UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OPTIMIZACION DE UN PORTAFOLIOS DE INVERSIONES PARA UNA SOCIEDAD DE INVERSION DE RENTA FIJA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

MATEMATICO

P R E S E N T A :

SERGIO GUADALUPE RODRIGUEZ BASURTO

MEXICO, D. F. 1985

I N D I C E

C A P I T U L O   I

INTRODUCCION

En nuestro país, por lo general, el desarrollo del medio financiero ha estado casi totalmente ligado a los grandes inversionistas, personas e instituciones; ellos son quienes conocen y profundizan en este campo, para ellos se desarrollan nuevos instrumentos de inversión, en fin, gozan de los grandes beneficios de tal mercado.

Sin embargo, el pequeño y el mediano inversionista, por sus limitados recursos, o por su apatía, se han visto marginados de estas posibilidades, permaneciendo en la ignorancia financiera.

Como una solución para lograr la integración de todos los posibles inversionistas en el sistema financiero, surgen las sociedades de inversión. Son ellas, pues, el medio de acceso del gran público inversionista a nuestro sistema financiero, participando de los beneficios y los problemas que en él se presentan, sin peligro de verse en desventaja ante los demás integrantes de este sistema tan complejo.

Estas entidades financieras tienen los siguientes objetivos:

"I.- El fortalecimiento y descentralización del mercado de valores;

II.- El acceso del pequeño y mediano inversionista a dicho mercado;

III.- La democratización del capital, y

IV.- La contribución al financiamiento de la planta productiva del país."[1]

A pesar de tan importante función que están llamadas a cumplir, estas sociedades han permanecido en el olvido por más de veinticinco años. Este subdesarrollo de las sociedades de inversión se ha debido principalmente a problemas en el ámbito legal, educativo y, en forma especial, a los movimientos del mercado de valores, poco comprendidos por el neófito

Ha sido hasta los años recientes cuando se ha revisado la figura legal de estas sociedades, creando nuevos tipos y favoreciendo la confianza de los inversionistas, que es la primera meta a lograr para conseguir el crecimiento real de esta forma de inversión. Por tanto, es el momento de lograr el apoyo

----

1. Comisión Nacional de Valores. "Ley del Mercado de Valores y Ley de Sociedades de Inversión". 1985, p.73.

de diversas ciencias y poner bases sólidas que permitan un desarrollo auténtico y armónico, acorde a las condiciones de nuestra situación particular, para que así las sociedades de inversión logren llenar ese hueco existente en el sistema financiero mexicano.

Ahora bien, el concepto fundamental en una sociedad de inversión, es el de su portafolios de inversión, es decir, el conjunto de valores en los cuales se invierte. Sin embargo, la teoría de portafolios se ha basado especialmente en la intuición y en la experiencia. Así, los resultados de este enfoque subjetivo han sido, sin lugar a dudas, exitosos en muchos casos; pero existe frecuentemente el problema de que tales análisis no pueden ser aplicados a otras situaciones diferentes.

Existen, a pesar de ello, algunos métodos de análisis y selección que, al considerar dos o tres instrumentos de inversión resultan claros y sencillos; pero al tratar un problema de la vida real, donde se selecciona entre cientos de papeles, resultan inoperables, por la gran cantidad de información a manejar. De aquí surge la necesidad de emplear algún modelo de selección que simplifique esta enorme tarea.

Al distribuir capital entre varias inversiones, es decir, al diversificar, se puede reducir de manera significativa el riesgo y mantener un buen rendimiento promedio. Sin embargo, de esta forma se pueden integrar millones de portafolios diferentes, cada uno de los cuales tiene sus propias características en cuanto a rendimiento y riesgo. El problema es, entonces, seleccionar de entre todos ellos, el portafolios más adecuado a los objetivos de inversión.

Hace apenas algunos meses empezaron a operar en nuestro mercado de valores, las sociedades de inversión de renta fija, y en este corto período, han logrado alcanzar activos superiores a los 100 mil millones de pesos. Con ésto se destaca la actualidad del tema, pues ahora están las sociedades de inversión iniciando propiamente su vida.

También resalta la importancia del tema, al ver que hay muchos recursos en juego, y que, en la mayoría de los casos, las inversiones son elegidas con un nivel superficial de análisis. Por ello, es importante tener métodos de análisis y selección de portafolios más objetivos, y así hacer de este enfoque menos un arte y más una ciencia.

El objetivo del presente trabajo es plantear un modelo de selección de inversiones que determine una combinación de valores que maximice el rendimiento esperado del portafolios de una sociedad de inversión de renta fija.

Al plantear un modelo de optimización de inversiones, se pretende brindar una guía que permita al análista de inversiones fundamentar mejor sus decisiones y eficientar el manejo del portafolios de valores. Los resultados que puede arrojar el modelo, indican una combinación de valores que maximicen el rendimiento, pero que pueden variar dependiendo de las condiciones del mercado. Es importante resaltar que este modelo brindará un parámetro, que sirva para fundamentar las decisiones de inversión y que pueda indicar que tan alejado se encuentra el portafolios actual del óptimo teórico. La labor quedará completa con la ayuda del analista y del negociador, que puedan integrar estos valores dentro del conjunto de las inversiones de la sociedad.

El trabajo está estructurado en la siguiente forma: En la primera parte se presenta el marco de referencia de la investigación, para conocer adecuadamente el medio donde se ha desarrollado el estudio. El capítulo segundo presenta, en forma general, lo que son las sociedades de inversión, para que el lector conozca a las entidades financieras que son objeto del trabajo. Conociendo su concepto, finalidades, los tipos de sociedades que existen, sus características y ventajas, así como el desarrollo que han logrado, se comprende la importancia que reviste este tipo de inversión y la actualidad del tema. También se trata en este capítulo la función social que cumplen estas sociedades, se analizan los problemas que han impedido su adecuado desarrollo, destacando la importancia de la contribución de diversas ciencias a estas sociedades para que logren consolidar su crecimiento.

Posteriormente se analiza, en el capítulo tres, la teoría de portafolios de inversión, ya que este es el concepto básico de una sociedad de inversión. Se presentan las características de los portafolios, en cuanto a riesgo y rendimiento, así como el efecto que tiene la diversificación sobre estos factores. Este análisis va de lo sencillo a lo complejo, para facilitar la comprensión, ya que primero se considera el caso de un portafolios de dos valores, luego se estudian las características cuando se tienen tres valores, para llegar finalmente al caso general, es decir, con cualquier número determinado de valores. También aquí se incluye el concepto de portafolios eficiente, mediante el cual se caracteriza a los portafolios que tienen un mayor rendimiento ante un mismo nivel de riesgo, o bien, que su riesgo es menor que el de cualquier otro con el mismo rendimiento. Se concluye con la aplicación de esta teoría al caso de un portafolios integrado exclusivamente por valores de renta fija, que es el caso de interés en el trabajo, dejando el camino abierto para el lector curioso, que se interese por el estudio de los portafolios de renta variable. De este análisis surge claramente la necesidad de algún modelo que permita seleccionar, en forma eficiente, un portafolios adecuado, de entre las múltiples alternativas que existen.

La segunda parte corresponde al desarrollo de un modelo de optimización. En el capítulo cuatro, a la vez que se presentan las particularidades del problema y se describen los instrumentos en los que puede invertir la sociedad de inversión de renta fija, se establecen expresiones cuantitativas para cada una de estas características, y se llega al planteamiento de un modelo de programación lineal. Se concluye este capítulo con un ejemplo práctico, aunque reducido en comparación con los problemas reales, y su solución mediante un paquete de Programación Lineal. El capítulo cinco incluye una alternativa de solución: se presenta una estructura de red asociada al problema; se emplea para resolver el problema en cuestión mediante un algoritmo especializado, conocido como "Out of Kilter", y se incluye su desarrollo. La importancia de este nuevo planteamiento es que un algoritmo específico puede ser más eficiente que un algoritmo general, como el empleado en el modelo original. Además, se obtiene una representación gráfica del problema, de gran utilidad para facilitar su comprensión y así favorecer la comunicación entre el investigador y el usuario del modelo, aún cuando éste no tenga suficientes bases matemáticas.

La parte final corresponde a las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de este trabajo.

Se incluye un apéndice con los resultados teóricos que son necesarios para el desarrollo del modelo presentado De esta forma, el lector con escasos conocimientos de la Investigación de Operaciones, encontrará en una exposición breve y clara el material básico de la Programación Lineal, para facilitar el estudio del modelo lineal.

C A P I T U L O   I I

LAS SOCIEDADES DE INVERSION

CONCEPTO

Para establecer el marco de referencia del presente trabajo conviene mencionar algunas definiciones,que han dado los estudios del tema, para tener una idea clara y completa de lo que son estas instituciones.

En la Ley de Sociedades de Inversión son caracterizadas como aquéllas que "tienen por objeto la adquisición de valores y documentos seleccionados de acuerdo al criterio de diversificación de riesgos, con recursos provenientes de la colocación de las acciones representativas de su capital social entre el público inversionista".[2]

Por su parte, el Lic. Alfredo Lagunilla Iñarritu dice que:

---

2. Comisión Nacional de Valores."Ley del Mercado de Valores y Ley de Sociedades de Inversión".1985, p.73.

"es la sociedad de inversión el sistema en donde se cruzan los problemas y soluciones del ahorro multiplicador con el financiamiento óptimo de las empresas". [3]

Según Prats Esteva, son "aquellas sociedades cuyo capital esta constituído únicamente por valores mobiliarios; consistiendo toda su actividad social en la administración de su cartera".[4]

En su trabajo, María Uribe Iriestra nos dice que "las sociedades de inversión son instituciones de inversión colectiva, organizadas bajo la estructura de sociedades anónimas, cuya función consiste en organizar y administrar, siguiendo determinados principios, una cartera de valores mobiliarios con base en la cual emiten a su vez nuevos títulos, como acciones, partes sociales, etc. que colocan entre diversos inversionistas, ofreciéndoles procurar el incremento del capital invertido, aumentando los ingresos de la cartera de valores, y preservar el capital". [5]

La Asociación Mexicana de Casas de Bolsa, en su publicación sobre las sociedades de inversión, proporciona una descripción más clara al decir que "las sociedades de inversión son

----

3. Lagunilla Iñarritu, Alfredo. "Las Sociedades de Inversión. Panorama Internacional. El Caso de México". 1969, p.7.

4. Citado por Uribe Iriestra, María E. "Las Sociedades de Inversión en México". Tesis U.N.A.M. 1981, p.90.

5. Uribe Iriestra, María E. Op. Cit., p.148.

instituciones financieras creadas hace casi un siglo, para captar el ahorro de pequeños y medianos inversionistas, con el fin de invertir estos recursos en una gama diversificada de títulos accionarios pertenecientes a empresas de diferentes sectores de la economía. Estas instituciones, además de permitir la participación de pequeños y medianos ahorradores en el capital de las empresas confieren una serie de ventajas a sus participantes atribuibles a los grandes capitales: diversificación, reducción del riesgo y administración profesional".[6]

En conclusión, se puede decir que las sociedades de inversión son la unión de los capitales de multitud de inversionistas, que se reúnen para emplear una administración de inversiones que ninguno de ellos, en lo particular, podría pagar razonablemente, a menos que su capital fuese grande. Todas estas aportaciones de los inversionistas se combinan en un capital considerable, el cual los administradores invierten en un conjunto de valores seleccionados, que luego vigilan y supervisan continuamente, buscando inversiones alternativas. El producto de esas diferentes inversiones, son utilidades que reciben los inversionistas, ya sea en forma de plusvalía o como dividendos en efectivo o en acciones, según el tipo de sociedad. El inversionista de una sociedad de inversión recibe acciones que

----

6. Burdet, Charles y García Azcué, Ida. "La Problemática del Ahorro y las Sociedades de Inversión en México". Asociación Mexicana de Casas de Bolsa. 1983, p.55.

representan un interés proporcional en una lista diversificada de valores.

ORIGEN Y DESARROLLO

El principio fundamental de una sociedad de inversión es reunir los recursos de muchas personas para poder distribuirlo en varias inversiones y obtener así más beneficios. Esta idea es muy antigua y connatural al ser humano, ya que se basa en los principios de sociabilidad.

La idea de compartir el riesgo para beneficio mutuo está presente desde los albores del comercio, ya que los egipcios y los fenicios vendían porciones de sus barcos y caravanas de camellos, a fin de repartir el riesgo en los largos viajes que realizaban para desarrollar su actividad comercial.

Así, la primera sociedad de inversión se formo en Bélgica hacia el año de 1822, cuando el Rey Guillermo I organizó la "Société Génerale de Belgique". Sin embargo, el verdadero pionero en este campo fue el "Foreign and Colonial Government Trust", formado en Londres en 1818. El propósito de esta institución era permitir al inversionista de capital mediano las mismas ventajas de los grandes capitales, ya que podía también diversificar el riesgo con la posesión de diferentes inversiones.

Desafortunadamente, durante esta etapa, la idea de la sociedad de inversión no logro gran aceptación. No fue sino hasta la penúltima década del pasado siglo, cuando se formaron varias compañías escocesas. Esto se debió a que los escoceses descubrieron rápidamente las ventajas de reunir inversiones de muchas personas para formar un gran capital y poder pagar los servicios de directivos experimentados, con costo muy bajo en el promedio general.

Por este medio los escoceses, y posteriormente las compañias de inversión británicas, lograron acumular cientos de millones de libras esterlinas que fueron invertidas en todo el mundo; una parte importante de ese capital fue invertido en hipotecas a la agricultura en los Estados Unidos, y todavía en la actualidad, existen empresas cuyos nombres son clara evidencia de que proceden de aquellas sociedades de inversión creadas a fines del siglo pasado. Por ejemplo, existe en los Estados Unidos una compañía que se llama "Scottish American Mortgage Company".

A principios del siglo XX, en los Estados Unidos, se empezó a desarrollar la idea de las sociedades de inversión, debido a la escasez de capital de riesgo. En el período de 1890 a 1920 solamente se formaron unas cuantas. La más antigua de tipo abierto, fue el Alexander Fund, fundado en Filadelfia en 1907. Estas primeras sociedades americanas siguieron el ejemplo de sus predecesores britanicos y por ello invirtieron fundamentalmente buscando rentas y seguridad.

En los años veintes, particularmente después de 1926, aparecieron gran cantidad de sociedades de inversión; algunas de ellas eran de capital cerrado o fijo, en las cuales la dirección seleccionaba una cartera que no podía cambiarse durante todo el tiempo en que la compañía subsistiera.

Algunas otras fueron creadas como un medio para especular, y también otras se crearon por bancos, para descargar de sus carteras una serie de valores que no tenían mercado.

Hacia el fin de esta segunda década, las sociedades de inversión tenían activos por mas de 7,000 millones de dólares y había alrededor de 675 compañías activas. Durante los años de la quiebra del mercado de valores en Nueva York, o sea de 1929 a mediados de 1932, muchas sociedades de inversión americanas sufrieron fuertemente; muchas fallaron y la baja en los precios de sus acciones fue aún mayor que la observada en el promedio de los valores de la Bolsa.

La Sociedad de Inversión Moderna.

Después de la caída del mercado en 1929 y ante algunos abusos cometidos, se hizo necesario la reglamentación de estas sociedades, por lo cual se promulgó el "Investment Company Act" en 1940, con lo cual se marca una nueva etapa en el desarrollo de las sociedades de inversión, trayendo como consecuencia un crecimiento acelerado de este tipo de instituciones.

Fue entonces cuando realmente nació la sociedad de inversión abierta, que es totalmente diferente a las creadas en la década de 1920. En las primeras sociedades los directivos tenían más preocupación por su propia ganancia, que en la protección de sus accionistas. Con la nueva reglamentación esto cambió.

Esta nueva sociedad fue un concepto americano de esa idea original de reunir el capital de muchas personas e instituciones, para lograr el beneficio de una adecuada diversificación con el propósito de disminuir el riesgo y contar además con una administración permanente.

A partir de entonces han crecido en forma considerable estas sociedades, pues en un período de 40 años sus activos totales se incrementaron de 448 millones de dólares a 120 mil millones y el número de sociedades aumentó de 68, a más de 750. La mayor parte de este crecimiento se debe a que cada vez son más los inversionistas que han comprado acciones de dichas empresas.

Al igual que en los Estados Unidos, las sociedades de inversión han tenido gran aceptación en otros países. En Alemania Federal, por ejemplo, la participación de los activos de las sociedades de inversión en el valor total del mercado de valores se incrementó de un 3.4% en 1960, a un 33.14% en 1981.

Se calcula que en 1980 el número aproximado de sociedades de inversión en el mundo era superior a 1500 con unos activos mayores a 200 mil millones de dólares, y con más de 30 millones de inversionistas de todas las condiciones socio-económicas, aunque principalmente pequeños y medianos inversionistas. Este crecimiento tan significativo que ha tenido el sector de sociedades de inversión se debe principalmente a las ventajas que ofrece al inversionista mediano y pequeño.

LAS SOCIEDADES DE INVERSION EN MEXICO

En nuestro país, se inicia la historia moderna de las sociedades de inversión con la promulgación de la Ley correspondiente en el año de 1955. En 1956 se constituye la primera sociedad: El Fondo de Inversiones Rentables y hacia fines de ese mismo año, se formó la Sociedad General de Inversiones,S.A., que posteriormente se denominaría Fondo Banamex.

En el año de 1963 se hacen algunas reformas a la Ley de Sociedades de Inversión y en 1964 se establecen otras dos sociedades: el Fondo Industrial Mexicano y la Inversora Mexicana, que ahora es el Multifondo de Desarrollo de Capitales.

Aun cuando en la primera década de su vida la mayoría de estas sociedades tuvieron un importante crecimiento de su capital, en la década de los setenta disminuyó considerablemente dicho crecimiento.

Los principales factores que influyeron en este hecho fueron: por un lado las deficiencias en la legislación vigente y por otro, la subordinación de estas sociedades a los intereses de los respectivos grupos que las controlaban.

El mayor problema que presentaba la Ley, era que permitía aumentar el capital, según la demanda existente requiriera liberar nuevas acciones, pero no permitía la recompra de acciones propias, por lo cual era la operadora de la sociedad quien debía recomprarlas si quería ofrecer liquidez a sus clientes, con lo cual tenían que absorver los costos de financiamento y, en caso de baja en el precio de cotización, la consecuente pérdida. Esta situación desanimaba a las operadoras a promover el desarrollo de las sociedades de inversión.

Además, en múltiples ocasiones, los grupos que tenían la concesión de una sociedad, la utilizaban como instrumentos auxiliar de su propio financiamiento, es decir, este grupo utilizaba a la sociedad para colocar paquetes de acciones de sus propias empresas, que en muchos casos no eran las más rentables ni las más bursátiles.

Sin embargo, conforme estas sociedades se han ido desarrollando, han logrado vida e identidad propias, independientes de la política e intereses del grupo financiero que las administra.

En diciembre de 1980 se modificó la Ley de Sociedades de Inversión, permitiéndose la recompra de acciones propias, entre otras cosas, y en el mismo año se otorgaron nuevas concesiones, surgiendo así más sociedades.

Este panorama parecía advertir un interés especial de las autoridades en promover y desarrollar este instrumento de inversión. A pesar de ello, se establecieron algunas políticas en materia legal, fiscal y económica que marcaron un sesgo contra este tipo de inversiones. Aunado a esto, se presentó una época crítica en el Mercado de Valores Mexicano, lo cual dificultó la promoción y consolidación de estas sociedades.

Se estima que en mayo de 1982, las sociedades de inversión contaban aproximadamente, con 18,936 inversionistas, lo cual representa el 0.07% de las cuentas de ahorro bancarias y pone de manifiesto el papel tan limitado que han jugado estas sociedades como instrumentos de inversión.

No fue sino hasta 1983, cuando se presentó un repunte importante en este tipo de sociedades, provocado en gran medida por la marcada tendencia alcista que presentó el Mercado de Valores.

Ahora se ha revisado la figura legal de esta forma de inversión, favoreciendo la creación de nuevos tipos de sociedades de inversión y, en conclusión, se presenta un panorama totalmente nuevo para dichas sociedades, con ilimitadas oportunidades de crecimiento, después de que por un largo período no tuvieron el suficiente desarrollo. Por ello, ya es tiempo de dedicarles un estudio profundo, aportando la colaboración de diversas ciencias para lograr un desarrollo auténtico y armónico, acorde a las condiciones de nuestra situación particular, para que así las sociedades de inversión logren llenar ese hueco existente en el sistema financiero mexicano.

TIPOS DE SOCIEDADES DE INVERSION

No existe una sociedad de inversión que pueda satisfacer las necesidades de todos los inversionistas. Debido a ésto hay varios tipos de sociedades de inversión, cada una con objetivos y políticas muy diferentes de acuerdo a los intereses de distintos grupos de inversionistas. Pues claramente se comprende que una sociedad de inversión que es adecuada para un hombre de negocios puede no ser conveniente para una viuda, y una sociedad de inversión cuya finalidad sea el crecimiento de capital será adecuada para un ejecutivo joven, pero no lo será para el inversionista que busque la conservación de su capital mas una renta.

Se puede clasificar a las sociedades de inversión, en cuanto a la forma de negociar sus acciones, en dos tipos:

1. Sociedades de inversión cerradas.

Este tipo corresponde a la más antigua forma de sociedad de inversión americana, pues apareció hace casi un siglo y era muy similar a las compañías inglesas y escocesas de esa época.

Se les llama cerradas porque el número de sus acciones es fijo, es decir, hay un cierto número de acciones emitidas, pagadas y vigentes y si alguién quiere comprar, debe buscarlas en el mercado, como sucede con cualquier otro valor. En otras palabras, los inversionistas no pueden comprar nuevas acciones recién emitidas por la compañía, ni tampoco, pueden vender sus acciones a la misma emisora. Este tipo de sociedades no necesitan representantes, sino que sus acciones se venden y se compran a través de la Bolsa. El precio de las acciones de las sociedades cerradas se determina por la oferta y la demanda, de tal forma que el precio de cotización puede ser mayor o menor que su valor en libros.

2. Sociedades de inversión abiertas.

La característica principal de este tipo de sociedades es que su capital no es fijo, sino que puede variar según la oferta y la demanda, ya que siempre están dispuestas a recomprar sus propias acciones con lo cual puede disminuir proporcionalmente su capital pagado; inversamente cuando hay más demanda pueden ofrecer nuevas acciones a los inversionistas, aumentando así el capital pagado. El precio de operaciones de compra o venta es el valor en libros de la acción, para evitar fluctuaciones en la cotización a consecuencia de las fuerzas de oferta y demanda.

De acuerdo a los objetivos de inversión que buscan las sociedades de inversión, pueden ser:

1. De crecimiento.

Estas sociedades se especializan en adquirir valores de empresas con amplias perspectivas a futuro, que producen artículos o servicios con una demanda creciente, por lo cual aumentan sus ventas y sus utilidades a un ritmo más acelerado que el crecimiento promedio de la economía nacional.

Este tipo de empresas con gran dinamismo, por lo general, retienen la mayor parte de sus utilidades para financiar nuevos desarrollos, por lo que tienen una política de bajos dividendos.

2. De renta fija.

Esta clase de sociedad busca la estabilidad del capital invertido y la estabilidad de la renta.

En general, integran su cartera con valores de renta fija que tengan intereses atractivos y a los que muchas veces el pequeño o mediano inversionista no tiene acceso. Ejemplos de valores de renta fija son: Papel Comercial, Aceptaciones Bancarias, Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes), Certificados de Depósito, Bonos o Certificados de Participación, así como Obligaciones.

En algunos casos, estas sociedades también pueden adquirir acciones preferentes que tengan alta calidad, estabilidad de rentas y un buen precio de mercado, aunque este no es el caso en nuestro país.

3. Balanceadas.

Este tipo de sociedad es más conservador que las de crecimiento, pues tiene una parte de su inversión en valores de renta fija y otra parte en acciones comunes de empresas de crecimiento. La inversión en estas sociedades tiene como propósito la preservación del capital invertido por medio de la inversión en acciones y la obtención de un rendimiento con los valores de renta fija. Además, esta mezcla da una mayor estabilidad al comportamiento general de la sociedad de inversión.

4. De capital de riesgo.

Estas sociedades se constituyen para obtener recursos del público inversionista, que se destinan a empresas pequeñas y medianas, que integran su cartera. Este tipo de sociedades ayuda a la creación, desarrollo y promoción de dichas empresas, ya que a través de la participación en el Consejo de Administración de las mismas, se les proporciona asistencia técnica en las áreas de administración, finanzas, tecnología, mercadotecnia y todas aquéllas otras que requieran de una asesoría especial, con lo cual se facilita su colocación futura a través de ofertas públicas o privadas.

Este tipo de sociedades tiene importantes ventajas, ya que son una fuente de recursos frescos, permitiendo así la capitalización de empresas pequeñas y medianas. Para los inversionistas es una posibilidad de participar activamente en empresas con gran potencial de desarrollo y con perspectivas de grandes utilidades, al mismo tiempo que se beneficia la sociedad, al tener una mayor oferta de bienes, servicios y empleos; contribuyendo a la justa distribución de la riqueza.

Además, de manera enunciativa, se puede contar a:

Sociedades de inversión totalmente manejadas: algunas sociedades no se especializan en la inversión de alguna clase especial de valores, ni tienen establecida una proporción fija de cada tipo de valores, sino que intentan adaptarse a las condiciones del mercado. Así, estas sociedades pueden estar principalmente invertidas en acciones en un momento determinado o en instrumentos de renta fija en otro momento.

Fondos que invierten en especialidades: en este grupo hay fondos que invierten especialmente en ciertas industrias, como pueden ser: eléctricas, autopartes, aviación, químicas, etc.

Fondos regionales: Hay algunos fondos que invierten exclusivamente en valores de empresas ubicadas en ciertas regiones geográficas.

CARACTERISTICAS Y VENTAJAS

A continuación se detallan las características generales y ventajas de las sociedades de inversión.

- Diversificación: Los capitales reunidos de los accionistas de una sociedad de inversión, están repartidos en la propiedad de muchos valores de diversas empresas, en la misma forma en que lo puede hacer un inversionista poderoso o una gran institución financiera.

La persona que invierte solamente en una o en pocas compañías, puede obtener magníficos o pésimos resultados, y en cambio, al repartir el riesgo entre muchas empresas , como lo hacen las sociedades de inversión, el inversionista medio puede participar en el crecimiento general de la industria nacional, en vez de invertir en las posibilidades de unas cuantas compañías que en muchas ocasiones no logran lo que pretenden. Con esto, se logra una seguridad en la inversión.

La teoría de repartir el riesgo y aceptar un promedio, en vez de buscar la utilidad espectacular a costa de un mayor riesgo concentrando la inversión, es una teoría sana y conservadora sobre la cual se basan en gran parte la banca y los seguros modernos.

- Administración Profesional: La economía nacional es muy compleja, con condiciones muy variantes que influyen en el mercado de valores. Inclusive hay factores de otras economías que afectan a este mercado.

Para el pequeño inversionista, la selección de valores y la reinversión de los rendimientos en forma constante para maximizar sus utilidades, implica un profundo conocimiento de la materia, además de tiempo, información y habilidad. De otra forma, el tener un consejero profesional que administre sus inversiones, conllevaría un costo tan elevado que incidiría grandemente en sus utilidades. Por ello, a una Casa de Bolsa no le es costeable dedicar un asesor financiero al manejo de cuentas pequeñas.

En cambio, en la sociedad de inversión se tiene una administración profesional que continuamente supervisa las inversiones y busca nuevas oportunidades más redituables, y al agrupar a un gran número de inversionistas, este costo de la asesoría financiera representa una cantidad mínima y su impacto es casi imperceptible en el rendimiento de los inversionistas.

- Liquidez: Gracias a las ventajas de la diversificación de las inversiones, el accionista puede tener, en caso necesario, liquidez inmediata, al valor neto.

Esto se logra gracias a la variedad de vencimientos que tienen las distintas inversiones, ya que dentro del conjunto existen algunos instrumentos de fácil realización.

Así se tiene una gran ventaja que puede permitir aprovechar magníficas oportunidades que se presentan intempestivamente, o afrontar compromisos imprevistos.

- Comodidad: La inversión en acciones de estas sociedades es extraordinaria por su comodidad, ya que el accionista no tiene una serie de trabajos respecto a su inversión, tales como realizar renovaciones, cortar cupones, cobrar dividendos, custodiar los valores, llevar contabilidad, hacer manifestaciones de impuestos, llevar libros en los que aparezcan los valores que posee, sus precios de costo o las nuevas inversiones que realice, lo cual hay que hacer normalmente cuando se participa directamente en este mercado.

El inversionista, en un solo contrato, controla todas sus inversiones y recibe automáticamente sus dividendos; no tiene que ejercitar derechos ni acudir a las asambleas de accionistas de las diversas empresas en que se invierte, sino únicamente, y, eso si desea, a la asamblea de accionistas de la misma sociedad de inversión.

- Excelente colateral para préstamo: Dado que las acciones de una sociedad de inversión tiene liquidez, son una excelente garantía colateral para un préstamo.

Un accionista que necesite dinero en forma temporal y que no quiera vender sus acciones puede pedir un préstamo, usando las acciones que tenga, como garantía colateral.

- Adaptable a cualquier planeación financiera: Debido a que existe toda una gama de planes de inversión en este tipo de sociedades, son propias para satisfacer las más variadas necesidades financieras y propósitos que tengan los inversionistas.

- Reglamentación adecuada: Las Sociedades de Inversión en nuestro país se constituyen por concesión féderal otorgada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público. El organismo encargado de vigilar el funcionamiento de estas sociedades es la Comisión Nacional de Valores, misma que autoriza los valores y documentos en que pueden invertir, así como los porcentajes generales de inversión.

Además, la Ley de Sociedades de Inversión ha sido modificada recientemente, para asegurar un adecuado manejo de estas sociedades. Con estas reglamentaciones se evitan situaciones de riesgo o abusos que llegaron a presentarse en otros tiempos.

- Simplicidad en caso de herencia: Gracias a su liquidez, su fácil transferencia y valuación, las inversiones en sociedad de inversión facilitan mucho la repartición de una herencia y simplifican grandemente los trámites.

FUNCION SOCIAL

Las sociedades de inversión tienen un papel muy importante dentro de la sociedad actual.

Según se ha visto, estas sociedades son una interesante alternativa de inversión, ya que permiten al pequeño y mediano inversionista el acceso al mercado de valores, con lo cual pueden participar de sus atractivos rendimientos.

Con estos rendimientos que el inversionista puede obtener y con las grandes ventajas de operación de las sociedades de inversión, puede formarse fácilmente un plan de ahorro para formar su patrimonio, con lo cual su nivel de vida podrá mejorar sustancialmente, al ritmo en que crece la economía nacional.

Mediante las sociedades de inversión se logra aumentar el ahorro, con lo cual se facilita el desarrollo económico de toda la sociedad, ya que el capital ahorrado es aquél que puede ser invertido, y de esta forma se puede desarrollar la economía a una tasa mayor. En el caso de México, se ha tenido que recurrir a contratar deuda externa (ahorro de otras economías) para financiar el desarrollo, por la falta de ahorro interno, entre otras causas. Las sociedades de inversión colaboran a disminuir este problema.

Por otra parte, el dinero que se capta mediante este tipo de inversión, se destina a la adquisición de valores de empresas mexicanas que cotizan en la Bolsa de Valores, con lo cual se logra un financiamiento directo a las empresas mexicanas, propiciándose el desarrollo económico, con la posibilidad de aumentar la cantidad de bienes y servicios disponibles; de esta forma se favorece un nivel general de vida más elevado.

Además se logra una educación financiera en un gran sector de la población, ya que cada entrevista con el representante de la sociedad de inversión, es una verdadera enseñanza sobre un campo muchas veces desconocido, con lo cual se puede esperar que los inversionistas tengan paulatinamente, un comportamiento más sensato en materia financiera.

Finalmente, se puede decir que invertir en una sociedad de inversión representa un elemento de estabilidad social, ya que el gran público inversionista, al participar en el capital de las empresas emisoras, participa del crecimiento de éstas y se logra un desarrollo más uniforme de la sociedad en general.

PROBLEMATICA DE LAS SOCIEDADES DE INVERSION

A pesar de la importancia de las sociedades de inversión y de haberse constituído la primera en nuestro país hace casi 30 años, ellas no han tenido la penetración necesaria dentro del sistema financiero mexicano. Las causas principales que han impedido su desarrollo son las siguientes:

1. La falta de promoción.

El prototipo de inversionista de estas sociedades no es el gran inversionista con profundos conocimientos en materia financiera; por ello, en cada entrevista hay que explicar con detalle al inversionista potencial el significado del ahorro, la inversión, la intermediación financiera y los diversos instrumentos financieros. Por tal hecho, ha sido difícil la promoción de este tipo de inversión, pues el número de asesores financieros y el costo involucrado ha sido un fuerte impedimento. Estos costos podrían cubrirse perfectamente si los promotores pudieran vender un gran número de acciones de la sociedad, con lo cual las comisiones se pagarían por sí mismas.

2. La volatilidad del Mercado de Valores.

Las grandes variaciones en el nivel de precios de la Bolsa Mexicana de Valores asustan a los inversionistas con poca educación financiera, mientras que el inversionista experimentado comprende las causas de tales variaciones. Este hecho, en ocasiones, desanima al inversionista a participar en las sociedades de inversión, ya que por estar integrada su cartera con valores cotizados en Bolsa, estos movimientos también afectan al precio de las acciones de las sociedades.

Estos problemas se conjuntan e interaccionan, dificultando el desarrollo de las sociedades de inversión: el nivel de precios de los valores negociados en Bolsa es volatil debido a la raquítica demanda, por lo cual es necesario incorporar inversionistas institucionales, tales como las sociedades de inversión, para evitar variaciones bruscas en los precios del mercado. A su vez, estas sociedades no han podido desarrollarse porque la volatilidad del mercado incide en la rentabilidad de mantener una gran fuerza de venta.

3. El esquema adoptado por las autoridades en materia financiera, fiscal y legal.

La emisión de valores de renta fija por parte del Gobierno Federal en condiciones de alto rendimiento, absoluta liquidez y completa seguridad, constituye una competencia indudable a empresas emisoras de deuda directa y de capital de riesgo, ya que difícilmente podrán colocar sus emisiones entre el gran público inversionista, por lo que se verán limitadas, en su mayoría, a financiarse de utilidades retenidas y de créditos bancarios,los cuales son cada vez más escasos.

Mas aún, la exención en materia fiscal, que se otorgó a la inversión en estos títulos, ha desviado la demanda del público hacia ese sector, quedando al márgen los valores privados, especialmente los de largo plazo y de riesgo, que, en último caso, son los que contribuyen a la formación del capital de las empresas.

Por otra parte, las ventajas fiscales que se han concedido a los intereses que pagan los títulos de renta fija obtenidos por personas físicas, en contraposición con el gravamen impuesto a los dividendos que pagan las empresas, han sesgado la preferencia de los inversionistas hacia aquellos títulos.

En especial, el régimen impuesto a las Sociedades de Inversión desmotiva al inversionista típico de éstas, pues queda sujeto a una serie de obligaciones en términos de mayores impuestos y requisitos legales, los cuales puede evitar si invierte en otro tipo de valores.

Mientras mas requisitos administrativos y fiscales se impongan al pequeño inversionista que participa en el mercado de valores, se sesgara cada vez más la inversión de la mayoría de la población hacia activos financieros de absoluta seguridad y liquidez, que en general, por su corto plazo de vida, no contribuyen a la formación de capital, factor que es indispensable para lograr el crecimiento económico.

SOLUCIONES PARA SU DESARROLLO

Marco Legal.

Inicialmente, la Ley de Sociedades de Inversión, no permitía la adquisición de acciones propias, por lo cual tenía que recomprar la operadora estas acciones para brindar liquidez al cliente. Posteriormente, con las reformas a dicha Ley, se permitió la recompra de acciones propias, pero con muchas limitaciones. Por ello, es necesario proporcionar una mayor libertad a estas sociedades para la colocación de sus acciones recompradas, ampliando el plazo de colocación y el porcentaje de acciones recompradas que se toma como base para calcular este plazo.

Respecto al régimen de inversión, la Ley de Sociedades de Inversión, señala dentro del artículo octavo que la Comisión

Nacional de Valores establecerá reglas de carácter general "...con vistas a procurar condiciones adecuadas de seguridad y liquidez, la diversificación de riesgos, el fomento de actividades prioritarias, el desarrollo ordenado del Mercado de Valores...", con lo cual existe la posibilidad de que circunstancias o medidas "prioritarias" completamente ajenas a las sociedades de inversión tengan influencia en la determinación de su régimen de inversión, cuando lo único que realmente importa es que estas sociedades se desenvuelvan buscando siempre el máximo beneficio para sus accionistas, dentro del objetivo que persiguen.

Tambien es necesario que se autorice a las sociedades de inversión el practicar otro tipo de operaciones con su cartera, diferentes a las de compra o venta, tales como futuros, operaciones a plazo y de reporto, con lo cual se puede asegurar un rendimiento en su cartera.

Finalmente, la Ley de Sociedades de Inversión y las circulares reglamentarias de la Comisión Nacional de Valores, establecen una serie de disposiciones derivadas muchas veces de la Ley de Instituciones de Crédito, que en este caso resultan absurdas y dificultan el manejo administrativo de los fondos.

En conclusión, las reformas aplicables al régimen legal deberán conducir a las sociedades de inversión a una mayor flexibilidad en su funcionamiento y sus operaciones, a fin de que puedan proporcionar a los inversionistas las condiciones más adecuadas de liquidez, seguridad y rendimiento. Así mismo, deben ser conducentes a lograr una simplificación en los procedimientos administrativos y en el funcionamiento de los fondos, para proporcionar un fácil manejo de los mismos.

Marco Fiscal.

Las sociedades de inversión, para efectos fiscales, son consideradas como sociedades con fines no lucrativos, lo cual trae consigo una serie de complicaciones administrativas y las pone en desventaja frente a posibles inversionistas, que les resulta más facil invertir en otros instrumentos.

Algunos puntos de la Ley de Impuestos sobre la Renta afectan el crecimiento y el desarrollo de las sociedades de inversión, por ello, es necesario conformar un tratamiento fiscal especial para este tipo de sociedades, ya que son organismos con objetivos y características completamente distintos de las otras personas morales con fines no lucrativos.

Marco Educativo.

Para lograr la plena aceptación de las sociedades de inversión, es necesario conocer sus objetivos, su estructura y sus carácteristicas. Hay que recalcar sus ventajas con respecto a otras alternativas de inversión.

Esta tarea implica un cambio radical en las costumbres financieras de los inversionistas potenciales, y dicho cambio sólo se logrará mediante una auténtica educación financiera, acorde con las necesidades de nuestro tiempo; y los encargados de lograr esta educación son los promotores de sociedades de inversión, que induzcan a la gran población hacia la inversión productiva.

Por ello, es necesario que el Estado estimule la existencia y formación de estos asesores financieros, para lograr un crecimiento real de las sociedades de inversión, y así puedan desempeñar adecuadamente la función que tienen dentro del sistema financiero mexicano.

C A P I T U L O   I I I

PORTAFOLIOS DE INVERSION

Muchas personas creen que la inversión en el mercado de valores es muy riesgosa y sustentan esta creencia en base a su desafortunada experiencia en este mercado. La mayor parte de estas historias tiene un punto en común: se invierte una importante cantidad de dinero en un solo valor. El mercado baja y como consecuencia, resulta que esta cción también refleja una pérdida de capital, y en su deseperación el asustado inversionista vende sus acciones a menos de su costo. O aún cuando el mercado vaya al alza, por alguna otra razón baja el precio de sus acciones, llegando a la misma conclusión.

Los inversionistas pueden eliminar considerablemente estos malos resultados, para lo cual, necesitan un conocimiento general del concepto de un portafolios de inversión. Un portafolios puede ser definido como una combinación o un conjunto de valores o de otras inversiones. Al diversificar la tenencia de inversiones por medio de un portafolios, en vez de concentrarse en una sola, se puede disminuir en forma importante el riesgo a que el inversionista se expone, aunque sin reducir considerablemente el rendimiento que puede obtener.

Sin embargo, el análisis tradicional de los portafolios de inversión se ha desarrollado basado especialmente en la intuición y la experiencia. Así, los resultados de este enfoque subjetivo han sido, sin lugar a dudas, exitosos en muchos casos, pero existe el frecuente problema de que tales análisis no pueden ser aplicados a otras situaciones.

Por ello, es importante profundizar más en este tema, para lograr tener métodos de análisis y selección de portafolios más objetivos, y así hacer de este enfoque menos un arte, y más una ciencia.

CARACTERISTICAS DE LOS PORTAFOLIOS DE INVERSION

El rendimiento esperado de una determinada inversión involucra cierto grado de riesgo. Este riesgo es la posible variación del rendimiento esperado y, entonces, el grado de riesgo que conlleva la inversión aumenta conforme crece la dispersión respecto al rendimiento esperado. Por ello, el riesgo se mide por la desviación estándar del rendimiento.

Este simple hecho de que las inversiones involucran diferentes grados de riesgo, conduce a la mayoría de los inversionistas experimentados a la opción de tener más de un solo valor a la vez, para lograr distribuir el riesgo. Al diversificar las inversiones se busca reducir el riesgo en una situación en que cada valor está sujeto a cierto grado de incertidumbre. De esta forma, el inversionista espera que aún cuando algún valor baje de precio, los otros le brinden cierta protección de una grave pérdida.

DIVERSIFICACION

La diversificación consiste en asignar dinero entre una variedad de inversiones para distribuir y minimizar el riesgo. Así pues, la clave de la diversificación es la variedad.

Este no es un concepto nuevo y toma su forma más tradicional al concentrarse en la tenencia de una serie de valores de diferentes ramas económicas. Sin embargo, muchas personas no comprenden como funciona la diversificación y por qué es tan importante para el inversionista.

La diversificación se basa en la Ley de los Grandes Números que, en palabras sencillas, nós dice que mientras más grande sea una muestra, más representativa será de la población de la cual fue extraida, y que aplicada a este caso nós indicaría que mientras mayor sea el número de inversiones que una persona posee, tendrá mayor seguridad de obtener un rendimiento esperado y de asumir un menor riesgo. Por ejemplo, si todos los valores producen un rendimiento del 10% en promedio, mientras más valores tenga un inversionista es más seguro que su portafolios obtenga el 10% de rendimiento. La Ley de los Grandes Números es también válida para otros tipos de inversiones. Supongámos que los edificios departamentales tienen una tasa promedio de desocupación del 5%. Entonces, mientras más edificios se tengan, mayor será la probabilidad de tener una tasa de desocupación del 5%. Por ello, el dueño de una unidad con pocos departamentos podría tener en un mes determinado un 30% de desocupación, mientras que el propietario de varias unidades habitacionales difícilmente tendría una tasa alta de desocupación.

Este hecho afecta grandemente al pequeño inversionista, y muy pocas veces está consciente de ello, por lo cual, se ve muy sorprendido al no obtener los rendimientos esperados.

DIVERSIFICACION Y RIESGO

Una pregunta importante es la siguiente: ¿qué tanto puede la diversificación reducir el riesgo? En un caso en que las inversiones realizadas fueran independientes, entonces la diversificación entre un número cada vez mayor de inversiones eventualmente eliminaría todo el riesgo. Se dice que las inversiones son independientes en caso de que el resultado de cada una no esté ligado en manera alguna con el rendimiento de otra.

En realidad, son raras las inversiones que son completamente independientes de otras, puesto que las variaciones en la situación macroeconómica provocan cambios generales en todas las inversiones. Sin embargo, por ahora se supondrá la independencia entre las inversiones, ya que ésto facilitará la comprensión de los efectos de la diversificación.

La reducción en el riesgo que puede lograrse al distribuir el dinero en varias inversiones independientes es considerable y, en realidad, el inversionsita no necesita mantener demasiadas inversiones para gozar de estos beneficios. De hecho, gran parte de la reducción en el riesgo total, se logra cuando se introduce un segundo valor en el portafolios, y las inversiones adicionales aportan cada vez una menor proporción en esta disminución del riesgo.

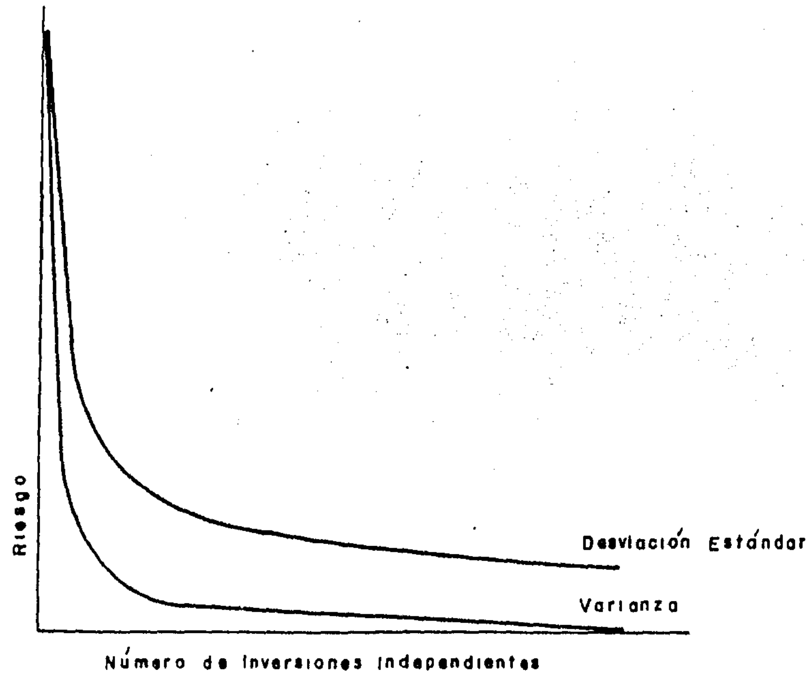
Esto resulta lógico, pues al mantener dos inversiones en vez de una, el incremento obtenido es del 100%, mientras que si se tienen 8 diferentes inversiones y se agrega una más, sólo se aumenta el 12.5% al número de inversiones. Como consecuencia, el incremento en la seguridad obtenido por la diversificación en un instrumento más, resulta muy pequeño cuando se tienen ya de 8 a 16 valores distintos.

La forma más simple que toma la diversificación es la aleatoria, y consiste en distribuir cantidades iguales de dinero entre un número determinado de inversiones y en este caso, la reducción en el riesgo puede calcularse fácilmente, si las inversiones son independientes. Al usar la varianza de los rendimientos como medida del riesgo, si ésta es la misma para todos los instrumentos, entonces el riesgo de un portafolios será igual al riesgo de cualquiera de las inversiones dividido entre el total de ellas. Así, si un inversionista destina su dinero a dos inversiones por igual cantidad, la varianza del portafolios es la mitad de la que tendría si sólo realizara una inversión. Si se pone un cuarto del capital total en cada una de cuatro inversiones, la nueva varianza será un cuarto de la original, y si se diversifica aleatoriamente entre ocho instrumentos, entonces la varianza será de un octavo. La gráfica (3-1) muestra la varianza y la desviación estándar de los rendimientos obtenidos al diversificar aleatoriamente en diferentes números de inversiones. Se puede observar cómo se disminuye grandemente el riesgo en los primeros intentos de diversificación y, sin embargo, al llegar a los 16 o 32 instrumentos, la reducción del riesgo es muy pequeña.

A pesar de ésto, algunos inversionistas actúan como si no tuvieran conocimiento alguno de tales resultados y casi siempre adquieren un solo valor que les parece el mejor.

Diversificación en el mundo real.

Hasta ahora se ha considerado la inversión en instrumentos independientes. En este caso, los factores que afectan a una determinada inversión, no tendrían influencia sobre otra. Sin embargo, ya se ha mencionado que son poco comunes las inversiones completamente independientes de otras, pues cuando algún valor tiene buenos resultados, generalmente otros también los logran. Esta tendencia que tienen a moverse conjuntamente diversas inversiones reduce las ventajas que pueden obtenerse por la diversificación.



GRAFICA 3.1 REDUCCION DEL RIESGO POR LA DIVERSIFICACION ENTRE INVERSIONES INDEPENDIENTES

Cuando las inversiones son independientes, el resultado de mantener varias por un período determinado, puede compararse con el resultado de lanzar algunas monedas: mientras mayor sea el número de monedas lanzadas, mayor será la probabilidad de obtener la mitad de "caras" y la mitad de "cruces". Similarmente, mientras mayor sea el número de inversiones en el portafolios mayor seguridad habrá de obtener el rendimiento esperado. Pero si, por alguna razón, las monedas o las inversiones son dependientes, el resultado final es más dudoso. En el caso de que existiera una dependencia total no habría diferencia entre lanzar una moneda o lanzar mil, o bien, entre poseer una inversión o poseer mil, ya que una vez que la primera moneda cae con "cara" o con "cruz", todas las demás obtendrán el mismo resultado, y en el otro caso, todos los precios se moverían paralelamente. En este caso extremo, la diversificación es inútil.

Afortunadamente, son también escasas las inversiones completamente dependientes. La mayoría de los instrumentos de inversión muestran alguna dependencia y fluctúan en la misma dirección. Algunos análisis realizados, reportan que entre un medio y dos tercios de las variaciones en precios de los valores son independientes. La porción restante, es decir, entre un tercio y un medio, de los movimientos están interrelacionados. Las fluctuaciones independientes en las inversiones pueden eliminarse mediante la diversificación mientras que las variaciones dependientes no se pueden eliminar. Así entonces, una adecuada diversificación permite eliminar entre 50 y 66% de las variaciones en los valores.

Reducción del riesgo por la diversificación.

Algunos estudios de los efectos de la diversificación en la inversión en valores han sido elaborados para determinar la reducción del riesgo que puede lograrse mediante esta estrategia. El más completo de ellos fue elaborado en la Universidad de Chicago, por los profesores Lawrence Fisher y James Lorie, en el cual analizan las variaciones en los rendimientos de todos los valores incluídos en la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE) por el período de 40 años comprendido entre 1926 y 1965. Algunos de los resultados obtenidos se presentan en la tabla (3-1). Los cálculos se han hecho con la suposición de que se invierte $ 1.00 en cada uno de los valores de dicho mercado. En la primera línea de la tabla se muestran los resultados obtenidos al invertir en un solo valor: el 95% de los valores (i.e., los portafolios que constan de un solo valor) creció hasta $ 1.975 o menos al fin del primer año; el otro 5% creció por encima de $ 1.975. En otras palabras, menos del 5% de los valores duplicaron su cotización en un año. Por otra parte, el 5% de los valores que tuvieron el peor comportamiento bajó hasta $ 0.466 o menos.

En el segundo renglón se puede observar que la diversificación reduce el riesgo de los rendimientos obtenidos. Ahí se tiene el resultado de invertir $1.00 en portafolios que contienen dos valores diferentes, al principio de cada año: en este caso el 95% de estos portafolios llegó a $ 1.855 o menos, al fin del año, y en contraposición, el 5% bajó hasta $ 0.539 o menos.

TABLA 3-1

RESULTADOS DE INVERSION EN DIFERENTES PORTAFOLIOS DE VALORES DEL NYSE 1926-1965 (I)

Número de valores del portafolios	5% de portafolios tuvieron precios menores o iguales	95% de portafolios tuvieron precios menores o iguales	desviación estándar
Resultados por períodos de 1 año de tenencia ($)			
1	0.466	1.975	0.554
2	0.539	1.855	0.451
8	0.582	1.719	0.354
128	0.576	1.606	0.318
Resultados por períodos de 5 años de tenencia ($)			
1	0.201	4.875	2.064
2	0.418	4.533	1.623
8	0.678	4.278	1.190
128	0.851	4.335	1.019

(I) Se supone que se invirtió 1 dólar en cada uno de los portafolios al empezar el período de inversión.

En caso de haber invertido $ 1 en cada uno de los posibles portafolios de ocho valores, se hubieran obtenido los resultados detallados en la tercera línea. Nuevamente se ve que los resultados son menos extremosos. Finalmente, en la cuarta línea se pueden apreciar los resultados de haber invertido $ 1 en combinaciones de 128 valores, en cuyo caso, los rendimientos oscilan entre $ 0.576 y $ 1.606.

El rango es una posible medida del riesgo al que el inversionista se enfrenta. Sin embargo, como hemos visto, la desviación estándar es una medida más adecuada de esta característica de las inversiones. Esta última medida de dispersión para los portafolios de uno, dos, ocho y ciento veintiocho valores también se muestran en la tabla (3-1). Las conclusiones que se pueden obtener de estos resultados son similares a aquéllas deducidas del análisis del rango de los rendimientos logrados: al aumentar el número de valores en el portafolios de uno a dos, se logra la mayor reducción en el riesgo. Al poseer ocho valores en vez de uno, el inversionista logra un considerable grado de diversificación. Durante el período estudiado, los portafolios de un valor tenían un riesgo (desviación estándar) de $ 0.554, mientras que aquéllos de ocho valores disminuyeron esta medida a $ 0.354, con lo cual se logra reducir casi el 40%, con respecto a la situación anterior. Al agregar otros 120 valores al portafolios sólo se logra una reducción de la desviación estándar a $ 0.318, es decir, sólo se reduce un 10% con respecto al portafolios de ocho valores.

Esta reducción del riesgo tiene un efecto muy importante cuando el período de inversión es de varios años, como se puede comprobar al analizar la segunda parte de la tabla (3-1). En esta parte se muestran los resultados de invertir $ 1 en portafolios que incluyen uno, dos, ocho y ciento veintiocho valores, por períodos de cinco años. En esta ocasión, los portafolios de un valor tuvieron el siguiente comportamiento: el 5% más bajo tuvo un valor de $ 0.201 o menos, al final de los 5 años. Esto representa una tremenda pérdida de $ 0.799 o más por dólar. Respecto a los portafolios de dos valores, el 5% que logró menor rendimiento, tuvo una pérdida que ubicó su valor en $ 0.418. El menor 5% de los portafolios de ocho valores decreció hasta $ 0.678 o menos y, finalmente, el peor 5% de los portafolios de 128 valores tenía un valor de mercado de $ 0.851 o menos.

Así, se ve que aquellos inversionistas que pusieron toda su inversión en un solo valor, obtuvieron grandes pérdidas cuando les fue mal. Y sin embargo, ¿qué ganaron por su alto riesgo cuando tuvieron mejor suerte? Realmente no ganaron mucho, pues pasado un período de cinco años, el mejor 5% de los valores individuales ganaron $ 4.875 o más. En caso de haber mantenido dos valores en posición podían haber ganado en el mismo plazo, $ 4.533 o más; si se tuvieran ocho valores el resultado podría haber sido de $ 4.278 y con 128 valores en el portafolios se podría obtener $ 4.335.

Pero, ¿qué se puede concluir de todos estos números analizados? Primero, la diversificación reduce el riesgo sin reducir el rendimiento promedio, evitando así pérdidas importantes, aunque sin perder oportunidades de buenas ganancias. Segundo, un portafolios que incluya ocho valores proporciona un suficiente grado de diversificación, y aún el aumentar de uno a dos valores en el portafolios reduce grandemente el riesgo. Tercero, el diversificar no elimina totalmente las pérdidas.

DIVERSIFICACION Y RENDIMIENTO

¿Por qué, a pesar de todo lo comentado, algunos inversionistas se rehusan a diversificar sus inversiones? La razón es que al diversificar, a la vez que se reduce la probabilidad de sufrir grandes pérdidas, también disminuye la esperanza de obtener rendimientos espectaculares. Así, al existir cierta probabilidad, por muy pequeña que sea, de hacer una gran ganancia, estos inversionis as prefieren poner todo su capital en una sola inversión.

Estos inversionistas actúan basados en el hecho de que cada año existen inversiones (valores, monedas, estampillas, etc.) que incrementan en manera considerable su valor. Así mismo, reconocen que son muy pocas las inversiones que respresentan una pérdida total del capital. La tabla (3-2) indica cuán grandes pueden ser las variaciones de los rendimientos de los valores operados en la Bolsa de Valores de Nueva York. En tres de los cuarenta años estudiados (1928, 1933 y 1936), al menos un valor incrementó su cotización en más del 1000%. Por ejemplo, en 1928, un valor tuvo una ganancia de capital del 1223%, y en la mayor parte de los demás años al menos un valor creció en 200 o

300%. Así, un inversionista que adquiera el mejor valor durante 5 o 6 años, al invertir $ 1000 podría obtener un millón, pero también corre el riesgo de perder todo su dinero, ya que al menos una empresa emisora se declaró en quiebra en 13 de los 40 años y en el resto algunos valores perdierón el 50% o más.

TABLA 3-2

RESULTADOS DE LA INVERSION DE LAS MEJORES Y LAS PEORES ACCIONES DENTRO DEL NYSE

AÑO	MEJORES ACCIONES $(X)	PEORES ACCIONES $(X)
1926	2.97	0.07
1927	7.89	0.00
1928	13.23	0.40
1929	1.85	0.00
1930	2.11	0.05
1931	2.20	0.00
1932	3.11	0.00
1933	20.84	0.00
1934	9.48	0.90
1935	6.08	0.00
1936	17.23	0.18
1937	1.37	0.11
1938	7.19	0.00
1939	2.83	0.00
1940	2.75	0.00
1941	2.94	0.00
1942	5.91	0.56
1943	7.47	0.29
1944	4.39	0.42
1945	4.70	0.65
1946	2.23	0.25
1947	2.58	0.35
1948	4.54	0.34
1949	2.89	0.10
1950	3.29	0.65
1951	4.05	0.14

AÑO	MEJORES ACCIONES $(X)	PEORES ACCIONES $(X)
1952	1.87	0.11
1953	2.14	0.00
1954	5.44	0.61
1955	2.89	0.16
1956	4.28	0.14
1957	2.27	0.27
1958	5.08	0.80
1959	3.37	0.43
1960	2.38	0.25
1961	3.81	0.00
1962	1.74	0.15
1963	3.21	0.00
1964	3.13	0.33
1965	5.43	0.29

(X) Fue supuesto que 1 dólar se invirtió en cada uno de los portafolios al empezar el período de inversión.

Fuente: Lawrence Fisher, and James J. Lorie, "Some Studies of Variability of Returns on Investments in Common Stocks", Journal of Bussines, 1970.
The University of Chicago Press. April 1970, pp. 119-127.

En el caso de la Bolsa Mexicana de Valores, también existen valores que producen muy altos rendimientos y otros que tienen grandes pérdidas, como podemos apreciar en la tabla (3-3), que corresponde a los rendimientos obtenidos por los 10 valores operados con rendimientos extremos, durante los años de 1983 y 1984.

Desafortunadamente, tales inversionistas que se rehusan a diversificar, están siguiendo una estrategia inferior de inversión. Puesto que están asumiendo un gran riesgo, pueden obtener un mayor rendimiento invirtiendo adecuadamente. Al no diversificar, están exponiéndose a un riesgo innecesario y no van a ganar, a consecuencia del mismo, un mayor rendimiento.

T A B L A 3 - 3

RESULTADOS DE LA INVERSION DE LAS MEJORES Y LAS PEORES ACCIONES EN LA B.M.V.

AÑO	MEJORES ACCIONES(%)	PEORES ACCIONES(%)
1983	16,203.03	-53.80
1983	2,723.53	-53.13
1983	2,113.62	-45.05
1983	1,908.69	-45.00
1983	1,836.23	-44.68
1983	1,834.07	-44.44
1983	1,800.97	-30.66
1983	1,233.33	-24.37
1983	1,165.35	-21.96
1983	1,085.15	-19.44
1984	854.50	-60.00
1984	742.10	-42.10
1984	670.00	-40.00
1984	612.50	-34.82
1984	547.62	-27.74
1984	525.77	-27.27
1984	478.61	-23.36
1984	468.95	-22.22
1984	429.91	-22.11
1984	397.49	-18.45

Fuentes: INFORMACION BURSATIL 1983. BOLSA MEXICANA DE VALORES. ENERO 1984.
ANUARIO FINANCIERO Y BURSATIL 1984. BOLSA MEXICANA DE VALORES. ENERO 1985.

Generalmente se cree que mientras mayor sea el riesgo a que se expone el inversionista, mayor será el rendimiento que puede esperar. Pero, ¿por qué esperar un mayor rendimiento como consecuencia de un riesgo que se puede eliminar por la simple diversificación? Así pues, el mayor rendimiento no corresponde al riesgo denominado diversificable, es decir, aquél que puede evitarse al diversificar. Este tipo de riesgo también es conocido como residual o no sistemático a diferencia del riesgo no diversificable, sistemático o de mercado, que corresponde a los movimientos generales de todo el mercado. Este último no puede eliminarse con la diversificación.

Ahora es posible profundizar más en las consideraciones establecidas previamente. Para ello, se utilizarán algunos conceptos matemáticos que nos serán de provecho para cuantificar de alguna manera los efectos de la diversificación en el rendimiento y en el riesgo de las inversiones.

Se ha comentado anteriormente que el tener en posición dos valores en vez de uno solo es menos riesgoso, sin embargo, ¿qué pasa cuando agregamos a un portafolios un nuevo valor cuyo riesgo es mayor que el de cualquiera de los otros instrumentos? Para ver el resultado que se obtendría en este caso, se desarrollará un sencillo ejemplo: supóngase que se tienen dos valores, x e y, donde y tiene mayor riesgo que x (i.e., $s(y) > s(x)$). Entonces un portafolios compuesto por x e y puede ser menos riesgoso que uno formado solamente por x.

Supóngase que x e y tienen las siguientes características:

	valor x	valor y
Rendimiento (%)	7 u 11	13 o 5
Probabilidad	0.5 cada rendimiento	0.5 cada rendimiento
Rendimiento esperado (%)	9I	9II
Varianza (%)	4	16
Desviación Estándar (%)	2	4

(I) Rendimiento esperado = (.5) (7) + (.5) (11) = 3.5 + 5.5 = 9

(II) Rendimiento esperado = (.5) (13) + (.5) (5) = 6.5 + 2.5 = 9

Aunque ambos valores tienen el mismo rendimiento esperado, 9%, y tiene mayor riesgo que x (pues s(y) = 4 , s(x) = 2). Ahora supóngase que cuando el rendimiento de x es alto, el de y es bajo, y viceversa. Es decir, cuando el rendimiento de x es 11%, el de y es 5% ,y cuando el de x es 7% ,el de y es 13%. Entonces, existirá algún portafolios de x e y que sea superior a uno compuesto solamente por x (i.e., tendrá menor riesgo).

Al considerar un portafolios compuesto por dos tercios de x y un tercio de y, el rendimiento promedio de este portafolios es el promedio ponderado de los rendimientos de los valores individuales, i.e.,

$$E\,p = \sum_{i=1}^{n} x(i)\,E(i) \qquad (3\text{-}1)$$

donde:

$E\,p$: rendimiento esperado del portafolios

$x(i)$: proporción del portafolios invertida en el valor i

$E(i)$: rendimiento esperado del valor i

n : número total de valores

Así, en este ejemplo, se tiene:

$$E\,p = (2/3)\,(9) + (1/3)\,(9) = 6 + 3 = 9$$

Pero, ahora ¿cuál será el rango de fluctuación (riesgo) del portafolios? En períodos en que x sea mejor inversión, se tendrá que:

$$E\,p = (2/3)\,(11) + (1/3)\,(5) = 9$$

en forma similar, cuando y tenga mejor rendimiento:

$$E\,p = (2/3)\,(7) + (1/3)\,(13) = 9$$

Así, al poner parte del dinero en el valor con mayor riesgo, se podrá reducir el riesgo considerablemente con respecto a la sola inversión en el valor más seguro, x. En este caso, si se tuviera sólo la inversión en x, el rendimiento esperado sería 9%, el cuál podría moverse en realidad, entre 7% en malos períodos y 11% en buenos períodos. Aquí la desviación estándar es igual a 2%. Al hacer una combinación con dos tercios de x y un tercio de y, el rendimiento esperado sería de 9%, con una desviación estándar de cero. No se debe despreciar el mismo rendimiento esperado con un menor riesgo. En este caso, se puede eliminar totalmente el riesgo.

Con este ejemplo muy sencillo, se ve la posibilidad de reducir el riesgo en un portafolios, introduciendo un nuevo valor cuyo riesgo sea mayor que el de cualquiera de los otros valores que originalmente formaba el portafolios.

Esto hace ver que el riesgo de un portafolios puede reducirse anulando las variaciones de unos instrumentos con las de otros. El seleccionar dos valores tales que uno tienda a obtener un buen rendimiento cuando el otro pueda bajar asegura un rendimiento razonable para el portafolios, aún cuando alguno de sus elementos sea muy riesgoso. Sin embargo, esta estrategia sólo es posible cuando pueden encontrarse dos valores cuyo comportamiento sea inverso, como los analizados en el ejemplo.

También se puede concluir que para el riesgo de un portafolios no basta considerar los riesgos independientes de los valores que lo integran, sino que también hay que considerar la interacción entre los riesgos de los diversos instrumentos.

Esta interacción del riesgo de dos valores puede medirse por la covarianza entre ellos.

Esta medida se expresa matemáticamente como:

$$\mathrm{cov}(xy) = 1/n \sum_{i=1}^{n} [((x(t) - E(x)) (y(t) - E(y))]$$

donde:

cov(xy) = covarianza entre x e y

x(t) = rendimiento del valor x

y(t) = rendimiento del valor y

E(x) = rendimiento esperado para x

E(y) = rendimiento esperado para y

n = número de observaciones

De esta forma, si dos valore se mueven con la misma tendencia, la covarianza o riesgo interactivo será positivo; si son independientes, será cero, y en caso de que tengan comportamientos inversos, su covarianza será negativa.

Regresando al ejemplo anterior de los valores x e y:

	Rendimiento	Rendimiento esperado	Diferencia
valor x	7	9	-2
valor y	13	9	4
		producto	-8
valor x	11	9	2
valor y	5	9	-4
		producto	-8

y la covarianza está dada por:

$$\text{cov}(xy) = 1/2 \,[\, (7-9)(13-9) + (11-9)(5-9) \,]$$
$$= 1/2 \,[\, (8) + (-8) \,] = -16/2 = -8$$

En este caso, en vez de elevar al cuadrado las desviaciones de una variable con respecto a su medida se toman dos observaciones correspondientes de los valores analizados, en el mismo punto, se determina su variación de la medida y se multiplican ambas desviaciones. Si cuando x está por debajo de su promedio también y lo está, entonces en tales períodos la desviación será negativa y su producto resultará positivo. Así, se tendrá una covarianza formada por un promedio de valores positivos, por lo cual su valor será grande. De manera análoga, si una de las variables es relativamente grande cuando la otra es pequeña, una de las desviaciones será positiva y la otra negativa, resultando la covarianza negativa. Esto se observa en el ejemplo.

Existe otra medida que indica la similitud o discrepancia entre el comportamiento de dos variables: el coeficiente de correlación, que es, en esencia, la covarianza considerada, no como un valor absoluto, sino como un valor relativo a las desviaciones estándar de los valores individuales (variables). De esta forma, indica qué tanto varían juntas x e y como una proporción de la combinación de sus variaciones individuales, medida por s(x)s(y), y cuya fórmula es:

$$r(xy) = cov(xy) / s(x)\, s(y)$$

donde:

r(xy) = coeficiente de correlación de x e y

cov(xy) = covarianza entre x e y

s(x) = desviación estándar de x

s(y) = desviación estándar de y

En el ejemplo, el coeficiente de correlación es:

$$r(xy) \doteq -8 / (2 \times 4) = -8 / 8 = -1$$

Si el coeficiente de correlación entre dos valores es -1, entonces existe una correlación perfectamente negativa. Si su valor es 0, entonces los rendimientos son independientes y en caso de que sea igual a 1, los valores están perfectamente correlacionados, o bien, se dice que existe una correlación perfectamente positiva.

Claramente se ve que la correlación entre dos valores depende de:

1) la covarianza que existe entre ellos y

2) la desviación estándar de cada valor.

AHALISIS DE UH PORTAFOLIOS DE DOS VALORES

Se ha visto el efecto de la diversificación en la reducción del riesgo, y la clave no es precisamente lo que se conoce como diversificación aleatoria, es decir, que la inversión en dos valores proporcione el doble de diversificación que uno solo, sino que al adquirir valores con covarianza pequeña (cercana a cero) o negativa, se puede reducir el riesgo. En general, mientras menor sea la correlación entre los valores de un portafolios, menor será el riesgo de todo el conjunto. Esto es cierto, sin importar que tanto riesgo involucren los valores cuando se consideran por separado.

En el caso del portafolios de dos valores, se define formalmente su riesgo según la siguiente fórmula:

$$s(p) = \sqrt{x(a)\ s(a) + x(b)\ s(b) + 2\ x(a)\ x(b)\ [\ r(ab)\ s(a)\ s(b)\ ]} \qquad (\ 3\text{-}4\ )$$

donde:

s(p) = desviación estándar del portafolios

x(a) = porcentaje del portafolios invertido en el valor X.

x(b) = porcentaje del portafolios invertido en el valor Y.

s(a) = desviación estándar de X.

s(b) = desviación estándar de Y.

r(ab) = coeficiente de correlación de X e Y.

Y además directamente de la definición del coeficiente de correlación, se tiene que:

$$r(ab)\ s(a)\ s(b) = cov(ab)$$

A partir de la fórmula para la desviación estándar de un portafolios de dos valores, se deduce que su riesgo depende de: (1) la aportación de dinero que se destina a cada valor, (2) la desviación estándar de cada uno de ellos y (3) covarianza que existe entre ambos. Si los valores fueran independientes, entonces el coeficiente de correlación sería cero, y en este caso se anula el último término de la ecuación (3-4). Si el coeficiente de correlación es positivo entonces, la desviación estándar (riesgo) del portafolios es mayor que en el caso anterior. Finalmente, si este coeficiente es menor que cero, la covarianza es negativa y se tiene una desviación estándar menor que en cualquier otro caso. El riesgo podría ser totalmente eliminado si el tercer término de la ecuación es igual a la suma de los dos primeros, lo cual ocurre si (1) $r(ab) = -1$, y (2) porcentaje de inversión en x es:

$$x(a) = s(b) \mathbin{/} [\ s(a) + s(b)\ ]$$

Para comprender mejor estas afirmaciones se considerará una vez más el ejemplo presentado anteriormente.

Se tiene que:

	valor x	valor y
Rendimiento esperado (%)	9	9
Desviación estándar (%)	2	4

Ya se calculó la covarianza de x e y, obteniéndose cov(xy) = -8.

El coeficiente de correlación es r(xy) = -1, por lo cual, estos valores están correlacionados de una manera perfectamente negativa.

Ahora bién, ¿qué sucederá al riesgo del portafolios si se varían las proporciones invertidas en x e y? Empleando la ecuación (3-4) se obtienen los siguientes resultados:

valor x %	valor y %	Desviación estándar del portafolios
100	0	2.0
80	20	0.8
66	34	0.0
20	80	2.8
0	100	4.0

De donde se ve que el riesgo del portafolios se elimina con un adecuado balanceo de las proporciones invertidas en cada valor.

Para ello, las condiciones fueron que:

$r(ab) = -1$, y

$x(a) = s(b) / [s(a) + s(b)]$

es decir:

$0.666 = 4 / (2 + 4)$

Y, ¿qué pasará si ahora se varía el coeficiente de correlación? Para apreciar mejor los efectos de este cambio, sea $x(a) = 2/3$, y $x(b) = 1/3$. Usando la ecuación (3-4) y algunos valores para r(ab), se tiene que:

r(ab)	s(p)
-0.5	1.34 (*)
0.0	1.9
+0.5	2.3
+1.0	2.658

$$(*)\ s(p) = \sqrt{(0.666)\quad(2)^2 + (0.334)(4)^2 + + (2)(0.666)(0.334)(-0.5)(2)(4)}$$

$$= \sqrt{1.777 + 1.777 - (0.444)(4)}$$

$$= \sqrt{1.777}$$

$$= \quad 1.34$$

Si la diversificación no influyera en el riesgo (i.e., en caso de que ambos valores tuvieran una correlación perfectamente positiva), entonces el riesgo total del conjunto sería la suma ponderada de sus desviaciones estándar individuales:

Riesgo no-diversificable total = (0.666) (2) + (0.334) (4)

= 2.658

Puesto que el riesgo no diversificable es igual al riesgo del portafolios cuyos valores están correlacionados en forma perfectamente positiva (r(ab) = +1), se ve que la diversificación produce efectos favorables sólo cuando los valores que integran el portafolios no tienen una correlación perfectamente positiva. El riesgo de un portafolios es menor que la suma de los riesgos particulares de los valores cuando los rendimientos no están correlacionados en forma perfectamente positiva; también se tiene que mientras menor sea la correlación entre los valores, mayores serán los beneficios que brinda la diversificación.

En general, alguna combinación de dos valores tendrá menor desviación estándar del rendimiento que un solo valor, mientras el coeficiente de correlación sea menor que la razón de la menor desviación estándar a la mayor desviación estándar, i.e.,

$$r(xy) < s(a) / s(b) ,$$

y utilizando los dos valores del ejemplo analizado, se tiene:

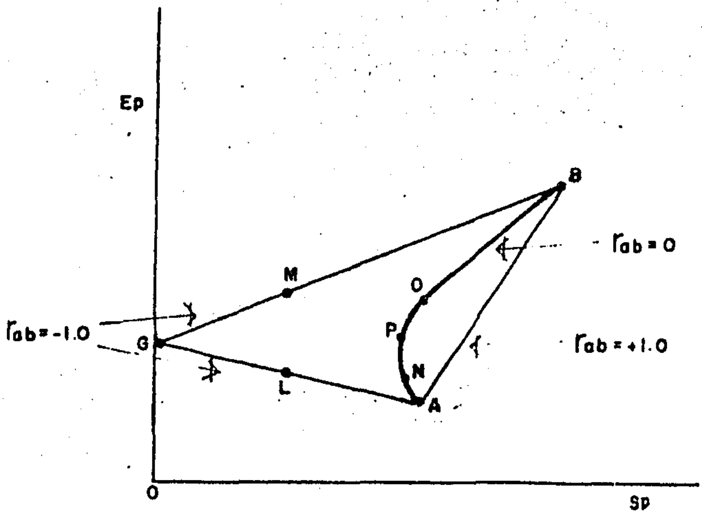
$$-1 < 2/4 ,$$

i.e., $-1 < 0.50$

Si ambos valores no variaran en su desviación estándar pero su coeficiente de correlación fuera, por ejemplo +0.70, entonces no habría ningún efecto de la diversificación, puesto que +0.70 no es menor que +0.50.

Para complementar este análisis se estudiará una representación gráfica de los efectos de la diversificación. En la figura (3-2) se representa el comportamiento del riesgo y del rendimiento del portafolios para distintos valores de r. El eje de abscisas representa el riesgo y en el de ordenadas está indicado el rendimiento. Los puntos A y B representan la tenencia del total de fondos (100%) en los valores A y B, respectivamente, mientras que los puntos intermedios en la línea AB representan portafolios que contienen las diversas combinaciones de A y de B. El segmento correspondiente a r(AB) = 1 es una recta, lo cual muestra la imposibilidad de reducir la variación en el riesgo mediante una combinación de valores perfectamente correlacionados. El punto A es el punto más a la izquierda en este segmento de recta, es decir, representa al portafolios con menor riesgo y no existe ninguno otro, compuesto por una mezcla de los valores A y B, que tenga una desviación estándar (riesgo) menor que A. Ninguno de estos dos valores puede servir para contrarrestar el riesgo del otro. Así, el inversionista que deseara minimizar el riesgo debería invertir totalmente en el valor A.

El segmento para r(AB) = 0 es una hipérbola. En este caso, ningún punto alcanza el eje vertical, es decir, no existe ningún portafolios que elimine totalmente el riesgo. Sin embargo, hay una inflexión sobre el punto A, que a continuación se explica.



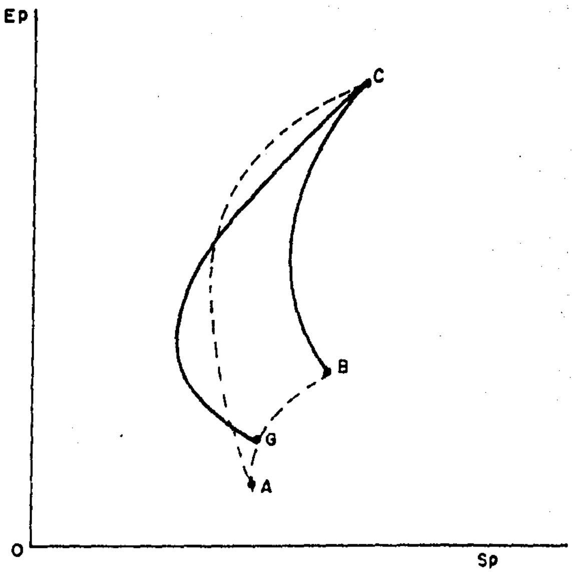
GRAFICA 3.2 PORTAFOLIOS DE DOS VALORES CON DIFERENTES COEFICIENTES DE CORRELACION DEL RENDIMIENTO

El segmento identificado con r(AB) = -1 es compatible con el ejemplo que se ha venido usando. Esta línea muestra que con la correlación perfectamente negativa es posible anular el riesgo del portafolios. Considérense los puntos L y M en este segmento. El punto M produce un mayor rendimiento que L, y ambos tienen el mismo riesgo, por lo cual se dice que el portafolios L es inferior a M. De esta forma, se tiene que todos los portafolios en el segmento GLA son inferiores a aquéllos que están representados en el segmento GMB. Similarmente, los portafolios en el segmento APB, o r(AB) = 0, el segmento BQP contiene portafolios superiores a los que se encuentran en el segmento PNA. En general, los portafolios representados, en estos segmentos son "factibles", sin embargo, algunos son más "eficientes" que otros.

ANALISIS DE UN PORTAFOLIOS DE TRES VALORES

La gráfica (3-3) corresponde al problema de un portafolios de tres valores.

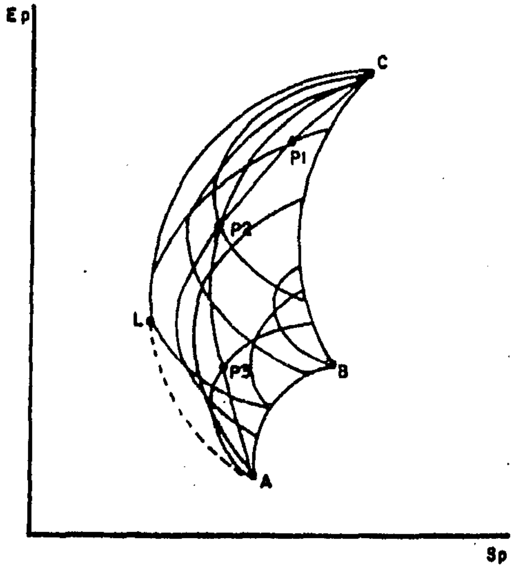
Los puntos A, B y C representan la inversión total en cada uno de los valores A, B y C, respectivamente. La línea AB representa todos los portafolios compuestos por alguna combinación de los valores A y B, mientras que el segmento AC representa los portafolios integrados por A y C, etc. La forma general de las líneas AB, AC y BC hace pensar que estos valores, considerados por pares, tienen un coeficiente de correlación r<1.



Ahora bien, los portafolios formados por una combinación de tres valores serían como a continuación se detalla: el punto G es una combinación de A y B; entonces la línea CG representa un portafolios de tres valores. El número de segmentos que representan las combinaciones de tres valores puede observarse en la gráfica (3-4), donde los puntos en el área sombreada representan a los portafolios de tres valores. Así, se tiene que mientras el lugar geométrico de los portafolios de dos valores es generalmente una curva, el lugar geométrico de los portafolios de tres valores es normalmente toda una región en el plano coordenado (Ep, Sp).

Considérense por un momento tres puntos (portafolios) en la región mostrada en la gráfica anterior. Sean P(1), P(2), P(3). En este caso de tres valores, el número de portafolios es mayor que en el caso de dos valores. Dado este número tan elevado de alternativas, es necesario algún método para poder decidir cuáles son las mejores alternativas de inversión.

GRAFICA 3.4 REGION DE LOS PORTALIOS CON TRES VALORES



Analizando los portafolios P(1) y P(2), dado que P(2) está más a la izquierda y abajo de P(1), aquél puede ser una alternativa más interesante para un inversionista conservador, mientras que P(1) sería más atractivo para uno más atrevido. Pero en el caso de P(3), ¿algún inversionista racional lo seleccionaría? Puesto que esta opción involucra un menor rendimiento que P(2) y tiene el mismo riesgo, no es una opción adecuada. Así, se dice que un portafolios es ineficiente o dominado si algún otro portafolios está exactamente por encima de él, en el plano de riesgo-rendimiento.

Un portafolios es eficiente si tiene (1) mayor rendimiento que cualquier otro portafolios con el mismo riesgo o (2) menor riesgo que cualquier otro portafolios con el mismo rendimiento. En la gráfica (3-4) el límite de la región identificado por la curva LC, domina a todos los demás portafolios de la región. Los portafolios representados en el segmento AL son ineficientes puesto que incrementan el riesgo y tienen un menor rendimiento. Cada punto en este segmento es dominado por un portafolios más eficiente, que está en el segmento LC, directamente sobre él.

Para poder determinar el riesgo y el rendimiento de un portafolios de tres valores se han de modificar las fórmulas empleadas para los portafolios de dos valores.

Riesgo y rendimiento de un portafolios de tres valores.

El rendimiento para un portafolios de tres valores se calcula en forma similar a lo visto anteriormente:

$$Ep = \sum_{i=1}^{n} x(i)\ E(i)$$

En cuanto a la desviación estándar del portafolios (i. e. el riesgo), se tiene que ésta depende de las desviaciones estándar respecto al rendimiento de cada uno de los elementos, así como de sus coeficientes de correlación y de las proporciones destinadas a cada uno.

$$s(p)\hat{}2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x(i)\ x(j)\ r(ij)\ s(i)\ s(j)$$

donde:

s(p)^2	=	varianza del portafolios
s(p)	=	desviación estándar del portafolios
x(i)	=	proporción invertida en el valor i
x(j)	=	proporción invertida en el valor j
r(ij)	=	coeficiente de correlación entre los valores i e j
s(i)	=	desviación estándar del valor i
s(j)	=	desviación estándar del valor j
n	=	total de valores en el portafolios

En el caso $n = 2$, se tiene que:

$$s(p)^2 = x(1)\ x(1)\ r(1,1)\ s(1)\ s(1) +$$
$$+ x(1)\ x(2)\ r(1,2)\ s(1)\ s(2) +$$
$$+ x(2)\ x(1)\ r(2,1)\ s(2)\ s(1) +$$
$$+ x(2)\ x(2)\ r(2,2)\ s(2)\ s(2)$$

El primero y último términos pueden simplificarse, ya que el rendimiento de un valor está correlacionado en forma perfectamente positiva consigo mismo, y por ello $r(i,i) = 1$, $\forall\ i$. Además se puede factorizar el segundo y tercer términos ya que $r(ij) = r(ji)$, $\forall\ i,j$.

Con estas simplificaciones la ecuación resultante aparece como:

$$s(p)^2 = x(1)^2\ s(1)^2 + x(2)^2\ s(2)^2 +$$
$$+ 2\ x(1)\ x(2)\ r(1,2)\ s(1)\ s(2)$$

Y dado que $r(ij)\ s(i)\ s(j) = cov(ij)$, (directamente de la definición), finalmente se tiene:

$$s(p)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x(i)\, x(j)\, cov(ij) \qquad (3\text{-}6)$$

Para complementar este desarrollo, se presenta un ejemplo:

Considérense los siguientes valores con la información correspondiente que se indica:

	valor 1	valor 2	valor 3
Rendimiento esperado	0.10	0.12	0.28
Desviación estándar	10	15	5

Coeficiente de correlación:

Valores	1,2 :	r(1,2)	= 0.3
	2,3 :	r(2,3)	= 0.4
	1,3 :	r(1,3)	= 0.5

¿Cuál es el riesgo y el rendimiento del portafolios si se invierte con las siguientes proporciones en cada valor? valor 1 = 0.2, valor 2 = 0.4, valor 3 = 0.4.

El rendimiento, según la ecuación (3-1), sería en este caso:

$$Ep = \sum_{i=1}^{n} x(i)\, E(i)$$

=>

$$Ep = (0.2)(0.10) + (0.4)(0.12) + (0.4)(0.08)$$

$$Ep = 0.10$$

Empleando la ecuación (3-6) con n = 3, se tiene:

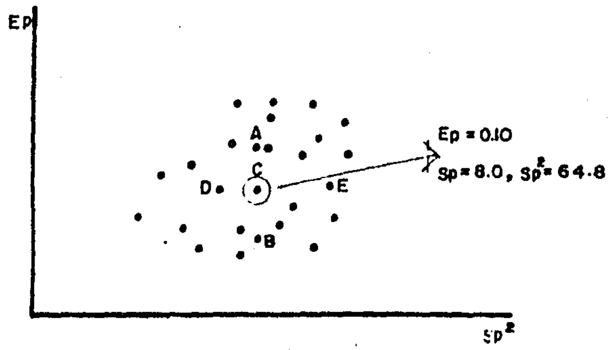
$$
\begin{aligned}
s(p)^2 = {} & x(1)^2\, s(1)^2 + x(2)^2\, s(2)^2 + x(3)^2\, s(3)^2 + \\
& + 2\, x(1)\, x(2)\, r(1,2)\, s(1)\, s(2) + \\
& + 2\, x(2)\, x(3)\, r(2,3)\, s(2)\, s(3) + \\
& + 2\, x(1)\, x(3)\, r(1,3)\, s(1)\, s(3) \\
s(p)^2 = {} & (0.2)^2\,(10)^2 + (0.4)^2\,(15)^2 + (0.4)^2\,(5)^2 + \\
& + 2\,(0.2)(0.4)(0.3)(10)(15) + \\
& + 2\,(0.4)(0.4)(0.4)(15)(5) + \\
& + 2\,(0.2)(0.4)(0.5)(10)(5) \\
s(p)^2 = {} & 4 + 36 + 4 + 7.2 + 9.6 + 4 \\
s(p)^2 = {} & 64.8
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow$$

$$s(p) = 8$$

Lo que se ha hecho a través de este proceso es calcular el rendimiento y el riesgo de un portafolios que está formado por ciertas proporciones de los valores 1, 2 y 3. Este es sólo una de las muchas posibilidades que pueden elegirse. A pesar de haber encontrado que un portafolios integrado con un 20% del valor 1 y un 40% de cada uno de los valores 2 y 3, tiene un rendimiento esperado del 10% y una desviación estándar de 8.0, es probable que exista algún otro portafolios que lo domine, es decir, que sea más eficiente. La gráfica (3-5) muestra en forma clara este problema de determinar las inversiones óptimas. El portafolios de tres valores presentado en el ejemplo anterior se identifica dentro de una colección de portafolios factibles en el espacio de riesgo-rendimiento. Gráficamente se ve que este portafolios es ineficiente, puesto que existen otros portafolios que (1) tienen mayor rendimiento con el mismo grado de riesgo (e.g., portafolios A) y (2) tienen menor riesgo y el mismo rendimiento (e.g., portafolios D).

GRAFICA 3.5 PORTAFOLIOS FACTIBLES EN EL ESPACIO RIESGO RENDIMIENTO



EL CASO DE UN PORTAFOLIOS DE N VALORES

Los problemas que se presentan en la vida real respecto al análisis de portafolios, involucran portafolios de más de tres valores, elegidos de un conjunto universo de valores ya de por sí grande. Además, se ha anotado anteriormente que para gozar de los beneficios de la diversificación, se deben tener al menos de ocho a diez valores en el portafolios.

En el análisis de un portafolios de dos valores elegidos dentro de un universo reducido, de tres valores, por ejemplo, el número de portafolios factibles no es grande. Sin atender a las proporciones que se destinen a cada valor, las combinaciones posibles con los tres valores D, E, F agrupados por pares son DE, DF y EF. Este número total de portafolios se puede obtener a partir de la fórmula:

$$N = n! / [2(n-c)!]$$

donde:

N = total de portafolios

n = total de valores

c = cardinalidad de los portafolios formados

y en este caso resultaría:

$$N = 3! / [2(3-2)!] = 6/2 = 3$$

Sin embargo, si ahora se aumenta el universo de tres a cinco valores: D, E, F, G y H. Las combinaciones posibles son DE, DF, DG, DH, EF, EG, EH, FG, GH y GH, que dan un total de 10.

Ahora se tiene n = 5, c = 2:

=>

$$N = 5! / [2(5-2)!] = 120 / 12 = 10$$

Así, la sola adición de dos valores aumenta el número de portafolios factibles de tres a diez. En general, el número de posibilidades crece mucho más rápido que el número de valores a considerar.

En este caso general, las fórmulas para calcular el rendimiento y el riesgo de un portafolios corresponderían a las generalizaciones de las fórmulas obtenidas anteriormente:

$$Ep = \sum_{i=1}^{n} x(i)\ E(i)$$

$$s(p)\hat{\ }2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x(i)\ x(j)\ cov(ij)$$

Pero al pasar de tres a n valores en el portafolios se complica en forma importante el problema, por la cantidad de información a manejar, sobre todo si se considera la gran cantidad de valores que existen en el mercado. Así, se tiene que los datos necesarios para el análisis de un portafolios de n valores son: (1) n rendimientos esperados, (2) n varianzas del rendimiento, y (3) (n^2 - n) / 2 covarianzas de cada par de valores. Toda esta información requerida da un total de n (n + 3) / 2 datos, lo cual hace indispensable el uso de algún modelo que reduzca esta enorme tarea.

PORTAFOLIOS EFICIENTES

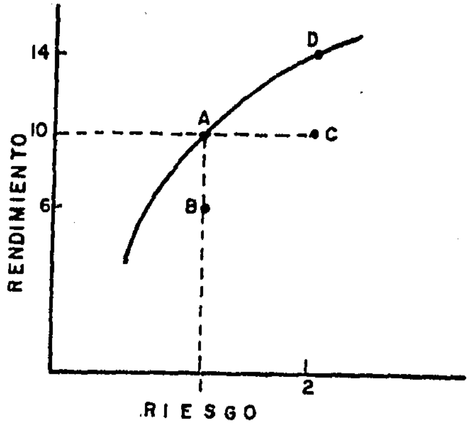
Ahora es momento de recopilar lo visto.

A pesar de las diferencias que existen entre los inversionistas, ellos comparten dos objetivos comúnes: desean lograr el mayor rendimiento posible de sus inversiones y evitar el asumir grandes riesgos. Pero es prácticamente imposible satisfacer plenamente ambos objetivos. Para lograr una mayor ganancia han de tomar un mayor riesgo. A cambio de la reducción del riesgo han de sacrificar parte de su rendimiento. Como resultado, cada inversionista se enfrenta a un dilema entre el riesgo asumido y el rendimiento deseado.

Al distribuir el capital entre distintas inversiones, se puede reducir de manera significativa el riesgo y mantener un buen rendimiento promedio. Sin embargo, de esta forma se pueden integrar millones de portafolios diferentes, cada uno de los cuales tiene sus propias características en cuanto a rendimiento y riesgo. Entonces, el inversionista debe balancear el riesgo y el rendimiento del portafolios para elegir el más adecuado a sus necesidades.

Pero, ¿cómo podrá un inversionista elegir un portafolios entre millones? La respuesta está en el concepto de portafolios eficiente. Este concepto es una herramienta para separar en dos conjuntos a los portafolios factibles: los portafolios eficientes y los ineficientes. Decimos que un portafolios es eficiente si no existe (1) otro portafolios con el mismo rendimiento esperado pero menor riesgo y (2) otro portafolios con el mismo riesgo pero mayor rendimiento esperado. Puesto que todo inversionista racional prefiere mayor rendimiento y menor riesgo, debe buscar el tener un portafolios eficiente. Aquellos inversionistas que poseen uno ineficiente pueden incrementar su rendimiento sin incrementar su riesgo o bien reducir el riesgo, sin afectar su rendimiento, ésto se logra con sólo pasar a un portafolios eficiente. Esta opción representa un gran avance en su manejo financiero.

La diferencia entre los portafolios eficientes y los ineficientes puede ser comprendida más claramente mediante un diagrama. Los riesgos y rendimientos esperados para cuatro portafolios diferentes -A, B, C y D- se muestran en la gráfica (3-6). El portafolios A tiene un riesgo unitario y un rendimiento esperado del 10% anual. En cambio el portafolios B tiene el mismo riesgo pero un rendimiento de sólo el 6% anual. Obviamente el portafolios A es superior a B, pues ofrece un mayor rendimiento sin incurrir en un mayor riesgo. Si únicamente existieran estas dos opciones, lógicamente se elegiría A.



GRAFICA 3.6 RIESGO Y RENDIMIENTO PARA DISTINTOS PORTAFOLIOS

El mismo análisis puede aplicarse a los portafolios A y C. En este caso, ambos ofrecen el mismo rendimiento esperado, pero C es más riesgoso. Así las cosas, los inversionistas elegirán nuevamente el portafolios A. Al hacerlo de esta manera, reducen el riesgo al que se exponen manteniendo el mismo nivel de rendimiento. Es decir, A es superior a C puesto que ofrece el mismo rendimiento con menos riesgo.

El solo hecho de que A sea superior a B o C no implica necesariamente que A sea el portafolios más eficiente. Para ser definitivamente eficiente, un portafolios debe satisfacer dos condiciones:

i) Debe ofrecer el mayor rendimiento que cualquier otro portafolics con el mismo grado de riesgo. Gráficamente, esta condición implica que no debe haber ningún punto sobre este portafolios en la misma línea vertical, y

ii) Debe tener un riesgo menor que cualquier otra inversión que ofrezca el mismo rendimiento. Si no existe ningún punto a la izquierda sobre la línea horizontal que pasa por ese portafolios, entonces se satisface esta condición.

Sólo en este caso puede llamarse propiamente un portafolios eficiente.

Este criterio de eficiencia de un portafolios no funciona por sí mismo en el caso de querer elegir èntre los portafolios A y D, de la gráfica (3-6), puesto que D ofrece un mayor rendimiento y también implica un mayor riesgo. En esta situación, si ambos portafolios son eficientes, hay que considerar además las preferencias personales del inversionista para elegir entre ambos portafolios. Si lo que se busca es un mayor rendimiento, se optaría por D, pero si el deseo es evitar el riesgo, entonces la selección sería A.

Con este concepto de portafolios eficiente es posible determinar la frontera eficiente. Este lugar geométricamente representa las diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento que pueden obtenerse de los portafolios eficientes. Esta frontera es la división entre los portafolios factibles y aquéllos que no lo son, y representa las mejores combinaciones de riesgo y rendimiento en que una persona puede invertir. Un inversionista racional, que desea minimizar el riesgo y maximizar su rendimiento debe operar sobre esta frontera eficiente. En la gráfica, la frontera eficiente es la curva que pasa por los puntos A, D y todos los demás puntos que representan a los portafolios eficientes.

LOS VALORES DE RENTA FIJA Y LA FRONTERA EFICIENTE

Como el objetivo de este trabajo es la optimización de un portafolios integrado por valores de renta fija, se termina este capítulo mostrando el efecto de este tipo de valores en la frontera eficiente.

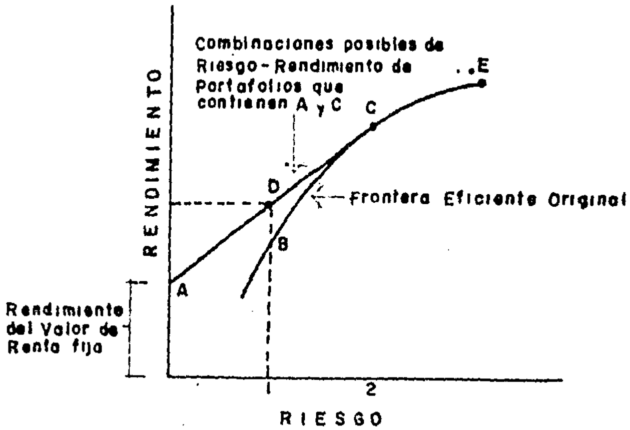
Como los valores de renta fija tienen un rendimiento garantizado, entonces la inclusión de este tipo de valores en un portafolios modifica la frontera eficiente descrita en la gráfica (3-6).

Para comprender más fácilmente este resultado se empleará la gráfica (3-7), donde el punto A representa una inversión de renta fija y los puntos B, C y E son instrumentos que tienen algún riesgo. La introducción de un valor de renta fija tiene un importante efecto sobre la selección de instrumentos de inversión. En particular, muchos de los portafolios que antes eran eficientes, con la introducción de un valor de renta fija dejan de serlo. Como consecuencia, siempre se ha de procurar tener aunque sea una parte en este tipo de valores por su benéfico efecto. La línea que une los puntos A y C muestra los diferentes rendimientos y riesgos que pueden obtenerse al distribuir la inversión entre instrumentos de renta fija (punto A) y renta variable (punto C). En el punto A, el total de la inversión se destina a la renta fija, mientras que, en el punto C, el 100% de la inversión está en renta variable. En D, exactamente el punto medio del segmento AC, la mitad del capital se destina a cada tipo de valores. Gráficamente se ve que el portafolios D es una mejor opción que el portafolios B, puesto que el inversionista puede obtener un mayor rendimiento sin asumir más riesgo. En realidad, las combinaciones sobre la línea AC son claramente superiores a l s combinaciones sobre la frontera eficiente formada exclusivamente con valores de renta variable, la nueva frontera eficiente estaría formada por la recta que une A y C, y por el segmento de curva de C a E.

Se ve pues, que en el caso de un valor de renta fija, se ubicaría sobre el eje vertical en el espacio riesgo-rendimiento, ya que tiene riesgo nulo. Al combinar diversos valores de este tipo, se tiene el rendimiento, igual que antes, dado por:

$$Ep = \sum_{i=1}^{n} x(i)\ E(i)$$

Sin embargo, el riesgo s(p)^2 es cero, puesto que las varianzas particulares son cero.



GRAFICA 3.7 LOS VALORES DE RENTA FIJA Y LA FRONTERA EFICIENTE

Así se tiene que el problema se plantea en este caso como la optimización de la función lineal que determina el rendimiento del portafolios.

Con este análisis se han destacado las bases matemáticas de la teoría de portafolios de inversión y quedan abiertas las puertas para el lector curioso a desviarse por el camino de las sociedades de inversión de renta variable (también conocidas como sociedades de inversión comunes), que constituyen otro campo interesante de aplicación de los métodos matemáticos. Ahora se pasará, una vez presentado el panorama financiero de este trabajo, a describir el modelo matemático que determina una combinación óptima para el portafolios de inversión de una sociedad de renta fija.

C A P I T U L O I V

CONDICIONES DEL PROBLEMA DEL PORTAFOLIOS DE INVERSION Y PLANTEAMIENTO COMO UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

El objeto de este capitulo es identificar el problema del portafolios de una Sociedad de Inversión de Renta Fija, como un problema de programación lineal. Tal tipo de problemas trata de optimizar una función objetivo lineal, sujeta a restricciones lineales.

Este problema del portafolios de inversión consiste en seleccionar un conjunto de valores, que permitan maximizar el rendimiento del portafolios, tomando en consideración una serie de restricciones que existen sobre tales inversiones.

INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA

El conjunto universo de los valores en los cuales se puede invertir, consta actualmente de unos 150 instrumentos. Estos se pueden agrupar en 7 clases o tipos de instrumentos:

- Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes)

- Papel Comercial

- Aceptaciones Bancarias

- Obligaciones

- Petrobonos

- Bonos para el pago de la Indemnización Bancaria (Bib's)

- Pagarés con Rendimiento Liquidable al Vencimiento

Para poder comprender el manejo de cada tipo de instrumento, se describen brevemente las características de cada uno de ellos:

- Certificado de la Tesorería de la Federación (CETE).

El Cete, como se le conoce comunmente, es de hecho el instrumento con el que nace el mercado de dinero en México, y es emitido por el Gobierno Federal para captar fondos con los cuales financiar el deficit del sector público. Así mismo, fungen como un medio de regulación monetaria, pues a través de su colocación, las autoridades financieras retiran dinero de la circulación, de acuerdo a una política dada, tendiente a abatir la tasa de inflación.

La operación descrita es conocida como "operación de mercado abierto" y es una actividad típica de la Banca Central.

El Cete es un título de crédito al portador en el que se consigna la obligación del Gobierno Federal a pagar una suma fija de dinero en un plazo determinado, al término del cual, es redimido a su valor nominal, $ 10,000.00. Los plazos al que el Cete es emitido habitualmente son 28 o 91 días, si bien puede ser distinto.

El Banco de México, es el agente exclusivo para la colocación y redención de las emisiones de Cetes, cuyo precio está determinado por el descuento aplicado sobre el valor nominal del título, por lo que es regla general que, a descuentos más altos, el precio será más bajo y viceversa.

Para organizar un mercado como el de los Cetes, las autoridades financieras han implementado un sistema que consiste en mantener los valores en un depósito central, en el Banco de México, con objeto de dar mayor seguridad al inversionista y facilitar el control de las emisiones.

Cada una de las emisiones de Cetes, está representada por un solo título múltiple, que ampara el valor total de la emisión y que es depositado en el Banco de México hasta su vencimiento.

- Papel Comercial.

El Papel Comercial es un pagaré con vencimiento fijo. Al igual que en el Cete, el emisor se compromete a pagar una cantidad fija de dinero en fecha futura, sin comprometer activos específicos. El Papel Comercial es emitido por empresas con necesidad de financiamiento a corto plazo y, por consecuencia, con una liquidez o capacidad de pago suficiente para cubrir este tipo de compromisos.

Desde el punto de vista del inversionista, con el Papel Comercial se adquiere un valor de alta liquidez y atractivo rendimiento.

Como en los otros instrumentos del mercado de dinero, el Papel Comercial tiene un plazo de vida que va, de 15 días como mínimo, a 91 días como máximo. Así mismo, su precio está determinado por la tasa de descuento, la cual generalmente se fija en un nivel algo superior al de la tasa primaria de los Cetes. El valor nominal del Papel Comercial es de $ 100,000.00, mismo al que redime y es ofrecido al público a través de una casa de bolsa, en oferta pública.

- Aceptación Bancaria.

Las Aceptaciones Bancarias son letras de cambio emitidas por empresas a su propia órden, aceptadas por instituciones de crédito mexicanas, habilitadas para el ejercicio de la banca múltiple, con base en créditos que estas conceden a tales empresas.

Las Aceptaciones Bancarias, fueron implementadas para aumentar las formas de financiamiento a las empresas y enriquecer la gama de instrumentos del mercado de dinero.

Dado su carácter de letras de cambio, las Aceptaciones son giradas por las empresas, el girado y aceptante son las instituciones de crédito mexicanas y el beneficiario es el propio girador, quien endosa en blanco las letras de cambio, con objeto de hacer posible su oferta y colocación.

Estos valores no son manejados físicamente, sino que permanecen depositados en las instituciones aceptantes, quienes emiten constancias de depósito que son entregadas al INDEVAL (Instituto para el Depósito de Valores), quien a su vez acredita dichos valores en las cuentas que lleva a las casas colocadoras.

Su valor nominal es de $ 100,000.00 y su precio esta determinado por el descuento sobre aquel valor.

Al igual que los otros instrumentos del mercado de dinero, ya descritos, las Aceptaciones tienen un plazo, al final del cual son redimidas a su valor nominal; en este caso, el plazo máximo de emisión son 180 días, gozando también de liquidez y buen rendimiento.

Elementos básicos para la operación de los instrumentos del mercado de dinero.

En el mercado de dinero, como en cualquier otro caso que se refiera a formas de inversión, existen elementos que el público inversionista desea y debe conocer, para su mejor operación y aprovechamiento de oportunidades. A continuación se describen tales elementos y sus formas de cálculo, centrándose en:

- Cálculo de precio

- Cálculo de rendimiento.

Cabe aclarar que, dada la similitud que existe en cuanto a la naturaleza de los valores descritos con anterioridad, sus formas de operación son, así mismo, semejantes; de este modo, los cálculos que deben hacerse y las fórmulas por aplicar, son las mismas en el caso de los Cetes, el Papel Comercial y las Aceptaciones Bancarias.

Por lo anterior y en favor de la brevedad y la facilidad de comprensión, se utilizará como ejemplo el caso de los Cetes, haciendo, cuando sea necesario, aclaraciones sobre las variantes que pudieran haber de un instrumento a otro.

Precio.

Si bien los instrumentos del mercado de dinero se operan con base a la tasa de descuento, es necesario conocer el precio, en términos del dinero, al cual se compra el valor, pues a partir de ese precio, se calcula el rendimiento y otros elementos importantes en la operación del instrumento específico.

Fórmula para calcular el precio de un instrumento del mercado de dinero, e.g., Cetes:

$$\text{precio} = (1 - [(td \times dv) / 360]) \times vn$$

donde:

td = tasa de descuento (expresada en decimales)

dv = días por vencer

vn = valor nominal

Rendimiento.

Como se mencionó, en general los instrumentos del mercado de dinero son colocados bajo la par, de este modo, el rendimiento se obtiene por la diferencia entre el precio de compra y el de venta o redención, expresados en términos de tasa de descuento, en un plazo determinado.

La forma más simple de obtener un rendimiento en este tipo de valores es comprar conociendo de antemano el plazo y el descuento, evitando que las posibles fluctuaciones de las tasas de descuento en el mercado afecten el rendimiento. Otra posibilidad es realizar un reporto con una casa de bolsa. Esta operación, que puede efectuarse en plazos de 3 a 45 días, consiste en comprar valores a un precio convenido, pactando revertir la transacción a otro precio mayor en determinada fecha futura, obteniendo un premio que constituye el rendimiento de la operación.

En las inversiones a plazo variable, existe el riesgo para el comprador de fluctuaciones en la tasa de descuento. En la medida que ésta suba en forma leve (baja del precio), no sufrirá pérdida, si bien su rendimiento disminuirá. Si la variación de la tasa es a la baja, obtendrá ganancias superiores a las estimadas, en el corto plazo. Una variación importante al alza de la tasa de descuento puede ocasionar pérdida al inversionista.

Fórmula para obtener el rendimiento a vencimiento de una inversión en instrumentos del mercado de dinero, e.g., Cetes:

$$rv = (td / p) * vn$$

donde :

rv = rendimiento a vencimiento

td = tasa de descuento

p = precio

vn = valor nominal

- Obligaciones.

Son títulos que representan un crédito colectivo, a cargo del emisor; de tal modo, son concebidas desde el punto de vista de la empresa que las emite, como un pasivo a largo plazo, generalmente para financiar expansiones o bien en algunos casos, para consolidar sus pasivos mejorando su situación financiera y su flujo de efectivo. Las obligaciones pueden ser emitidas por todo tipo de sociedades anónimas con el solo límite del activo neto (capital contable) de la propia empresa. La vigilancia de la emisión la ejerce un representante común y se requiere la aprobación de la asamblea de accionistas en sesión extraordinaria, para llevarla a efecto.

Las características generales de los títulos, son las siguientes:

El monto es variable de acuerdo a las necesidades y posibilidades del emisor.

Generalmente se emiten con valor nominal de $ 100.00 o $ 1,000.00. Sin embargo, por uso bursátil, se cotizan en términos de centenas.

Por otra parte, el precio de colocación suele ser el mismo que el valor nominal, aunque en ocasiones puede diferir de este, llegando incluso a colocarse por abajo del mismo.

El plazo de una emisión a otra es variable, procurando que sea de varios años, cinco o más, para cumplir con su objetivo de financiamiento a largo plazo.

La garantía puede ser hipotecaria o quirografaria. En la actualidad este último tipo de garantía es el que prevalece, imponiéndose a la empresa emisora limitaciones de carácter financiero, que tienden a garantizar el pago de capital e intereses. La observancia de tales limitaciones financieras es vigilada por el representante común de los obligacionistas.

La tasa de interés puede ser fija o variable. Es importante resaltar que, en general, la tasa de interés fija, a lo largo de toda la vida de la emisión es obsoleta en este tipo de instrumentos, ya que siempre se busca ajustar la tasa de la obligación a la tasa de interés del mercado, para mantener su competitividad como instrumento de inversión.

El reembolso del capital invertido en las obligaciones se lleva a cabo en base a un plan de amortizacion que, según el caso, establece los periodos de gracia, las fechas y montos de los pagos, los premios en caso de amortizacion anticipada o bien, el pago terminal total.

Así mismo, la forma de la amortización, se define en el plan, señalándose si ésta es por sorteo, por series, etc.

El representante común está encargado de la vigilancia de las limitaciones financieras, del pago puntual de intereses y capital, así como del uso de los fondos provenientes de la colocación de los títulos.

-Petrobonos.

Los Petrobonos son Certificados de Participación ordinarios. En esencia, son títulos emitidos por el Gobierno Federal a través de un fideicomiso irrevocable constituido en Nacional Financiera, quien actúa como emisor, y que están garantizados por barriles de petróleo.

Para su emisión, el fideicomiso constituido en Nacional Financiera adquirio de Petróleos Mexicanos una determinada cantidad de barriles tipo Itsmo, el de mayor calidad, y en base a ese crudo fideicomitido, se emiten los Petrobonos.

Este tipo de instrumento se emite a plazo determinado, que hasta ahora ha sido de tres años, al término del cual se amortizan a su valor nominal más, en su caso, las ganancias de capital que se determinaren de la diferencia que resulte entre el importe al que se adquirió el petróleo que respalda los títulos y su precio de venta.

La ganancia o pérdida final estará supeditada a la forma como se haya comportado el precio del petróleo en los mercados internacionales, aunque generalmente este instrumento tiene un precio minímo garantizado del crudo. Además, el rendimiento depende del tipo de cambio del dólar controlado, ya que el petróleo se cotiza en esta moneda, con lo cual este tipo de inversión brinda una protección ante riesgos cambiarios. Por ello, para los cálculos de rendimientos futuros es necesario hacer un supuesto de porcentaje de devaluación, el cual es proporcionado por el área de análisis económico.

- Bonos del Gobierno Federal para el pago de la Indemnización Bancaria (Bib's).

Estos Bonos son nominativos, devengan intereses y estan garantizados directa e incondicionalmente por el Gobierno Federal, y tienen un valor nominal de cien pesos.

Su plazo de amortización vencerá el 31 de agosto de 1992 y tienen un período de gracia hasta el 31 de agosto de 1995. Se amortizarán en siete pagos por anualidades vencidas, correspondiendo el inicial al 1o. de septiembre de 1986, de los cuales, los seis primeros equivaldrán al 14% de su valor, y el séptimo al 16% restante.

Los Bib's devengan intereses sobre saldos insolutos a partir del 1o. de septiembre de 1983 y el pago de éstos se hará trimestralmente, los días primero de los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre de cada año. Las tasas y, en su caso, las sobretasas de interés que devengan son equivalentes al promedio aritmético de los rendimientos máximos que las instituciones de crédito del país estén autorizadas a pagar por los depósitos en moneda nacional a plazo de 90 días, correspondientes a las cuatro semanas anteriores al trimestre de que se trate.

En caso de que la autoridad competente dejara de fijar tasas máximas de interés para estos depósitos, las tasas de interés para efectos de los Bonos serán las representativas en el mercado bancario para dichos depósitos.

- Pagarés con Rendimiento Liquidable al Vencimiento.

Este es un tipo de inversión en valores, en un documento cuyo título se explica por sí mismo, y que son emitidos por instituciones bancarias.

La característica principal del Pagaré es que tanto el capital invertido como los intereses devengados, son pagados al término del plazo contratado.

Los plazos de inversión que se manejan en el mercado son de 1, 3, 6, 9 o 12 meses. Con este instrumento el inversionista conoce el rendimiento que obtendrá por el periodo, ya que se respetan las tasas de interés, fijadas por el Banco de México, vigentes al momento de realizar la operación.

Los Pagarés no pueden liquidarse antes de su vencimiento, ni ser dados en garantía de créditos o préstamos a instituciones de crédito.

CRITERIOS DE INVERSION

Las decisiones de inversión para una Sociedad de Inversión de Renta Fija, se toman considerando, principalmente, dos aspectos objetivos:

1) El rendimiento que cada instrumento otorga.

2) Los límites establecidos por las autoridades en materia

de valores, buscando asegurar condiciones de seguridad y de liquidez.

Respecto a los rendimientos, se ha visto en el capítulo de portafolios de inversión, que en el caso de valores de renta fija, el problema se plantea en base a una función lineal que determina el rendimiento del portafolios, como un promedio ponderado de cada una de las inversiones particulares.

Sin embargo, en el problema que se estudia se deben tomar otros puntos en cuenta, pues los rendimientos de los valores que pueden incluirse en el portafolios varían dependiendo del instrumento y de su plazo de vida. Por ello, no basta tomar directamente el rendimiento nominal, sino que habrá que considerar ambos aspectos, ya que no se puede asignar el mismo valor a una emisión que ofrezca un rendimiento determinado en un plazo de 7 días, que a otra que ofrezca ese mismo rendimiento en un plazo mayor, de 28 días, por ejemplo. Lo que sucede aquí, es que las tendencias generales de las tasas de interes y los efectos de la capitalización no se podrían reflejar en el criterio de selección.

Para solucionar este inconveniente, se emplea el concepto de valor de curva. El valor de curva de un instrumento es un rendimiento equivalente, tal que al ser capitalizado, permite obtener el rendimiento al vencimiento. Es decir, el valor de curva indica la tasa periódica de crecimiento de tal forma que al componer esta tasa por todo el plazo de vida de la emisión, se obtiene el rendimiento nominal. En otras palabras, se puede decir que el valor de curva indica el potencial de crecimiento del intrumento por un período determinado. Aun más, en el caso de un mercado estable, se esperaría que el instrumento tuviera una razón constante de crecimiento diario, y así resulta claro que esta tasa de crecimiento constante es el valor de curva.

La fórmula mediante la cual se obtiene el valor de curva diario es la siguiente:

vc(1) = [(1 + rv X dv / 360) ^ (1 / dv) - 1] X 360

donde :

vc(1) = valor de curva (1 día)

rv = rendimiento a vencimiento

dv = días a vencimiento

Considerando el valor de curva, la selección de inversiones se dirigirá hacia aquellos valores que tengan mayor potencial de crecimiento, y así se esta considerando la mayor tasa de capitalización posible, y también se aprovechan las condiciones del mercado, pues si la tendencia de las tasas es a la baja, el instrumento seleccionado será el más beneficiado, y en caso contrario, se puede tener una mayor protección contra las alzas, que con alguna otra emisión que tenga un menor valor de curva.

Las Obligaciones y los Bonos para el pago de la Indemnización Bancaria son instrumentos con características similares. Estos intrumentos pagan intereses periódicamente, hasta la fecha de su amortización, por lo cual se conoce su rendimiento por un determinado plazo. Pero a pesar de ésto, tampoco se puede fijar como criterio de selección el solo rendimiento nominal que ofrecen, sino que también hay que considerar el precio al cual se adquieren, ya que de comprarse bajo la par (a menos de su valor nominal) su rendimiento crece; si se compra sobre la par (a más de su valor nominal) el rendimiento real que brindará será menor; finalmente, si se consigue a la par, mantendrá el rendimiento.

Por otra parte, a pesar de que estos instrumentos son de largo plazo, sólo se conoce su rendimiento por un determinado período (uno, tres o seis meses) por lo que se considerá este como el plazo real, pues dadas las condiciones de la economía, no es posible aproximar confiablemente el rendimiento que pagará en el mediano o largo plazo.

Entonces el rendimiento real de estos tipos de instrumentos estará dado por:

rr = (rn X vn) / pc

donde:

rr = rendimiento real

rn = rendimiento nominal

vn = valor nominal

pc = precio de compra

Se tiene así, que este criterio de selección de inversiones, en cuanto al rendimiento, estará basado en la ganancia de capital o los intereses que se devengarán o que se espera devengar, en un día, para cada instumento.

REGLAMENTACION DE LAS INVERSIONES DE LAS SOCIEDADES DE INVERSION DE RENTA FIJA

Además, existe otro criterio objetivo para las decisiones de inversión. Este es el de mantener las inversiones dentro de ciertos rangos establecidos por la Ley de Sociedades de Inversión y por la Comisión Nacional de Valores.

Dichos límites pueden brindar un factor básico para que el inversionista vea con agrado esta alternativa: la confianza. El saber que existen autoridades que vigilan el funcionamiento y las inversiones de una sociedad, puede ser motivo de tranquilidad para muchos inversionistas. Así, se han fijado ciertos parámetros, en busca de tener una completa seguridad en las inversiones, y el contar con condiciones de liquidez suficiente para poder cubrir las necesidades de los accionistas.

La Ley de Sociedades de Inversión establece reglas generales para la inversión de estas instituciones financieras en los artículos 15 y 16, en los siguientes términos:

> "Artículo 15. El régimen de inversión de las sociedades a que se refiere el artículo 4o. de la presente Ley estará sometido a los criterios de

diversificación de riesgos; fomento de actividades prioritarias; seguridad y liquidez; rentabilidad atractiva, así como evitar que las sociedades de inversión puedan adquirir el control de empresas.

La Comisión Nacional de Valores queda facultada para establecer, con la previa aprobación de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, límites a las inversiones cuando se concentren en un mismo ramo de la actividad industrial, o cuando correspondan a empresas que pertenezcan a un mismo grupo y que, consecuentemente, por sus nexos patrimoniales o de responsabilidad, constituyan riesgos comunes para una sociedad de inversión."

"Artículo 16. El régimen de inversión de estas sociedades, se sujetará a las siguientes reglas, sin perjuicio de las disposiciones aplicables a cada tipo de sociedad:

I. Por lo menos, el 94% de su activo total estará representado en efectivo y valores;

II. Los gastos de establecimiento, organización y similares no excederá del 3% de la suma del activo total, y

III. El importe total de muebles y útiles de oficina, sumado al valor de los inmuebles estrictamente necesarios para oficinas de la sociedad, no excederá del 3% del activo total.

En casos excepcionales, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público podrá autorizar variaciones a los limites previstos en este articulo, considerando el tipo de sociedad de inversión, el monto del capital constitutivo y las condiciones de la plaza en que se ubique el domicilio social." [7]

En cuanto a las normas relativas a las sociedades de nversión de renta fija, la citada Ley establece:

"Artículo 19. Las sociedades de inversión de renta

Comisión Nacional de Valores. "Ley del Mercado de Valores y y de Sociedades de Inversión", 1985, p.79

fija operaran exclusivamente con valores y documentos de renta fija y la utilidad o pérdida neta se asignará diariamente entre los accionistas, en los términos de este capítulo."

"Artículo 20. Las inversiones en valores y documentos que realicen las sociedades de este tipo, se sujetarán a los límites que, con la previa aprobación de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, establezca la Comisión Nacional de Valores mediante disposiciones de carácter general, conforme a las siguientes reglas:

I. Señalaran el porcentaje máximo del capital contable de las sociedades de inversión que podrá invertirse en valores emitidos por una misma empresa, sin que en ningún caso pueda exceder del 10%;

II. Señalarán el porcentaje máximo de valores de una misma empresa que podrá ser adquirido por una sociedad de inversión, sin que en ningún caso pueda exceder del 10% del total de las emisiones de dicha empresa;

III. Señalarán el porcentaje máximo del capital contable de las sociedades de inversion que podrá invertirse en valores cuyo plazo de vencimiento sea mayor de un año, a partir de la fecha de adquisición, sin que en ningún caso pueda exceder del 20% de dicho capital;

Los valores emitidos por el Gobierno Federal no estarán sujetos a los porcentajes máximos señalados en los incisos precedentes, y

IV. Tratándose de valores y documentos emitidos o avalados por instituciones de crédito, las sociedades de inversión podrán invertir en ellos hasta un 30% de su capital contable." [8]

Las reglas de carácter general aplicables a las sociedades de inversión de renta fija dictadas por la Comisión Nacional de Valores se encuentran en la Circular 12-6 Bis, expedida el 4 de

----

8. Comisión Nacional de Valores. "Ley del Mercado de Valores y Ley de Sociedades de Inversión", 1985, p.80

enero de 1984, mismas que modifican las reglas especificadas anteriormente en la Circular 12-6, del 2 de agosto de 1982. Las reglas mencionadas son las siguientes:

"Las sociedades de inversión de renta fija deberán realizar sus inversiones en los valores y documentos inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios listados en el Anexo 1 de esta Circular, ajustándose a los siguientes límites:

1. No más del 10% de sus activos totales podrá estar invertido en valores de una misma emisora o aceptante, excepto tratándose de los Certificados de la Tesorería de la Federación, de los Bonos del Gobierno Federal para el pago de la Indemnización Bancaria, 1982 y de los Certificados de Participación denominados "Petrobonos", emitidos por Nacional Financiera, S. A.

2. Los porcentajes de inversión de sus activos totales, serán los siguientes:

2.1 No más del 70% [9] ni menos del 30% en Certificados de la Tesorería de la Federación.

2.2 No más del 35% en los pagarés denominados Papel Comercial y letras de cambio, conocidas como Aceptaciones Bancarias.

2.3 No más del 30% en Obligaciones.

2.4 No más del 20% en Certificados de Participación denominados "Petrobonos" emitidos por Nacional Financiera, S. A.

2.5 No más del 30% en Bonos del Gobierno Federal para el pago de la Indemnización Bancaria, 1982.

3. No más del 20% de sus activos totales podrá ser invertido en valores con vencimiento a plazo mayor de un año, a partir de la fecha de adquisición.

4. No más del 20% de sus activos totales podra ser

----

9. Este límite superior corresponde a una modificación posterior, ya que la Circular referida establecía el 50%.

invertido en Pagarés con Rendimiento Liquidable al Vencimiento cuyo plazo no exceda de 360 días.

Los porcentajes anteriores podrán variar por las adquisiciones de acciones propias que realicen las sociedades de inversión de renta fija, en cuyo caso, el producto de las colocaciones subsecuentes de dichas acciones, así como cualesquiera inversión posterior, deberán destinarse a realizar inversiones tendientes a restablecer tales porcentajes.

Asimismo, cuando se excedan los porcentajes anteriores con motivo del aumento del precio de los valores que integran la cartera propiedad de las citadas sociedades, las posteriores inversiones que se hagan, también deberán tener como propósito restablecer dichos porcentajes."[10]

Finalmente, en el caso de la Bolsa Mexicana de Valores, no se permite el operar con valores en corto. Se dice que una posición se negocia en corto cuando puede ser vendida aún antes de tenerla. Existen bolsas de valores donde es permitida esta operación, pero en el mercado mexicano tal práctica está sancionada. Así pues, este hecho justifica las restricciones de no negatividad en el modelo desarrollado.

PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL

Se ha llegado claramente a un problema de programación matemática, pues se tienen los siguientes conjuntos de elementos:

1. Variables de decisión: son las incógnitas a determinar con la

----

10. Comisión Nacional de Valores. Circular 12-6-bis. 4 de enero de 1984.

solución del modelo, que en este caso, son las cantidades destinadas a cada instrumento de inversión factible.

2. Restricciones: para considerar las limitaciones específicas de este sistema, se tienen las restricciones impuestas por las autoridades correspondientes, las cuales limitan a las variables de decisión a un conjunto de valores permitidos.

3. Función objetivo: que es la medida de la efectividad del sistema y se representa como una función matemática de las variables de decisión. En el presente problema, en esta función objetivo se incluyen los rendimientos de los instrumentos.

Más aún, el problema planteado es un problema de programación lineal, pues la función a optimizar es lineal y las restricciones también tienen esta estructura.

Además, las variables de decisión deben ser no-negativas.

Por tanto, la forma general del modelo es:

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{n} c(i)\, x(i)$$

s.a.

Restricciones por tipo de instrumento

Restricciones por plazo

Restricciones por emisora

$$x(i) >= 0 \ , \quad \forall\, i=1,\ldots,n$$

A continuación se detalla el modelo:

La determinación de los coeficientes de la función objetivo, se hace de la siguiente forma:

$$c(i) = [(1 + rv \times dv / 360) ^ (1 / dv) - 1] \times 360$$

Las restricciones son:

Cetes >= 30%

Cetes <= 70%

Papel Comercial + Aceptaciones Bancarias <= 35%

Bib's <= 30%

Petrobonos (83) + Petrobonos (84, 85, 85-I) <= 20%

Obligaciones (1) + Obligaciones (2) <= 30%

Pagarés con Rendimiento Liquidable a Vencimiento <= 20%

Bib's + Petrobonos (84, 85, 85-I) + Obligaciones (2) <= 20%

Cetes + Papel Comercial + Aceptaciones Bancarias + Bib's + Petrobonos (83) + Petrobonos (84, 85, 85-I) + Obligaciones (1) + Obligaciones (2) + Pagarés con Rendimiento Liquidable al Vencimiento = 100%

Además, cada emisora (excepto Cetes, Bib's y Petrobonos) no pueden exceder del 10% del total a invertir o del 10% de la propia emisión, la menor de ambas cantidades.

Cabe ahora puntualizar, que el objetivo de este modelo es determinar un conjunto de valores, tales que maximicen el rendimiento esperado del día, para todo el conjunto. Pero hay que considerar, que como en todo modelo de Investigación Operaciones, se han seleccionado las variables críticas, que son objetivas y de alguna forma medibles. Se han dejado de lado variables que tienen poca influencia, o que no se pueden determinar claramente, tales como las condiciones del mercado, muchas veces tan erráticas que en unas cuantas horas varían drásticamente. Tampoco se considera en forma total la disponibilidad de los valores, ya que en ocasiones, por las mismas condiciones del mercado, son casi imposibles de obtener.

Los resultados de este modelo, deberán servir como diagnóstico al analista de inversiones, para que pueda evaluar el manejo de su portafolios, al contar con un parámetro óptimo. Servirán para que cuestione las inversiones que tiene y sepa cuáles están deteniendo el crecimiento de los activos; y en el caso de nuevas inversiones, se percate fácilmente de atractivas oportunidades, que de otra forma no captaría rápidamente. Y este factor de tiempo es muchas veces el más decisivo para lograr una buena inversión.

Las políticas o estrategias de inversión específicas de una sociedad, varían grandemente de una a otra, e inclusive, dentro de una misma sociedad pueden variar conforme transcurre el tiempo. Por ello, no son aspectos totalmente objetivos y cuantificables, y no se incluyen en este modelo general.

Finalmente, para escribir el modelo en la forma canónica, habrá que suponer el total del dinero a invertir, para establecer adecuadamente las expresiones cuantitativas, al conocer los importes de los límites factibles de ser invertidos. El monto a invertir se supondrá de 1,000 millones de pesos, ya que es una cantidad que fácilmente pueden manejar estas sociedades.

APLICACION DEL MODELO A UN CASO PRACTICO

Se finaliza el capítulo con un ejemplo práctico donde se incluyen las siguientes emisiones:

i	variables de decisión	c(i)
1	Ct(1)	64.34
2	Ct(2)	64.18
3	Ct(3)	63.17
4	Ct(4)	61.51
5	Ct(5)	63.75
6	Ct(6)	63.73
7	Ct(7)	65.09
8	Ct(8)	65.84
9	Ct(9)	57.86
10	Ct(10)	63.19
11	Ct(11)	62.97
12	Ct(12)	62.88
13	Ct(13)	64.19
14	Ct(14)	61.27
15	Ct(15)	62.15
16	Ct(16)	61.68
17	Ct(17)	64.39
18	Ct(18)	63.25
19	PC(1)	65.95
20	PC(2)	66.61
21	PC(3)	69.30
22	PC(4)	67.55
23	PC(5)	64.18
24	PC(6)	66.05
25	Ob(1)	70.67

i	variables de decisión	c(i)
26	Ob(2)	65.40
27	Ob(3)	74.69
28	Ob(4)	64.79
29	Ob(5)	77.84
30	Ob(6)	72.01
31	Ob(7)	76.64
32	Pt(1)	74.01
33	Pt(2)	74.45
34	Pt(3)	70.64
35	Bb(1)	74.50
36	PB(1)	59.31
37	PB(2)	60.97
38	PB(3)	58.51
39	PB(4)	43.21
40	PB(5)	40.57

Y así, el planteamiento del modelo correspondiente es como sigue:

$$\max z = \sum_{i=1}^{18} c(i)\ Ct(i) + \sum_{i=1}^{6} c(i)\ PC(i) + \sum_{i=1}^{7} c(i)\ Ob(i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} c(i)\ Pt(i) + c(35)\ Bb(1) + \sum_{i=1}^{5} c(i)\ PB(i)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{18} Ct(i) >= 300 \qquad (R1)$$

$$\sum_{i=1}^{18} Ct(i) <= 700 \qquad (R2)$$

$$\sum_{i=1}^{6} PC(i) <= 350 \qquad (R3)$$

$$Bb \quad <= 300 \tag{R4}$$

$$\sum_{i=1}^{3} Pt(i) <= 200 \tag{R5}$$

$$\sum_{i=1}^{7} Ob(i) <= 300 \tag{R6}$$

$$\sum_{i=1}^{5} PB(i) <= 200 \tag{R7}$$

$$\sum_{i=1}^{7} Ob(i) + \sum_{i=2}^{3} Pt(i) - Bb <= 200 \tag{R8}$$

$$\sum_{i=1}^{18} Ct(i) + \sum_{i=1}^{6} PC(i) + \sum_{i=1}^{7} Ob(i) + \sum_{i=1}^{3} Pt(i) + Bb + \sum_{i=1}^{5} PB(i) = 1000 \tag{R9}$$

$$PC(1) <= 40 \tag{R10}$$

$$PC(2) <= 50 \tag{R11}$$

$$PC(3) <= 100 \tag{R12}$$

$$PC(4) <= 30 \tag{R13}$$

$$PC(5) <= 100 \tag{R14}$$

$$PC(6) <= 75 \tag{R15}$$

$$Ob(1) <= 100 \tag{R16}$$

$$Ob(2) <= 50 \tag{R17}$$

$$Ob(3) <= 40 \tag{R18}$$

$$Ob(4) <= 100 \tag{R19}$$

$$Ob(5) <= 75 \tag{R20}$$

$$Ob(6) <= 60 \tag{R21}$$

$$Ob(7) <= 45 \tag{R22}$$

$$PB(1) <= 100 \tag{R23}$$

$$PB(2) <= 100 \tag{R24}$$

$$PB(3) <= 100 \tag{R25}$$

$$PB(4) <= 100 \tag{R26}$$

$$PB(5) <= 100 \tag{R27}$$

$$Ct(i) >= 0 \,, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,18$$

$$PC(i) >= 0 \,, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,6$$

$$Ob(i) >= 0 \,, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,7$$

$$Pt(i) >= 0 \,, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,3$$

$$Bb(1) >= 0$$

$$PB(i) >= 0 \,, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,5$$

La solución óptima está dada por:

INSTRUMENTO	RENDIMIENTO	MONTO
Ct(8)	65.84	305
PC(1)	65.95	40
PC(2)	66.61	50
PC(3)	69.30	100
PC(4)	67.55	30
PC(6)	66.05	75
Ob(3)	74.69	40
Ob(5)	77.84	75
Ob(7)	76.64	45
Pt(1)	74.01	200
Bb(1)	74.50	40

Rendimiento Promedio : 70.02

Monto total a invertir : 1,000 millones.

C A P I T U L O   V

UNA ALTERNATIVA DE SOLUCION:

LA TEORIA DE REDES

La finalidad de este capítulo, es mostrar un camino diferente para la solución del problema del portafolios de inversiones de renta fija: un algoritmo de la teoría de redes.

La importancia de este nuevo enfoque del problema, radica en que existen numerosos algoritmos, desarrollados especialmente para problemas de redes de flujo, con lo cual, resultan ser más eficientes (en tiempo de procesamiento) que un algoritmo general, como lo es el método simplex. Además, la estructura de red del problema proporciona una representación gráfica de gran utilidad, ya que resulta mucho más didáctica para facilitar su comprensión, aún cuando no se tengan amplios conocimientos matemáticos. Este hecho favorece la comunicación que debe existir con el usuario final, ya que le permite envolverse en el análisis y solución del problema, sin tener que profundizar en los métodos de la Investigación de Operaciones.

ESTRUCTURA DE RED DEL PROBLEMA

Para comprender esta nueva visión del problema, a continuación se introduce la terminología de la teoría de redes necesaria.

Una red $G = (N,A)$ consta de un conjunto N de puntos $i(1), i(2), \ldots, i(n)$, llamados vértices y de un subconjunto A de parejas ordenadas (i,j) de elementos tomados de N, y que se denominan arcos.

Dada una red $G = (N,A)$, supóngase que cada arco $(i,j) \in A$, tiene asociado un par de números reales no negativos: $a(i,j)$, $b(i,j)$ que representan, respectivamente, la capacidad inferior y la capacidad superior de dicho arco.

Existen dos subconjuntos de nodos que son de utilidad en el estudio de la teoría de redes: si $i \in N$, sea $A(i)$ el conjunto de todos los nodos $j \in N$, tales que $(i,j) \in A$:

$$A(i) = [\ i \in N \ /\ (i,j) \in A\ ],$$

y de manera similar, $B(i)$ denota al conjunto de todos los nodos $j \in N$, tales que $(j,i) \in A$:

$$B(i) = [\ j \in N \ /\ (j,i) \in A\ ].$$

Una propiedad importante que se asumirá acerca de $G = (N,A)$, es la de conservación del flujo en la red, que ahora se define:

Sean s y t dos nodos distinto de N. Un flujo de valor v de s a t en G, es una función x de A a los reales no negativos que satisface:

$$\sum_{j \in A(i)} x(i,j) - \sum_{j \in B(i)} x(j,i) = \begin{cases} v \text{ , si } i = s \\ 0 \text{ , si } i \neq s,t \\ -v \text{ , si } i = t \end{cases}$$

$$0 <= a(i,j) <= x(i,j) <= b(i,j) \text{ , } \forall (i,j) \in A$$

En donde s es el nodo origen, t es el nodo destino y los demás nodos son intermedios.

Si el flujo externo del nodo i se define como:

$$d(i) = \sum_{j \in A(i)} x(i,j) - \sum_{j \in B(i)} x(j,i) \text{ ,}$$

entonces, la primera condición de conservación de flujo indica que el flujo externo del origen es v, el del destino es -v y el de los nodos intermedios es 0.

Finalmente, se dice que un flujo es factible si respeta las condiciones de conservación de flujo.

El problema del portafolios de inversión de renta fija se plantea como encontrar un s - t flujo de valor 1,000 millones de pesos, con costo máximo, sujeto a restricciones de flujo en cada arco (cota inferior y superior) y a restricciones de conservación de flujo en cada nodo (flujo externo).

Los costos asociados por unidad de flujo, así como las restricciones de los arcos, se indican a continuación:

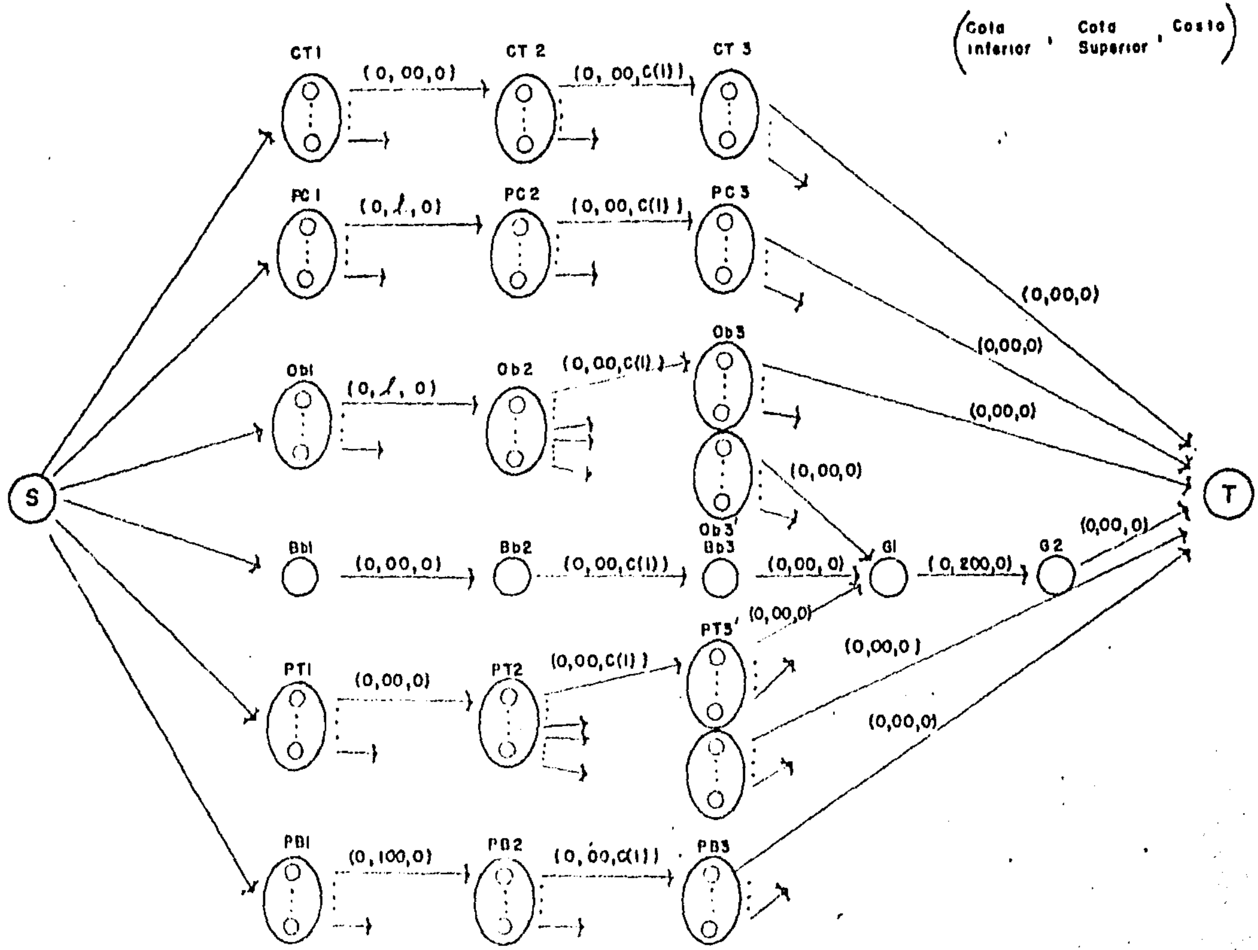
ARCO	COTA INFERIOR	COTA SUPERIOR	COSTO
(s, Ct(1))	300	700	0
(s, PC(1))	0	350	0
(s, Ob(1))	0	300	0
(s, Bb(2))	0	300	0
(s, Pt(1))	0	200	0
(s, PB(1))	0	200	0
(Ct(1), Ct(2))	0	00	0
(PC(1), PC(2))	0	min [100,10%(emisión)]	0
(Ob(1), Ob(2))	0	min [100,10%(emisión)]	0
(Pt(1), Pt(2))	0	00	0
(PB(1), PB(2))	0	100	0
(Ct(2), Ct(3))	0	00	C (Ct)
(PC(2), PC(3))	0	00	C (PC)
(Ob(2), Ob(3))	0	00	C (Ob)
(Ob(2), Ob'(3))	0	00	C (Ob)
(Bb(2), Bb(3))	0	00	C (Bb)
(Pt(2), Pt'(3))	0	00	C (Pt)
(Pt(2), Pt(3))	0	00	C (Pt)
(PB(2), PB(3))	0	00	C (Pt)
(PB(2), PB(3))	0	00	C (PB)
(Ob'(3), G(1))	0	00	0
(Bb (3), G(1))	0	00	0
(Pt'(3), G(1))	0	00	0
(G(1), G(2))	0	200	0
(Ct(3), t)	0	00	0
(PC(3), t)	0	00	0
(Ob(3), t)	0	00	0
(G(2), t)	0	00	.0
(Pt(3), t)	0	00	0
(PB(3), t)	0	00	0

Como se puede ver claramente, en la primera familia de arcos, de la forma (s,x) se controlan las restricciones según el tipo de instrumento, que corresponden a las primeras siete restricciones (R 1 a R 7) del modelo de programación lineal. En la segunda familia, i.e., aquellos arcos del tipo (x(1),x(2)), están observándose las restricciones en cuanto a cada emisora; tales restricciones son principalmente para las emisiones de Papel Comercial y Aceptaciones Bancarias (PC), así como para las Obligaciones (Ob), y son las respectivas al tercer tipo de restricciones del modelo anterior, que en el ejemplo desarrollado son desde (R 10) hasta (R 27).

En la tercera familia de arcos, cuya notación es (x(2),x(3)) es donde se enfoca la atención hacia los rendimientos de los instrumentos, que están dados, al igual que los coeficientes de costos c(i) de la función objetivo del problema de programación lineal, por la siguiente fórmula:

$$c(i) = [(1 + rv \times dv / 360) ^ { (1 / dv) } - 1] \times 360$$

Finalmente, la última familia de arcos que es relevante, es aquélla de la forma (G(1),G(2)), ya que es en el nodo G(1) donde se concentran los instrumentos regulados que tienen un plazo de vencimiento mayor de un año, y es a través del arco referido donde se controla que no exceda tal monto del 20% del total invertido. De esta forma, se están tomando en cuenta también las



GRAFICA 5.1 RED DEL PROBLEMA DE FLUJO DE VALOR $ 1,000 MILLONES, RESTRINGIDO EN LOS ARCOS, A COSTO MAXIMO.

restricciones en cuanto a plazos de inversión, en el programa lineal se establecen mediante la restricción (R 8). Sólo falta por representar la restricción (R 9) del modelo original, para lo cual se desarrolla en el siguiente apartado el concepto de red circulatoria.

Así pues, se tiene ahora un problema del flujo de valor 1,000 millones, restringido en los arcos, a costo máximo. Su representación gráfica se puede ver en la figura (5-1).

Ahora bien, existen varios algoritmos que pueden servir para resolver este tipo de problemas. Uno de los más utilizados es el algoritmo desarrollado por Busacker y Gowen, el cual es muy fácil de entender, por lo que se usa frecuentemente con fines didácticos, para facilitar su tratamiento. Sin embargo, tiene la gran desventaja de que en cada iteración requiere de nuevos arcos para el recorrido en reversa ("backward pass"), con lo cual, el número de elementos de la red original se ve incrementado. Por ello, este algoritmo es adecuado para resolver problemas que tengan asociada una red pequeña; pero en problemas que se maneje una red relativamente compleja, se vuelve ineficiente. Entonces, el algoritmo de Busacker y Gowen limita el tamaño de las redes que se pueden manejar eficientemente.

El algoritmo "Out of Kilter", es un algoritmo general para la solución de problemas de flujo restringido a costo mínimo, que fue desarrollado por Ford y Fulkerson. Este algoritmo se basa en el teorema dual de holguras complementarias y es uno de los más potentes que existen dentro de la Investigación de Operaciones.

Las principales ventajas de este algoritmo son las siguientes:

1. Se consideran cotas inferiores y superiores para cada arco.

2. El coeficiente de costo asociado a cada arco puede ser de cualquier signo.

3. La solución inicial no necesariamente debe ser factible.

4. No modifica la estructura de la red, dejando constante el número de arcos y nodos originales.

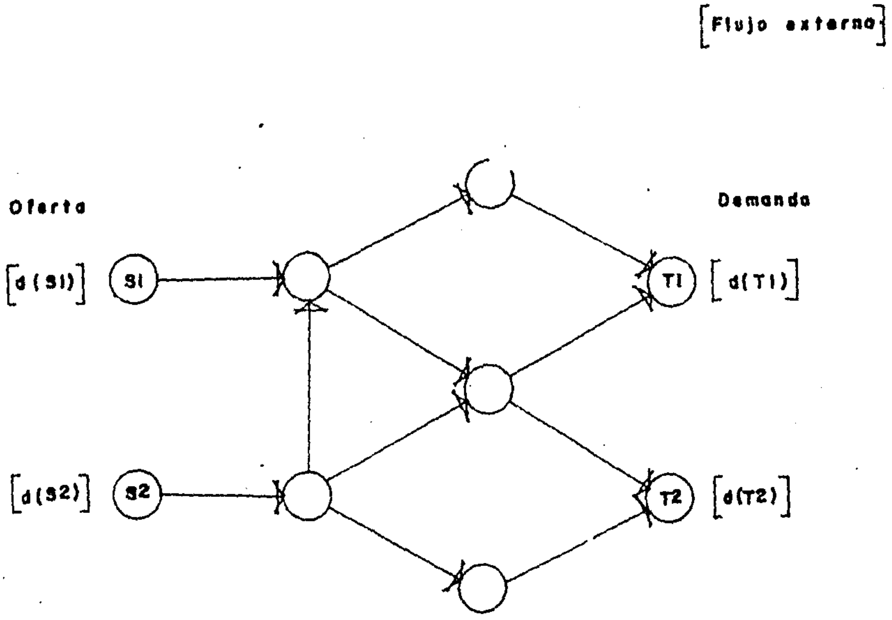
Por estas características, el algoritmo "Out of Kilter" resulta ser la herramienta adecuada para resolver este problema. A continuación se prepara el camino para presentar dicho algoritmo, y aplicarlo al presente caso.

TRANSFORMACION DE UNA RED DE FLUJO EN UNA RED CIRCULATORIA.

Una red circulatoria es aquélla donde practicamente han dejado de existir el nodo fuente y el nodo destino. Formalmente, se dice que es una red donde todos los nodos tienen flujo externo igual a cero.

Se analizará un método general para convertir una red de flujo en una red circulatoria, partiendo de un ejemplo.

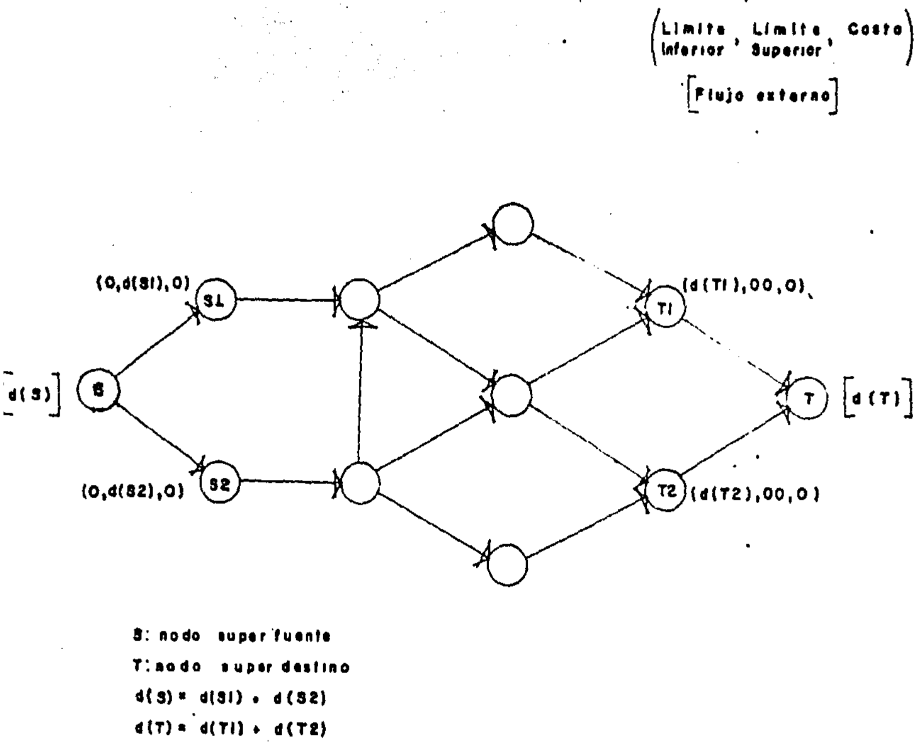
Para ello, considérese la red que se muestra en la gráfica (5-2), la cual tiene dos nodos fuente (con flujo externo positivo): s1 y s2, y tiene también dos nodos destino (con flujo externo negativo): t1 y t2. El resto de los nodos de la red tiene flujo externo igual a cero y se asume que todo arco tiene un vector con sus respectivos parámetros asociados.



GRAFICA 5.2 RED DE FLUJOS CON NODOS FUENTE Y DESTINO MULTIPLES

Primero se construye una red equivalente con un nodo superfuente y un nodo superdestino. Esto se logra adicionando un nodo artificial s, que se une a los nodos fuentes s1 y s2 mediante los arcos (s,s1) y (s,s2), respectivamente. Los parámetros que se asocian a cada uno de estos arcos son costo cero, capacidad mínima cero, y capacidad máxima igual a la oferta (flujo externo) del nodo fuente original. Así mismo, se agrega un nodo destino artificial t, que se conecta a los nodos destino originales por los arcos (t1,t), (t2,t). Los parámetros de estos arcos son costo cero, capacidad máxima infinita y capacidad mínima igual a la demanda (flujo externo negativo) del nodo destino original. El resultado de este pàso se muestra en la figura (5-3).

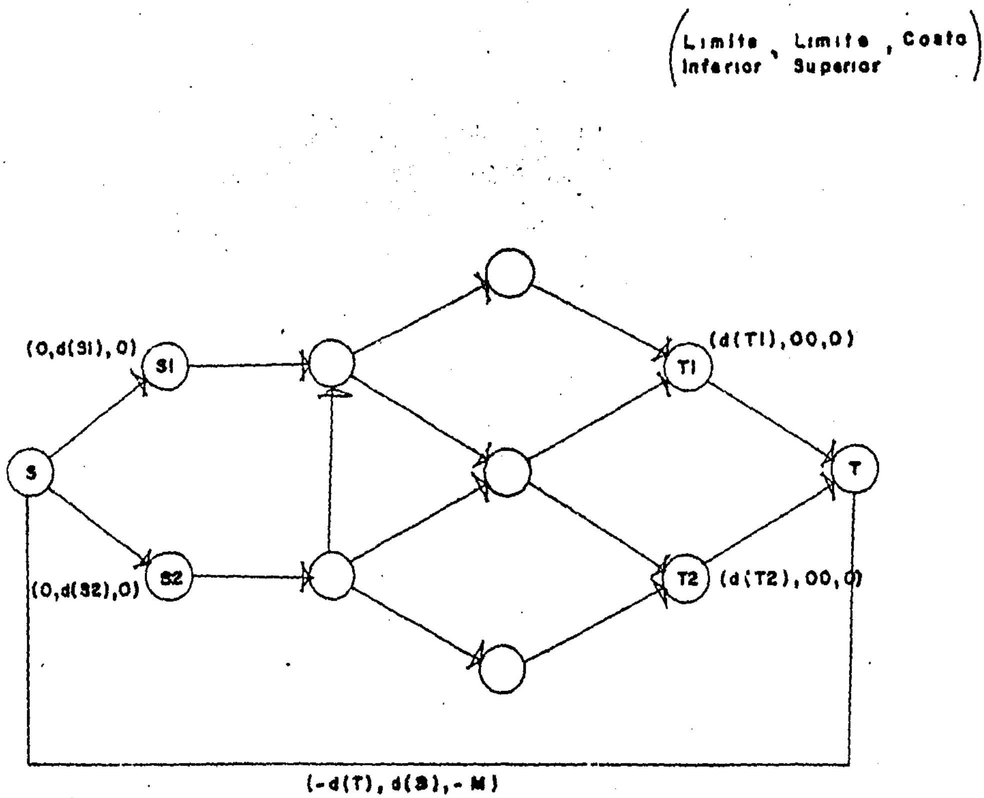
Ahora bien, ya que se tiene la red de flujo con un solo nodo fuente y un solo nodo destino, es transformada en una red circulatoria, añadiéndole un arco (t,s), que una al nodo superdestino t con el nodo superorigen s. Los parámetros asociados a este nuevo arco consisten de un alto costo negativo, o bien cero, para obligar la circulación del flujo, una capacidad mínima dada por la suma de todas las demandas (flujos externos) de los destinos originales (esta es -d(t)), y una capacidad máxima igual a la suma de todas las ofertas (flujos externos) de los nodos fuentes originales (en este caso es d(s)).



GRAFICA 5.3 RED DE FLUJOS CON NODOS FUENTE Y DESTINO UNICO

Resulta claro que, para que el problema sea factible, la capacidad máxima de este último arco debe ser mayor o igual que su capacidad mínima. Una vez representada la red de flujo como una red circulatoria, se tiene considerada la restricción (R 9) del problema lineal en el arco (t,s), ya que así se obliga a la circulación del flujo en toda la red.

La gráfica de la red circulatoria queda como en la figura (5-4).



GRAFICA 5.4 RED CIRCULATORIA

FUNDAMENTACION TEORICA DEL ALGORITMO "OUT OF KILTER"

Para entender la teoría básica del algoritmo, conviene tener presentes los resultados de los teoremas de dualidad de programación lineal, los cuales pueden ser consultados en el apéndice de este trabajo.

Considérese una red $G = (N,A)$. Se define $\forall\ (i,j) \in A$:

$x(i,j)$ el flujo a través del arco (i,j)
$a(i,j)$ el límite inferior para el flujo del arco (i,j)
$b(i,j)$ el límite superior para el flujo del arco (i,j)
$c(i,j)$ el costo por unidad de flujo en el arco (i,j)

entonces, el problema de flujo máximo a costo mínimo queda representado matemáticamente, como un problema de programación lineal, por:

$$\min\ Z = \sum_{(i,j)\in A} c(i,j)\ x(i,j)$$

s.a

$$\sum_{i} x(i,j) - \sum_{k} x(j,k) = \begin{cases} -v\ , & \text{si } j = s \\ 0\ , & \text{si } j \neq s,t \\ v\ , & \text{si } j = t \end{cases} \qquad (5\text{-}1)$$

$$0 <= a(i.j) <= x(i,j) <= b(i,j) \qquad \forall\ (i,j) \in A$$

Ahora bien, al considerar una red circulatoria, este planteamiento se expresa como:

$$\min Z = \sum_{(i,j)\in A} c(i,j)\; x(i,j)$$

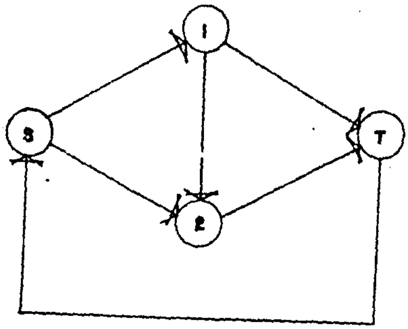
s.a. (5-2)

$$x(i,j) - x(k,i) = 0 \qquad \forall\, (i,j),\ (k,i) \in A,\ j \neq k$$

$$0 \leq a(i,j) \leq x(i,j) \leq b(i,j) \qquad \forall\, (i,j) \in A$$

Para obtener la formulación del problema dual correspondiente se empleará un pequeño ejemplo, para facilitar la comprensión, y de ahí se obtendrá el planteamiento general.

Considérese una red, como la que se muestra en la figura (5-5).



GRAFICA 5.5 RED ASOCIADA AL PROBLEMA PRIMAL

En este caso, el problema primal resulta ser:

min c(s,1) x(s,1) + c(s,2) x(s,2) + c(1,2) x(1,2) +

+ c(1,t) x(1,t) + c(2,t) x(2,t) + c(t,s) x(t,s)

s.a.

i) conservación de flujo

		variable dual
x(s,1) - x(1,2) - x(1,t) = 0	(nodo 1)	u(1)
x(s,2) + x(1,2) - x(2,t) = 0	(nodo 2)	u(2)
- x(s,1) - x(s,2) + x(t,s) = 0	(nodo s)	u(s)
x(1,t) + x(2,t) - x(t,s) = 0	(nodo t)	u(t)

ii) flujo >= capacidad mínima ∀ arco

		variable dual
x(s,1) >= a(s,1) >= 0	(arco (s,1))	v(s,1)
x(s,2) >= a(s,2) >= 0	(arco (s,2))	v(s,2)
x(1,2) >= a(1,2) >= 0	(arco (1,2))	v(1,2)
x(1,t) >= a(1,t) >= 0	(arco (1,t))	v(1,t)
x(2,t) >= a(2,t) >= 0	(arco (2,t))	v(2,t)
x(t,s) >= a(t,s) >= 0	(arco (t,s))	v(t,s)

iii) flujo ∀ arco

		variable dual
$x(s,1) <= b(s,1)$	(arco (s,1))	$w(s,1)$
$x(s,2) <= b(s,2)$	(arco (s,2))	$w(s,2)$
$x(1,2) <= b(1,2)$	(arco (1,2))	$w(1,2)$
$x(1,t) <= b(1,t)$	(arco (1,t))	$w(1,t)$
$x(2,t) <= b(2,t)$	(arco (2,t))	$w(2,t)$
$x(t,s) <= b(t,s)$	(arco (t,s))	$w(t,s)$

Así entonces, el problema dual correspondiente es:

$$\begin{aligned} \max \quad & 0\,u(1) + 0\,u(2) + 0\,u(s) + 0\,u(t) + a(s,1)\,v(s,1) + \\ & + a(s,2)\,v(s,2) + a(1,2)\,v(1,2) + a(1,t)\,v(1,t) + \\ & + a(2,t)\,v(2,t) + a(t,s)\,v(t,s) - b(s,1)\,w(s,1) - \\ & - b(s,2)\,w(s,2) - b(1,2)\,w(1,2) - b(1,t)\,w(1,t) - \\ & - b(2,t)\,w(2,t) - b(t,s)\,w(t,s) \end{aligned}$$

s.a

$$\begin{aligned} u(1) - u(s) + v(s,1) - w(s,1) &<= c(s,1) \\ u(2) - u(s) + v(s,2) - w(s,2) &<= c(s,2) \\ - u(1) + u(2) + v(1,2) - w(1,2) &<= c(1,2) \\ - u(1) + u(t) + v(1,t) - w(1,t) &<= c(1,t) \\ - u(2) + u(t) + v(2,t) - w(2,t) &<= c(2,t) \\ u(s) - u(t) + v(t,s) - w(t,s) &<= c(t,s) \end{aligned}$$

$$v(s,1), v(s,2), v(1,2), v(1,t), v(2,t), v(t,s) >= 0$$

$$w(s,1), w(s,2), w(1,2), w(1,t), w(2,t), w(t,s) >= 0$$

$$u(1),\ u(2),\ u(s),\ u(t) \quad \text{s.r.s.}$$

En términos generales, si la formulación primal de un problema de flujo máximo a costo mínimo en una red con gráfica asociada $G = (N,A)$, es:

$$\min \ z = \sum_{(i,j) \in A} c(i,j)\ x(i,j)$$

s.a.

$$- x(i,j) + x(k,i) = 0 \qquad \forall\ (i,j),(j,k) \in A,\ j \neq k$$

$$x(i,j) >= a(i,j) >= 0 \qquad \forall\ (i,j) \in A$$

$$- x(i,j) >= - b(i,j) \qquad \forall\ (i,j) \in A$$

entonces, asociando las variables duales $u(i)$ (para todo nodo $N(i)$), $v(i,j)$ y $w(i,j)$ (para todo arco (i,j)), respectivamente con la primera, segunda y tercera familias de restricciones primales, la formulación dual correspondiente es la siguiente:

$$\max \ w = \sum_{(i,j) \in A} a(i,j)\ v(i,j) - b(i,j)\ w(i,j)$$

s.a

$$- u(i) + u(j) + v(i,j) - w(i,j) <= c(i,j) \qquad \forall\ (i,j) \in A \qquad (5\text{-}4)$$

$$v(i,j) >= 0 \qquad \forall\ (i,j) \in A$$

$$w(i,j) >= 0 \qquad \forall\ (i,j) \in A$$

$$u(i) \quad \text{s.r.s.} \qquad \forall\ N(i) \in N$$

Ahora bien, según el teorema débil de holgura complementaria (primer teorema de dualidad), se tiene que:

$$u(i)\,[x(k,i) - x(i,j)] = 0\,, \quad \forall\, N(i) \in N,\ \forall\, (k,i),(i,j) \in A,\ j \neq k$$

$$v(i,j)\,[\,x(i,j) - a(i,j)] = 0\,, \quad \forall\, (i,j) \in A$$

$$w(i,j)\,[-x(i,j) + b(i,j)] = 0\,, \quad \forall\, (i,j) \in A \qquad (5\text{-}5)$$

$$x(i,j)\,[c(i,j) + u(i) - u(j) - v(i,j) + w(i,j)] = 0\,, \quad \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, N(i),\, N(j) \in N$$

La propiedad se satisface para toda circulación factible, i.e., para todo flujo factible de una red circulatoria, por la propiedad de conservación de flujo en la red.

Más aún, aplicando el corolario del teorema débil de holgura complementaria, se establecen las siguientes condiciones:

$$\text{si } v(i,j) > 0, \text{ entonces } x(i,j) = a(i,j)\,, \quad \forall\, (i,j) \in A$$

$$\text{si } w(i,j) > 0, \text{ entonces } x(i,j) = b(i,j)\,, \quad \forall\, (i,j) \in A \qquad (5\text{-}6)$$

$$\text{si } x(i,j) > 0, \text{ entonces } - u(i) + u(j) + v(i,j) - w(i,j) = c(i,j) \quad \forall\, N(i),N(j) \in N,\ \forall\, (i,j) \in A$$

Como el flujo $x(i,j)$, en cada arco (i,j), no puede tener al mismo tiempo el valor del límite inferior $a(i,j)$ y del límite superior $b(i,j)$, se concluye de las condiciones anteriores (5-5), que $v(i,j)$ y $w(i,j)$ no pueden ser ambos positivos simultáneamente. Es decir:

$$\text{si } v(i,j) > 0 \text{ entonces } w(i,j) = 0\,, \text{ para } (i,j) \in A$$

$$\text{si } w(i,j) > 0 \text{ entonces } v(i,j) = 0\,, \text{ para } (i,j) \in A \qquad (5\text{-}7)$$

Por supuesto, $v(i,j)$ y $w(i,j)$ serían iguales a cero simultáneamente, en el caso en que $a(i,j) <= x(i,j) <= b(i,j)$ para el arco $(i,j) \in A$.

Si se realiza un cambio de notación en la tercera restricción de (5-6) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{c}(i,j) &= c(i,j) + u(i) - u(j) = \\ &= v(i,j) - w(i,j) \qquad \forall\, (i,j) \in A \qquad (5\text{-}8) \end{aligned}$$

entonces:

$$\bar{c}\,(i,j) > 0,$$

(5-8), implica que:

$$v(i,j) - w(i,j) > 0,$$

y por (5-7) resulta que:

$$v(i,j) >= 0$$

$$w(i,j) \;= 0$$

para el arco $(i,j) \in A$. Esto conduce, según (5-6), a que:

$$x(i,j) = a(i,j) \qquad (i,j) \in A$$

por otro lado, si:

$$\bar{c}(i,j) < 0$$

entonces, por (5-8),

$$v(i,j) - w(i,j) \;< 0$$

y nuevamente, por (5-7), se tiene que:

$$w(i,j) > 0$$
$$v(i,j) = 0$$

y, por tanto, según (5-6),

$$x(i,j) = b(i,j) \qquad (i,j) \in A$$

Finalmente, si:

$$\bar{c}(i,j) = 0$$

resulta que, según (5-8),

$$v(i,j) = w(i,j) = 0$$

es decir, $v(i,j) = w(i,j)$

situación que sólo puede darse si ambos son cero, por (5-7),

$$v(i,j) = w(i,j) = 0$$

y, según (5-5), se tiene para el arco $(i,j) \in A$, que:

$$a(i,j) <= x(i,j) <= b(i,j).$$

Resumiendo el análisis anterior, se tiene que:

$$\begin{array}{lll} \text{si } \bar{c}(i,j) > 0 \text{ ,} & \text{entonces} & a(i,j) = x(i,j) \\ \text{si } \bar{c}(i,j) = 0 \text{ ,} & \text{entonces} & a(i,j) <= x(i,j) <= b(i,j) \\ \text{si } \bar{c}(i,j) < 0 \text{ ,} & \text{entonces} & x(i,j) = b(i,j) \\ & & (i,j) \in A \end{array} \qquad (5\text{-}9)$$

Así, Ford y Fulkerson encontrarón las condiciones necesarias y suficientes que el flujo $x(i,j)$, en el arco $(i,j) \in A$ debe satisfacer, para que sea óptimo. En el siguiente teorema se presentan esas condiciones.

Teorema 5.1

La condición necesaria y suficiente para que el flujo $x(i,j)$ sea óptimo en (5-2), es que sea factible y existan variables duales $u(i)$, $v(i,j)$ y $w(i,j)$ asociadas a (5-4), tales que cumplan con las siguientes condiciones:

$$
\begin{array}{lll}
\text{A) si } \bar{c}(i,j) > 0 \text{ ,} & \text{entonces} & a(i,j) = x(i,j) \\
\text{B) si } \bar{c}(i,j) = 0 \text{ ,} & \text{entonces} & a(i,j) <= x(i,j) <= b(i,j) \qquad (5\text{-}10) \\
\text{C) si } \bar{c}(i,j) < 0 \text{ ,} & \text{entonces} & x(i,j) = b(i,j) \\
 & & (i,j) \in A
\end{array}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\bar{c}(i,j) &= c(i,j) + u(i) - u(j) \\
&= v(i,j) - w(i,j) \qquad \forall\ (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

METODOLOGIA DEL ALGORITMO OUT OF KILTER

El teorema anterior establece que un flujo circulatorio es óptimo, si y sólo si, se cumplen las condiciones identificadas en (5-10) como A, B, C. Ahora bien, si tal flujo no es óptimo, es porque uno o varios de los arcos se encuentran en alguna de las siguientes situaciones:

$$
\begin{array}{lll}
A1 & : & \bar{c}(i,j) > 0 \;,\; x(i,j) < a(i,j) \\
A2 & : & \bar{c}(i,j) > 0 \;,\; x(i,j) > a(i,j) \\
B1 & : & \bar{c}(i,j) = 0 \;,\; x(i,j) < a(i,j) \\
B2 & : & \bar{c}(i,j) = 0 \;,\; x(i,j) > b(i,j) \\
C1 & : & \bar{c}(i,j) < 0 \;,\; x(i,j) < b(i,j) \\
C2 & : & \bar{c}(i,j) < 0 \;,\; x(i,j) > b(i,j)
\end{array}
\qquad (5\text{-}11)
$$

Se dice que un arco (i,j) es conformable si cumple las condiciones A,B o C, y por el contrario, es no conformable, si su estado es alguno de A1, A2, B1, B2, C1, C2.

La metodología del algoritmo Out of Kilter consiste en llevar los arcos que se encuentran en estado no conformable a una situación de conformabilidad. Esto se puede dar mediante alguna de las etapas que incluye el algoritmo: en la fase primal, se modifican los flujos, para tratar de hacer un determinado arco conformable, mientras que en la fase dual se cambian los precios duales asociados a los nodos, para tratar de llegar al estado deseado.

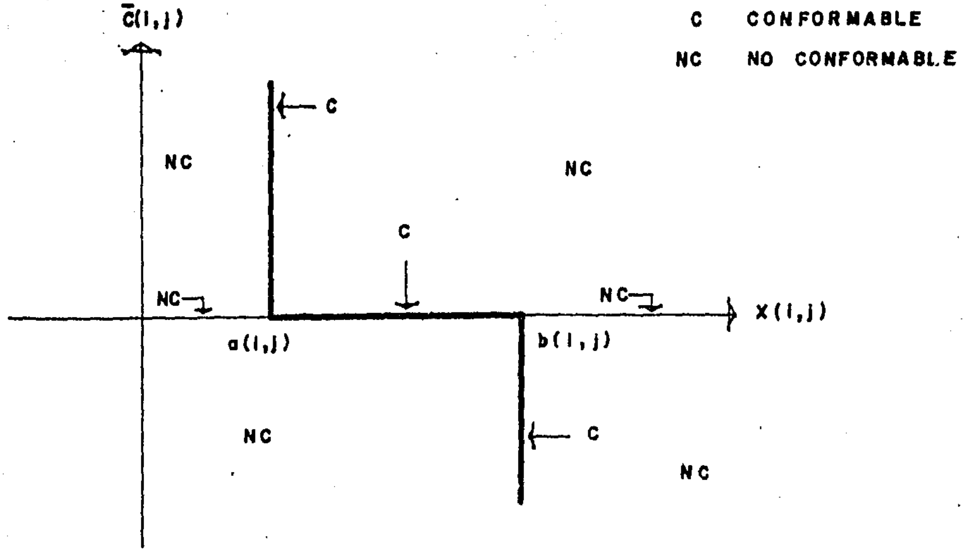
Así, los estados conformables y no conformables para un arco (i,j) se concentran en el siguiente cuadro:

	$\bar{c}(i,j) < 0$	$\bar{c}(i,j) = 0$	$\bar{c}(i,j) > 0$
$x(i,j) < a(i,j)$	NC	NC	NC
$x(i,j) = a(i,j)$	NC	C	C
$a(i,j) < x(i,j) < b(i,j)$	NC	C	NC
$x(i,j) = b(i,j)$	C	C	NC
$x(i,j) > b(i,j)$	NC	NC	NC

donde: C indica que el arco es conformable

NC indica que el arco es no conformable.

Entonces, en la fase primal (cambio de flujo) un arco se moverá verticalmente, es decir, variará su estado sobre la misma columna, siendo tal movimiento hacia arriba si el flujo disminuye, o bien, hacia abajo, cuando el mismo aumenta. Por su parte, en la fase dual (cambio de precios duales asociados) la variación será en forma horizontal, o sea, sobre el mismo renglón. También se puede emplear un plano coordenado para representar los diferentes estados posibles de un arco (i,j), como se muestra en la gráfica (5-6).



GRAFICA 5.6 ESTADOS CONFORMABLES Y NO CONFORMABLES DE UN ARCO (i,j)

Antes de ver los pasos generales del algoritmo, se definirá para un arco (i,j) en estado no conformable, su número de Kilter k(i,j), que representa el mínimo cambio de flujo requerido para que tal arco sea conformable. Para cada uno de los estados no conformables A1,...,C2, el número de Kilter correspondiente se define a continuación:

$$
\begin{aligned}
A1 &: \quad k(i,j) = a(i,j) - x(i,j) \\
A2 &: \quad k(i,j) = x(i,j) - a(i,j) \\
B1 &: \quad k(i,j) = b(i,j) - x(i,j) \\
B2 &: \quad k(i,j) = x(i,j) - a(i,j) \\
C1 &: \quad k(i,j) = b(i,j) - x(i,j) \\
C2 &: \quad k(i,j) = x(i,j) - b(i,j)
\end{aligned}
\qquad (5\text{-}12)
$$

Ahora, una vez claros todos los conceptos, se presenta un bosquejo del algoritmo Out of Kilter.

Paso 1. Se considera un flujo inicial, que no necesita ser factible y una solución dual factible. Si no se cuenta con una mejor solución inicial, se puede empezar con el flujo $x(i,j) = 0$, $\forall\ (i,j) \in A$, y con los precios duales asociados $u(i) = 0$, $\forall$ Ni $\in$ N.

Se calculan los costos modificados de acuerdo a la fórmula:

$$\bar{c}(i,j) = c(i,j) + u(i) - u(j) \qquad (5\text{-}13)$$

y se identifican los arcos en estado conformable.

Paso 2. Si todos los arcos son conformables, entonces la solución es óptima.

De otra forma, se elige arbitrariamente un arco (i,j) no conformable, para el cual se calcula el número de Kilter, y se aplica la fase primal del algoritmo, buscando un nuevo flujo circulatorio, tal que disminuya el número de Kilter del arco seleccionado, pero que todos los arcos conformables conserven ese.. estado, (obsérvese que el número de Kilter para un arco conformable sería cero, por lo cual, esta condición es equivalente a buscar que no se incrementen los números de Kilter de los demás arcos).

Si no se puede construir un flujo circulatorio mejor en la fase primal, entonces se sigue con el paso 3.

Paso 3. Corresponde a la fase dual del algoritmo, en la cual se construye una nueva solución dual, cambiando los precios duales asociados a los nodos, en forma tal que no aumente ningún número de Kilter, y se regresa al paso 2.

Si en este paso se determina que algún precio dual puede incrementarse en forma no acotada, es indicio de que el problema no es factible.

Paso 4. Iterando entre los pasos 2 y 3, el algoritmo determina una solución óptima, o bien, como ya se dijo, indica que no existe una solución factible.

Ahora que se tiene la idea general del funcionamiento de este algoritmo, conviene profundizar en los pasos 2 y 3, correspondientes a las fases primal y dual, respectivamente.

Fase Primal.

Una vez seleccionado el arco que se desea hacer conformable, se determina su número de Kilter asociado, para conocer la cantidad de flujo que hay que variar sobre ese arco, de tal forma que deje su estado no conformable. Sin embargo, falta determinar una cadena sobre la cual se puedan variar los flujos, para mantener la circulación. Para tal efecto, se utiliza el siguiente proceso:

Procedimiento de etiquetado de nodos.

Sea (l,m) un arco no conformable. Si éste se encuentra en alguno de los estados A1, B1, C1, entonces se inicia etiquetando el nodo m (se distingue como origen o), y el objetivo es etiquetar el nodo l (identificando como destino n). En caso contrario, es decir, si el arco está en alguno de los estados A2, B2, C2, entonces iniciamos con el nodo l (nodo origen o) y trataremos de llegar a etiquetar el nodo m (nodo destino n).

Los pasos de etiquetado son los siguientes:

1. Etiquetar con (0,00) al nodo origen.

2. Considerar un nodo i, ya etiquetado como (+h,q(i)), y a partir de aquí, se etiqueta con $(\hat{i},q(j))$, cada nodo j que satisfaga una de las siguientes condiciones.

a) si $(i,j) \in A$, $\bar{c}(i,j) > 0$, $x(i,j) < a(i,j)$
entonces

$$\hat{i} = +i \ , \ q(j) = \min [\ q(i) \ , \ a(i,j)-x(i,j) \ ] \qquad (5\text{-}14)$$

i.e., el flujo $x(i,j)$ se puede incrementar.

b) si $(i,j) \in A$, $\bar{c}(i,j) <= 0$, $x(i,j) < b(i,j)$

entonces

$$\hat{\imath} = +i \ , \ q(j) = \min [\ q(i)\ ,\ b(i,j)-x(i,j)\ ] \qquad (5\text{-}15)$$

i.e., el flujo $x(i,j)$ se puede incrementar.

c) si $(j,i) \in A$, $\bar{c}(j,i) >= 0$, $x(j,i) > a(j,i)$

entonces

$$\hat{\imath} = -i \ , \ q(j) = \min [\ q(i)\ ,\ x(j,i)-a(j,i)\ ] \qquad (5\text{-}16)$$

i.e., se invierte el flujo en (j,i). por lo cual $x(i,j)$ puede disminuir

d) si $(j,i) \in A$, $\bar{c}(j,i) < 0$, $x(j,i) > b(j,i)$

entonces

$$\hat{\imath} = -i \ , \ q(j) = \min [\ q(i)\ ,\ x(j,i)-b(j,i)\ ] \qquad (5\text{-}17)$$

i.e., se invierte el flujo en (j,i), por lo que $x(i,j)$ puede disminuir.

3. Si el nodo destino n puede etiquetarse por este procedimiento, se considera la sucesión de nodos [o,..., i,j,...,n], en la cual cada nodo está presente en la etiqueta del siguiente, ya sea con signo + o con signo -

En caso de no poder etiquetar el nodo destino, indica que no puede variarse el flujo desde el nodo o hasta el nodo n, sin incrementar algún número de Kilter. Por ello, hay que buscar nuevos valores de los precios duales u(i), para lo cual se procede a la fase dual.

Por el contrario, si se encontró una cadena que una al nodo o con el nodo t, entonces se puede proceder a la rutina de cambio de flujo, según se indica a continuación.

Subrutina de cambio de flujo.

Se cambia el valor del flujo x(i,j) en cada arco de la cadena determinada en el procedimiento de etiquetado. La forma de variar el flujo, es incrementando q(n) unidades al flujo de los arcos normales (si su sentido es de o hacia n), y restando este mismo valor a los arcos en reversa (si tienen orientación de n hacia o). Así, el flujo del arco analizado aumentará o disminuirá según el caso.

Fase dual.

Cuando no es posible construir un ciclo que contenga al arco no conformable seleccionado, entonces se procede a la modificación de costos relativos, en tal forma que ningún número de Kilter se vea incrementado, y así lograr alguna de las siguientes condiciones.

- Hacer al arco analizado conformable.
- Proveer arcos que permitan, en una nueva fase primal, encontrar un ciclo que contenga al arco no conformable en

cuestión.

- Mostrar que el problema es infactible.

Pero como $\bar{c}(i,j) = c(i,j) + u(i) - u(j)$, la modificación del costo relativo sólo puede darse mediante un cambio en los precios duales $u(i)$, $\forall i \in N$.

Esto se logra en la forma siguiente:

Sea E el conjunto de los nodos etiquetados y $\bar{E}$ el conjunto de los nodos no etiquetados, después de aplicado el procedimiento de etiquetado.

Se definen los dos siguientes subconjuntos de arcos entre E y $\bar{E}$:

$S1 = [(i,j) \in A / i \in E, j \in \bar{E}, \bar{c}(i,j) > 0; x(i,j) <= b(i,j)]$

$S2 = [(i,j) \in A / i \in \bar{E}, j \in E, \bar{c}(i,j) < 0, x(i,j) >= b(i,j)]$

Sean: (5-18)

$$\theta(1) = \min_{S1} [\bar{c}(i,j)] \qquad (5\text{-}19)$$

$$\theta(2) = \min_{S2} [-\bar{c}(i,j)] \qquad (5\text{-}20)$$

$$\theta = \min [\theta(1), \theta(2)] \qquad (5\text{-}21)$$

donde $\theta(i) = \infty$ si $s(i) = \emptyset$.

Si $\theta = \infty$ entonces, el problema no tiene solución factible.

En caso contrario, se añade el valor θ a cada uno de los precios duales asociados a los nodos etiquetados ($\forall i \in E$), sin modificar los precios duales de los nodos no etiquetados ($\forall i \in \bar{E}$). Así, los nuevos valores de $\bar{c}(i,j)$ están dados por:

$$\bar{c}'(i,j) = \begin{cases} \bar{c}(i,j) - \theta & , \text{ si } (i,j) \ni i \in E,\ j \in \bar{E} \\ \bar{c}(i,j) + \theta & , \text{ si } (i,j) \ni i \in \bar{E},\ j \in E \\ \bar{c}(i,j) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{5-22}$$

y ahora, existe al menos un arco (i,j) tal que $\bar{c}'(i,j) = 0$ y $\bar{c}(i,j) \neq 0$

EL ALGORITMO OUT OF KILTER

Los pasos generales del algoritmo se presentan a continuación:

1. Determinar una solución inicial, consistente de un flujo circulatorio $x = (x(i,j))$ y un vector de precios duales asociados $u = (u(i))$.

2. Dados los valores actuales de la circulación y de los precios duales, cada arco (i,j) está en alguno de los estados conformables (A, B, C), o no conformables (A1, B1, C1, A2, B2, C2).

Si todos los arcos son conformables: alto. La solución actual es óptima.

En caso contrario, seleccionar un arco (l,m) en estado no conformable, en forma arbitraria.

3. Aplicar el procedimiento de etiquetado para el arco (l,m), tomando m como origen y l como destino si (l,m) se encuentra en uno de los estados A1, B1, C1; si, por el contrario, está en A2, B2 o C2, se considera l como origen y m como destino.

3.1 Si el destino (n) puede ser etiquetado, incrementar en $q(n)$ unidades el flujo en la cadena hallada y en el arco (l,m).

Si el arco (l,m) es conformable, regresar a 2; si aún es no conformable, eliminar las etiquetas y pasar a 3.

3.2 Si el destino no puede ser etiquetado, sean E, $\bar{E}$ los conjuntos de nodos etiquetados y no etiquetados respectivamente, y sea θ, definido por (5-21).

Si θ es finito, seguir en 4.

Si θ es 00 : alto. El problema no tiene solución factible.

4. Calcular los nuevos precios duales asociados, según:

$$u'(i) = u(i) \qquad \text{si } N_i \in E$$

$$u'(i) = u(i) + \theta \qquad \text{si } N_i \in E$$

Si (l,m) es ahora un arco conformable, regresar a 2.

En caso contrario, pasar a 3.

APLICACION DEL ALGORITMO OUT OF KILTER AL PROBLEMA DEL PORTAFOLIOS DE INVERSION

Una vez presentado este potente algoritmo, ahora se analizará la forma en que será aplicado en la solución del problema en estudio.

Antes de proseguir con el desarrollo del trabajo, es importante tener presentes las características de este algoritmo, para determinar los ajustes necesarios a realizar, para la implementación del mismo en este caso particular. Tales características son:

1. El algoritmo Out of Kilter constituye una herramienta general para la solución de problemas del flujo restringido a costo mínimo.

2. Requiere que la red asociada al problema sea una red circulatoria.

3. Se consideran cotas inferiores y superiores, en el flujo de cada arco. Además, estas cotas deben ser enteras.

4. Los coeficientes de costos no tienen restricciones en signos.

5. Requiere de una solución inicial, consistente de un flujo circulatorio, no necesariamente factible, y de una solución dual factible (precios duales asociados a cada

nodo).

Una vez consideradas estas ideas, es posible continuar:

Este algoritmo, según la primera característica, sirve para minimizar el costo de un flujo restringido.

Ahora bien, el problema en estudio consiste en maximizar el costo de un flujo restringido (que representa un flujo de dinero a invertir) y, ¿cómo superar esta limitante? La cuarta característica da la clave para poder aplicar el algoritmo: todos los costos originales del problema son positivos, por ello, si se cambia a todos el signo, se podrá aplicar directamente este algoritmo para resolver el problema. La fundamentación de este proceder se justifica fácilmente, como se muestra a continuación.

Supóngase que se tiene una función de n variables, f(x(1),....,x(n)); y sea f* el valor máximo de esta función para los puntos en una región cerrada de E(n). Sea x* el punto (o uno de los puntos) donde f alcanza su valor máximo. Por definición de un máximo absoluto se tiene que, para cada punto x en la región:

f* - f >= 0

que, multiplicándolo por (-1), da:

$$-f^* - (-f) <= 0$$

para todo x en el conjunto. Así pues, por definición de mínimo absoluto,

$$-f^* = \min [-f]$$

para los puntos de la región. Entonces $-f$ toma su valor mínimo en x^*.

Por tanto, se concluye que:

$$\max f = f^* = - (-f^*) = - \min (-f)$$

El máximo de una función f, para algún conjunto de puntos, es el negativo del mínimo de la función $-f$. El máximo de f y el mínimo de $-f$ se dan en el mismo punto.

Más aún, se sabe de programación lineal que para convertir un problema de maximización en uno de minimización, basta cambiar los signos de los coeficientes de costos, ya que:

$$\max z = - \min (-cx) = - \min (-c)' x \; ;$$

la función a minimizar es:

$$z' = (-c)\, x.$$

Así se tiene que:

$$\max z = -\min z'$$

La segunda característica indica que se debe partir de una red circulatoria, pero esto no representa mayor complicación, ya que al inicio del capítulo se ha presentado un método general para convertir una red de flujo en una red circulatoria.

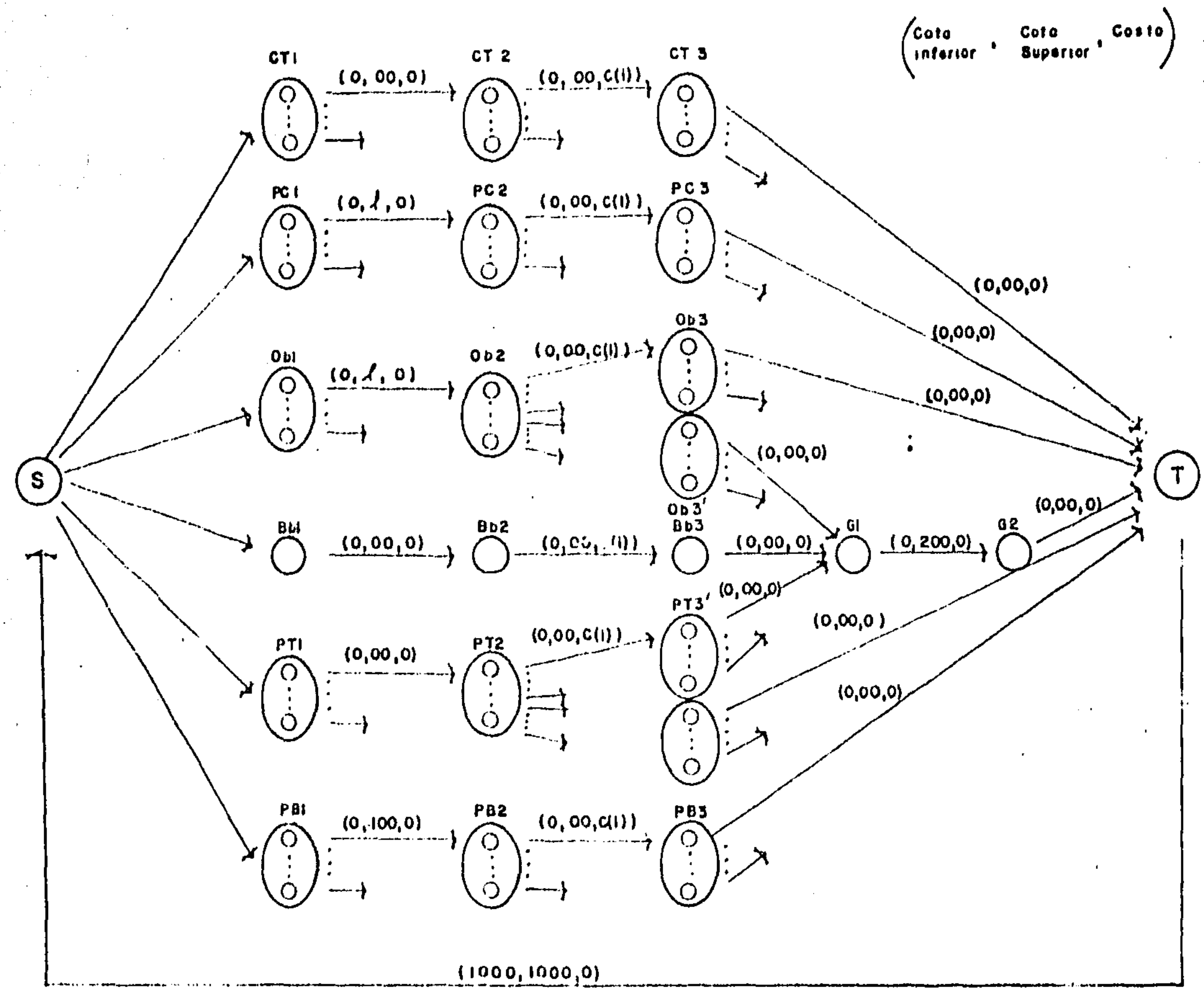
Así el aspecto de la red del problema quedaría como en la figura (5-7).

Simplemente, se remarca el hecho de que el arco (t,s) tiene como parámetros asociados los siguientes: límite inferior y límite superior, iguales ambos a 1,000, para asegurar que el flujo sea el deseado; y el costo asociado es cero.

En cuanto a la tercera característica, se ve que el problema se adecúa completamente, ya que ambos límites de cada arco son enteros.

Y finalmente, en lo referente a la última característica anotada, como se puede ver a lo largo del desarrollo, no implica dificultad alguna, pues el algoritmo estudiado cuenta con la valiosa capacidad de poder iniciar su trabajo con una solución inicial trivial, es decir, la solución en la cual se tiene que $x(i,j) = 0, \forall (i,j) \in A$, y $u(i) = 0, \forall Ni \in N$.

Con estos ajustes finales, el problema del portafolios de inversión puede ser resuelto mediante el algoritmo Out of Kilter.



GRAFICA 5.7 REPRESENTACION DEL PROBLEMA DEL PORTAFOLIOS DE INVERSION MEDIANTE UNA RED CIRCULATORIA

C A P I T U L O   V I

CONCLUSIONES

Las sociedades de inversión son un medio de acceso al mercado de valores, en una situación muy atractiva para el inversionista, ya que le ofrece importantes ventajas, propias de los grandes capitales, como son: diversificacion, rentabilidad atractiva, seguridad, liquidez y reducción de costos administrativos. Este tipo de inversión, relativamente nueva en nuestro medio, viene a llenar un vacío en el sistema financiero y cumple una importante función social, ya que favorece el ahorro y la inversión productiva, coadyuvando al desarrollo económico del país. Además, es un importante factor de estabilidad social, pues fomenta la democratización del capital, al permitir el acceso de los pequeños y medianos inversionistas a dicho mercado.

Por ello, ahora que inician su crecimiento, es necesario brindar el apoyo de diversas ciencias, para que puedan lograr un desarrollo adecuado.

Sin embargo, las decisiones de inversión, en muchos casos, se toman sin antes realizar un adecuado análisis de las alternativas que ofrece el mercado. Esto incide negativamente en el manejo de la sociedad.

Con el modelo desarrollado en este trabajo, el analista puede tener elementos de juicio, para fundamentar sus decisiones y detectar fácilmente nuevas oportunidades de inversión, con lo cual podrá mejorar la operación del portafolios.

Y aún cuando no fuera posible aprovechar las alternativas que el modelo le presenta, debido a las condiciones del mercado, de cualquier forma cuenta ya con una cota superior, o un nivel ideal de inversión. Así podrá comparar y analizar los valores que mantiene en su portafolios, conociendo las causas que le impiden obtener un mayor rendimiento, para poder corregir tal situación en cuanto sea posible.

Al analizar la teoría de portafolios se presentó el concepto de portafolios eficiente, el cual es de gran importancia en esta teoría, ya que permite determinar las mejores combinaciones de valores, en cuanto a sus niveles de riesgo y rendimiento; con ello se logra elevar la calidad de las inversiones. De aquí surge también un resultado muy importante: en cualquier portafolios es conveniente incluir al menos un instrumento de renta fija, ya que produce una disminución significativa en el nivel de riesgo del conjunto.

A partir de ese análisis se hace evidente la necesidad del empleo de modelos de selección de inversiones, dada la variedad de portafolios que se pueden formar. Sin embargo, una de las mayores complicaciones que se ha encontrado al desarrollar este tipo de modelos, es la gran cantidad de información que requieren, por lo que se hacen poco prácticos.

El modelo de programación lineal que aquí se plantea, es bastante sencillo y toma en cuenta los factores esenciales del problema, desechando los factores difíciles de cuantificar, con lo que resulta muy fácil su operación y los resultados son de gran utilidad al usuario.

Además, dados los montos que estas sociedades operan, el nivel de análisis debe ser profundo y muy frecuente, para lograr el mejor aprovechamiento de los recursos disponibles. Por ello, no se elige un período largo para la evaluación de los instrumentos de inversión, sino que se emplean los rendimientos esperados correspondientes a un día, tomando en cuenta el potencial de crecimiento de cada emisión, mediante su valor de curva. Esto permite un análisis constante de las inversiones.

El planteamiento del problema como un modelo de redes es una interesante aplicación de esta teoría, de gran elegancia matemática. Su solución mediante el algoritmo "Out of Kilter" es más eficiente, por ser este un método de solución especializado y ofrece una representación gráfica de gran utilidad.

A pesar de esta última consideración, frecuentemente tiene mayor aceptación el modelo de programación lineal, por ser esta técnica más familiar en el campo de la Administración.

Con este trabajo se ha logrado obtener una aplicación de los métodos y técnicas matemáticas, para brindar una mejor fundamentación al área administrativa. Es importante que los estudiantes de Matemáticas se percaten de las grandes posibilidades de este tipo de aplicaciones, lo cual constituye un vasto campo de desarrollo profesional.

A P E N D I C E

RESULTADOS DE PROGRAMACION LINEAL

Los problemas de optimización son una clase de problemas que buscan maximizar o minimizar una función de una serie de variables o funciones, con estas variables o funciones sujetas a ciertas restricciones.

Este tipo de problemas se encontraron en la física y en la geometría y se aplicaron en su solución, técnicas del cálculo diferencial y del cálculo de variaciones. Estas técnicas clásicas han sido conocidas desde hace más de 150 años y se han aplicado en una diversidad de problemas de las ciencias físicas y la ingeniería. Posteriormente, se desarrollaron aplicaciones del cálculo a la economía.

Sin embargo, en años recientes, han surgido nuevos e importantes problemas de optimización, con aplicaciones en problemas de gobierno, militares, de operaciones industriales y economía, principalmente. Esta clase de problemas se han denominado problemas de programación matemática y ante ellos las técnicas clásicas de optimización han resultado poco útiles, por lo cual se han desarrollado nuevos métodos de solución.

Estos problemas de programación pueden caracterizarse porque pretenden determinar el empleo óptimo de recursos limitados, para alcanzar algún objetivo dado; en forma más específica, tratan con situaciones donde una cantidad de recursos, tales como hombres, materiales, máquinas, tierra o dinero, están disponibles, y se combinan para elaborar uno o más productos. Existen, sin embargo, algunas restricciones sobre todas o algunas de las siguientes categorías: en la cantidad de recursos disponibles, en la cantidad de productos elaborados o en la calidad de cada producto. Pero, aún dentro de estas restricciones, existen muchas distribuciones posibles de recursos, de entre las cuales, se desea encontrar una o varias que maximicen o minimicen alguna función, como la utilidad o el costo.

Dentro de los problemas de programación matemática se encuentran los problemas de programación lineal, en los cuales todas las relaciones entre las variables son lineales, tanto en las restricciones como en la función a ser optimizada. El problema general de programación lineal, puede describirse como sigue: dado un conjunto de m ecuaciones o desigualdades lineales, en r variables, se desea encontrar valores no negativos para estas variables, que satisfagan las restricciones, y que maximicen o minimicen una función lineal de tales variables.

Desde el punto de vista matemático, este planteamiento significa que se tienen m ecuaciones o desigualdades en r variables (m puede ser mayor, menor, o igual que r), de la forma:

$$a(i,1)x(1) + a(i,2)x(2) + \ldots + a(i,r)x(r) \begin{bmatrix} >= \\ = \\ <= \end{bmatrix} b(i)$$

$$i = 1,\ldots,m \qquad \text{(A-1)}$$

donde, para cada restricción, se da uno y solo uno de los signos >= , = , <= , pero este signo puede variar de una restricción a otra. Se buscan valores de las variables x(j), que satisfagan (A-1) y

$$x(j) > 0 \quad , \qquad j = 1,\ldots,r \qquad \text{(A-2)}$$

las cuales, maximicen o minimicen la función lineal

$$z = c(1)x(1) +\ldots+ c(r)x(r) \qquad \text{(A-3)}$$

y a(i,j), b(i,j), c(i,j) son constantes conocidas, determinadas según el problema; las x(j) se llaman variables de decisión.

Así se formula el problema general de programación lineal que, en términos matemáticos, puede representarse por (A-1), (A-2) y (A-3). La función a ser optimizada, (A-3), es conocida como la función objetivo. Las desigualdades de la forma (A-2), reciben el nombre de restricciones de no-negatividad.

Ahora se presenta alguna terminología de gran utilidad: cualquier conjunto que satisfaga las restricciones (A-1) se llama solución del problema de programación lineal. Cualquier solución que satisfaga las restricciones de no negatividad (A-2) se conoce como solución factible. Y una solución factible que optimiza la función objetivo se denomina solución factible óptima. La tarea al resolver un problema de programación lineal, consiste en encontrar una solución factible óptima. En general, existirá un número infinito de soluciones factibles a un problema de programación lineal. Dentro de todas ellas, se ha determinar una o varias, que optimicen la función objetivo.

Debido a que los problemas de programación lineal se presentan en una diversidad de formas (maximizar o minimizar la función objetivo, y las relaciones <= , = ,o, >= para las restricciones), es necesario modificar estas formas para desarrollar un método de solución a partir de un planteamiento uniforme. Para ello se presentan dos formas del problema:

- La forma canónica

- La forma estándar

La forma canónica es de particular importancia en la presentación de la teoría de la dualidad, que más adelante se tratará. En cuanto a la forma estándar, se usa directamente en la solución del problema. A continuación se detallan ambas formas:

Forma canónica.

El problema general de programación lineal definido anteriormente, siempre puede ser expresado en la forma canónica:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c(j)\, x(j)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)\, x(j) <= b(i) \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x(j) > 0 \ , \qquad j = 1,\ldots,n$$

Las características de esta forma son:

1. Todas las variables de decisión son no negativas.

2. Todas las restricciones son del tipo (<=).

3. Se busca maximizar la función objetivo.

Un problema de programación lineal puede ser puesto en esta forma, usando las cinco transformaciones elemertales siguientes:

1. La minimización de una función, f(x), es equivalente a la maximización de su negativo, -f(x).

2. Una desigualdad en una dirección (<,>), puede cambiarse por una desigualdad en sentido contrario (>,<),

multiplicando ambos miembros por -1.

3. Una ecuación puede ser expresada mediante dos desigualdades, cada una en un sentido.

4. Una restricción de desigualdad que tenga el primer miembro expresado en forma de valor absoluto, puede cambiarse por dos desigualdades regulares.

5. Una variable no restringida en signo (i.e., positiva, negativa o cero) es equivalente a la diferencia de dos variables no negativas.

- Forma estándar.

Las características de la forma estándar son:

1. Todas las restricciones son ecuaciones, excepto las restricciones de no negatividad, las cuales permanecen como desigualdades (>= 0).

2. El elemento del lado derecho de cada restricción en forma de ecuación es no negativo.

3. Todas las variables son no negativas.

4. La función objetivo puede ser de maximización o de minimización.

Las restricciones que aparezcan como desigualdades, pueden convertirse en ecuaciones agregando (sumando o restando) una variable no negativa al primer miembro de la restricción. Estas nuevas variables se les llama genéricamente variables de holgura, y son sumadas si la restricción es (<=) o restadas en caso de ser (>=).

La forma estándar reduce el problema a un conjunto de m ecuaciones en m + n incognitas. Una solución a este sistema será de interés sólo si es factible, i.e., si satisface las restricciones de no negatividad x(j) >= 0, s(i) >= 0, ∀ i,j . La solución óptima está dada por la solución factible que maximiza z.

Esta idea presentada es simple, pero surge una dificultad, puesto que un sistema de m ecuaciones en m + n incógnitas generalmente tiene un número infinito de soluciones. Así pues, dado que es imposible determinar cada solución factible, es necesario tener un procedimiento que determine el óptimo después de checar un número finito de soluciones. El método simplex es un algoritmo iterativo que converge al óptimo (si existe) en un número finito de pasos. La forma estándar de un problema de programación lineal juega un papel muy importante en dicho método de solución.

- Representacion gráfica de un problema de programación lineal.

Para facilitar la comprensión del método de solución del problema general de programación lineal, se presenta un ejemplo de solución gráfica.

La idea de este método gráfico es determinar la región factible que definen las restricciones, y así poder encontrar el punto que maximice la función objetivo, el cual representa la solución óptima. De esta forma, se obtendrán las ideas claves para el desarrollo de la técnica algebraica que se emplea para resolver los problemas de programación lineal con más de dos variables, como son, en general, los problemas de la vida real.

Supóngase que se tiene el siguiente planteamiento, en forma canónica:

Ejemplo A-1.

$$\max \ z = 5\,x(1) + 3\,x(2)$$

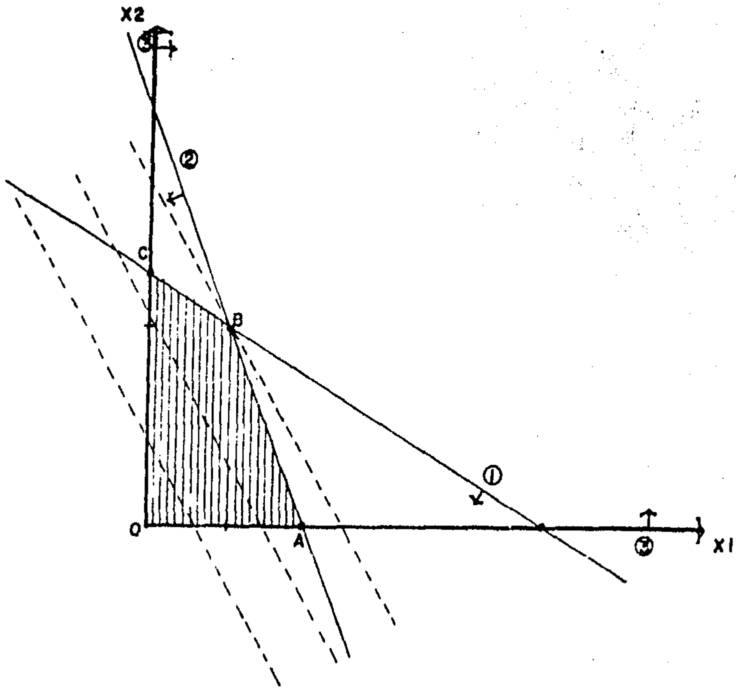
s.a

$$3\,x(1) + 5\,x(2) \leq 15$$

$$5\,x(1) + 2\,x(2) \leq 10$$

$$x(1),\ x(2) \geq 0$$

El espacio de soluciones factibles se grafica en el plano coordenado (x(1) , x(2)), como se muestra en la figura (A-1):



Las restricciones de no negatividad (3) indican que las soluciones factibles están limitadas al primer cuadrante, definido por x(1) >= 0 y x(2) >= 0. Cada una de las restricciones, (1) y (2), se determina primero cambiando el signo (<=) por (=), para tener ecuaciones, representadas por líneas rectas. La región en la cual se cumple la restricción se marca con una flecha desde su línea recta asociada. El espacio de soluciones factibles que resulta de estas restricciones está determinado por los puntos OABC. Cada punto en esta área satisface todas las restricciones. Por tanto, la solución óptima es aquél punto de esta región que produzca el máximo valor de z. También en la figura (A-1) está representada la función objetivo z = 4 x(1) + 3 x(2) para diferentes valores de z, de donde se observa en qué dirección se incrementa. Así, se tiene que si la función objetivo se incrementa más allá del punto B (i.e., z = 235 / 19), ya no pasará por ningún punto factible. Se ve, pues, que el óptimo para la función objetivo se da en el punto B (x(1) = 20 / 19, x(2) = 45 / 19), y al sustituir estos valores en tal función, se obtiene el valor óptimo:

$$zX = 5 (20 / 19) + 3 (45 / 19) = 235 / 19 = 12.36$$

Una observación de interés es que el valor máximo de z siempre se da en algunos de los vértices O, A, B, o C, del espacio de soluciones factibles. La elección de uno de estos puntos extremo como óptimo, depende de la pendiente de la función objetivo.

Se tiene entonces, que la búsqueda del óptimo se reduce a considerar solo un número finito de puntos factibles: los puntos extremos del espacio de soluciones. Una vez determinados estos puntos, el óptimo será aquél que produzca el mejor valor de la función objetivo.

Ahora se presenta brevemente el método simplex, que analiza sólo algunos puntos extremos, en forma selectiva.

METODO SIMPLEX

En el ejemplo gráfico analizado, se ha visto geométricamente que para determinar la solución óptima, sólo se necesita analizar los puntos extremos del espacio de soluciones factibles. Pero aún este procedimiento es ineficiente, ya que el número de soluciones básicas puede ser muy grande; si el problema es de m ecuaciones con n incógnitas, para determinar las soluciones básicas habrá que resolver $C(n,m) = n! / [m! (n-m)!]$ sistemas de ecuaciones simultáneas.

De todas estas soluciones básicas, un gran número pueden resultar infactibles o no existentes. Además, en esta situación, la función objetivo no es considerada, sino hasta que se han encontrado todas las soluciones básicas factibles.

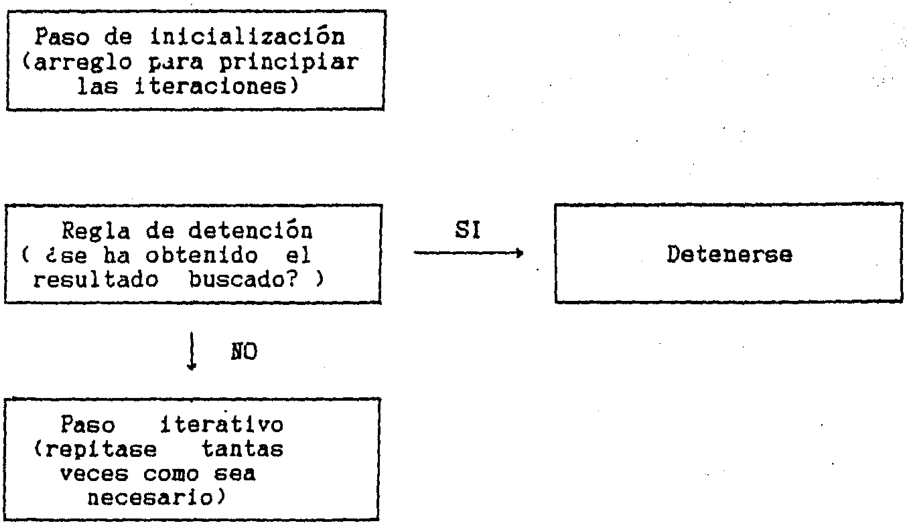
El método simplex ha sido diseñado de tal forma que supere estas ineficiencias. La metodología general consiste en iniciar con una solución básica factible (i.e., un punto extremo) y a partir de ahí, moverse sucesivamente a través de una serie de soluciones básicas factibles (no redundantes), de tal manera que cada nueva solución encontrada tenga la posibilidad de mejorar (o al menos no empeorar) el valor de la función objetivo.

La base de este método, que asegura la generación de tal serie de soluciones básicas, es un conjunto de condiciones fundamentales:

1. La condición de optimalidad asegura que no se encontrarán soluciones inferiores a la solución actual.

2. La condición de factibilidad garantiza que, iniciando con una solución básica factible, sólo se determinarán nuevas soluciones básicas factibles en el proceso.

La estructura general de este algoritmo es la siguiente:



El paso de inicialización consiste en obtener una solución básica factible inicial; el paso iterativo desplaza la solución básica factible actual a una solución básica adyacente (i.e., que sólo difiere en una variable básica) que sea mejor. Por la regla de detención se para el procedimiento una vez que no existe ninguna solución básica factible adyacente que sea mejor a la actual.

A continuación se presenta con más detalle cada una de estas partes del algoritmo:

Paso de inicialización.

Se plantea el problema en la forma estándar, introduciendo las variables de holgura s(i), que sean necesarias. Se seleccionan las variables de holgura como variables básicas iniciales y las variables originales se igualan a cero, manteniéndose así como variables no básicas iniciales.

Conviene usar una forma tabular para concentrar la información del problema. Esta forma de registrar los datos se conoce como cuadro simplex, en el cual se han de poner:

1. los coeficientes de las variables,

2. las constantes del segundo miembro de las ecuaciones, y

3. las variables básicas que aparecen en cada ecuación.

Esto evita escribir los símbolos de las variables en cada una de las ecuaciones, pero, lo que es más importante, permite resaltar los números que intervienen en los cálculos aritméticos, para registrarlos en forma compacta.

Como cada ecuación contiene sólo una variable básica, la cual tiene un coeficiente de +1, cada una de ellas es igual a la constante del segundo miembro de su ecuación. De aquí se pasa a la regla de detención, para determinar si esta solución es óptima.

Regla de detención.

La solución básica factible actual es óptima si, y sólo si, todo coeficiente en la función objetivo (primera ecuación de la tabla simplex) es no negativo. Si se cumple lo anterior, se ha llegado al óptimo con la solución actual; en otro caso, hay que continuar con el paso iterativo, para obtener así la nueva solución básica factible, lo que comprende el intercambiar una de las variables no básicas con una básica, y resolver a continuación para la nueva solución.

Paso Iterativo.

Parte 1. Se determina la variable básica que entra, seleccionando la variable con el menor coeficiente negativo (más grande en valor absoluto), en la ecuación correspondiente a la función objetivo. La columna determinada por esta variable se identifica como columna pivote.

Parte 2. Se determina la variable básica que sale, en la siguiente forma:

1. se selecciona cada coeficiente de la columna pivote que

sea estrictamente positivo (> 0);

2. se divide el segundo miembro de cada renglón, que corresponde a la solución básica actual, entre cada uno de estos coeficientes, de su mismo renglón;

3. se halla la ecuación que tenga la menor de estas razones, y,

4. se selecciona la variable básica asociada a esta ecuación.

El renglón correspondiente a esta variable se llama renglón pivote. El número pivote es aquél que está en la intersección de la columna pivote y el renglón pivote.

Parte 3. Se determina la nueva solución básica factible, construyendo una nueva tabla simplex. Para ello, se cambia la variable básica que sale por aquélla que entra en la solución, y se determinan los nuevos valores para el renglón pivote, dividiendo:

$$\text{nuevo renglón pivote} = \frac{\text{renglón pivote anterior}}{\text{número pivote}} \qquad \text{(A-4)}$$

Para eliminar la nueva variable básica de las otras ecuaciones, todos los renglones de la tabla, excepto el renglón pivote, se transforman, de acuerdo a:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{nuevo renglón} & = & \text{renglón anterior} & - & \text{coeficiente de la columna pivote} & X & \text{nuevo renglón pivote} \end{array} \quad (A-5)$$

en donde, el "coeficiente de la columna pivote", es el número en este renglón que está en la columna pivote.

Así se completa el paso iterativo, de modo que enseguida se regresa a la regla de detención para comprobar si la nueva solución es óptima.

Las condiciones de optimalidad y de factibilidad presentadas anteriormente, se pueden expresar en los siguientes términos:

- Condición de optimalidad: dada la función objetivo (primera ecuación de la tabla simplex), expresada sólo en términos de las variables no básicas, se selecciona la variable a entrar como la variable con el coeficiente más negativo (en el caso de buscar minimización se selecciona la más positiva). En caso de que exista empate entre dos variables no básicas, puede romperse arbitrariamente. Cuando todos los coeficientes de la función objetivo son no negativos (no positivos en caso de minimización), se ha llegado al óptimo.

- Condición de factibilidad: la variable que sale de lá base, es aquélla variable básica asociada a la menor razón de los valores actuales de las variables básicas, a los coeficientes positivos de las restricciones, correspondientes a la variable entrante. Los empates pueden romperse arbitrariamente.

Una vez completado este panorama del método simplex, es posible establecer los pasos de este procedimiento:

1. Expresar la forma estándar del problema de programación lineal, en la forma tabular simplex.

2. Seleccionar una solución básica factible inicial. Existen dos posibilidades:

2.1. Si todas las restricciones del problema original son del tipo (<=), las variables de holgura sirven como base inicial.

2.2. Si las restricciones del problema original incluyen relaciones de (>=) o (=), se empleará una técnica especial, llamada de "variables artificiales" para conseguir una base inicial. Más adelante se presenta esta técnica.

3. Generar una nueva solución básica factible, de acuerdo a las condiciones de optimalidad y de factibilidad, así como las transformaciones definidas en (A-4) y (A-5), hasta que se obtenga la solución óptima. Este paso asume que tal solución existe y es acotada. Los casos cuando no suceda así, serán analizados posteriormente.

Ahora se presenta un ejemplo, donde se ve claramente la aplicación del algoritmo simplex.

Ejemplo A-2. Resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\max \quad z = x(1) + 9\, x(2) + x(3)$$

s.a.

$$x(1) + 2\, x(2) + 3\, x(3) < 9$$
$$3\, x(1) + 2\, x(2) + 2\, x(3) < 15$$

$$x(i) > 0 \,, \quad i = 1,2,3$$

Solución.

Se plantea este problema en la forma estándar:

$$\max \quad z = x(1) + 9\, x(2) + x(3)$$

s.a.

$$x(1) + 2\, x(2) + 3\, x(3) + s(1) = 9$$
$$3\, x(1) + 2\, x(2) + 2\, x(3) + s(2) = 15$$

$$x(i),\ s(j) > 0 \quad \forall\ i = 1,2,3;\ j = 1,2.$$

A partir de esta forma, se puede establecer la tabla simplex. Para ello, se iguala la funciói objetivo a cero, quedando:

$$z - x(1) - 9\, x(2) - x(3) = 0$$

Tabla Simplex I.

variables básicas	z	x(1)	x(2)	x(3)	s(1)	s(2)	solución
z	1	-1	-9	-1	0	0	0
s(1)	0	1	2	3	1	0	9
s(2)	0	3	2	2	0	1	15

La variable con el coeficiente más negativo es x(2), por ello, es la variable a entrar (columna pivote).

Para determinar la variable básica a salir, se hace:

variable	columna pivote	solución	razón: solución/col.pivote
s(1)	2	9	9/2 = 4.5
s(2)	2	15	15/2 = 7.5

puesto que s(1) tiene la menor de estas razones, es la variable a salir; así mismo, esta variable determina el renglón pivote. El número pivote es, entonces, aquél que está en la intersección de la columna x(2) y el renglón s(1), es decir, 2.

Aplicando las transformaciones necesarias, se obtiene la siguiente tabla:

Tabla Simplex II.

variables básicas	z	x(1)	x(2)	x(3)	s(1)	s(2)	solución
z	1	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2
x(2)	0	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
s(2)	0	2	0	-1	-1	1	6

Dado que la ecuación z no tiene coeficientes negativos, se ha llegado a la solución óptima, con los siguientes resultados: $x(2)* = 9/2$, $s(2)* = 6$, $x(1)* = x(3)* = s(1)* = 0$, $z* = 81/2$.

Una vez comprendidos los aspectos generales del método simplex, así como su forma de operación es posible continuar con los casos especiales de solución.

Al presentar el algoritmo simplex, se vió que en el caso de que existan en el planteamiento estándar de un problema, una o más restricciones del tipo (>=) o (=), hay que recurrir a una técnica especial, llamada de "variables artificiales", para obtener una solución básica inicial. En este caso, existen dos métodos que resuelven esta dificultad.

1. El método de las M's o de las penalidades.

2. El método de las dos fases.

A continuación se presenta cada uno de ellos:

1. El método de las M's.

Los pasos de esta técnica son los siguientes:

1.1 Expresar el problema en la forma estándar.

1.2 Sumar variables no negativas en el primer miembro de cada una de las ecuaciones correspondientes a restricciones del tipo (>=) o (=). Estas variables se denominan "variables artificiales" y el sumarlas implica una violación de la restricción correspondiente, a menos que se mantengan a nivel cero en la solución final, si es que ésta existe (si el problema nó tiene solución, al menos una de estas variables artificiales aparecerá en la solución final a nivel positivo). Esto se logra asignando un coeficiente muy grande a estas variables en la función objetivo, de tal manera que resulten penalizadas. El coeficiente asignado será -M para problemas de maximización y +M para minimización, con M >> 0.

1.3 Considerar las variables artificiales dentro de la solución básica inicial. Sin embargo, para integrar la tabla simplex correspondiente, hay que expresar la función objetivo en términos de las variables no básicas solamente. Esto significa que las variables artificiales deben tener coeficiente igual a cero en esta ecuación. La forma de lograrlo, es sumando múltiplos adecuados de las restricciones correspondientes, a la función objetivo:

$$\text{nueva ecuación } z = \text{ecuación } z \text{ anterior} + \sum_i M \; X \; \text{ecuación } Ri$$

donde Ri representa a cada variable artificial agregada al problema.

1.4 Continuar con los pasos normales del método simplex.

Las variables artificiales sólo proveen un medio para obtener una solución inicial. El efecto de estas variables en la solución final (si existe) se cancela por la alta penalidad que se les impone en la función objetivo. Esto clarifica el uso del término "artificial" para tales variables, ya que son ficticias y no tienen una interpretación física en términos del problema original.

2. El método de las dos fases.

Un gran inconveniente del método de las M's, es el posible error en cálculos, que puede resultar de tomar un valor muy grande para la constante M. Así, puede resultar que debido a errores de aproximación o redondeo, la solución se vuelva insensible a los valores relativos de algunos coeficientes de la función objetivo original, pudiendo llegar a considerarlas como iguales, aún cuando no lo sean en el planteamiento original.

Para evitar tal problema, este nuevo método elimina el uso de la constante M, resolviendo el problema en dos fases:

Fase 1. Se formula un nuevo problema, remplazando la función objetivo original por una nueva función objetivo, igual a la suma de las variables artificiales introducidas. Esta nueva función objetivo es minimizada, sujeta a las restricciones del problema original. Si el problema tiene un espacio de soluciones factibles, entonces el valor mínimo de la nueva función objetivo será cero, asegurando así que todas las variables artificial s son nulas. En este caso se procede a la Fase 2.

Si por el contrario, el valor mínimo es mayor que cero, se termina el algoritmo, pues el problema no tiene solución factible.

Fase 2. Se usa la solución básica óptima de la Fase 1 como una solución básica inicial del problema original. En este caso, la función objetivo original debe ser reexpresada en términos de las variables no básicas, exclusivamente.

En esta fase, las variables artificiales pueden ser eliminadas de la nueva tabla simplex, si terminaron como no básicas en la Fase 1. Pueden existir casos en que una variable artificial sea básica, pero a nivel cero; en este caso, la variable artificial debe emplearse en la solución inicial de la Fase 2, pero se debe vigilar, de tal forma que no se haga positiva en alguna iteración posterior.

CASOS ESPECIALES DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

Existen algunos casos excepcionales que pueden surgir al intentar resolver un problema de programación lineal y que deben tomarse en cuenta dentro de un método de solución general como lo es el método simplex.

A continuación se analizan estos casos especiales, así como su tratamiento desde el punto de vista del algoritmo. Tales casos son:

1. Soluciones no acotadas.

2. Soluciones óptimas alternativas.

3. Inconsistencia del problema.

4. Degeneración.

1. Soluciones no acotadas.

Este caso sucede cuando el espacio de soluciones es no acotado, en forma tal que la función objetivo pueda incrementarse tanto como se desee. Sin embargo, no basta que el espacio de soluciones sea no acotado para que la solución sea infinita. El factor determinante en este caso viene a ser la función objetivo, ya que depende de su inclinación el que exista un óptimo.

En general, es posible detectar una solución no acotada en una tabla simplex, cuando cualquiera de los candidatos a entrar a la base tiene todos los coeficientes de las restricciones negativos o iguales a cero.

2. Soluciones óptimas alternativas.

Cuando la función objetivo es paralela a una de las restricciones (i.e., cuando una restricción se satisface en forma de igualdad por la solución óptima), la función objetivo puede asumir el mismo valor en más de una solución básica. Estas reciben el nombre de soluciones básicas alternativas. Además, cualquier combinación convexa de las mismas también es solución óptima, que se conoce como solución alternativa no básica. Esto implica que el problema tiene un número infinito de soluciones, cada una de las cuales produce el mismo valor de la función objetivo.

Tal situación puede detectarse en la tabla simplex, correspondiente al valor óptimo, cuando existe una variable no básica con coeficiente cero en la ecuación z. Esta variable puede hacerse básica, obteniendo así una solución básica alternativa. La familia de soluciones óptimas alternativas está dada en base a:

Supóngase que el problema tiene p soluciones básicas óptimas alternativas: (x(1,i),x(2,i),...,x(m,i)), i=1,2,...,p; entonces la familia se expresa matemáticamente como:

$$x(1)' = \sum_{i=1}^{p} L(i)x(1,i) \;;\ldots;\; x(m)' = \sum_{i=1}^{p} L(i)x(m,i)$$

donde:

$$0 <= L(i) <= 1,$$

$$\sum_{i=1}^{p} L(i) = 1$$

3. Inconsistencia del problema.

Ocurre cuando el problema es tal, que no existe ningún punto que pueda satisfacerse por todas las restricciones. En este caso, el espacio de soluciones es vacio y el problema no tiene solución factible. Dicha situación se detecta en la tabla simplex, cuando se llega a la solución final y existen variables artificiales a nivel positivo.

Aún cuando, aparentemente, se termina el simplex con una solución óptima, según el criterio de optimalidad, pero esta no es real, pues no satisface todas las restricciones; tal solución es llamada seudo-óptima.

Es importante anotar que pueden existir casos en que las restricciones sean consistentes (formen un espacio de soluciones no vacío), pero que no exista solución óptima, por no satisfacerse las restricciones de no negatividad en tal espacio.

4. Degeneración.

Al presentar el algoritmo simplex se mencionó que un empate al seleccionar las variables a salir, se podía romper arbitrariamente. Sin embargo, en la siguiente iteración del algoritmo, puede ser que una o más variables básicas se hagan iguales a cero, en cuyo caso se dice que la solución actual es degenerada. Si sucede esto, no es seguro que el valor de la función objetivo se mejore, puesto que las nuevas soluciones pueden permanecer degeneradas. Así, es posible que las iteraciones del simplex entren en un ciclo, que repita una serie de soluciones, sin llegar a la solución óptima. Este problema se llama "ciclaje", pero afortunadamente, es muy raro encontrarlo en la práctica, y existen métodos para manejar tales casos.

Además de este problema, la existencia de degeneración en alguna iteración del simplex puede hacer dudable la terminación del algoritmo, ya que es posible que el valor de la función objetivo no se mejore. Sin embargo, existen casos en que surge la degeneración temporalmente, y luego desaparece; por ello, cuando se presente este caso, se ha de continuar hasta satisfacer la condición de optimalidad.

DUALIDAD

Todo problema de programación lineal, tiene asociado un segundo problema. Uno se llama el "problema primal" y el otro el "problema dual". Ambos poseen propiedades muy relacionadas, de tal forma que la solución óptima de un problema, da información completa sobre la del otro.

Ahora se definirá al problema dual, cuando el primal está en cada una de las formas introducidas anteriormente:

1. Forma canónica

2. Forma estándar

1. Problema dual de un primal en forma canónica.

Considérese el siguiente problema de programación lineal en forma canónica:

$$\max \quad z \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} c(j)\ x(j)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)\ x(j) \ <= \ b(i) \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

$$x(j) \ >= \ 0 \quad , \quad j=1,2,\ldots,n$$

entonces, su problema dual asociado, está dado por:

$$\min \quad y \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} b(i) \quad y(i)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{m} a(i,j)\ y(i) \ >= \ c(i) \quad , \quad j=1,2,\ldots,n$$

$$y(i) \ >= \ 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

donde y(1),...,y(m) son las variables duales.

Se tiene pues, que el problema dual (en forma canónica), puede construirse a partir del primal (y viceversa), de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Cada restricción de un problema, corresponde a una

variable en el otro problema.

2. Los elementos del lado derecho de las restricciones de un problema, son los coeficientes respectivos de la función objetivo del otro problema.

3. Un problema busca maximizar y el otro minimizar.

4. El problema de maximización tiene restricciones de tipo (<=), y en el de minimización son de tipo (>=).

5. Las variables en ambos problemas son no negativas.

2. Problema dual de un primal en forma estándar.

En este caso, se sigue el mismo procedimiento general, empleado para la forma canónica, sólo que, cada variable dual asociada a una restricción de igualdad en el primal, es no restringida en signo. De forma análoga, cuando una variable primal es no restringida en signo, su restricción dual correspondiente debe expresarse como una ecuación.

A continuación se presentan algunos teoremas que sirven de base para obtener importantes resultados acerca de la relación primal-dual.

Teorema débil de dualidad.

Si x^* e y^* son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente, entonces $z^* \leq w^*$

donde:

$$
\begin{array}{lrl}
(P): & \max & z = c\,x \\
 & \text{s.a.} & A\,x \leq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
(D): & \min & w = b'y \\
 & \text{s.a.} & A'y \geq c' \\
 & & y \geq 0
\end{array}
$$

Demostración.

Sea x^* solución factible de (P)

entonces

$$
\left.
\begin{array}{r}
A\,x^* \leq b \\
x^* \geq 0
\end{array}
\right. \qquad (1)
$$

Sea y^* solución factible de (D)

entonces

$$
\left.
\begin{array}{r}
y^* A \geq c \\
y^* \geq 0
\end{array}
\right. \qquad (2)
$$

multiplicando (1) por y^* :

$$y^* A\,x \leq y^* b$$

y, como

$$y^* \, b \; = \; w^*$$

resulta que:

$$y^* A \, x^* \; <= \; w^* \qquad (3)$$

Ahora se multiplica (2) por x^* :

$$y^* A \, x^* \; >= \; c \, x^*$$

y como

$$c \, x^* \; = \; z^*$$

se obtiene

$$y^* A \, x^* \; >= \; z^* \qquad (4)$$

De (3) y (4), se llega finalmente a que:

$$z^* \; <= \; w^* \qquad \text{q.e.d.}$$

Corolario.

Dados (P) y (D), definidos anteriormente, y x^*, y^* sus soluciones óptimas respectivamente:

a) $y(j)^* > 0$ implica $A(j) \, x^* = b$

b) $A(j) \, x > b$ implica $y^* = 0$

c) $x(j)^* > 0$ implica $A'(j) \, y^* = c'$

d) $A'(j) \, y^* < c'$ implica $x(j)^* = 0$

Teorema del criterio de optimalidad.

Si existen xI , yI soluciones factibles de (P) y (D) definidos anteriormente, tales que:

$$zI = wI$$

entonces xI , yI son soluciones óptimas.

Demostración.

Sea xI solución factible de (P)

entonces:

$$A\ xI \geq b , \qquad xI \geq 0$$

se tiene, pues, que:

$$zI = c\ xI = wI = yI\ b$$

Sea x(1) otra solución factible de (P)

entonces:

$$A\ x(1) \leq b, \quad x(1) \geq 0$$

pero, por el teorema anterior:

$$c\ x(1) < yI\ b$$

y como:

$$yI\ b = c\ xI$$

implica que:

$$c\ x(1) \leq c\ xI$$

$\therefore$ x^* es solución óptima de (P)

Sea y^* solución factible de (D)

entonces:

$$y^* A \geq c \;, \quad y^* \geq 0$$

sea $y(1)$ cualquiera otra solución factible de (D)

entonces:

$$y(1)\, A \geq c \;, \quad y(1) \geq 0$$

y, por el teorema anterior, se tiene que:

$$c\, x^* \leq y(1)\, b$$

y como:

$$y^* b = c\, x^*$$

implica que:

$$y^* b \leq y(1)\, b$$

$\therefore$ y^* es solución óptima de (D)

Teorema de las holguras complementarias.

Sean x^*, y^* soluciones factibles de (P) y (D), definidos anteriormente,

$$x^*,\ y^* \text{ son óptimas}$$

$\iff$

$$(y^* A - c)\, x^* + y\, (b - A\, x^*) = 0$$

Demostración.

Sean u(mx1) y v(1xn), los vectores de holgura asociados a P) y a (D), respectivamente,

entonces, se tiene que:

$$A x^* + u^* = b, \quad x^*, u^* >= 0 \qquad (1)$$

$$y^* A - v^* = c, \quad y^*, v^* >= 0 \qquad (2)$$

multiplicando (1) por y^*, se obtiene:

$$y^* A x^* + y^* u^* = y^* b \qquad (3)$$

y análogamente, se multiplica (2) por x^* :

$$y^* A x^* - v^* x^* = c x^* \qquad (4)$$

restando (4) de (3):

$$y^* u^* + v^* x^* = y^* b - c x^* \qquad (5)$$

=>) sean x^*, y^* óptimos

entonces:

$$z^* = w^*$$

y se tiene que (5) queda como:

$$y^* \, u^* + v^* \, x^* = 0$$

ahora bien, como:

$$u^* = b - A \, x^* \quad , \text{ de } (1)$$

$$v^* = y^* A - c \quad , \text{ de } (2)$$

$$\therefore \quad y^* (b - A \, x^*) + (y^* A - c) \, x^* = 0$$

(=) si

$$(y^* A - c) \, x^* + y^* (b - A \, x^*) = 0$$

entonces,

$$y^* A \, x^* - c \, x^* + y^* b - y^* A \, x^* = 0$$

es decir,

$$-c \, x^* + y^* b = 0$$

y, por tanto:

$$c \, x^* = y^* b$$

$\therefore$ x^* , y^* son soluciones óptimas.

Corolario.

Dados (P) y (D) definidos anteriormente, y x^*, y^* sus soluciones óptimas, respectivamente, se tienen las siguientes propiedades:

a)	si	$(Ax^* - b) = 0$	entonces	$y^* > 0$
b)	si	$y^* = 0$	entonces	$Ax^* - b > 0$
c)	si	$(c' - A'y^*) = 0$	entonces	$x^* > 0$
d)	si	$x^* = 0$	entonces	$c' - A'y^* > 0$

Algunas propiedades Primales - Duales.

Ahora se presentan algunas propiedades importantes, que destacan la relación que existe entre los dos problemas estudiados.

Propiedad 1. Relación entre los valores óptimos de las variables en el primal y el dual.

La solución óptima del primal (dual) permite obtener directamente la del dual (primal), según la siguiente regla:

Si una variable del problema primal se usa como variable básica inicial, y su coeficiente en la función objetivo original es c(j), entonces, el valor óptimo de la correspondiente variable dual se obtiene sumando c(j) al coeficiente correspondiente de la ecuación de x^*, en la tabla óptima del problema primal.

Propiedad 2. En cualquier iteración de la solución simplex (del primal o del dual), la submatriz debajo de las variables de la solución inicial (sin incluir el renglón de la función objetivo), puede usarse para generar los coeficientes de la ecuación objetivo correspondientes a las variables básicas iniciales, de acuerdo a:

Paso 1. Identificar los coeficientes originales de la función objetivo, correspondientes a las variables básicas de la iteración actual y formar un vector columna en el mismo órden de sus respectivas filas en la tabla simplex.

Paso 2. Obtener los "multiplicadores simplex", multiplicando el vector resultante, por la submatriz empleada antes ("debajo de las variables básicas iniciales").

Paso 3. Restar los coeficientes originales de la función objetivo, correspondientes a las variables básicas iniciales, de los respectivos coeficientes obtenidos en el paso 2, llegándose así al resultado.

En la iteración final (optima), los multiplicadores simplex dan directamente la solución al otro problema.

Propiedad 3. En cualquier iteración de la solución simplex, sustituyendo los multiplicadores simplex correspondientes por las variables respectivas en las restricciones duales, los coeficientes de la ecuación xI en el primal, están dados por las diferencias entre el miembro izquierdo y el derecho de las correspondientes restricciones duales. Esta propiedad también se aplica para generar los coeficientes de la ecuación yI a partir de las restricciones primales.

De esta propiedad, se obtienen los siguientes resultados:

Un coeficiente negativo en la ecuación xI de (P) implica que la solución no es óptima. Como este coeficiente representa la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de las restricciones duales, ésto indica que tal restricción no se satisface. Así pues, cuando el primal no es óptimo, el dual es infactible y viceversa.

Puesto que el coeficiente de una variable básica es cero en la ecuación xI, la diferencia entre ambos miembros de la restricción dual asociada debe ser cero. Entonces, la restricción dual correspondiente a una variable básica primal, debe satisfacerse en forma de ecuación.

Se puede concluir: el problema (P) empieza factible pero no óptimo y llega a una solución óptima manteniéndose factible, mientras que (D) empieza "más que óptimo" pero infactible, y continua así hasta que se alcanza el óptimo real, i.e., el primal busca optimalidad y el dual busca factibilidad.

Esta proposición también da una interpretación interesante de las variables duales.

Considérese la j-ésima restricción dual, de un problema (P) de maximización; esta se expresa como:

$$a(1,j)\ y(1) + a(2,j)\ y(2) + \ldots + a(m,j)\ y(m) \ \geq \ c(j)$$

donde $a(i,j)$ es el requerimiento por unidad de la j-ésima variable primal $x(j)$ del i-ésimo recurso escaso y $c(j)$ es el coeficiente de $x(j)$ en la función objetivo.

Sea:

$$z(j) = a(1,j)\ y(1) + a(2,j)\ y(2) + \ldots + a(m,j)\ y(m)$$

entonces, por la proposición 2, $z(j) - c(j)$ da el coeficiente de $x(j)$ en la ecuación xI.

De acuerdo al criterio de optimalidad, $x(j)$ es una variable "prometedora" si $z(j) - c(j) < 0$. Como éste es un caso de maximización de (P), $c(j)$ debe verse como "utilidad", mientras que $z(j)$ (con signo contrario) debe verse como "costo". Así, mientras menor sea $z(j)$, más atractiva será $x(j)$.

Desde el punto de vista económico $z(j)$ se ve como el "precio imputado" por unidad de $x(j)$. La variable dual $y(i)$ da el valor por unidad del requerimiento $a(i,j)$.

Propiedad 4. En cualquier iteración del primal o del dual, los valores correspondientes a las variables básicas, pueden obtenerse multiplicando la matriz definida en la propiedad 1 (la submatriz formada por las variables básicas iniciales, obtenida en tal iteración), multiplicada por el vector original de términos independientes.

Propiedad 5. En cualquier iteración de (P) o (D), los coeficientes de las restricciones bajo cualquier variable (incluyendo las de la solución inicial) pueden obtenerse multiplicando la submatriz formada por las variables básicas iniciales, obtenida en tal iteración, por el vector columna de los coeficientes originales de las restricciones correspondientes a tal variable.

En conclusión de las 4 últimas propiedades: en cualquier iteración, dado el problema original, todos los elementos de la tabla simplex, pueden generarse a partir de la submatriz debajo de la solución inicial.

B I B L I O G R A F I A

Asociación Mexicana de Casas de Bolsa
"MANUAL DE SOCIEDADES DE INVERSION DE RENTA FIJA"
Asociación Mexicana de Casas de Bolsa, 1982

Bazaraa, J. y Jarvis, J.
"PROGRAMACION LINEAL Y FLUJO EN REDES"
Limusa, 1981

Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V.
"ANUARIO FINANCIERO Y BURSATIL 1984"
Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V., 1985

Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V.
"INFORMACION BURSATIL 1983"
Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V., 1984

Burdet, Charles y García Azcué, Ida
"LA PROBLEMATICA DEL AHORRO Y
LAS SOCIEDADES DE INVERSION EN MEXICO"
Asociación Mexicana de Casas de Bolsa, 1983

Coates, C. Robert
"INVESTMENT STRATEGY"
Mc. Graw Hill, 1981

Comisión Nacional de Valores
"LEY DEL MERCADO DE VALORES Y LEY DE SOCIEDADES DE INVERSION"
Comisión Nacional de Valores, 1985

Academia Mexicana de Derecho Bursátil, A.C.
"CIRCULARES DE LA COMISION NACIONAL DE VALORES"
Academia Mexicana de Derecho Bursátil, A.C., 1985

Darst, David M.
"THE HANDBOOK OF THE BOND AND MONEY MARKETS"
Mc. Graw Hill, 1981

Domínguez, Manuel; De La Barra, Jorge y Rodríguez, Carlos
"EL EFECTO DEL PETROBONO EN LA EFICIENCIA
DE UNA CARTERA DE INVERSION"
Tesis I.T.A.M., 1982

Fisher, L. y Lorie, J.
"SOME STUDIES OF VARIABILITY OF RETURNS ON INVESTMENTS
IN COMMON STOCKS"
Journal of Bussines, 1970

Ford, L. y Fulkerson, D.
"FLOW IN NETWORKS"
Princeton University Press, 1962

Gass, Saul I.
"LINEAR PROGRAMMING"
Mc. Graw Hill, 1969

Hadley, G.
"LINEAR PROGRAMMING"
Addison-Wesley Publishing Co., 1962

Hernández Vivar, Luis I.
"ASIGNACION Y DESPACHO DE UNIDADES HIDROELECTRICAS Y
TERMOELECTRICAS PARA LA OPTIMIZACION DEL COSTO DE
OPERACION EN EL SISTEMA ELECTRICO NACIONAL"
Tesis U.N.A.M., 1985

Hillier, F. y Lieberman, G.
"INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES"
Mc. Graw Hill, 1982

Lagunilla Iñarritu, Alfredo
"LAS SOCIEDADES DE INVERSION. PANORAMA INTERNACIONAL.
EL CASO DE MEXICO"
1969

Levin, R. y Kirkpatrick, C.
"QUANTITATIVE APPROACHES TO MANAGEMENT"
Intenational Student Editions, 1978

Multibanco Comermex, S.A.
"CURSO AVANZADO DE PLANEACION FINANCIERA"
Multibanco Comermex, S.A., 1978

Prawda, Juan
"METODOS Y MODELOS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES"
Volumen I Modelos Determinísticos
Limusa, 1979

Sharpe, William F.
"INVESTMENTS"
Prentice-Hall, Inc., 1981

Sharpe, William F.
"PORTFOLIO THEORY AND CAPITAL MARKETS"
Mc. Graw Hill, 1970

Taha, Hamdy A.
"OPERATIONS RESEARCH. AN INTRODUCTION"
Collier Macmillan International Editions, 1976

Uribe Iriestra, María F.
"LAS SOCIEDADES DE INVERSION EN MEXICO"
Tesis U.N.A.M., 1981