

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGON



NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

102

COMPENSACION INDUCTIVA DE UNA CASCADA
DE TRANSFORMADORES PARA PRUEBAS
DIELECTRICAS

Sist. 29576

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
P R E S E N T A

CARLOS POZOS PUERTO

México, D. F.

1981



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICO CON TODO MI AMOR EL
PRESENTE TRABAJO A MIS PADRES

Carlos y Rosa

CON TODO RESPETO A
MIS HERMANOS.

Ma. Inés
Salvador
Rosa
Hilda
Rafael

CON TODO CARÍÑO A
MI HIJO.

Daniel

Mi agradecimiento al Instituto de Investigaciones Eléctricas,
al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, a todas las per-
sonas, familiares y amigos, que me han ayudado a superarme -
día a día.

A TODOS MUCHAS GRACIAS

COMPENSACION INDUCTIVA DE UNA CASCADA DE
TRANSFORMADORES PARA PRUEBAS DIELECTRICAS

PROLOGO

El desarrollo nacional exige incrementar constantemente la producción de energía y lograr aumentar la confiabilidad y eficiencia de las instalaciones y equipos eléctricos con - objeto de garantizar un servicio óptimo, evitando los graves problemas suscitados por interrupciones, tanto en áreas industriales como en centros poblados.

Consciente de ello, la Comisión Federal de Electricidad, - se ha propuesto contar con un moderno centro de pruebas, - que posibilitará no sólo la verificación de los equipos -- que adquiere, sino que representará también un aporte significativo a los fabricantes nacionales para su desarrollo tecnológico y un impulso a las tareas de investigación.

Este centro de pruebas está localizado en Irapuato, Gto., y cuenta con varias salas de pruebas como son las de Extra-Alta Tensión, Alta Potencia-Baja Tensión, Alta Potencia-Media Tensión, Alta Potencia-Sintético, Semipesados y Ligeros.

El Laboratorio de Extra-Alta Tensión, tiene como objetivo - realizar ensayos a materiales y equipos eléctricos en general, con tensiones nominales de 800 kV en aislamientos externos y hasta 1200 kV en aislamientos internos, en condiciones seco y húmedo, y hasta 800 kV en ambiente contaminado.

Su campo de actividad es el de realizar diferentes pruebas como son:

- . Pruebas dieléctricas a frecuencia industrial en seco y -
baja lluvia.
- . Pruebas dieléctricas con tensiones de impulso atmosférico y de maniobra.

Las pruebas dieléctricas a frecuencia industrial se van a llevar a cabo entre otros equipos, con una cascada de transformadores de 900 kV de tensión nominal de salida.

I N D I C E

		INTRODUCCION	1
CAPITULO	I	TRANSFORMADORES DE PRUEBA	3
	I.1	Circuitos de Transformadores de Prueba	4
	I.1.2	Construcción de los transformadores de prueba	7
	I.2	Operación en Estado Estable de un Transformador de tres Devanados	11
	I.2.1	Transformador de tres devanados	11
	I.2.2	Circuito equivalente aproximado de un transformador de tres devanados	13
	I.2.3	Pruebas de cortocircuito en un transformador de tres devanados	17
	I.3	Circuito Equivalente de dos Transformadores Conectados en Cascada	20
	I.4	Circuito Equivalente de tres Transformadores Conectados en Cascada	27
	I.5	Enfoque a una Cascada de Transformadores Constituida por "n" Unidades Iguales	32
	I.6	Cálculo de la Impedancia de Cortocircuito de Transformadores Diferentes Conectados en Cascada	33
	I.7	Frecuencia de Resonancia de una Cascada de Transformadores	36
CAPITULO	II	COMPENSACION DE CARGAS REACTIVAS	
	II.1	Elementos Capaces de Acumular Energía en un Circuito Eléctrico	39
	II.2	Relaciones de Energía y Potencia en un Circuito RLC	47
	II.3	Potencia Activa y Reactiva; Potencia Vectorial	56
	II.4	Compensación Reactiva	61

	II.5	Resonancia en un Circuito RLC	63
	II.5.1	Resonancia serie	64
	II.5.2	Incremento de la tensión en resonancia	67
	II.5.3	Energía en un circuito resonante	69
CAPITULO	III	ANALISIS DE DISTINTOS CASOS DE PRUEBAS DIELECTRICAS	
	III.1	Características Principales del Equipo de Prueba	75
	III.2	Circuito Equivalente	76
	III.2.1	Cálculo de las reactancias	76
	III.3	Circuito de Prueba Completo	77
	III.3.1	Análisis de distintos casos	78
		a) Cálculo de la potencia de compensación	78
		b) Cálculo del resistor de amortiguamiento R_a	79
		c) Cálculo del resistor de protección R_b	84
		d) Cálculo de la distribución de tensión, el efecto Ferranti, la corriente de cortocircuito, y la frecuencia de resonancia	86
		CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	89
		BIBLIOGRAFIA	91
		APENDICE A	92

INTRODUCCION

Los transformadores de prueba, ya sea solos o conectados en cascada, que se utilizan para la realización de las pruebas dieléctricas a frecuencia industrial, son muy delicados en su operación y mantenimiento debido al alto costo que representa una falla de estos equipos, tanto por el costo mismo de la reparación, como por el costo que representan los días no utilizados de un laboratorio de pruebas de Alta Tensión. Por esta razón, es de vital importancia el conocimiento profundo de la operación, así como del comportamiento a priori de estos equipos durante las pruebas.

Tomando como muestra de estos equipos la cascada de transformadores de 900 kV, que se va a utilizar en el laboratorio de Alta Tensión de la CFE, de Irapuato, este trabajo pretende analizar su comportamiento en estado estacionario durante las pruebas.

El análisis se hace centrando la atención en la necesidad y la importancia de la compensación inductiva, a causa del fenómeno de cargas capacitivas que presentan los objetos bajo pruebas dieléctricas. Además de que se sabe por la experiencia que una adecuada compensación da como resulta-

do una distribución de la tensión, no peligrosa, en las -
unidades que forman la cascada.

CAPITULO I

TRANSFORMADORES DE PRUEBA

Altas tensiones alternas son requeridas en laboratorios de experimentación y pruebas de corriente alterna, así como en la mayoría de los circuitos para la generación de tensiones de impulso y altas tensiones directas. Los transformadores de prueba usados generalmente para este propósito tienen considerablemente rangos de baja potencia y relaciones de transformación muy grandes. La alimentación de los transformadores de prueba se hace a través de una fuente de tensión regulable.

El trabajo llevado a cabo en un laboratorio de investigación y el equipo necesario, varían considerablemente de un lugar a otro. Un laboratorio de alta tensión, tiene generalmente equipo para diferentes tipos de pruebas dieléctricas.

Las pruebas tipo son las pruebas hechas a una pieza del equipo o a varias piezas similares intentando mostrar que todas las piezas del equipo hechas bajo las mismas especificaciones y teniendo los mismos detalles esenciales, podrán pasar pruebas idénticas; éstas normalmente no se repiten en diferentes lotes.

Las pruebas de rutina son a las que se somete cada pieza del equipo.

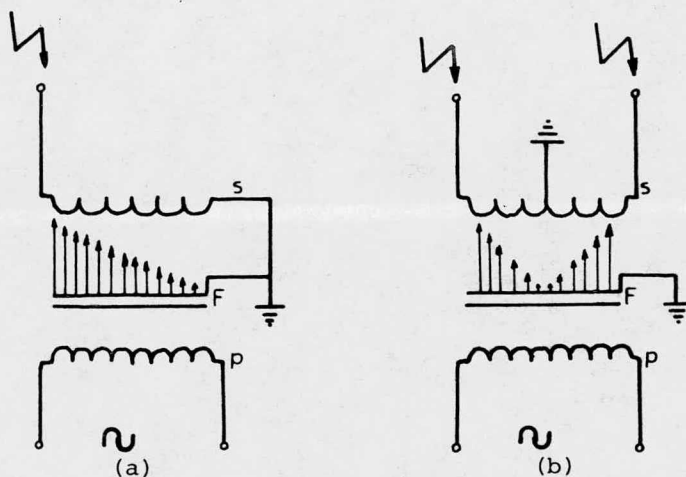
Los transformadores de prueba son normalmente diseñados para operar a la misma frecuencia que la frecuencia normal de trabajo del objeto de prueba.

I .1.- Circuitos de Transformadores de Prueba

Los transformadores para la generación de altas tensiones de prueba, tienen generalmente una terminal del devanado de alta tensión conectada a tierra, por la necesidad de referir la tensión con respecto a tierra. Sin embargo, en muchos circuitos utilizados para la generación de altas tensiones de corriente directa y de impulso, se requieren transformadores con devanados completamente aislados de tierra. La Fig. I .1, muestra dos circuitos básicos para transformadores de prueba. La longitud de las flechas de tensión, indican la magnitud de los esfuerzos en el aislamiento entre el devanado de alta tensión "s" y el devanado de excitación "p" o el núcleo de hierro "F". El devanado completamente aislado puede ser conectado a tierra si es necesario a cualquiera de las dos terminales (Fig. I .1.a) o al tap central (Fig. I .1.b), en el último caso, la tensión de salida será siempre simétrica con respecto a tierra.

La generación de tensión arriba de unos cuantos cientos -

de kV con un solo transformador como el que se muestra - en la Fig. I.1 es raramente usado; por razones técnicas y económicas, se emplea la conexión en serie de los devanados de alta tensión de varios transformadores. En tal arreglo en cascada, los transformadores individuales deben ser aislados para las tensiones correspondientes de los pasos inferiores. Los devanados de excitación de los transformadores de todos los pasos a excepción del primario (o más bajo), operan a un alto potencial con respecto a tierra.



p=Devanado de Excitación
F=Núcleo de Hierro

s=Devanado de
Alta Tensión

Fig. I.1 - Circuito de Transformadores de Prueba -
Una Etapa
a) Polo Sencillo Aislado
b) Completamente Aislado

Un circuito usado frecuentemente, introducido en 1915 por W. Petersen, F. Dessauer y E. Welter, se muestra en la Fig. I.2. El devanado de excitación "p" de las etapas superiores, es alimentado por los devanados acopladores "k" de las etapas inmediatamente abajo. Las etapas individuales excepto la última, consisten necesariamente de transformadores de tres devanados.

Se debe notar que los devanados de acoplamiento y excitación de las etapas más bajas tienden a transmitir las potencias más altas y son diseñados para cargas mayores. La magnitud de la potencia manejada por los devanados individuales es indicada en la Fig. I.2, en términos de múltiplos de "P".

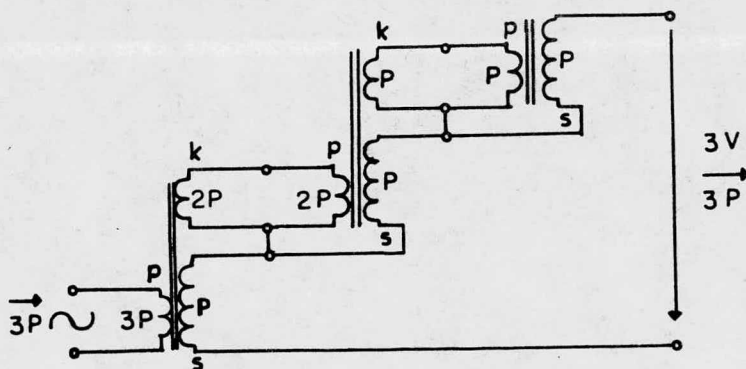


Fig. I.2.- Transformadores de Prueba en Cascada de Tres Etapas

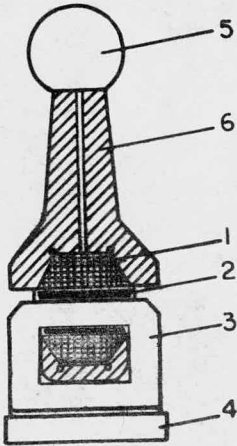
- p = Devanado de excitación
- s = Devanado de alta tensión
- k = Devanado de acoplamiento

I .1.2.- Construcción de los transformadores de prueba.

Para potencias de pocos kVA, los transformadores de potencial (no capacitivo) pueden ser usados para generar altas tensiones. Los transformadores de prueba de baja potencia son similares en construcción a los transformadores de potencial de la misma tensión de prueba. Para tensiones hasta de 100 kV son aislados generalmente con resina epóxica. Para potencias mayores, se debe tomar en consideración el enfriamiento de los devanados y las características de construcción recuerdan a los transformadores de potencial. El tipo de aislamiento predominante es el de papel impregnado con aceite y barreras de papel y aceite.

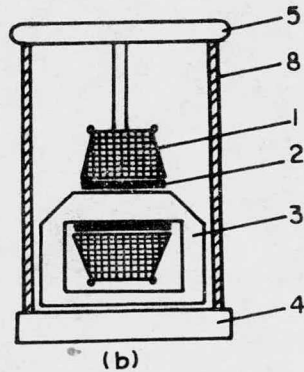
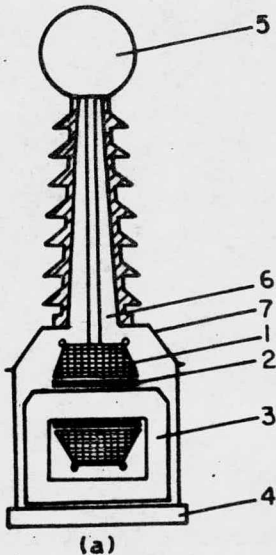
Los transformadores de prueba con aislamiento de resina, tienen por lo menos su devanado de alta tensión moldeado en resina epóxica. La Fig. I.3, muestra un corte simplificado de un transformador de este tipo.

Existen numerosos diseños para transformadores de prueba aislados en aceite. En la construcción tipo tanque, mostrado en la Fig. I.4a, las partes activas (núcleo y devanado) están encerradas en un depósito metálico, la superficie del cual actúa como auto refrigerante. Sin embargo, a altas tensiones de trabajo el espacio requerido y el alto costo de las boquillas son una desventaja. El transformador tipo recipiente aislante, mostrado en la Fig. I.4.b, tiene sus partes activas cubiertas por un cilindro aislante.



- 1.-Devanado de Alta Tensión
- 2.-Devanado de Baja Tensión
- 3.-Núcleo de Hierro
- 4.-Base
- 5.-Terminal de Alta Tensión
- 6.-Aislamiento

Fig.I. 3.-Sección Transversal de un Transformador de Prueba con Aislamiento de Resina Epóxica



- 6.-Boquilla
- 7.-Tanque de Metal
- 8.-Recipiente Aislado
- a).-Diseño Tipo Tanque
- b).-Recipiente Aislado

Fig.I. 4.-Transformador de Prueba Aislado en Aceite, los numeros del 1 al 5 son los mismos de la Fig.I. 3.

En general, este tipo de transformadores contiene una mayor cantidad de aceite y por lo tanto, mayores constantes térmicas de tiempo para el caso de sobrecarga.

La disipación de calor a través del recipiente aislado, es muy lenta; por lo cual se hace necesario un circuito cerrado de enfriamiento por medio de intercambiadores de calor externos de alta capacidad continua. La ventaja es que no necesita boquillas y es sencillo conseguir y adaptar electrodos con grandes radios de curvatura. Un ventajoso arreglo de transformadores de prueba usado frecuentemente es mostrado en la Fig. I.5. Esto es considerado como una cascada de dos etapas en la cual ambas etapas tienen un núcleo común de hierro "F", el cual está a un potencial medio y requiere normalmente de una montura aislada. Para el arreglo simétrico de los devanado p_1 o p_2 , pueden ser elegidos para la excitación primaria. Si la excitación se realiza por medio de k_1 y k_2 , se obtiene una alta tensión simétrica con respecto a tierra. La Fig. I.5, muestra las tensiones a tierra que resultan cuando la terminal de alta tensión del lado derecho está conectada a tierra.

El arreglo anterior, es especialmente ventajoso a tensiones muy altas, y se puede usar en el diseño tipo tanque con dos boquillas o en el tipo recipiente aislado. En el último caso, el arreglo debe ser girado 90° para que los dos pasos queden situados uno arriba del otro.

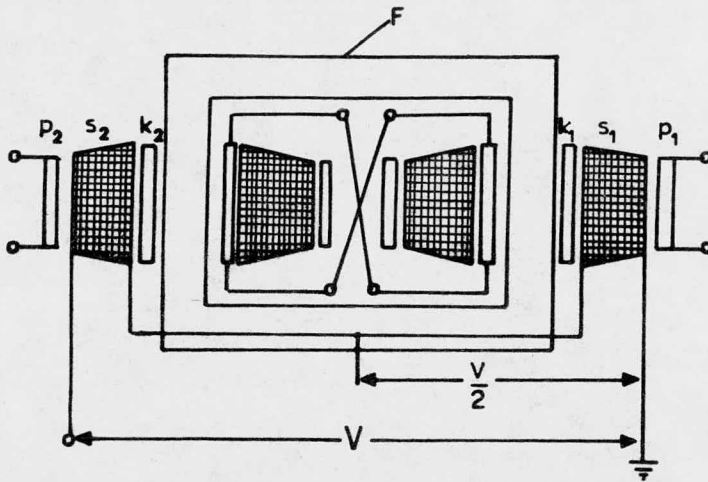


Fig.I. 5.- Cascada de Dos Etapas con Núcleo Común de Hierro a Medio Potencial

- P_1, P_2 Devanados de Excitación
- S_1, S_2 Devanados de Alta Tensión
- K_1, K_2 Devanados de Acoplamiento
- F Núcleo de Hierro

I .2.- Operación en Estado Estable de un Transformador de Tres Devanados

El comportamiento de trabajo de los transformadores de tres devanados, se describe no muy adecuadamente con la ayuda del circuito equivalente del transformador normal; esto es porque la capacitancia propia del devanado de alta tensión y la del objeto de prueba que presenta predominantemente una carga externa capacitiva, tienen una influencia considerable en su comportamiento. Por otra parte, la corriente de magnetización puede ser despreciada ya que no hay saturación del núcleo de hierro.

I .2.1.- Transformador de tres devanados

Como se indicó, un transformador de tres devanados se representa como se muestra en la siguiente figura:

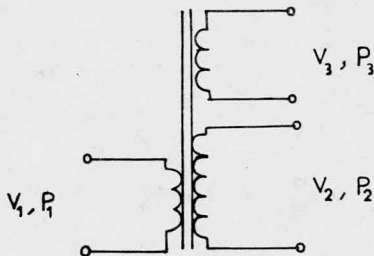


Fig. I .6.- Transformador de Tres Devanados, donde V_1-P_1 , V_2-P_2 , V_3-P_3 , son la tensión y potencia de cada devanado.

Por medio de las pruebas de cortocircuito que se verán más adelante, se determinan los valores absolutos de las reactancias.

$$\begin{array}{ll} 1 - 2 & X_{12} \\ 1 - 3 & X_{13} \\ 2 - 3 & X_{23} \end{array}$$

Los valores relativos de éstas, se pueden representar de dos formas:

a).- Representando directamente los valores absolutos a las cantidades base P_b , V_b . Es útil asumir como potencia base (P_b), el valor nominal de uno de los tres devanados (en caso de transformadores de tres devanados, se elige la potencia del devanado de alta tensión), y como tensión base (V_b) la tensión nominal de un devanado (en este caso, la tensión base para los otros devanados son sus tensiones nominales).

$$X = \frac{X P_b}{V_b^2}$$

b).- Refiriendo los valores absolutos a las cantidades nominales de cada devanado y después a las cantidades base.

$$X = \frac{X P_n}{V_n^2} \frac{P_b}{P_n} \frac{V_n^2}{V_b^2}$$

Es obvio que los dos métodos son equivalentes. El segundo es útil cuando los valores referidos a las cantidades

nominales son conocidas.

El concepto de tensión base, puede en este caso no tomarse en cuenta, ya que la tensión base corresponde a la --- tensión nominal. Por lo que la impedancia será referida sólo a la potencia base (P_b).

I .2.2.- Circuito equivalente aproximado de un transformador de tres devanados

El circuito equivalente de un transformador de tres devanados, es representado en la Fig. I .7.

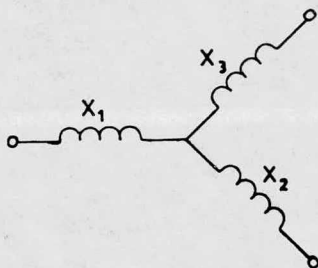


Fig. I .7.- Circuito equivalente de un transformador de tres devanados

Las reactancias X_1 , X_2 y X_3 del circuito equivalente son - determinadas resolviendo el sistema de ecuaciones siguientes:

$$X_1 + X_2 = X_{12} \quad (1)$$

$$X_1 + X_3 = X_{13} \quad (2)$$

$$X_2 + X_3 = X_{23} \quad (3)$$

Restando (2) a (1)

$$X_2 - X_3 = X_{12} - X_{13} \quad (4)$$

Restando (3) a (4)

$$-2X_3 = X_{12} - X_{13} - X_{23} \quad (5)$$

$$2X_3 = X_{13} + X_{23} - X_{12}$$

$$X_3 = \frac{X_{13} + X_{23} - X_{12}}{2} \quad (6)$$

Ahora bien sumando (3) y (4)

$$2X_2 = X_{23} + X_{12} - X_{13} \quad (7)$$

$$X_2 = \frac{X_{12} + X_{23} - X_{13}}{2} \quad (8)$$

Para determinar X_1 , se resta (3) a (2) nos dá:

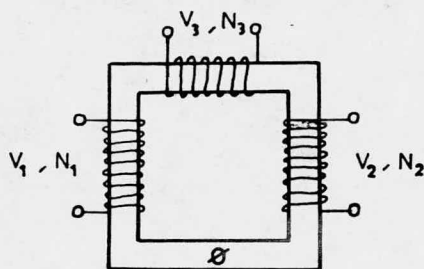
$$X_1 - X_2 = X_{13} - X_{23} \quad (9)$$

Sumando (9) y (1)

$$2X_1 = X_{13} + X_{12} - X_{23}$$

$$X_1 = \frac{X_{13} + X_{12} - X_{23}}{2} \quad (10)$$

En el circuito equivalente de la Fig. I.7, no se considere la inductancia de magnetización (X_0). Debido a que -- está considerado solo la operación estado-estable. El -- valor relativo de X_0 es el mismo para cada devanado, como se demuestra a continuación:



$$V_1 = \omega N_1 \phi$$

$$V_2 = \omega N_2 \phi$$

$$V_3 = \omega N_3 \phi$$

$$\phi = \text{Flujo}$$

$$L_{01} = N_1^2 \mathcal{L}$$

$$L_{02} = N_2^2 \mathcal{L}$$

$$L_{03} = N_3^2 \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \text{Flujo mutuo}$$

$$X_{01} = \omega N_1^2 \mathcal{L}$$

$$X_{02} = \omega N_2^2 \mathcal{L}$$

$$X_{03} = \omega N_3^2 \mathcal{L}$$

$$X_{01} = \frac{X_{01} \text{ Pb}}{V_1^2} = \frac{\omega N_1^2 \mathcal{L} \text{ Pb}}{V_1^2}$$

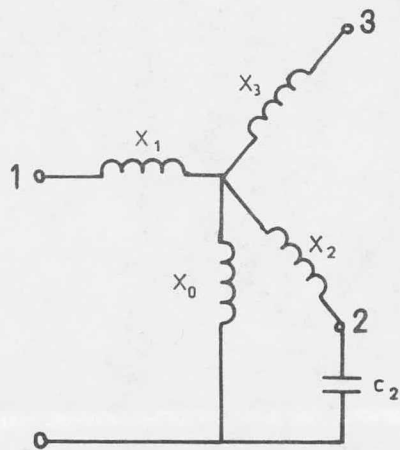
$$X_{02} = \frac{X_{02} \text{ Pb}}{V_2^2} = \frac{\omega N_2^2 \mathcal{L} \text{ Pb}}{V_2^2}$$

$$X_{03} = \frac{X_{03} \text{ Pb}}{V_3^2} = \frac{\omega N_3^2 \mathcal{L} \text{ Pb}}{V_3^2}$$

El circuito equivalente completo de un transformador de tres devanados, debe considerar también la capacitancia de los devanados. Generalmente, es suficiente considerar sólo la capacitancia del devanado de alta tensión. Esta capacitancia debe ser introducida como un valor relativo:

$$C_2 = C_2 \frac{Vb^2}{\text{Pb}}$$

Por lo tanto, el circuito equivalente sería:



Circuito equivalente completo de un transformador de tres devanados

I .2.3.- Pruebas de cortocircuito en un transformador de -
tres devanados

para la prueba de cortocircuito en un transformador de tres devanados, se sigue el mismo procedimiento que se utiliza para un transformador de dos devanados.

Si las capacidades en kVA de los distintos devanados no son las mismas, la corriente aplicada para la prueba debe ser la correspondiente a la del devanado de menor capacidad de los dos bajo prueba. Sin embargo, los resultados de impedancia una vez convertidos a la forma de porcentaje, deben estar referidos a la misma base de kVA y de preferencia a la del devanado de más alta capacidad.

Procedimiento para las pruebas de cortocircuito:

- 1.- Para obtener la reactancia entre el devanado primario y secundario ($X_{1,2}$), el devanado secundario está en cortocircuito, el devanado terciario en circuito abierto y el devanado primario es alimentado a una tensión tal que haga circular la corriente nominal en los devanados. Una vez ajustadas la corriente y la frecuencia a su valor nominal, se toman lecturas en el ampérmetro, vóltmetro y wáttmetro. (Fig. I .8).

Continúa Fig...

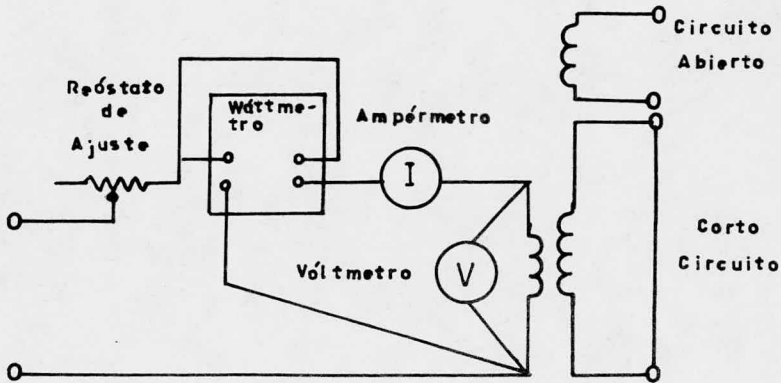


Fig. 1.8.- Diagrama para las pruebas de cortocircuito

Es suficiente medir y ajustar la corriente en el devanado excitado, ya que en el devanado en cortocircuito circula también su corriente nominal correspondiente.

La reactancia se calcula de la siguiente forma:

$$R_{12} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2}$$

$$Z_{12} = \frac{V_{cc}}{I_{cc}}$$

$$X_{12} = \sqrt{Z_{12}^2 - R_{12}^2} \quad (11)$$

2.- Para obtener la reactancia entre el devanado primario y terciario (X_{13}), el devanado terciario está en cortocircuito, el devanado secundario en circuito abier-

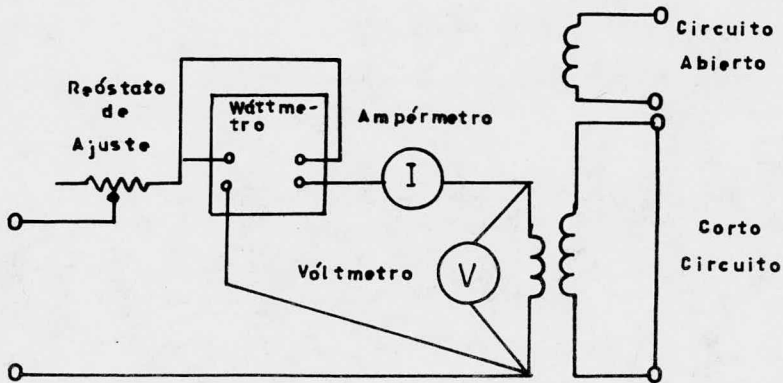


Fig. I.8.- Diagrama para las pruebas de cortocircuito

Es suficiente medir y ajustar la corriente en el devanado excitado, ya que en el devanado en cortocircuito circula también su corriente nominal correspondiente.

La reactancia se calcula de la siguiente forma:

$$R_{12} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2}$$

$$Z_{12} = \frac{V_{cc}}{I_{cc}}$$

$$X_{12} = \sqrt{Z_{12}^2 - R_{12}^2} \quad (11)$$

2.- Para obtener la reactancia entre el devanado primario y terciario (X_{13}), el devanado terciario está en cortocircuito, el devanado secundario en circuito abier-

to y el devanado primario es alimentado a una tensión tal, que circule la corriente nominal en el devanado. Se toman las lecturas en el equipo de medición y la reactancia se calcula como:

$$R_{13} = \frac{P_{CC}}{I_{CC}^2}$$

$$Z_{13} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}}$$

$$X_{13} = \sqrt{Z_{13}^2 - R_{13}^2} \quad (12)$$

3.- Para obtener la reactancia entre el devanado secundario y terciario (X_{23}), el equipo de medición se encuentra en el devanado secundario para ser alimentado a una tensión tal, que circule la corriente nominal, mientras que el devanado terciario está en cortocircuito y el devanado primario en circuito abierto. Se toman las lecturas del equipo de medición y la reactancia se calcula como:

$$R_{23} = \frac{P_{CC}}{I_{CC}^2}$$

$$Z_{23} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}}$$

$$X_{23} = \sqrt{Z_{23}^2 - R_{23}^2} \quad (13)$$

Las reactancias X_1 , X_2 y X_3 todas referidas al primario, son determinadas como se indica en el apartado --

I .2.2.

I .3.- Circuito Equivalente de Dos Transformadores Conectados en Cascada

Como se dijo anteriormente, durante la operación en estado estable, la inductancia de magnetización puede ser ignorada. Además, para simplificar el análisis de dos o más transformadores en cascada, no se toman en cuenta tampoco las capacitancias parásitas de cada unidad. La única capacitancia que se toma en cuenta, es la capacitancia total de salida, representada ésta principalmente por el objeto bajo prueba. Por lo tanto, el circuito equivalente de dos transformadores en cascada quedan como se indica en la Fig. I.9.

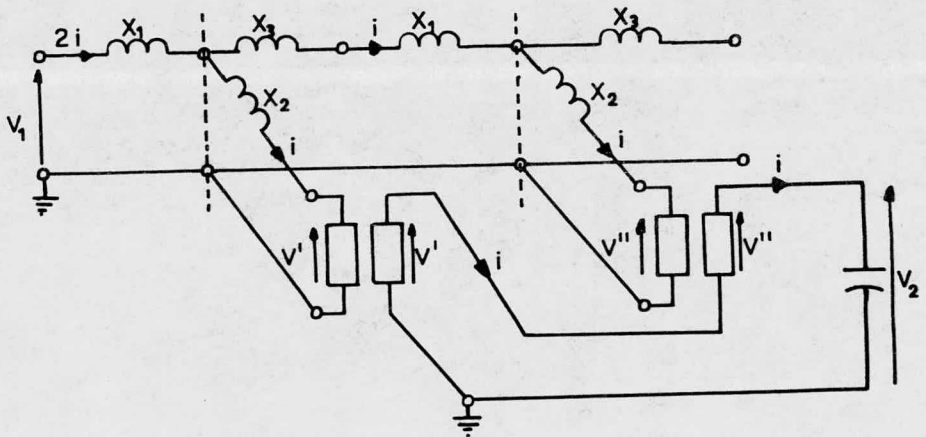


Fig. I.9.- Circuito equivalente de dos transformadores -- conectados en cascada

De la Fig. I.9, se determinan las siguientes ecuaciones:

$$V' = V_1 - j2X_1 i - jX_2 i \quad (14)$$

$$V'' = V_1 - j2X_1 i - jX_3 i - jX_1 i - jX_2 i$$

$$V'' = V_1 - j3X_1 i - jX_2 i - jX_3 i \quad (15)$$

$$V_2 = V' + V'' \quad (16)$$

$$i = j\omega CV_2 \quad (17)$$

Por razones de facilidad, podemos sustituir a:

$$X' = 2X_1 + X_2 \quad (18)$$

$$X'' = 3X_1 + X_3 + X_2 \quad (19)$$

Sustituyendo (18) en (14)

$$V' = V_1 - jX' i \quad (20)$$

Sustituyendo (17) en (20)

$$V' = V_1 - jX' (j\omega CV_2)$$

$$V' = V_1 + X' \omega CV_2 \quad (21)$$

Sustituyendo (19) en (15)

$$V'' = V_1 - jX'' i \quad (22)$$

Sustituyendo (17) en (22)

$$V'' = V_1 - jX'' (j\omega CV_2)$$

$$V'' = V_1 + X'' \omega CV_2 \quad (23)$$

Sustituyendo (21) y (23) en (16)

$$V_2 = V_1 + X' \omega CV_2 + V_1 + X'' \omega CV_2$$

$$V_2 = V_1 + X' \omega c V_2 + V_1 + X'' \omega c V_2$$

$$V_2 - V_2 (X' \omega c + X'' \omega c) = 2V_1$$

$$2V_1 = V_2 [1 - \omega c (X' + X'')] \quad (24)$$

$$V_2 = \frac{2V_1}{1 - \omega c (X' + X'')} \quad (25)$$

Sustituyendo (25) en (21)

$$V' = V_1 + X' \omega c \left[\frac{2V_1}{1 - \omega c (X' + X'')} \right]$$

$$V' = \frac{V_1 [1 - \omega c (X' + X'')] + X' \omega c 2V_1}{1 - \omega c (X' + X'')}$$

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c (X' + X'') + 2V_1 X' \omega c}{1 - \omega c (X' + X'')}$$

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c X' - V_1 \omega c X'' + 2V_1 \omega c X'}{1 - \omega c (X' + X'')}$$

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c X'' + V_1 \omega c X'}{1 - \omega c (X' + X'')}$$

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c (X'' - X')}{1 - \omega c (X' + X'')}$$

$$V' = \frac{V_1 [1 - \omega c (X'' - X')]}{1 - \omega c (X' + X'')}$$

$$V' = V_1 \frac{1 - \omega c (X'' - X')}{1 - \omega c (X' + X'')} \quad (26)$$

Sustituyendo (25) en (23)

$$V'' = V_1 + X'' \omega c \left[\frac{2V_1}{1 - \omega c (X' + X'')} \right]$$

$$\begin{aligned}
 V'' &= \frac{V_1 [1 - \omega C (X' + X'')] + 2V_1 X'' \omega C}{1 - \omega C (X' + X'')} \\
 V'' &= \frac{V_1 - V_1 \omega C X' - V_1 \omega C X'' + 2V_1 X'' \omega C}{1 - \omega C (X' + X'')} \\
 V'' &= \frac{V_1 + V_1 X'' \omega C - V_1 \omega C X'}{1 - \omega C (X' + X'')} \\
 \dot{V}'' &= \frac{V_1 [1 + \omega C (X'' - X')]}{1 - \omega C (X' + X'')} \\
 V'' &= V_1 \frac{1 + \omega C (X'' - X')}{1 - \omega C (X' + X'')} \tag{27}
 \end{aligned}$$

De la ecuación (17) y sustituyendo en ella la (25)

$$i = jV_1 \frac{2\omega C}{1 - \omega C (X' + X'')} \tag{28}$$

Considerando las condiciones límite

$C = 0$ (sin carga) y $C \rightarrow \infty$ (cortocircuito)

Para sin carga, tenemos:

$$C = 0$$

$$V' = V'' = V_1 \tag{29}$$

$$V_2 = 2V_1 \tag{30}$$

$$i = 0 \tag{31}$$

Para cortocircuito $C \rightarrow \infty$

$$V' = V_1 \frac{X'' - X'}{X' + X''} \tag{32}$$

$$V'' = -V_1 \frac{X'' - X'}{X' + X''} \tag{33}$$

$$V_2 = 0 \quad (34)$$

$$i_{cc} = -j \frac{V_1}{\frac{1}{2}(X'+X'')} \quad (35)$$

Esto es útil para definir la reactancia de cortocircuito --
como:

$$X_t = \frac{V_1}{2i_{cc}} = \frac{V_1}{\frac{1}{2} \frac{V_1}{(X'+X'')}} = \frac{2(X'+X'')}{1}$$

$$X_t = \frac{X' + X''}{4}$$

$$4X_t = X' + X'' \quad (36)$$

Sustituyendo (18) y (19) en (36)

$$4X_t = 2X_1 + X_2 + 3X_1 + X_3 + X_2$$

$$X_t = \frac{1}{4} (5X_1 + 2X_2 + X_3) \quad (37)$$

Sustituyendo (36) en (35)

$$i_{cc} = -j \frac{V_1}{\frac{1}{2}(4X_t)}$$

$$i_{cc} = -j \frac{V_1}{2X_t} \quad (38)$$

Incrementando la carga externa C , la tensión V_2 cambia de acuerdo a:

$$V_2 = V_1 \frac{2}{1-4\omega c X_t} \quad (39)$$

Además la distribución de tensión a lo largo de los transformadores llega a ser no lineal de acuerdo a las siguientes ecuaciones (42) y (44).

De la ecuación (24), tenemos que:

$$V_1 = \frac{V_2}{2} [1 - \omega c (X' + X'')] \quad (40)$$

y sustituyendo (40) en (21)

$$\begin{aligned} V' &= \frac{V_2}{2} [1 - \omega c (X' + X'')] + \omega c X' V_2 \\ V' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c X' - \frac{V_2}{2} \omega c X'' + \omega c X' V_2 \\ V' &= \frac{V_2}{2} + \frac{V_2}{2} \omega c X' - \frac{V_2}{2} \omega c X'' \\ V' &= \frac{V_2}{2} + \frac{V_2}{2} \omega c (X' - X'') \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo (18) y (19) en (41)

$$\begin{aligned} V' &= \frac{V_2}{2} + \frac{V_2}{2} \omega c (2X_1 + X_2 - 3X_1 - X_2 - X_3) \\ V' &= \frac{V_2}{2} + \frac{V_2}{2} \omega c (-X_1 - X_3) \\ V' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c (X_1 + X_3) \\ V' &= \frac{V_2}{2} [1 - \omega c (X_1 + X_3)] \end{aligned} \quad (42)$$

Además sustituyendo la ecuación (40) en la ecuación (23)

$$\begin{aligned}
 V'' &= \frac{V_2^2}{2} [1 - \omega c (X' + X'')] + \omega c X'' V_2 \\
 V'' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c X' - \frac{V_2}{2} \omega c X'' + \omega c X'' V_2 \\
 V'' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c X' + \frac{V_2}{2} \omega c X'' \\
 V'' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c (X' - X'') \tag{43}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (18) y (19) en (43)

$$\begin{aligned}
 V'' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c [2X_1 + X_2 - 3X_1 - X_2 - X_3] \\
 V'' &= \frac{V_2}{2} - \frac{V_2}{2} \omega c [-X_1 - X_3] \\
 V'' &= \frac{V_2}{2} [1 + \omega c (X_1 + X_3)] \tag{44}
 \end{aligned}$$

El valor absoluto de la corriente de cortocircuito es:

$$I_{ccAT} = i_{cc} I_{bAT} \tag{45}$$

Además sabemos que

$$I_{bAT} = \frac{P_b}{V_{bAT}} \tag{46}$$

Sustituyendo (38) y (46) en (45)

$$\begin{aligned}
 I_{ccAT} &= \frac{V_1}{2X_t} \frac{P_b}{V_{bAT}} \\
 I_{ccAT} &= \frac{V_1}{X_t} \frac{I_{bAT}}{2} \tag{47}
 \end{aligned}$$

I.4.- Circuito Equivalente de Tres Transformadores Conectados en Cascada

El circuito equivalente de esta cascada es el siguiente:

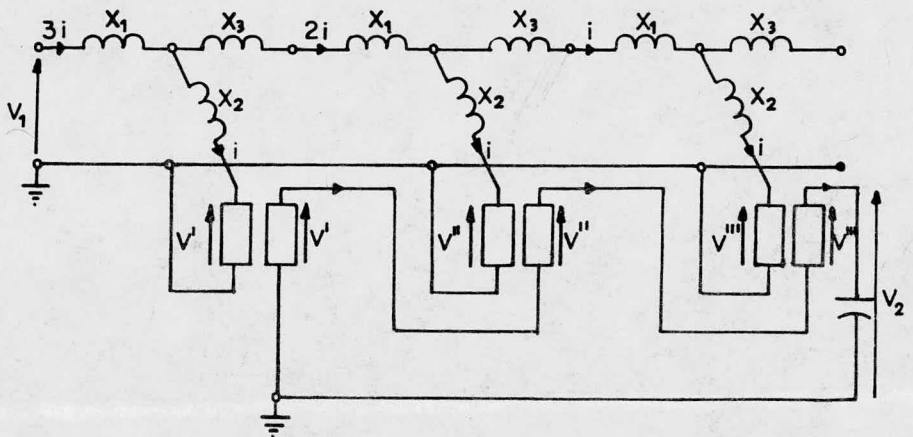


Fig. I.10.- Circuito equivalente de tres transformadores conectados en cascada

La solución para este circuito se obtiene de la siguiente forma:

$$V' = V_1 - j3X_1 i - jX_2 i \quad (48)$$

$$V'' = V_1 - j3X_1 i - j2X_3 i - j2X_1 i - jX_2 i$$

$$V''' = V_1 - j5X_1 i - jX_2 i - j2X_3 i \quad (49)$$

$$V'''' = V_1 - j3X_1 i - j2X_3 i - j2X_1 i - jX_3 i - jX_1 i - jX_2 i$$

$$V'''' = V_1 - j6X_1 i - jX_2 i - j3X_3 i \quad (50)$$

Por razones de facilidad, vamos a dar las siguientes ecuaciones:

$$X' = 3X_1 + X_2 \quad (51)$$

$$X'' = 3X_1 + 2X_3 + 2X_1 + X_2$$

$$X'' = 5X_1 + X_2 + 2X_3 \quad (52)$$

$$X''' = 3X_1 + 2X_3 + 2X_1 + X_3 + X_1 + X_2$$

$$X''' = 6X_1 + X_2 + 3X_3 \quad (53)$$

$$V_2 = V' + V'' + V''' \quad (54)$$

$$i = j\omega cV_2 \quad (55)$$

Sustituyendo (51) y (55) en (48) tenemos:

$$V' = V_1 + \omega cV_2 X' \quad (56)$$

Sustituyendo (52) y (55) en (49) tenemos

$$V'' = V_1 + \omega cV_2 X'' \quad (57)$$

Sustituyendo (53) y (55) en (50) obtenemos:

$$V''' = V_1 + \omega cV_2 X''' \quad (58)$$

Sustituyendo (56), (57) y (58) en (54):

$$V_2 = V_1 + \omega cV_2 X' + V_1 + \omega cV_2 X'' + V_1 + \omega cV_2 X'''$$

$$V_2 = 3V_1 + \omega cV_2 (X' + X'' + X''')$$

$$V_2 - \omega cV_2 (X' + X'' + X''') = 3V_1$$

$$V_2 \left[1 - \omega c (X' + X'' + X''') \right] = 3V_1 \quad (59)$$

$$V_2 = \frac{3V_1}{1 - \omega c (X' + X'' + X''')} \quad (60)$$

Sustituyendo (60) en (56)

$$V' = V_1 + \omega cX' \left[\frac{3V_1}{1 - \omega c (X' + X'' + X''')} \right]$$

$$V' = \frac{V_1 [1 - \omega c(X' + X'' + X''')] + 3\omega c X' V_1}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')}$$

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c X'' - V_1 \omega c X''' + 2V_1 \omega c X'}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')}$$

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c(X'' + X''' - 2X')}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')} \quad (61)$$

$$X'' + X''' - 2X' = 5X_1 + 2X_3 + X_2 + 6X_1 + 3X_3 + X_2 - 6X_1 - 2X_2$$

$$X'' + X''' - 2X' = 5X_1 + 5X_3 \quad (62)$$

Sustituyendo (62) en (61)

$$V' = \frac{V_1 - V_1 \omega c(5X_1 + 5X_3)}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')}$$

$$V' = \frac{V_1 [1 - \omega c(5X_1 + 5X_3)]}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')} \quad (63)$$

Sustituyendo (60) en (57)

$$V'' = V_1 + \omega c X'' \left[\frac{3V_1}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')} \right]$$

$$V'' = \frac{V_1 - V_1 \omega c X' - V_1 \omega c X'' - V_1 \omega c X''' + 3V_1 \omega c X''}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')}$$

$$V'' = \frac{V_1 - V_1 \omega c(X' + X''' - 2X'')}{1 - \omega c(X' + X'' + X''')} \quad (64)$$

$$X' + X''' - 2X'' = 3X_1 + X_2 + 6X_1 + X_2 + 3X_3 - 10X_1 - 2X_2 - 4X_3$$

$$X' + X''' - 2X'' = -X_1 - X_3 \quad (65)$$

Sustituyendo (65) en (64)

$$V'' = \frac{V_1 - V_1 \omega C (-X_1 - X_3)}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')}$$

$$V'' = \frac{V_1 [1 + \omega C (X_1 + X_3)]}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')} \quad (66)$$

Sustituyendo (60) en (58)

$$V''' = V_1 + \omega C X''' \frac{3V_1}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')}$$

$$V''' = \frac{V_1 - V_1 \omega C X' - V_1 \omega C X'' - V_1 \omega C X''' + 3V_1 \omega C X'''}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')}$$

$$V''' = \frac{V_1 - V_1 \omega C (X' + X'' - 2X''')}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')} \quad (67)$$

$$X' + X'' - 2X''' = 3X_1 + X_2 + 5X_1 + X_2 + 2X_3 - 12X_1 - 2X_2 - 6X_3$$

$$X' + X'' - 2X''' = -4X_1 - 4X_3 \quad (68)$$

Sustituyendo (68) en (67)

$$V''' = \frac{V_1 - V_1 \omega C (-4X_1 - 4X_3)}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')}$$

$$V''' = \frac{V_1 [1 + \omega C (4X_1 + 4X_3)]}{1 - \omega C (X' + X'' + X''')} \quad (69)$$

para condiciones sin carga $C = 0$

$$V' = V'' = V''' \quad (70)$$

$$V_2 = 3V_1 \quad (71)$$

$$i = 0 \quad (72)$$

Para condiciones de cortocircuito $C \rightarrow \infty$

$$V' = \frac{5X_1 + 5X_3}{X' + X'' + X'''} V_1 \quad (73)$$

$$V'' = \frac{X_1 + X_3}{X' + X'' + X'''} V_1 \quad (74)$$

$$V''' = \frac{4X_1 + 4X_3}{X' + X'' + X'''} V_1 \quad (75)$$

$$V_2 = 0 \quad (76)$$

$$i_{cc} = -j \frac{V_1}{3(X' + X'' + X''')} \quad (77)$$

Esto es útil para definir la reactancia de cortocircuito como:

$$X_t = \frac{V_1}{3i_{cc}}$$

$$X_t = \frac{V_1}{\frac{3V_1}{3(X' + X'' + X''')}} = \frac{V_1(X' + X'' + X''')}{9V_1}$$

$$X_t = \frac{X' + X'' + X'''}{9}$$

$$9X_t = X' + X'' + X''' \quad (78)$$

Sustituyendo el valor de X' , X'' y X''' en (78)

$$9X_t = 14X_1 + 5X_3 + 3X_2 \quad (79)$$

Sustituyendo (78) en (63), (66), (69) y (77)

$$V' = V_1 \left[\frac{1 - \omega c(5X_1 + 5X_3)}{1 - 9\omega c X_t} \right] \quad (80)$$

$$V'' = V_1 \left[\frac{1 + \omega c(X_1 + X_3)}{1 - 9\omega c X_t} \right] \quad (81)$$

$$V'' = V_1 \left[\frac{1 + \omega c(4X_1 + 4X_3)}{1 - 9\omega c X_t} \right] \quad (82)$$

$$i_{cc} = \frac{V_1}{3X_t} \quad (83)$$

Sustituyendo (78) en (60)

$$V_2 = \frac{3V_1}{1 - 9\omega c X_t} \quad (84)$$

Sustituyendo (84) en (55)

$$i = V_1 \frac{j3\omega c}{1 - 9\omega c X_t} \quad (85)$$

I.5.- Enfoque a una Cascada de Transformadores Constituida por "n" Unidades Iguales

Es posible determinar la tensión de salida V_2 de cualquier cascada de transformadores de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$V_2 = V_1 \frac{n}{1 - n^2 \omega c X} \quad (86)$$

donde:

n = número de unidades de la cascada

X = reactancia total = $X_t + X_R$

c = valor relativo de la capacitancia

El valor de X_t es

$$X_t = \frac{1}{n^2} (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) \quad (87)$$

siendo

$$\alpha = \sum_1^n t^2 \quad (88)$$

$$\beta = n \quad (89)$$

$$\gamma = \sum_1^m t^2 \quad (90)$$

La corriente de cortocircuito en el lado de alta tensión es:

$$i_{\text{CCAT}} = \frac{V_1}{n\bar{X}} \quad \text{expresada en valor relativo}$$

$$I_{\text{CCAT}} = i_{\text{CCAT}} I_{\text{bAT}}$$

$$I_{\text{CCAT}} = i_{\text{CCAT}} \frac{P_b}{V_{\text{bAT}}} \quad (91)$$

$$I_{\text{CCBT}} = nK I_{\text{CCAT}} \quad (92)$$

Siendo K = relación nominal de cada unidad

I.6.- Cálculo de la Impedancia de Cortocircuito de Transformadores Diferentes Conectados en Cascada

En el caso general de las etapas de una cascada según la Fig. I.2, consiste de tres devanados, los potenciales de cualquiera de ellos son independientes uno del otro. Esta condición es cumplida por la Fig. I.11, Z_p , Z_s o Z_k se atribuye a cualquier devanado, cada impedancia es conectada en serie con un transformador ideal de tres devanados con el número correspondiente de vueltas N_p , N_s o N_k . Las impedancias Z_p , Z_s o Z_k , pueden ser determinadas por cualquier forma de cálculo o de los resultados derivados experimentalmente de las pruebas de cortocircuito y circuito abierto.

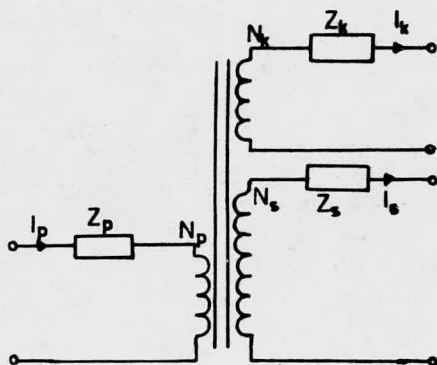


Fig. I.11.- Circuito de una Fase de una Cascada

En la figura anterior, la corriente de magnetización es insignificante, por lo que la suma de los amperes-vueltas de todos los devanados es igual a cero

$$N_p I_p - N_s I_s - N_k I_k = 0 \tag{93}$$

El método de cálculo es ilustrado para el ejemplo de una cascada de tres transformadores^{*}, donde las pérdidas serán ignoradas para mayor facilidad, por lo tanto:

$$Z_p = jX_1 \qquad Z_s = jX_2 \qquad Z_k = jX_3$$

Además se asumirá que la relación del número de vueltas es la misma para todas las etapas, es decir:

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{N_k}{N_s}$$

(*) Ver Fig. I.12

Los resultados de la suposición hecha anteriormente, es -- el circuito mostrado en la Fig. I.13. La corriente indicada y la reactancia de choque referida al número de vueltas N_s del respectivo devanado de alta tensión.

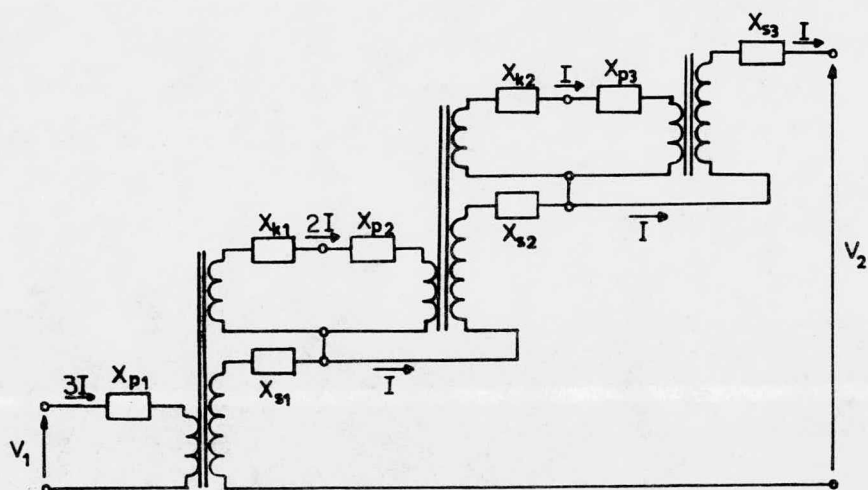


Fig. I.12.- Circuito equivalente completo de tres transformadores

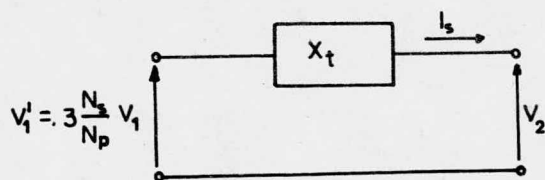


Fig. I.13.- Circuito equivalente simplificado de tres transformadores en cascada.

El circuito de la Fig. I.13 es el equivalente de la cascada completa. El valor de la reactancia resultante de cortocircuito X_t es obtenida por la condición de que la potencia media será:

$$I_s^2 X_t = \sum_{m=1}^3 \left[I_{p_m}^2 X_{p_m} + I_{k_m}^2 X_{k_m} + I_{s_m}^2 X_{s_m} \right] \quad (94)$$

Por lo que el valor de X_t para una cascada de tres transformadores será:

$$X_t = X_{s_1} + X_{s_2} + X_{s_3} + X_{k_2} + X_{p_3} + 4(X_{k_1} + X_{p_2}) + 9X_{p_1} \quad (95)$$

Con la simplificación anterior, la reactancia de cortocircuito de una cascada de n etapas será:

$$X_t = \sum_{m=1}^n \left[X_{s_m} + m^2 (X_{p_{(n+1-m)}} + X_{k_{(n-m)}}) \right] \quad (96)$$

con $X_{k_0} = 0$

Este método no es exclusivo para la simplificación hecha anteriormente aquí; sino que puede fácilmente ser extendida a diferentes relaciones de transformación y llega a tomarse en consideración la resistencia efectiva. Podrá ser usado también algunas veces para el cálculo de la impedancia de cortocircuito de transformadores de potencial conectados en cascada.

I.7.- Frecuencia de Resonancia de una Cascada de Transformadores

La tensión de salida V_2 de una cascada de transformadores constituida por "n" unidades iguales es:

$$V_2 = V_1 \frac{n}{1-n^2 \omega c X} \quad (97)$$

siendo:

n = número de unidades en cascada

X = reactancia total = $X_t + X_R$

c = valor relativo de la capacitancia

La condición de resonancia sucede cuando los términos

$$1-n^2 \omega c X = 0 \quad (98)$$

$$1-n^2 \omega c (X_t + X_R) = 0 \quad (99)$$

$$1-n^2 \omega^2 c (l_t + l_R) = 0 \quad (100)$$

La frecuencia de resonancia más baja es:

$$\omega^2 = \frac{1}{n^2 c (l_t + l_R)} \quad (101)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{n^2 c (l_t + l_R)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{n^2 c (l_t + l_R)}} \quad (102)$$

siendo:

$$l_t = \frac{X_t}{\omega_1}$$

$$l_R = \frac{X_R}{\omega_1}$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \quad \text{con} \quad f_1 = 60 \text{ Hz}$$

La reactancia del regulador de tensión puede influir apreciablemente en la frecuencia de resonancia de la cascada de transformadores. Particular atención hay que poner a este aspecto si la fuente contiene armónicas.

CAPITULO II

COMPENSACION DE CARGAS REACTIVAS

II.1 Elementos Capaces de Acumular Energía en un Circuito Eléctrico.

La inductancia L y la capacitancia C se denominan frecuentemente elementos acumuladores, debido a que almacenan energía en sus campos magnéticos y eléctricos asociados y a que esta energía no sufre pérdida alguna dentro de dichos elementos. Por hipótesis no se hallan contaminados con elementos de resistencia que son los de disipación. Toda la energía que durante un intervalo de tiempo dado pueda ser absorbida por un elemento de inductancia o de capacitancia, es restituida finalmente en su totalidad. La absorción de energía, integrada sobre un intervalo de tiempo suficientemente largo, es cero; por consiguiente, la potencia media tomada por un elemento de este tipo en el estado estacionario sinusoidal es cero.

Las expresiones correspondientes a la energía acumulada en los elementos de inductancia y capacitancia, vienen dadas por:

$$\text{Energía magnética acumulada} = E_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad (1)$$

$$\text{Energía eléctrica acumulada} = E_e = \frac{1}{2} C v^2 \quad (2)$$

Donde $i(t)$ y $v(t)$ son, respectivamente, la corriente en la inductancia y la tensión entre los extremos de la capacitancia. Estas pueden ser funciones cualesquiera del tiempo t , por lo que E_m y E_e son, en consecuencia, las funciones del tiempo que dan los valores de las energías acumuladas en cualquier instante. Se dice que ellas representan las energías instantáneas acumuladas.

Utilizando la relación de tensión-corriente correspondiente al elemento de inductancia o de capacitancia, las expresiones (1) y (2) pueden escribirse en otras formas; así, para el elemento de inductancia se tiene la siguiente ecuación.

$$V = L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

La cual realmente se deduce de la expresión más fundamental dada a continuación:

$$V = \frac{d\Psi}{dt} \quad (4)$$

En la cual Ψ representa el flujo de concatenación pertinente al elemento inductivo.

Despejando $d\Psi$ de la ecuación (4) se obtiene que

$$d\Psi = vdt \quad (5)$$

Integrando ambos lados de (5)

$$\Psi = \int vdt \quad (6)$$

Despejando di de la ecuación (3) se tiene:

$$di = \frac{1}{L} v dt \quad (7)$$

Integrando ambos miembros de (7)

$$i = \frac{1}{L} \int v dt \quad (8)$$

Sustituyendo (6) en (8)

$$i = \frac{\Psi}{L} \quad (9)$$

Sustituyendo (9) en (1) obtenemos la energía magnética acumulada en terminos del flujo de concatenación que es:

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L} \quad (10)$$

Utilizando la inductancia recíproca que tiene el siguiente símbolo.

$$\gamma = \frac{1}{L} \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (10)

$$E_m = \frac{1}{2} \gamma \Psi^2 \quad (12)$$

Cuya expresión tiene de nuevo la forma general de la ecuación (1). Similarmente, para el elemento de capacitancia se tiene que:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

Despejando dv de (11) tenemos:

$$dv = \frac{1}{c} i dt \quad (14)$$

Integrando ambos miembros:

$$v = \frac{1}{c} \int i dt \quad (15)$$

Recordando que la diferencial de la carga con respecto al tiempo es la corriente.

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (16)$$

Despejando dq de (16) e integrando obtenemos

$$q = \int i dt \quad (17)$$

Sustituyendo (17) en (15) tenemos:

$$v = \frac{q}{c} \quad (18)$$

Recordando que la capacitancia recíproca es la elastancia (designada por la letra S) tenemos:

$$S = \frac{1}{c} \quad (19)$$

Sustituyendo (18) en (2)

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} \quad (20)$$

Sustituyendo (19) en (20)

$$E_e = \frac{1}{2} S q^2 \quad (21)$$

En resumen tenemos que

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \Gamma \Psi^2 \quad (22)$$

$$E_e = \frac{1}{2} c v^2 = \frac{1}{2} S q^2 \quad (23)$$

Donde V e i son la tensión y la corriente; y Ψ y q , el flujo de concatenación y la carga (son las integrales con respecto al tiempo, de la tensión y de la corriente, respectivamente).

Supongamos que la corriente $i(t)$ en una inductancia L sea si nusoidal; es decir que:

$$i(t) = |I| \cos \omega t \quad (24)$$

$$i^2(t) = |I|^2 \cos^2 \omega t \quad (25)$$

Puesto que por trigonometría

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \quad (26)$$

Por lo que

$$i^2(t) = \frac{1}{2} |I|^2 (1 + \cos 2\omega t) \quad (27)$$

Se tiene ahora para la energía magnética acumulada que

$$E_m = \frac{1}{4} L |I|^2 (1 + \cos 2\omega t) \quad (28)$$

Este resultado aparece representado , en la fig. II.1. Ve mos que la energía acumulada varía sinusoidalmente entre ce ro y un valor máximo igual a $\frac{1}{2} L |I|^2$, siendo la frecuencia

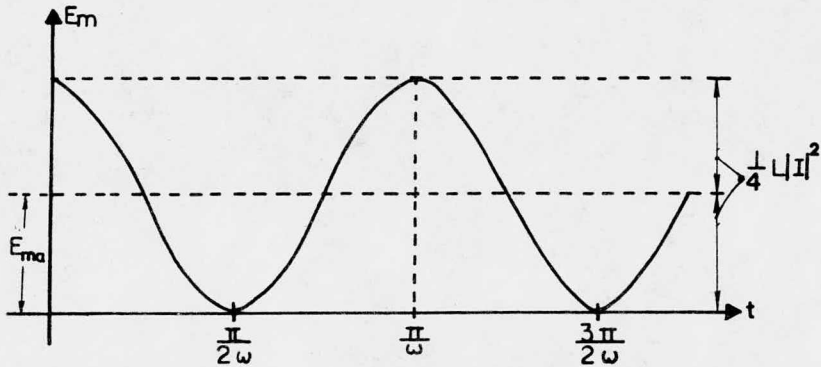


FIGURA II. 1 Energía instantánea almacenada en el campo magnético asociado con una inductancia cuando la corriente que circula por esta es sinusoidal de frecuencia en radianes ω .

en radianes el doble de la correspondiente a la corriente $i(t)$. De otra manera, puede decirse que E_m como función del tiempo se halla constituida por una componente constante.

$$E_{ma} = \frac{1}{4} L |I|^2 \quad (29)$$

más una componente alterna de frecuencia doble. Puesto que el valor medio de esta última es cero, la componente constante es igual al valor medio de E_m y así se designa apropiadamente.

La potencia tomada por el elemento inductivo viene dada por la derivada de E_m con respecto al tiempo. De la ecuación (28) se tiene la expresión:

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{\omega}{2} L |I|^2 \text{sen} 2\omega t \quad (30)$$

La cual es simplemente una senoide de frecuencia doble. Evidentemente su valor medio es cero; es decir,

$$\left(\frac{dE_m}{dt} \right)_{ma} = 0 \quad (31)$$

por lo tanto un elemento susceptible de acumular energía no puede absorberla indefinidamente en una proporción distinta de cero.

Observando la fig. II.1 se ve que el valor de pico de la energía magnética acumulada es precisamente igual al doble del valor medio; es decir, que $E_{mpico} = 2 E_{ma}$. Esta sencilla relación no es necesariamente cierta para un circuito que contenga varias inductancias y también resistencias y capacitancias. En tales casos más generales se encuentra normalmente que $E_{mpico} \leq 2 E_{ma}$ o que la amplitud de la componente oscilatoria de E_m es más pequeña que E_{ma} . Evidentemente, dicha componente no puede ser nunca más grande que E_{ma} , puesto que entonces E_m sería negativa durante algunas porciones de un ciclo, resultando imposible tratándose de elementos pasivos.

Similares observaciones pueden hacerse respecto al elemento capacitivo. Si en la ecuación (23) suponemos que:

$$v(t) = |V| \cos \omega t \quad (32)$$

$$v^2(t) = |V|^2 \cos^2 \omega t \quad (33)$$

Por trigonometría

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \omega t) \quad (34)$$

Por lo tanto

$$v^2(t) = \frac{1}{2} |V|^2 (1 + \cos 2 \omega t) \quad (35)$$

Sustituyendo (35) en (23):

$$E_e = \frac{1}{4} C |V|^2 (1 + \cos 2 \omega t) \quad (36)$$

De cuya expresión se tiene que

$$E_{ea} = \frac{1}{4} C |V|^2 \quad (37)$$

La potencia tomada por el elemento capacitivo viene dada por la derivada de E_e con respecto al tiempo. De la ecuación (36) se obtiene la expresión.

$$\frac{dE_e}{dt} = - \frac{\omega}{2} C |V|^2 \sin 2 \omega t \quad (38)$$

Por lo que su valor medio será:

$$\left(\frac{dE_e}{dt} \right)_{ea} = 0 \quad (39)$$

La representación de E_e con respecto al tiempo tiene el mismo aspecto que la de E_m . En general para circuitos con R y L , así como también con C se encuentra de nuevo que $E_{epico} \leq 2 E_{ea}$, apareciendo los signos de igualdad sólo en casos especiales.

II. 2 Relaciones de Energía y Potencia en un Circuito R.L.C.

Consideremos ahora el circuito RLC en serie representado en la fig. II.2 excitado por la fuente de tensión $V_s(t)$. La ecuación de equilibrio del circuito es la siguiente.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v_s(t) \quad (40)$$

Si cada término de esta ecuación se multiplica por $i(t)$ obtenemos:

$$Li \frac{di}{dt} + Ri^2 + \frac{1}{C} \int i dt = v_s i \quad (41)$$

De la ecuación (22) se observa que

$$\frac{dE_m}{dt} = Li \frac{di}{dt} \quad (42)$$

la cual es el primer miembro de la ecuación (41). Haciendo uso de las ecuaciones (16), (17) y (19) el tercer término puede escribirse de la forma

$$\frac{1}{C} \int i dt = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = S_q \frac{dq}{dt} \quad (43)$$

En tanto que de la ecuación (23) se obtiene:

$$\frac{dE_e}{dt} = S q \frac{dq}{dt} \quad (44)$$

De este modo se ve que la ecuación de equilibrio (41) es equivalente a la relación.

$$Ri^2 + \frac{d}{dt}(E_m + E_e) = v_s i \quad (45)$$

la cual es una expresión del principio de conservación de la energía. Por consiguiente Ri^2 representa la disipación instantánea de energía en el elemento resistivo del circuito; $\frac{d}{dt}(E_m + E_e)$ es la absorción instantánea de energía en los elementos acumulativos, y $v_s i$ es el suministro instantáneo de energía de la fuente.

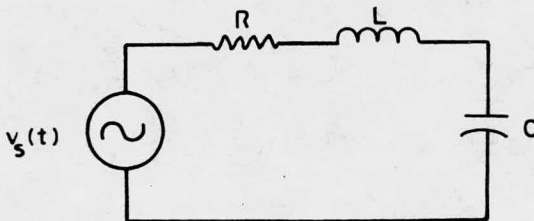


FIGURA II. 2 Circuito R L C en serie

A continuación veremos la forma particular que adquiere la ecuación (45) cuando $V_s(t)$ e $i(t)$ son sinusoides. Las cuales se pueden escribir de la manera siguiente:

$$v_s(t) = V_s \cos \omega t = \frac{1}{2}(V_s e^{j\omega t} + \bar{V}_s e^{-j\omega t}) \quad (46)$$

$$i(t) = I \cos \omega t = \frac{1}{2}(I e^{j\omega t} + \bar{I} e^{-j\omega t}) \quad (47)$$

las barras indican un valor conjugado.

De acuerdo a la ecuación (17) e integrando la ecuación (47), se tiene para la carga $q(t)$ la expresión.

$$q(t) = \frac{1}{2j\omega}(I e^{j\omega t} - \bar{I} e^{-j\omega t}) \quad (48)$$

Para la corriente o la carga elevadas al cuadrado se obtiene de una manera directa que

$$i^2(t) = \left[\frac{1}{2}(I e^{j\omega t} + \bar{I} e^{-j\omega t}) \right]^2$$

$$i^2(t) = \frac{1}{4}(I^2 e^{j2\omega t} + \bar{I}^2 e^{-j2\omega t} + 2I\bar{I}) \quad (49)$$

y

$$q^2(t) = \left[\frac{1}{2j\omega}(I e^{j\omega t} - \bar{I} e^{-j\omega t}) \right]^2$$

$$q^2(t) = -\frac{1}{4\omega^2} \left[I^2 e^{j2\omega t} + \bar{I}^2 e^{j2\omega t} - 2I\bar{I} \right] \quad (50)$$

Cuyas expresiones pueden escribirse también en la forma:

$$i^2(t) = \frac{1}{2} |I|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I^2 e^{j2\omega t}) \quad (51)$$

$$q^2(t) = \frac{1}{2\omega^2} |I|^2 - \frac{1}{2\omega^2} \operatorname{Re}(I^2 e^{j2\omega t}) \quad (51')$$

De acuerdo a las ecuaciones (22) y (23) las funciones de energía eléctrica acumulada se convierten en:

$$E_m = \frac{1}{4} L |I|^2 + \frac{1}{4} L \operatorname{Re}(I^2 e^{j2\omega t}) \quad (52)$$

$$E_e = \frac{1}{4\omega^2} S |I|^2 - \frac{1}{4\omega^2} S \operatorname{Re}(I^2 e^{j2\omega t}) \quad (53)$$

Los primeros términos de estas expresiones son respectivamente, E_m [ecuación (29)] y E_e [equivalente a la ecuación (37) puesto que la corriente $|I|$ de la capacitancia es igual a la tensión $|V|$ entre los extremos de dicha capacitancia multiplicada por ωC]. Al obtener las derivadas de E_m y E_e con respecto al tiempo, estos términos constantes desaparecen resultando.

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(j\omega L I^2 e^{j2\omega t}) \quad (54)$$

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{j\omega C} I^2 e^{j2\omega t} \right) \quad (55)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (45) se obtiene:

$$\frac{1}{2} R |I|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I^2 e^{j2\omega t} \right] = v_s i \quad (56)$$

Para el segundo miembro, las ecuaciones (46) y (47) dan

$$v_s i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{V}_s I) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_s I e^{j2\omega t}) \quad (57)$$

Refiriéndonos al primer miembro de la ecuación (56) se observa que $R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ es la impedancia del circuito, y ésta multiplicada por I es igual al vector tensión V_s . Por lo tanto, la ecuación (56) se puede escribir como:

$$v_s i = \frac{1}{2} R |I|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_s I e^{j2\omega t}) \quad (58)$$

El producto $V_s i$ es la potencia instantánea suministrada al circuito por la fuente de tensión. Las ecuaciones (57) y (58) indican que esta potencia, es función del tiempo y está formada por una componente constante que es:

$$P_{pr} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{V}_s I) = \frac{1}{2} R |I|^2 \quad (59)$$

y una componente alterna de frecuencia doble superpuesta, dada por:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_S I e^{j2\omega t}) \quad (60)$$

Notemos que el valor medio de la potencia suministrada $\overline{v_i e}$ ne expresada por el termino constante de la ecuación (59), el cual, por lo tanto, se designa por P_{pr} .

Si se toma V_S como vector de referencia, V_S y $\overline{V_S}$ son las mismas. Entonces el ángulo de $\overline{V_S} I$ o el de $V_S I$ es simplemente el negativo de la impedancia θ , por lo tanto:

$$\overline{V_S} I = V_S I = |V_S| |I| e^{j\theta} \quad (61)$$

Por lo que

$$P_{pr} = \frac{1}{2} |V_S| |I| \cos \theta \quad (62)$$

En la fig. II.3. Aparece una interpretación vectorial del resultado anterior. En la parte (a) de la figura se indica que el producto de $|V_S| |I| \cos \theta$ se considera como $|V_S|$ multiplicada por la componente de I que esta en fa se con V_S , es decir, por $|I| \cos \theta$; en la parte (b) se con sidera el mismo producto como si se hubiera formado multiplicando $|I|$ por la componente de V_S en fase con I , es de-

cir, por $|V_s| \cos \theta$.

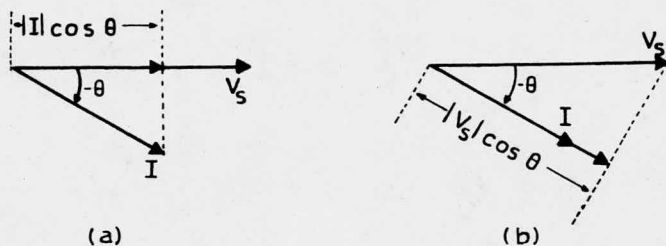


FIGURA II.3 La potencia media absorbida puede expresarse como $(\frac{1}{2})$ del producto de la tensión por la componente en fase de la corriente (a), o como $(\frac{1}{2})$ de la corriente por la componente en fase de la tensión (b).

De acuerdo con la definición del ángulo de impedancia θ es evidente que

$$\cos \theta = \frac{R}{|Z|} \quad (63)$$

Por lo tanto resulta que la ecuación (62) es equivalente a la expresión

$$P_{pr} = \frac{1}{2} \frac{|V_s| |I| R}{|Z|} = \frac{1}{2} R |I|^2 \quad (64)$$

la cual independientemente concuerda con la forma de P_{pr} dada por la ecuación (59).

Regresando a la ecuación (57) se puede escribir ahora este resultado en forma más explícita, es decir.

$$v_s i = \frac{1}{2}|V_s I| \cos \theta + \frac{1}{2}|V_s I| \cos(2\omega t - \theta) \quad (65)$$

en la cual se elige de nuevo V_s como vector de referencia.

En la figura II. 4. se representa esta expresión de la potencia instantánea suministrada por la fuente para un ángulo $\theta = 60^\circ$. Se observa que la potencia instantánea es negativa durante porciones de cada período, tal como resalta en la figura mediante sombreado. El área de cada porción sombreada representa una cantidad de la energía devuelta a la fuente por los elementos del circuito que la acumulan.

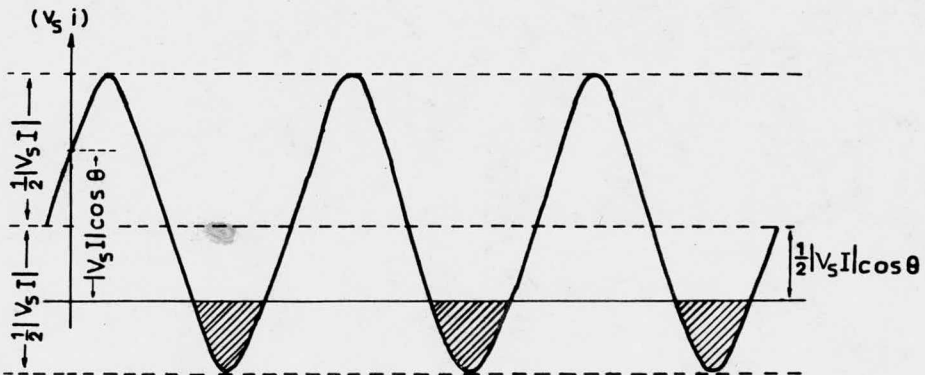


FIGURA II.4 La potencia como función del tiempo es la suma de una constante y un término sinusoidal de frecuencia doble.

Las características más importantes de la potencia suministrada a un circuito en el estado estacionario sinusoidal consiste en que dicha potencia no se halla representada por un flujo uniforme de energía, sino más bien por un flujo de naturaleza pulsatoria; y que, en general, la energía fluye en ambos sentidos; es decir, del circuito a la fuente y de la fuente al circuito. Si este último contiene elementos de disipación (resistencias), entonces, en promedio, la cantidad de energía resultante por suministrada por segundo por la fuente viene dada por las ecuaciones (59) ó (64). El grado de disipación del circuito se caracteriza por el valor de $\cos \theta$, el cual es igual a la unidad para $\theta = 0$, e igual a cero para $\theta = \pm \pi/2$. De acuerdo con la ecuación (63) resulta que $\cos \theta$ se hace igual a la unidad solamente si Z es igual a R , lo cual, sucede cuando hay resonancia (es decir, para $\omega L = 1/\omega C$). Por otra parte, para $R = 0$, $\cos \theta$ se hace igual a cero. En este caso limite la curva de la fig. II.4, oscila simetricamente alrededor del eje cero (potencia media suministrada igual a cero), mientras que para $Z = R$ la curva se encuentra situada totalmente por encima del eje cero, desapareciendo por lo tanto las porciones sombreadas.

Debido a que $\cos \theta$ indica la extensión según la cual el circuito absorbe potencia de la fuente, se denomina factor de potencia del circuito. La expresión correspondiente a P_{pr} dada por la ecuación (62) recibe el nombre de producto de

potencia de la tensión de la fuente por la corriente. Prescindiendo del factor $1/2$, el producto de potencia de un vector tensión por un vector corriente esta formado por el producto de las longitudes de estos vectores por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. En el análisis vectorial este tipo de producto se denomina producto escalar porque da como resultado un valor escalar (que tiene solamente - magnitud). Por lo tanto, puede decirse que la potencia suministrada a un circuito por una fuente viene dada por la mitad del producto escalar de los vectores tensión y corriente de la fuente.

Aunque en principio los resultados obtenidos antes con relación al circuito RLC en serie de la fig. II.2. expresados por las ecuaciones (57) y (59) a (65), se han aplicado exclusivamente a la interpretación de la potencia en la entrada $V_s i$, es evidente que son aplicables al punto motriz de cualquier red pasiva lineal por complicada que sea.

II.3 Potencia Activa y Reactiva: Potencia Vectorial

Comparemos los resultados del inciso anterior con los que se aplican al cálculo de potencia en C.D. En estos la potencia suministrada es simplemente igual al producto de la tensión por la corriente de la fuente. Aparte del factor $1/2$, la característica más notable respecto a la relación de

potencia perteneciente a circuitos de C.A. es la presencia del factor de potencia ($\cos \theta$). Si el circuito no contiene elementos acumulativos sino sólo resistencias, entonces puede afirmarse que el factor de potencia es igual a la unidad, y la única diferencia existente en el cálculo de la potencia según se trata de C.D. o de C.A. estriba en el factor $1/2$ que interviene en el caso de C.A.. Se encuentran estas ecuaciones multiplicadas por $1/2$, ya que utilizamos los valores pico de tensión y corriente, si utilizamos los valores rms o eficaces ($V_{rms} = V/\sqrt{2}$ e $I_{rms} = I/\sqrt{2}$), se suprimen en todas las ecuaciones el factor de $1/2$. En la mayoría de los circuitos se encuentran presentes los elementos acumulativos y señalan su presencia absorbiendo y devolviendo energía durante cada ciclo, pero sin absorber energía en definitiva.

De esto se deduce que la energía que experimenta este vaiven entre la fuente y el circuito ha de designarse de algún modo. Aunque el término potencia no es muy apropiado para designar este vaiven de energía, puesto que potencia significa flujo de energía y en este caso no existe ninguno en promedio, no obstante se utiliza la expresión potencia reactiva.

Para definir más exactamente lo que se entiende por potencia reactiva (de tal modo que sea posible calcularla con la mis

ma exactitud que la potencia media real), parece lo más lógico acudir a una formulación razonable haciendo referencia al diagrama vectorial de la fig. II.3.a. En ella la potencia media viene dada por el semiproducto de V_s por la componente de I que está en fase con V_s . Es natural elegir (a modo de definición arbitraria) el semiproducto de V_s por la componente de I en cuadratura (aquella componente que forma ángulo recto con V_s) como definición de la potencia reactiva suministrada al circuito. De acuerdo con esto, la componente de la corriente de la fuente defasada 90° con respecto a la tensión de la fuente se conoce a veces como componente reactiva de la corriente.

Según la ecuación (59), la potencia suministrada por la fuente esta dada por la parte real de $\frac{1}{2}(\bar{V}_s I)$. Puesto que la potencia reactiva, como se acaba de definir, es igual a la parte imaginaria de $\frac{1}{2}(\bar{V}_s I)$, se considera lógico tomar en cuenta la cantidad compleja $\frac{1}{2}(\bar{V}_s I)$ como potencia vectorial. Su parte real representa la potencia media real suministrada por la fuente (conocida como potencia activa), en tanto que la parte imaginaria (por definición) es igual a la potencia reactiva. La potencia activa o potencia media se designa por el símbolo P_{pr} , y la potencia reactiva por Q_{pr} . Por lo tanto

$$\text{Potencia Vectorial} = P_{pr} + j Q_{pr} = \frac{1}{2}(\bar{V}_s I) \quad (66)$$

ya que $I = V_s/Z = V_s Y$, puede escribirse también

$$P_{pr} + jQ_{pr} = \frac{1}{2}(\bar{V}_s V_s Y) = \frac{1}{2}|V_s|^2 Y \quad (67)$$

Es útil en cualquier caso real calcular la potencia por volt de excitación, porque de esta forma para obtener la potencia correspondiente a cualquier otra tensión aplicada basta multiplicar por el cuadrado de dicha tensión. Entonces la expresión correspondiente a la potencia vectorial se hace particularmente sencilla, es decir

$$\left[P_{pr} + jQ_{pr} \right]_{V_s=1} = \frac{1}{2} Y = \frac{1}{2} [G(\omega) + jB(\omega)] \quad (68)$$

Así, numericamente (no dimensionalmente) la potencia activa P_{pr} (por volt aplicado) es sencillamente igual a la mitad de la parte conductiva de la admitancia, en tanto que la potencia reactiva Q_{pr} es igual a la mitad de la parte susceptiva. Evidentemente, la potencia activa en un circuito pasivo lineal es siempre positiva; en cambio, la potencia reactiva puede tener cualquiera de los dos signos, siendo positiva en un circuito capacitivo, y negativa en uno inductivo. Las unidades de Q_{pr} se denominan vars (contracción de volts-amperes reactivos).

En lugar de la ecuación (67) puede escribirse también

$$P_{pr} + jQ_{pr} = \frac{1}{2} \bar{I} I \bar{Z} = \frac{1}{2} |I|^2 \bar{Z} \quad (69)$$

y se tiene

$$\left[P_{pr} + jQ_{pr} \right]_{I=1} = \frac{1}{2} \bar{Z} = \frac{1}{2} [R(\omega) - jX(\omega)] \quad (70)$$

Esta forma de expresar la potencia vectorial suministrada a una impedancia Z resulta apropiada si la cantidad conocida es la corriente asociada. Por lo tanto, puede decirse que la potencia vectorial absorbida por una impedancia por ampere de pico que pasa por ella es igual a la mitad del conjugado de dicha impedancia.

En función de los valores eficaces, o valores rms, de la tensión y de la corriente, los resultados expresados por las ecuaciones (68) y (70) se simplifican todavía más, ya que desaparece el factor de $1/2$. Es decir, la potencia vectorial absorbida por una admitancia Y por volt rms aplicado a ella es numéricamente igual a Y ; y la potencia vectorial absorbida por una impedancia Z por ampere rms que pasa por ella es numéricamente igual al conjugado de Z .

Para obtener la potencia vectorial total en un circuito complicado constituido por la interconexión de varias ramas, se suman sencillamente los resultados anteriores hechos extensivos a todas las ramas. Así, si V_n e I_n son, respectivamente, los valores complejos de la caída de tensión y la corriente en la rama n que tiene una impedancia Z_n o una admitancia Y_n de tal modo que $V_n = I_n Z_n$ o $I_n = V_n Y_n$, entonces la potencia vectorial viene dada por

$$P_{pr} + jQ_{pr} = \frac{1}{2} \sum_n \bar{V}_n I_n = \frac{1}{2} \sum_n |I_n|^2 \bar{Z}_n = \frac{1}{2} \sum_n |V_n|^2 Y_n \quad (71)$$

II.4 Compensación Reactiva

Utilizando el circuito de la fig. II.2 y la ecuación de equilibrio (40). Para $v_s(t) = V_s e^{j\omega t}$ e $i(t) = I e^{j\omega t}$ tenemos en la forma normal que

$$RI + j\omega(LI - \frac{I}{\omega^2 C}) = V_s \quad (72)$$

o su conjugado

$$R\bar{I} + j\omega(\frac{\bar{I}}{\omega^2 C} - L\bar{I}) = \bar{V}_s \quad (73)$$

multiplicando por I y dividiendo por 2 se obtiene la potencia vectorial.

$$\frac{1}{2}(\bar{V}_s I) = \frac{1}{2}R|I|^2 + j2\omega\left[\frac{|I|^2}{4\omega^2 C} - \frac{1}{4}L|I|^2\right] \quad (74)$$

aquí, de acuerdo con la ecuación (37)

$$\frac{|I|^2}{4\omega^2 C} = \frac{1}{4}C|V|^2 = E_{ea} \quad (75)$$

Debido a que la tensión entre los extremos de la capacitancia $|V| = \frac{|I|}{\omega C}$; y de acuerdo con la ecuación (29)

$$\frac{1}{4}L|I|^2 = E_{ma} \quad (76)$$

por lo tanto, vemos que la ecuación (74) da

$$\frac{1}{2}(\bar{V}_s I) = P_{pr} + jQ_{pr} = \frac{1}{2}R|I|^2 + j2\omega(E_{ea} - E_{ma}) \quad (77)$$

en particular nos interesa el resultado

$$Q_{pr} = 2\omega(E_{ea} - E_{ma}) \quad (78)$$

El cual establece que la potencia reactiva es directamente proporcional a la diferencia entre la energía media acumulada en el campo eléctrico y la acumulada en el campo magnético. Aunque la relación (78) se ha deducido exclusivamente para el circuito simple RLC en serie se cumple en todas las redes pasivas lineales por complicadas que sean.

Si los dos campos asociados con un circuito dado acumulan, en promedio, cantidades iguales de energía, entonces lo que hacen es permutar entre ellos una cierta cantidad de energía y la fuente deja de participar en este cambio tan pronto como se ha alcanzado un régimen estacionario repetitivo (es decir, en el estado estacionario), Solamente cuando $E_{ea} \neq E_{ma}$ sucede que parte de la energía acumulada se halla sometida a un vaiven continuo entre la fuente y el circuito. De este modo se ve que la potencia reactiva Q_{pr} constituye una medida del grado de participación de la fuente en el intercambio de energía acumulada en el campo eléctrico con relación a la acumulada en el campo magnético.

El hecho de que este exceso puede ser numéricamente tanto negativo como positivo, hace físicamente posible que un circuito pasivo suministre la potencia reactiva requerida por otro.

Un proceso tal que libera a la fuente de la tarea de intervenir en la operación de prestar energía se conoce como -compensación reactiva o corrección del factor de potencia. término evidentemente apropiado, puesto que la potencia reactiva es cero. Cuando el factor de potencia es igual a la unidad y viceversa. En consecuencia, se ve que la potencia reactiva es "algo" que un circuito pasivo puede suministrar.

Conviene hacer una breve observación referente a la figura II .4 (la cual representa un diagrama de la potencia instantánea suministrada); la potencia activa es el valor medio o término constante de la expresión de la potencia instantánea suministrada, mientras que la magnitud del vector potencia es la amplitud de su componente alterna de doble frecuencia.

II,5 Resonancia en un Circuito R,L,C.

La resonancia se identifica con situaciones de ingeniería - que involucran elementos almacenadores de energía sujetos a una función excitadora de frecuencia variable. Específicamente, la resonancia es el término que se usa para describir el comportamiento en estado-estable de un circuito o sistema a la frecuencia a la cual la respuesta resultante esta en fase en el tiempo con la función excitadora, no obstante la presencia de elementos almacenadores de energía.

II.5.1 Resonancia Serie

Esta aparece cuando los efectos inductivos y capacitivo en un circuito serie se cancelan uno a otro, de manera que el circuito parece, a una frecuencia particular, como si fuera meramente resistivo.

Un tipo simple de resonancia se ve en el circuito RLC de la figura II.5, su más obvia característica es la de que tiene baja impedancia a la corriente de una frecuencia particular y relativamente alta para todas las frecuencias que son significativamente diferentes, tanto más altas como más bajas.

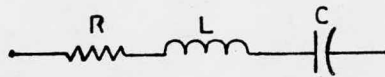


FIGURA II. 5 Circuito serie resonante

La expresión para la impedancia del circuito es

$$Z = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (79)$$

Los términos de reactancia están entre paréntesis. La reactancia inductiva es positiva y la reactancia capacitiva es negativa. Es evidente que hay alguna frecuencia, algún valor de ω , a la que estas reactancias individuales serán iguales y opuestas, haciendo la reactancia total del cir-

cuito igual a cero. Por definición, esta es la frecuencia de resonancia. Si se llama f_0 a la frecuencia de resonancia y a $2\pi f_0$ se le designa por ω_0 , tendremos que en resonancia.

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad (80)$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (81)$$

por lo anterior

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (82)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (83)$$

y la frecuencia de resonancia esta dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (84)$$

En resonancia, la impedancia total es R ; es un valor pequeño y una resistencia pura. Para una frecuencia mayor el término ωL en la ecuación (79) va haciéndose más importante y la impedancia se incrementa rápidamente con la frecuencia. Como se muestra en la fig. II.6, la impedancia se incrementa casi en proporción al incremento de frecuencia arriba de la resonancia (excepto para frecuencias muy cercanas a la de resonancia). La reactancia total del circuito en este rango de frecuencia más alta es positivo, así tiene el carácter de una impedancia inductiva y la corriente atrasa a la tensión.

La figura II.7 muestra un diagrama de la tensión resultante de una corriente dada en el circuito resonante en serie. Las tensiones componentes entre las terminales de los tres elementos, sumados dan la tensión total aplicada V , como se muestra para una frecuencia de resonancia y para una frecuencia abajo de la resonancia.

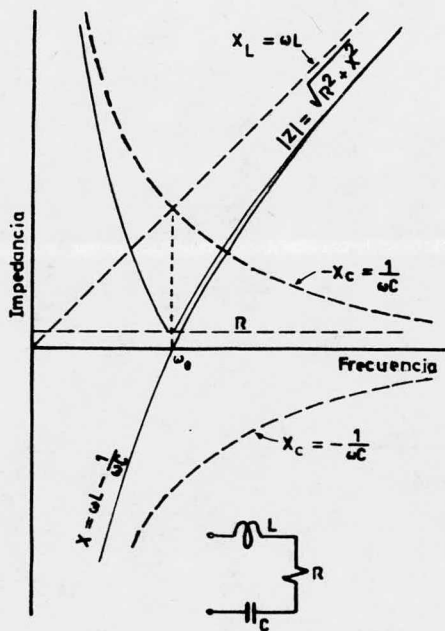


FIGURA II.6 Impedancia de un circuito serie resonante y sus tres componentes.

Se encuentra algunas veces que tanto la tensión entre las terminales de L como también la tensión en las terminales de C, pueden ser mucho mayores que la tensión total entre terminales. Sin embargo dichas altas tensiones sólo no pueden medirse con un voltímetro (el medidor debe tener una alta impedancia de entrada, de modo que no interfiera las condiciones de resonancia) sino que pueden llegar a ser peligrosas fácilmente. El peligro mayor está en el dieléctrico del capacitor C pues aunque la tensión de entrada se mantenga a unos pocos volts, la tensión del capacitor o de la inductancia, es 50 ó 100 veces mayor, siendo incrementado en resonancia por el factor Q_0 .

Siendo Q_0 el factor de calidad definido como:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R_0} \quad (85)$$

donde

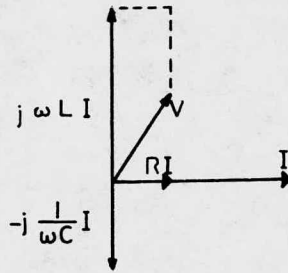
R_0 = Resistencia (efectiva) a la frecuencia de resonancia.

$\omega_0 = 2\pi f_0$, donde f_0 es la frecuencia de resonancia.

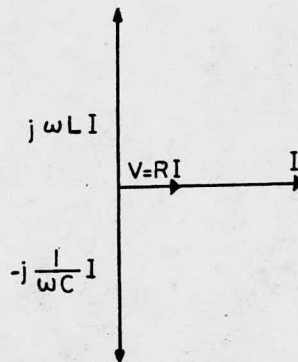
II.5.2. Incremento de la Tensión en Resonancia

Se ha mencionado que la tensión entre las terminales de los elementos individuales de un circuito altamente resonante puede ser varias veces mayor que la tensión aplicada. Como se muestra en la figura II.7

Para $f > f_0$



Para $f = f_0$



Para $f < f_0$

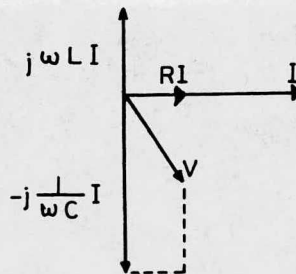


FIGURA II.7 Diagramas en el plano complejo de las tensiones a frecuencias cercanas a la resonancia.

En resonancia la impedancia de entrada de un circuito resonante en serie es R , así si la corriente es I , la tensión terminal es $V = RI$. Pero la tensión entre las terminales de la inductancia sola es $j\omega LI$. En resonancia se convierte en $j\omega_0 LI$. según la ecuación (85) $\omega_0 L = Q_0 R$,

$$V_L = j\omega_0 L I = jQ_0 R I = jQ_0 V \quad (86)$$

donde V_L es la tensión entre las terminales de la inductancia en resonancia y V la tensión aplicada al circuito.

Esto significa que la tensión en la inductancia será, en resonancia, Q veces mayor la tensión terminal aplicada; el ángulo, por supuesto estará 90° adelantada. Por lo tanto, la tensión entre las terminales de la capacitancia en resonancia será

$$V_C = -jQ_0 V \quad (87)$$

Físicamente, la bobina de inductancia contendrá parte o toda la resistencia del circuito, así que no es físicamente posible medir la tensión de la ecuación (86) sin incluir la componente resistiva de la tensión también.

II.5.3 Energía en un Circuito Resonante

La energía almacenada en un circuito resonante es constante; aunque la energía almacenada en el campo magnético de una bobina varía de cero a un máximo y regresa a cero cada medio

ciclo, y la energía en el campo eléctrico de un condensador varía de una manera similar, la energía total almacenada no cambia con el tiempo.

Esta relación de energía es quizá el concepto más fundamental relacionado con la resonancia. La frecuencia de resonancia es la frecuencia a la que la bobina suministra energía tan rápido como el condensador la requiere durante un cuarto de ciclo, y absorbe, energía justamente tan rápido como es descargada por el condensador durante el siguiente cuarto de ciclo. Así el circuito externo no necesita suministrar ninguna energía a la bobina o al condensador; solamente es necesario que el circuito externo suministre las pérdidas que resultan de la presencia de la resistencia en el circuito resonante.

En función de potencia activa y reactiva, no se le pide al circuito externo que suministre alguna potencia reactiva al circuito resonante. La potencia reactiva es la energía transferida hacia y desde la bobina al condensador dentro del circuito resonante. El circuito externo suministra únicamente potencia activa para reemplazar las pérdidas en la resistencia. Por lo tanto, la tensión terminal y la corriente están en fase; su producto es un mínimo en resonancia; su factor de potencia es unitario.

La energía almacenada en un circuito resonante puede ser

varias veces mayor que la energía suministrada por el circuito externo en cualquier ciclo aislado.

La figura II.8 muestra una onda senoidal de corriente en un circuito en serie. La figura muestra también, con una línea punteada la tensión v_c entre las terminales de la capacitancia sola.

$$v_c = \frac{I}{\omega C} \text{sen } \omega t \quad (88)$$

puesto que para la energía magnética en cada instante es

$$\text{Energía en la inductancia} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I^2 (\cos \omega t)^2 \quad (89)$$

y la energía eléctrica es

$$\text{Energía en la capacitancia} = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2}{\omega^2 C} (\text{sen } \omega t)^2 \quad (90)$$

Sumando, la energía total almacenada en el circuito resonante en cada instante es

$$\text{Energía total} = \frac{1}{2} I^2 \left[L (\cos \omega t)^2 + \frac{1}{\omega^2 C} (\text{sen } \omega t)^2 \right] \quad (91)$$

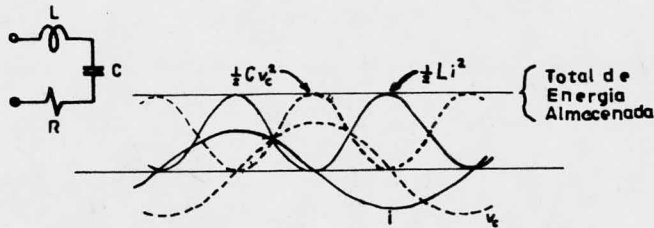


FIGURA II.8 Energía almacenada en un circuito en serie resonante.

Supongamos ahora que hay resonancia e introduzcamos $\omega = \omega_0$ y de la ecuación (81) $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$, por lo tanto.

$$\text{Energía total} = \frac{1}{2} I^2 [L(\cos \omega_0 t)^2 + L(\sen \omega_0 t)^2] \quad (92)$$

$$= \frac{1}{2} I^2 L = \frac{1}{2} \frac{I^2}{\omega_0^2 C} \quad (93)$$

de la ecuación anterior nótese que la energía total es independiente del tiempo.

En el instante de corriente máxima, la energía se almacena toda en la inductancia y en el instante de corriente cero la energía se almacena toda en la capacitancia, de modo que la energía total almacenada es igual a cualquiera de estos valores

lores máximos individuales y, además, ambos son iguales entre sí. Las curvas de ambas energías almacenadas y de sus sumas se muestran en la figura II.8.

La energía almacenada según la ecuación (93) es $\frac{1}{2} I^2 L$. La potencia promedio disipada en el circuito es $\frac{1}{2} I^2 R$. Esta es la potencia promedio; la energía es la potencia promedio por el tiempo; si la frecuencia es f_0 , el tiempo de 1 ciclo es $\frac{1}{f_0}$; por lo tanto, la energía disipada en el circuito durante el ciclo es $\frac{1}{2} I^2 \frac{R}{f_0}$.

La relación de la energía almacenada a la energía disipada por ciclo es:

$$\frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} = \frac{\frac{1}{2} I^2 L}{\frac{1}{2} I^2 \frac{R}{f_0}} = \frac{f_0 L}{R} \quad (94)$$

multiplicando por 2π , esta relación se convierte en:

$$\frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (95)$$

esta relación es igual a Q_0 tal como se utilizó en la ecuación (85) por lo tanto:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 2\pi \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} \quad (96)$$

esta es la demostración de la ecuación (85), nótese que Q_0 se puede expresar como

$$Q_0 = \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por radian de tiempo}} \quad (97)$$

donde el radian de tiempo es el tiempo requerido por la línea giratoria que representa a la corriente alterna en barrer un ángulo de un radian.

CAPITULO III

ANALISIS DE DISTINTOS CASOS DE PRUEBAS DIELECTRICAS

III. 1 Características Principales del Equipo de Prueba.

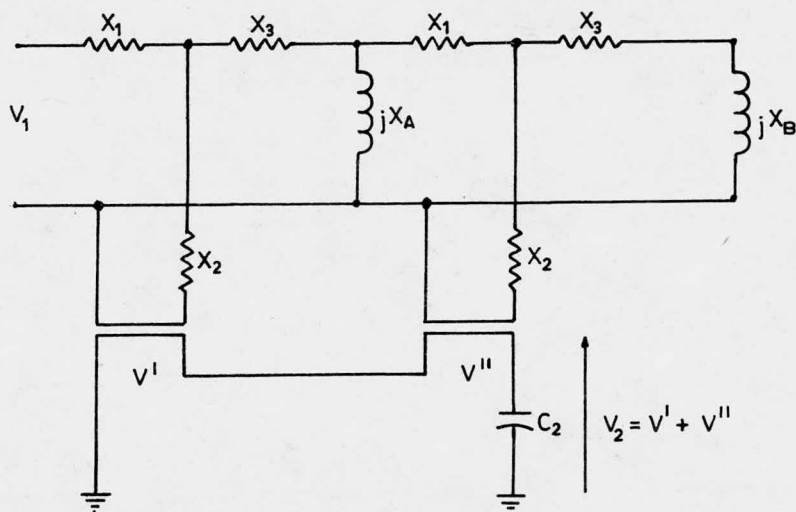
La cascada de 920 kV, esta constituida por dos unidades iguales que tienen las siguientes características:

Tensión de alimentación	=	1,5 kV
Tensión de salida en el secundario	=	460 kV
Tensión de salida en el terciario	=	1,5 kV
Potencia nominal del primario	=	690 kVA
Potencia nominal del secundario	=	460 kVA
Potencia nominal del terciario	=	460 kVA
Reactancia de dispersión primario-secundario	$X_{12} =$	2,26 %
Reactancia de dispersión primario-terciario	$X_{13} =$	11,65 %
Reactancia de dispersión secundario-terciario	$X_{23} =$	7,44 %
Capacitancia parásita del devanado de alta tensión a tierra.	=	1 nF

Se tienen reactores de compensación (Re) que se pueden conectar en serie o paralelo para darnos 60, 120, 240, 300, o 480 kVA , la impedancia medida de los reactores fue de 37,4 Ω .

III. 2 Circuito Equivalente.

El circuito equivalente de la cascada es el siguiente:



donde X_1, X_2 y X_3 se obtienen a partir de X_{12}, X_{13}, X_{23} ; C_2 es la capacitancia de prueba y jX_A, jX_B son las reactancias de los reactores de compensación.

III.2.1. Cálculo de las reactancias

$$X_1 = \frac{1}{2} (X_{12} + X_{13} - X_{23}) = 0,03235 \text{ p.u.}$$

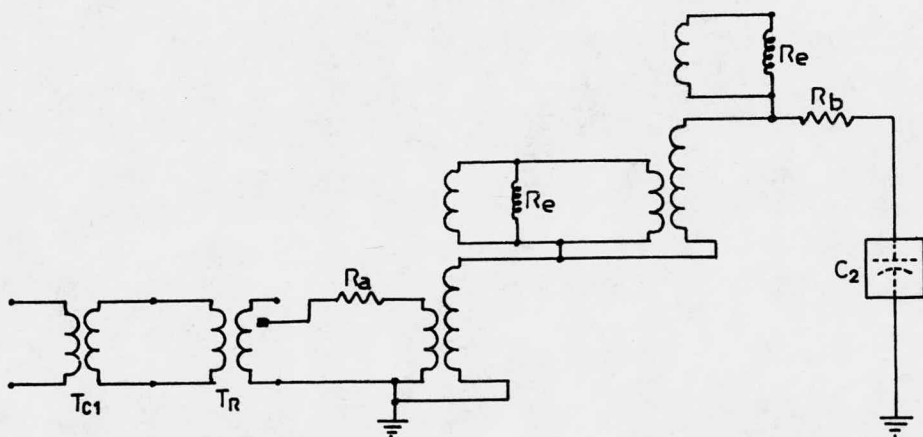
$$X_2 = \frac{1}{2} (X_{12} + X_{23} - X_{13}) = -0,00975 \text{ p.u.}$$

$$X_3 = \frac{1}{2} (X_{13} + X_{23} - X_{12}) = 0,08415 \text{ p.u.}$$

$$X_A = X_B = 37,4 \frac{0,46}{2,25} = 7,6462 \text{ p.u.}$$

III.3.- Circuito de Prueba Completo.

La cascada de transformadores de prueba es la parte principal de un circuito que contiene además: Un regulador de tensión el cual permite variar la tensión de alimentación y por consiguiente la tensión de salida desde cero hasta el valor de prueba requerido, contiene una resistencia de amortiguamiento (R_a), que se coloca en serie en el lado primario de la cascada, una resistencia de protección (R_b), colocada también en serie entre la salida de la cascada y el objeto bajo prueba, y, en nuestro caso, un transformador que reduce la tensión de 13,8 kV de llegada de la subestación a 6 kV que necesita el regulador. Un esquema del circuito se muestra a continuación.



En donde los equipos tienen las siguientes características:

Transformador T_{C1} : 1,0 MVA , 13,8/6 kV $Z \leq 5\%$

Regulador T_R : 800 kVA 6/0-1,586 kV, $Z_R = 9,03\%$

No se conocen las resistencias R_a y R_b mismas que también se van a calcular, junto con el cálculo de los reactores que se deben de conectar, suponiendo diferentes valores de capacitancia de carga C , y tensión de prueba, según el objeto de prueba.

III.3.1. - Análisis de distintos casos.

A continuación se realiza, para un objeto de prueba y una tensión de prueba, el cálculo de la potencia de compensación el valor de R_a y el de R_b . Este ejemplo es representativo de la metodología a seguir, después de lo cual se da una tabla con diferentes valores de capacitancia y tensión de prueba.

a).- Cálculo de la Potencia de Compensación.

Considerando un equipo bajo prueba el cual presenta una capacitancia de 1nf , y suponiendo que la capacitancia parásita total de la cascada sea de $0,75\text{nf}$, que incluye aproximadamente las dos capacitancias parásitas de los transformadores, tenemos que la capacitancia total bajo prueba es de $1,75\text{nf}$.

De acuerdo a este valor de capacitancia total y de tensión de prueba de 900 kV, la potencia de salida de la cascada es de

$$P_2 = \omega C_2 V_2^2 = 377(1,75 \cdot 10^{-9})(900 \cdot 10^3)^2 = 534,39 \text{ KVA}$$

De las pruebas de pérdidas en el hierro, se midió una corriente de magnetización de 34,65 A, de donde el valor de la potencia de magnetización es

$$P_\mu = 34,65(1500) = 51,975 \text{ KVA}$$

ahora bién con estos dos valores de potencia se estima el valor de la potencia de compensación que debe estar aproximadamente cerca de un valor igual a

$$P_0 = P_2 - P_\mu = (534,39 - 51,975) \cdot 10^3$$

$$P_0 = 482,415 \text{ KVA}$$

el valor que más se apróxima sin hacer cero la potencia de entrada, de acuerdo a las diferentes conexiones de los reactores que se tienen es el de

$$P_0 = 300 \text{ KVA}$$

que es el valor más adecuado para compensar a la cascada.

b).- Cálculo del resistor de amortiguamiento R_a .

La protección de los transformadores de prueba por medio de

resistores colocados en el devanado de baja tensión de la primera unidad, se hace necesaria cuando se realizan descargas en configuraciones punta-plano u otras de geometría asimétrica que presentan un marcado efecto de polaridad, y cuando el arco se extingue antes de la apertura del interruptor. La idea de introducir un resistor en el circuito es con el fin de amortiguar las oscilaciones arriba del impulso de maniobra de 100% de probabilidad de soporte por parte de los transformadores de prueba.

Cuando sucede una descarga en el circuito de prueba y el arco se extingue, aparece una tensión de recuperación en el objeto bajo prueba que carga a la capacitancia de salida.

En ausencia de resistores de amortiguamiento, la tensión de recuperación es una onda oscilante de la forma:

$$v(t) = (1 - \cos 2\pi ft)V$$

donde

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

siendo L la inductancia serie del circuito, y C, la capacitancia de salida del circuito.

Teóricamente la máxima amplitud de la tensión de recuperación puede llegar a ser el doble de la tensión aplicada an-

tes de que suceda la descarga.

La amortiguación completa de la oscilación se obtiene si el valor del resistor es (*)

$$R \geq R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ahora bien, se puede admitir una sobretensión de

$$K = \frac{V_{IMA}}{\sqrt{2} V_N} = 1,1$$

donde

V_{IMA} = Tensión de impulso de maniobra de aguante seguro.

V_N = Tensión nominal de salida de la cascada.

Con este valor de sobretensión del 10% se entra a la curva - dada en el apéndice A y la relación de R/R_C es 0,59 por lo tanto $R = 0,59 R_C$.

La impedancia total de la cascada es

$$X_{ct} = \frac{1}{4}(5X_1 + 2X_2 + X_3) = 0,0566 \text{ p.u.}$$

La impedancia del regulador referida a 460 kVA es

$$X_R = 0,0903 \frac{460}{800} = 0,052 \text{ p.u.}$$

La impedancia total del transformador (T_{C1}), referida a 460 kVA y suponiéndola del 5% es

$$X_t = 0,05 \frac{460}{1000} = 0,023 \text{ p.u.}$$

(*) Ver apéndice A

la impedancia total del circuito es

$$X_T = 0,0566 + 0,052 + 0,023 = 0,1316 \text{ p.u.}$$

en ohms referida al primario

$$X_T = 0,1316 \frac{2,25 \cdot 10^5}{460 \cdot 10^3} = 0,6437 \Omega$$

la inductancia equivalente es

$$L = \frac{X_T}{\omega} = \frac{0,6437}{377} = 1,7074 \text{ mH}$$

La capacitancia de salida referida al primario es

$$C_2 = 1,75 \cdot 10^{-9} \left(\frac{920}{1,5} \right)^2 = 658,31 \cdot 10^{-6} \text{ f}$$

El valor de R_c es

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{1,7074 \cdot 10^{-3}}{658,31 \cdot 10^{-6}}} = 3,221 \Omega$$

por lo tanto el valor de R_a es

$$R_a = 0,59 R_c = 1,9 \Omega$$

Ahora bien, la potencia que consume el resistor debe ser de un valor tal que no impida al regulador alimentar a la cascada a plena carga, un valor aceptable de $\leq 50 \text{ kW}$

A continuación se calcula dicha potencia a partir de la relación para la potencia de entrada

$$P_1 = P_2 (1 - \omega C_2 X_{ct}) - (P_o + P_\mu)$$

donde

P_1 = Potencia de entrada a la cascada

P_2 = Potencia de salida = $\omega C_2 V_2^2$

P_o = Potencia de compensación de los reactores

P_μ = Potencia de magnetización

la reactancia en ohms de la cascada es de

$$X_{ct} = 0,0566 \frac{2,25 \cdot 10^6}{460 \cdot 10^3} = 0,2768 \Omega$$

por lo tanto la potencia de entrada es

$$P_1 = 534,397 \cdot 10^3 (1 - 377(658,31 \cdot 10^{-6}) (0,2768)) - (51,975 + 300) \cdot 10^3$$

$$P_1 = 534,397 \cdot 10^3 (0,9313) - 351,975 \cdot 10^3$$

$$P_1 = 497,686 \cdot 10^3 - 351,975 \cdot 10^3$$

$$P_1 = 145,711 \text{ kVA}$$

la corriente de entrada es

$$I_1 = I_r = \frac{P_1}{V_1}$$

siendo

$$V_1 = \frac{V_2}{613,34} (1 - 4 \omega C X_{ct})$$

$$V_1 = \frac{900\,000}{613,34} (1 - 4 \omega C X_{ct})$$

$$V_1 = 1470 (1 - 4 (377) (658,31 \cdot 10^{-6}) (0,2728))$$

$$V_1 = 1066,06 \text{ Volts}$$

por lo tanto

$$I_r = \frac{145,711 \cdot 10^3}{1,06606 \cdot 10^3}$$

$$I_r = 136,68 \text{ A}$$

la potencia de consumo del resistor es

$$Pr = Ir^2 Ra = (136,68)^2 (1.9)$$

$$Pr = 35,495 \text{ k Watts}$$

c).- Cálculo del Resistor de protección Rb.

El resistor de protección en el lado de alta tensión, tiene como finalidad aumentar el tiempo de frente de corte de la tensión cuando ocurre una descarga.

Se considera adecuado que el tiempo de frente de corte tenga una duración de 10 μ s, de donde, con la relación

$$T = 3 RbC$$

donde

T = Tiempo de frente de corte

Rb = Valor del resistor de protección en ohms

C = Capacitancia parásita del equipo de prueba

por lo tanto el valor de Rb es

$$Rb = \frac{T}{3C} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{3 (0,75 \cdot 10^{-9})} = 4\,444,444\Omega$$

$$Rb \approx 4,5 \text{ k}\Omega$$

A continuación se da una tabla con diferentes valores de capacitancia de prueba y tensión de prueba, los cuales nos ayudan a calcular el valor de P_o , R_a , P_i y P_r , estos valores también están incluidos en dicha tabla. El valor de la capacitancia de prueba incluye la capacitancia parásita.

$V_2 = 900, 840$ y 460 kV. $P_o = 60, 120, 240, 300$ y 480 kVA.
 $P_\mu = 51, 975$ kVA.

C (nf)	R_c (Ω)	R_a (Ω)	V_2 (kV)	P_2 (kVA)	P_o (kVA)	P_i (kVA)	V_1 (kV)	I_r (A)	P_r (kW)
0,75	4,92	2,90	900	229,027	120	50,309	1,2968	38,792	4,368
1,0	4,261	2,514	900	305,37	120	121,407	1,2391	97,974	24,131
1,5	3,479	2,052	900	458,055	240	139,108	1,1237	123,787	31,452
1,75	3,221	1,9	900	534,397	300	145,711	1,0660	136,681	35,495
2,0	3,012	1,777	900	610,74	480	30,815	1,0083	30,559	1,660
2,25	2,840	1,675	900	687,082	480	94,421	0,9506	99,322	16,532
2,5	2,694	1,589	900	763,425	480	156,528	0,8929	175,294	48,854
3,0	2,460	1,451	900	916,11	480	276,247	0,7775	355,287	183,210
3,5	2,277	1,343	900	1068,795	480	389,973	0,6621	588,975	466,119
4,0	2,130	1,256	900	1221,48	480	497,705	0,5467	910,364	1041,725
0,75	4,92	2,90	840	199,508	120	21,659	1,2086	17,920	0,932
1,0	4,261	2,514	840	266,011	120	83,593	1,1548	72,383	13,171
1,75	3,221	1,9	840	465,519	300	81,564	0,9935	82,095	12,805
2,0	3,012	1,777	840	532,022	300	138,277	0,9397	147,141	38,486
2,5	2,694	1,589	840	665,028	480	67,787	0,8321	81,456	10,549
3,0	2,460	1,451	840	798,033	480	172,076	0,7246	237,465	81,844
3,75	2,200	1,298	840	997,542	480	318,720	0,5632	565,810	415,601
1,0	4,261	2,514	460	79,773	0	24,666	0,6322	39,015	3,826
2,0	3,012	1,777	460	159,546	60	35,045	0,5144	68,119	8,248
3,0	2,460	1,451	460	239,319	120	39,160	0,3967	98,716	14,143
4,0	2,130	1,256	460	319,092	120	97,013	0,2789	347,799	152,048

d).- Cálculo de la distribución de tensión, el efecto Ferranti, la corriente de cortocircuito y la frecuencia de resonancia.

Estos cálculos se realizan como una cuestión adicional, con una $C = 1,75 \cdot 10^9$ f y $V_{prueba} = 900$ kV.

• Determinación de la distribución de tensión en la cascada.

$$\frac{V'}{V_2} = \frac{1 - \omega C(X_1 + X_3)}{2}$$

$$\frac{V''}{V_2} = \frac{1 + \omega C(X_1 + X_3)}{2}$$

$$X_1 + X_3 = 0,3235 + 0,08415 = 0,1165$$

$$C = 1,75 \cdot 10^9 \left(\frac{920}{1,5} \right)^2 = 6,5831 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{V'}{V_2} = \frac{1 - 377(6,5831 \cdot 10^{-4})(0,1165)}{2} = 0,4855$$

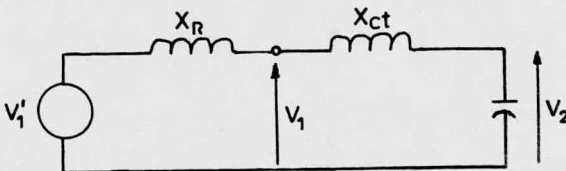
$$V' = 900 \cdot 10^3 (0,4855) = 436,999 \text{ kV}$$

$$\frac{V''}{V_2} = \frac{1 + 377(6,5831 \cdot 10^{-4})(0,1165)}{2} = 0,5144$$

$$V'' = 900 \cdot 10^3 (0,5144) = 463,011 \text{ kV}$$

• Determinación del efecto Ferranti

El circuito equivalente es el siguiente :



$$V_1 = 1470(1 - 4\omega C X_{ct})$$

$$= 1470(1 - 4(377)(6,5831 \cdot 10^{-4})(0,2768))$$

$$V_1 = 1066,06 \text{ volts}$$

Sabemos que la relación de toda la cascada es de 613,34 la tensión a ser aplicada para obtener 900 kV es

$$V_1' = \frac{900 \cdot 10^3}{613,34} = 1470 \text{ volts}$$

Por lo tanto el efecto ferranti o elevación de la tensión capacitiva es.

$$\frac{1470}{1066,06} = 1,3789 \quad \text{es decir del } 37,89\%$$

•Determinación de la corriente de corto circuito.

$$I_{cc} = \frac{V_1'}{X_{ct} + X_R}$$

$$X_R = 0,0903 \frac{460}{800} \frac{2,25}{0,46} = 0,2539 \Omega$$

$$V_1' = 1470(1 - 4(377)(6,5831 \cdot 10^{-4})(0,2768 + 0,2539))$$

$$V_1' = 1470(0,47308)$$

$$V_1' = 695,4398$$

$$I_{cc} = \frac{695,4398}{0,5307}$$

$$I_{cc_{BT}} = 1310,4198 \text{ A}$$

la corriente a la salida de la cascada es

$$I_{cc_{AT}} = \frac{1310,4198}{613,34} = 2,1365 \text{ A}$$

•Determinación de la frecuencia de resonancia.

$$\omega^2 = \frac{1}{4(l_{ct} + l_R) C}$$

$$l_{ct} = \frac{0,0566}{377} = 1,5013 \cdot 10^{-4}$$

$$l_R = \frac{0,052}{377} = 1,3793 \cdot 10^{-4}$$

$$C = 6,5831 \cdot 10^{-4}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4(1,5013 + 1,3793) \cdot 10^{-4} (6,5831 \cdot 10^{-4})}$$

$$\omega^2 = 1318321,7$$

$$\omega = 1148,1819$$

$$f = \frac{1148,1819}{2\pi}$$

$$f = 183 \text{ Hz}$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como se dijo al principio, es de vital importancia el conocimiento claro a priori del comportamiento de la cascada de transformadores durante las pruebas. Lo que significa:

- a).- Tener conocimiento de la cantidad de potencia inductiva que se debe conectar según la capacitancia total del circuito dieléctrico que se vaya a probar, - incluyendo la capacitancia parásita propia de la cascada, tomando en cuenta que dicha cantidad de potencia inductiva está limitada a los valores obtenibles según la manera en que se pueden conectar los reactores.
- b).- Tener conocimiento del valor de los resistores que - se deben conectar para proteger al equipo de un posible colapso del circuito bajo prueba, que redundan en sobretensiones transitorias de magnitud y forma - que dependen del tipo de problema suscitado en dicho circuito dieléctrico.
- c).- Tener conocimiento de la distribución de la tensión de salida, es decir, de la manera en que se reparte la tensión en cada unidad de la cascada, para evitar

concentraciones peligrosas de tensión, en estado estable.

Se recomienda sobremanera tener conocimiento exacto de la -- tensión en estado transitorio, lo que significa que se debe medir esta distribución de la tensión.

El procedimiento consiste en excitar la cascada con aproxi-- madamente el 20% de la tensión de alimentación y provocar la descarga sobre configuraciones electródicas, punta plano, -- por ejemplo, con distancias pequeñas en aire. Se miden las tensiones de salida de cada unidad para varias descargas, -- quedando estos valores como características propias de la -- cascada, los cuales se suponen fijos para casi cualquier objeto de prueba; no así la distribución de la tensión en es-- tado estable, que debe ser calculada siempre antes de empe-- zar una prueba.

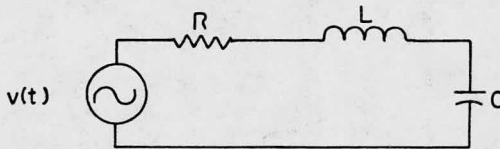
B I B L I O G R A F I A

- V. Del Toro, "Principles of Electrical Engineering", Prentice - Hall, Inc., New Jersey, 1965.
- E. A. Guillemin, "Introductory Circuit Theory", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.
- D. Kind, "An Introduction to High-Voltage Experimental Technique", Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig, Germany, 1979.
- E. Kuffel and M. Abdullah, "High-Voltage Engineering", Oxford, G.B., Pergamon Press, 1970.
- H. H. Skilling, "Electrical Engineering Circuits", John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- L. Thione and M. Tellarini, "Specialization on Laboratory Techniques for High-Voltage Testing", Centro Elettrotecnico Sperimentale Italiano (CESI), 1979.

APENDICE A

RESPUESTA AL IMPULSO DE UN CIRCUITO RLC

La siguiente figura representa un circuito RLC



la ecuación que representa a este circuito es la siguiente:

$$v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (1)$$

aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (1)

$$\frac{V}{s} = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

$$\frac{V}{s} = I(s) \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right)$$

$$I(s) = \frac{\frac{V}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{V}{s \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right)}$$

$$I(s) = \frac{V}{s^2L + sR + \frac{1}{C}} = \frac{V}{L \left(s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right)}$$

la ecuación característica es:

$$s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \quad (2)$$

cuya solución es:

$$s_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (3)$$

si $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ el circuito es sobre amortiguado

si $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ el circuito es críticamente amortiguado

si $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ el circuito es subamortiguado

Ya que el caso subamortiguado es el más interesante y más frecuente, es el que se analizará. El término amortiguamiento es apropiado en esta descripción y además se sabe que la característica de la resistencia es de disipar energía, por lo que su presencia en el circuito sirve para prevenir un ininterrumpido intercambio de energía entre los dos elementos que la almacenan. Cualquier ininterrumpido intercambio constituirá una oscilación mantenida o no amortiguada. Para el caso subamortiguado la expresión para las raíces de la ecuación característica será:

$$s_{12} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (4)$$

este resultado se obtuvo factorizando los signos menos bajo el radical y recordando que $j = \sqrt{-1}$

El valor crítico de amortiguamiento para determinar los valores de L y C correspondientes al valor de R , serán si el

radical es igual a cero, por lo tanto:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

donde R_c denota el valor de la resistencia la cual producirá una respuesta transitoria críticamente amortiguada. Para expresar las raíces de la ecuación característica de manera que resulte aplicable a todos los sistemas lineales de 2ª orden, dos figuras de mérito son introducidas y definidas. La primera es la relación de amortiguamiento, la cual se denota por la letra griega zeta (ζ) y se define como;

$$\zeta = \frac{\text{amortiguamiento real}}{\text{amortiguamiento crítico}} = \frac{R}{R_c} = \frac{R}{2 \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (6)$$

la segunda figura de mérito es la frecuencia natural del circuito y se define como:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7)$$

también el término del radical de la ecuación (4) se puede expresar como:

$$\sqrt{\omega_n^2 - \zeta^2 \omega_n^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (8)$$

NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

por lo que la ecuación (4) será:

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

introduciendo la substitución de

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (10)$$

ω_d = frecuencia amortiguada de oscilación

de la ecuación (9)

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_d \quad (11)$$

por lo tanto la ecuación característica en términos de ζ y ω_n será:

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = (s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2 \quad (12)$$

e

$$I(s) = \frac{V}{L[(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2]} \quad (13)$$

multiplicando la ecuación (13) por $\frac{\omega_d}{\omega_d}$

$$I(s) = \frac{V}{L \omega_d} \left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]$$

aplicando la antitransformada de Laplace, a esta última ecuación, la solución de la ecuación en el dominio del tiempo es:

$$i(t) = \frac{V}{L \omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (14)$$

por lo que $q(t)$ será:

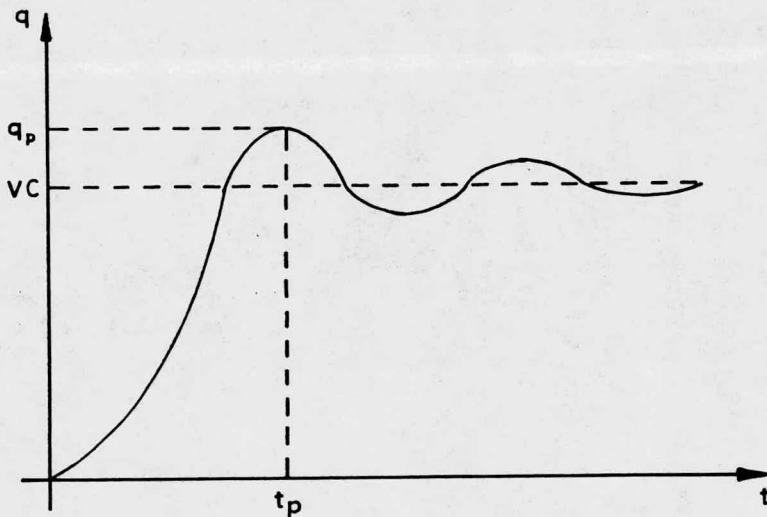
$$q(t) = \frac{V}{\omega_d L} \left[\frac{\omega_d}{\omega_n^2} - \frac{e^{-\gamma \omega_n t}}{\omega_n} \text{sen}(\omega_d t + \vartheta) \right] \quad (15)$$

donde $\vartheta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\gamma \omega_n}$

la ecuación (15) se puede reescribir como

$$q(t) = VC \left[1 - \frac{C}{\sqrt{1-\gamma^2}} e^{-\gamma \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \vartheta) \right] \quad (16)$$

la gráfica de esta ecuación es la siguiente:



Note que VC es el valor de estado estable de la carga que aparece en el capacitor la cual es consistente con la diferencia de potencial V que aparece a través de las terminales del capacitor después de que el transitorio a decaído. La figura anterior muestra que el primer sobreimpulso va más allá del valor de estado estable y representa el máximo sobreimpulso asociado con el transitorio. Una medida cuantitativa de esta cantidad se puede definir derivando $q(t)$ e igualando a cero. Esto nos dara el tiempo en el cual ocurre el pico de sobreimpulso. Especificamente dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (17)$$

donde t_p denota el tiempo para el pico de sobreimpulso. El correspondiente valor de pico de sobreimpulso expresado en porciento del valor de estado estable se expresa como:

$$\text{máximo porciento de sobreimpulso} = 100 \frac{q_p - VC}{VC} = 100 e^{\gamma \pi / \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (18)$$

Esta ecuación revela que el máximo porciento de sobreimpulso es solamente dependiente del valor de la relación de amortiguamiento γ . Es por esta razón que γ es considerado como una figura de mérito la cual conduce información acerca del máximo sobreimpulso de la respuesta transitoria.

A continuación aparece una gráfica del porcentaje (%) de sobrepulso contra la relación de amortiguamiento ζ , la cual sirve para calcular la resistencia de amortiguamiento en el lado de baja tensión a partir del valor de la resistencia crítica (R_c) ya que $\zeta = R/R_c$ por lo tanto $R = \zeta R_c$.

