



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica

283

179

"RESONANCIA HIDRAULICA EN TUBERIAS
EXCITADA POR UN FLUJO HELICOIDAL"

T E S I S

Que para obtener el Título de

I N G E N I E R O C I V I L

P r e s e n t a

ALEJANDRO SANCHEZ HUERTA

México, D. F.

Octubre 1984



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

1) Introducción	1
2) Antecedentes	3
2.1) <i>Problema de oscilaciones estacionarias en la P.H. La Angostura.</i>	4
2.2) <i>Antecedentes de las teorías de resonancia.</i>	8
2.3) <i>Antecedentes del estudio de las oscilaciones de presión del flujo helicoidal</i>	8
3) Teoría de la resonancia en conductos a presión	11
3.1) <i>Ecuaciones Fundamentales del flujo oscilatorio</i>	12
3.1.1) Ecuaciones del flujo no permanente	12
3.1.2) Ecuaciones fundamentales aplicadas al flujo oscilatorio	13
3.1.3) Soluciones estacionarias de las ecuaciones fundamentales	15
3.2) <i>Método de las matrices de transferencia</i>	17
3.2.1) Matriz de transferencia de una tubería	17
3.2.2) Matriz de transferencia de las singularidades	21
3.2.3) Aplicación del método de las matrices de transferencia	24
3.3) <i>Resonancia y teoría de la función de receptividad en tuberías uniformes</i>	26
3.3.1) Cálculo de h para los sistemas del tipo I.	26
3.3.2) Función de ganancia, receptividad y forma modal	28
3.3.3) Determinación de las frecuencias de resonancia y de los puntos peligrosos	31

4) Oscilaciones de presión del flujo helicoidal	36
4.1) Método del momento de la cantidad de movimiento del flujo helicoidal	37
4.1.1) Aplicación del M.M.C.M. a un sistema estático de álabes	38
4.1.2) Aplicación del M.M.C.M. a una turbina Francis	40
4.2) Estudio experimental del vórtice realizado por el Instituto de Ingeniería	41
4.2.1) Resultados obtenidos	41
4.2.2) Conclusiones	43
4.2.3) Comentarios	49
5) Instalación experimental y equipo de medición utilizado	50
5.1) Descripción de la instalación experimental	50
5.2) Descripción del equipo de medición utilizado	56
5.3) Calibración de los transductores de presión	58
6) Resultados experimentales	63
6.1) Determinación de las frecuencias de resonancia del sistema generador de vórtices	64
6.2) Experiencias del fenómeno de resonancia	67
6.3) Configuración de las ondas estacionarias en la tubería de presión	77
6.4) Conclusiones del trabajo experimental	79
7) Conclusiones	81
8) Agradecimientos	84
9) Referencias y bibliografía	85

1. INTRODUCCION

En proporción directa al crecimiento de las grandes ciudades y al avance técnico crecen también los sistemas hidráulicos, cuya finalidad puede ser la de abastecer de agua potable a la población, en el caso de los gigantescos sistemas de acueductos o la de proporcionarle energía eléctrica mediante la construcción de enormes plantas hidroeléctricas. En esta medida, han aparecido en estos sistemas problemas que por su naturaleza no eran detectados en otras escalas. Tal es el caso de las oscilaciones estacionarias en plantas hidroeléctricas, excitadas por la naturaleza pulsante del flujo helicoidal generado en la descarga de las turbinas Francis, cuando éstas trabajan fuera de las condiciones de diseño. Este trabajo es un estudio teórico-experimental encaminado a la comprensión de este fenómeno.

Primeramente, en el capítulo 2, será comentado el problema ocurrido en la P.H. La Angostura y se revisarán además los antecedentes correspondientes a las teorías de resonancia y a las oscilaciones de presión del flujo helicoidal.

En base a las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento y bajo ciertas hipótesis, en el capítulo 3, se establecerá un modelo lineal que permitirá el cálculo de las frecuencias de resonancia de los sistemas hidráulicos a presión.

En el capítulo 4 se mostrará como es posible reproducir el comportamiento oscilatorio del flujo helicoidal en tubos rectos así como en el tubo de desfogue de una turbina Francis, en base a la utilización de un sistema estático de álabes.

La descripción de una instalación que permita realizar, en forma conjunta, el estudio de resonancia hidráulica excitada por el flujo helicoidal, será motivo del capítulo 5.

El capítulo 6 mostrará las experiencias, producto de investigación realizada en la mencionada instalación, mismas que serán expuestas en forma gráfica.

Por último, en el capítulo 7, se darán a conocer las conclusiones generales más importantes del trabajo que a continuación se presenta.

2. ANTECEDENTES

En el presente capítulo se hará una breve descripción del fenómeno de oscilaciones estacionarias ocurrido en una planta hidroeléctrica, el cual fué diagnosticado como un fenómeno de resonancia hidráulica excitada por la naturaleza pulsante del vórtice generado en la descarga de la turbina.

Además, se comentarán en forma breve los antecedentes en el estudio teórico de la resonancia en sistemas hidráulicos a presión.

Finalmente se revisarán los antecedentes en el estudio, básicamente experimental, del fenómeno pulsante generado por el flujo helicoidal.

2.1 Problema de oscilaciones estacionarias en La P.H. La Angostura,

A fines de 1975 inició su operación la planta hidroeléctrica Belisario Domínguez, mejor conocida como "La Angostura" (Chiapas, México) la cual trabaja con turbinas tipo Francis con una potencia de diseño de 920 Mw. Desde entonces se observaron serios problemas de oscilaciones estacionarias, llegando a registrarse oscilaciones del 60% de la carga bruta, cuando las máquinas trabajaban a carga parcial o a sobre carga.

En el diagnóstico⁽¹⁾ y posterior solución⁽²⁾ de este problema, pudo constatar-se que se trataba de un fenómeno de resonancia en la tubería de presión, teniendo como una fuente posible de excitación la naturaleza pulsante del flujo helicoidal (vórtice) generado en el desfogue de las turbinas cuando estas trabajan fuera de las condiciones de diseño.

Desde 1978 se realizaron múltiples campañas de medición, a fin de observar el comportamiento oscilatorio del prototipo tanto en el caracol como en el desfogue de la turbina. En las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se muestran los espectros de amplitudes obtenidos, en las campañas de medición de julio de 1979, realizadas por el Instituto de Ingeniería de la UNAM, en el desfogue de la unidad número 3 de la mencionada planta.

En ellos puede observarse que para potencias de 80 y 60 Mw (figuras 2.1 y 2.2 respectivamente), se observan pulsaciones del vórtice en 0.5 Hz aproximadamente, sin embargo para una potencia de 40 Mw (figura 2.3), se observa una fuerte componente oscilatoria de presión en 2.16 Hz, frecuencia que corresponde a la fundamental de resonancia de la tubería de presión.

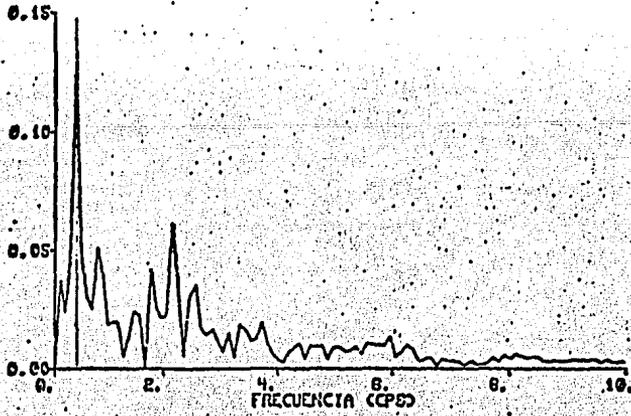


Fig 2.1 Mediciones en prototipo (80 Mw).

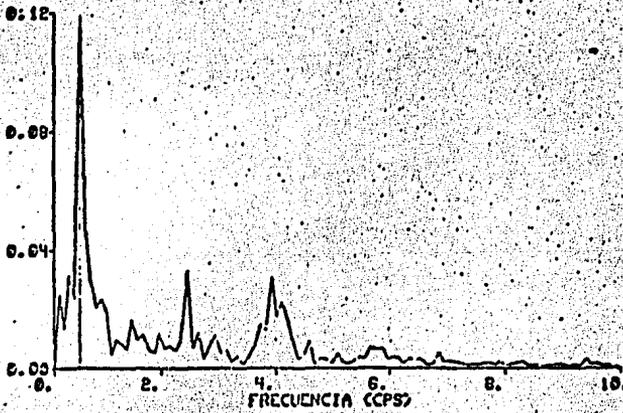


Fig 2.2 Mediciones en prototipo (60 Mw).

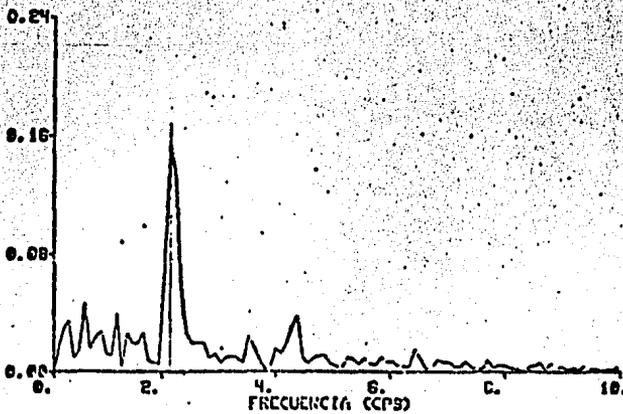


Fig 2.3 Mediciones en prototipo (40 Mw).

Este fenómeno no pudo predecirse en la etapa de proyecto de la turbina, dado que en el ensayo oscilatorio del modelo de la misma, no se reprodujo el elemento que oficia como resonador (tubería de presión). Las figuras 2.4, 2.5 y 2.6 representan los espectros de amplitudes, medidos en el modelo de la turbina y en los cuales se reproducen los puntos de operación en prototipo correspondientes a las potencias de 80, 60 y 40 Mw respectivamente.

En las figuras 2.4 y 2.5 se muestra el vórtice con una componente de baja frecuencia, semejante al del prototipo, sin embargo en la figura 2.6 no se observa el fenómeno de resonancia visto en el prototipo y mostrado en la figura 2.3.

Lo anterior pone de manifiesto la dificultad de prevenir el fenómeno de resonancia en plantas hidroeléctricas, a través de la simple inspección del ensayo oscilatorio del modelo de la turbina, donde no se reproduzca el elemento resonador.

Este problema motivó que el Instituto de Ingeniería a petición de la Comisión Federal de Electricidad de México, abordara el estudio de este fenómeno. Para esto se adoptaron dos direcciones de trabajo. La primera mediante la construcción de un modelo físico que reproduce a escala, los elementos de la unidad número 3 de la P.H. La Angostura⁽³⁾ y la segunda, mediante la instalación de geometrías simples cuyos resultados al utilizar aire como fluido de trabajo son motivo del presente trabajo. Es oportuno aclarar, que por sus características y en base a la bibliografía existente en el tema, no se tiene conocimiento de instalaciones similares en su género en todo el

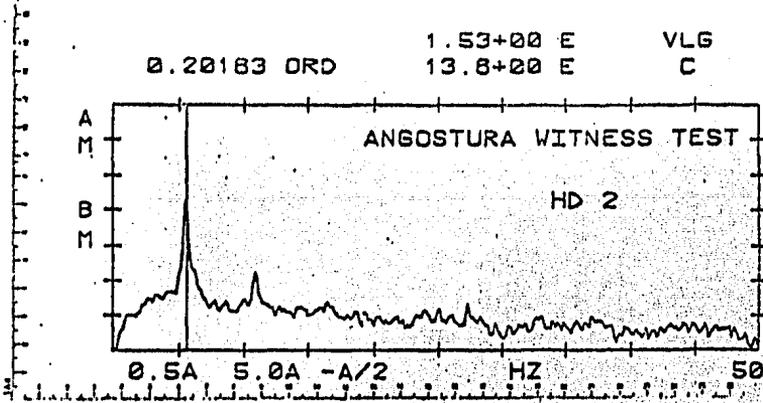


Fig 2.4 Mediciones en el modelo de la turbina (80 Mw).

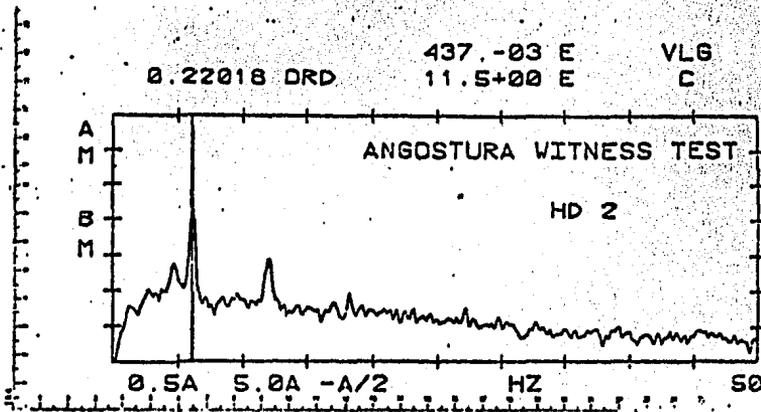


Fig 2.5 Mediciones en el modelo de la turbina (60 Mw).

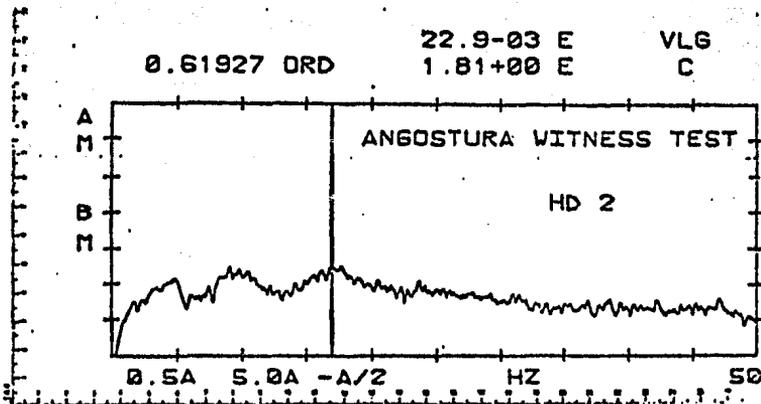


Fig 2.6 Mediciones en el modelo de la turbina (40 Mw).

mundo.

2.2 Antecedentes de las teorías de resonancia.

Dado que el problema que nos ocupa, es un fenómeno de resonancia, es oportuno revisar los antecedentes en la materia.

A este respecto, son referencias obligadas, los trabajos de Camichel, Fanelli, Wylie⁽⁴⁾, Zielke, Chaudry⁽⁵⁾ y Guarga^{(6), (7)}, entre otros. De estos trabajos, destacan los que utilizan métodos de análisis en el dominio de la frecuencia, estos se basan en la suposición de que las variaciones del gasto y la presión son periódicas, y de pequeña magnitud con respecto a sus valores medios, lo que permite establecer un modelo lineal en el dominio de la frecuencia. La excitación, en general no armónica, es descompuesta mediante una serie de Fourier, obteniéndose la respuesta del sistema para cada componente.

En este trabajo, se hará el análisis de resonancia por el método de las matrices de transferencia propuesto por Chaudry y la teoría de localización de máximos con el enfoque de la función de receptividad propuesta por Guarga.

2.3 Antecedentes del estudio de las oscilaciones de presión del flujo helicoidal.

Actualmente se conocen dos escuelas dedicadas al estudio del comportamiento oscilatorio del vórtice.

La primera sostiene que las oscilaciones del vórtice en la descarga de turbinas Francis, están necesariamente vinculadas a la presencia de un rotor. Los primeros intentos por explicar la naturaleza pulsante del vórtice corrieron a cargo de W. J. Rheingans⁽⁸⁾, quién en 1940 sostenía que la frecuencia de pulsación del vórtice varía en proporción directa con la velocidad de rotación de la turbina, siendo esta última 3.6 veces mayor que la primera. Más tarde, en esta misma corriente, las investigaciones de P. Deiraz⁽⁹⁾ en 1960 y de Y. Hosoi⁽¹⁰⁾ en 1978, ponen de manifiesto que si bien existe una relación entre la frecuencia del vórtice y la frecuencia de rotación de la turbina, ésta no es lineal como suponía Rheingans. Adicionalmente Hosoi demuestra, al utilizar agua como fluido de trabajo, la influencia de la cavitación en el fenómeno pulsante.

La segunda escuela corre a cargo del USBR en la década de los años setenta con los trabajos de J.J. Cassidy⁽¹¹⁾, H. Falvey y Cassidy⁽¹²⁾ y U. Palde⁽¹³⁾ entre otros, donde se muestra que el fenómeno pulsante no está necesariamente vinculado a la presencia de un rotor, y más bien esta ligado al momento de la cantidad de movimiento entrante en el tubo de desfogue. Sin embargo, estos trabajos tienen la limitación de solo utilizar al aire como fluido de trabajo, lo que imposibilita el estudio de la influencia de la cavitación. A este respecto, los trabajos de Nishi⁽¹⁴⁾, tienen la ventaja de que si bien siguen conceptualmente la tendencia del USBR, empero utiliza agua como fluido de trabajo, lo que permite corroborar la influencia de la cavitación en el fenómeno pulsante.

En México la investigación a este respecto, realizada por el Instituto de Ingeniería⁽¹⁵⁾, a seguido la corriente conceptual del USBR, sin embargo la instalación experimental disponible en el Instituto de Ingeniería permite utilizar aire o agua como fluidos de trabajo.

3. TEORIA DE LA RESONANCIA EN CONDUCTOS A PRESION.

En la Mecánica de Fluidos tradicional, por lo que respecta al estudio del flujo no permanente, casi toda la atención ha sido puesta en los fenómenos transitorios, esto se debe en buena medida al gran número de veces con que se presentan en los sistemas hidráulicos. Cuando una perturbación es inducida a estos sistemas, se originan oscilaciones de la presión y del gasto, que en el caso transitorio tienden a desaparecer por efecto de la fricción.

Sin embargo, bajo ciertas condiciones, es posible que las oscilaciones de presión (que son las que en la práctica interesan al ingeniero proyectista), lejos de amortiguarse, se vean amplificadas notablemente al transcurrir el tiempo. Esta condición, que depende de las características del sistema hidráulico en cuestión así como del excitador que impone la perturbación, es denominada comúnmente "Resonancia".

En el presente capítulo, se presentan las ecuaciones fundamentales para el flujo no permanente así como la solución de éstas para el caso particular de las oscilaciones estacionarias. Adicionalmente se presenta el método de las matrices de transferencia y la teoría de la función de ganancia para poder determinar en qué puntos del sistema y para qué frecuencias se producen las máximas amplitudes de la oscilación de presión.

3.1 Ecuaciones fundamentales del flujo oscilatorio.

3.1.1 Ecuaciones del flujo no permanente.

Como se demuestra en la literatura técnica correspondiente, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del flujo no permanente en un conducto a presión son la ecuación dinámica y la ecuación de continuidad, a saber respectivamente:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\xi Q^2}{2gDA^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{gA}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Donde Q y H son el gasto y la carga piezométrica respectivamente en el instante t , en un punto de abscisa x dentro de una tubería de diámetro D y área de sección transversal A . Además ξ es el factor de fricción, g es la aceleración debida a la gravedad y c es la celeridad de la onda de presión en la tubería.

Las ecuaciones anteriores son una derivación de las ecuaciones generales de conservación de cantidad de movimiento y conservación de masa respectivamente. Las hipótesis admitidas para la obtención de tales ecuaciones son:

- a) El flujo en el conducto es unidimensional.
- b) Se considera que la sección de la tubería es circular.
- c) Las paredes del conducto se comportan como un cuerpo de Hooke y el fluido como un fluido de Stokes.
- d) Las fórmulas para la determinación de las pérdidas de carga en el flujo permanente son válidas para el flujo no permanente.
- e) Adicionalmente se cumple la relación.

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \right|$$

3.1.2 Ecuaciones fundamentales aplicadas al flujo oscilatorio.

Para ello vamos a considerar que las variables Q y H de las ecuaciones (3.1) y (3.2) pueden escribirse en dos partes tal como se expresa a continuación:

$$Q = Q_0 + q^* \quad (3.3)$$

$$H = H_0 + h^* \quad (3.4)$$

Siendo Q_0 y H_0 los valores medios del gasto y la carga piezométrica respectivamente y siendo q^* y h^* las variaciones del gasto y la carga piezométrica con respecto a los valores medios.

Aplicando (3.3) y (3.4) a las ecuaciones (3.1) y (3.2) se tiene:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{1}{gA} \left(\frac{\partial Q_0}{\partial t} + \frac{\partial q^*}{\partial t} \right) + \frac{\xi}{2gDA^2} (Q_0 + q^*)^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{gA}{c^2} \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial h^*}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.6)$$

dato que

- a) $\frac{\partial Q_0}{\partial t} = \frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0$ por definición de Q_0
 b) $\frac{\partial H_0}{\partial x} = -\frac{\xi Q_0^2}{2gDA^2}$ por definición de pérdidas por fricción.
 c) $\frac{\partial H_0}{\partial t} = 0$ por definición de H_0 .

y asumiendo que

d) $|q^*/Q_0| \ll 1$

Las ecuaciones (3.5) y (3.6) se transforman en

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial q^*}{\partial t} + \frac{\xi Q_0}{gDA^2} q^* = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{gA}{c^2} \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0 \quad (3.8)$$

si derivamos la ecuación (3.7) con respecto al tiempo y la ecuación (3.8) con respecto a x , resulta respectivamente:

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial x \partial t} + \frac{1}{gA} \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} + r \frac{\partial q^*}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} + \frac{gA}{c^2} \frac{\partial^2 h^*}{\partial x \partial t} = 0 \quad (3.10)$$

siendo

$$r = \frac{\xi Q_0}{gDA^2}$$

de la ecuación (3.10) resulta que

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial x \partial t} = -\frac{c^2}{gA} \frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

sustituyendo (3.11) en (3.9)

$$-\frac{c^2}{gA} \frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} + \frac{1}{gA} \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} + r \frac{\partial q^*}{\partial t} = 0$$

finalmente

$$c^2 \frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} + \frac{\xi Q_0}{DA} \frac{\partial q^*}{\partial t} \quad (3.12)$$

por un procedimiento semejante se puede llegar a

$$c^2 \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^2} + \frac{\xi Q_0}{DA} \frac{\partial h^*}{\partial t} \quad (3.13)$$

3.1.3 Soluciones estacionarias de las ecuaciones fundamentales.

Las soluciones del sistema de ecuaciones (3.12) y (3.13) que nos interesa estudiar en el caso de oscilaciones estacionarias son tales que

$$q^*(x, t) = q^*(x, t + nT) \quad (3.14)$$

$$h^*(x, t) = h^*(x, t + nT) \quad (3.15)$$

lo que indica que q^* y h^* son funciones periódicas, donde n es un entero y T es un número real arbitrario denominado periodo de la función.

Si las soluciones además de ser periódicas cumplen con determinadas condiciones (condiciones de Dirichlet), éstas pueden expresarse por un desarrollo en

serie de Fourier, esto es equivalente a considerar que cualquier solución del tipo (3.14) y (3.15) puede expresarse como la suma de soluciones del tipo

$$q^*(x, t) = q(x) \cos \omega t = \operatorname{Re} | q(x) e^{j\omega t} | \quad (3.16)$$

$$h^*(x, t) = h(x) \cos \omega t = \operatorname{Re} | h(x) e^{j\omega t} | \quad (3.17)$$

donde $\omega = \frac{n2\pi}{T}$

Si aplicamos separadamente las n soluciones (3.16) y (3.17) a las ecuaciones (3.12) y (3.13) tendremos respectivamente:

$$c^2 \operatorname{Re} \left| \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} e^{j\omega t} \right| = - \operatorname{Re} | \omega^2 q(x) e^{j\omega t} | + \frac{EQ_0}{DA} \operatorname{Re} | j\omega q(x) e^{j\omega t} |$$

$$c^2 \operatorname{Re} \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} e^{j\omega t} \right| = - \operatorname{Re} | \omega^2 h(x) e^{j\omega t} | + \frac{EQ_0}{DA} \operatorname{Re} | j\omega h(x) e^{j\omega t} |$$

factorizando

$$\operatorname{Re} \left\{ \left| \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{EQ_0 \omega}{DAC^2} \right) q(x) \right| e^{j\omega t} \right\} = 0$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{EQ_0 \omega}{DAC^2} \right) h(x) \right| e^{j\omega t} \right\} = 0$$

de lo anterior se desprende que

$$\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{EQ_0 \omega}{DAC^2} \right) q(x) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{EQ_0 \omega}{DAC^2} \right) h(x) = 0 \quad (3.19)$$

si hacemos

$$\mu^2 = - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{EQ_0}{\omega DA} \right) \quad (3.20)$$

resulta finalmente

$$\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} - \mu^2 q(x) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} - \mu^2 h(x) = 0 \quad (3.22)$$

siendo las soluciones generales de las ecuaciones anteriores

$$q(x) = A_1 e^{\mu x} + A_2 e^{-\mu x} \quad (3.23)$$

$$h(x) = A'_1 e^{\mu x} + A'_2 e^{-\mu x} \quad (3.24)$$

3.2 Método de las matrices de transferencia.

3.2.1. Matriz de transferencia de una tubería.

En esta parte del capítulo buscaremos encontrar un procedimiento que nos permita conocer q y h (el gasto y la carga pulsante) en un extremo de la tubería, conocidos sus respectivos valores en el extremo opuesto, pudiendo ser éstos los de entrada o salida.

Si sustituimos las expresiones (3.23) y (3.24) en (3.16) y (3.17) tendremos:

$$q^*(x, t) = \text{Re} \left[(A_1 e^{\mu x} + A_2 e^{-\mu x}) e^{j\omega t} \right]$$

$$h^*(x, t) = \text{Re} \left[(A'_1 e^{\mu x} + A'_2 e^{-\mu x}) e^{j\omega t} \right]$$

sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (3.7) y (3.8) se tiene

$$A_1 \mu + j \frac{\omega q \Lambda}{c^2} A'_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$A_2 \mu - j \frac{\omega q \Lambda}{c^2} A'_2 = 0 \quad (3.26)$$

si hacemos
$$Z_c = \frac{\mu c^2}{j\omega qA} \quad (3.27)$$

resulta
$$A_1 = -\frac{A_1'}{Z_c} \quad (3.28)$$

$$A_2 = \frac{A_2'}{Z_c} \quad (3.29)$$

donde a Z_c la denominaremos "impedancia característica de la tubería".

Haciendo $A_1' = C_1'$ y $A_2' = C_2'$ de las ecuaciones (3.23) y (3.24) queda

$$q(x) = \frac{1}{-Z_c} (C_1' e^{\mu x} - C_2' e^{-\mu x}) \quad (3.30)$$

$$h(x) = C_1' e^{\mu x} + C_2' e^{-\mu x} \quad (3.31)$$

recordando que

$$\operatorname{sen} h(\mu x) = \frac{1}{2} (e^{\mu x} - e^{-\mu x})$$

$$\operatorname{cos} h(\mu x) = \frac{1}{2} (e^{\mu x} + e^{-\mu x})$$

obtenemos

$$e^{\mu x} = \operatorname{sen} h(\mu x) + \operatorname{cos} h(\mu x) \quad \text{y} \quad e^{-\mu x} = \operatorname{cos} h(\mu x) - \operatorname{sen} h(\mu x)$$

además denotando

$$C_1'' = -\left(\frac{C_1' + C_2'}{Z_c}\right) \quad \text{y} \quad C_2'' = -\left(\frac{C_1' - C_2'}{Z_c}\right)$$

resulta

$$q(x) = C_1'' \operatorname{sen} h(\mu x) + C_2'' \operatorname{cos} h(\mu x) \quad (3.32)$$

$$h(x) = -Z_c | C_2'' \operatorname{sen} h(\mu x) + C_1'' \operatorname{cos} h(\mu x) | \quad (3.33)$$

Consideremos ahora un tramo de tubería de longitud l como se muestra en la figura 3.1.

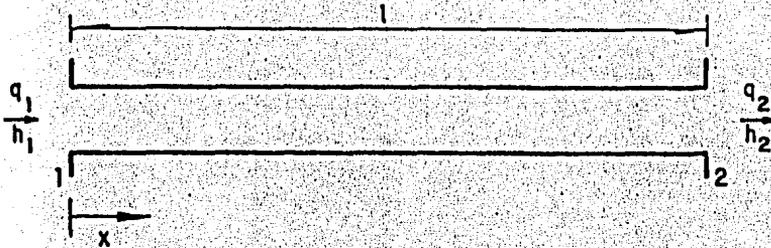


Fig 3.1 Tubería uniforme.

Aplicando a las ecuaciones (3.32) y (3.33) las condiciones de frontera correspondientes, se tiene:

$$\text{en } x = 0 \quad ; \quad q_1 = C_2'' \quad (3.34)$$

$$h_1 = -Zc C_1'' \quad (3.35)$$

$$\text{en } x=l \quad ; \quad q_2 = C_1'' \operatorname{sen} h(\mu l) + C_2'' \operatorname{cos} h(\mu l) \quad (3.36)$$

$$h_2 = -Zc [C_2'' \operatorname{sen} h(\mu l) + C_1'' \operatorname{cos} h(\mu l)] \quad (3.37)$$

sustituyendo (3.34) y (3.35) en (3.36) y (3.37)

$$q_2 = -\frac{1}{Zc} \operatorname{sen} h(\mu l) h_1 + \operatorname{cos} h(\mu l) q_1 \quad (3.38)$$

$$h_2 = -Zc \operatorname{sen} h(\mu l) q_1 + \operatorname{cos} h(\mu l) h_1 \quad (3.39)$$

llevando las ecuaciones anteriores a una forma matricial de tercer orden resulta

$$\begin{pmatrix} q \\ h \\ 1 \end{pmatrix}_1 = M_{\ell} \begin{pmatrix} q \\ h \\ 1 \end{pmatrix}_2 \quad (3.40)$$

siendo

$$M_{\ell} = \begin{pmatrix} \cosh(\mu\ell) - \frac{1}{\nu c} \sinh(\mu\ell) & 0 \\ -Ac \sinh(\mu\ell) & \cosh(\mu\ell) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

la matriz de transferencia de una tubería.

Si despreciamos el efecto de la fricción, lo cual en general sólo es posible si en la ecuación (3.20) podemos considerar

$$\frac{Q\omega E}{\omega DA} \ll 1$$

entonces la matriz de transferencia resultante sería

$$M_{\ell} = \begin{pmatrix} \cos(\omega\ell/c) - \frac{1}{Zc} \sin(\omega\ell/c) & 0 \\ -jZc \sin(\omega\ell/c) & \cos(\omega\ell/c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

donde

$$Zc = \frac{c}{gA} \quad (3.43)$$

Si consideramos además parámetros concentrados, esto es

$$\omega\ell/c \ll 1$$

la matriz será

$$M_{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -j\omega\ell/gA & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

3.2.2 Matriz de transferencia de las singularidades.

Es lógico suponer que el comportamiento oscilatorio de la carga y el gasto en un sistema de conductos a presión se ve afectado por la presencia de elementos cuyo efecto puede considerarse concentrado en un punto, tal efecto es representado por la matriz de transferencia de este elemento. De igual forma que para una tubería, en la derivación de la matriz de transferencia de una singularidad sólo se requiere del planteamiento de las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento, las cuales, atendiendo a la figura 3.2, pueden escribirse de la siguiente forma.



Fig 3.2 Singularidad.

$$Q_2 = \Pi_1 (Q_1, \dot{H}_1, \phi) \quad (3.45)$$

$$H_2 = \Pi_2 (Q_1, \dot{Q}_1, H_1, \Lambda) \quad (3.46)$$

siendo \dot{H}_1 y \dot{Q}_1 las primeras derivadas de la carga piezométrica y el gasto y ϕ y Λ funciones que dependen de la singularidad en cuestión.

Desarrollando las funciones Π_1 y Π_2 en serie de Taylor;

$$Q_2 - Q_0 = \Pi_{1Q} \Delta Q_1 + \Pi_{1H} \dot{\Delta H}_1 + \Pi_{1\phi} \Delta \phi + \frac{1}{2} (\Pi_{1QQ} \Delta Q_1^2 + \dots)$$

$$H_2 - H_0 = \Pi_{2Q} \Delta Q_1 + \Pi_{2\dot{Q}} \dot{\Delta Q}_1 + \Pi_{2H} \Delta H_1 + \Pi_{2\Lambda} \Delta \Lambda + \frac{1}{2} (\Pi_{2QQ} \Delta Q_1^2 + \dots)$$

despreciando términos de orden superior;

$$Q_2 - Q_{02} = (Q_1 - Q_{01}) \Pi_{1Q} + (H_1 - H_0) \Pi_{1H} + (\phi - \phi_0) \Pi_{1\phi} \quad (3.47)$$

$$H_2 - H_{02} = (Q_1 - Q_{01}) \Pi_{2Q} + (Q_1 - Q_{01}) \Pi_{2Q} + (H_1 - H_0) \Pi_{2H} + (\Lambda - \Lambda_0) \Pi_{2\Lambda} \quad (3.48)$$

donde por ejemplo;

$$\Pi_{1Q} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial Q}$$

de las ecuaciones (3.3) y (3.4), además considerando

$$\phi = \phi_0 + \phi^* \quad (3.49)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \lambda^* \quad (3.50)$$

las ecuaciones (3.47) y (3.48) se transforman en

$$q_2^* = q_1^* \Pi_{1Q} + h_1^* \Pi_{1H} + \phi^* \Pi_{1\phi} \quad (3.51)$$

$$h_2^* = q_1^* \Pi_{2Q} + q_1^* \Pi_{2Q} + h_1^* \Pi_{2H} + \lambda^* \Pi_{2\Lambda} \quad (3.52)$$

considerando además de las soluciones (3.16) y (3.17) las siguientes

$$\phi^* = \phi \cos \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \phi e^{j\omega t} \right\} \quad (3.53)$$

$$\lambda^* = \lambda \cos \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \lambda e^{j\omega t} \right\} \quad (3.54)$$

resulta

$$\operatorname{Re} \left\{ (\alpha_2 - \Pi_{1Q} q_1 - \Pi_{1H} j \omega h_1 - \Pi_{1\phi} \phi) e^{j\omega t} \right\} = 0$$

$$\operatorname{Re} \left\{ (h_2 - \Pi_{2Q} q_1 - \Pi_{2Q} j \omega q_1 - \Pi_{2H} h_1 - \Pi_{2\Lambda} \lambda) e^{j\omega t} \right\} = 0$$

finalmente

$$\alpha_2 = \Pi_{1Q} q_1 + j \omega \Pi_{1H} h_1 + \Pi_{1\phi} \phi \quad (3.55)$$

$$h_2 = (\Pi_{2Q} + j \omega \Pi_{2Q}) q_1 + \Pi_{2H} h_1 + \Pi_{2\Lambda} \lambda \quad (3.56)$$

llevando estas ecuaciones a una forma matricial de tercer orden

$$\begin{pmatrix} q \\ h \\ 1 \end{pmatrix}_2 = M_S \begin{pmatrix} q \\ h \\ 1 \end{pmatrix}_1 \quad (3.57)$$

siendo

$$M_S = \begin{pmatrix} \Pi_{1Q} & j \omega \Pi_{1H} & \tilde{q} \\ \Pi_{2Q} + j \omega \Pi_{2Q} & \Pi_{2H} & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

la matriz de transferencia general de una singularidad, donde

$$\tilde{q} = \Pi_{1\phi} \phi \quad \text{y} \quad \tilde{h} = \Pi_{2\lambda} \lambda$$

Podemos concluir finalmente que, conocidas las ecuaciones de conservación

(Π_1 y Π_2) para una singularidad, es posible determinar la matriz de transferencia correspondiente.

A manera de ejemplo, deduciremos la matriz de transferencia de una válvula oscilante como la mostrada en la figura 3.3.

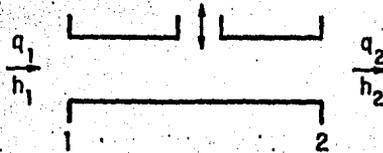


Fig 3.3 Válvula oscilante.

planteando las ecuaciones de conservación resulta

$$Q_2 = Q_1$$

$$H_2 = H_1 - K Q_1^2$$

donde $K = k (1 + \Lambda)$ es la constante de pérdidas de la válvula que dependen de la función de apertura Λ .

Considerando en la ecuación (3.50) que $\Lambda_0 = 0$ y de (3.54);

$$\Lambda = \operatorname{Re} |\lambda e^{j\omega t}|$$

evaluando los elementos de la matriz (3.58), se tiene

$$\Pi_{1Q} = 1, \quad j \omega \Pi_{1H} = 0, \quad \Pi_{1\phi} = 0$$

$$\Pi_{2Q} + j \omega \Pi_{2Q} = -2KQ_0, \quad \Pi_{2H} = 1, \quad \hat{h} = \Pi_{2\Lambda} \lambda = -k Q_0^2 \lambda$$

La matriz de transferencia buscada será

$$M_{vo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2KQ_0 & 1 & \hat{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\hat{h} = -k Q_0^2 \lambda$$

3.2.3 Aplicación del método de las matrices de transferencia.

En lo que sigue veremos, a partir del ejemplo de la figura 3.4, cómo se aplica el método de las matrices de transferencia a un sistema hidráulico sin ramificaciones. Existe sin embargo, en la literatura técnica información sobre la aplicación de este método a los sistemas con ramificaciones.

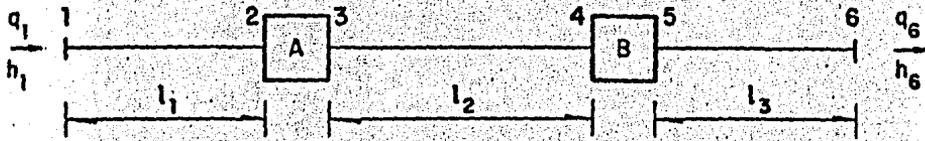


Fig 3.4 Sistema de conductos en serie.

Si denominamos con la letra z_i al vector columna cuyos elementos son el gasto pulsante, la carga piezométrica pulsante y la unidad en el punto i , tendremos

$$z_i = \begin{pmatrix} q \\ h \\ 1 \end{pmatrix}_i \quad (3.59)$$

Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z_2 &= M_{l1} z_1 \\ z_3 &= M_A z_2 \\ z_4 &= M_{l2} z_3 \\ z_5 &= M_B z_4 \\ z_6 &= M_{l3} z_5 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Donde M_{l1} , M_{l2} y M_{l3} son las matrices de transferencia de los tramos de tubería 1, 2 y 3 respectivamente y además M_A y M_B son las matrices correspondientes a las singularidades A y B.

Sustituyendo sucesivamente las relaciones (3.60) resulta

$$z_6 = M_T z_1 \quad (3.61)$$

donde $M_T = M_{\rho 3} M_B M_{\rho 2} M_A M_{\rho 1}$ es la matriz total del sistema considerado. Es importante aclarar que la multiplicación de matrices no es conmutativa por lo que el orden en que éstas deben multiplicarse debe ser el indicado.

3.3 Resonancia y teoría de la función de receptividad en tuberías uniformes.

En lo que sigue estudiaremos las oscilaciones periódicas de la carga piezométrica (h) definiendo las condiciones de resonancia en una tubería uniforme perteneciente a un sistema hidráulico a presión. El excitador de las oscilaciones podrá ubicarse en el subsistema localizado aguas abajo de la tubería estudiada (sistema tipo I) o agua arriba de la tubería (sistemas tipo II). Por linealidad del modelo utilizado (método de las matrices de transferencia) todo arreglo de los excitadores dentro del sistema puede obtenerse como combinación de sistemas del tipo I y del tipo II. Por conveniencia, sólo se mostrará el cálculo de h para los sistemas tipo I, siendo los procedimientos de cálculo completamente análogos para los sistemas tipo II.

3.3.1 Cálculo de h para los sistemas del tipo I.

Para calcular h en x , ω se requiere de las condiciones de frontera en 1 y 2 (ver figura 3.5). Dichas condiciones en un sistema tipo I, son las siguientes:

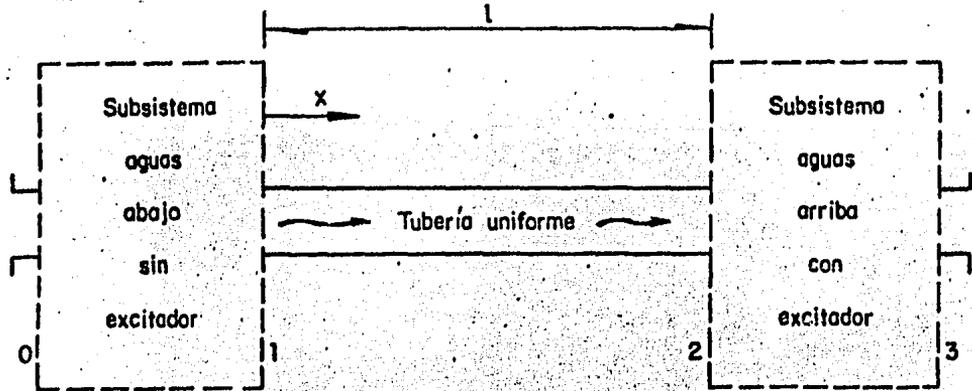


Fig 3.5 Sistema tipo I.

$$h_1 = Z_1 q_1 \quad (3.62)$$

$$h_2 = Z_2 q_2 + \tilde{e} \quad (3.63)$$

siendo Z_1 y Z_2 impedancias complejas que dependen de las características de los respectivos subsistemas y de la frecuencia ω de la oscilación. Z_1 depende del subsistema aguas arriba y Z_2 depende del subsistema aguas abajo; \tilde{e} es el término de excitación.

Se puede demostrar, en la literatura correspondiente, que las condiciones de frontera (3.62) y (3.63) son generales y expresan las condiciones que todo sistema del tipo I impone sobre la tubería estudiada.

Aplicando (3.41) a la tubería considerada se tiene

$$q_2 = |\cos h(\mu l)| q_1 + \left| -\frac{1}{Z_c} \operatorname{sen} h(\mu l) \right| h_1 \quad (3.64)$$

$$h_2 = \left| -Z_c \operatorname{sen} h(\mu l) \right| q_1 + |\cos h(\mu l)| h_1 \quad (3.65)$$

Utilizando (3.62) se elimina h_1 de (3.64) y (3.65) quedando q_2 y h_2 en función de q_1 . Empleando (3.63) se obtiene una ecuación lineal en q_1 cuya solución es:

$$q_1 = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{\hat{e}}{\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right) \cosh(\mu l) + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right) \sinh(\mu l)} \quad (3.66)$$

Aplicando ahora (3.41) para un tramo de tubería que va desde el extremo aguas arriba 1 al punto de abscisa x y sustituyendo h_1 por $Z_1 q_1$ se tiene

$$h(x, \omega) = |Z_1 \cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)| q_1 \quad (3.67)$$

Sustituyendo q_1 en (3.67) por la expresión hallada en (3.66) se tiene finalmente para h :

$$h(x, \omega) = \left| \frac{Z_1}{Z_c} \cosh(\mu x) - \sinh(\mu x) \right| \cdot \frac{\hat{e}}{\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right) \cosh(\mu l) + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right) \sinh(\mu l)} \quad (3.68)$$

Esta es la expresión más general posible de $h(x, \omega)$ en un sistema tipo I.

3.3.2 Función de ganancia, receptividad y forma modal.

Es conveniente formular la expresión (3.68) en función de variables adimensionales definidas en el campo real. Para ello se introducirán las siguientes variables adimensionadas reales.

$$\Omega = \frac{\omega l}{c}, \quad x = \frac{x}{l}, \quad v = \frac{rgAl}{c} \quad (3.69)$$

$$\beta_i = \frac{|Z_i|}{c/gA}, \quad \theta_i = \text{Arg } Z_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.70)$$

Recordando las expresiones de r , μ y Z_c y aplicando las variables definidas en (3.69) se tiene:

$$\mu l = \Omega^{1/2} (-\Omega + j\nu)^{1/2} \quad (3.71)$$

$$\mu x = \mu l X = \Omega^{1/2} (-\Omega + j\nu)^{1/2} X \quad (3.72)$$

$$Z_c = \frac{\mu l}{j\Omega} \cdot \frac{C}{gA} \quad (3.73)$$

Utilizando las variables definidas en (3.70), los cocientes de impedancia que aparecen en las expresiones de h , pueden expresarse como

$$\frac{Z_i}{Z_c} = \beta_i e^{j\theta_i} \left(\frac{j\Omega}{\mu l} \right) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.74)$$

En consecuencia se tiene que

$$\frac{h}{e} = \Psi (X, \Omega, \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2) \quad (3.75)$$

siendo Ψ la función que resulta de dividir entre e la expresión (3.68) y realizar los cambios de variable indicados anteriormente. Como en general β_i y θ_i son constantes o funciones de Ω , la función (3.75) puede ponerse como

$$\frac{h}{e} = \Gamma (X, \Omega) \quad (3.76)$$

De la función (3.76) interesa su módulo. Se define entonces la "función de ganancia" $|\Gamma| = G$, utilizando la expresión (3.68) de $h(x, \omega)$, se obtiene

$$G(X, \Omega) = \frac{\left| \frac{Z_1}{Z_c} \cos h(\mu l X) - \operatorname{sen} h(\mu l X) \right|}{\left| \left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c} \right) \cos h(\mu l) + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1 \right) \operatorname{sen} h(\mu l) \right|} \quad (3.77)$$

La función G establece la ganancia o amplificación en cada punto X y para cada frecuencia Ω entre la amplitud de la excitación $|e^0|$ y la amplitud de la oscilación de la carga piezométrica $|h|$ en ese punto X de la tubería y para la frecuencia Ω .

Nótese que X y Ω son variables reales y G es una función de dos variables reales a valor también real. El campo de definición de G es la región del plano X, Ω .

$$0 \leq X \leq 1, \quad \Omega_m < \Omega < \Omega_M \quad (3.78)$$

siendo Ω_m la frecuencia adimensional mínima y Ω_M la máxima que interesen estudiar en cada caso.

De la expresión (3.77) se deduce que la función G puede escribirse como el producto de dos funciones

$$G = R(\Omega) F(X, \Omega) \quad (3.79)$$

siendo respectivamente

$$R(\Omega) = \frac{1}{\left| \left(\frac{Z_1}{Z_C} - \frac{Z_2}{Z_C} \right) \cos h(\mu \ell) + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_C^2} - 1 \right) \operatorname{sen} h(\mu \ell) \right|} \quad (3.80)$$

que se denominará "receptividad" de la tubería y

$$F(X, \Omega) = \left| \frac{Z_1}{Z_C} \cos h(\mu \ell X) - \operatorname{sen} h(\mu \ell X) \right| \quad (3.81)$$

que se denominará "forma modal" de la oscilación.

En el caso particular de fricción distribuida nula ($\nu = 0$) y Z_1 constante, se tiene que $\mu\lambda = j\Omega$ por lo que

$$F(X, \Omega) = F(X\Omega) \quad (3.82)$$

Por lo tanto, bajo estas hipótesis, la forma modal depende del producto $X\Omega$. Lo cual como se verá más adelante simplifica notablemente los cálculos.

3.3.3 Determinación de las frecuencias de resonancia y de los puntos peligrosos.

Examinando la expresión (3.77) es evidente que los puntos X_0 de la tubería y las frecuencias Ω_0 de la excitación que hacen máxima la ganancia G son de interés, pues en estos puntos y para estas frecuencias se producirán las máximas ganancias o amplificación entre la amplitud de la excitación $|\dot{e}|$ y la amplitud de la oscilación de la carga piezométrica $|h|$ en la tubería. En consecuencia se definirán los siguientes conceptos:

Frecuencias de resonancia.- Son las frecuencias Ω_0 , que producen máximas ganancias entre la amplitud de la excitación $|\dot{e}|$ y la amplitud de la oscilación de la carga piezométrica $|h|$ en los "puntos peligrosos" X_0 .

Puntos peligrosos.- Son los puntos X_0 en los que para las "frecuencias de resonancia" Ω_0 se producen las máximas ganancias entre $|\tilde{e}|$ y $|h|$.

Lo anterior indica que las frecuencias de resonancia y los puntos peligrosos correspondientes se pueden determinar resolviendo el siguiente problema matemático.

$$\max G \quad (3.83)$$

en la región (3.78) del plano X, Ω .

Para resolver este problema puede procederse numéricamente, calculando la función G en los puntos de una malla suficientemente cerrada en la región (3.78) y por comparación en los nudos inmediatos localizarse los máximos de G .

También puede procederse analíticamente resolviendo, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial G}{\partial X} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial \Omega} = 0 \quad (3.84)$$

en la región (3.78)

Para distinguir las soluciones correspondientes a los máximos se procede de la siguiente manera: primero se calcula

$$A = \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 G}{\partial X \partial \Omega} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 G}{\partial \Omega^2} \quad (3.85)$$

$$V = AC - B^2 \quad (3.86)$$

Si para una solución determinada del sistema (3.84), se verifica que $\nabla > 0$ y $A > 0$ dicho punto estacionario corresponde a un máximo.

El procedimiento general de solución planteado admite considerables simplificaciones cuando la fricción distribuida es nula ($\nu = 0$) y la impedancia Z_1 es constante, en tal caso resulta que

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{\partial R(\Omega) F(X\Omega)}{\partial X} = R(\Omega) F' \Omega = 0 \quad (3.87)$$

donde $F' = \frac{dF}{d\eta}$ siendo $\eta = X\Omega$. Desechando soluciones triviales resulta que

$$F'(X\Omega) = 0 \quad (3.88)$$

Por otro lado debe verificarse que

$$\frac{\partial G}{\partial \Omega} = \frac{dR}{d\Omega} F + R F'_1 X = 0 \quad (3.89)$$

Al verificarse simultáneamente (3.88) y (3.89), de (3.89) resulta que

$$\frac{dR}{d\Omega} F = 0 \quad (3.90)$$

lo cual equivale a

$$\frac{dR}{d\Omega} = 0 \quad (3.91)$$

pues $F(X_0 \Omega_0)$ debe ser un máximo de la forma modal y por lo tanto no nulo.

Se ha demostrado entonces que para una tubería con fricción distribuida nula y Z_1 constante, las frecuencias de resonancia son aquellas que hacen máxima la función de receptividad R .

Los puntos peligrosos en la tubería se obtienen para cada una de las frecuen-

cias de resonancia halladas a partir de (3.91) resolviendo para X la ecuación resultante de (3.88) y escogiendo entre las soluciones aquéllas que corresponden a máximos de la forma modal correspondiente.

En la práctica son muy frecuentes los sistemas en los cuales se cumple que $\nu = 0$ y además Z_1 y Z_2 sean constantes y reales. Este es un caso particular de lo visto anteriormente por lo que son válidas las expresiones desarrolladas, con tal que se cumplan las condiciones mencionadas.

La función $R(\Omega)$ bajo las hipótesis realizadas, es la siguiente:

$$R(\Omega) = \frac{1}{\left| \left(\frac{Z_1}{ZC} - \frac{Z_2}{ZC} \right) \cos \Omega + j \left(\frac{Z_1 Z_2}{ZC^2} - 1 \right) \sin \Omega \right|} \quad (3.92)$$

de donde

$$R(\Omega) = \frac{1}{\left| \left(\frac{Z_1}{ZC} - \frac{Z_2}{ZC} \right)^2 \cos^2 \Omega + \left(\frac{Z_1 Z_2}{ZC^2} - 1 \right)^2 \sin^2 \Omega \right|^{1/2}} \quad (3.93)$$

lo cual puede escribirse como

$$R = \frac{1}{(C_1 + C_2 \sin^2 \Omega)^{1/2}} \quad (3.94)$$

donde

$$C_1 = \left(\frac{Z_1}{ZC} - \frac{Z_2}{ZC} \right)^2 \quad (3.95)$$

$$y \quad C_2 = \left(\frac{Z_1 Z_2}{ZC^2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{Z_1}{ZC} - \frac{Z_2}{ZC} \right)^2 \quad (3.96)$$

aplicando (3.91) a (3.92) se tiene

$$\frac{dR}{d\Omega} = - \frac{C_2 \sin 2\Omega}{(C_1 + C_2 \sin^2 \Omega)^{3/2}} = 0 \quad (3.97)$$

Los máximos de R se ubicarán, de acuerdo al signo de C_2 , en:

$$C_2 > 0 \quad \Omega = m \pi \quad m = 1, 2, \dots$$

$$C_2 < 0 \quad \Omega = (2m - 1) \frac{\pi}{2} \quad m = 1, 2, \dots$$

Se concluye que el signo de C_2 es el que determina la ubicación de los máximos de R (Ω) y en consecuencia las frecuencias de resonancia de la tubería.

Es de notar que en los sistemas que verifican las hipótesis realizadas, el cálculo de las frecuencias de resonancia de la tubería se reduce a determinar Z_1 , Z_2 y Z_c con los datos del problema y localizar un punto en un diagrama tan simple como el de la figura 3.6.

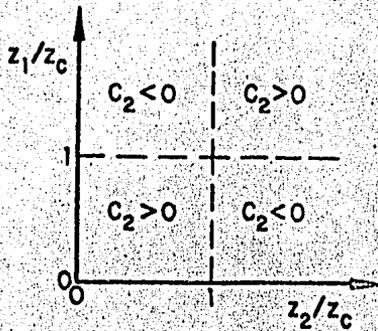


Fig 3.6 Diagrama Z_1/Z_c vs. Z_2/Z_c .

4. OSCILACIONES DE PRESION DEL FLUJO HELICOIDAL.

En el capítulo anterior, vimos cómo una tubería puede comportarse como un resonador bajo la acción de un excitador; sin embargo, nada mencionamos sobre éste último.

En el caso de una planta hidroeléctrica la tubería de presión constituye un buen resonador, mientras que una fuente posible de excitación es la naturaleza pulsante del flujo helicoidal (vórtice) que se genera en la descarga de las turbinas Francis, cuando éstas trabajan a carga parcial o a sobrecarga.

En este capítulo será expuesto el método del momento de la cantidad de movimiento (M.M.C.M.) para el estudio de las oscilaciones de presión debidas al vórtice y finalmente se dará a conocer los resultados de la investigación

realizada en México a cargo del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.

4.1 Método del momento de la cantidad de movimiento del flujo helicoidal.

El M.M.C.M. desarrollado por el U.S.B.R. se basa en la hipótesis de que para un conducto de sección circular se verifica que

$$\frac{fD^3}{Q_0} = F \left(\frac{\bar{\Omega}D}{\rho Q_0^2}, Re, Geometría \right) \quad (4.1)$$

donde f es la frecuencia de pulsación del vórtice,
 D es el diámetro del tubo de desfogue,
 Q_0 es el gasto medio,
 $\bar{\Omega}$ es el momento de la cantidad de movimiento del flujo entrante, respecto a un punto del eje del ducto, proyectado sobre dicho eje,
 ρ es la densidad del fluido y
 Re es el número de Reynolds medio del flujo.

El parámetro adimensional $\frac{\bar{\Omega}D}{\rho Q_0^2}$ es denominado "parámetro de giro" (PG).

Si además el fluido de trabajo es el agua, en la relación (4.1) se debe incorporar el efecto de la cavitación;

$$\frac{fD^3}{Q_0} = F \left(\frac{\bar{\Omega}D}{\rho Q_0^2}, Re, Kc, Geometría \right) \quad (4.2)$$

Siendo $K_c = (P_r - P_v) / (\rho v^2 / 2)$ el parámetro de cavitación, donde

P_r es la presión en un punto representativo,

P_v es la presión de vapor y

v es la velocidad media del flujo

4.1.1 Aplicación del M.M.C.M. a un sistema estático de álabes.

El flujo helicoidal puede ser generado por un sistema estático de álabes como el esquematizado en la figura 4.1. En atención a esta figura puede demostrarse que

$$\bar{\Omega} = \rho R' V_o Q_o \sin \alpha_f \quad (4.3)$$

donde R' es el radio indicado en la figura 4.1,

V_o es la velocidad máxima a través de los álabes y

α_f es el ángulo que forma la línea radial con los álabes.

Además, el gasto puede expresarse como

$$Q_o = BNSV_o \quad (4.4)$$

donde B es la altura de los álabes,

N es el número de álabes y

S es la distancia mínima entre álabes.

Sustituyendo (4.3) y (4.4) en la definición del parámetro de giro, resulta que

$$\frac{\bar{\Omega} D}{\rho Q_o^2} = \frac{D R' \sin \alpha_f}{B N S} \quad (4.5)$$

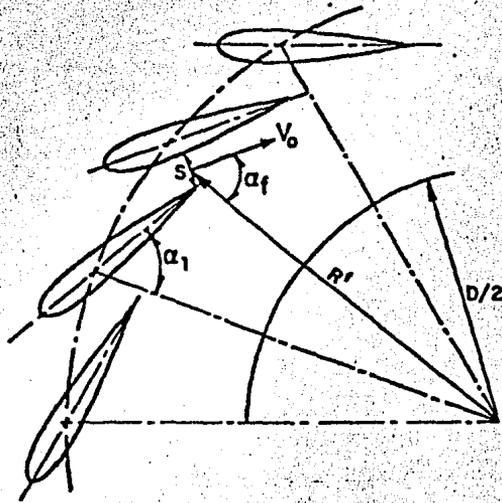


Fig 4.1 Esquema de definición de R' , S y α_f .

Es importante notar que PG depende exclusivamente de la geometría del sistema de álabes y del diámetro de entrada al tubo de desfogue.

Para calcular PG se utiliza el método gráfico desarrollado por el U.S.B.R. Este consiste en determinar, dado un sistema de álabes (B y N constantes), los valores R, α_f y S en forma gráfica, suponiendo que la dirección del flujo al abandonar los álabes es perpendicular a la distancia mínima S entre álabes.

4.1.2 Aplicación del M.M.C.M. a una turbina Francis.

La aplicación del M.M.C.M. a una turbina Francis implica conocer en la relación (4.2) cuál es el valor de PG en la entrada del tubo de desfogue. Para ello nos apoyamos en la definición del momento total T' aplicado al rotor de una turbina por el fluido, a saber

$$T' = \bar{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_2 \quad (4.6)$$

donde $\bar{\Omega}_1$ y $\bar{\Omega}_2$ son el momento de la cantidad de movimiento del flujo, respecto a un punto del eje del ducto, proyectado sobre el eje del mismo antes y después de pasar por el rotor respectivamente.

Recordando que

$$T' = P/\omega' \quad (4.7)$$

donde P es la potencia en el eje de la máquina y

ω' es la velocidad angular de rotación del rodete.

Podemos calcular PG a la entrada del tubo de desfogue multiplicando la expresión (4.6) por $D/\rho Q_0^2$ y arreglando:

$$\frac{\bar{n}_2 D}{\rho Q_0^2} = \frac{\bar{n}_1 D}{\rho Q_0^2} - \frac{T'D}{\rho Q_0^2}$$

Si conocemos la geometría de los álabes del distribuidor podemos determinar, como lo vimos en el inciso anterior, dado que el distribuidor de una turbina Francis también es un sistema estático de álabes, a partir de la expresión (4.5), PG a la entrada del rodete. Utilizando adicionalmente la relación (4.7) resulta que

$$\frac{\bar{n}_2 D}{\rho Q_0^2} = \frac{D R' \operatorname{sen} \alpha_f}{B N S} - \frac{P D}{\rho \omega^2 Q_0^2} \quad (4.8)$$

Es éste el PG que deberá incluirse en la relación (4.2).

4.2 Estudio experimental del vórtice realizado por el Instituto de Ingeniería.

4.2.1 Resultados obtenidos.

Si bien en el informe que para el efecto realizó el I. I. se dan a conocer los resultados de las mediciones del campo oscilatorio de presiones en tubos rectos y en el modelo del desfogue de la P.H. La Angostura, además del campo de velocidades en tubos rectos usando anemometría LASER, aquí sólo reproduciremos los resultados en los tubos de desfogue cilíndricos por ser éstos los utilizados en este trabajo.

En la instalación, que se presenta en la figura 4.2, se realizaron mediciones en tubos de desfogue cilíndricos con un diámetro interior de 0,1 m y las siguientes relaciones longitud-diámetro, $L/D = 1.82, 3.45, 6.19, 12.49,$

- 1 Suministro de agua al sistema
- 2 Ventilador centrífugo
- 3 Carguero de regulación de gases
- 4 Tubería de suministro de aire
- 5 Orificio alarador de gases
- 6 Tubería de suministro de agua
- 7 Barreros tranquilizadores
- 8 Tanque de carga constante o tanque pleno de aire
- 9 Tubería de drenaje (opera sólo con agua)
- 10 Tanque de entrada al sistema de bombas
- 11 Tubo de desfogue (intercambiables)
- 12 Tanque de descarga
- 13 Tubo de nivel de agua
- 14 Tubería de succión de la bomba
- 15 Bomba centrífuga
- 16 Verederos para medición de gases
- 17 Manómetros diferenciales tipo "U"
- 18 Compresor de aire
- 19 Tubería de aire comprimido
- 20 Válvula de control de la cavitación
- 21 Regulador de flujo

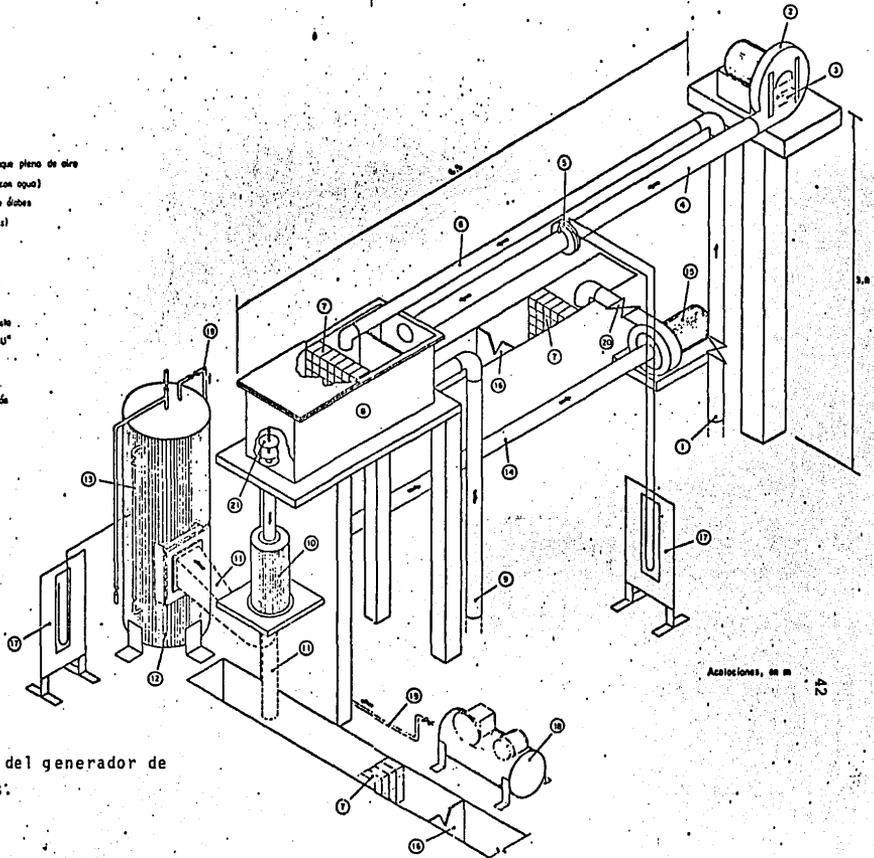


Fig 4.2 Esquema del generador de vórtices.

18.69 y 24.94, donde L es la longitud total del tubo. El giro fue impartido al fluido (aire) mediante una serie de juegos de álabes fijos intercambiables que permiten obtener, como vimos anteriormente, valores precisos de PG , a saber: $PG = 0.330, 0.507, 0.774, 1.063, 1.397, 2.126, 2.914$ y 4.010 .

Las seis geometrías fueron ensayadas con los ocho valores de PG . Se midió para cada desfogue y cada PG la frecuencia de la oscilación de presión para diferentes gastos de operación, se realizaron las mediciones en los extremos aguas arriba y aguas abajo de los tubos. El equipo utilizado para medir las oscilaciones de presión en los tubos de desfogue fué el mismo que el utilizado en el presente trabajo por lo que su descripción será realizada en el siguiente capítulo.

Las figuras 4.3 a 4.9 resumen el trabajo experimental realizado.

4.2.2 Conclusiones.

A partir de los resultados experimentales expuestos, para tubos cilíndricos rectos y utilizando al aire como fluido de trabajo, puede concluirse lo siguiente:

A.- De la figura 4.3 a 4.8 puede concluirse que el parámetro de frecuencias no depende del número de Reynolds para $Re > 80,000$

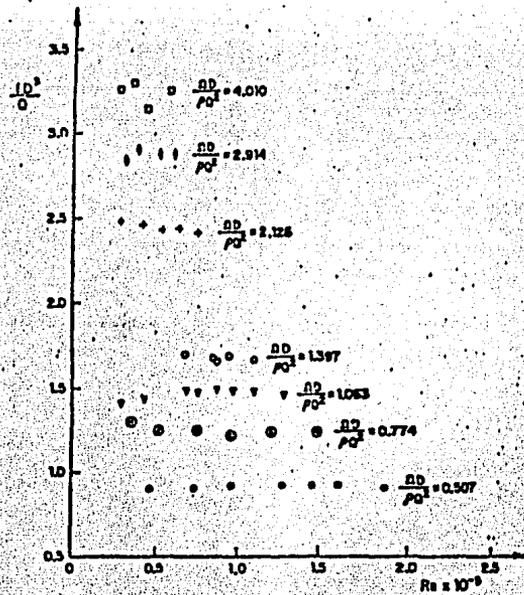


Fig 4.3 Parâmetro de frequência vs. número de Reynolds, $L/D = 1.82$

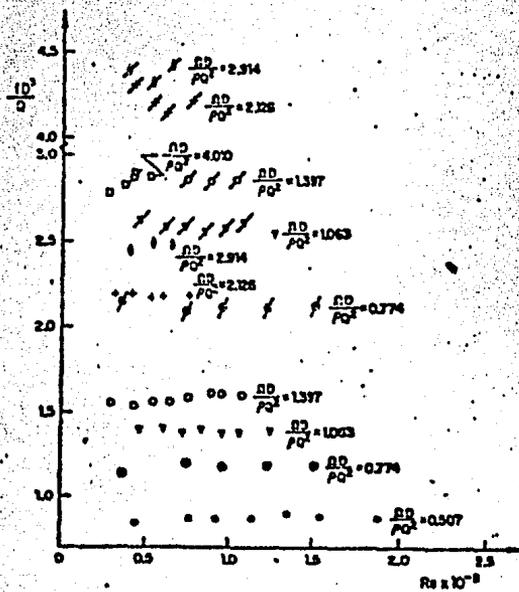


Fig 4.4 Parâmetro de frequência vs. número de Reynolds, $L/D = 3.45$

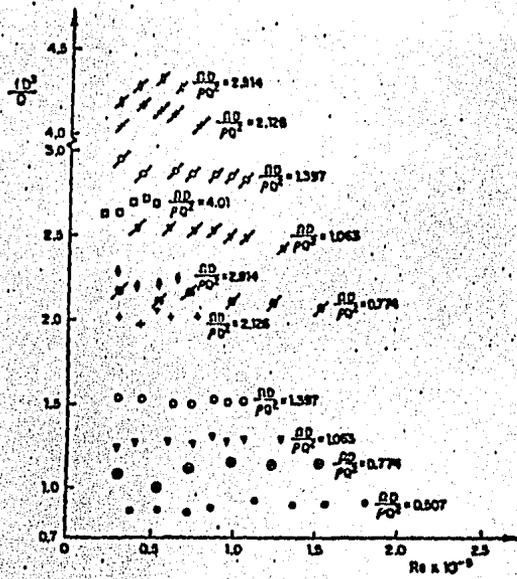


Fig 4.5 Parámetro de frecuencia vs. número de Reynolds, $L/D = 6.19$.

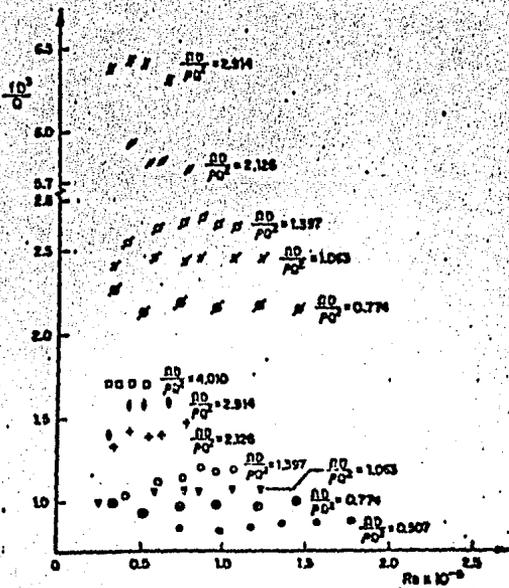


Fig 4.6 Parámetro de frecuencia vs. número de Reynolds, $L/D = 12.49$.

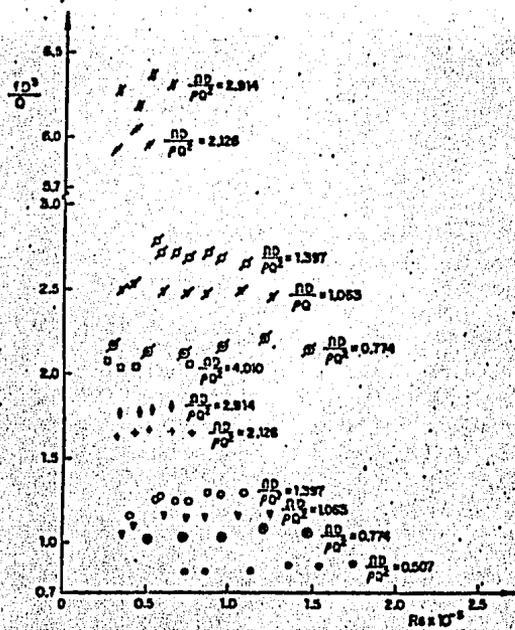


Fig 4.7 Parámetro de frecuencia vs número de Reynolds, L/D = 18.69

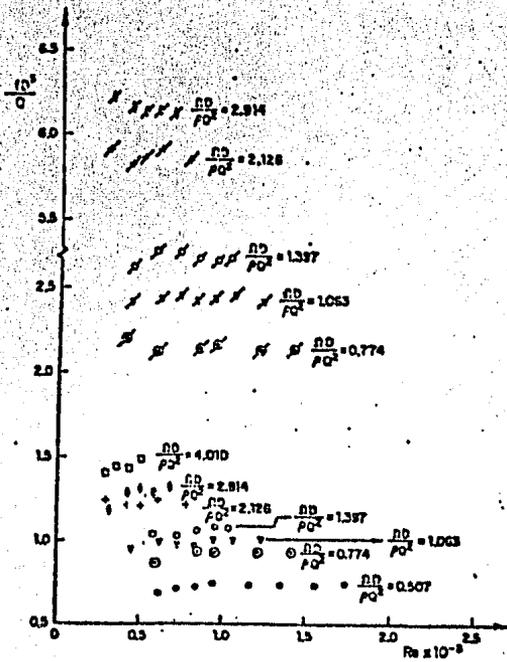


Fig 4.8 Parámetro de frecuencia vs. número de Reynolds, L/D = 24.94

1a frecuencia	2a frecuencia	$\Omega D / \rho \omega^2$ (Parámetro de giro)
●	No se registra	0.507
⊙	⊙	0.774
▽	♠	1.063
○	♠	1.397
+	♠	2.126
∅	♠	2.914
□	No se registra	4.010

NOTA: Simbología utilizada en las figuras 4.3 a 4.8

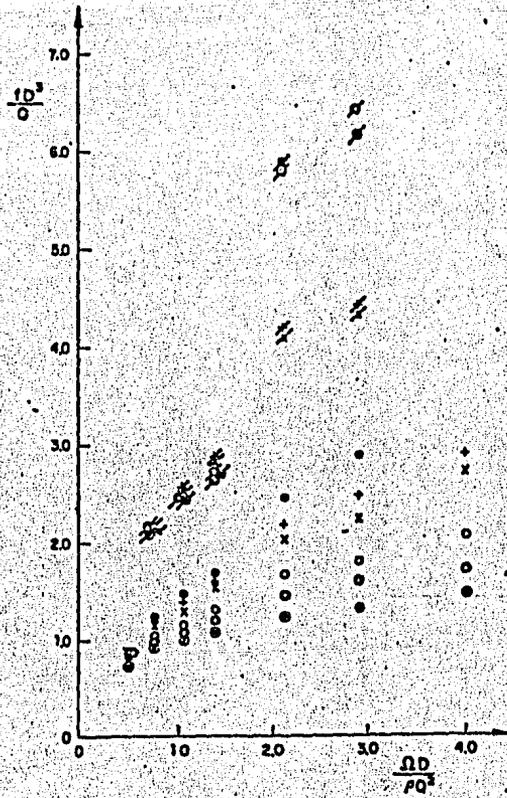


Fig 4.9 Parámetro de frecuencia vs. parámetro de giro.

1a frecuencia	2a frecuencia	L/D
●	No se registra	1.82
+	+	3.45
x	x	6.19
○	○	12.49
⊙	⊙	18.69
⊙	⊙	24.94

NOTA: Simbología utilizada en la figura 4.9

B.- De la figura 4.9 se puede confirmar la existencia para geometrías simples, de la relación

$$\frac{fD^3}{Q_0} = F \left(\frac{\bar{\Omega}D}{\rho Q_0^2}, Re, L/D \right)$$

en condiciones de flujo helicoidal pulsante.

C.- Se encontró la existencia de una segunda frecuencia asociada al vórtice para algunos valores de PG, sin descartar la posibilidad de que esta segunda frecuencia también pueda encontrarse para otros valores de PG en condiciones experimentales adecuadas.

D.- Se encontró que la segunda frecuencia, al igual que la primera, cumple con lo dicho en A y B.

4.2.3 Comentarios.

Con los resultados obtenidos por el I.I. se ratifica que la presencia de un rotor no es necesaria para reproducir el vórtice generado en la descarga de las turbinas Francis, lo cual es potencialmente ventajoso si se pretende estudiar el fenómeno de resonancia en plantas hidroeléctricas. El estudio de este fenómeno es abordado en México por dos vías: la primera mediante la construcción de un modelo físico que reproduce a escala los elementos de la unidad número 3 de la P.H. La Angostura con excepción de la turbina, la cual es sustituida por un sistema estático de álabes de ángulo variable, mismo que reproduce el PG a la entrada del tubo de desfogue, y la segunda mediante la instalación experimental de geometrías simples cuyos resultados al utilizar con aire como fluido de trabajo se darán a conocer en este trabajo.

5. INSTALACION EXPERIMENTAL Y EQUIPO DE MEDICION UTILIZADO

En este capítulo se hará la descripción de la instalación experimental, construída en el laboratorio "Raul Sandoval Landazuri" del Instituto de Ingeniería de la UNAM, denominada "sistema generador de vórtices". Adicionalmente será descrito el equipo de medición utilizado en dicha instalación y que permitió registrar las experiencias que se darán a conocer en el siguiente capítulo.

5.1 Descripción de la instalación experimental.

Como fué mencionado al final del capítulo anterior, esta instalación tiene la finalidad de estudiar, con geometrías simples, el fenómeno ocurrido en la P.H. La Angostura. Por esta razón, la instalación fué proyectada de tal

*

suerte que su arreglo es semejante al de una planta hidroeléctrica. Una perspectiva de esta instalación se presenta en la figura 5.1.

La instalación puede operar con aire o con agua como fluido de trabajo. En lo que sigue solo se hará la descripción de la instalación cuando opera con aire.

El sistema generador de vórtices es alimentado por un ventilador centrífugo acoplado a un motor de 10 Hp, pudiéndose obtener en el sistema un gasto de $0.586 \text{ m}^3/\text{s}$ a una presión de 0.83 m.c.agua (figura 5.2). El ventilador descarga el flujo de aire a un tubo de seis pulgadas de diámetro, el cual, a la mitad de su longitud, aloja en su interior un orificio aforador

, diseñado de acuerdo a las normas ASME y verificado mediante mediciones realizadas con un tubo de pitot calibrado.

Este tubo conduce al aire a un tanque tranquilizador de flujo con un volumen de 2.5 m^3 ; en su parte inferior el tanque descarga el flujo por medio de una tubería flexible de tres pulgadas de diámetro

La tubería flexible conduce el aire hacia el tanque de carga constante (figura 5.3), cuya finalidad es la de fijar un nodo para la componente oscilatoria de la presión. La capacidad de este tanque es de 0.34 m^3 .

La tubería de presión está formada por tubos de lucita transparentes, con un diámetro interior de 0.1 m y una longitud promedio de 0.6 m, lo

- 1 Bomba centrífuga
- 2 Ventilador centrífugo
- 3 Válvula de regulación de gasto (agua)
- 4 Compuerta de regulación de gasto (aire)
- 5 Variador para medición de gasto (agua)
- 6 Orificio aferrador
- 7 Barreras tranquilizadoras
- 8 Tanque tranquilizador (aire)
- 9 Tubería flexible (aire)
- 10 Tanque de carga constante
- 11 Tubería de presión
- 12 Tanque de entrada al sistema de diábolos
- 13 Tubo de desfogue
- 14 Tanque de descarga (agua)
- 15 Tubería de descarga (agua)
- 16 Bomba centrífuga de succión (agua)
- 17 Válvula de control de la cavitación (agua)
- 18 Manómetros diferenciales inclinables (aire)
- 19 Manómetros de cadúla (agua)
- 20 Tubos de nivel (agua)
- 21 Compresor de aire
- 22 Tubería de aire comprimido
- 23 Estructura de soporte

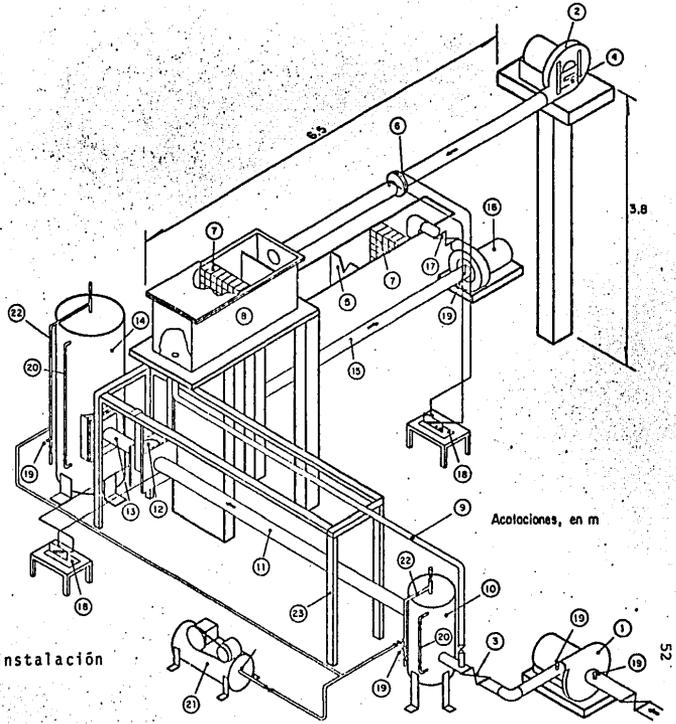


Fig 5.1 Esquema de la instalación experimental.

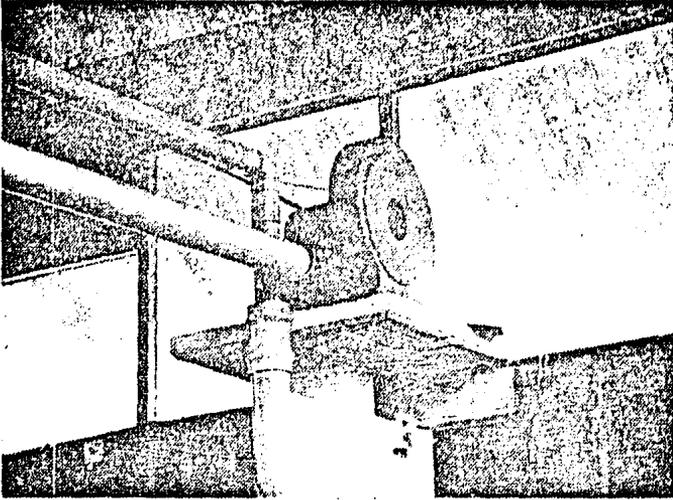


Fig 5.2 Ventilador centrífugo

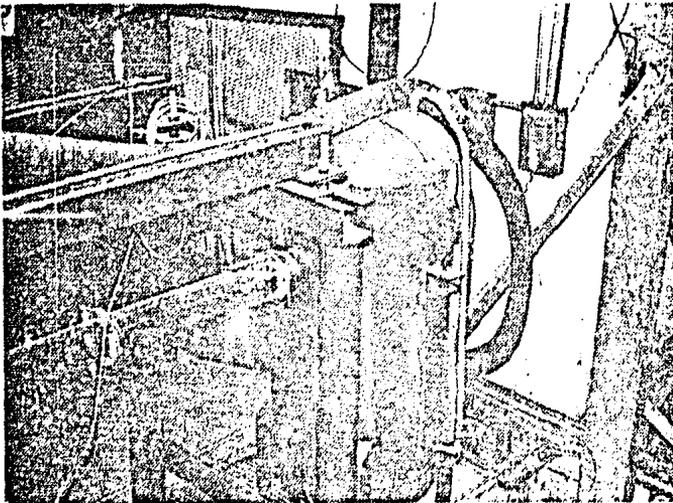


Fig 5.3 Tanque de carga constante

que permite variar la longitud total de la tubería de presión. Los tubos contienen tomas manométricas distribuidas en toda su longitud, lo que permite medir las fluctuaciones de presión en la tubería.

El aire es conducido, por la tubería de presión, al tanque de entrada al sistema de álabes (figura 5.4), el cual aloja en su interior un sistema de álabes fijos intercambiables (figura 5.5), los cuales; como se mostró en el capítulo anterior, permiten obtener valores precisos del parámetro de giro. En el capítulo anterior se dieron los valores del parámetro de giro de los diferentes sistemas de álabes con los que se cuenta. Al conjunto formado por el tanque de entrada y los álabes, se le denomina "generador de vórtices" pues su finalidad es la de formar un vórtice en el tubo de desfogue, tal como lo hace una turbina Francis al operar fuera de las condiciones de diseño.

Una vez que el giro es impartido al flujo, éste es descargado a una tubería de lucita de 0.1 m de diámetro interior cuya longitud puede variarse según sea necesario. Es en este tubo donde se miden las oscilaciones de presión del vórtice. Esta tubería, que es la parte final de la instalación, es denominada tubo de desfogue aunque no posea las características asociadas habitualmente a la tubería de desfogue de las turbinas Francis.

La parte fundamental de la instalación inicia en el tanque de carga constante y termina en el tubo de desfogue; una fotografía de esta parte final se muestra en la figura 5.6 .

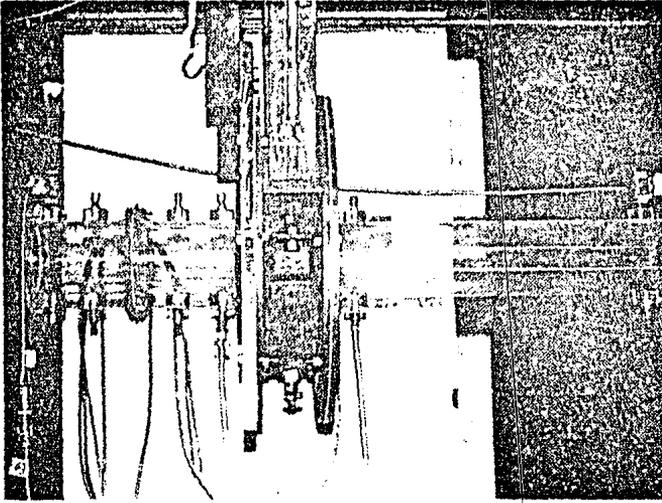


Fig 5.4 Tanque de entrada al sistema de álabes

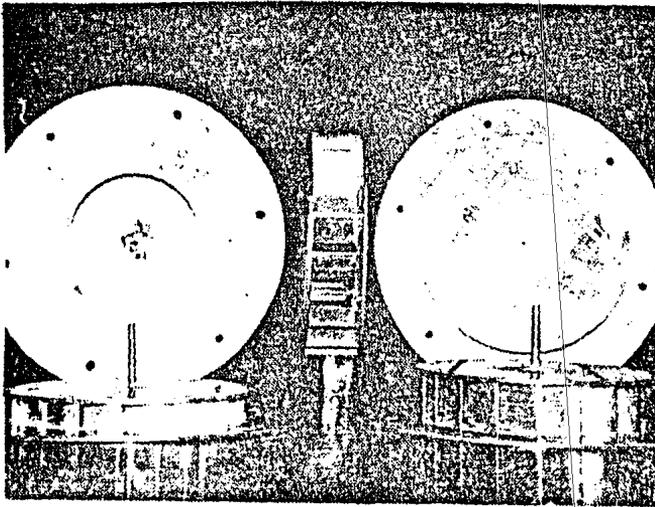


Fig 5.5 Juegos de álabes fijos intercambiables

5.2 Descripción del equipo de medición utilizado.

En la instalación básicamente interesaba medir, para un gasto determinado, las fluctuaciones de presión tanto en el tubo de desfogue como en la tubería de presión.

Para determinar el gasto se utilizó el orificio aforador mencionado en la sección anterior, obteniéndose la lectura de la presión diferencial en un manómetro inclinable (figura 5.7), con un rango de 0 a 250 mm de columna de agua. Además, con un manómetro de idénticas características se midió la pérdida de carga que introducía el generador de vórtices.

Las fluctuaciones de presión se midieron con transductores de presión electrónicos de estado sólido (National pressure transducers, modelo LX1802 DZ), con un rango de presiones de 0 a 15 psi, temperatura de trabajo de 0 a 85 grados centígrados y una frecuencia de resonancia de 50 kHz. La figura 5.4 muestra uno de estos transductores montado en la tubería de presión.

La señal del transductor es recibida por un equipo acondicionador de señal, que consiste en un conjunto amplificador-filtro, el cual dispone de un sistema de filtros tipo paso bajas. Por lo anterior este equipo, diseñado en el Instituto de Ingeniería puede ajustarse de acuerdo a las exigencias de las mediciones.

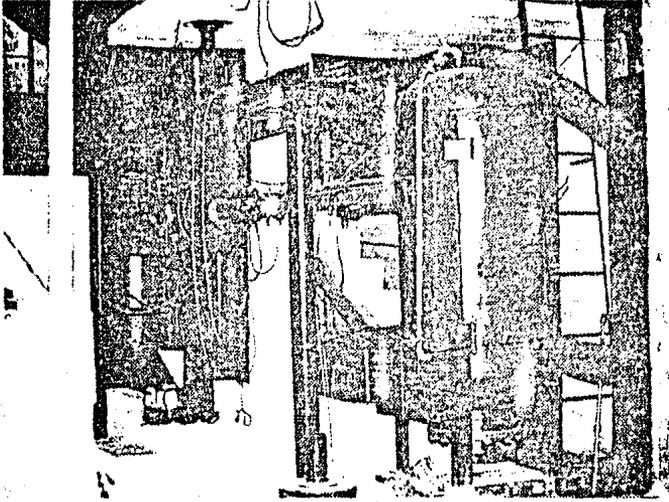


Fig 5.6 Instalación experimental

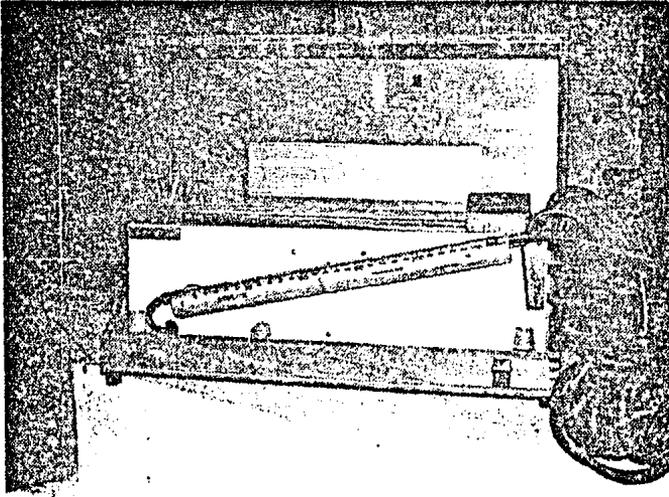


Fig 5.7 Manómetro diferencia inelizable

Del equipo de amplificación, la señal es enviada a un osciloscopio modelo HP-1222A, lo cual permite observar la señal. En la figura 5.8 se muestra el conjunto de amplificadores y osciloscopios utilizados.

Finalmente, la señal es enviada a un analizador de espectros modelo HP-3582A (figura 5.9.), por medio del cual se puede visualizar el espectro de módulos asociado a la señal enviada por el transductor, lo cual es realizado por el analizador mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

Procesada la señal en el analizador, su espectro es archivado en disco, para lo cual se utiliza una microcomputadora modelo Apple II (figura 5.10). Adicionalmente la microcomputadora permite, por medio de un graficador modelo HP-7470A (figura 5.9), graficar el espectro de módulos en papel tamaño carta. Además, al archivar el espectro no sólo es posible almacenar la información, esto nos permite también realizar operaciones con los datos del espectro.

La figura 5.11 muestra una vista general de todo el equipo de medición utilizado.

5.3 Calibración de los transductores de presión.

Las amplitudes de las oscilaciones de presión medidas en el analizador de espectros, se encuentran en volts y representan el valor RMS de la señal. Sin embargo, es más conveniente presentar los resultados referidos a oscilaciones en columna de agua o aire. Para tal efecto, se realizaron calibra-

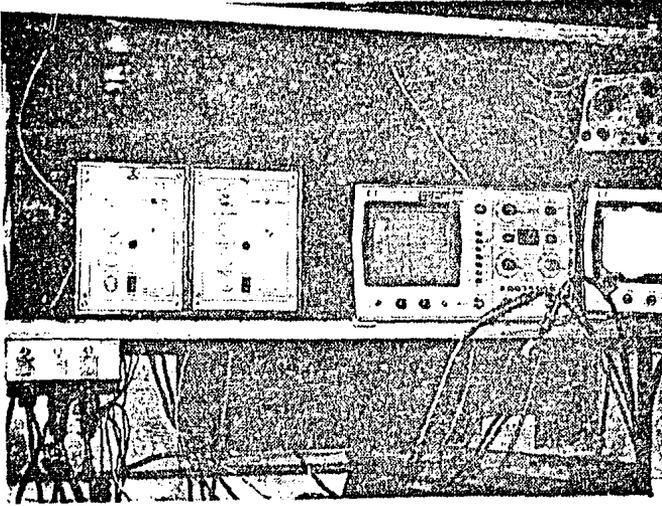


Fig 5.8 Amplificadores de señal y osciloscopios

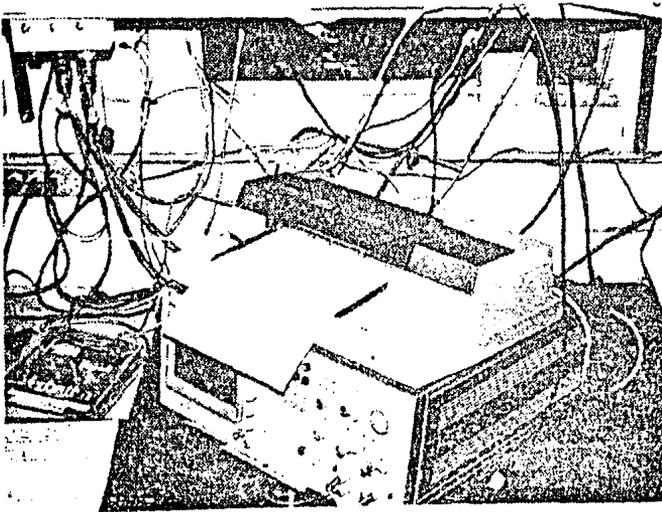


Fig 5.9 Analizador de espectros y graficador

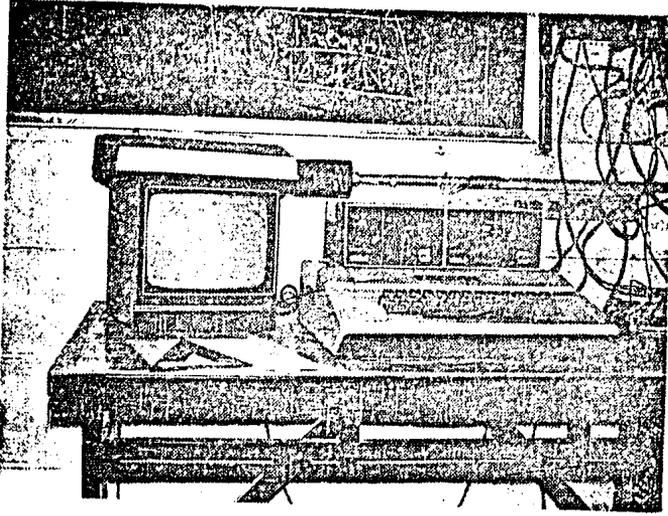


Fig 5.10 Microcomputadora

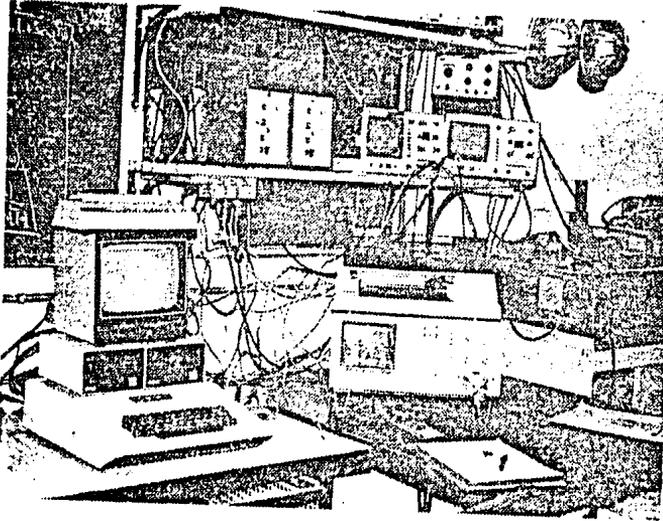


Fig 5.11 Equipo de medición

ciones con el equipo de amplificación y con la ayuda de un multímetro modelo HP-3465A. Para esto los transductores fueron sometidos a una columna estática y se obtuvo en el multímetro el voltaje correspondiente. Se encontró una satisfactoria relación lineal entre la presión calculada en columna de agua y el voltaje en el multímetro, todo esto para diferentes condiciones de amplificación. Por lo anterior, fué posible establecer la siguiente relación:

$$h \text{ (m.c.agua)} = K_e V \text{ (volts)} \quad (5.1)$$

donde h es la amplitud en columna de agua, K_e es una constante de calibración estática y V es el voltaje en el multímetro.

Sin embargo, se puede demostrar que la relación entre la amplitud real de la señal y su valor RMS es:

$$V \text{ (volts)} = \sqrt{2} V_{rms} \text{ (volts)} \quad (5.2)$$

donde V_{rms} es la amplitud medida en el analizador de espectros.

Por lo tanto, para convertir la amplitud en volts del analizador a columna de agua, sustituiremos la ecuación (5.2) en (5.1), resultando:

$$h \text{ (m.c.agua)} = \sqrt{2} K_e V_{rms} \text{ (volts)} \quad (5.3)$$

Dado que se utiliza aire como fluido de trabajo, se utilizará la siguiente expresión;

$$h \text{ (m.c.aire)} = K' V_{rms} \text{ (milivolts)} \quad (5.4)$$

La tabla 5.1 muestra los valores de K' para los transductores utilizados y las diferentes condiciones de amplificación.

Transductor #	Ganancia #	K' (m.c. aire/milivolts)
1	50	0.04826759
	100	0.02503654
2	50	0.05063103
	100	0.02768555
3	50	0.04959018
	100	0.02555053

Tabla 5.1 Constantes de calibración de los transductores.

6. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

El presente capítulo muestra los resultados de la experimentación realizada en el sistema generador de vórtices descrito en el capítulo anterior.

En primer término se muestra el cálculo de las frecuencias de resonancia del sistema a partir de la teoría vista en el capítulo tercero, esto es con la finalidad de comparar las frecuencias de resonancia calculadas con las registradas en la tubería de presión.

Posteriormente se hará la descripción de las experiencias que para diferentes gastos se obtuvieron en la instalación experimental. Se muestran los resultados obtenidos al modificar la longitud de la tubería de presión y con ello el comportamiento del resonador.

Se presenta para una condición de resonancia, la configuración de las ondas estacionarias en la tubería de presión y en el tubo de desfogue.

Finalmente se dan a conocer las conclusiones particulares del trabajo experimental.

6.1 Determinación de las frecuencias de resonancia del sistema generador de vórtices.

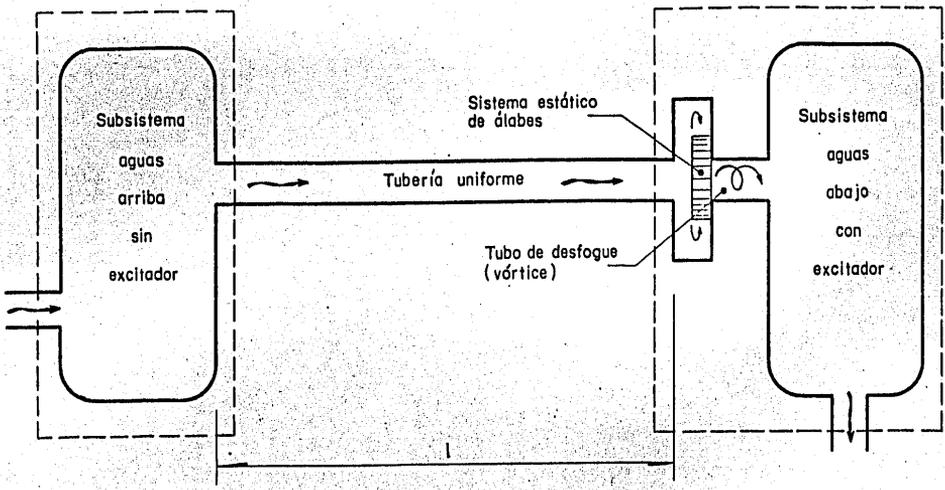
La figura 6.1 muestra en forma esquemática a la instalación experimental. El tanque de carga constante, que se encuentra aguas arriba de la tubería fija un nodo para la componente oscilatoria de la presión por lo que puede considerarse como un subsistema sin excitación. Aguas abajo de la tubería de presión se encuentra el tanque que contiene a los álabes y el tubo de desfogue, estos elementos serán considerados como un subsistema con excitación (oscilación de presión del flujo helicoidal).

Como podemos observar la instalación puede esquematizarse como un sistema tipo I (sección 3.3). Si, como una aproximación, despreciamos el efecto de la fricción (para la instalación γ promedio = 0.025), las frecuencias de resonancia del sistema serán:

$$f_r = \frac{mc}{2l} , \quad m = 1, 2, \dots \quad \text{Si } C_2 > 0$$

6

$$f_r = \frac{(2m - 1)c}{4l} , \quad m = 1, 2, \dots \quad \text{Si } C_2 < 0$$



6.1 Esquema simplificado de la instalación experimental

Dado que la impedancia en 1 es nula y considerando que la impedancia en 2 es similar a la de un orificio, resulta que

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 2 K Q_0 = \frac{2 \Delta H_0}{Q_0}$$

donde H_0 es la pérdida de carga que introduce el sistema de álabes. Para la condición de máxima gasto ($Q_0 = 0.277\ 992\ \text{m}^3/\text{s}$) y por lo tanto de máxima pérdida en los álabes ($H_0 = 114.8\ \text{m.c. aire}$) y además con $c = 343\ \text{m/s}$, se tiene que

$$z_1/z_c = 0$$

y

$$z_2/z_c = 2 \Delta H_0 g A/c Q_0 = 0.226 < 1$$

Del diagrama de la figura 3.6 resulta que

$$C_2 > 0$$

por lo tanto las frecuencias de resonancia para todo gasto serán

$$f_r = \frac{mc}{2l}, \quad m = 1, 2, \dots$$

dado que la tubería de presión tiene una longitud $l = 2.54\ \text{m}$ se tiene que

m	Tipo de frecuencia	Frecuencia (H_z)
1	Fundamental	67.5
2	1er armónico	135
3	2º armónico	202.5
4	3er armónico	270

6.2 Experiencias del fenómeno de resonancia.

En esta etapa de mediciones, se buscará excitar algunas de las frecuencias de resonancia de la tubería de presión a partir de las oscilaciones de presión del vórtice en el tubo de desfogue, para esto se trabajó con las siguientes condiciones:

Longitud de la tubería de presión	$l = 2.54 \text{ m}$
Longitud del tubo de desfogue	$l' = 0.345 \text{ m}$
Parámetro de giro	$PG = 0.507$

Lo anterior permitió, al variar el gasto, obtener un vórtice cuya frecuencia se encontraba en un rango de 40 a 202 Hz.

Para diferentes gastos se obtuvieron dos espectros de amplitudes, uno en la abscisa $x = 2.04 \text{ m}$ y otro en el extremo aguas abajo del tubo de desfogue.

Las frecuencias de resonancia que se registraron en la tubería de presión fueron;

Tipo de frecuencia	Frecuencia (Hz)
Fundamental	54
1er armónico	96
2° armónico	144
3er armónico	206

Para poder detectar el fenómeno de resonancia se expresaron las oscilaciones de carga piezométrica en forma adimensional a través del parámetro de presión, a saber:

$$P_p = \frac{D^4 \rho h}{Q^2}$$

donde h es la oscilación de la presión en m.c. aire y

P_p es el parámetro de presión.

Las figuras 6.2 y 6.3 muestran gráficamente los resultados obtenidos para diferentes valores del número de Reynolds.

Se observa que el parámetro de presión así como el de frecuencia del vórtice, medido en el tubo de desfogue, se mantienen aproximadamente constantes para todo el rango de gastos medidos.

Esto no sucede con el parámetro de presión del 2° y 3er armónico de resonancia en los cuales se observa que, para diferentes gastos, existe una fuerte alteración en el valor de P_p . Esto es sin duda un claro fenómeno de resonancia.

En la figura 6.4 se muestra el espectro del vórtice, en el tubo de desfogue, en una frecuencia de 94 Hz, sin embargo, como puede observarse en la figura 6.5 no es el 1er armónico de resonancia el que se excita, sino el 2° el cual se encuentra en una frecuencia de 146 Hz. Las figuras 6.6 y 6.7 muestran que lo mismo sucede con la excitación del 3er armónico en una frecuencia de 208 Hz cuando el vórtice se encuentra en una frecuencia de 122 Hz.

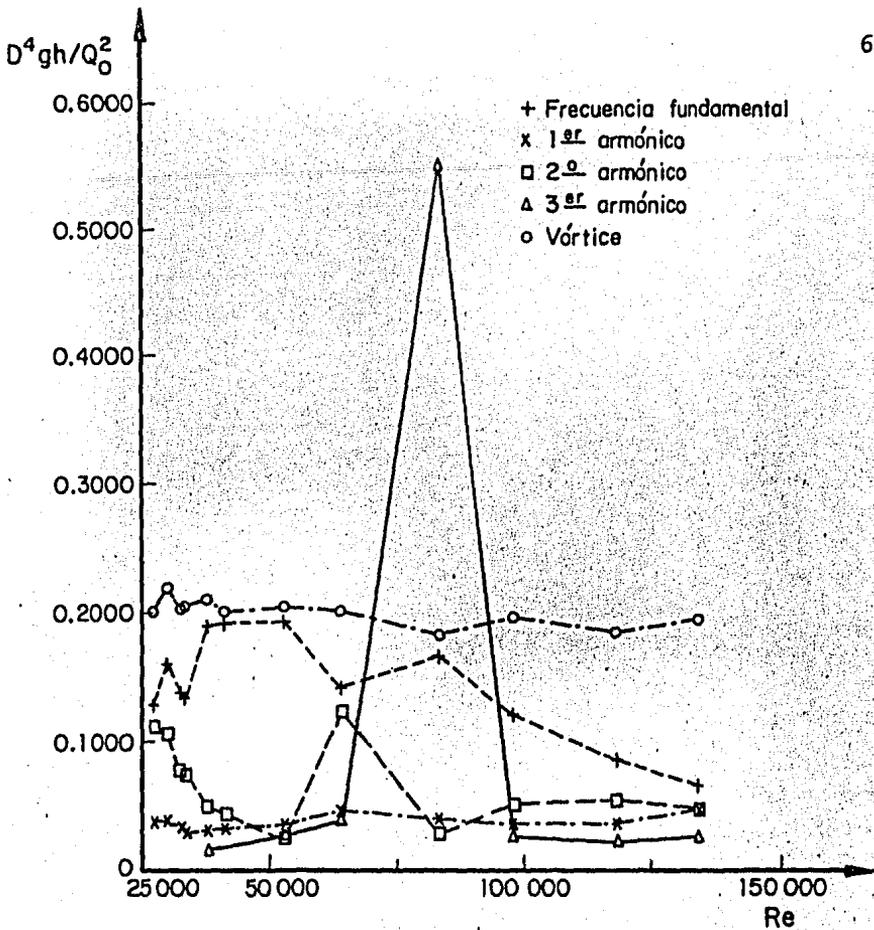


Fig 6.2 Parámetro de presión vs. número de Reynolds (25,000 < Re < 150,000)

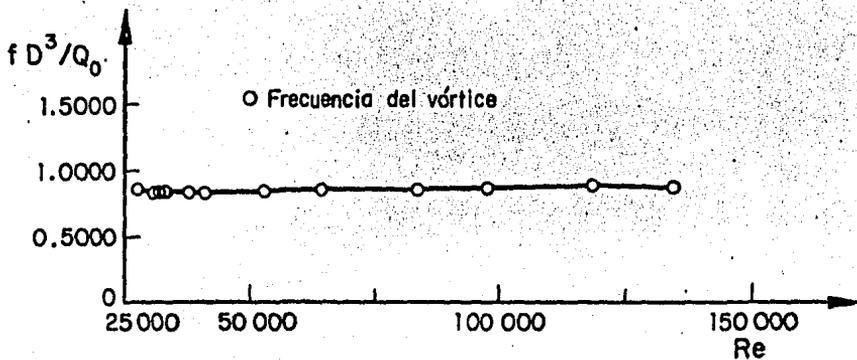


Fig 6.3 Parámetro de frecuencia vs. número de Reynolds (25,000 < Re < 150,000)

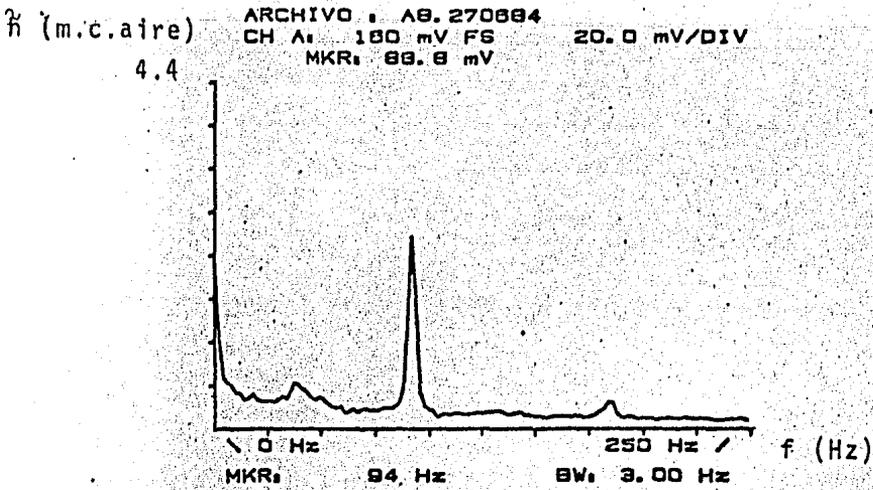


Fig 6.4 Espectro de amplitudes en el tubo de desfogue,
 Re = 64 300

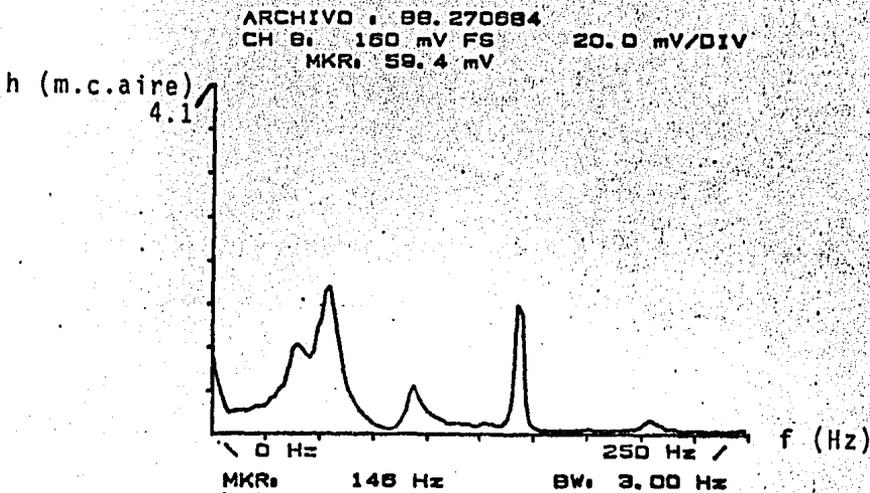


Fig 6.5 Espectro de amplitudes en la tubería de
 presión, Re = 64 300

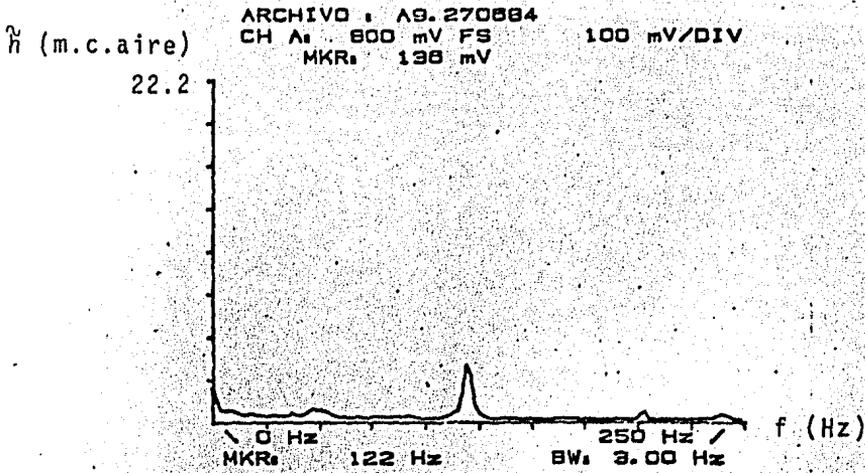


Fig. 6.6 Espectro de amplitudes en el tubo de desfogue,
 Re = 83 300

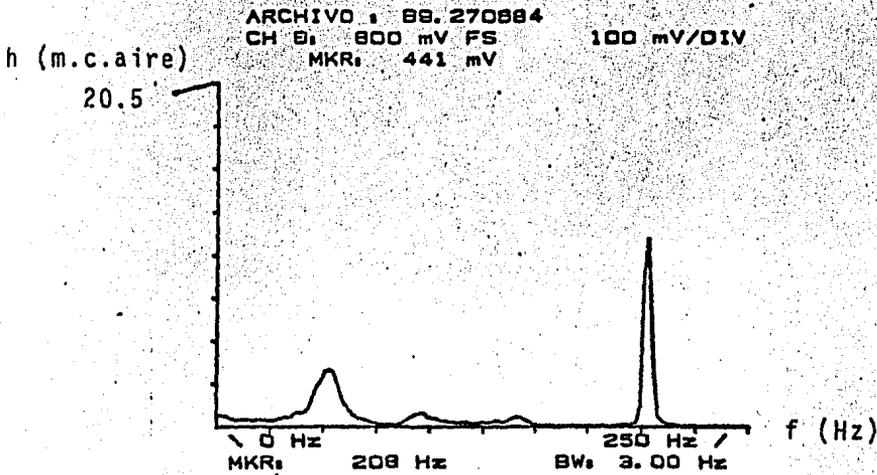


Fig 6.7 Espectro de amplitudes en la tubería
 de presión, Re = 83 300

Además se presentan las figuras 6.8 y 6.9 donde se observa que al actuar el vórtice en una frecuencia de 146 Hz no excita en lo más mínimo al 2° armónico de resonancia.

Para observar con más detalle este fenómeno se examinó la excitación del 3er armónico de resonancia variando la frecuencia del vórtice en un rango de 102 a 136 Hz. Las figuras 6.10 y 6.11 muestran los resultados obtenidos.

Ahora en este rango de gastos, no sólo hay constancia de P_p para el vórtice, sino que también existe constancia de este parámetro para las frecuencias de resonancia fundamental, 1° y 2° armónicos. Sin embargo se vuelve a observar la alteración en P_p para el 3er armónico. Además se muestra nuevamente la constancia del parámetro de frecuencia del vórtice.

En la figura 6.12 se muestra al vórtice en una frecuencia de 124 Hz medido en el desfogue y en la figura 6.13 se muestra la excitación del 3er armónico en 206 Hz.

Para verificar que se trataba de un fenómeno de resonancia, se modificó la tubería de presión a una longitud $l = 0.73$ m con el fin de alterar sus frecuencias de resonancia. Se reprodujo el gasto para el cual se excitaba el 3er armónico de resonancia y se obtuvieron los espectros mostrados en las figuras 6.14 y 6.15.

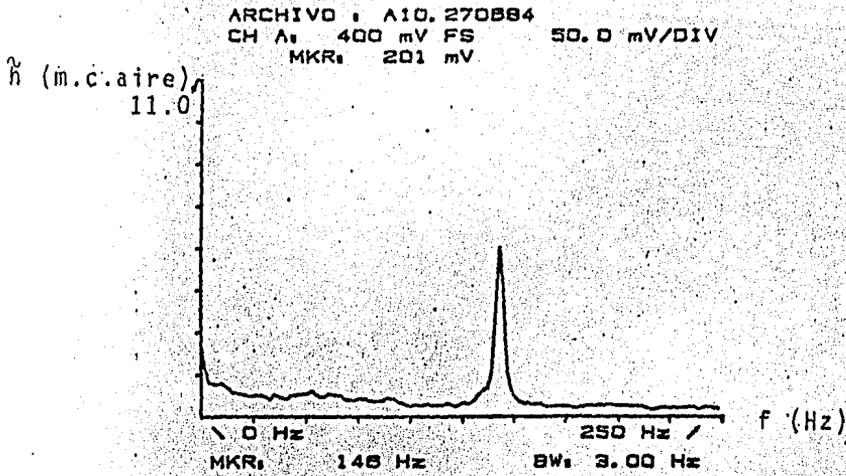


Fig 6.8 Espectro de amplitudes en el tubo de
 desfogue, $Re = 98\ 000$

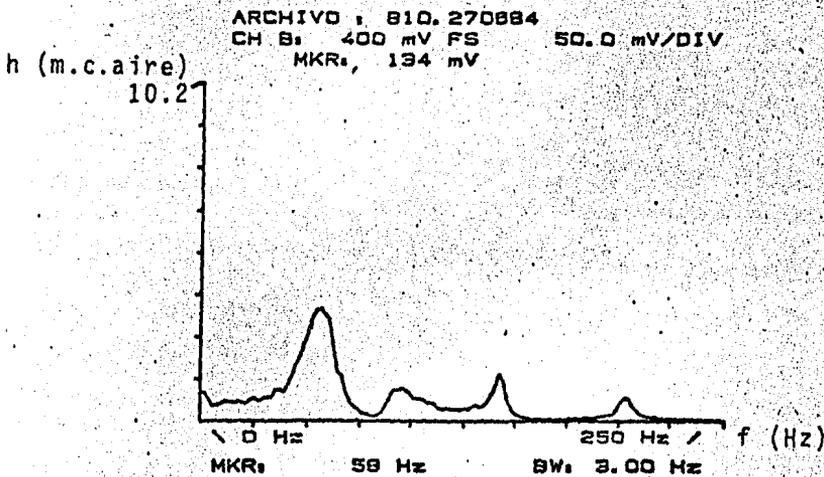


Fig 6.9 Espectro de amplitudes en la tubería
 de presión, $Re = 98\ 000$

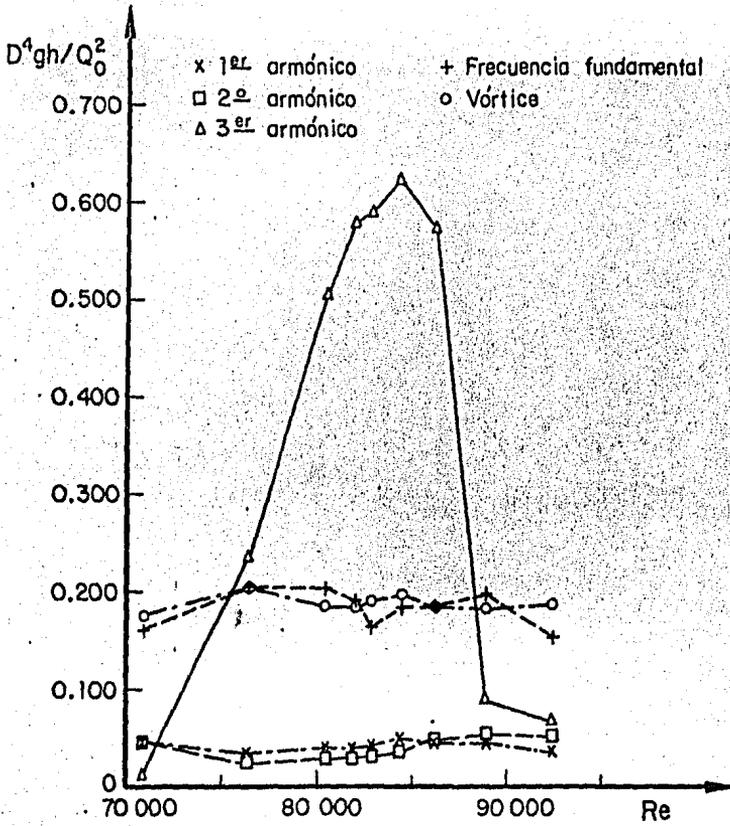


Fig 6.10 Parámetro de presión vs. número de Reynolds ($70,000 < Re < 95,000$).

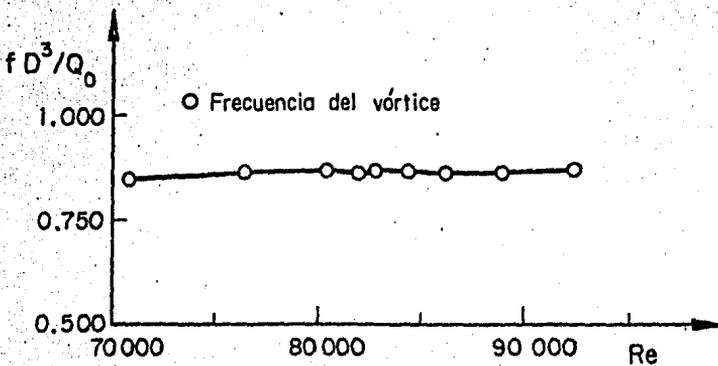


Fig 6.11 Parámetro de frecuencia vs. número de Reynolds ($70,000 < Re < 95,000$).

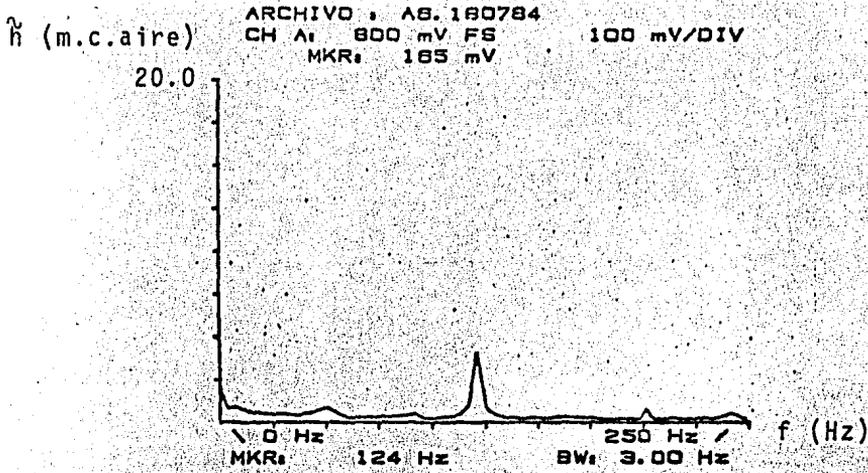


Fig 6.12 Espectro de amplitudes en el tubo de
 desfogue, $Re = 84\ 400$

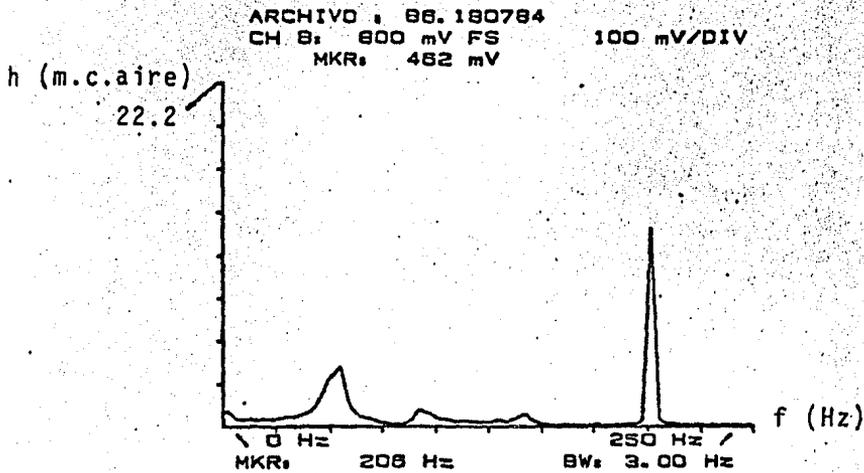


Fig 6.13 Espectro de amplitudes en la tubería
 de presión, $Re = 84\ 400$

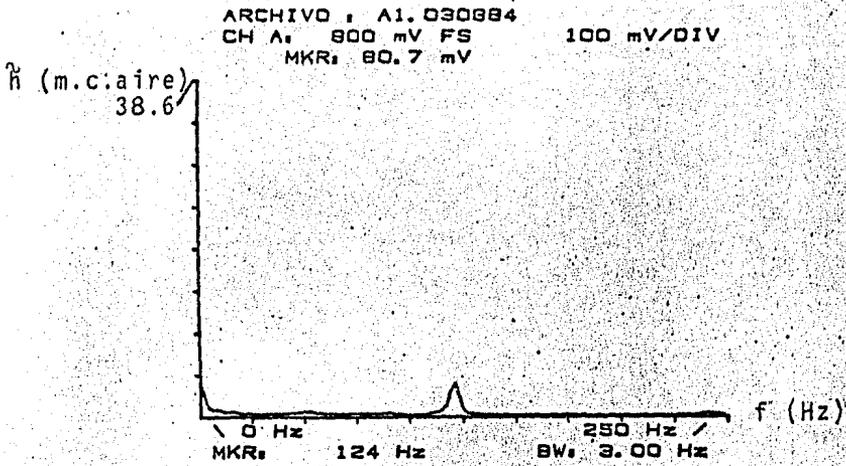


Fig 6.14 Espectro de amplitudes en el tubo de desfogue, $Re = 87\ 000$

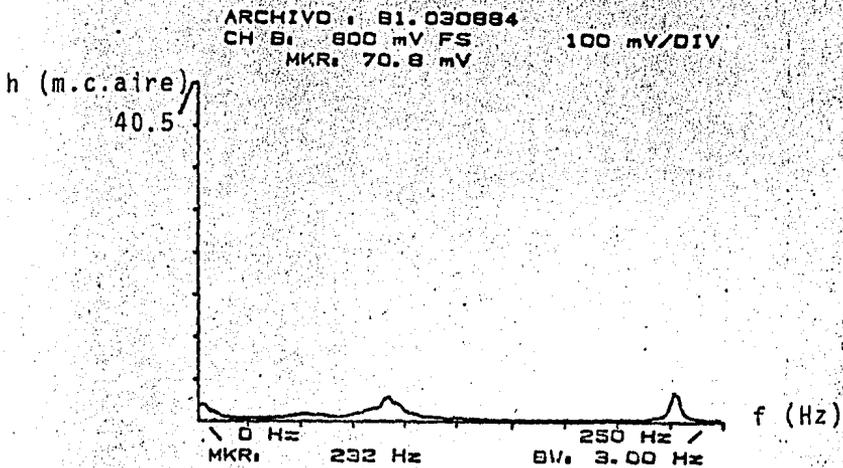


Fig 6.15 Espectro de amplitudes en la tubería de presión, $Re = 87\ 000$

Se observa en la figura 6.14 que el vórtice es semejante al registrado en la figura 6.12, sin embargo en la figura 6.15 se observa que las frecuencias de resonancia se han alterado y no existe el fenómeno resonante mostrado en la figura 6.13.

6.3 Configuración de las ondas estacionarias en la tubería de presión.

Para la condición de resonancia del tercer armónico, se registraron las amplitudes de la oscilación de presión de las frecuencias de resonancia, en diferentes puntos de la tubería de presión y del tubo de desfogue. La figura 6.16 muestra la configuración de las ondas estacionarias en todo el sistema.

Como puede observarse, no se fija un nodo de presión a la entrada del sistema de álabes como se suponía debía ser al considerar la simplificación del sistema hecha en la sección 6.1 y al tener además que

$$\frac{Z_2}{Z_C} < 1$$

en cambio el nodo de presión se fija en la descarga del tubo de desfogue.

Si consideramos que todo el sistema (incluidos tubería de presión, generador de vórtices y tubo de desfogue) oficia como resonador, la longitud total del elemento resonador será de $l = 2.985$ m y por lo tanto las frecuencias de resonancia calculadas son;

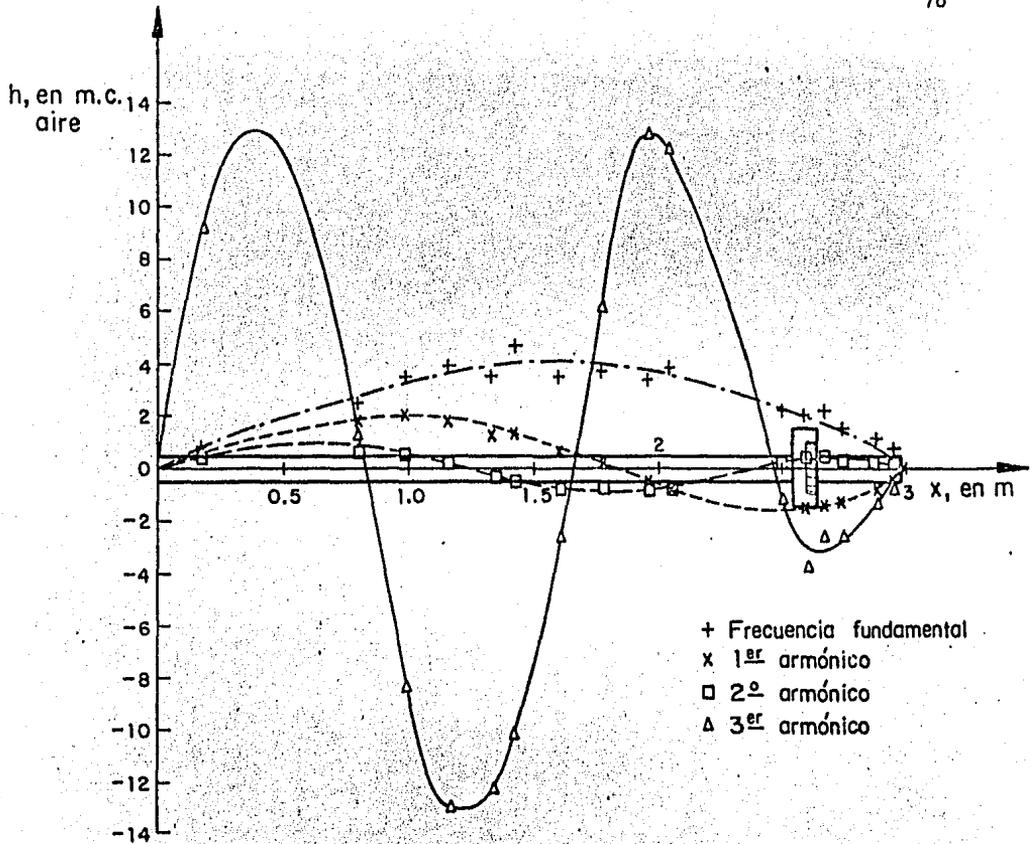


Fig 6.16 Configuración de la onda estacionaria en la instalación experimental

m	Tipo de frecuencia	Frecuencia (Hz)
1	Fundamental	57.4
2	1er. armónico	114.8
3	2o. armónico	172.2
4	3er. armónico	229.6

La diferencia existente entre estas frecuencias y las medidas en la instalación, se debe a que si bien se tiene un nodo de presión en el tanque de carga constante, en la descarga se tiene un vórtice que no permite fijar correctamente la condición de frontera correspondiente a un nodo.

6.4 Conclusiones del trabajo experimental.

En base a los resultados experimentales descritos en el presente capítulo, para la instalación de geometrías simples, utilizando aire como fluido de trabajo, puede resumirse que:

- A) Se encontró constancia tanto del parámetro de presión como del parámetro de frecuencia para el vórtice, aún en condiciones de resonancia.
- B) Se observó, para determinados gastos, la excitación del 2° y 3er. armónicos de resonancia, sin embargo, al revisar los espectros correspondientes, se mostró que no es el vórtice el que excita la resonancia.
- C) La excitación del 3er. armónico es más notable que la del 2°, sin embargo en ningún caso fué posible registrar al excitador en el tubo de desfogue.
- D) El excitador de la resonancia depende del gasto pues conforme éste aumentaba las frecuencias de resonancia eran alteradas.

- E) Se mostró que el vórtice medido en el tubo de desfogue, no altera en lo más mínimo su comportamiento o el de las frecuencias de resonancia al coincidir con ellas.
- F) Se verificó que la excitación del 3er. armónico era un fenómeno de resonancia, pues al modificar el resonador, desapareció el fenómeno observado.
- G) Se mostró, al realizar la configuración de las ondas estacionarias, que en este caso todo el sistema (tubería de presión y desfogue), oficia como resonador, lo cual explica la diferencia entre las frecuencias de resonancia calculadas y las medidas.

7. CONCLUSIONES

En base a todo lo expuesto en el presente trabajo, puede concluirse en forma resumida lo siguiente:

- 1) Es muy deseable, en la etapa de proyecto de una planta hidroeléctrica que va a operar con turbinas Francis, prevenir el fenómeno de resonancia en la tubería de presión excitada por la naturaleza pulsante del vórtice en la descarga de la turbina. Sin embargo, como se mostró en el caso de la P.H. La Angostura, el ensayo oscilatorio del modelo de la turbina y del tubo de desfogue, no necesariamente proporcionará la información suficiente para la prevención del mencionado fenómeno, pues en estos ensayos no se reproduce el elemento resonador del sistema (tubería de presión).

- 2) Es posible, en base a las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, además de las hipótesis del modelo lineal, determinar las frecuencias de resonancia de los sistemas hidráulicos de conductos a presión. El conocimiento del comportamiento de estos sistemas bajo la acción de cualquier excitador es de fundamental importancia en la prevención de los fenómenos de resonancia.
- 3) Para el estudio del fenómeno pulsante del vórtice en la descarga de las turbinas Francis, no es necesario reproducir el rotor; en cambio es suficiente reproducir el momento de la cantidad de movimiento del flujo entrante en el tubo de desfogue de la misma.
- 4) En el caso particular del trabajo experimental expuesto anteriormente, se mostró que el vórtice medido en el tubo de desfogue, no fué el excitador de la tubería de presión. En cambio se detectó la presencia de un excitador de la resonancia, que no puede registrarse en la periferia del tubo de desfogue y del cual solo se sabe que, al igual que el vórtice, varía su frecuencia al hacerlo el gasto.
- 5) El fenómeno observado en la instalación experimental es semejante al observado en la P.H. La Angostura. Esto es, un vórtice localizado en una frecuencia baja y un pico de resonancia de mayor frecuencia. Lo anterior ratifica la necesidad de tener en cuenta el elemento resonador en los ensayos oscilatorios de las turbinas Francis.

- 6) Finalmente se concluye la necesidad de continuar la investigación en esta materia, con el estudio a partir de instalaciones experimentales y modelos a escala de plantas hidroeléctricas, los cuales contengan tanto al elemento excitador como al elemento resonador. Además es importante que estas instalaciones utilicen agua como fluido de trabajo, lo que permitirá incluir el estudio del efecto de la cavitación.

8. AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi agradecimiento al Instituto de Ingeniería en general y en particular al Dr. Rafael Guarga por su valiosa enseñanza y esmerado apoyo en la dirección de este trabajo, a los ingenieros Lázaro Aguilar, Eduardo Rodal y en forma muy especial al Ing. Juan José Torres por sus aportes y comentarios, así como al Sr. Amador Sámano encargado del mantenimiento del equipo de medición.

Agradesco también al Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería por las facilidades brindadas en todo momento. Finalmente quiero agradecer la valiosa colaboración de mis compañeros José Ma. Villanueva y Miguel Angel Yáñez.

9. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

1. Guarga R., Hiriart G. y Torres J.J., "Oscillatory problems at Mexico's La Angostura plant", Water Power and Dam Construction, octubre 1983.
2. Guarga R., Hiriart G. y Torres J.J., "Solución de un problema de oscilaciones en la P.H. "Belisario Domínguez" (México)", X Congreso Latinoamericano de Hidráulica, E-10.
3. Guarga R. y Aguilar L., "Planteamiento y construcción de un modelo hidrod-elástico de la unidad No. 3 de la P.H. "Belisario Domínguez". Instituto de Ingeniería UNAM, México, noviembre 1983.
4. Wylie, E. B. and Streeter, V., "Fluid Transients", McGraw Hill, 1979.
5. Chaudhry, M.H., "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold, 1979.
6. Guarga R., "Resonancia en sistemas de conductos a presión", Tesis doctoral presentada en la DEPEI, UNAM, Agosto 1982.
7. Guarga R., "Resonancia y receptividad en tuberías uniformes", Seminario de oscilaciones estacionarias y estabilidad de sistemas hidráulicos a presión, Instituto de Ingeniería UNAM, 1984.
8. Rheingans, W.J., "Power swings in hydroelectric power plants", Transactions ASME, Vol. 62, 1940.

9. Deriaz, P., "A contribution to the understanding of flow in draft tubes of Francis turbines", AIRH Symposium of Nice, septiembre 1960.
10. Hosoi, Y., "Contribution to model tests of draft tubes surges of Francis turbines", IAHR, Simposio de Fort Collins, 1978.
11. Cassidy, J.J., "Experimental study and analysis of draft tube surging", REC-OCE-69-5, USBR, octubre 1969.
12. Cassidy, J.J. y Falvey, H.T., "Frequency and amplitude of pressure surges generated by swirling flow", IAHR Symposium, Stockholm, Part I, 1970.
13. Palde, U.J. "Model and prototype turbine draft tube surge analysis by the swirl momentum method", IAHR Symposium, Vienna, 1974.
14. Nishi, M. et al., "Study on swirl flow and surge in an elbow type draft tube", IAHR Symposium, Tokyo, 1980.
15. Guarga R., Torres J.J., Solorio A. y Rodal E., "Estudio experimental del vortice". Instituto de Ingeniería UNAM, México, mayo 1983.