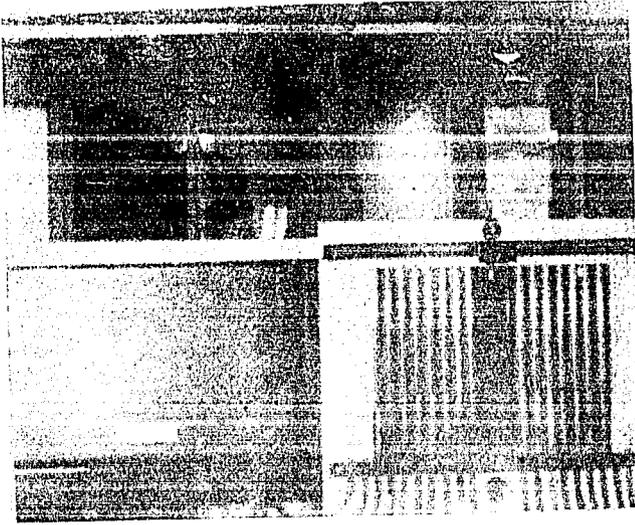
VISTA LATERAL DE LA MESA HIDROLOGICA



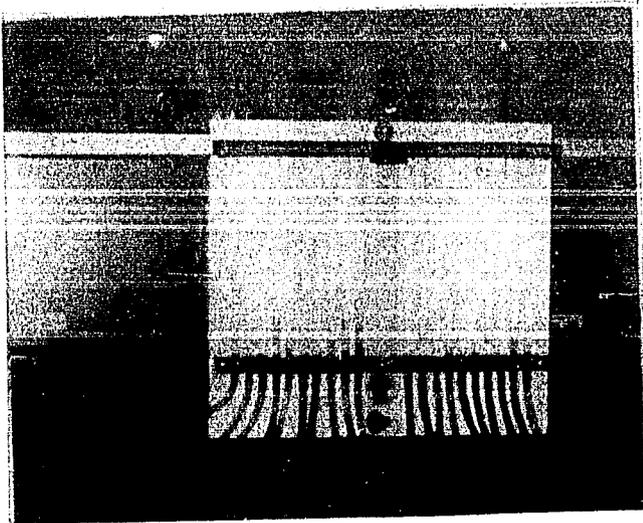
MATERIAL COMPLETAMENTE SATURADO



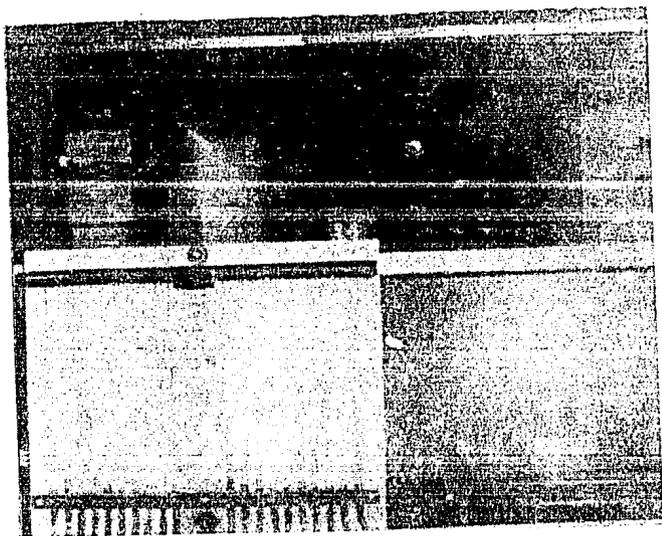
POSICION DEL FLUJO ESTABLECIDO TENIENDO EL MATERIAL SATURADO



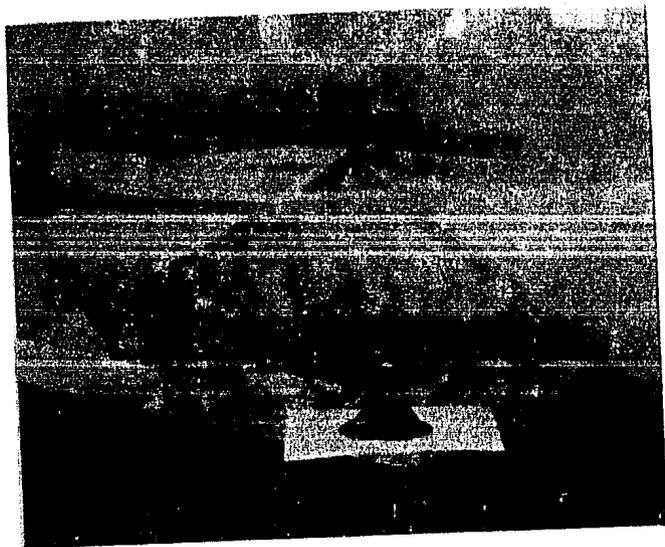
FORMACION DE LA PARABOLA INICIAL. SE HAN
DESCARGADO AMBOS POZOS LATERALES.



CONDICION INICIAL DESEADA.



POSICION DEL FLUJO EN UN INSTANTE t DESPUES
DE LA CONDICION INICIAL.



MUESTRA DEL MATERIAL UTILIZADO (ARENAS --
LIMPIAS O MEZCLAS DE GRAVA Y ARENAS LIMPIAS).

TABLA 1.

Cond. inicial:	3.15	4.05	4.55	4.90	5.05	5.20	5.40	...
$\Delta t = 20$ seg.	3.15	4.00	4.40	4.55	4.70	4.85	5.00	...
$\Delta t = 40$ seg.	3.15	3.65	4.00	4.20	4.35	4.50	4.65	...
$\Delta t = 60$ seg.	3.15	3.50	4.0	4.10	4.25	4.35	4.45	...
$\Delta t = 80$ seg.	3.15	3.40	3.75	3.90	4.00	4.15	4.30	...
$\Delta t = 100$ seg.	3.15	3.30	3.60	3.70	3.80	3.95	4.20	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\Delta t = 240$ seg.	3.15	3.20	3.23	3.25	3.30	3.35	3.45	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\Delta t = 740$ seg.	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	...
							acot: cm.	

En el modelo la parábola se estabilizó con las condiciones iniciales deseadas a los 75 seg. después de haber saturado el material y posteriormente se alcanzó la condición de frontera a los 740 seg. (como se puede observar en la tabla 1.)

Se observó que el esquema de diferencias finitas de nuestro problema converge más rápidamente cuando el valor de λ es más grande, es decir se hicieron diferentes pruebas para ver el comportamiento del material por medio de la computadora y se concluyó que el valor de $\lambda = 0.5$ con $\Delta x = 0.10$ m corroboraban los valores obtenidos en el modelo. Esto implicó la busqueda de los intervalos del tiempo que satisficieran dicha condición.

Ahora si tomamos los valores obtenidos en la prueba de cedencia específica, coeficiente de permeabilidad y tirante medio podemos calcular el incremento de tiempo.

Por lo tanto:

$$c^2 = \frac{2kh}{s}$$

donde:

$$k = 0.001452 \text{ m/s}$$

$$\bar{h} = 0.04275 \text{ m}$$

$$s = 0.1562$$

$$c^2 = \frac{2 \times 0.001452 \times 0.04275}{0.1562} = 0.0007937$$

$$\text{Si } \lambda = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\text{y } \lambda = 0.5, \Delta x = 0.10 \text{ m.}$$

despejando Δt tenemos:

$$\Delta t = \frac{\lambda \Delta x^2}{c^2} = \frac{0.5 \times (0.10)^2}{7.937 \times 10^{-4}} = 6.3 \text{ seg.}$$

Ahora como la localización de los piezómetros están - indistintamente a 20 y 10 cm tendremos que interpolar los valores obtenidos en la lectura del modelo, así como todos los valores localizados a 6.3 seg., ya que la lectura se hizo a cada 20-seg., lo que implicó que finalmente obtuvieramos 20 secciones - localizadas a cada 10 cm ubicados simétricamente con 17 intervalos de tiempo de 6.3 seg., la tabla de lecturas final fue la siguiente:

TABLE 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Cond. inicial:	0.0515	0.0560	0.0405	0.0430	0.0455	0.0190	0.04975	0.0505	0.0520	0.05400	...
$\Delta t = 6.3$ seg.	0.0515	0.0559	0.0405	0.0427	0.04505	0.01800	0.04865	0.04940	0.05090	0.05274	...
$\Delta t = 12.6$ seg.	0.0515	0.0558	0.04019	0.04237	0.04500	0.01680	0.04754	0.04830	0.04980	0.05148	...
$\Delta t = 18.9$ seg.	0.0515	0.05576	0.04003	0.04210	0.04410	0.01569	0.04644	0.04719	0.04869	0.05022	...
$\Delta t = 25.2$ seg.	0.0515	0.05474	0.03799	0.03984	0.04170	0.04349	0.04424	0.04499	0.04649	0.04799	...
$\Delta t = 37.8$ seg.	0.0515	0.05419	0.03689	0.03866	0.04040	0.04240	0.04314	0.04389	0.04539	0.04689	...
$\Delta t = 44.1$ seg.	0.0515	0.05364	0.03578	0.03789	0.04000	0.04180	0.04255	0.04330	0.04469	0.04609	...
$\Delta t = 50.4$ seg.	0.0515	0.05361	0.03572	0.03786	0.04000	0.04148	0.04223	0.04298	0.04422	0.04516	...
$\Delta t = 56.7$ seg.	0.0515	0.05357	0.03524	0.03762	0.04000	0.4117	0.04192	0.04267	0.04375	0.04483	...
$\Delta t = 63.0$ seg.	0.0515	0.05318	0.03485	0.03724	0.03965	0.04070	0.04141	0.04215	0.04300	0.04428	...
$\Delta t = 69.3$ seg.	0.0515	0.05302	0.03434	0.03667	0.03884	0.04007	0.04070	0.04131	0.04257	0.04380	...
$\Delta t = 75.6$ seg.	0.0515	0.05286	0.03422	0.03641	0.03805	0.03944	0.03999	0.04055	0.04191	0.04333	...
$\Delta t = 81.9$ seg.	0.0515	0.05270	0.03391	0.03574	0.03756	0.03881	0.03951	0.03981	0.04151	0.04291	...
$\Delta t = 88.2$ seg.	0.0515	0.05255	0.03359	0.03524	0.03689	0.03818	0.03868	0.03918	0.04068	0.04259	...
$\Delta t = 94.5$ seg.	0.0515	0.05239	0.03328	0.03485	0.03641	0.03755	0.03805	0.03855	0.04005	0.04228	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Delta t = 259.4$ seg.	0.0515	0.0515	0.0520	0.05216	0.05252	0.05252	0.05277	0.05302	0.05353	0.05454	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Delta t = 711.9$ seg.	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	0.0515	...

acot: m

USO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA.

En esta sección solo se compararán los resultados que se obtienen del programa por lo que se tomarán los valores -- calculados y obligados del modelo para el correspondiente listado de resultados por computadora, y se observará el comportamiento del esquema de diferencias en intervalos de tiempo semejantes a los observados directamente en el modelo.

El programa solicita los siguientes datos:

Permeabilidad:	$k = 0.001452$ m/s.
Tirante medio:	$\bar{h} = 0.04275$ m.
Cedencia específica:	$s = 0.1562$
Incremento de tiempo:	$\Delta t = 6.3$ seg.
Incremento de distancia:	$\Delta x = 0.10$ m.

El listado con los resultados fue el siguiente:*

*. Ver página siguiente.

LABORATORIO DE HIDRAULICA

INCREMENTO DE TIEMPO 6.3
INCREMENTO DE DISTANCIA .1
VALOR DE Lambda .509717

SECCION TIEMPO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	.0315	.036	.0403	.043	.0455	.049	.04973	.0503	.052	.054
6.3	.0315	.036	.0394786	.043	.0460007	.047623	.04973	.0508733	.0522304	.0529986
12.6	.0315	.0354906	.0393	.0427693	.0453105	.0478737	.0492486	.0510004	.0519366	.0526239
18.9	.0315	.0333	.0391234	.0424048	.0453123	.0472787	.0494383	.050592	.0518112	.0522798
25.2	.0315	.0353114	.0389321	.0422177	.0448411	.0473736	.0489396	.0506232	.0514354	.0520453
31.5	.0315	.032226	.0387643	.0418962	.0447466	.0468872	.0490005	.0501844	.0513352	.05174
37.8	.0315	.035132	.0385608	.0417033	.0443911	.0468985	.0485331	.0501678	.0509617	.0515373
44.1	.0315	.0330482	.038426	.0414733	.0443393	.0464623	.0483332	.0497478	.0508324	.0512491
50.4	.0315	.0349779	.0382326	.0413976	.0439688	.0464362	.0481045	.0496927	.0504979	.0510305
56.7	.0315	.0348761	.0391876	.0411101	.0439168	.0468359	.0488644	.0503306	.0503714	.0507738
63	.0315	.0348438	.037928	.041021	.0435725	.0459705	.0476677	.0492178	.0500367	.0503723
69.3	.0315	.0347463	.0379479	.0408923	.0433213	.0456196	.0475811	.0488517	.0498948	.0503301
75.6	.0315	.0347239	.037764	.0407343	.0432065	.0453626	.0472351	.0487493	.0493773	.0500992
81.9	.0315	.0346319	.0377292	.0406819	.0431483	.0452173	.0471338	.0484493	.049224	.049838
88.2	.0315	.0346146	.0373366	.0404388	.0428492	.0451521	.0468111	.0482898	.0491215	.0496387
94.5	.0315	.0345282	.0372266	.0402026	.0427933	.0448297	.0467288	.0479638	.04896	.0494377
239.4	.0315	.0336789	.0337744	.037796	.0393851	.0412383	.0425193	.0439818	.0442636	.0446318
711.9	.0315	.0322743	.033826	.0337462	.0343866	.0349369	.0354342	.0358803	.0362894	.0361829

OBSERVACIONES.

Los resultados por computadora en comparación con los observados en el modelo son suficientemente satisfactorios, ya que así se esperaba su comportamiento, no obstante se consideran errores de precisión en cuanto los valores del modelo, es decir, el abatimiento de la línea de saturación es más lenta en la computadora que en el modelo, esto se atribuye a que las lecturas obtenidas directamente no fueron muy confiables, ya que la cámara de video utilizada y los instrumentos de medición no permitieron precisar las lecturas, porque solo se utilizó una regla graduada al milímetro lo que significa que se obtuvieran valores hasta dicha unidad, y que las lecturas finales haciendo las consideraciones antes mencionadas permitieron la intercolación de valores.

Haciendo una comparación de resultados y cuantificando el error obtenido con respecto a las lecturas observadas se puede decir que hasta el incremento del tiempo de 94.5 seg. la computadora nos registraba ya una lenta estabilidad del flujo, por lo que el máximo error observado fue localizado en dicho intervalo y en las secciones 8 y 13, pues aparece un error de 0.0088389 m., lo que implica un error relativo de 22.92%. Error que a su vez no debe tomarse como tal.

Por lo expuesto anteriormente implica que el error obtenido es aceptable para la comprensión del tema.

Referencia 1: Juárez Badillo y Rico Rodríguez, "Mecánica de suelos" volumen 1, Editorial Limusa, 1976.

CAPITULO VII

CONCLUSIONES.

. Respecto al método de Diferencias se parte de la serie de Taylor, herramienta indispensable para la utilización del método.

. Es necesario conocer previamente condiciones iniciales, finales y características propias de la ecuación (en éste caso propiedades geohidrológicas que cumplen el requisito de la constante c^2), por lo cual es importante la elaboración de pruebas en campo, muestreos de niveles, etc.

. El análisis de la ecuación diferencial parcial fue explícito que es de carácter directo, de sencilla aplicación y programación, pues no implica la resolución de un sistema de ecuaciones.

. Tiene el inconveniente del análisis de estabilidad convergencia y congruencia que es lo que restringe el valor de la constante λ y que nos define los intervalos en los que el método es aplicable.

. No suele aplicarse en la práctica, ya que la condición de convergencia y estabilidad obliga en general al empleo de incrementos de tiempo muy pequeños. Esto puede llegar a hacer antieconómica su aplicación, pues multiplica el número de incrementos que hay que calcular.

. Dado un acuífero determinado con incrementos de distancia fijos habrá que reducir el intervalo de tiempo para que el método converga más rápido.

. Respecto a la utilización de computadora es conveniente resaltar la importancia que tiene su uso en el análisis numérico ya que así se obtienen, entre otras, las siguientes ventajas:

- . Precisión en los resultados obtenidos.
- . Posibilidad de variar datos y ajustarlos hasta obtener un análisis óptimo.
- . Si los datos han sido correctamente obtenidos, la posibilidad de cometer errores es prácticamente nula.

Lo que implica que el uso de los sistemas computarizados es prácticamente obligado en éstos tiempos, tanto por las ventajas antes descritas, como por la relativa facilidad de disponer de ellas.

. Durante el desarrollo del trabajo se fue aclarando paso a paso la metodología usada para el análisis como la obtención de todos los elementos constitutivos del problema resultando los siguientes aspectos:

- . Cálculo de la permeabilidad del material con el que está formado el acuífero.
- . Cuantificación de la cedencia específica del material, así como.
- . Incrementos de tiempo o distancia según sea el caso.

. En relación al problema de comprobación expuesto, las conclusiones obtenidas fueron que los resultados por computadora y las lecturas directas nos representan en forma satisfactoria el comportamiento de la línea de saturación, incluyendo sus respectivos errores de precisión en la lectura, así como el camino seguido para la obtención de éstas, lo que implicó poca confiabilidad en los resultados del modelo debido a que otra de las características propias del esquema es que se necesita conocer como antes lo habíamos mencionado la condición inicial del problema, lo que significa una lectura directa en el campo.

. Por último podemos señalar las características del método de solución:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| . Método: | Explícito |
| . Caracter: | Directo |
| . Rapidez: | Muy rápido |
| . Almacenamiento: | Poco |
| . Convergencia y Estabilidad: | Problemas |
| . Observaciones: | Exige incrementos de tiempo pequeños. |

Es decir, que es conveniente destacar que debido al auge que tienen los métodos numéricos, se obliga a tratar el análisis con imaginación y creatividad, apoyándose en lo posible en los instrumentos de cálculo automatizados a los que se tiene cada vez más fácil acceso.

B I B L I O G R A F I A

Luthe, Olivera y Schutz.

"Métodos Numéricos". Primera edición.
Editorial Limusa, México.
(Capítulo II).

García Márquez, Próspero y Carlos de la Lanza.

"Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias".
Primera edición, U.N.A.M.
(Capítulo III).

Spiegel, Murray R.

"Finite Differences and Difference --
Equations".
Serie Schaum.
Editorial Mc.Graw Hill.
(Capítulo III).

Fuentes, Mariles Oscar.

"Apuntes de Métodos Numéricos aplicados
a la Hidráulica".
División de Educación Continua.
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.
(Capítulo III).

Custodio, G. Emilio y Manuel Ramón Llamas.
"Hidrología Subterránea". Tomos I y II.
Ediciones Omega, S.A.
Barcelona, España.
(Capítulo IV).

Castany, G.
"Geohidrología o Aguas Subterráneas".
Ediciones Omega, S. A.
Barcelona, España.
(Capítulo IV).

Juárez, Badillo y Rico Rodríguez.
"Mecánica de Suelos".
Volumen I.
Editorial Limusa. 1976.
(Capítulo VI).