



103  
2504

# Universidad Nacional Autónoma de México

---

---

FACULTAD DE INGENIERIA  
División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica

CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS DINAMICOS  
EN TUNELES PARALELOS

## Tesis Profesional

Elaborada para Obtener el Título de  
INGENIERO CIVIL  
POR

GABRIEL MACEDO GOMEZ

México, D. F.

Mayo - 85



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **RESUMEN**

<b>1.</b>	<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>FORMULACION DEL PROBLEMA</b>	<b>5</b>
<b>3.</b>	<b>SOLUCION NUMERICA</b>	<b>8</b>
<b>4.</b>	<b>CONCENTRACION DE ESFUERZOS DINAMICOS</b>	<b>13</b>
<b>5.</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>17</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>22</b>
<b>7.</b>	<b>RECONOCIMIENTO</b>	<b>26</b>
<b>8.</b>	<b>REFERENCIAS</b>	<b>27</b>

## **FIGURAS**

## RESUMEN

Se presenta un análisis teórico del comportamiento dinámico de túneles paralelos ante incidencia de ondas armónicas SH. El problema se formula como uno de difracción múltiple de ondas elásticas en un espacio completo. Se aplica el método de desarrollo en funciones de onda en combinación con el teorema de adición de Graf y se hace uso de la ortogonalidad de las funciones trigonométricas para resolver el problema de manera exacta.

Se presentan algunos resultados pretendiendo establecer cuál o cuáles de los parámetros estudiados, frecuencia, ángulo de incidencia separación entre túneles y radio de los mismos, resultan ser relevantes en el comportamiento dinámico de túneles paralelos.

## 1. INTRODUCCION

En muchas obras de ingeniería civil es imprescindible el uso de túneles. Como ejemplo basta mencionar las conducciones de aprovechamiento hidráulicos e hidroeléctricos y los túneles para sistemas de transporte subterráneo. Además se han desarrollado nuevos procedimientos constructivos para este tipo de obras, por lo que se ha incrementado su número en los últimos años.

Aún cuando las intensidades sísmicas que puedan esperarse sean menores que en la superficie (8), los altos costos involucrados, tanto en la obra misma como en las consecuencias de una posible falla, hacen necesaria la cuantificación de los movimientos y concentraciones dinámicas de esfuerzos que se originan por la presencia de una o varias cavidades.

Se han desarrollado estudios analíticos para definir factores de concentración de esfuerzos en cavidades cilíndricas ante incidencia de ondas  $P(1,2)$ , fig 1. En ellos se supone que el túnel se encuentra en un espacio elástico de extensión infi-

nita, es decir, no se consideran los efectos de reflexión en una frontera libre ni los efectos que pueda producir una cavidad paralela. Los efectos de reflexión de frontera libre han sido tomados en cuenta para calcular concentraciones de esfuerzos en un cañón semicircular (7) fig 2, en túneles con o sin recubrimiento (4,5) figs 3 y 4 ante incidencia de ondas planas SH; más adelante se comentará brevemente acerca de los métodos que emplean los diferentes autores.

En este escrito se analiza el comportamiento dinámico de un túnel cuando existe otro en la proximidad. Las concentraciones relativas de esfuerzos para bajas frecuencias son ligeramente mayores que la solución estática pero tiende a valores menores para altas frecuencias (1).

Mediante el empleo de técnicas de la fotoelasticidad dinámica se han encontrado patrones de concentración de esfuerzos (9,10) y en algunos problemas transitorios el uso de soluciones estáticas para concentraciones de esfuerzos aplicados a los esfuerzos de campo libre conduce a buenas aproximaciones de las concentraciones dinámicas, por ejemplo la solución de Kirsch para el caso de ondas P (1,2,13). Esta aproximación mejorará en la medida en que predominen grandes longitudes de onda.

El diseño dinámico de túneles está regido por consideraciones sobre la propagación de ondas de compresión o de cortante paralela al eje del túnel fig 6. Así, para algunos tipos de túneles, se han obtenido soluciones aproximadas para valuar esfuerzos en el recubrimiento (10,11,12). Para excitación transversal de ondas P se han encontrado aproximaciones semejantes (10).

Entre los métodos que han empleado algunos autores para tratar el fenómeno de difracción de ondas planas SH en medios elásticos, en problemas como los ya mencionados, tenemos lo siguiente: Lee y Trifunac (3) resuelven el problema de una cavidad con recubrimiento en un semiespacio bajo incidencia de ondas de cortante polarizadas en dirección del eje del túnel, ondas SH si el túnel es horizontal, utilizando el método de imágenes y desarrollo en serie, fig 5. Sánchez-Sesma y Esquivel (5) resuelven el mismo problema utilizando otro método, basado en una representación integral del campo de desplazamientos, donde las condiciones de frontera se satisfacen en puntos discretos, fig 4; Now y Pao (2) presentan el análisis para el problema de una intrusión en un medio elástico, homogéneo e isotropo ante incidencia de ondas P, SV y SH y utilizando los métodos de desarrollo en serie, de la ecuación integral y de la transformada integral; los dos primeros ya mencionados anteriormente. Algunos de sus resultados se presentan en la fig 1.

En este trabajo se estudia la interacción dinámica de dos o más túneles ante incidencia de ondas armónicas SH. El método que se emplea es el de desarrollo en funciones de onda, que consiste en resolver la ecuación de onda con el método de separación de variables y expresar su solución mediante expansiones en serie de funciones de Hankel junto con funciones trigonométricas (6). Así, con la solución en términos de funciones trigonométricas es posible cumplir exactamente las condiciones de frontera, tracciones nulas en la periferia de las cavidades, debido a las propiedades de ortogonalidad de dichas funciones.

En los capítulos siguientes se presentan la formulación del problema, la solución numérica y se muestran los resultados que se obtienen al reducir a una dimensión finita los sis

temas infinitos de ecuaciones simultáneas que resultan al satisfacer las condiciones de frontera en cada una de las cavidades; en el capítulo 4, Concentración de Esfuerzos Dinámicos, se define el Factor de Concentración de Esfuerzo Dinámico, FCED que es utilizado para representar el nivel de esfuerzos en la periferia de cada cavidad como una fracción del esfuerzo máximo producido en un espacio completo durante el paso de ondas armónicas SH cuando estas cavidades no existen. Los resultados obtenidos a partir de un cierto valor del número de términos de las series no varían significativamente, es decir, las series convergen rápidamente, siendo el valor de 7 términos el que se utilizó para generar los resultados. Algunos resultados se presentan utilizando coordenadas polares. En la fig 8 se muestran resultados así obtenidos; son prácticamente los mismos que los que presenta la ref 2.

Este trabajo tiene la intención de introducir al lector al problema de interacción dinámica entre túneles, así como hacerle ver que este fenómeno puede traer consigo consecuencias desfavorables en cuanto a la seguridad de los mismos. Se tiene presente que el análisis se está efectuando con ondas planas del tipo SH, que son más fáciles de manejar que las ondas P, siendo estas últimas las más desfavorables por los esfuerzos que pueden generar en el túnel. No obstante, el análisis que aquí se presenta puede ser indicativo de lo que ocurriría al considerar ondas P. El método de análisis sería esencialmente el mismo, salvo por el aumento de la complejidad de las expresiones. De todas formas con este análisis se podrá tener una idea más concreta del fenómeno de propagación de ondas cerca de túneles paralelos y sus consecuencias.

## 2. FORMULACION DEL PROBLEMA

En un espacio completo, elástico lineal, isótropo y homogéneo la propagación de ondas armónicas SH provoca desplazamientos  $w$  en la dirección de  $z$  (fig 6) que satisfacen la ecuación reducida de onda o ecuación de Helmholtz (14):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0 \quad (1)$$

donde  $k = \omega/\beta =$  número de onda de cortante,  $\omega =$  frecuencia circular,  $\beta = \sqrt{\mu/\rho} =$  velocidad de propagación de ondas de cortante,  $\mu =$  módulo de cortante y  $\rho =$  densidad del medio.

El problema consiste en determinar  $w$ , solución de la ecuación (1), que satisfaga la condición de frontera libre en la superficie de las perforaciones hechas en el espacio; dicha condición está dada para la  $p$ -ésima perforación por

$$\tau_{rz}(r_p, \theta_p) \Big|_{r_p = a_p} = \mu \frac{\partial w(r_p, \theta_p)}{\partial r_p} \Big|_{r_p = a_p} = 0 \quad (2)$$

$$0 \leq \theta_p \leq 2\pi$$

$$p = 1, 2, \dots, NP$$

donde  $\tau_{rz}$  = esfuerzo cortante,  $a_p$  = radio de la p-ésima perforación,  $r_p, \theta_p$  = coordenadas cilíndricas en la p-ésima perforación y NP = número de perforaciones en el medio.

Considérese que la excitación consiste en una onda plana SH de amplitud  $w_0$  con ángulo de incidencia  $\Psi$  (fig 7). Si no hay obstrucciones en el espacio, la solución de campo libre en el sistema de coordenadas  $(X_1, Y_1)$  está dada por

$$w^i(X_1, Y_1) = w_0 \exp[-ik(X_1 \cos \Psi + Y_1 \sin \Psi)] e^{i\omega t} \quad (3)$$

donde la dependencia del tiempo está dado por el factor  $e^{i\omega t}$ . Por sencillez se omitirá a lo largo del trabajo.

La solución se construirá, de acuerdo con el principio de superposición, como

$$w = w^i + w^r \quad (4)$$

donde  $w^r$  = desplazamiento provocado por las ondas difractadas por las perforaciones, el cual podemos escribir como

$$w^r = \sum_{j=1}^{NP} w_j^r(r_j, \theta_j) \quad (5)$$

donde  $w_j^r(r_j, \theta_j)$  = desplazamiento producido por las ondas difractadas por la  $j$ -ésima perforación en el sistema coordinado  $(r_j, \theta_j)$ .

Empleando el método de separación de variables (1, 15), los desplazamientos producidos por las ondas difractadas por la  $j$ -ésima perforación pueden ser representados por

$$w_j^r(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(kr_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(kr_j) \sin n\theta_j \quad (6)$$

donde  $A_n^j$  y  $B_n^j$  son coeficientes complejos desconocidos que se determinan a partir de la ec 2 y  $H_n^{(2)}(.)$  = función de Hankel de segunda especie y orden  $n$ , la cual satisface la condición de irradiación de Sommerfeld (15) al infinito.

Con la determinación de los coeficientes complejos  $A_n^j$  y  $B_n^j$  el campo de desplazamiento es dado por la ec 4 estará definido. A partir de éste es posible calcular la distribución de esfuerzos en la periferia de la cavidad mediante

$$\tau_{\theta z}(r_p, \theta_p) \Big|_{r_p = a_p} = \frac{\mu}{r_p} \frac{\partial w(r_p, \theta_p)}{\partial \theta_p} \Big|_{r_p = a_p} \quad (7)$$

$$0 \leq \theta_p \leq 2\pi$$

$$p = 1, 2, \dots, NP$$

Esto permitirá evaluar el FCED mencionado anteriormente.

### 3. SOLUCION NUMERICA

Para obtener la solución es necesario calcular los coeficientes complejos  $A_n^j$  y  $B_n^j$  a partir de la condición de frontera dado por la ec 2.

Mediante las siguientes transformaciones

$$x_p = x_1 - d_{1p} \quad x_1 = x_p + d_{1p} \quad (8)$$

$$y_p = y_1 \quad y_1 = y_p \quad 1 \leq p \leq NP$$

donde  $d_{1p}$  = distancia entre ejes de las cavidades 1 y p, y sabiendo que

$$x_p = r_p \cos \theta_p \quad (9)$$

$$y_p = r_p \text{ sen } \theta_p$$

la ec 3 se puede expresar en el sistema de coordenadas  $(r_p, \theta_p)$  como

$$w^i(r_p, \theta_p) = w_0 \exp[-ik(r_p \cos \theta_p \cos \Psi + d_{1p} \cos \Psi + r_p \sin \theta_p \sin \Psi)] \quad (10)$$

Desarrollando la ec 10 en serie de funciones de ondas cilíndricas circulares, es posible llegar a

$$w^i(r_p, \theta_p) = w_0 \exp(-ikd_{1p} \cos \Psi) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m J_m(kr_p) [\cos m\theta_p \cos m\Psi + \sin m\theta_p \sin m\Psi] \quad (11)$$

donde  $\epsilon_0 = 1$  y  $\epsilon_m = 2$  para  $m \geq 1$  (factor de Neumann) y  $J_m(\cdot)$  = función de Bessel de primera especie y orden  $m$ .

Mediante el teorema de adición de Graf (9), los desplazamientos producidos por las ondas difractadas por la  $j$ -ésima perforación, ec 6, pueden ser representados en el sistema de coordenadas  $(r_p, \theta_p)$  por

$$w_j^r(r_p, \theta_p) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) K_m^n(kd_{jp}) \cos m\theta_p + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) L_m^n(kd_{jp}) \sin m\theta_p, \quad (12)$$

si  $j < p$

o

$$w_j^r(r_p, \theta_p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) K_m^n(kd_{jp}) \cos m\theta_p +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) L_m^n(kd_{jp}) \sin m\theta_p, \quad (13)$$

si  $j > p$ 

donde

$$K_m^n(kd_{jp}) = H_{n+m}^{(2)}(kd_{jp}) = (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(kd_{jp}) \quad (14)$$

$$L_m^n(kd_{jp}) = -H_{n+m}^{(2)}(kd_{jp}) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(kd_{jp}) \quad (15)$$

Sustituyendo las ecs 11, 12 y 13 en la ec 4, el campo de desplazamientos en el sistema de coordenadas  $(r_p, \theta_p)$  adquiere la forma

$$w(r_p, \theta_p) = w_0 \exp(-ikd_{1p} \cos \psi) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m J_m(kr_p) [\cos m\theta_p \cos m\psi +$$

$$+ \sin m\theta_p \sin m\psi] +$$

$$(1-\delta_{p1}) \sum_{j=1}^{p-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) K_m^n(kd_{jp}) \cos m\theta_p +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) L_m^n(kd_{jp}) \sin m\theta_p \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^p H_m^{(2)}(kr_p) \cos m\theta_p + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^p H_m^{(2)}(kr_p) \operatorname{sen} m\theta_p + \\
(1-\delta_{pNP}) & \sum_{j=p+1}^{NP} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) K_m^n(kd_{jp}) \cos m\theta_p + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_p) L_m^n(kd_{jp}) \operatorname{sen} m\theta_p \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, NP$$

donde  $\delta_{ij}$  = delta de Kronecker (=1 si  $i=j$ ; = 0 si  $i \neq j$ ).

Sustituyendo la ec 16 en la ec 2, haciendo las simplificaciones correspondientes y agrupando términos, se obtienen dos sistemas de ecuaciones que tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
(1-\delta_{p1}) & (-1)^m \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j K_m^n(kd_{jp}) + 2 A_m^p \frac{H_m^{(2)'}(k_{ap})}{\epsilon_m J_m'(k_{ap})} + \\
(1-\delta_{pNP}) & \sum_{j=p+1}^{NP} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j K_m^n(kd_{jp}) = -2w_0 \exp(-ikd_{1p} \cos \psi) \\
& (-i)^m \cos m\psi \quad (17)
\end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, NP \text{ y } m = 0, 1, \dots, \infty$$

y

$$\begin{aligned}
(1-\delta_{p1}) & (-1)^m \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j L_m^n(kd_{jp}) + B_m^p \frac{H_m^{(2)'}(k_{ap})}{J_m'(k_{ap})} + \\
(1-\delta_{pNP}) & \sum_{j=p+1}^{NP} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j L_m^n(kd_{jp}) = -2w_0 \exp(-ikd_{1p} \cos \psi)
\end{aligned}$$

$$(-i)^m \operatorname{sen} m\psi \quad (18)$$

$$p = 1, 2, \dots, NP \text{ y } m = 1, 2, \dots, \infty$$

Estos dos sistemas de ecuaciones son infinitos por lo que se tendrá que reducirlos a finitos truncando todos los desarrollos infinitos en un mismo valor adecuado. La solución así obtenida de finirá al conjunto de valores de los coeficientes complejos  $A_n^j$  y  $B_n^j$  con los cuales se podrá calcular el campo de desplazamientos dado por la ec 16.

#### 4. CONCENTRACION DE ESFUERZOS DINAMICOS

Una vez determinado el campo de desplazamientos  $w$ , ec 4, el valor del esfuerzo  $\tau_{\theta z}$  en el sistema de coordenadas  $(r_p, \theta_p)$  está dado por la ec 7, en la periferia de p-ésima cavidad dicho esfuerzo será igual a

$$\tau_{\theta z}(r_p, \theta_p) \Big|_{r_p = a_p} = \frac{\mu}{a_p} \sum_{m=1}^{\infty} \{w_0 \exp(-ikd_{1p} \cos \psi) \varepsilon_m (-i)^m J_m(ka_p) \sin m \psi +$$

$$(1 - \delta_{p1})^m (-1)^m \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(ka_p) \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(kd_{jp}) B_n^j + m H_m^{(2)}(ka_p) B_m^p +$$

$$(1 - \delta_{pNP})^m \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(ka_p) \sum_{j=p+1}^{NP} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(kd_{jp}) (-1)^n B_n^j \} \cos m \theta_p -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{a_p} \sum_{m=1}^{\infty} \{ w_0 \exp(-ikd_{1p} \cos \Psi) \epsilon_m (-i)^m J_m(ka_p) \cos m \Psi + \\
& (1-\delta_{p1})_m (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(ka_p) \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(kd_{jp}) A_n^j + m H_m^{(2)}(ka_p) A_m^p + \\
& (1-\delta_{pNP})_m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(ka_p) \sum_{j=p+1}^{NP} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(kd_{jp}) (-1)^n A_n^j \} \sin m \theta_p \quad (19)
\end{aligned}$$

$p = 1, 2, \dots, NP$

El esfuerzo  $\tau_{\theta z}^i$  correspondiente al campo incidente se puede obtener como

$$\tau_{\theta z}^i(r_p, \theta_p) = \frac{\mu}{r_p} \frac{\partial w^i(r_p, \theta_p)}{\partial \theta_p} \quad (20)$$

De la ec 10 tenemos que el valor del esfuerzo  $\tau_{\theta z}^i$  en la periferia de la p-ésima cavidad es

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z}^i(a_p, \theta_p) &= w_0 k \mu \sin(\theta_p - \Psi) i \exp(-ikd_{1p} \cos \Psi) \exp \\
& \quad [-ika_p \cos(\theta_p - \Psi)] \quad (21)
\end{aligned}$$

Reagrupando términos de la ec 19 es posible identificar los esfuerzos debidos al campo incidente definidos en la ec 21 de esta forma

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z}^i(a_p, \theta_p) &= w_0 k \mu \sin(\theta_p - \Psi) i \exp(-ikd_{1p} \cos \Psi) \exp \\
& \quad [-ika_p \cos(\theta_p - \Psi)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{a_p} \sum_{m=1}^{\infty} m J_m(ka_p) \left\{ -[(1-\delta_{p1}) \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m K_m^n(kd_{jp}) A_n^j + \right. \\
& \quad \left. + \frac{H_m^{(2)}(ka_p)}{J_m(ka_p)} A_m^p + \right. \\
& (1-\delta_{pNP}) \sum_{j=p+1}^{NP} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(kd_{jp}) A_n^j \left. \right\} \sin m\theta_p + \\
& [(1-\delta_{p1}) \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m L_m^n(kd_{jp}) B_n^j + \frac{H_m^{(2)}(ka_p)}{J_m(ka_p)} B_m^p + \\
& (1-\delta_{pNP}) \sum_{j=p+1}^{NP} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(kd_{jp}) B_n^j \left. \right\} \cos m\theta_p \quad (22)
\end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, NP.$$

El máximo valor de  $\tau_{\theta z}^i(a_p, \theta_p)$ , que llamaremos  $\tau_0$ , se tiene en  $\theta_p = \psi \pm \pi/2$ , esto es

$$\tau_0 = \pm w_0 k \mu i \exp(-ikd_{1p} \cos \psi). \quad (23)$$

La magnitud de  $\tau_0$  está dada por

$$|\tau_0| = w_0 k \mu \quad (24)$$

Por definición, el factor de concentración de esfuerzo dinámico será

$$FCED = |\tau_{\theta z}(a_p, \theta_p)| / |\tau_0| \quad (25)$$

que es la relación del valor del esfuerzo  $\tau_{\theta z}$  cuando existen cavidades al valor máximo del esfuerzo en el medio cuando estas no existen.

## 5. RESULTADOS

Este trabajo está enfocado principalmente a estudiar la interacción dinámica entre dos cavidades, presentándose también algunos resultados para el caso de tres cavidades. Todos los resultados que se presentan dependen de la frecuencia normalizada  $\eta$ , que es la relación del diámetro del túnel a la longitud de onda incidente;  $\eta = ka/\pi = 2a/\lambda$ , donde  $\lambda$  = longitud de onda incidente. Se llamará distancia entre ejes a la distancia que existe entre los ejes de las cavidades normalizada al diámetro de la primera cavidad ( $d/a_1$ ) y separación entre cavidades a la distancia libre entre ellas normalizada al diámetro de la primera cavidad ( $s/a_1$ ).

Para determinar el número de términos de las series los resultados se calibraron con los de la ref 2. Así, en la fig 8 se presentan las distribuciones del FCED en la periferia de la cavidad obteniéndose los mismos resultados para un número de tér

menos mayor o igual a 7; estos resultados son para la cavidad 1 cuando la cavidad 2 se encuentra a una distancia entre ejes de  $d/a_1 = 100$  y la relación de radios es  $a_2/a_1 = 0.01$ , evitando así que la cavidad 2 tenga influencia significativa sobre la cavidad 1. En la ref 2 se presentan el análisis y resultados para una cavidad.

La variación del FCED cuando el ángulo de incidencia cambia, se presentan en la fig 9; aquí las cavidades se encuentran a una distancia entre ejes de  $d/a_1 = 2.2$ , la relación de radios es  $a_2/a_1 = 1.0$  y la frecuencia normalizada es  $\eta = 0.5$ ; se puede apreciar que cuando el ángulo de incidencia va cambiando la distribución de FCED va rotando sobre la cavidad en la misma forma que éste. Para detallar aún más este efecto se presentan las figs 10a y 10b donde están graficadas las distribuciones de esfuerzos para dos cavidades con una distancia entre ejes de  $d/a_1 = 4$ , una relación de radios  $a_2/a_1 = 1.0$ , frecuencia normalizada  $\eta = 0.5$  y ángulos de incidencia  $\psi = 0^\circ$  y  $90^\circ$ , respectivamente. Obsérvese además que existe una disminución de los esfuerzos en la cavidad 2 cuando el ángulo de incidencia es  $0^\circ$ , esto se debe a que esta cavidad se encuentra en una zona de sombra de la cavidad 1 ante el frente de ondas. A este efecto se le llamará "efecto de barrera".

En las figs 11, 12, 13 y 14 se presenta la influencia de la separación entre cavidades en el FCED. En la fig 11 para una frecuencia normalizada  $\eta = 0.5$ , ángulo de incidencia  $\psi = 0^\circ$  y relación de radios  $a_2/a_1 = 1.0$  se graficó el FCED de dos puntos de la periferia de cada cavidad con  $\theta_p = 60^\circ$  y  $120^\circ$ , para diferentes distancias entre ejes; los valores del FCED para los puntos de la cavidad 1 presentan una oscilación que tiene como límite el valor de FCED correspondiente al caso de una cavidad; en la cavidad 2 también se presenta este efecto salvo que el valor promedio de dicha oscilación va en aumento conforme la separación aumenta debido a que el efecto de barre

ra se va perdiendo hasta desaparecer y no provocar efecto alguno sobre una 2a cavidad.

En la fig 12 se presenta la variación del FCED para un punto sobre la periferia de la cavidad 1,  $\theta_p = 60^\circ$ , para diferentes relaciones de radios  $a_2/a_1$  y separación entre cavidades variable; la oscilación que presenta el FCED se va atenuando a medida que la relación de radios  $a_2/a_1$  disminuye hasta el valor límite del FCED en ese punto correspondiente al caso de una cavidad. En la fig 13 se presenta la variación del FCED para varios puntos sobre la periferia de la cavidad 1 para un ángulo de incidencia  $\Psi = 90^\circ$ , relación de radios  $a_2/a_1 = 1.0$ , frecuencia normalizada  $\eta = 0.5$  y distancia entre ejes  $d/a_1 = \text{variable}$ . En puntos con  $\theta_p = 210^\circ$  y  $330^\circ$  el FCED muestra una oscilación tendiente al valor del FCED para una cavidad como límite y para los puntos con  $\theta_p = 0^\circ$  y  $180^\circ$  el FCED se mantiene constante.

En la fig 14 se presenta el valor máximo de FCED sobre la periferia de la cavidad 1 para una frecuencia normalizada  $\eta = 0.5$ , ángulo de incidencia  $\Psi = 0^\circ$  y  $90^\circ$ , relación de radios  $a_2/a_1 = 1.0$  y distancia entre ejes  $d/a_1 = \text{variable}$ ; estas gráficas pueden ser no muy precisas ya que para realizarlas únicamente se registró el FCED en 24 puntos sobre la periferia de la cavidad, tomando el mayor de entre ellos para las diferentes distancias entre ejes  $d/a_1$ ; para el caso de incidencia  $\Psi = 0^\circ$  la mayor concentración de esfuerzos sobre la cavidad 1 ocurre en la zona de la circunferencia que queda frente a la otra cavidad y en la cavidad 2 en la zona posterior del túnel. Para el caso de incidencia  $\Psi = 90^\circ$  se presenta un efecto notable debido a que para una distancia entre ejes de  $5.5 < d/a < 6.25$  existe una disminución de las concentraciones de esfuerzos, que puede deberse al hecho de que

los esfuerzos producidos por la difracción de ondas presenten interferencia destructiva.

En las figs 15a y 15b se presentan las distribuciones del FCED para las cavidades 1 y 2, respectivamente, con frecuencia normalizada  $\eta = 1.0$ , ángulo de incidencia  $\Psi = 0^\circ$ , relación de radios  $a_2/a_1 = 1.0$ , para diferentes distancias entre ejes. Puede verse que en la cavidad 2 la distribución del FCED tiende a ser igual a la de la cavidad 1 cuando la distancia es  $d/a_1 = 50$ .

En las fig 16 y 17 se presenta la variación del FCED en algunos puntos sobre la periferia de las dos cavidades cuando la separación entre ellas es constante y la relación de radios  $a_2/a_1$  varía. La frecuencia normalizada es  $\eta = 0.5$  y ángulos de incidencia  $\Psi = 0^\circ$  y  $90^\circ$ . Puede observarse que para la cavidad 1 los esfuerzos aumentan a medida que la relación  $a_2/a_1$  crece, excepto para el punto con  $\theta_p = 60^\circ$ . En la cavidad 2 los esfuerzos disminuyen.

La variación del FCED para diferentes frecuencias normalizadas  $\eta$ , con distancia entre ejes de  $d/a_1 = 3.0$ , relación de radios  $a_2/a_1 = 1.0$ , se presenta en las figs 18 y 19, donde se graficó la distribución del FCED para la cavidad 1 para incidencia  $\Psi = 0^\circ$  y  $90^\circ$ , con frecuencias normalizadas  $\eta = 0.5$ , 1.0 y 2.0. El FCED crece a medida que la frecuencia disminuye, por lo que para algunos problemas el uso de soluciones estáticas para concentraciones de esfuerzos aplicadas a los esfuerzos dinámicos de campo libre conduce a buenas aproximaciones de las concentraciones dinámicas. La aproximación es mejor y del lado conservador si predominan grandes longitudes de onda en comparación con el radio de túnel. Estas soluciones son el caso límite del problema dinámico, que como para el caso de una sola cavidad es fácil su obtención.

Para el caso de tres cavidades ante incidencia de ondas SH con  $\psi = 0^\circ$ , frecuencia normalizada  $\eta = 0.5$ , distancia entre ejes de  $d_{12}/a_1 = d_{23}/a_1 = 3.0$  y relación de radios  $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 1.0$  se presenta la fig 20; en esta figura se aprecia que los niveles de esfuerzos son menores para la cavidad 3, intermedios para la cavidad 2 y mayores en la cavidad 1, debido al efecto de barrera que provocan las cavidades ante la incidencia de ondas.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una técnica que permite resolver de manera exacta al problema de difracción de ondas SH por cavidades paralelas en un espacio completo, elástico lineal, isótropo y homogéneo. La técnica consiste en combinar soluciones bases, con coeficientes complejos indeterminados, para obtener la solución general exacta del problema al satisfacer las condiciones de frontera. Se hace uso de los teoremas de adición para las funciones de Bessel así como la ortogonalidad de las funciones trigonométricas.

A partir de esta solución se definió un factor que permite valuar el valor del esfuerzo en la periferia de las cavidades. Se estudió el efecto de los diversos parámetros del problema en este factor. Este factor será de utilidad en el análisis de estabilidad de túneles.

Los tipos de fallas que potencialmente pueden ocurrir en túneles (ref 1) son:

1. Falla por compresión. Ocurre cuando el valor del máximo esfuerzo de compresión excede la resistencia a la compresión del medio, resultando el aplastamiento alrededor del túnel. En ausencia de un esfuerzo inicial, la falla podría ocurrir cuando

$$\sigma_0 \text{FCED}_p > \sigma_c$$

donde  $\sigma_0$  es la magnitud de esfuerzo en campo libre,  $\text{FCED}_p$  es el factor de concentración de esfuerzo dinámico para el caso de ondas P, y  $\sigma_c$  es la resistencia a la compresión del medio.

2. Falla por cortante. Ocurre cuando el esfuerzo cortante alrededor de la cavidad excede la resistencia al cortante del medio. En ausencia de esfuerzo inicial, la falla en la cavidad podría ocurrir cuando

$$\frac{\sigma_0 \text{FCED}_p}{2} > \sigma_s$$

donde  $\sigma_s$  es la resistencia al cortante del medio.

3. Falla por tensión. Ocurre cuando el esfuerzo de tensión alrededor excede la resistencia a tensión del medio, y como resultado tenemos fracturas en las paredes del túnel.
4. Astillación. Cuando una onda de compresión incide sobre una superficie libre, una onda de tensión será reflejada. Si el esfuerzo resultante debido a la on

da incidente y reflejada es de tensión, y si la tensión es mayor que la resistencia a la tensión del medio, la astillación puede ocurrir. Este tipo de falla usualmente ocurrirá del lado de la abertura donde inciden primero las ondas. La falla de astillación depende de la forma de la abertura y de la forma incidente. Investigaciones experimentales han mostrado que las aberturas rectangulares son más susceptibles a esta falla. La astillación no ocurre en aberturas circulares, como ha sido probado en algunos experimentos.

Cada tipo de falla está asociada con una característica diferente de la resistencia del medio, como las resistencias a la compresión, al cortante o a la tensión. Además habrá que considerar otros factores tales como esfuerzos iniciales (debidos a sobrecargas), esfuerzos tectónicos, fallas locales, juntas, fracturas, etc., es decir, características geológicas locales que, en adición a redistribución de esfuerzos, pueden ser causa de fallas en túneles y no únicamente a la alteración de la distribución de esfuerzos alrededor de las cavidades. Si la alteración en la distribución de los esfuerzos alrededor de una cavidad es un posible factor para que se produzca falla; es evidente que la interacción dinámica entre túneles o con cualquier otra estructura, puede producir amplificación o modificación significativa de los esfuerzos alrededor de la cavidad.

Los resultados presentados muestran que para una cavidad circular e incidencia de ondas SH el valor máximo del FCED es aproximadamente igual a 2. Si se tienen 2 cavidades de igual radio dicho factor se incrementará en más de 30%, si la distancia entre ejes  $d/a_1$  es menor o igual de 1.5. En el caso de ondas P el FCED<sub>p</sub> es aproximadamente igual a 3, para el caso de una cavidad, y podrá aumentar si existe otra y la separación no

es la adecuada. Si las cavidades son de diferente radio, en la cavidad menor se tendrá un FCED mayor. El ángulo de incidencia,  $\Psi$ , también es un factor importante, ya que influye en los efectos de una cavidad sobre la otra. En algunos casos el efecto de barrera puede ser significativo.

Por último, este método puede extenderse para estudiar sistemas de túneles con o sin recubrimiento en un semiespacio para incidencia de ondas SH, SV y P.

## 7. RECONOCIMIENTO

Se agradecen al Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma la dirección de este trabajo y al Dr. Javier Avilés López su valiosa cooperación, al Ing. Francisco Chávez García sus comentarios y su gerencias y a la Sra. Celia Juárez G., la fiel transcripción del manuscrito.

## 8. REFERENCIAS

1. Mow, C.C. "Dynamic Response of lined and unlined underground openings", The Rand Corporation, Memorandum RM-3962-PR, Santa Mónica, Cal., (march 1964).
2. Mow, C.C. y Pao y H. "The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations", The Rand Corporation, R-432-PR, Santa Mónica, Cal. (abr 1971).
3. Lee, V y Trifunac, M.D., "Response of tunnels to incident SH-waves", J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 105, pp. 643-659, 1979.
4. Sánchez-Sesma, F.J. y Esquivel, J.A. "Difracción de ondas SH por túneles", Instituto de Ingeniería, UNAM (nov 1978).
5. Sánchez-Sesma, F.J. y Esquivel, J.A. "Difracción de ondas SH por túneles con recubrimiento", Instituto de Ingeniería, UNAM (oct 1979).

6. Warson, G.N, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1966).
7. Gamer, U. "Dynamic stress concentration in an elastic half space with a semi-circular cavity excited by SH waves", *Int. J. Solids Structures*. Pergamon Press. Vol 13 pp 675-681 (1977).
8. Rosenblueth, E. "Soil and rock mechanics in earthquake engineering", en *Rock dynamics and geophysical aspects*, G W Born, ed, Proc DMSR 77, Vol 3, Karlsruhe, Alemania (sep 5-16, 1977), 3-62.
9. Abramowitz, M and Stegun, I.A. *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York (1965).
10. Okamoto, S. *Introduction to earthquake engineering*, University of Tokio Press (1973).
11. Arias, A. "Interacción dinámica de un tubo circular con un medio elástico infinito", memorias de las XIX Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural, Santiago, Chile (abr 24-28, 1978).
12. Newmark, N M y Rosenblueth, E. *Fundamentals of earthquake engineering*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Clifss, N.J. (1971).
13. Timoshenko, S.P. Goodier, J.N. *Theory of Elasticity* McGraw-Hill Int. Book C. Third Edition (1970).
14. Func, Y.C. *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey (1965).

15. Sommerfeld, A. *Partial differential equations in physics*, Academic Press, Inc, Nueva York (1949).

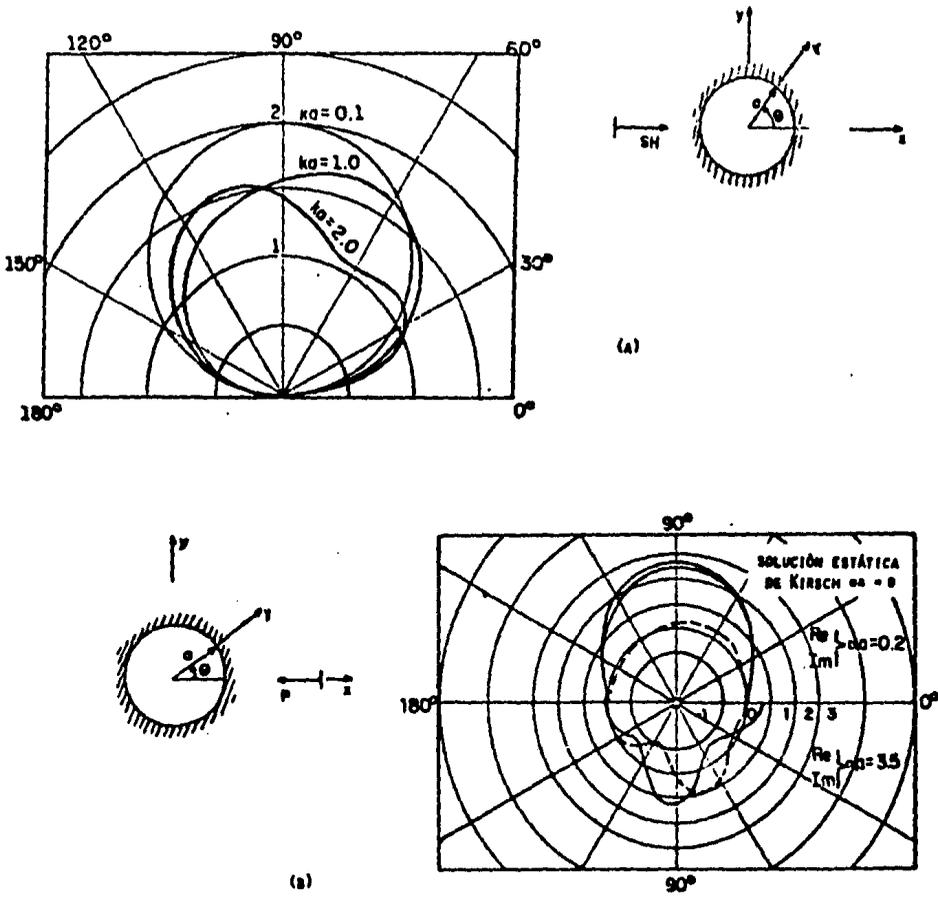
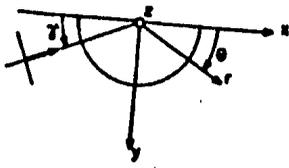
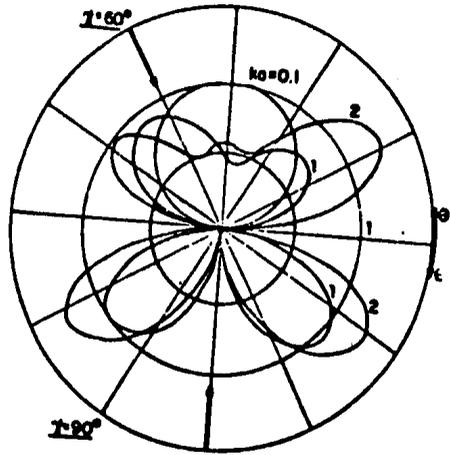


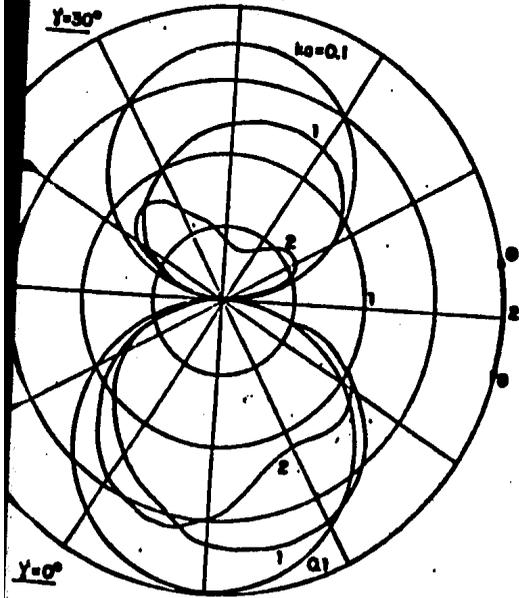
FIG. 1. a) DISTRIBUCIÓN DEL FCEC  $(v_{22}/v_0)$  SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD ANTE INCIDENCIA DE ONDAS SH PARA DIFERENTES FRECUENCIAS NORMALIZADAS ( $ka$ ) EN COORDENADAS POLARES (VER 2). b). DISTRIBUCIÓN DEL FCEC  $(v_{\theta\theta}/v_0)$  SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD ANTE INCIDENCIA DE ONDAS P PARA DIFERENTES FRECUENCIAS NORMALIZADAS (VER 2) CON UNA RELACIÓN DE POISSON  $\nu = 0.25$ . LÍNEA CONTINUA PARA  $\nu = 0$  Y LÍNEA DISCONTINUA  $\nu = 1/4$  (VER 2). ASÍ:  $\omega = \omega/v_p$ ,  $\omega$  = FRECUENCIA CIRCULAR Y  $v_p$  = VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE ONDAS P.



(a)



(b)



(c)

FIG 2. a) SEMIESPACIO CON UNA CAVIDAD SEMICIRCULAR. DONDE  $\gamma$  = ANGULO DE INCIDENCIA DEL FRENTE DE ONDAS SH (REF 7). b) AMPLITUD DEL ESFUERZO ADIMENSIONAL ( $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD SEMICIRCULAR ANTE INCIDENCIA DE ONDAS SH PARA DIFERENTES ANGULOS DE INCIDENCIA  $\gamma = 60^\circ$  Y  $90^\circ$  Y PARA DIFERENTES FRECUENCIAS NORMALIZADAS ( $ka$ ) (REF 7). c) AMPLITUD DEL ESFUERZO ADIMENSIONAL ( $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD SEMICIRCULAR PARA ANGULOS DE INCIDENCIA  $\gamma = 0^\circ$  Y  $30^\circ$  Y PARA DIFERENTES FRECUENCIAS NORMALIZADAS ( $ka$ ) (REF 7).

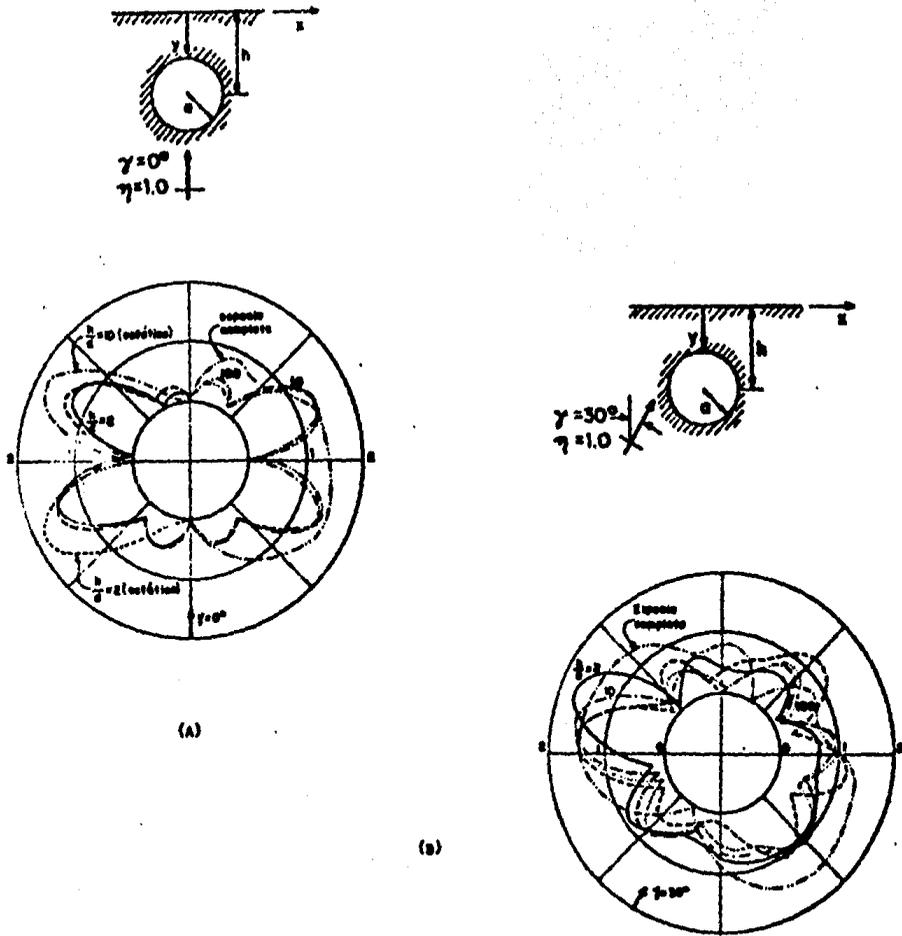
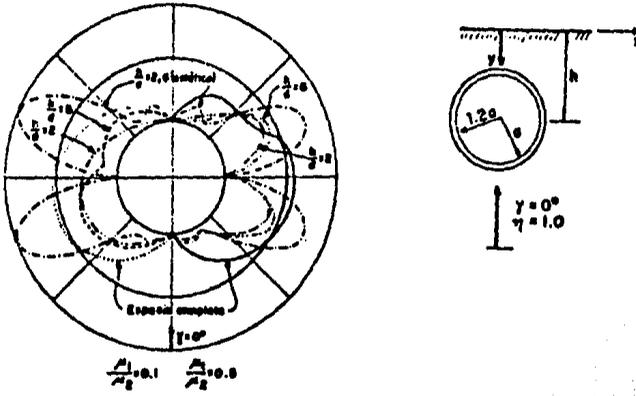
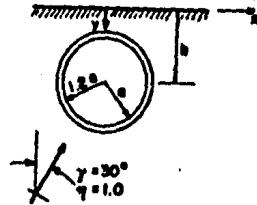


FIG. 3. a). Amplitud del esfuerzo adimensional ( $\sigma_{22}/\sigma_0$ ) en el borde de un túnel de sección circular. Configuración para diferentes profundidades, espacio completo y aproximación estática. Frecuencia normalizada  $\eta = 1.0$  e incidencia vertical. (ref 4).  
 b). Amplitud del esfuerzo adimensional ( $\sigma_{22}/\sigma_0$ ) en el borde de un túnel de sección circular. Configuración para diferentes profundidades y espacio completo. Frecuencia normalizada  $\eta = 1.0$  y ángulo de incidencia  $\gamma = 30^\circ$  (ref 4).

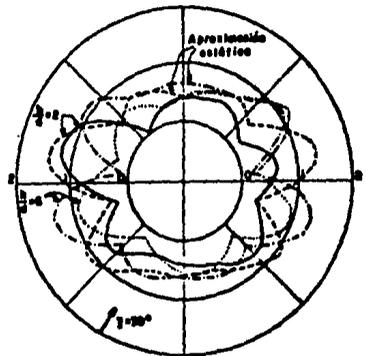


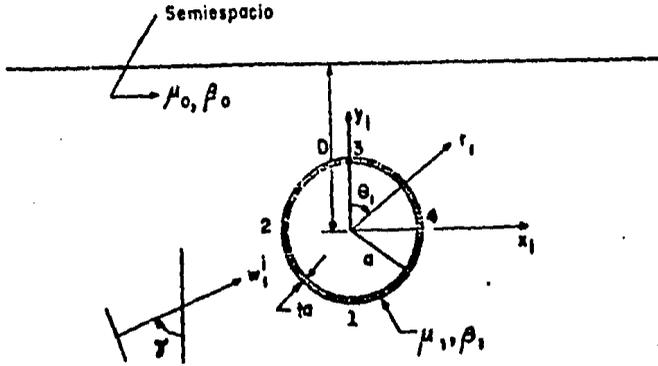
(A)



(B)

FIG. 4 a). ESFUERZO ADIMENSIONAL ( $\sigma_{\theta\theta}^0/\sigma_0$ ) EN EL BORDE LIBRE DE UN TÚNEL DE SECCIÓN CIRCULAR CON RECUBRIMIENTO DE RADIO EXTERIOR  $1.2a$ . COMPARACIÓN PARA DIFERENTES PROFUNDIDADES, ESPACIO COMPLETO Y APROXIMACIÓN ESTÁTICA. FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 1.0$  e INCIDENCIA VERTICAL. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES  $\mu_1/\mu_2 = 0.1, 0.5$  y  $\nu_1/\nu_2 = 0.75$ . DONDE  $\nu =$  MÓDULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE y  $\rho =$  DENSIDAD DEL MATERIAL (REF 5). b). ESFUERZOS ADIMENSIONALES ( $\sigma_{\theta\theta}^0/\sigma_0$ ) EN EL BORDE LIBRE DE UN TÚNEL DE SECCIÓN CIRCULAR CON RECUBRIMIENTO DE RADIO EXTERIOR  $1.2a$ . COMPARACIÓN PARA DIFERENTES PROFUNDIDADES Y APROXIMACIÓN ESTÁTICA. FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 1.0$  Y ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\gamma = 30^\circ$ . PROPIEDAD DE LOS MATERIALES  $\mu_1/\mu_2 = 0.5$  Y  $\nu_1/\nu_2 = 0.75$  (REF 5)





(a)

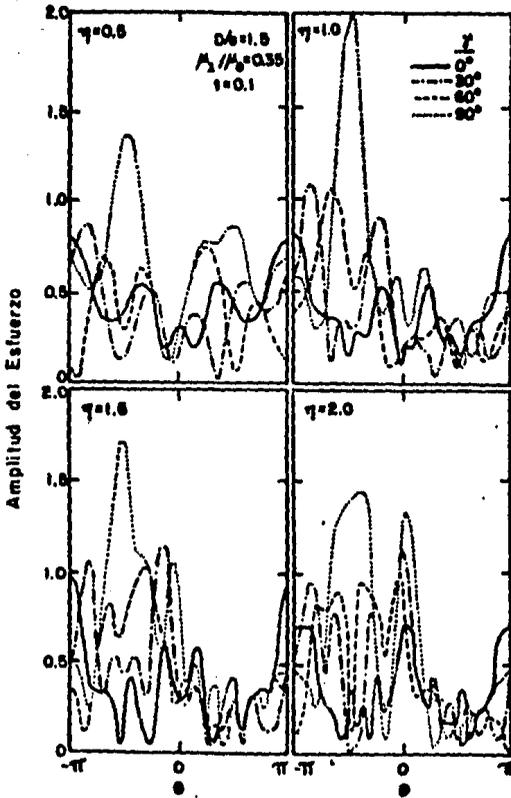


FIG. 5 a). ESQUEMA DEL MODELO DE UN TÚNEL CON RECUBRIMIENTO EN UN SEMIESPACIO ANTE INCIDENCIA DE ONDAS SH. AQUÍ,  $w_1$  = ONDA INCIDENTE,  $t_a$  = ESPESOR DEL RECUBRIMIENTO,  $\mu_0$  Y  $\nu_0$  = MÓDULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE Y VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS DE CORTANTE EN EL MEDIO Y EN EL RECUBRIMIENTO,  $D$  = PROFUNDIDAD DEL EJE DEL TÚNEL (REF 3), b). AMPLITUD DEL ESFUERZO ADIMENSIONAL ( $\sigma_{112}/\sigma_0$ ), EN EL BONDE LIBRE DE UN TÚNEL DE SECCIÓN CIRCULAR CON RECUBRIMIENTO DE RADIO  $a$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\mu_1/\mu_0 = 0.35$ ,  $D/a = 1.5$  Y PARA DIFERENTES ÁNGULOS DE INCIDENCIA  $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  Y  $90^\circ$ ; FRECUENCIAS NORMALIZADAS  $\eta = 0.5, 1.5$  Y  $2.0$  (REF 3).

(b)

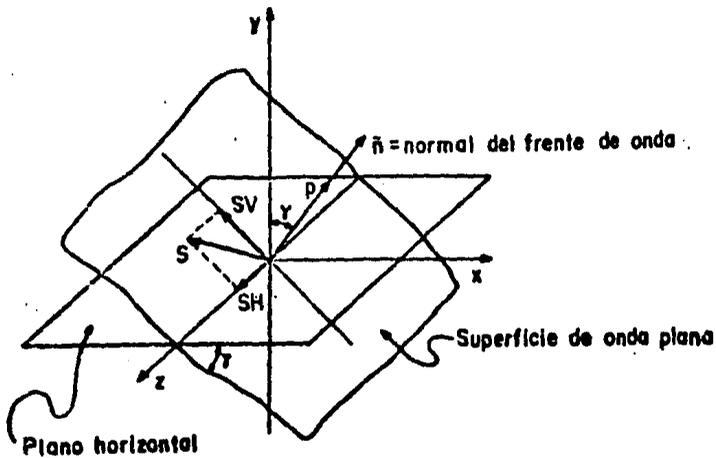


FIG. 6 TIPOS DE ONDAS PLANAS Y SISTEMA DE COORDENADAS DE REFERENCIA

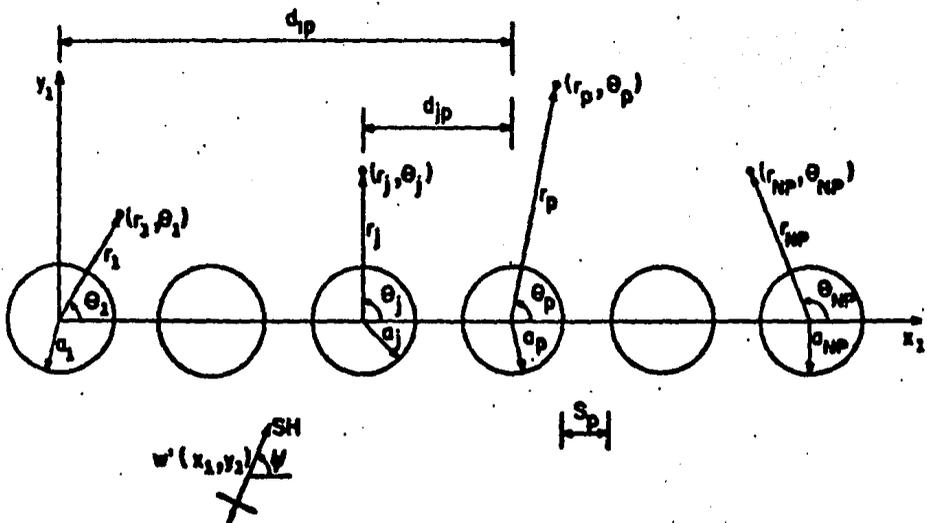


FIG. 7 SISTEMA DE COORDENADAS DE REFERENCIA Y ONDA PLANA SH INCIDENTE

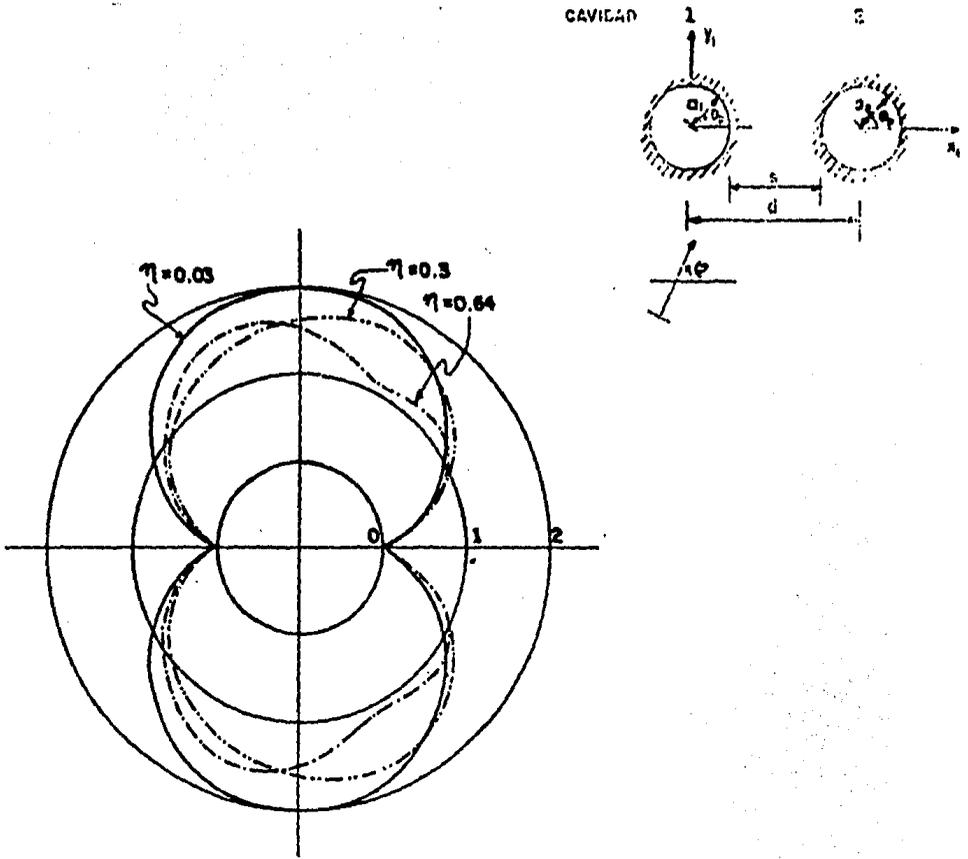
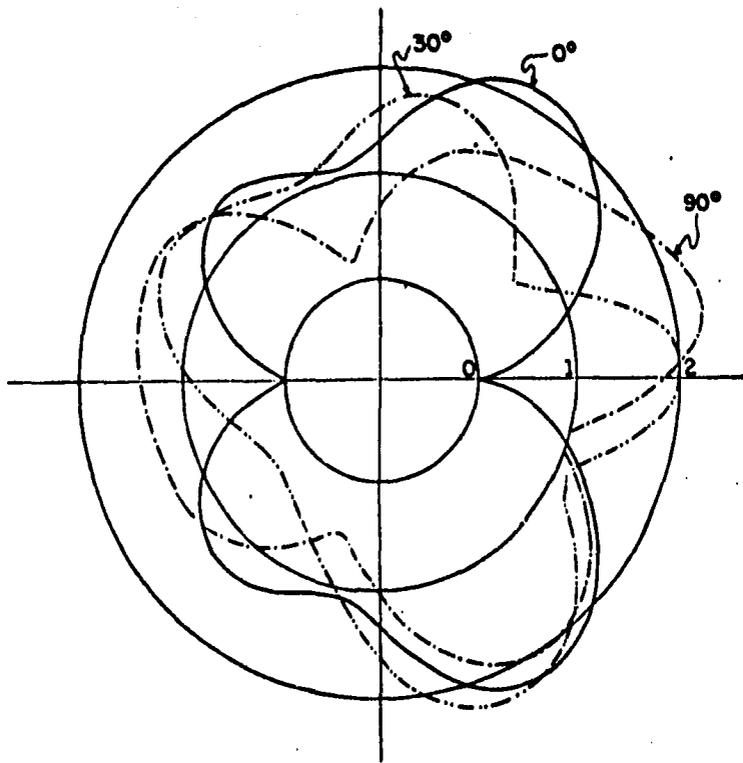


FIG. 8 DISTRIBUCIÓN DEL FCD ( $|r_{02}|/r_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA .  
 DE LA CAVIDAD 1, PARA DIFERENTES FRECUENCIAS NORMA-  
 LIZADAS  $\eta = 0.03, 0.3$  Y  $0.64$ , CON UNA RELACIÓN DE  
 RADIOS  $a_2/a_1 = 0.01$ , DISTANCIA ENTRE EJES  $d/a_1 =$   
 $1.00$  Y ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\psi = 0^\circ$



CAVIDAD

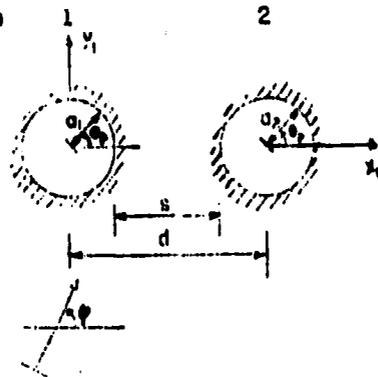


FIG. 9

DISTRIBUCIÓN DEL FCED ( $|v_{c2}|/v_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 1, PARA DISTINTOS ÁNGULOS DE INCIDENCIA  $\varphi = 0^\circ, 30^\circ$  Y  $90^\circ$ , CON UNA RELACIÓN DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0$ , DISTANCIA ENTRE EJES  $d/a_1 = 2.2$  Y FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 0.5$

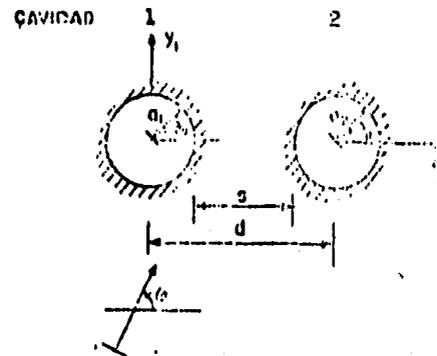
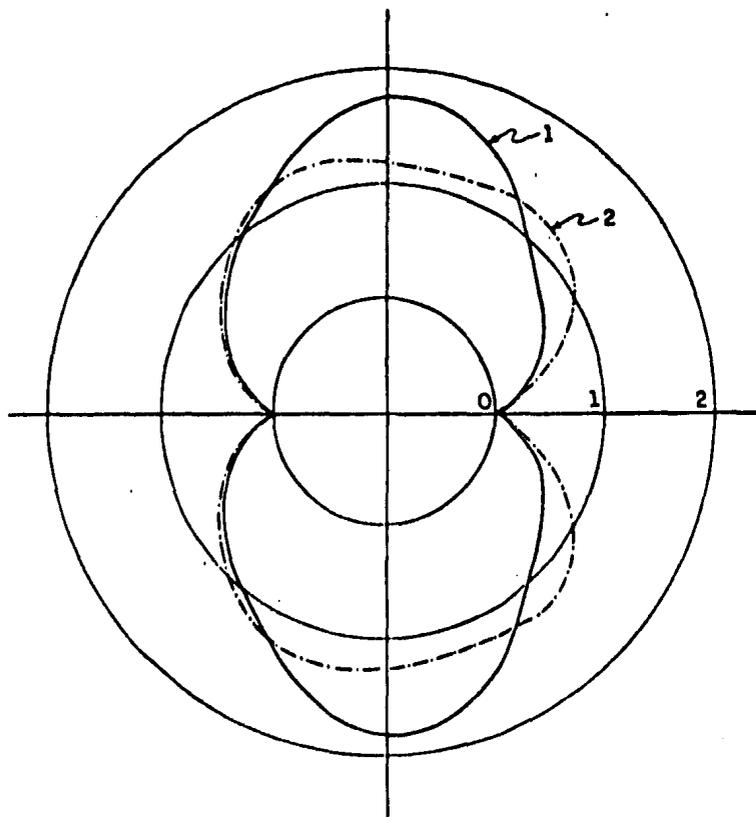


FIG 10. A) DISTRIBUCIÓN DEL FCED ( $|\tau_{02}|/\tau_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LAS 2 CAVIDADES PARA UNA DISTANCIA ENTRE EJES DE  $d/a_1 = 4,0$ , RELACIÓN DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1,0$ , FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 0,5$  Y ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\psi = 0^\circ$

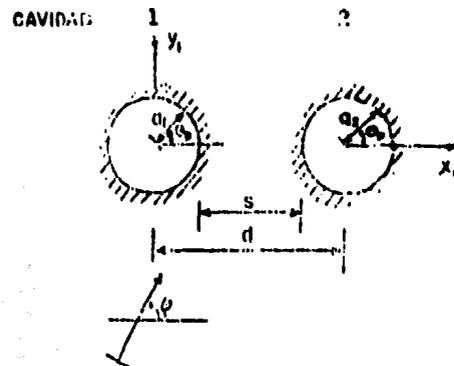
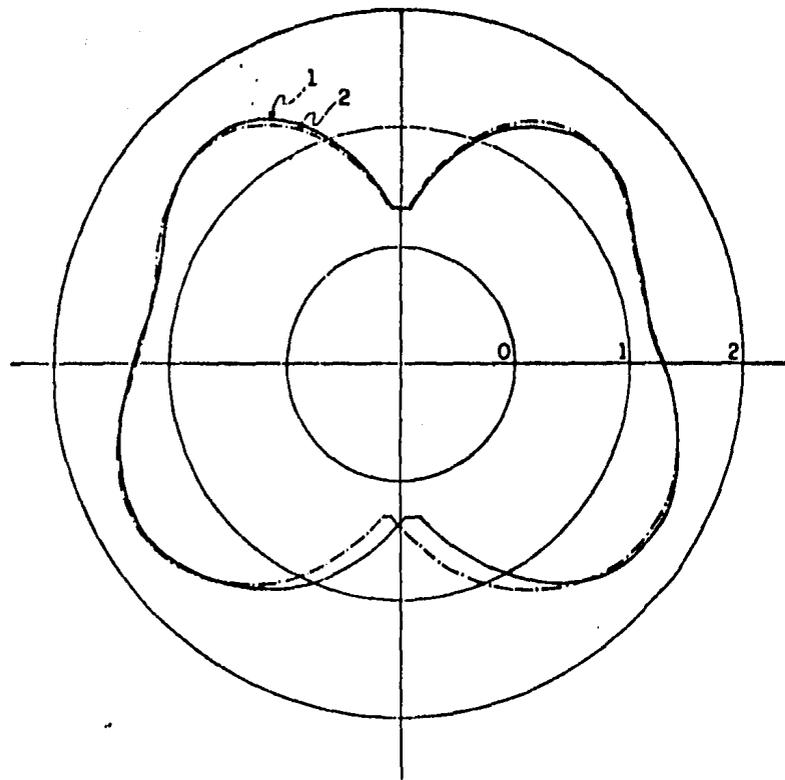


FIG. 10 B). DISTRIBUCIÓN DEL FCED ( $|H_{0z}|/r_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LAS 2 CAVIDADES PARA UNA DISTANCIA ENTRE EJES DE  $d/a_1 = 4,0$ , RELACIÓN DE RADIOS  $a_2/a_1 = 4,0$ , RELACIÓN DE RADIOS  $a_1/a_1 = 1,0$ , FRECUENCIA NORMALIZADA  $\omega = 0,5$  Y ÁNGULO DE INCLINENCIA  $\psi = 90^\circ$ .

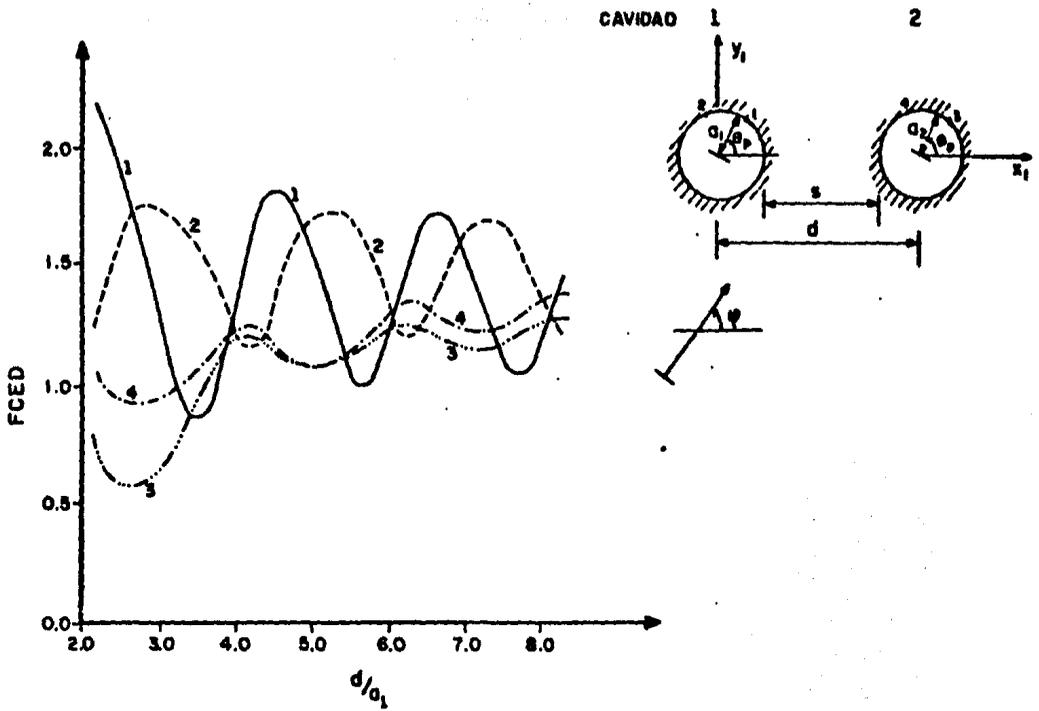


FIG. 11 FCED ( $1-\epsilon_2/\epsilon_0$ ) EN PUNTOS SOBRE LA PERIFERIA DE LAS CAVIDADES PARA UNA RELACION DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0$  FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 0.5$ , ANGULO DE INCIDENCIA  $\psi = 0^\circ$  Y DISTANCIA ENTRE EJES  $d/a_1 =$  VARIABLE

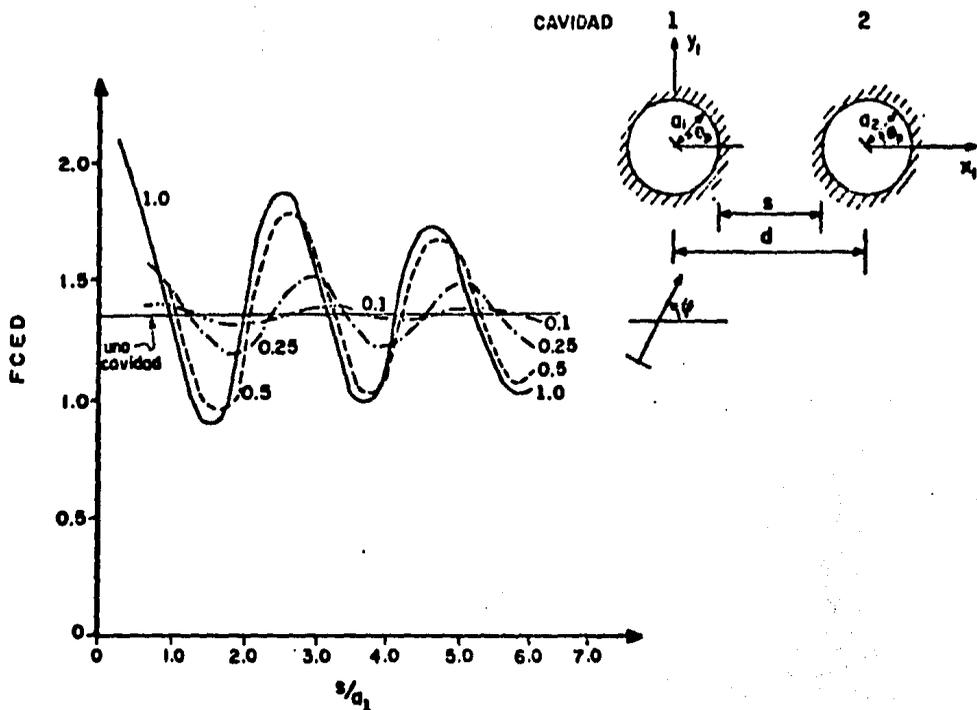


FIG. 12 FCED ( $|v_{\theta 2}|/v_0$ ) EN UN PUNTO SOBRE LA PERIFERIA,  $\theta_p = 60^\circ$  EN LA CAVIDAD 1 PARA DIFERENTES RELACIONES DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0, 0.5, 0.25, 0.1$  Y PARA UNA SOLA CAVIDAD, FRECUENCIA NORMALIZADA  $\omega = 0.5$ , ANGULO DE INCIDENCIA  $\psi = 0^\circ$  Y SEPARACIÓN ENTRE CAVIDADES  $s/a_1 =$  VARIABLE

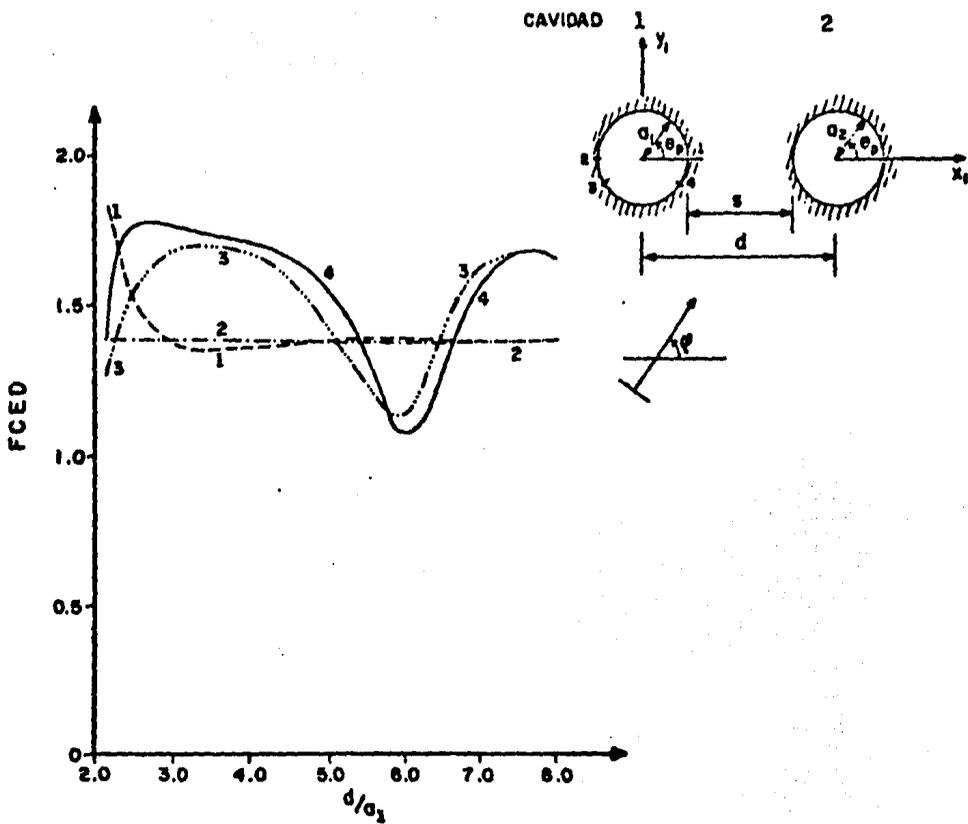


FIG. 13 FCED ( $H_{z_1}^2/H_0^2$ ) PARA DIFERENTES PUNTOS SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 1 CON  $\theta_p = 0^\circ, 150^\circ, 210^\circ$  Y  $330^\circ$  PARA UN ANGULO DE INCIDENCIA  $\gamma = 90^\circ$ ; FRECUENCIA NORMALIZADA  $\omega = 0.5$ , RELACION DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0$  Y DISTANCIA ENTRE EJES  $d/a_1 =$  VARIABLE

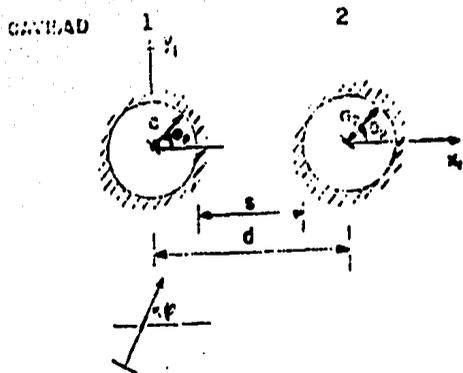
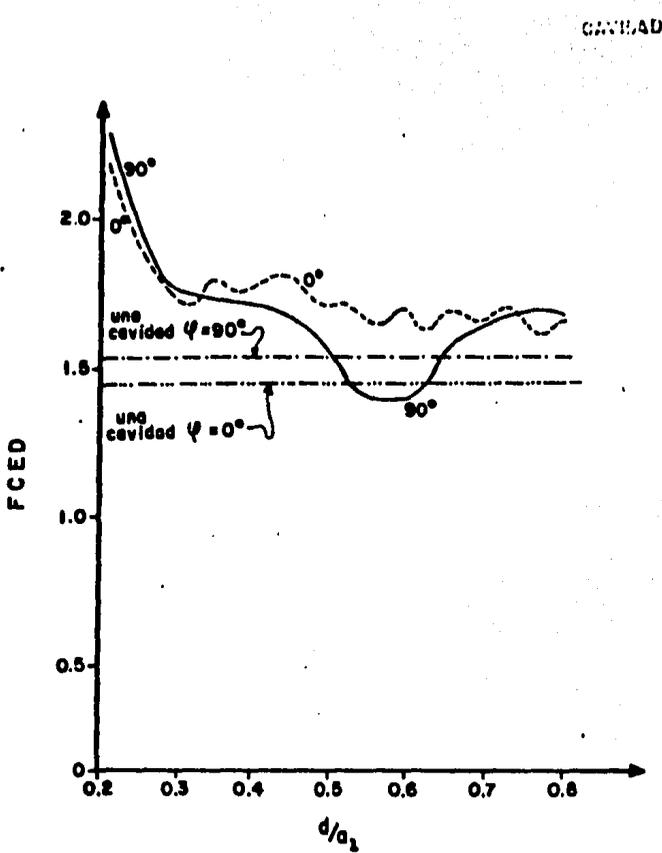


FIG. 14 MÁXIMO VALOR DE FCED ( $|r_{e2}|/r_0$ ) REGISTRADO SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 1 PARA UNA FRECUENCIA NORMALIZADA  $\omega = 0.5$ , RELACION DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0$ , ÁNGULOS DE INCIDENCIA  $\psi = 0^\circ$  Y  $90^\circ$ , DISTANCIA ENTRE EJES  $d/a_1 =$  VARIABLE

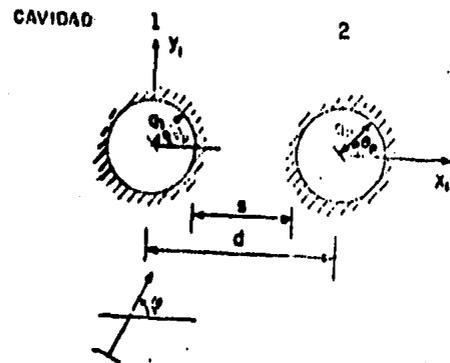
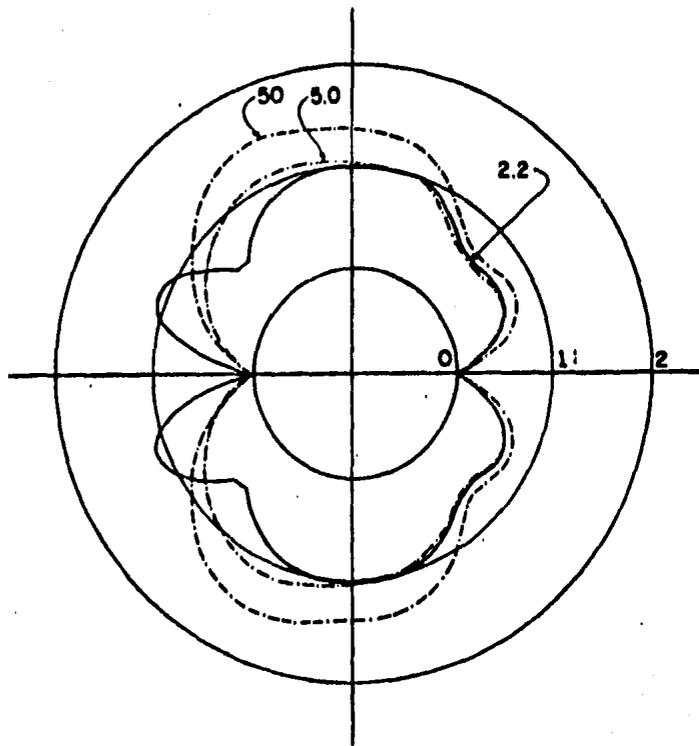


FIG. 15 b) DISTRIBUCIÓN DE FCED ( $I_{02}^2/I_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 2 PARA UNA FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 1.0$ , RELACIÓN DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0$ , ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\varphi = 0^\circ$ , CUANDO LA CAVIDAD 1 SE ENCUENTRA A UNA DISTANCIA ENTRE EJES DE  $J/a_1 = 2.2, 5.0$  Y  $50.0$

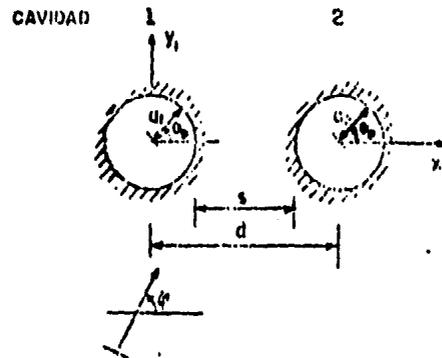
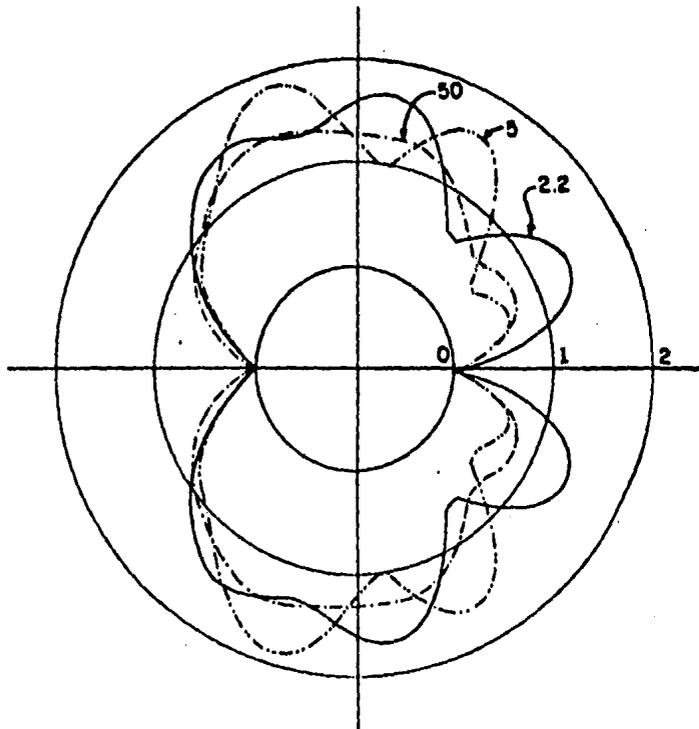


FIG. 15 a) DISTRIBUCIÓN DEL FCED ( $|u_{0z}|/|u_0|$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 1 PARA UNA FRECUENCIA NORMALIZADA  $\omega = 1.0$ , RELACIÓN DE RADIOS  $a_2/a_1 = 1.0$ , ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\varphi = 0^\circ$ , CUANDO LA CAVIDAD 2 SE ENCUENTRA A UNA DISTANCIA ENTRE EJES DE  $a_1 = 2.2, 5.0$  Y  $50.0$

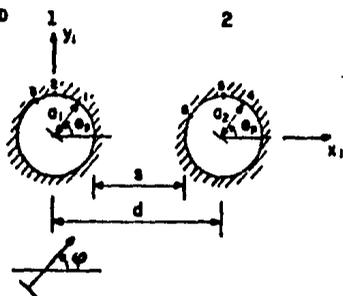
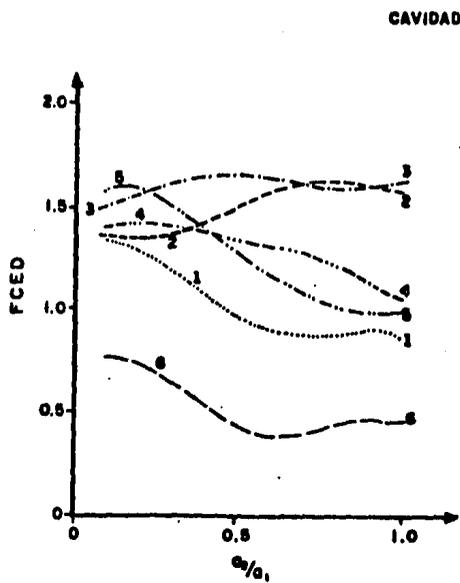


FIG 16. FCED ( $I_{102}/I_0$ ) EN DIFERENTES PUNTOS SOBRE LA PERIFERIA DE LAS CAVIDADES PARA UNA FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 0.5$ , ANGULO DE INCIDENCIA  $\gamma = 0$ ; SEPARACION ENTRE CAVIDADES  $s/a_1 = 1.5$  Y RELACION DE RADIOS  $a_2/a_1 = \text{VARIABLE}$

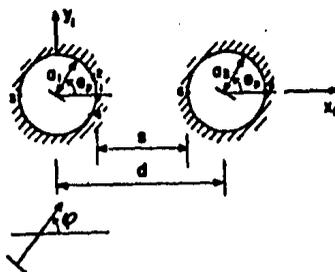
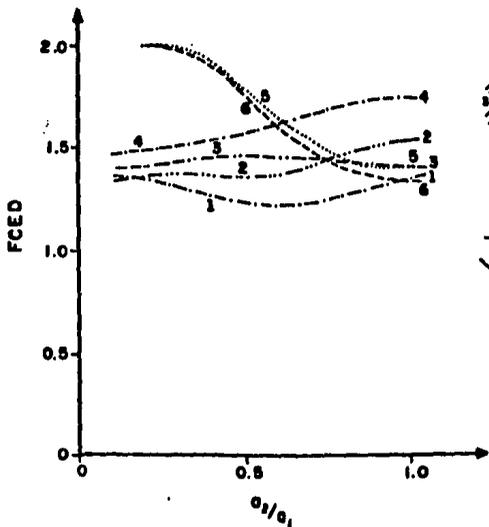
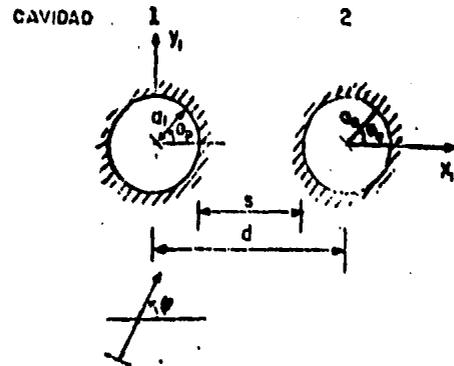
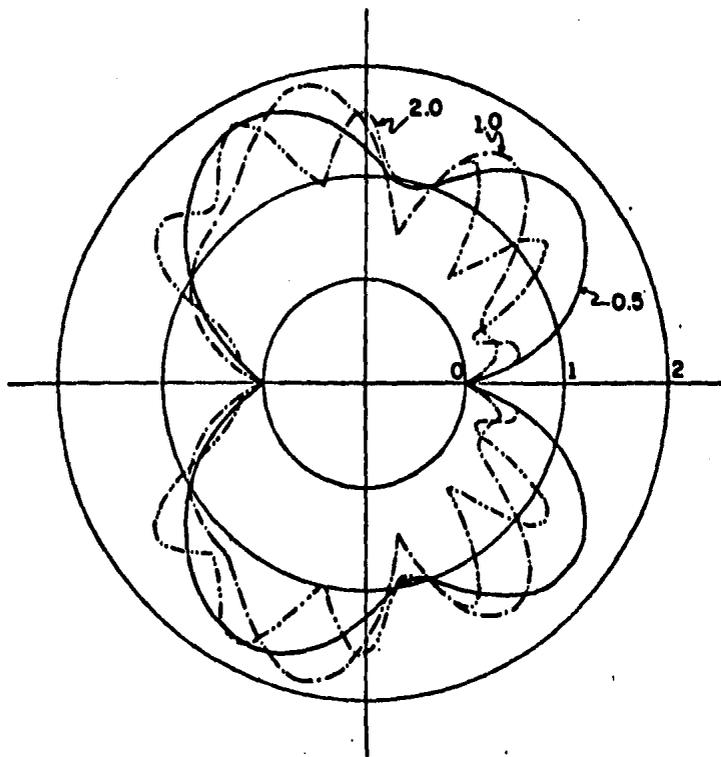


FIG 17. FCED ( $I_{102}/I_0$ ) EN DIFERENTES PUNTOS SOBRE LA PERIFERIA DE LAS CAVIDADES PARA UNA FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 0.5$ , ANGULO DE INCIDENCIA  $\gamma = 90^\circ$ ; SEPARACION ENTRE CAVIDADES  $s/a_1 = 1.5$  Y RELACION DE RADIOS  $a_2/a_1 = \text{VARIABLE}$



**FIG 18.** DISTRIBUCIÓN DE FCEd ( $\tau_{02}/\tau_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 1 PARA UN ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\gamma = 0^\circ$ . RELACIÓN DE RADIOS  $a_1/a_2 = 1.0$ , DISTANCIA ENTRE EJES DE  $d/a_1 = 3.0$  Y FRECUENCIAS NORMALIZADAS  $\alpha = 0.5, 1.0$  Y  $2.0$

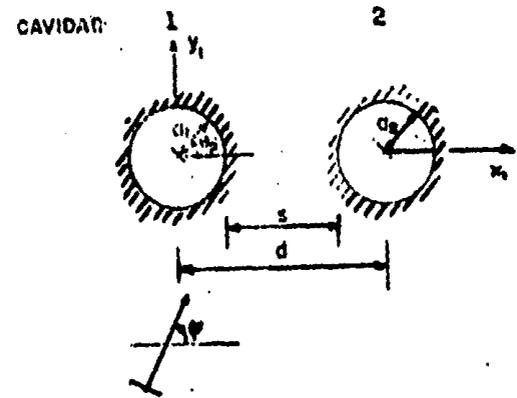
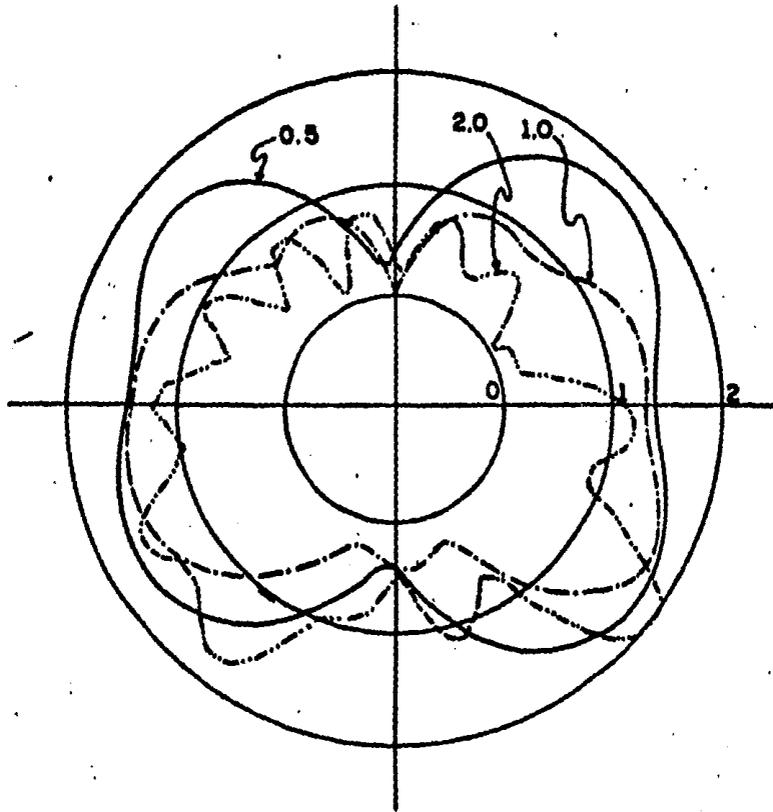


FIG 19. DISTRIBUCIÓN DEL FCE ( $r_{02}/r_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LA CAVIDAD 1 PARA UN ÁNGULO DE INCIDENCIA  $\gamma = 90^\circ$ . RELACIÓN DE RADIOS  $a_1/a_2 = 1.0$ , DISTANCIA ENTRE EJES DE  $d/a_1 = 3.0$  Y FRECUENCIAS NORMALIZADAS  $n = 0.5, 1.0$  Y  $2.0$

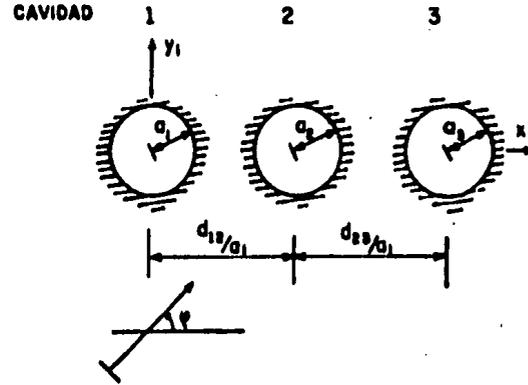
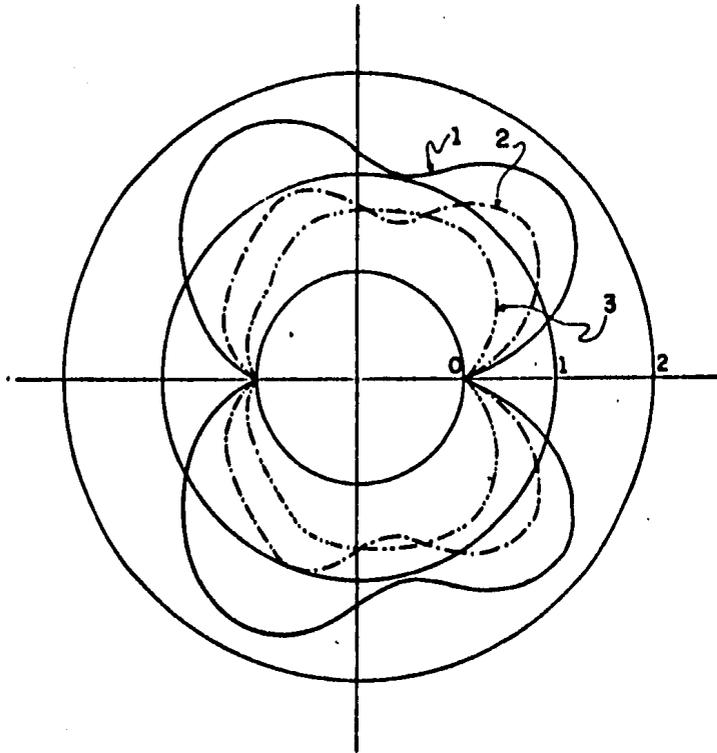


FIG 20. DISTRIBUCIÓN DEL FCED ( $v_{02}/v_0$ ) SOBRE LA PERIFERIA DE LAS CAVIDADES 1, 2 Y 3, PARA UNA FRECUENCIA NORMALIZADA  $\eta = 0,5$ , RELACIÓN DE RADIOS  $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 1,0$ , DISTANCIA ENTRE EJES DE  $d_{12}/a_1 = d_{23}/a_1 = 3,0$  Y ANGULO DE INCIDENCIA  $\varphi = 0^\circ$