



*Universidad Nacional
Autónoma de México*

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES ARAGON**

*Análisis de Placas por el Método
del Elemento Finito*

T E S I S

Que para obtener el Título de

INGENIERO CIVIL

p r e s e n t a

LEONARDO SEGURA GUTIERREZ



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ANALISIS DE PLACAS POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

	PAG.
Introducción	1
Capítulo I	4
Análisis del modelo matemático de placas.	
Capítulo II	29
Metodología del método del elemento finito.	
Capítulo III	42
Análisis de placas por el método del elemento finito.	
Capítulo IV	70
Análisis numérico e interpretación de resultados.	
Anexo "A"	87
Listado del programa de elementos finitos.	
Conclusión	88

INTRODUCCION.

El método del elemento finito es una técnica muy poderosa para resolver problemas complejos en ingeniería, tal como el análisis de placas sujetas a cargas transversales bajo varias condiciones de borde. Su uso se ha generalizado gracias al desarrollo en la velocidad del cálculo y capacidad de memoria de las computadoras electrónicas y al refinamiento de los métodos numéricos para resolver ecuaciones simultáneas.

En 1956, Turner ¹ y sus colaboradores presentaron el método de las rigideces, que es la base del método. La primera vez que se empleó el término "Método del Elemento Finito" fue en el trabajo de Clough ².

El método es bastante versátil y se puede aplicar a problemas en estructuras, en geomecánica, en problemas de flujo, etc.

Hay varios métodos para formular las ecuaciones, los más comunes son el método de los desplazamientos y el método del equilibrio. El más popular es el primero y se inicia suponiendo una distribución de los desplazamientos, se asegura la compatibilidad de los mismos entre los elementos y se usan los criterios de energía potencial mínima para establecer las matrices del elemento finito.

- 1).- Turner, Clough, Martín y Topp, "Stiffness and Deflection analysis of complex structures" Revista de Ciencia Aero-náutica, Vol. 23 No. 9, 1956.
- 2).- Clough, "The finite element method in plane stress analysis" memorias de la 3a. conferencia en cálculos electrónicos, Pittsburgh, 1960.

En este trabajo, se aplicará el método a la solución del problema de flexión en placas planas, la placa se divide en partes de forma arbitraria conocida como ELEMENTOS. Estos se conectan en puntos llamados NODOS. La variable desconocida (esfuerzo o deformación), se denomina variable de campo. La distribución de la variable se aproxima usando ciertas funciones polinomiales. Usando métodos residuales o variacionales, se desarrollan las ecuaciones de elemento finito que relacionan las variables de campo con los vectores de acción correspondientes a dichos puntos. Al final se ensamblan las ecuaciones de elemento finito para formar un sistema de ecuaciones algebraicas. Las variables se calculan resolviendo dicho sistema. Debido a que la variable de campo solo se aproximó en su distribución, el método es aproximado, entre más elementos se tengan, el método es más exacto, pero aumenta el tiempo de cálculo.

En el capítulo I de este trabajo se desarrolla el modelo matemático que representa el problema de flexión de placas cargadas perpendicularmente a su plano, también se especifican las hipótesis y consideraciones para simplificar el problema.

En el capítulo II se presentan las bases del método del elemento finito tratado de una manera muy sencilla por el método de los desplazamientos, en el capítulo III se resuelve una placa empotrada con una carga concentrada al centro, con la finalidad de aclarar lo expuesto en el Capítulo II, y además explicar el ensamble de la matriz de rigidez global de la estructura, además de resolver el mismo problema por un método conocido y así poder comparar resultados.

El capítulo IV está dedicado a resolver el problema del capítulo III, así como dos problemas más de mayor grado de complejidad por medio de un programa de computadora que utiliza, el método del elemento finito.

Los programas más conocidos a la fecha, en nuestro medio, -- son:

SAP IV. "Solid Analysis Program" Desarrollada por la Universidad de Berkley. Se aplica a la investigación en estructuras. Con algunas modificaciones, se -- puede usar en aplicaciones específicas.

STRUDL. "Structural Design Languaje" Este programa es del Instituto Tecnológico de Massachusetts, para solución de estructuras.

NASTRAN. Formulado por la NASA para la solución de problemas estructurales en cohetes y aviones.

CAPITULO I

En éste capítulo se desarrollará el modelo matemático del problema de flexión de placas delgadas con deflexiones pequeñas.

Por simplicidad se considerarán placas de espesor uniforme -- las cuales estan constituidas de un material linealmente elástico, homogéneo e isotrópico. Además se supondrá que las fuerzas externas y de cuerpo que actuan sobre la placa son normales a su plano medio. Para obtener los elementos del tensor, de deformaciones se partira de las hipótesis de KIRCHHOFF, de la teoría lineal de placas sobre el campo de desplazamiento, una vez determinado esto se procederá a obtener los elementos correspondientes del tensor de esfuerzos haciendo uso de la ecuación constitutiva.

Entonces, a partir de las ecuaciones de equilibrio, para el caso estático de un medio continuo, se llega al modelo matemático que rige a este problema.

Finalmente se determinaran los elementos mecánicos que actuan sobre dicho tipo de placas.

HIPOTESIS BASICAS.-

Las hipótesis básicas correspondientes a este problema son:

- H.1).- Hipótesis geométricas.
- H.2).- Hipótesis de cargas actuantes sobre la placa.
- H.3).- Hipótesis de la configuración deformada de la placa.

La geometría será la de un sólido tridimensional, FIG. I.I, de la cuál se puede establecer lo siguiente:

- a).- La dimensión asociada al eje z , h , es muy pequeña - comparada con las correspondientes a los ejes x , y , debido a ésto la geometría de la placa se define mediante una superficie denominada "Plano Medio" y su espesor correspondiente. El plano medio se hace coincidir con el plano coordenado X, Y de tal manera que el dominio de la variable Z , queda acotado por.

$$-h/2 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.1}$$

Las cargas deberán actuar en planos perpendiculares al plano medio, tomando en cuenta lo anterior podemos establecer que:

- b).- El plano medio no sufre deformaciones
- c).- Las componentes del tensor de deformaciones asociadas a la dirección Z se anulan, es decir:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{I.1}$$

$$\gamma_{xz} = 1/2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{I.3}$$

$$\gamma_{yz} = 1/2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{I.4}$$

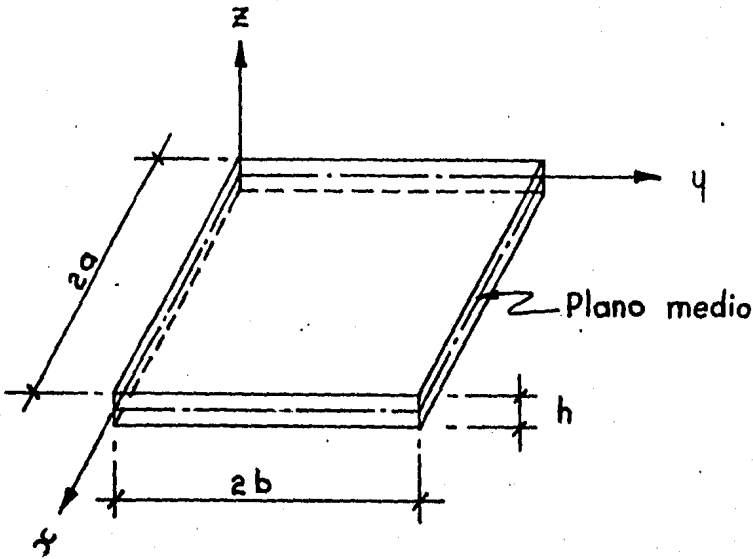


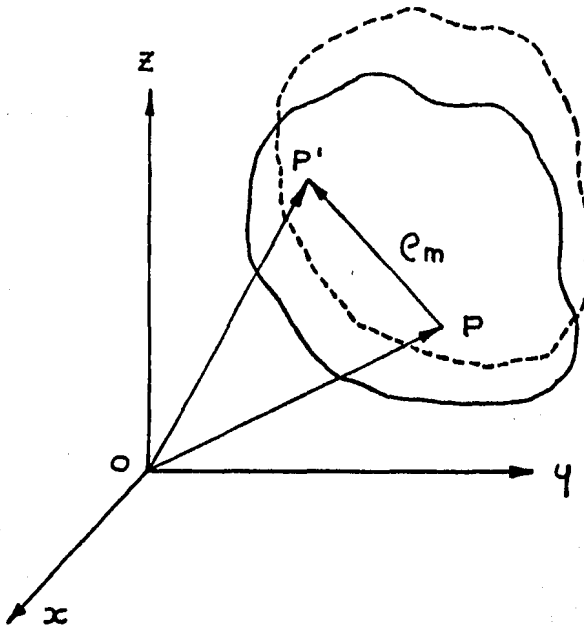
FIG. I.1 GEOMETRIA DE PLACAS PLANAS

DEFINICION DE DEFORMACIONES:

El análisis de la deformación de un sólido es de importancia para el análisis de esfuerzos. Requiere de una definición precisa de la deformación.

Un cuerpo no rígido, al aplicarse un sistema de cargas experimentales cambios en su geometría (FORMA), estos cambios originan las deformaciones.

Sea el cuerpo mostrado en la FIG. I.2, Homogéneo elástico e isotrópico, en donde localizamos un punto $P(x,y,z)$ mediante un vector de posición $\vec{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, al aplicarse el sistema de cargas el punto P pasa a ocupar la posición $P'(x',y',z')$ con un vector de posición $\vec{OP}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$



Donde \vec{e}_m es el vector de desplazamientos del punto P.

FIG. 1.2

Podemos representar el vector \vec{e}_m como sigue:

$$\vec{e}_m = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad \text{I.5}$$

DONDE:

$$U = X' - X$$

$$V = Y' - Y$$

$$W = Z' - Z$$

Pero como nos interesa conocer el desplazamiento relativo entre dos puntos, puesto que un cuerpo puede no haberse deformado, -- aún cuando sus puntos se han desplazado, entonces.

$$\Delta \vec{e}_m = \vec{e}_{m_1} - \vec{e}_m \quad \text{I.6}$$

Donde $\Delta \vec{e}_m$ es el desplazamiento relativo,
 \vec{e}_{m_1} y \vec{e}_m vectores de desplazamiento.

$$\vec{e}_{m_1} = u_1\hat{i} + v_1\hat{j} + w_1\hat{k} \quad \text{I.7}$$

sustituyendo 1.7 y 1.5 en 1.6 tenemos

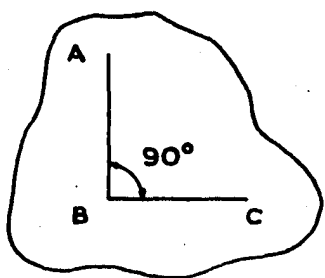
$$\Delta \vec{e}_m = (u_1 - u)\hat{i} + (v_1 - v)\hat{j} + (\omega_1 - \omega)\hat{k}$$

$$\Delta \vec{e}_m = \Delta u \hat{i} + \Delta v \hat{j} + \Delta \omega \hat{k} \quad \text{I.8}$$

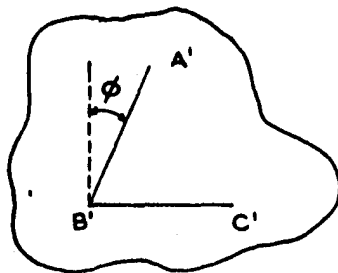
Que representa el desplazamiento relativo. Con la magnitud del vector incremento y el incremento de la longitud del vector -- desplazamiento ΔL , definiremos a la deformación lineal unitaria en un punto y en la dirección del vector desplazamiento -- como:

$$\epsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta e_m}{\Delta L}$$

Consideremos ahora tres puntos A , B , C, antes de la deformación, y los puntos A', B', C', hasta donde se desplazaron después de la deformación, como se muestra en la FIG. 1.3



NO DEFORMADO



DEFORMADO.

FIG. 1.3

Definiremos como deformación angular, γ como al cambio angular que experimenta el ángulo formado por dos rectas o dos planos - que se intersectan, al aplicarsele un sistema de cargas en equilibrio, ocasionando variaciones relativas entre sus partículas.

En realidad la deformación angular es la $Tg \vartheta$, pero si este ángulo es muy pequeño puede considerarse como el ángulo ϑ .

Las deformaciones lineales se consideran positivas si se trata de un alargamiento y negativa en caso contrario, la deformación angular es positiva cuando por ejemplo, el ángulo original es recto y se transforma en obtuso y negativo cuando se transforma en ángulo agudo.

Definidas ya la deformación en un punto en una dirección determinada y la deformación angular entre dos direcciones que pasan por el punto, determinaremos las deformaciones lineales y angulares en función de los desplazamientos, con referencia al sistema de ejes coordenados X,Y,Z, para esto se necesitará de las siguientes hipótesis que se conocen como "Hipótesis básicas de la teoría de la deformación".

HIPOTESIS 1a. DE LA DEFORMACION:

Sólo se consideran deformaciones pequeñas, como las que ocurren en los cuerpos elásticos y estables.

En estas condiciones estableceremos que las potencias superiores a la unidad de las deformaciones unitarias lineales y angulares, o el producto de dos o más de estas serán despreciables, en comparación con la deformación ϵ o γ .

HIPOTESIS 2a. DE LA DEFORMACION:

Se considera que, para el análisis, operamos en un campo de --

de deformación homogénea. Esto significa que los segmentos rectilíneos en el cuerpo antes de la deformación seguirán siendo rectilíneos después de la deformación, así mismo las líneas paralelas antes de la deformación seguirán siendo paralelas -- después de la deformación, aún cuando se altere su orientación general.

Por facilidad, y tomando en cuenta las ecuaciones I.2, I.3, y I.4, tomaremos un campo de deformaciones bidimensional en el plano X,Y .

Supongamos un elemento diferencial de la placa, de lados dx , dy este elemento diferencial va a experimentar deformaciones lineales y angulares, haciendo uso del principio de superposición,

determinaremos primero las deformaciones lineales y después -- las angulares.

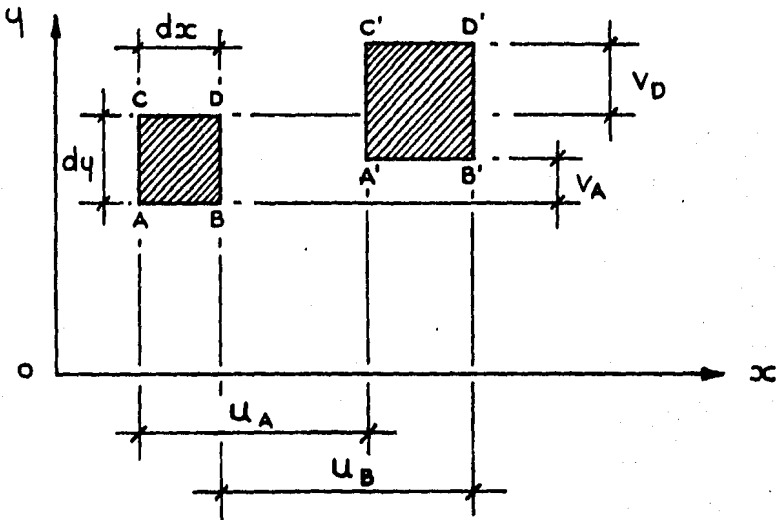


FIG. 1.4

De la FIG. 1.4, vemos que U_i es la componente del vector desplazamiento en dirección X , y , V_j la componente en dirección Y - entonces de acuerdo a la deformación lineal tenemos que.

$$\epsilon_x = \frac{U_B - U_A}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{V_D - V_A}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Analogamente para la dirección Z

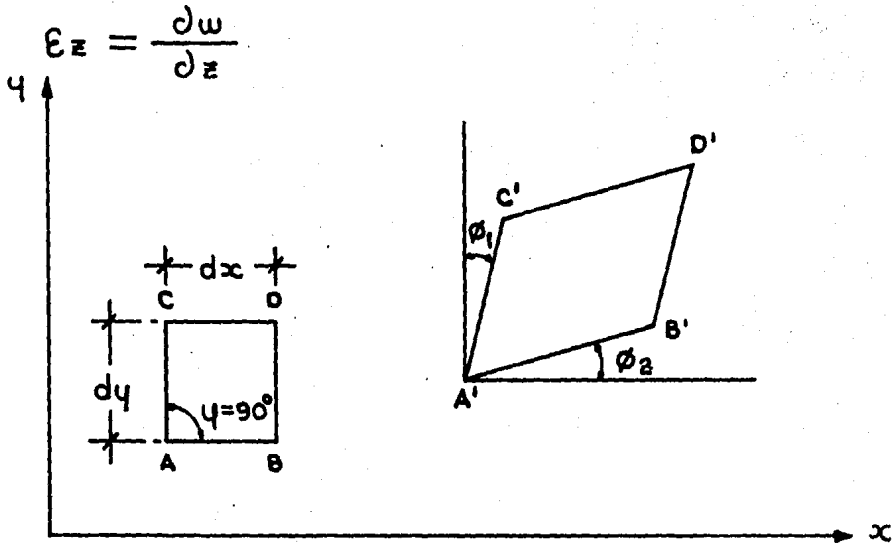


FIG. 1.5

De la FIG. I.5 vemos que el cambio del ángulo original φ , que por conveniencia lo tomamos de 90° , está dado por:

$$\gamma_{xy} = \Theta_1 + \Theta_2$$

Para ángulos muy pequeños el ángulo es numéricamente igual a su tangente, por lo que podemos decir que:

$$\Theta_1 = \text{tg } \Theta_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Theta_2 = \text{tg } \Theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Para el caso general tendremos las siguientes deformaciones angulares, deducidas análogamente.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Las deformaciones lineales unitarias son causadas por esfuerzos normales, y las deformaciones angulares son causadas por esfuerzos tangenciales.

A las deformaciones lineales y angulares las podemos expresar en forma matricial, al cual se le llama tensor de esfuerzos o tensor de Euler:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

En mecánica del medio continuo * se demuestra que las componentes del tensor que están fuera de la diagonal son iguales a la mitad de las deformaciones angulares en ingeniería, justificándose las ecuaciones I.3 y I.4, entonces podemos expresar el tensor de deformaciones como sigue:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

* Ver ref. 1 Pag. 100

COMPONENTES DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO.

Tomando en cuenta las EC. I.2 se concluye que la componente W del vector desplazamiento es independiente de la variable Z, O bien -- que:

$$W = W(X, Y) \quad \text{I.9}$$

Integrando las ecuaciones I.3 y I.4 y tomando en cuenta que el plano medio no sufre deformaciones, nos queda las componentes del vector desplazamiento U, V

$$U = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{I.10}$$

$$V = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{I.11}$$

COMPONENTES DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Las componentes del tensor de deformaciones de EULER diferentes de cero son los siguientes.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{I.12}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{I.13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{I.14}$$

Sustituyendo las ECS. I.10 y I.11 en las ecs. I.12, I.13 y I.14 tenemos.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad \text{I.15}$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad \text{I.16}$$

$$\gamma_{xy} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad \text{I.17}$$

Agrupando estos resultados y tomando en cuenta las ecuaciones -- I.2 a I.4, el tensor de EULER lo podemos expresar como

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} & -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} & 0 \\ -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} & -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I.18}$$

NOTA:

La notación de la primera matriz, ϵ_{ij} , es la notación in dice, y donde sabemos que

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad \text{para } i \neq j$$

es la deformación angular normalmente usada - en Ingeniería.

De la ecuación anterior podemos observar que, debido a las hipótesis de geometría, cargas y de la manera de deformarse la placa, se ha pasado de un problema tridimensional a uno bidimensional.

Las ecuaciones I.15, I.16 y I.17 las podemos expresar como:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \omega \quad \text{I.19}$$

Que en forma condensada se puede escribir como:

$$\epsilon = -z L \omega \quad \text{I.20}$$

Donde L es el operador que relaciona deformaciones con desplazamientos y para este caso:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{I.21}$$

De acuerdo a las ecs. I.15 y I.16 se puede concluir que una línea ab, FIG. 1.6,

originalmente recta en la configuración no deformada, sigue siendo recta en la configuración deformada, los términos que aparecen en la ecuación I.19 son términos que aproximan la curvatura de la superficie media de la placa; a las hipótesis anteriores se les conoce

hipótesis de KIRCHHOFF en la teoría de placas.

Las expresiones de las curvaturas de la superficie media son:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{I.22}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{I.23}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{I.24}$$

Estas expresiones representan la rapidez con que varían o -- cambian las pendientes del plano medio, FIG. I.7

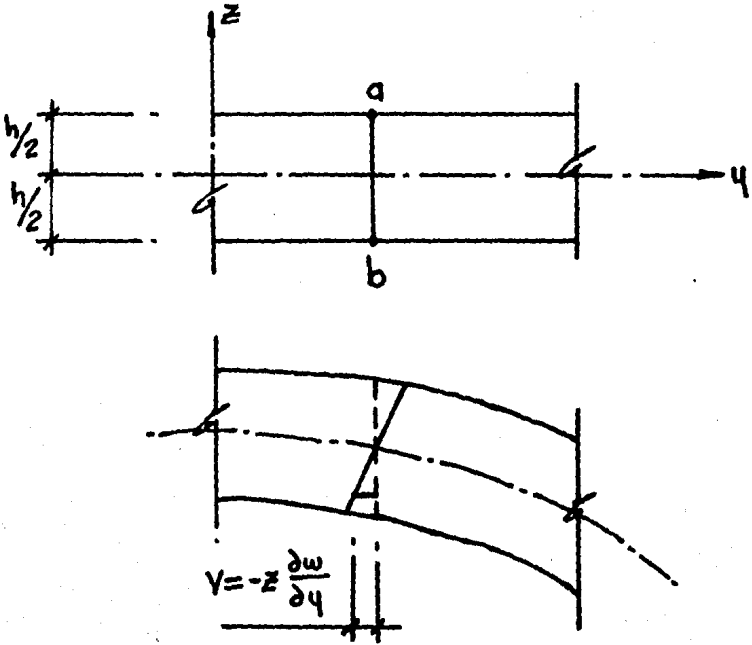


FIG. I.6

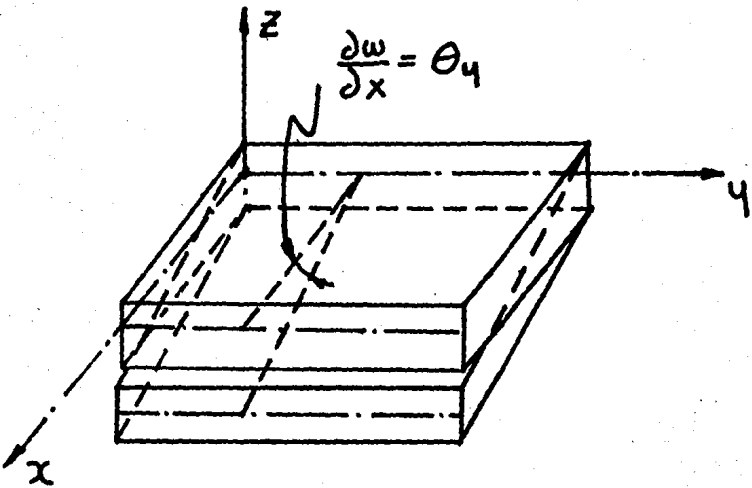


FIG. I.7

DEFINICION DE ESFUERZO.-

La naturaleza de las fuerzas que actúan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto del sistema de cargas externas o de superficie y a las fuerzas de cuerpo, es una de las partes principales de la mecánica de sólidos.

Aplicamos el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

Imaginemos un sólido sujeto a un sistema de fuerzas en equilibrio - (De cuerpo y de superficie), este sistema producirá fuerzas elásticas, esto es si hacemos un corte al cuerpo (FIG. 1.8) y tomamos una parte, esta para estar en equilibrio tendrá una fuerza que represente a la acción de la porción retirada, esta fuerza es la resultante de la fuerza distribuidas en la superficie de corte.

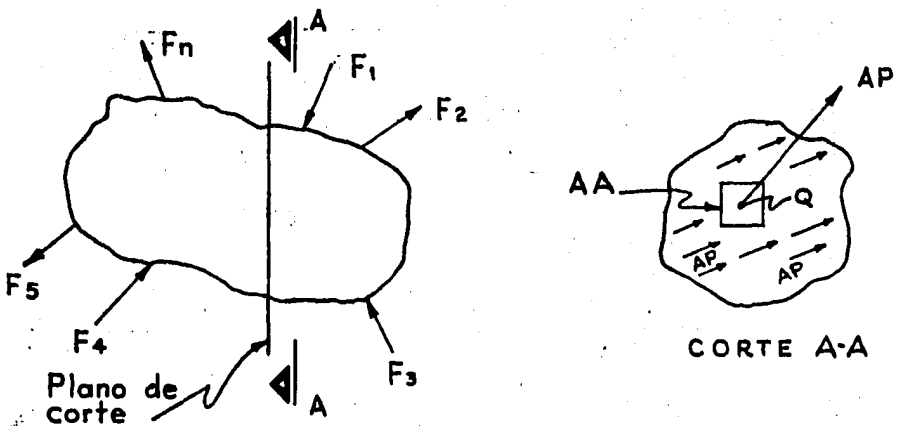


FIG. 1.8

Del corte A-A de la FIG. 1.8, observamos que al hacer el área ΔA cada vez más pequeña las fuerzas distribuidas en el área -- son cada vez más uniformes, hasta que llega un momento en que cuando el área es un punto se puede considerar que las fuer-- zas distribuidas en esa área son uniformes. La respuesta de - esas fuerzas distribuidas uniformemente se denomina esfuerzo y matemáticamente se representa como:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

Podemos decir ahora que el esfuerzo en un punto asociado a un plano es un vector y gráficamente se puede representar como - tal.

Ahora si a este plano le asignamos un sistema de referencia - X, Y, Z , donde uno de los ejes se tomará normal al plano de cor- te, entonces podemos especificar al vector esfuerzo por sus - componentes referidos a este sistema de ejes como se muestra en la FIG. 1.9

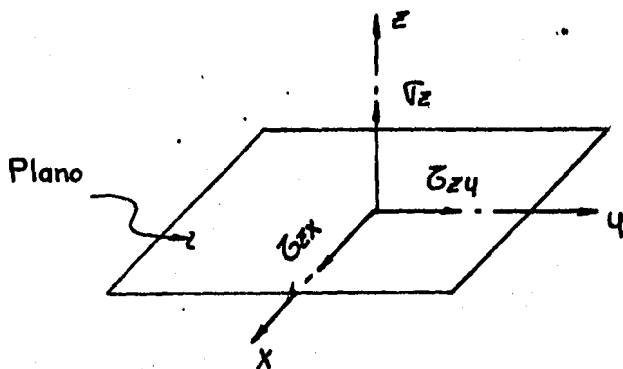


FIG. 1.9

Donde σ_z representa el esfuerzo normal al plano Z y τ_{zx} y τ_{zy} , --
representan el esfuerzo cortante asociado al plano Z en direcci3n
 X, Y respectivamente.

Si hacemos pasar tres pares de planos paralelos y separados por --
distancias infinitesimales, tendremos un cubo elemental separado -
del cuerpo en estudio, como se muestra en la FIG. 1.10, donde se -
muestran los esfuerzos asociados a cada plano.

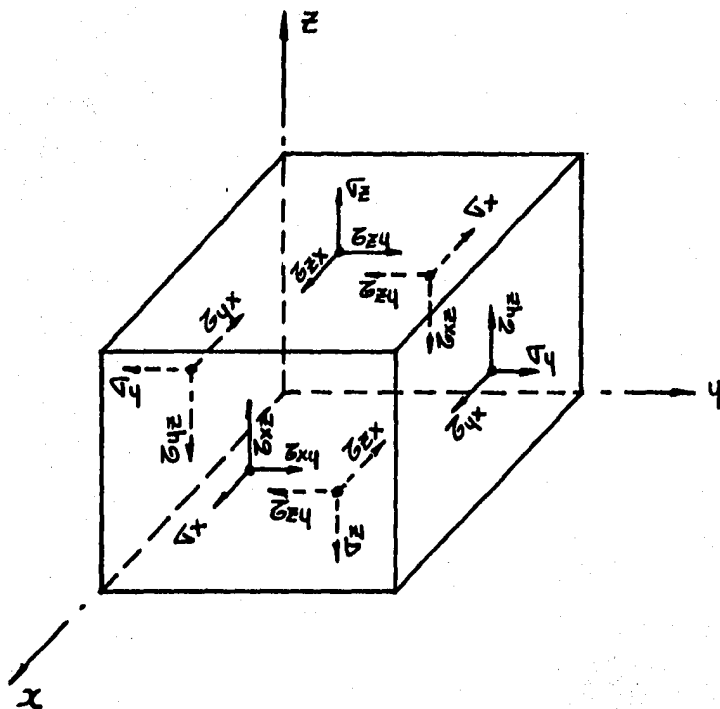


FIG. 1.10

Los esfuerzos normales serán positivos cuando producen tensión y los esfuerzos cortantes serán positivos cuando siguen la dirección del sistema de ejes. (Esto es para las caras visibles de la FIG. 1.10, - y para las caras ocultas es al contrario).

Examinando la FIG. 1.10 se observa que hay tres esfuerzos normales - $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ y seis esfuerzos cortantes $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$, el siguiente arreglo matricial de los esfuerzos se llama "tensor de esfuerzo"

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Los elementos del tensor de esfuerzos son escalares cuando se refieren a un punto en particular y son funciones cuando se refieren al problema elástico de un cuerpo.

Se puede demostrar, por medio del cubo elemental en equilibrio, que

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Tomando momentos con respecto a un sistema de ejes que tengan por origen el c.g. del cubo, por lo anterior podemos decir que el tensor de esfuerzos es una matriz simétrica y un número de incógnitas se reducen a seis.

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO.-

La relación entre esfuerzos y deformaciones para el caso de un material elástico lineal está dada por la ley de HOOKE-CAUCHY, cuya ecuación es:

$$\sigma = D \epsilon \quad \text{I.25}$$

Donde D es la matriz de constantes elásticas y para el caso de -- placas está dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{I.26}$$

Donde:

E = Módulo de YOUNG.

ν = Coeficiente de POISSON.

Sustituyendo la ecuación I.20 en la ec. 1.25 tenemos:

$$\sigma = -Z D L w \quad \text{I.27}$$

o en su forma desarrollada

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E Z}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{I.28}$$

Las componentes del tensor esfuerzo, asociados a las Ecs. 1.2. a 1.4 que son uno normal σ_z y dos cortantes τ_{xz} , τ_{yz} , se obtienen de las ecuaciones de equilibrio estático de un medio - continuo, que son las ecuaciones de CAUCHY, sin considerar fuerzas de cuerpo, tenemos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{I.29}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \text{I.30}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \text{I.31}$$

Estas se pueden obtener por medio del cubo elemental en equilibrio, tomando en cuenta las condiciones de equilibrio, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, así como la variación de los esfuerzos en planos paralelos.

De las ecuaciones I.29 Y I.30 tenemos que:

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad \text{I.32}$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dz \quad \text{I.33}$$

Tomando en cuenta la ecuación I.28 y sustituyendo en las ecuaciones I.32 y I.33 e integrando obtenemos:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{I.34}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad \text{I.35}$$

Sustituyendo las ecuaciones I.34 y I.35 en I.31 e integrando obtenemos:

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right] = - \nabla^2 z \quad \text{I.36}$$

Si sabemos que:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Y sustituimos tenemos:

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 \omega = - \nabla^2 z \quad \text{I.37}$$

Sustituyendo en esta ecuación $\nabla^2 z = -q$, donde q es la carga -- actuante sobre la placa, y decimos que:

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Donde todas las literales son constantes, y se le llama rigidez a la flexión de la placa, obtenemos:

$$\nabla^4 \omega = \frac{q}{D_f} \quad \text{I.38}$$

ELEMENTOS MECANICOS.-

Para encontrar los elementos mecánicos que actúan sobre la placa, se toma un elemento diferencial de esta como el mostrado en la FIG I.11, como el espesor es constante, las expresiones de los momentos flexionantes, torsionante y fuerzas cortantes por unidad de longitud son los siguientes.

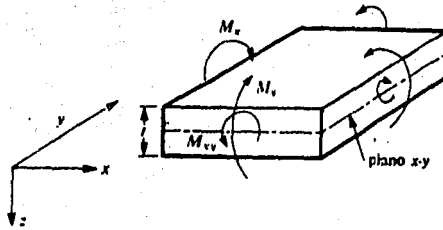
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad \text{I.39}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad \text{I.40}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{I.41}$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xz} dz \quad \text{I.42}$$

$$v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{yz} dz \quad \text{I.43}$$



Tensiones resultantes o "tensiones" en la flexión de placas.

FIG. I.11

Tomando en cuenta la ec. I.28 donde:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{I.44}$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{I.45}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad \text{I.46}$$

Y sustituyendo en las ecs. I.34, I.35 y I.36 respectivamente, tenemos

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$M_y = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$M_{xy} = -\frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

E integrando tenemos;

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

Donde:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D_f$$

Sustituyendo nos queda:

$$M_x = -D_f \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{I.47}$$

$$M_y = -D_f \left(\gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{I. 48}$$

$$M_{xy} = -D_f \frac{(1-\gamma)}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad \text{I. 49}$$

Sustituyendo las ecs. I.34 y I.35 en I.42 y I.43 e integrando de - manera analoga a las anteriores nos queda:

$$v_x = D_f \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{I. 50}$$

$$v_y = D_f \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad \text{I. 51}$$

Las ecs. I.47 a I.49 las podemos expresar como:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -D_f \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ \frac{(1-\gamma)}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{I. 52}$$

Tomando el equilibrio del elemento de la placa de la FIG. I.11 se tiene:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -q \quad \text{I. 53}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -V_x \quad \text{I. 54}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -V_y \quad \text{I. 55}$$

Sustituyendo la ec. I.50 y I.51 en I.53 obtenemos:

$$Df \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + Df \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -q$$

$$Df \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = -q$$

$$Df \nabla^2 \omega = -q$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{-q}{Df}$$

I.56

Esta ecuación representa el equilibrio de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes y torsionante de una placa, y cualquier expresión de ω que la satisfaga será solución de la ecuación diferencial de -- equilibrio.

Esta ecuación (EC. I.56) y las condiciones de frontera constituyen -- el modelo matemático del problema de flexión de placas delgadas y -- planas de material elástico lineal.

CAPITULO I I

El objetivo de este capítulo es presentar de una forma accesible el método de los elementos finitos.

Es común para la ingeniería así como otras ramas de las ciencias, usar razonamientos basados en principios como es el de "Particular a general" ó " Individual a general", como un intento para - obtener información (solución) de un todo estudiando sus partes.

El análisis común de estructuras reticulares usa este principio dividiendo, por ejemplo, un marco de la estructura de un edificio, en vigas y columnas, todos interconectados en puntos llamados nodos, que ensambladas las partes debe ser lo mas aproximado posible a la realidad.

El método del elemento finito esta basado en este mismo principio y la diferencia, aunque trivial, con el análisis común de estructuras reticulares es que los elementos en que se divide una estructura o pueden ser bi y tridimensionales, lo cual permite - aplicar el método de los elementos finitos a un gran número de - estructura como por ejemplo: Presas, estructuras para aviones, - reactores, etc, etc.

El procedimiento de análisis de este método puede resumirse en - los siguientes puntos.

II.1 El medio continuo (Por ejemplo la placa), se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número N de elementos finitos, FIG. II.1

II.2 Se supone que los elementos están conectados entre si por

puntos o nodos situados en sus contornos, Los desplazamientos de estos puntos serán las incógnitas, tal como ocurre en el análisis usual en las estructuras (Por ejemplo, el método de las rigideces o desplazamientos).

- II.3 Se propone una función de desplazamientos, también llamada de interpolación, expresada en términos de los valores de los desplazamientos nodales, esto es, que con estas funciones podemos conocer, interpolando los desplazamientos nodales, los desplazamientos y por ende los elementos mecánicos en cualquier punto dentro de nuestro elemento finito y de sus contornos.
- II.4 Estas deformaciones junto con las deformaciones iniciales (Si existen), y las propiedades constitutivas del material definirán el estado de tensiones de todo el elemento y de sus contornos.
- II.5 Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, determinándose una relación entre fuerzas y desplazamientos, o sea.

$$P = K u_i + f_p + f_e$$

Donde P = Fuerza concentrada en los nodos.

K = Matriz de rigidez del elemento.

u_i = Desplazamientos nodales

f_p = Fuerzas necesarias para equilibrar a cualquier fuerza distribuida.

f_e = Fuerzas necesarias para equilibrar cualquier deformación inicial, por ejemplo a causa de la temperatura, las cuales no tomaremos en cuenta en este trabajo.

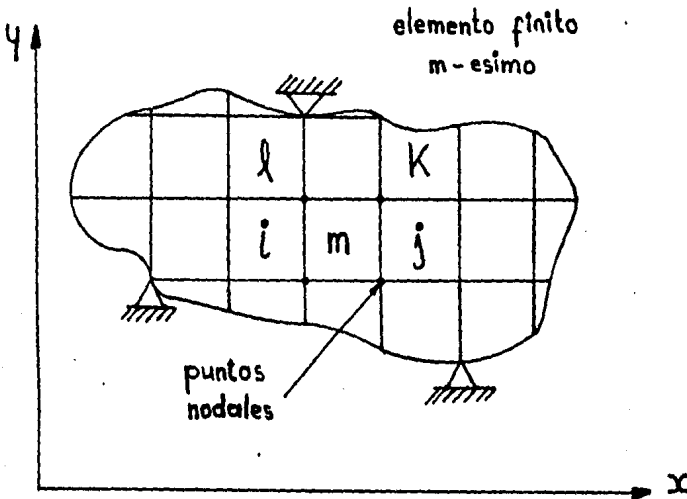


FIG. II.1

REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UN
MEDIO CONTINUO DISCRETIZADO EN -
ELEMENTOS FINITOS.

Trataremos de explicar el método estudiando cada uno de los incisos del procedimiento general del método que sean necesarios.

II.1.1 El medio continuo se puede dividir de muchas formas, siempre y cuando se aproximen a la forma del cuerpo real, existen algunas recomendaciones para dividir el medio continuo que son las siguientes:

- a).- Los elementos deben ser de la forma mas regular posible.
- b).- Se debe de subdividir en mayor número de elementos -- las zonas de concentraciones de esfuerzos, para tener una mayor exactitud.

- c).- Cuando no es conocida la solución exacta de un problema, es conveniente resolver el mismo con un mayor número de elementos y checar la convergencia -- cuando el número de elementos es incrementado.

En la FIG. II.2 se muestran algunos tipos de elementos finitos -- usados comunmente en la practica.



Figura 1.- Elemento unidimensional o barra



Figura 2.- Elementos para estados planos de esfuerzos

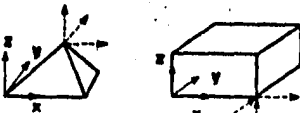


Figura 3. Elementos sólidos



Figura 4. Elementos para sólidos axisimétricos.

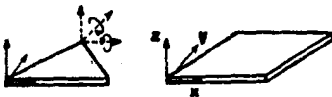


Figura 5. Elementos placa



Figura 6. Elementos axisimétricos

FIG. II.2
TIPOS DE ELEMENTOS.

- II.3.1 Las funciones o modelos de desplazamientos deben de representar aproximadamente la solución dentro de cada subdivisión por medio de una función simple, específicamente estamos hablando del método de los desplazamientos de una estructura o cuerpo dividido en elementos finitos.

La forma mas común de representar este modelo de desplazamientos es por medio de un polinomio, teniendo con esto -- una mayor facilidad para manipulaciones matemáticas (Derivación e integración), además de que un polinomio de orden arbitrario nos permite una razonable aproximación, de aqui podemos decir, aunque no es posible, que un polinomio de orden infinito nos daría la solución exacta.

Para el caso unidimensional el polinomio sería de la forma:

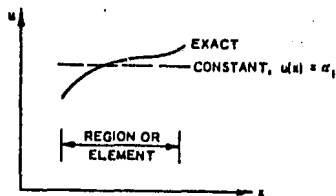
$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^n \quad \text{II.1}$$

Mientras mayor sea el número de términos incluidos en el polinomio mayor será la convergencia a la solución exacta, como se puede observar en la FIG. II.3

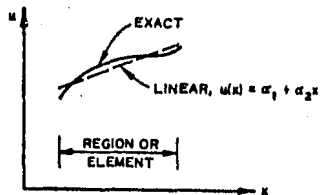
Los términos α_s de la ec. II.1 son llamados coordenadas generalizadas.

La ec. II.1 puede presentarse matricialmente para un caso general como:

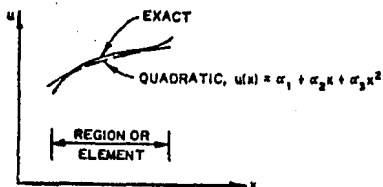
$$u = \phi \alpha \quad \text{II.2}$$



(a) Constant (one-term) polynomial



(b) Linear (two-term) polynomial



(c) Quadratic (three-term) polynomial

Polynomial approximation in one dimension.

FIG. II.3

Por ejemplo, el polinomio en su forma general para un modelo de desplazamiento bidimensional sería:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \dots + \alpha_m y^n \\
 v(x, y) &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4} x^2 + \alpha_{m+5} xy + \alpha_{m+6} y^2 + \dots + \alpha_{2m} y^n
 \end{aligned}
 \quad \text{II.3}$$

Donde:

$$m = \sum_{i=1}^{n+1}$$

y en forma matricial

$$u(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [\phi] \{\alpha\} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \{\alpha\}
 \quad \text{II.4}$$

Donde u, v son las componentes de los desplazamientos en x, y respectivamente.

Dijimos ya que el modelo de desplazamientos debe converger a la solución exacta, siendo esta condición necesaria para cualquier método numérico, y para esto existen tres criterios que deben de cumplirse.

CRITERIO I.- El método de desplazamientos debe ser continuo dentro del elemento y ser compatible -- con los elementos adyacentes.

La inherente continuidad del polinomio cumple la primera parte de este criterio y la segunda sólo se cumple en los nodos de los elementos.

CRITERIO II.- El modelo de desplazamientos debe incluir desplazamientos de cuerpo rígido del elemento.

El término α , en la ec. II.1 cumple esta condición.

CRITERIO III.- El modelo de desplazamientos debe elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de la separación -- entre elementos adyacentes sea finita.

Esto implica la continuidad de desplazamientos entre elementos, -- por ejemplo, las deformaciones en el problema de flexión de placas están definidas por las segundas derivadas parciales de la flecha, debiendo existir también las primeras derivadas (Ec. I.19).

Los elementos cuyos polinomios cumplen con el primer criterio -- son llamados compatibles, los que cumplen con el segundo y tercer criterios son llamados completos.

Aunque los tres criterios son suficientes para asegurar que haya convergencia, se ha visto en casos prácticos que los resultados -- que se obtienen con elementos que sólo cumplen con el tercer criterio son satisfactorios.

Finalmente de forma práctica, seleccionaremos el polinomio de manera que el número total de coordenadas generalizadas (α) sea igual o mayor que el número de grados de libertad nodal del elemento, siendo común el que sean iguales.

Donde los grados de libertad de el elemento finito son el número de giros y desplazamientos que van a sufrir los puntos nodales, -- especificando completamente con estos la posición deformada de el elemento.

Si relacionamos ahora los grados de libertad y las coordenadas -- generalizadas empleando el modelo de desplazamientos, podemos evaluar los desplazamientos nodales sustituyendo las coordenadas en el modelo, entonces podemos escribir la ecuación II.2 como:

$$U_i = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \end{bmatrix} \{ \alpha \} = [A] \{ \alpha \} \quad \text{II.5}$$

Donde

- U_i es el vector de desplazamientos nodales
- n es el número de nodos del elemento
- A es el arreglo matricial de las coordenadas de los nodos 1,2, ..., n

Para calcular las coordenadas generalizadas α_s tenemos que invertir la matriz A, de la ec. II.5

$$\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ U_i \} \quad \text{II.6}$$

Sustituyendo la ecs. II.6 en II.2 tenemos que:

$$\{ u \} = [\phi] [A]^{-1} \{ U_i \} \quad \text{II.7}$$

Si hacemos ϕ

$$[N] = [\phi] [A]^{-1}$$

Y sustituyendo en la ec. II.7 tenemos:

$$\{ u \} = [N] \{ U_i \} \quad \text{II.8}$$

Donde $\{ u \}$ es el desplazamiento en cualquier punto dentro de el elemento finito o en sus contornos en función de los desplazamientos nodales y $[N]$ son las llamadas funciones de forma δ -interpolación.

II.4.1 Una vez que se conocen los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento finito (Ecs. II.8) podemos -- determinar las deformaciones, por medio de la sig. expresión.

$$\xi = L u \quad \text{II.9}$$

Donde L es un operador lineal apropiado, -- que relaciona desplazamientos con deformaciones. sustituyendo la ecs. II.8 en -- II.9, tenemos:

$$\xi = L N u:$$

Y si decimos que:

$$B = L N$$

Y sustituyendo en la expresión anterior, tenemos:

$$\xi = B u_i \quad \text{II.10}$$

En donde B es la función de forma de deformaciones.

Ahora para calcular los elementos mecánicos ó tensiones, recurrimos a la ley de HOOKE-CAUCHY, ec. I.25

$$\sigma = D \xi$$

Donde D es la matriz de constantes elásticas, que esta en función - de las propiedades del material, entonces sustituyendo la ec. II.10 en la expresión anterior, tenemos:

$$\sigma = D B u_i \quad \text{II.11}$$

Al producto DB se le conoce como matriz de tensiones del elemento y lo podemos expresar como:

$$S = D B \quad \text{II.12}$$

II.5.1 Este inciso comprende la deducción para la obtención de la matriz de rigidez, y de la ecuación de equilibrio de un elemento finito.

Esta deducción esta basada en la primera ley de la termodinámica que expresa que:

"El incremento de trabajo que se realiza sobre un sistema - mecánico por fuerzas externas mas el calor que fluye dentro del sistema es igual al incremento de energía cinética mas el incremento de energía potencial"

ó algebraicamente:

$$E = Q - W \quad \text{II.13}$$

Donde E es el cambio de energía

Q Es el calor suministrado al sistema.

W es el trabajo realizado por el sistema.

El cambio de energía puede descomponerse, en los siguientes términos:

$$E = E_c + E_p + U \quad \text{II.14}$$

Donde:

E_c es el cambio de energía cinética.

E_p es el cambio de energía potencial gravitacional.

U es el cambio de energía interna.

Como en nuestro problema consideramos un proceso adiabático y además $E_c = E_p = 0$, entonces sustituyendo la ec. II.14 en II.13 tenemos:

$$U = -W \quad \text{II.15}$$

Para nuestros fines y como es más común en Ingeniería llamaremos a U energía de deformación y W energía externa.

Entonces la energía total del sistema será:

$$E_T = -W \quad \text{II.16}$$

Donde

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \sigma dv \quad \text{II.17}$$

Y

$$W = u_i^T P \quad \text{II.18}$$

Sustituyendo la Ec. II.9 y 1.25 en II.17 obtenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (LU)^T DLU dv \quad \text{II.19}$$

Por lo expuesto en el inciso II.4, sabemos que $LU = LN u_i$ y $B = LN$ entonces:

Sustituimos en la EC. II.19

$$U = \frac{1}{2} U_i^T U_i \int_V B^T D B \, dv$$

Que podemos escribir como:

$$U = \frac{1}{2} U_i^T K_e U_i \quad \text{II.20}$$

Donde

$$K_e = \int_V B^T D B \, dv$$

Que es la matriz de rigidez del elemento finito

Sustituyendo la EC. II.18 y II.20 en II.16 tenemos:

$$E_T = \frac{1}{2} U_i^T K_e U_i - U_i^T P \quad \text{II.21}$$

Aplicando el principio del trabajo virtual, que establece que:

"De todas las configuraciones de desplazamientos admisibles aquella que conduce al equilibrio de la estructura es la que minimiza la energía total:

Entonces minimizando la EC. II.21, o sea derivando con respecto a U_i e igualando a cero tenemos:

$$\frac{dE_T}{dU_i} = K_e U_i - P = 0$$

Entonces:

$$K_e U_i = P \quad \text{II.22}$$

Que es lo que se buscaba.

En esta expresión P representa todas las fuerzas externas aplicadas en los nudos.

La matriz K_e depende del tipo de elemento a utilizar para discretizar la estructura.

Una vez que obtuvimos K_e se procede al ensamble de la matriz de rigidez global de la estructura, este proceso se mostrará de manera práctica mediante un ejemplo en el Capítulo III.

Teniendo la matriz K es fácil obtener U_i (desplazamiento de los nudos) ya sea obteniendo la matriz K^{-1} o solucionando el sistema de ecuaciones.

Calculando U_i se sustituye en la EC. II.8 en donde por medio de las funciones de forma o interpolación se puede obtener los desplazamientos en cualquier punto deseado, después se continua con lo expuesto en el inciso II.4.

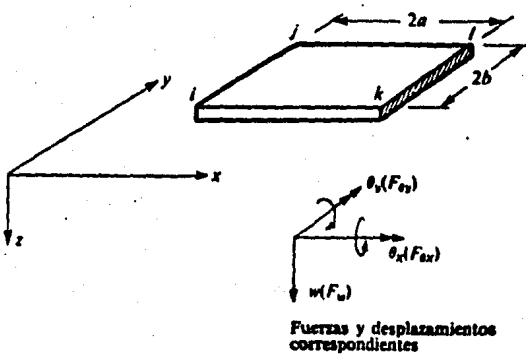
CAPITULO III

En éste capítulo, se aplicará el método del elemento finito a la solución de placas, mediante un sencillo ejemplo desarrollado paso a paso y con las debidas explicaciones, donde sea necesario, con el objetivo de una mejor comprensión de lo expuesto en el capítulo II.

La razón de la sencillez del ejemplo se base en el gran número de ecuaciones y de operaciones manuales acarreado con esto -- mucho tiempo y posibilidad de error.

Este ejemplo será también solucionado a manera de comprobación por medio de las soluciones del libro: "teoría de Placas y Láminas" de TIMOSHENKO, Pag. 221, además de que en el capítulo - IV se soluciona por medio de un programa de computadora, y así poder comparar los resultados.

Para nuestro ejemplo usaremos el elemento finito rectangular de 4 nodos, para el cual algunos autores han resuelto la matriz de rigidez K_e así como la matriz de tensión es S , las cuales - se muestran en las tablas III.a y III.b respectivamente.



Elemento de placa rectangular.

FIG. III.1

Matriz de rigidez

$$K = \frac{1}{60ah} [D_1 K_1 + D_2 K_2 + D_3 K_3 + D_4 K_4] L$$

Siendo

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$K_1 = \rho^{-2}$

60											
0	0										
30	0	20									
30	0	15	60								
0	0	0	0	0							
15	0	10	30	0	20						
-60	0	-30	-30	0	-15	60					
0	0	0	0	0	0	0	0				
30	0	10	15	0	5	-30	0	20			
-30	0	-15	-60	0	-30	30	0	-15	60		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	0	5	30	0	10	-15	0	10	-30	0	20

$\rho^{-2} = \frac{b^2}{a^3}$

Simétrica

$K_2 = \rho^2$

60											
-30	20										
0	0	0									
-60	30	0	60								
-30	10	0	30	20							
0	0	0	0	0	0						
30	-15	0	-30	-15	0	60					
-15	10	0	15	5	0	-30	20				
0	0	0	0	0	0	0	0				
-30	15	0	30	15	0	-60	30	0	60		
-15	5	0	15	10	0	-30	10	0	30	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

$\rho^2 = \frac{a^2}{b^3}$

Simétrica

$K_3 =$

30											
-15	0										
15	-15	0									
-30	0	-15	30								
0	0	0	15	0							
-15	0	0	15	15	0						
-30	15	0	30	0	0	30					
15	0	0	0	0	0	-15	0				
0	0	0	0	0	0	-15	15	0			
30	0	0	-30	-15	0	-30	0	15	30		
0	0	0	-15	0	0	0	0	0	15	0	
0	0	0	0	0	0	15	0	-15	-15	0	

Simétrica

$K_4 =$

R4											
-6	R										
6	0	R									
-R4	6	-6	R4								
-6	-2	0	6	R							
-6	0	-8	6	0	R						
-R4	6	-6	R4	6	6	R4					
6	-R	0	-6	2	0	-6	R				
6	0	-2	-6	0	2	-6	0	R			
R4	-6	6	-R4	-6	-6	-R4	6	6	R4		
6	2	0	-6	-R	0	-6	-2	0	6	R	
-6	0	2	6	0	-2	6	0	-8	-6	0	

Simétrica

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donde $l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2A & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}$

TABLA III.a

Matriz de tensiones $\left(p = \frac{a}{b}\right)$
 Elemento rectangular de la figura 10.2. Material ortótropo

$\frac{6p^{-1}D_2}{+6pD_1}$	$-8aD_1$	$8bD_2$	$-6pD_1$	$-4aD_1$	0	$-6p^{-1}D_2$	0	$4bD_2$	0	0	0
$\frac{6pD_2}{+6p^{-1}D_1}$	$-8aD_2$	$8bD_1$	$-6pD_2$	$-4aD_2$	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$4bD_1$	0	0	0
$-2D_{22}$	$4bD_{22}$	$-4aD_{22}$	$2D_{22}$	0	$4aD_{22}$	$2D_{22}$	$-4bD_{22}$	0	$-2D_{22}$	0	0
$-6pD_1$	$4aD_1$	0	$\frac{6p^{-1}D_2}{+6pD_1}$	$8aD_1$	$8bD_2$	0	0	0	$-6p^{-1}D_2$	0	$4bD_2$
$-6pD_2$	$4aD_2$	0	$\frac{6pD_1}{+6p^{-1}D_2}$	$8aD_2$	$8bD_1$	0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$4bD_1$
$-2D_{22}$	0	$-4aD_{22}$	$2D_{22}$	$4bD_{22}$	$4aD_{22}$	$2D_{22}$	0	0	$-2D_{22}$	$-4bD_{22}$	0
$-6p^{-1}D_2$	0	$-4bD_2$	0	0	0	$+\frac{6p^{-1}D_2}{6pD_1}$	$-8aD_1$	$-8bD_2$	$-6pD_1$	$-4aD_1$	0
$-6p^{-1}D_1$	0	$-4bD_1$	0	0	0	$+\frac{6pD_1}{6p^{-1}D_2}$	$-8aD_2$	$-8bD_1$	$-6pD_2$	$-4aD_2$	0
$-2D_{22}$	$4bD_{22}$	0	$2D_{22}$	0	0	$2D_{22}$	$-4bD_{22}$	$-4aD_{22}$	$-2D_{22}$	0	$4aD_{22}$
0	0	0	$-6p^{-1}D_2$	0	$-4bD_2$	$-6pD_1$	$4aD_1$	0	$+\frac{6p^{-1}D_2}{6pD_1}$	$8aD_1$	$-8bD_2$
0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$-4bD_1$	$-6pD_2$	$4aD_2$	0	$+\frac{6pD_1}{6p^{-1}D_2}$	$8aD_2$	$-8bD_1$
$-2D_{22}$	0	0	$2D_{22}$	$4bD_{22}$	0	$2D_{22}$	0	$-4aD_{22}$	$-2D_{22}$	$-4bD_{22}$	$4aD_{22}$

TABLA III.b

ECUACIONES REQUERIDAS.

La ecuación de equilibrio para el problema de flexión de placas es tá dada por una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden -- (EC. I.56)

$$\nabla^4 w = -\frac{q}{D_f}$$

Los grados de libertad nodal son un desplazamiento vertical W_i y dos rotaciones θ_{xi} y θ_{yi} , donde estas dos últimas están en función de W_i de la siguiente manera:

$$\theta_{xi} = - \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{III.1}$$

$$\theta_{yi} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{III.2}$$

De acuerdo a esto, el vector de desplazamiento en el nodo i será:

$$U_i = \begin{Bmatrix} W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \text{III.3}$$

El número total de grados de libertad del elemento será de 12 ---- (3 x nudo) por lo tanto el polinomio que aproxima la solución será:

$$W_i = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3 \quad \text{III.4}$$

O sea de la forma $U_i = \phi \alpha$ EC. II.2

Donde:

$$\phi = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ xy^3] \quad \text{III.5}$$

Que son las coordenadas de los nudos

$$\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_{12}] \quad \text{III.6}$$

Teniendo en cuenta la EC. III.1 y III.2 y derivando la EC. III.4 tenemos

$$\theta_{xi} = -\alpha_3 - \alpha_5 x - 2\alpha_6 y - \alpha_8 x^2 - 2\alpha_9 xy - \alpha_{10} y^2 - \alpha_{11} x^3 - 3\alpha_{12} xy^2 \quad \text{III.7}$$

$$\theta_{yi} = +\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad \text{III.8}$$

Con esto podemos construir la EC. II.2 para el elemento finito de la FIG. III.1 (Ver tabla III.c).

TABLA III.c

ω_i	1	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$	Y_i^2	X_i^3	$X_i^2 Y_i$	$X_i Y_i^2$	Y_i^3	$X_i^3 Y_i$	$X_i Y_i^3$	α_1
θ_{X_i}	0	0	-1	0	$-X_i$	$-2Y_i$	0	$-X_i^2$	$-2X_i Y_i$	$-3Y_i^2$	$-X_i^3$	$-3X_i Y_i^2$	α_2
θ_{Y_i}	0	1	0	$2X_i$	Y_i	0	$3X_i^2$	$2X_i Y_i$	Y_i^2	0	$3X_i^2 Y_i$	Y_i^3	α_3
ω_j	1	X_j	Y_j	X_j^2	$X_j Y_j$	Y_j^2	X_j^3	$X_j^2 Y_j$	$X_j Y_j^2$	Y_j^3	$X_j^3 Y_j$	$X_j Y_j^3$	α_4
θ_{X_j}	0	0	-1	0	$-X_j$	$-2Y_j$	0	$-X_j^2$	$-2X_j Y_j$	$-3Y_j^2$	$-X_j^3$	$-3X_j Y_j^2$	α_5
θ_{Y_j}	0	1	0	$2X_j$	Y_j	0	$3X_j^2$	$2X_j Y_j$	Y_j^2	0	$3X_j^2 Y_j$	Y_j^3	α_6
ω_k	1	X_k	Y_k	X_k^2	$X_k Y_k$	Y_k^2	X_k^3	$X_k^2 Y_k$	$X_k Y_k^2$	Y_k^3	$X_k^3 Y_k$	$X_k Y_k^3$	α_7
θ_{X_k}	0	0	-1	0	$-X_k$	$-2Y_k$	0	$-X_k^2$	$-2X_k Y_k$	$-3Y_k^2$	$-X_k^3$	$-3X_k Y_k^2$	α_8
θ_{Y_k}	0	1	0	$2X_k$	Y_k	0	$3X_k^2$	$2X_k Y_k$	Y_k^2	0	$3X_k^2 Y_k$	Y_k^3	α_9
ω_l	1	X_l	Y_l	X_l^2	$X_l Y_l$	Y_l^2	X_l^3	$X_l^2 Y_l$	$X_l Y_l^2$	Y_l^3	$X_l^3 Y_l$	$X_l Y_l^3$	α_{10}
θ_{X_l}	0	0	-1	0	$-X_l$	$-2Y_l$	0	$-X_l^2$	$-2X_l Y_l$	$-3Y_l^2$	$-X_l^3$	$-3X_l Y_l^2$	α_{11}
θ_{Y_l}	0	1	0	$2X_l$	Y_l	0	$3X_l^2$	$2X_l Y_l$	Y_l^2	0	$3X_l^2 Y_l$	Y_l^3	α_{12}

EJEMPLO:

Se trata de encontrar el desplazamiento y esfuerzos a que estará sometida una placa cuadrada de espesor constante, con todos sus bordes empotrados, la cual deberá soportar una carga concentrada en el centro.

La placa es de acero de 5 cm. de espesor y 100 cm. de lado.

- a) DATOS: $P = 5000 \text{ Kg.}$
 $h = 5 \text{ cm.}$
 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg./cm}^2$
 $\nu = 0.3$

- b) GEOMETRIA DE LA PLACA:

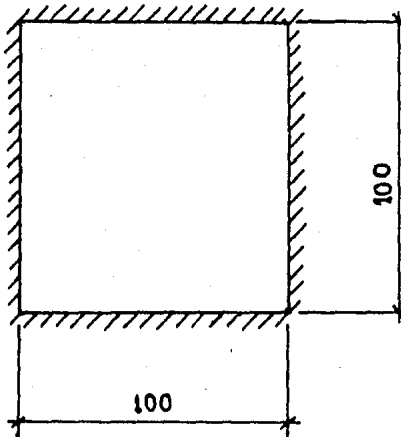


FIG. III. 2

- c) Se discretiza la placa, numerando elementos y nudos, asignando número entre parentesis a los grados de libertad nodal -- (desplazamiento), si este está restringido se le asigna un -cero.

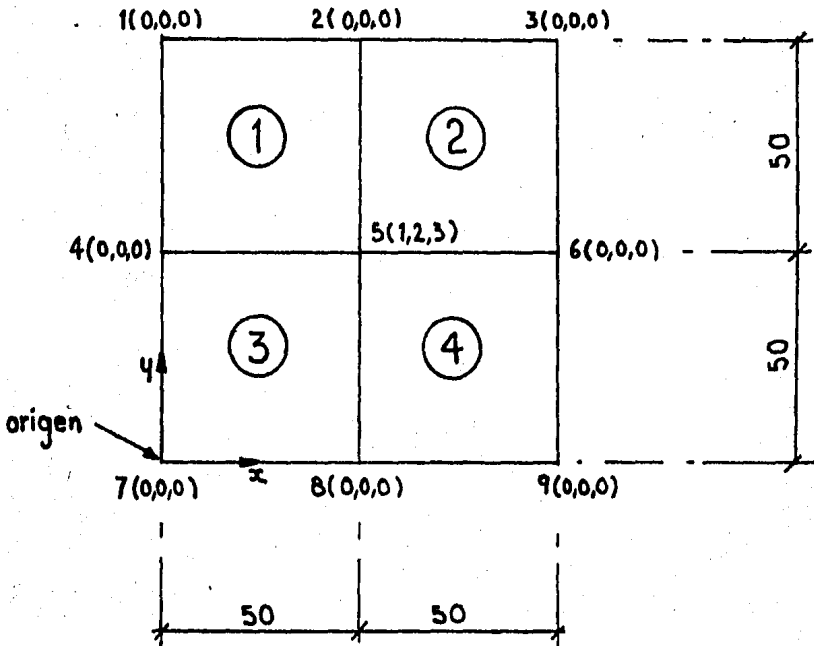


FIG. III.3

De la FIG. III.3 podemos notar que todos los nodos excepto el 5 - están restringidos, además el nodo 5 coincide con el centro de la placa en donde se aplica la carga $P=5000$ Kg.

- d) Cálculo de la matriz de rigidez de elemento

Como podemos ver en la FIG. IV.2 todos los elementos finitos - son iguales (cuadrados 50 x 50), entonces obviamente la matriz K_e será igual para todos los elementos, lo cual es para facilitar los calculos.

Efectuando las operaciones indicadas obtenemos la matriz K_e siguiente, donde para facilidad de operaciones sacamos como factor A:

$$\frac{Dx}{60 \text{ ab}} = \frac{24.04 \times 10^6}{60 \times 25 \times 25} = 641.067$$

$$K_e = 641.067$$

158.4																			
-1830	57000																		
1830	-11250	57000																	
-68.4	1605	420	158.4																
-1605	23250	0	1830	57000															
420	0	18000	1830	11250	57000														
-68.4	-420	-1605	-21.6	-645	-645	158.4													
-420	18000	0	645	14250	0	-1830	57000												
1605	0	23250	645	0	14250	-1830	11250	57000											
-21.6	645	-645	-68.4	420	-1605	-68.4	1605	-420	158.4										
-645	14250	0	420	18000	0	-1605	23250	0	1830	57000									
645	0	14250	1605	0	23250	-420	0	18000	-1830	-11250	57000								

MATRIZ DE RIGIDEZ K_e

- e) A cada elemento se le asocia un vector de indicadores el cual estará formado por los números asociados a cada nudo entre -- parentesis (Ver FIG. III.3), este vector nos servira para ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura.

Los números de este vector corresponderan a los desplazamientos de cada nodo en la secuencia que se indica a continuación.

$$C = [w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk} \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1}]$$

Entonces para nuestro ejemplo estos vectores seran los siguientes:

Elemento 1

$$C_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Elemento 2

$$C_2 = [1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Elemento 3

$$C_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3]$$

Elemento 4

$$C_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

- f) Ensamble de la matriz de rigidez global K

Para ensamblar la matriz K, sumando la contribucion de cada elemento para cada dirección, usaremos los vectores indicadores de la siguiente manera.

Sean las siguientes matrices K_1 y K_2

$$K_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[0 1 2 0] ← Vector de indicadores.

$$K_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[1 0 0 2] ← Vector de indicadores.

El ensamble se efectua de la sig. forma:

$$K = \begin{bmatrix} a_{12} + b_{11} & a_{32} + b_{41} \\ a_{23} + b_{14} & a_{33} + b_{42} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global para nuestro ejemplo nos queda como sigue:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_{11} &= 641.067 (158.4 + 158.4 + 158.4 + 158.4) = 406\ 181.95 \\ K_{12} = K_{21} &= 641.067 (-1830 - 1830 + 1830 + 1830) = 0 \\ K_{13} = K_{31} &= 641.067 (-1830 + 1830 - 1830 + 1830) = 0 \\ K_{22} &= 641.067 (57000 + 57000 + 57000 + 57000) = 146\ 163\ 000 \\ K_{23} = K_{32} &= 641.067 (11250 - 11250 - 11250 + 11250) = 0 \\ K_{33} &= 641.067 (57000 + 57000 + 57000 + 57000) = 146\ 163\ 000 \end{aligned}$$

g) La obtención de los desplazamientos del nodo 5 de nuestra placa (punto central) es fácil, dado que:

$$P = K_{5i}$$

Y usando los resultados del inciso anterior tenemos:

$$\begin{Bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 406 & 181.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 146 & 163 & 000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 146 & 163 & 000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_5 \\ \theta x_5 \\ \theta y_5 \end{Bmatrix}$$

Los resultados son:

$$w_5 = 0.0123 \ 097 \text{ cm.}$$

$$\theta x_5 = 0$$

$$\theta y_5 = 0$$

En resultado para θx_5 y θy_5 es logico, ya que el tipo de carga así como su localización no produce ninguna pendiente en el punto medio.

- h) Conocidos los desplazamientos nodales, podemos obtener los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento finito mediante las funciones de forma o interpolación. Para esto necesitamos -- sustituir las coordenadas de los nodos de cada elemento en la -- ecuación matricial, Tabla III.c, de acuerdo al sistema de ejes -- coordenados de la FIG. III.1 y así poder calcular los coeficientes α , también llamados coordenadas generalizadas.

0	1	0	50	0	0	2500	0	0	0	125 000	0	0	δ_1 δ_2 δ_3 δ_4 δ_5 δ_6 δ_7 δ_8 δ_9 δ_{10} δ_{11} δ_{12}
0	0	0	-1	0	0	-100	0	0	0	- 7500	0	0	
0	0	1	0	0	50	0	0	0	2500	0	0	125 000	
0	1	0	100	0	0	10 000	0	0	0	1 000 000	0	0	
0	0	0	-1	0	0	-200	0	0	0	- 30 000	0	0	
0	0	1	0	0	100	0	0	0	10 000	0	0	1 000 000	
0.0123097	1	50	50	2500	2500	2500	125 000	125 000	125 000	0	0	1 000 000	
0	0	0	-1	0	-50	-100	0	-2500	-5000	125 000	6250 000	6250 000	
0	0	1	0	100	50	0	7500	5000	2500	-7500	-125 000	-375 000	
0	1	50	100	2500	5000	10 000	125 000	250 000	500 000	0	375 000	125 000	
0	0	0	-1	0	- 50	- 200	0	-2500	- 10 000	1 000 000	12 500 000	50 000 000	
0	0	1	0	100	100	0	7500	10 000	10 000	- 30 000	-125 000	-1 500 000	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	750 000	1 000 000	

ECUACION MATRICIAL PARA ELEMENTO FINITO 1

=

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	50	1	0	0	50	100	2500	100	0	-1	1	50	50	100	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	1	0	0	100	100	5000	100	0	-1	100	5000	100	5000	1000	100	100	100	50	100	0	0
2500	50	0	0	-50	2500	2500	5000	50	0	-50	2500	100	100	5000	2500	2500	5000	2500	2500	100	0	0
2500	2500	-100	0	-50	2500	100	0	-200	0	-200	7500	125000	100000	500000	250000	100000	250000	125000	2500	1000	0	0
125000	125000	-2500	0	-2500	125000	125000	125000	0	-2500	-2500	10000	500000	100000	500000	250000	100000	250000	125000	2500	1000	0	0
125000	125000	-5000	-5000	-2500	125000	125000	125000	-10000	-10000	-10000	10000	500000	100000	500000	250000	100000	250000	125000	2500	1000	0	0
125000	125000	-7500	0	-7500	125000	125000	125000	-30000	-30000	-30000	100000	500000	100000	500000	250000	100000	250000	125000	2500	1000	0	0
6250000	6250000	-375000	125000	-375000	6250000	6250000	6250000	-1500000	-1250000	-1250000	1000000	5000000	1250000	5000000	2500000	1000000	2500000	1250000	375000	125000	0	0
6250000	6250000	-375000	375000	-125000	6250000	6250000	6250000	-1500000	-1250000	-1250000	1000000	5000000	1250000	5000000	2500000	1000000	2500000	1250000	375000	125000	0	0
6250000	6250000	-375000	125000	-125000	6250000	6250000	6250000	-1500000	-1250000	-1250000	1000000	5000000	1250000	5000000	2500000	1000000	2500000	1250000	375000	125000	0	0
6250000	6250000	-375000	125000	-125000	6250000	6250000	6250000	-1500000	-1250000	-1250000	1000000	5000000	1250000	5000000	2500000	1000000	2500000	1250000	375000	125000	0	0

EQUACION MATRICIAL PARA ELEMENTO FINITO 2

La solución de estas ecuaciones se realizó invirtiendo la matriz 12 x 12, por medio de un programa, para éste efecto, en microcomputadora, y para los fines que perseguimos sólo damos los resultados.

VALOR DE LOS COEFICIENTES α PARA CADA ELEMENTO.

ELEMENTO 1

$\alpha_1 =$	0.0	
$\alpha_2 =$	-1.47716	E - 03
$\alpha_3 =$	0.0	
$\alpha_4 =$	2.95432	E - 05
$\alpha_5 =$	6.40104	E - 05
$\alpha_6 =$	0.0	
$\alpha_7 =$	-3.9391	E - 07
$\alpha_8 =$	-2.95432	E - 07
$\alpha_9 =$	-8.86298	E - 07
$\alpha_{10} =$	0.0	
$\alpha_{11} =$	3.9391	E - 09
$\alpha_{12} =$	3.9391	E - 09

ELEMENTO 2

$\alpha_1 =$	- 0.2461939	
$\alpha_2 =$	7.38581	E - 03
$\alpha_3 =$	7.38581	E - 03
$\alpha_4 =$	-8.86298	E - 05
$\alpha_5 =$	1.23097	E - 04
$\alpha_6 =$	-8.86298	E - 05
$\alpha_7 =$	3.9391	E - 07
$\alpha_8 =$	8.86298	E - 07
$\alpha_9 =$	8.86298	E - 07
$\alpha_{10} =$	3.9391	E - 07
$\alpha_{11} =$	-3.9391	E - 09
$\alpha_{12} =$	-3.9391	E - 09

ELEMENTO 3

$\alpha_1 =$	0.0	
$\alpha_2 =$	0.0	
$\alpha_3 =$	0.0	
$\alpha_4 =$	0.0	
$\alpha_5 =$	-4.92387	E - 06
$\alpha_6 =$	0.0	
$\alpha_7 =$	0.0	
$\alpha_8 =$	2.95432	E - 07
$\alpha_9 =$	2.95432	E - 07
$\alpha_{10} =$	0.0	
$\alpha_{11} =$	-3.9391	E - 09
$\alpha_{12} =$	-3.9391	E - 09

ELEMENTO 4

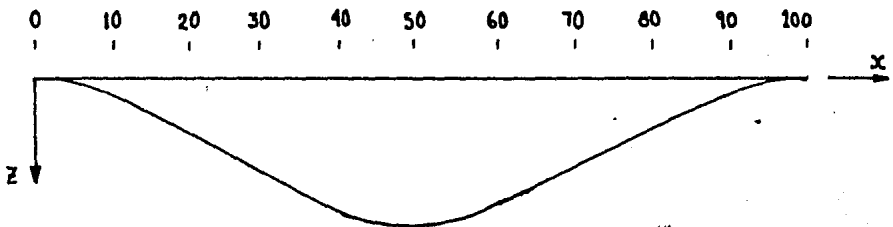
$\alpha_1 =$	0.0	
$\alpha_2 =$	0.0	
$\alpha_3 =$	-0.0103401	
$\alpha_4 =$	0.0	
$\alpha_5 =$	1.52639	E - 04
$\alpha_6 =$	3.84061	E - 04
$\alpha_7 =$	0.0	
$\alpha_8 =$	-8.86298	E - 07
$\alpha_9 =$	-3.84062	E - 06
$\alpha_{10} =$	-3.9391	E - 06
$\alpha_{11} =$	3.9391	E - 09
$\alpha_{12} =$	3.9391	E - 08

Con los valores anteriores (α_s) y las ecuaciones III.4, III.7 y III.8 podemos calcular los desplazamientos en un punto específico, simplemente sustituyendo las coordenadas de el punto deseado.

Nosotros calcularemos W y Θ_y para los elementos 1 y 2 a lo largo del eje X , para cuando $Y = 50$ y $Y = 75$ (Ver FIG. III.3) y graficaremos -- los resultados para cuando $Y = 50$, pues cuando $Y = 75$ la curva es similar aunque con menos flecha.

X	Y=50		Y=75	
	W (cm)	Θ_y (Radianes)	W (cm)	Θ_y (Radianes)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.00128	2.36348 E-04	0.00064	1.18174 E-04
20	0.00433	3.5452 E-04	0.00217	1.7726 E-04
30	0.00798	3.5452 E-04	0.00399	1.7726 E-04
40	0.01103	2.36346 E-04	0.00551	1.18173 E-04
50	0.0123097	0.0	0.00615	0.0
60	0.01103	-2.3635 E-04	0.00551	-1.1818 E-04
70	0.00798	-3.5453 E-04	0.00399	-1.7727 E-04
80	0.00433	-3.5453 E-04	0.00217	-1.7727 E-04
90	0.00128	-2.3635 E-04	0.00064	-1.1818 E-04
100	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA III.d



ESC. VERTICAL 200:1

GRAFICA III.4
CURVA ELASTICA DE LA PLACA.
(Y = 50)

i) Obtención de los elementos mecánicos.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales, los sustituimos en la formula:

$$\bar{v} = S U_i$$

Que para el elemento rectangular de 4 nodos, se muestran en la -
tabla III.b

Como vimos en el Capítulo I, las tensiones resultantes son en realidad momentos flexionantes y torsionantes por unidad de longitud.
(Ec. I.52)

Ahora bien, como podemos observar en la FIG. I.6 del Capítulo I, -

las deformaciones, y por lo tanto las tensiones varían linealmente a través de todo el espesor de la placa, y estos se pueden calcular fácilmente por medio de

$$\sigma = \frac{12 M}{t^3} Z \quad \text{III.9}$$

Sustituyendo los datos en la matriz de tensiones de la tabla III.b para calcular los elementos mecánicos del elemento finito, pues obviamente, por razón de simetría y carga los otros serán iguales.

MKX 4
 MY 4
 MKX 4
 MK 1
 MY 1
 MKX 1
 MY 1
 MKX 1
 MY 5
 MKX 5
 MY 5
 MKX 2
 MY 2
 MKX 2

$\times 10^6$

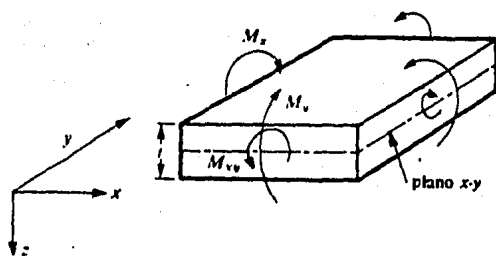
187.44	-1440	4808	-43.20	-720.0	0	-144.24	0	2404	0	0	0	0	-16.8	840
187.44	-4808	1440	-144.24	-2404	0	-43.20	0	0	0	0	0	0	-16.8	840
187.44	0	1440	0	0	0	187.44	1440	4808	0	0	0	0	16.8	840
0	1440	0	0	0	0	-43.2	-4808	-1440	0	0	0	0	0	0
0	0	1440	0	0	0	187.44	-4808	0	0	0	0	0	16.8	840
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MATRIZ DE TENSIONES ELEMENTO 1

$\times 0.0123097$

HACIENDO OPERACIONES OBTENEMOS LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

$$\begin{Bmatrix} M_{x4} \\ M_{y4} \\ M_{xy4} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{xy1} \\ M_{x5} \\ M_{y5} \\ M_{xy5} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{xy2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -710.22 \\ -212.71 \\ 82.72 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 82.72 \\ 922.93 \\ 922.93 \\ 82.72 \\ -212.71 \\ -710.22 \\ 82.72 \end{Bmatrix} \quad (\text{Kg-cm})$$



Tensiones resultantes o "tensiones" en la flexión de placas.

FIG. III.4

j) METODO ALTERNATIVO.

Una manera de comprobar los resultados obtenidos en nuestro ejemplo usando el método del elemento finito, es aplicando al mismo problema la solución dada en el libro "Teoría de Placas y Láminas" autor: S. Timoshenko.

El momento en el punto central está dado por la siguiente expresión:

$$M_x = M'x + mx$$

Dado que la placa es cuadrada, entonces:

$$M_x = M_y \quad M'x = M'y \quad \text{y} \quad mx = my$$

Donde $mx = my$ son los momentos adicionales, que se muestran en la tabla 37 del libro citado y se reproduce mas adelante.

$M'x = M'y$ es el momento en el centro de una placa cuadrada simplemente apoyada y es igual a la siguiente expresión.

$$M'x = M'y = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{2a \operatorname{Sen} \frac{\pi}{2}}{\pi c} + 1 \right] + \frac{\gamma_1 P}{4\pi}$$

TABLA 37
Momentos flectores en los puntos medios de los lados mayores y flechas y momentos adicionales en el centro de placas rectangulares bajo carga concentrada en el centro (fig. 93)
 $\nu = 0,3$

b/a	$(M_x)_{x=0, y=0} = \frac{Pa^2}{D}$	$(M_y)_{x=0, y=0} = \gamma P$	Momentos adicionales	
			$(m_x)_{x=0, y=0} = \beta_1 P$	$(m_y)_{x=0, y=0} = \beta_2 P$
	a	γ'	β_1	β_2
1,0	0,00560	-0,1257	-0,0536	-0,0536
1,2	0,00647	-0,1490	-0,0579	-0,0526
1,4	0,00691	-0,1604	-0,0618	-0,0517
1,6	0,00712	-0,1651	-0,0653	-0,0510
1,8	0,00720	-0,1667	-0,0683	-0,0504
2,0	0,00722	-0,1674	-0,0710	-0,0500
∞	0,00725	-0,168	-0,0742	-0,0484

Para nuestro caso:

$$a = 100$$

$$\gamma = 0.3$$

$$P = 5000 \text{ Kg.}$$

$$C = \frac{2a}{\pi} \text{ Sen } \frac{\pi}{2} = 1.745$$

Donde C es el radio de un círculo donde se supone que actúa P como carga uniformemente repartida.

$$\gamma' = 0.565$$

Sustituyendo valores.

$$M_x = M_y = \frac{5000}{4} \left[1.3 \ln \frac{200 \text{ Sen } 0.5}{1.745} + 1 \right] + \frac{0.565 \times 5000}{4} + 0.0536 \times 5000$$

$$M_x = M_y = 890.73 \frac{\text{Kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

Que es el momento en el punto central de la placa

Cálculo de momento de empotramiento

$$M_x = M_y = 0.1257 \times 5000 = 628.5 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

Cálculo de la flecha en el punto de la carga.

$$W_{\max} = \frac{P a^2}{D} = 0.00560 \times \frac{5000 \times 100^2}{24.04 \times 10}$$

$$W_{\max} = 0.0116472 \text{ cm.}$$

Comparando los resultados de ambos métodos.

	MEF	TIMOSHENKO
W	0.0123097	0.0116472
M central	922.93	890.73
M emp.	710.22	628.5

CAPITULO IV

Como se ha visto en el Capítulo III, el análisis de placas utilizando el método del elemento finito por medios manuales es casi imposible, a medida de que se idealiza con una malla más cerrada (mayor número de elementos).

El desarrollo de este método al igual que el de las computadoras digitales de alta velocidad permitieron que se desarrollaran programas con múltiples aplicaciones como por ejemplo: El Nastran, - el Sap IV y el Sap V.

La finalidad de este capítulo es la de comprobar lo expuesto en el Capítulo II y III, resolviendo el ejemplo del Capítulo III, -- por medio de un programa de computadora, además de otros dos ejemplos con mayor grado de complejidad.

Dicho programa fué desarrollado en lenguaje FORTRAN, en la división de estudios superiores de la UNAM, utilizando el elemento -- rectangular de cuatro nodos, admitiendo carga uniformemente repartida y cargas puntuales en los nodos dando como resultado desplazamiento y elementos mecánicos nodales para cada elemento.

El listado del programa se reproduce al final de este capítulo, - y los datos de entrada necesarios para su utilización se explican a continuación, donde los números arriba de la línea horizontal - representan el número de la columna ó campo de la tarjeta.

TARJETA 1

1	5	6	10	15	20
NUMERO DE NODOS		NUMERO DE ELEMENTOS		MATERIAL	GEOMETRIA.

La numeración de los nodos, así como de los elementos puede ser -- como se quiera, aunque lo mas recomendable es seguir un cierto orden ó regla para evitar posibles errores.

En la columna 15 y en la 20 siempre se pone 1 (uno) indicando con esto que solo se utiliza un solo material así como un solo tipo de elemento finito (rectangular), pudiendo este programa ampliarse -- para que acepte otros tipos de elementos.

TARJETA 2

1	5	10	15	20	30	40
NODO	W	e_x	e_y	X	Y	
NUMERO	CONDICIONES DE APOYO NODAL			COORDENADAS DE EL NODO		
	1 - RESTRINGIDO			(NUMERO REAL)		
	0 - LIBRE					

Estas tarjetas serán tantas como número de nodos se tengan en cada problema específico.

TARJETA 3

1	56	18	31	44	57
CORRESPONDE CON EL # 1 DE LAS - TARJETAS 1 COL. 15	1 E MODULO DE ELASTICI- DAD	MODULO DE POISSON	Po Po PESO PROPIO	X CARGA VIVA	

Todos los número serán reales excepto el primer campo que es número entero.

Cuando sólo se quiera cargas puntuales sobre la placa, se puede -- omitir el peso propio y la carga viva, las unidades del peso propio serán [F/L^3] y para la carga viva será [F/L^2].

TARJETA 4

GEOMETRIA DE LA PLACA.

1	9	10	21
	1		H

Donde el 1 en la Col. 9 corresponde a la forma del elemento finito, y H es el espesor de la placa.

TARJETA 5

1	5	10	15	20	25	30	35
ELEMENTO NUMERO	i	j	k	l		1	1
						MATERIAL	GEOME- TRIA

Se debe colocar el número asignado a cada nodo de acuerdo a la FIG. III.1 pues el programa funciona de esta manera.

Estas tarjetas serán tantas como número de elementos.

En el caso de tener cargas concentradas, se deberá poner una tarjeta en blanco después de las tarjetas 5 e inmediatamente después -- las siguientes.

1	5	17
NUMERO DE NODO CAR- GADO.		CARGA PUNTUAL

De estas tarjetas serán tantas como nodos cargados.

Las unidades de los datos de entrada deben ser congruentes entre si, dando resultados congruentes con los datos.

Para cada uno de los 3 ejemplos se anexan los datos de salidas (resultados) del programa, y a partir de los cuales se podra graficar - estos si se desea.

EJEMPLO 1

Este ejemplo es el resuelto de forma manual en el Capítulo III, - por lo que aquí no se enunciara el problema ni la discretización de la estructura, únicamente pondremos a continuación los resultados de la corrida de computadora y los comentarios necesarios.



NPM NELEM NMAT NGEOM
 9 4 1 1

NODO GRADOS DE LIBERTAD COORDENADAS NODALES

	W(7) GIRO(X) GIRO(Y)			X Y Z		
1	1	1	1	0.0000	100.0000	0.0000
2	1	1	1	50.0000	100.0000	0.0000
3	1	1	1	100.0000	100.0000	0.0000
4	1	1	1	0.0000	50.0000	0.0000
5	1	1	1	50.0000	50.0000	0.0000
6	1	1	1	100.0000	50.0000	0.0000
7	1	1	1	0.0000	0.0000	0.0000
8	1	1	1	50.0000	0.0000	0.0000
9	1	1	1	100.0000	0.0000	0.0000

MATERIAL MOD. DE ELAST.(E) C. DE POISSON PESO PROPIO CARGA UNIF. DIST.
 1 21000000.00 0.30 0.00 0.00

MATERIAL ESPESOR
 1 5.00

ELEMENTO NODO 1 NODO 2 NODO 3 NODO 4 MATERIAL GEOMETRIA

1	4	1	5	2	1	1
2	5	2	6	1	1	1
3	7	3	8	5	1	1
4	8	4	9	6	1	1

ESTADO DE CARGAS

NODO F(W) MXY MYY
 5 5000.00 0.00 0.00

NODO W(Z) GIRO(X) GIRO(Y)

1	0.	0.	0.
2	0.	0.	0.
3	0.	0.	0.
4	0.	0.	0.
5	-.1231061E+01	-.4426274E-15	0.
6	0.	0.	0.
7	0.	0.	0.
8	0.	0.	0.
9	0.	0.	0.

ELEMENTO	MYX(1) MYX(3)	MYY(1) MYY(3)	MYX(2) MYX(4)	MYY(2) MYY(4)	MXY(2)	MXX(3)
1	-.7102273E+03	-.2130682E+03	-.2285985E+02	0.	0.	-.8285985E+02
	-.6232955E+03	-.8285985E+02	-.2130682E+03	-.7102273E+03	-.8285985E+02	-.9232955E+03

2	.8285985E+02	-.2130632E+03	-.8285985E+02	-.2130632E+03	-.7102273E+03	-.8285985E+02	-.7102273E+03
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
3	0.	0.	-.8285985E+02	-.7102273E+03	-.2130632E+03	-.8285985E+02	-.2130632E+03
	-.7102273E+03	-.8285985E+02	-.2130632E+03	-.7102273E+03	-.2130632E+03	-.8285985E+02	-.2130632E+03
4	-.2130632E+03	-.7102273E+03	-.8285985E+02	-.2130632E+03	-.7102273E+03	-.8285985E+02	0.
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.



Para el elemento 1 de nuestro problema (FIG. III.3) los desplazamientos para el nodo 5, único nodo libre de nuestra placa, son -- los siguientes.

$$\begin{aligned}
 W_5 &= 0.01231061 \quad \text{cm.} \\
 \theta_{x5} &= 0.0 \quad \text{radianes} \\
 \theta_{y5} &= 0.0 \quad \text{radianes}
 \end{aligned}$$

Elementos mecánicos para el elemento 1, son los siguientes:

Mxx	(1)	=	-710.23	Kg-cm.
Myy	(1)	=	-213.07	"
Mxy	(1)	=	82.86	"
Mxx	(2)	=	0.0	"
Myy	(2)	=	0.0	"
Mxy	(2)	=	82.86	"
Mxx	(3)	=	923.30	"
Myy	(3)	=	923.30	"
Mxy	(3)	=	82.86	"
Mxx	(4)	=	-213.07	"
Myy	(4)	=	-710.23	"
Mxy	(4)	=	82.86	"

Donde los subíndices entre paréntesis, representan nodos i, j, k, l , de acuerdo a la FIG. III.1 de la misma forma que se necesitan para los datos de entrada.

Como podemos observar, los resultados son iguales con respecto a los obtenidos en el capítulo III, de forma manual, además en los resultados son idénticos para los otros 3 elementos.

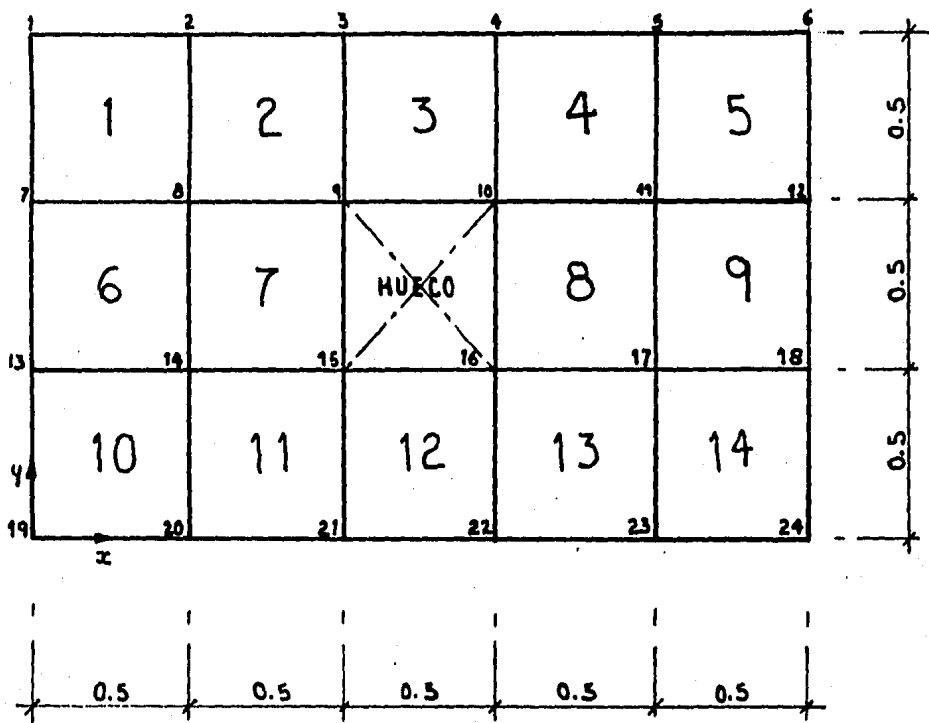
EJEMPLO 2

Se necesita analizar los desplazamientos y los elementos mecánicos de una losa de concreto rectangular con un espesor constante de 10 cms. la cual tiene agujero cuadrado en su parte central, como se muestra en la FIG. IV.1

La cual deberá soportar además de su peso propio (2400 Kg/m^3) una carga viva de 300 Kg/cm^2 .

Se considera un modelo de elasticidad de $E = 1.5 \times 10^7 \text{ Kg/m}^2$ y un módulo de POISSON $\nu = 0.20$

La losa se encuentra empotrada perimetralmente.



ACOTACIONES EN METROS.

FIG. IV.1
DISCRETIZACION DE PLACA

NDA	MELEN	MYET	MYEOM	COORDENADAS NODALES		
	24	14	1	1		
NODA	GRUPOS DE LIBERTAD			COORDENADAS NODALES		
	W(7)	GLP(Y)	PLC(Y)	X	Y	Z
1	1	1	1	0.0000	1.5000	0.0000
2	1	1	1	2.5000	1.5000	0.0000
3	1	1	1	1.0000	1.5000	0.0000
4	1	1	1	1.5000	1.5000	0.0000
5	1	1	1	2.0000	1.5000	0.0000
6	1	1	1	2.5000	1.5000	0.0000
7	1	1	1	0.0000	1.0000	0.0000
8	0	0	0	0.0000	1.0000	0.0000
9	0	0	0	1.0000	1.0000	0.0000
10	0	0	0	1.5000	1.0000	0.0000
11	0	0	0	2.0000	1.0000	0.0000
12	1	1	1	2.5000	1.0000	0.0000
13	1	1	1	0.0000	0.5000	0.0000
14	0	0	0	0.5000	0.5000	0.0000
15	0	0	0	1.0000	0.5000	0.0000
16	0	0	0	1.5000	0.5000	0.0000
17	0	0	0	2.0000	0.5000	0.0000
18	1	1	1	2.5000	0.5000	0.0000
19	1	1	1	0.0000	0.0000	0.0000
20	1	1	1	0.5000	0.0000	0.0000
21	1	1	1	1.0000	0.0000	0.0000
22	1	1	1	1.5000	0.0000	0.0000
23	1	1	1	2.0000	0.0000	0.0000
24	1	1	1	2.5000	0.0000	0.0000

MATERIAL	NO. DE ELEMENTOS	P. DE ELEMENTOS	P. DE PROPIO	CARGA UNIF. DIST.
1	1500	0.20	2400.00	300.00

MATERIAL	ESPESES
1	0.10

ELEMENTO	NODO 1	NODO 2	NODO 3	NODO 4	MATERIAL	GEOMETRIA
1	7	1	9	2	1	1
2	8	2	9	7	1	1
3	9	7	10	4	1	1
4	11	7	11	5	1	1
5	11	7	12	6	1	1
6	17	7	14	3	1	1
7	14	5	15	3	1	1
8	16	10	17	11	1	1
9	17	11	18	12	1	1
10	19	13	20	14	1	1
11	21	16	21	15	1	1
12	21	15	22	16	1	1
13	23	16	23	17	1	1
14	23	17	24	18	1	1

VECTORES DE CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



ALDO

M(Z)

GIP(X)

GIP(Y)



1	0.	0.	0.
2	0.	0.	0.
3	0.	0.	0.
4	0.	0.	0.
5	0.	0.	0.
6	0.	0.	0.
7	0.	0.	0.
8	0.	0.	0.
9	0.	0.	0.
10	0.	0.	0.
11	0.	0.	0.
12	0.	0.	0.
13	0.	0.	0.
14	0.	0.	0.
15	0.	0.	0.
16	0.	0.	0.
17	0.	0.	0.
18	0.	0.	0.
19	0.	0.	0.
20	0.	0.	0.
21	0.	0.	0.
22	0.	0.	0.
23	0.	0.	0.
24	0.	0.	0.

ALDO

M(Z)

GIP(X)

GIP(Y)

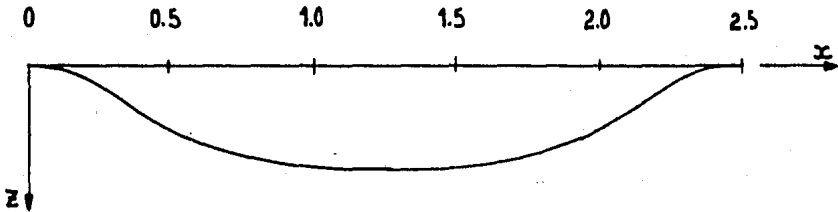
	XY(1) YY(3)	XY(1) YY(3)	XY(1) YY(4)	XY(2) YY(4)	XY(2) YY(4)	XY(2)	XY(3)
1	-.433775E+02	-.8667439E+01	.4356870E+00	0.	0.	.9262025E+01	.2227500E+02
	.2777227E+02	-.1001617E+02	-.9479568E+01	-.4737784E+02	-.1189232E+01		
2	.1942745E+02	.2821574E+02	-.1304683E+02	-.9479569E+01	-.4739784E+02	-.4422249E+01	.9799191E+01
	.2922795E+02	-.5550622E+01	-.1421079E+02	-.7105394E+02	.3073958E+01		
3	.1297265E+02	.2770265E+02	-.2955551E+01	-.1421079E+02	-.7105394E+02	-.2955051E+01	.1297265E+02
	.2993285E+02	.8955051E+01	-.1421079E+02	-.7105394E+02	.2955051E+01		
4	.0799191E+01	.2821574E+02	.5550622E+01	-.1421079E+02	-.7105394E+02	-.3073958E+01	.194245E+02
	.2921574E+02	.1304683E+02	-.9479569E+01	-.4739784E+02	.4422249E+01		
5	.2227500E+02	.2777227E+02	.1001617E+02	-.9479568E+01	-.4739784E+02	.1189232E+01	-.433775E+02
	-.2667439E+01	-.4356870E+00	0.	0.	-.9262025E+01		
6	-.433775E+02	-.8667439E+01	.8826940E+01	-.4337705E+02	-.8667439E+01	-.8826940E+01	.2162237E+02
	.2550913E+02	.2826940E+01	.2162237E+02	.2550913E+02	-.8826940E+01		
7	.1297265E+02	.2495262E+02	.8624585E+01	.1883982E+02	.2495262E+02	-.8624585E+01	.1303993E+02
	.4449165E+02	.8624585E+01	.1303993E+02	.4449165E+02	-.8624585E+01		
8	.1883982E+02	.2495262E+02	-.8624585E+01	.1303993E+02	.4449165E+02	.8624585E+01	.1883982E+02

	.2495262E+02	-.4724595E+01	.1887922E+02	.2495262E+02	.8624585E+01		
9	.2162227E+02	.2555913E+02	-.8826940E+01	.2162237E+02	.2550913E+02	.8826940E+01	-.4333705E+02
	-.8667409E+01	-.9626940E+01	-.4333705E+02	-.8667409E+01	.8826940E+01		
10	0.	0.	-.9262025E+01	-.4333705E+02	-.8667409E+01	-.4350850E+00	-.9479568E+01
	-.4739784E+02	.1149232E+01	.2227500E+02	.2877227E+02	.1001617E+02		
11	-.5479585E+01	-.4739784E+02	.4422219E+01	.1949245E+02	.2821576E+02	.1304683E+02	-.1421079E+02
	-.7105394E+02	-.3073958E+01	.9799191E+01	.2828796E+02	.5550628E+01		
12	-.1421079E+02	-.7105394E+02	.2955051E+01	.1287265E+02	.2990265E+02	.2955051E+01	-.1421079E+02
	-.7105394E+02	-.2955051E+01	.1287265E+02	.2890265E+02	-.2955051E+01		
13	-.1421079E+02	-.7105394E+02	.3073958E+01	.9799191E+01	.2828796E+02	-.5550628E+01	-.9479568E+01
	-.4739784E+02	-.4422219E+01	.1949245E+02	.2821576E+02	-.1304683E+02		
14	-.9479568E+01	-.4739784E+02	-.1195232E+01	.2227500E+02	.2877227E+02	-.1001617E+02	0.
	0.	.2227500E+02	-.4333705E+02	-.8667409E+01	.4350850E+00		



De la simetría de la geometría y de cargas, podemos decir que los desplazamientos de los nodos 8, 9, 10 y 11 serán iguales a los de los nodos 14, 15, 16, y 17 y observando los resultados los podemos comprobar.

Graficaremos el desplazamiento vertical a lo largo del eje X ---- (FIG. IV.1) para cuando $Y = 0.5$ ó $Y = 1.0$ (ver gráfica IV.1)



CURVA ELASTICA DE LA PLACA

($Y = 0.5$ ó $Y = 1.0$)

GRAFICA IV.1

En la gráfica IV.2 se encuentran graficados los momentos M_x , para cuando $Y = 0.5$ ó $Y = 1.0$, que obviamente son iguales

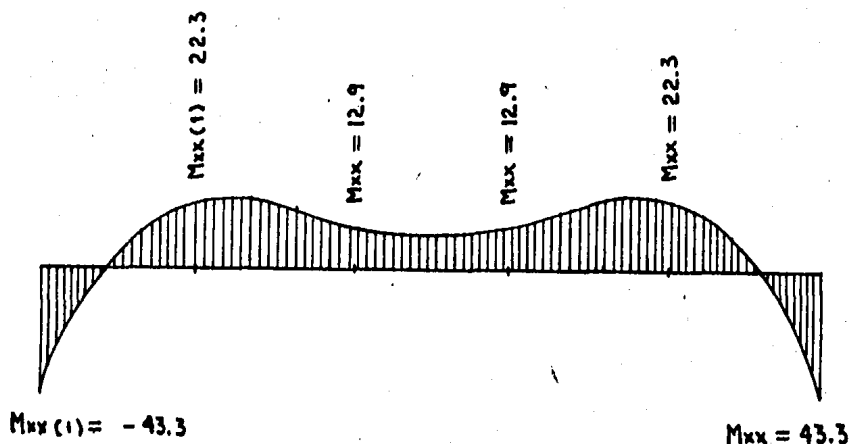


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES
GRAFICA IV.2

También de los resultados podemos observar que los momentos flexionantes M_x y M_y en las esquinas de la placa, nodos 1, 6, 19 y 24 -- son nulos.

Una de las ventajas en usar el método del elemento finito, obviamente mediante la aplicación de las computadoras, es que se calcula

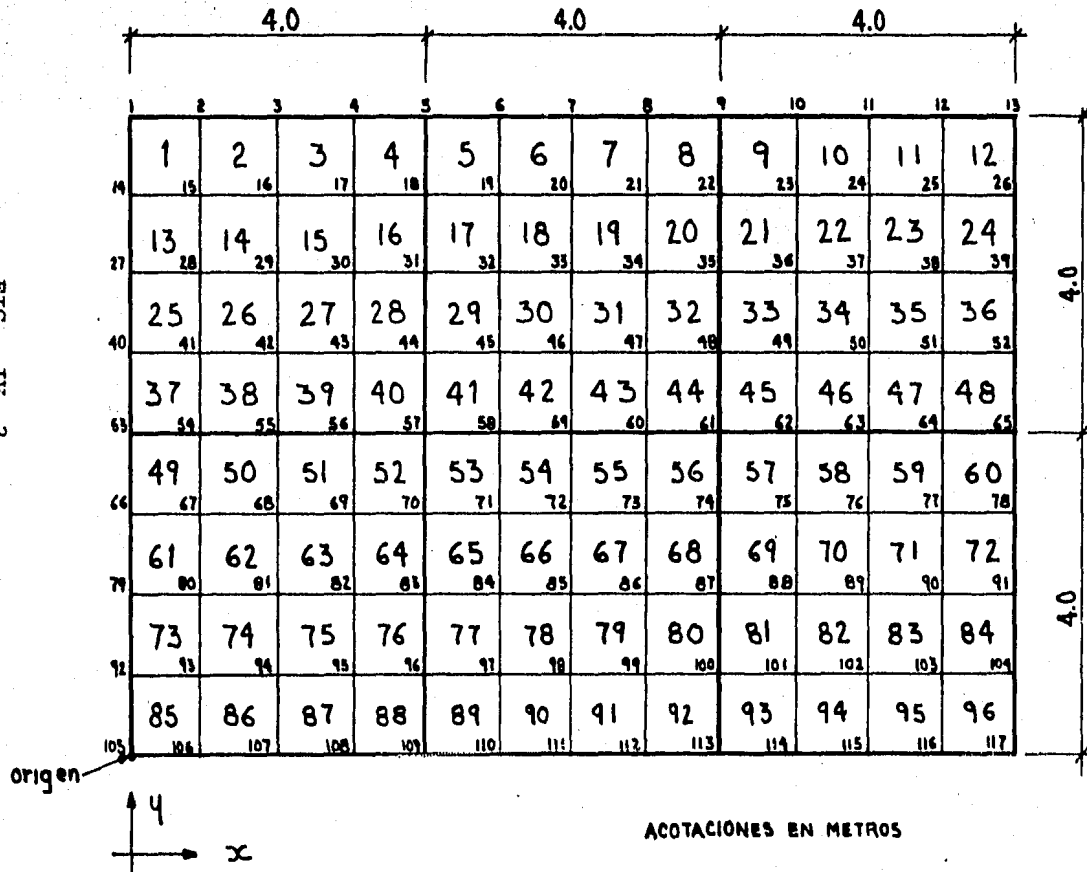
directamente el momento de torsión para cada nodo de los elementos finitos, que por medio de las funciones de forma o interpolación - se podría calcular para cualquier punto dentro del elemento finito.

E J E M P L O 3

Se necesita analizar una losa de concreto de 12 x 8 metros, que se encuentra apoyada sobre muros de carga formando tableros de 4 x 4, la cual deberá soportar una carga uniformemente distribuida de - - 300 Kg/m², además de su peso propio de 2400 Kg/m³ (concreto armado).

Se considera un módulo de elasticidad de $E = 1.5 \times 10^7$ Kg/cm² y un módulo de Poisson $\nu = 0.20$

FIG. IV. 2
DISCRETIZACION DE PLACA.



NPH NLLM NMAI NGEOM
 117 96 1 1



NODO GRADOS DE LIBERTAD COORDENADAS NODALES

	W(Z) TIPO	X	Y	Z
1	1	0.0000	8.0000	0.0000
2	1	1.0000	8.0000	0.0000
3	1	2.0000	8.0000	0.0000
4	1	3.0000	8.0000	0.0000
5	1	4.0000	8.0000	0.0000
6	1	5.0000	8.0000	0.0000
7	1	6.0000	8.0000	0.0000
8	1	7.0000	8.0000	0.0000
9	1	8.0000	8.0000	0.0000
10	1	0.0000	8.0000	0.0000
11	1	1.0000	8.0000	0.0000
12	1	2.0000	8.0000	0.0000
13	1	3.0000	8.0000	0.0000
14	1	4.0000	8.0000	0.0000
15	1	5.0000	8.0000	0.0000
16	1	6.0000	8.0000	0.0000
17	1	7.0000	8.0000	0.0000
18	1	8.0000	8.0000	0.0000
19	1	0.0000	8.0000	0.0000
20	1	1.0000	8.0000	0.0000
21	1	2.0000	8.0000	0.0000
22	1	3.0000	8.0000	0.0000
23	1	4.0000	8.0000	0.0000
24	1	5.0000	8.0000	0.0000
25	1	6.0000	8.0000	0.0000
26	1	7.0000	8.0000	0.0000
27	1	8.0000	8.0000	0.0000
28	1	0.0000	8.0000	0.0000
29	1	1.0000	8.0000	0.0000
30	1	2.0000	8.0000	0.0000
31	1	3.0000	8.0000	0.0000
32	1	4.0000	8.0000	0.0000
33	1	5.0000	8.0000	0.0000
34	1	6.0000	8.0000	0.0000
35	1	7.0000	8.0000	0.0000
36	1	8.0000	8.0000	0.0000
37	1	0.0000	8.0000	0.0000
38	1	1.0000	8.0000	0.0000
39	1	2.0000	8.0000	0.0000
40	1	3.0000	8.0000	0.0000
41	1	4.0000	8.0000	0.0000
42	1	5.0000	8.0000	0.0000
43	1	6.0000	8.0000	0.0000
44	1	7.0000	8.0000	0.0000
45	1	8.0000	8.0000	0.0000
46	1	0.0000	8.0000	0.0000
47	1	1.0000	8.0000	0.0000
48	1	2.0000	8.0000	0.0000
49	1	3.0000	8.0000	0.0000
50	1	4.0000	8.0000	0.0000
51	1	5.0000	8.0000	0.0000
52	1	6.0000	8.0000	0.0000
53	1	7.0000	8.0000	0.0000
54	1	8.0000	8.0000	0.0000
55	1	0.0000	8.0000	0.0000
56	1	1.0000	8.0000	0.0000
57	1	2.0000	8.0000	0.0000
58	1	3.0000	8.0000	0.0000
59	1	4.0000	8.0000	0.0000
60	1	5.0000	8.0000	0.0000
61	1	6.0000	8.0000	0.0000
62	1	7.0000	8.0000	0.0000
63	1	8.0000	8.0000	0.0000
64	1	0.0000	8.0000	0.0000
65	1	1.0000	8.0000	0.0000
66	1	2.0000	8.0000	0.0000
67	1	3.0000	8.0000	0.0000
68	1	4.0000	8.0000	0.0000
69	1	5.0000	8.0000	0.0000
70	1	6.0000	8.0000	0.0000
71	1	7.0000	8.0000	0.0000
72	1	8.0000	8.0000	0.0000
73	1	0.0000	8.0000	0.0000
74	1	1.0000	8.0000	0.0000
75	1	2.0000	8.0000	0.0000
76	1	3.0000	8.0000	0.0000
77	1	4.0000	8.0000	0.0000
78	1	5.0000	8.0000	0.0000
79	1	6.0000	8.0000	0.0000
80	1	7.0000	8.0000	0.0000
81	1	8.0000	8.0000	0.0000
82	1	0.0000	8.0000	0.0000
83	1	1.0000	8.0000	0.0000
84	1	2.0000	8.0000	0.0000
85	1	3.0000	8.0000	0.0000
86	1	4.0000	8.0000	0.0000
87	1	5.0000	8.0000	0.0000
88	1	6.0000	8.0000	0.0000
89	1	7.0000	8.0000	0.0000
90	1	8.0000	8.0000	0.0000
91	1	0.0000	8.0000	0.0000
92	1	1.0000	8.0000	0.0000
93	1	2.0000	8.0000	0.0000
94	1	3.0000	8.0000	0.0000
95	1	4.0000	8.0000	0.0000
96	1	5.0000	8.0000	0.0000
97	1	6.0000	8.0000	0.0000
98	1	7.0000	8.0000	0.0000
99	1	8.0000	8.0000	0.0000
100	1	0.0000	8.0000	0.0000



54	1	0	3	4	0.000	0.0000
55	1	0	4	4	0.000	0.0000
56	1	0	5	4	0.000	0.0000
57	1	0	6	4	0.000	0.0000
58	1	0	7	4	0.000	0.0000
59	1	0	8	4	0.000	0.0000
60	1	0	9	4	0.000	0.0000
61	1	0	10	4	0.000	0.0000
62	1	0	11	4	0.000	0.0000
63	1	0	12	4	0.000	0.0000
64	1	0	13	4	0.000	0.0000
65	1	0	14	4	0.000	0.0000
66	1	0	15	4	0.000	0.0000
67	1	0	16	4	0.000	0.0000
68	1	0	17	4	0.000	0.0000
69	1	0	18	4	0.000	0.0000
70	1	0	19	4	0.000	0.0000
71	1	0	20	4	0.000	0.0000
72	1	0	21	4	0.000	0.0000
73	1	0	22	4	0.000	0.0000
74	1	0	23	4	0.000	0.0000
75	1	0	24	4	0.000	0.0000
76	1	0	25	4	0.000	0.0000
77	1	0	26	4	0.000	0.0000
78	1	0	27	4	0.000	0.0000
79	1	0	28	4	0.000	0.0000
80	1	0	29	4	0.000	0.0000
81	1	0	30	4	0.000	0.0000
82	1	0	31	4	0.000	0.0000
83	1	0	32	4	0.000	0.0000
84	1	0	33	4	0.000	0.0000
85	1	0	34	4	0.000	0.0000
86	1	0	35	4	0.000	0.0000
87	1	0	36	4	0.000	0.0000
88	1	0	37	4	0.000	0.0000
89	1	0	38	4	0.000	0.0000
90	1	0	39	4	0.000	0.0000
91	1	0	40	4	0.000	0.0000
92	1	0	41	4	0.000	0.0000
93	1	0	42	4	0.000	0.0000
94	1	0	43	4	0.000	0.0000
95	1	0	44	4	0.000	0.0000
96	1	0	45	4	0.000	0.0000
97	1	0	46	4	0.000	0.0000
98	1	0	47	4	0.000	0.0000
99	1	0	48	4	0.000	0.0000
100	1	0	49	4	0.000	0.0000
101	1	0	50	4	0.000	0.0000
102	1	0	51	4	0.000	0.0000
103	1	0	52	4	0.000	0.0000
104	1	0	53	4	0.000	0.0000
105	1	0	54	4	0.000	0.0000
106	1	0	55	4	0.000	0.0000
107	1	0	56	4	0.000	0.0000
108	1	0	57	4	0.000	0.0000
109	1	0	58	4	0.000	0.0000
110	1	0	59	4	0.000	0.0000
111	1	0	60	4	0.000	0.0000
112	1	0	61	4	0.000	0.0000
113	1	0	62	4	0.000	0.0000
114	1	0	63	4	0.000	0.0000
115	1	0	64	4	0.000	0.0000
116	1	0	65	4	0.000	0.0000
117	1	0	66	4	0.000	0.0000

MATERIAL MOD. DE ELAST.(C) C. DE POISSON PESO PROPIO CARGA UNIF. DIST.
1 150000000.00 0.20 2400.00 300.00

MATERIAL LSP EGP

1 1.1

ELEMENTO NODO 1 NODO 2 NODO 3 NODO 4 MATERIAL GEOMETRIA

1	14	1	15	2	1	1
2	15	2	16	3	1	1
3	16	3	17	4	1	1
4	17	4	18	5	1	1
5	18	5	19	6	1	1
6	19	6	20	7	1	1
7	20	7	21	8	1	1
8	21	8	22	9	1	1
9	22	9	23	10	1	1
10	23	10	24	11	1	1
11	24	11	25	12	1	1
12	25	12	26	13	1	1
13	26	13	27	14	1	1
14	27	14	28	15	1	1
15	28	15	29	16	1	1
16	29	16	30	17	1	1
17	30	17	31	18	1	1
18	31	18	32	19	1	1
19	32	19	33	20	1	1
20	33	20	34	21	1	1
21	34	21	35	22	1	1
22	35	22	36	23	1	1
23	36	23	37	24	1	1
24	37	24	38	25	1	1
25	38	25	39	26	1	1
26	39	26	40	27	1	1
27	40	27	41	28	1	1
28	41	28	42	29	1	1
29	42	29	43	30	1	1
30	43	30	44	31	1	1
31	44	31	45	32	1	1
32	45	32	46	33	1	1
33	46	33	47	34	1	1
34	47	34	48	35	1	1
35	48	35	49	36	1	1
36	49	36	50	37	1	1
37	50	37	51	38	1	1
38	51	38	52	39	1	1
39	52	39	53	40	1	1
40	53	40	54	41	1	1
41	54	41	55	42	1	1
42	55	42	56	43	1	1
43	56	43	57	44	1	1
44	57	44	58	45	1	1
45	58	45	59	46	1	1
46	59	46	60	47	1	1
47	60	47	61	48	1	1
48	61	48	62	49	1	1
49	62	49	63	50	1	1
50	63	50	64	51	1	1
51	64	51	65	52	1	1
52	65	52	66	53	1	1
53	66	53	67	54	1	1
54	67	54	68	55	1	1
55	68	55	69	56	1	1
56	69	56	70	57	1	1
57	70	57	71	58	1	1
58	71	58	72	59	1	1
59	72	59	73	60	1	1
60	73	60	74	61	1	1
61	74	61	75	62	1	1
62	75	62	76	63	1	1
63	76	63	77	64	1	1
64	77	64	78	65	1	1





61	79	66	81	47	1
62	80	67	81	6R	1
63	81	68	82	69	1
64	82	69	83	70	1
65	83	70	84	71	1
66	84	71	85	72	1
67	85	72	86	73	1
68	86	73	87	74	1
69	87	74	88	75	1
70	88	75	89	76	1
71	89	76	90	77	1
72	90	77	91	78	1
73	91	78	92	79	1
74	92	79	93	80	1
75	93	80	94	R1	1
76	94	81	95	R2	1
77	95	82	96	R3	1
78	96	83	97	R4	1
79	97	84	98	R5	1
80	98	85	99	R6	1
81	99	86	100	R7	1
82	100	87	101	R8	1
83	101	88	102	R9	1
84	102	89	103	00	1
85	103	90	104	01	1
86	104	91	105	02	1
87	105	92	106	03	1
88	106	93	107	04	1
89	107	94	108	05	1
90	108	95	109	06	1
91	109	96	110	07	1
92	110	97	111	08	1
93	111	98	112	09	1
94	112	99	113	10G	1
95	113	100	114	101	1
96	114	101	115	102	1
	115	102	116	103	1
	116	103	117	104	1

VECTOR DE CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

NODO	W(Z)	GIRO(X)	GIRO(Y)
1	0.	.1372844E-07	.1358703E-03
2	0.	.2948026E-02	.2818701E-05
3	0.	.5248091E-03	.5093233E-05
4	0.	.1561835E-02	.1487641E-03
5	0.	.3095435E-03	.2939166E-03
6	0.	.8435984E-03	.8049588E-02
7	0.	.9987701E-03	.9525111E-03
8	0.	.8391125E-03	.7998314E-04
9	0.	.1350389E-03	.1281027E-04
10	0.	.1390582E-02	.1306415E-03
11	0.	.2448827E-02	.2356188E-05
12	0.	.1762825E-03	.1692787E-05
13	0.	.4853420E-03	.4662899E-05
14	0.	.1114870E-02	.1073621E-02
15	.1687807E-02	.1390209E-02	.1334115E-03
16	.2116233E-02	.8147559E-03	.7743877E-02
17	.1244092E-02	.4071501E-03	.3928555E-03
18	0.	.1345549E-02	.1277811E-03
19	.5586831E-04	.2984136E-03	.2872822E-03
20	.4305694E-05	.3501966E-05	.3412233E-03
21	.6905859E-05	.6966973E-05	.6743406E-03
22	0.	.7166973E-05	.6919733E-03
23	0.	.1137714E-02	.1084366E-03
24	.2113338E-02	.1353432E-02	.1281366E-03

25	.1640124E-02	-1	1094644E-02
26		-1	1094644E-02
27		-1	1094644E-02
28		-1	1094644E-02
29		-1	1094644E-02
30		-1	1094644E-02
31		-1	1094644E-02
32		-1	1094644E-02
33		-1	1094644E-02
34		-1	1094644E-02
35		-1	1094644E-02
36		-1	1094644E-02
37		-1	1094644E-02
38		-1	1094644E-02
39		-1	1094644E-02
40		-1	1094644E-02
41		-1	1094644E-02
42		-1	1094644E-02
43		-1	1094644E-02
44		-1	1094644E-02
45		-1	1094644E-02
46		-1	1094644E-02
47		-1	1094644E-02
48		-1	1094644E-02
49		-1	1094644E-02
50		-1	1094644E-02
51		-1	1094644E-02
52		-1	1094644E-02
53		-1	1094644E-02
54		-1	1094644E-02
55		-1	1094644E-02
56		-1	1094644E-02
57		-1	1094644E-02
58		-1	1094644E-02
59		-1	1094644E-02
60		-1	1094644E-02
61		-1	1094644E-02
62		-1	1094644E-02
63		-1	1094644E-02
64		-1	1094644E-02
65		-1	1094644E-02
66		-1	1094644E-02
67		-1	1094644E-02
68		-1	1094644E-02
69		-1	1094644E-02
70		-1	1094644E-02
71		-1	1094644E-02
72		-1	1094644E-02
73		-1	1094644E-02
74		-1	1094644E-02
75		-1	1094644E-02
76		-1	1094644E-02
77		-1	1094644E-02
78		-1	1094644E-02
79		-1	1094644E-02
80		-1	1094644E-02
81		-1	1094644E-02
82		-1	1094644E-02
83		-1	1094644E-02
84		-1	1094644E-02
85		-1	1094644E-02
86		-1	1094644E-02
87		-1	1094644E-02
88		-1	1094644E-02
89		-1	1094644E-02
90		-1	1094644E-02
91		-1	1094644E-02
92		-1	1094644E-02
93		-1	1094644E-02
94		-1	1094644E-02
95		-1	1094644E-02
96		-1	1094644E-02
97		-1	1094644E-02
98		-1	1094644E-02
99		-1	1094644E-02
100		-1	1094644E-02





93	.1544705E-02	-.1383405E-02	-.11090226E-02
94	.2027640E-02	-.1346666E-02	-.3261079E-03
95	.1158255E-02	-.1765519E-02	-.4349097E-03
96		-.1878367E-04	-.1235284E-03
97	.8452188E-03	-.5293837E-04	-.4756403E-03
98	.1448528E-02	-.6217483E-03	-.5657503E-06
99	.8449384E-03	-.5281411E-03	-.1075302E-02
100		-.1379540E-04	-.1247335E-03
101	.1108828E-02	-.7138943E-03	-.1366101E-02
102	.2028748E-02	-.1381883E-02	-.3261079E-03
103	.1648341E-02	-.1381883E-02	-.1093565E-05
104		-.4280227E-03	-.9824410E-02
105		-.1346772E-03	-.1358526E-03
106		-.1284094E-02	-.4463957E-05
107		-.2433742E-02	-.2094088E-05
108		-.1383879E-02	-.9483422E-04
109		-.1353218E-02	-.1367799E-05
110		-.1713038E-02	-.9339232E-04
111		-.1711173E-02	-.2985313E-07
112		-.1081154E-02	-.0345394E-04
113		-.1523172E-03	-.1826111E-05
114		-.1355725E-02	-.0493064E-04
115		-.2438489E-02	-.2979538E-05
116		-.1927682E-02	-.4410755E-05
117		-.1366430E-03	-.1359351E-03

ELEMENTO	MX(1) MY(3)	MY(1) MY(3)	MY(1) MY(4)	MY(2) MY(4)	MY(2) MY(4)	MY(2)	MY(3)
1	.2418535E+02 .2477759E+03	-.2745722E+02 -.5977498E+02	-.1372736E+03 -.2607046E+02	.8333981E+02 .2493376E+02	.8429676E+02 -.1407478E+03	-.2192465E+03	.2412974E+03
2	.2027391E+03 .2988711E+03	.3400643E+03 .4402971E+02	-.1038810E+03 .4347558E+01	.5280760E+01 .3394751E+02	.3120900E+02 .2079902E+02	-.1271117E+03	.2326308E+03
3	.2425770E+03 .1615773E+03	.3008604E+03 .0920039E+02	-.5082021E+00 .4506508E+02	-.1737305E+02 .6286350E+02	.2960339E+02 .1398892E+03	.4018062E+02	.1183498E+03
4	.1301824E+03 .7541624E+02	.1639428E+03 .8706733E+02	.1258360E+03 -.7205337E+02	.9448977E+01 .3857355E+02	.5175227E+02 .9154915E+02	.1294178E+03	-.2538648E+03
5	-.2250930E+02 -.6322828E+03	.1216873E+03 .1877240E+03	.2104686E+02 -.5715487E+03	.3232595E+03 -.1278164E+03	.1176361E+03 .2969543E+03	.1302772E+03	-.1925212E+03
6	-.4956963E+03 -.8825869E+03	-.6929175E+03 .6413782E+02	.3070674E+03 .6239859E+03	-.9416732E+03 .4866912E+02	-.2018413E+03 -.1678752E+02	.2261421E+03	.1950581E+03
7	-.1181945E+03 .1712903E+03	-.9399624E+03 .3339892E+03	.3149588E+03 -.2190448E+03	.4336398E+03 -.5201796E+02	.1059990E+02 -.1307963E+03	-.1498247E+03	.2166366E+03
8	.9470173E+02 -.6570133E+02	.1469033E+03 -.4314242E+02	.1600132E+02 .3671947E+02	-.1656295E+02 .7660442E+02	-.1152159E+02 -.2486408E+02	.3427966E+02	-.1422939E+03

9	- .4345383E+03 .1629244 +03	- .1241502E+03 - .2784904E+02	.1751957E+02 - .2795364E+02	.2504892E+01 .3114305E+02	-.6976150E+02 - .1457175E+03	-.4034893E+02 - .1437788E+03
10	.1056110E+03 .2847009E+03	.1552908E+03 - .6025831E+01	-.1026702E+03 - .1744296E+02	-.6170901E+02 .3266459E+02	.4907558E+02 - .4831808E+02	-.1449624E+03 .2422518E+03
11	.2314809E+03 .2416007E+03	.2825468E+03 .1024044E+03	-.4643602E+02 .4904456E+01	.6077609E+01 .3027164E+02	.3736871E+02 - .1220361E+03	-.2680426E+02 .2280196E+03
12	.2420964E+03 - .2730614E+02	.2444161E+03 .1345560E+03	.5645797E+02 .8362049E+02	-.2677074E+02 .8404245E+02	.2393650E+02 .2137553E+03	.1356573E+03 .2401480E+02
13	.3714110E+02 .2366537E+03	.7445067E+01 .4915875E+02	.3052069E+02 .2387477E+03	.3059488E+02 .2350275E+03	.4590442E+01 - .1049569E+03	-.1235950E+03 .2778290E+03
14	.2686026E+03 .2928804E+03	.2348084E+03 .3385385E+02	-.5212582E+01 .2292420E+03	.2251894E+03 .2819272E+03	.2323158E+03 - .9536970E+01	-.4860340E+02 .2822773E+03
15	.2864564E+03 .1266951E+03	.2937162E+03 - .7659621E+01	-.3381482E+02 .1269804E+03	.2391882E+03 .2047302E+03	.2839165E+03 .7244123E+02	.4628603E+02 .1288376E+03
16	.1644238E+03 - .3298528E+02	.1338124E+03 - .9164705E+02	-.2315259E+02 - .3185310E+03	.1388130E+03 - .2479148E+03	.2070967E+03 .7560951E+02	.1441040E+03 - .4801994E+03
17	-.5186022E+03 .2016634E+02	-.4066584E+02 .2769976E+02	.4676905E+02 - .2014825E+03	-.1556748E+03 .1232281E+03	-.2153436E+03 - .1608803E+03	-.1417810E+03 .1661091E+03
18	.3962422E+02 .2083832E+03	.1757664E+03 .1215670E+03	.4090464E+01 - .5980338E+02	.2082428E+03 .5816254E+03	.2051732E+03 - .4926604E+02	-.1662426E+03 .3090241E+03
19	.2642691E+03 .1818003E+03	.1994322E+03 .1044983E+02	-.2018238E+02 .1806656E+03	.2134275E+03 - .8564348E+01	.6362726E+03 .2745631E+03	.2439309E+03 .1540462E+03
20	.1565950E+03 - .1097974E+03	.1823100E+03 - .3418767E+02	.6031976E+02 - .5371159E+03	.3964556E+03 - .9956971E+02	.3459364E+02 .1119668E+02	.1057041E+03 - .4965754E+03
21	-.5282651E+03 .1450703E+03	-.1161354E+03 .1782675E+02	.5500376E+02 .1422978E+03	-.4251433E+03 .1555151E+03	-.7717520E+02 - .8446174E+02	-.4728473E+02 .1463129E+03
22	.1180326E+03	.1394143E+03	.1060689E+02	.1041292E+03	.1478816E+03	-.7220165E+02 .2815866E+03



	.2811846E+03	.3378812E+02	.2406865E+03	.2768746E+03	-.5402036E+02		
23	.2770900E+03	.2802847E+03	-.3028481E+02	.2299156E+03	.2747204E+03	.8879043E+01	.2691244E+03
	.2311588E+03	.6904629E+01	.2251613E+03	.2273091E+03	.4606848E+02		
24	.2779492E+03	.2329238E+03	-.4828944E+02	.2392381E+03	.2301244E+03	.1022539E+03	.3707618E+02
	.7128580E+01	-.2982060E+02	.3041113E+02	.4675476E+01	.1207228E+03		
25	.5119815E+02	.6604597E+02	.1498750E+03	.3210515E+02	-.1773472E+02	.5140438E+02	.1434275E+03
	.9829505E+02	.1068780E+03	.2801795E+03	.2484065E+03	.8407365E+01		
26	.1414538E+03	.9790030E+02	.8138934E+02	.2709532E+03	.2465612E+03	.5719300E+02	.1327294E+03
	.1106986E+03	-.7310149E+01	.2821677E+03	.2923322E+03	-.3150649E+02		
27	.1362455E+03	.1114018E+03	-.4371345E+02	.2863467E+03	.2931690E+03	.1863079E+02	.7325505E+02
	.5894050E+02	-.1086216E+03	.1340893E+03	.1529535E+03	-.4627740E+02		
28	.8228552E+02	.6074659E+02	-.1043847E+03	.1696754E+03	.1690708E+03	-.4918403E+02	-.2930077E+03
	-.3881410E+02	-.4987127E+02	-.4891366E+03	-.7767134E+02	.5329445E+01		
29	-.2782975E+03	-.3787205E+02	.3814242E+01	-.5275394E+03	-.8535189E+02	-.7231364E+02	.7565132E+02
	.7776274E+02	.7629269E+02	.1640625E+03	.1908304E+03	.1648070E+00		
30	.8182700E+02	.7899787E+02	.5957348E+02	.3757762E+02	.1655334E+03	.2452008E+02	.1377951E+03
	.1132370E+03	.2190544E+02	.3241329E+03	.2839271E+03	-.1324796E+02		
31	.1514287E+03	.1159637E+03	-.1673058E+02	.2793779E+03	.2749761E+03	.4410338E+02	.7409148E+02
	.7621109E+02	-.8130717E+02	.1428780E+03	.1259589E+03	-.2047321E+02		
32	.8844175E+02	.7918194E+02	-.8243312E+02	.1454267E+03	.1264697E+03	-.2389956E+02	-.2757772E+03
	-.3167378E+02	-.1673918E+02	-.4954718E+03	-.1042796E+03	.4179439E+02		
33	-.2701896E+03	-.3055627E+02	.3183363E+02	-.5271615E+03	-.1106175E+03	-.2920819E+02	.6959752E+02
	.6223242E+02	.1071719E+03	.1464538E+03	.1457747E+03	.4613008E+02		
34	.4369905E+02	.6105273E+02	.1088543E+03	.1181734E+03	.1401186E+03	.4696544E+02	.1341329E+03
	.1100513E+03	.4556750E+02	.2826780E+03	.2866410E+03	-.1632138E+02		
35	.1302025E+03	.1092652E+03	.1028585E+02	.2781814E+03	.2957417E+03	.3382523E+02	.1414693E+03
	.9742042E+02	-.7871121E+02	.2712938E+03	.2419557E+03	-.5517173E+02		



36	.1433193E+03 .5936441E+02	.9790022E+02 -.1471476E+03	-.1038064E+03 .7222315E+02	.2801096E+03 -.1713655E+02	.2437207E+03 -.5J78327E+02	-.7442157E+01 .	.5111093E+02
37	.7106520E+02 -.4859804E+03	.3945978E+02 -.3603564E+02	.1593330E+02 .1527860E+03	.3033186E+02 .1450772E+03	-.4428546E+02 .9805680E+02	.1500257E+03 .	-.1221173E+03
38	-.1041781E+03 -.5673116E+03	-.4822926E+03 -.4671956E+02	.5246154E+02 .1391909E+03	.1508122E+03 .1390060E+03	.1446925E+03 -.1015538E+02	.8902572E+02 .	-.1113140E+03
39	-.1254270E+03 -.2989991E+03	-.5701462E+03 -.2701953E+02	.3998690E+02 .7457483E+02	.1417070E+03 .5553939E+02	.1387093E+03 -.1093256E+03	-.4142919E+02 .	-.3346139E+02
40	-.8955948E+02 .2059241E+02	-.3102187E+03 .6377220E+02	-.1598003E+02 -.2942902E+03	.3360530E+02 -.9522660E+02	.6734549E+02 -.2886115E+02	-.1086134E+03 .	.1793087E+02
41	.1733075E+02 -.2546092E+03	.2047239E+02 .1664718E+02	-.6555239E+02 .7827060E+02	-.2895800E+03 .9085913E+02	-.9428455E+02 .7663269E+02	-.5566884E+01 .	-.7738343E+02
42	-.2239750E+02 -.4313973E+03	-.2430120E+03 -.3979739E+02	.2997475E+02 .1445047E+03	.8444628E+02 .1467850E+03	.9209427E+02 .1454978E+02	.8432193E+02 .	-.9876238E+02
43	-.1910485E+03 -.2424576E+03	-.4318545E+03 -.2889225E+02	.4346043E+02 .7531579E+02	.1581383E+03 .8233354E+02	.1495117E+03 -.7099584E+02	-.7643152E+01 .	-.2037532E+02
44	-.7906888E+02 .1767386E+02	-.2541963E+03 .6335889E+02	-.1310422E+02 -.2864779E+03	.3966566E+02 -.8517764E+02	.8520352E+02 -.2155823E+01	-.7861094E+02 .	.1843922E+02
45	.1592433E+02 -.3933153E+03	.1717088E+02 .1497603E+02	-.6538142E+02 .7089558E+02	-.2808904E+03 .6872272E+02	-.8406013E+02 .1055723E+03	.2521490E+02 .	-.8722266E+02
46	-.3230012E+02 -.5629955E+03	-.2923308E+03 -.3777831E+02	.2436676E+02 .1395856E+03	.6499711E+02 .1373144E+03	.6754303E+02 .4447606E+02	.1066211E+03 .	-.1243021E+03
47	-.1094345E+03 -.4789865E+03	-.5610223E+03 -.5073010E+02	.4746182E+02 .1507486E+03	.1356552E+03 .1438270E+03	.1365284E+03 -.8579973E+02	.1239220E+02 .	-.1036932E+03
48	-.1210070E+03 .3910327E+02	-.4825493E+03 -.1400340E+02	.3795407E+02 .3049796E+02	.1525976E+03 -.4370027E+02	.1441958E+03 -.1471991E+03	-.9520842E+02 .	.7103901E+02
49	.3052040E+02 .	-.4396670E+02 .	-.1468538E+03 .	.7099592E+02 .	.3911374E+02 .	-.1198202E+02 .	.1516474E+03



	.1428964E+03	-.9513315E+02	-.1220878E+03	-.4857327E+03	.3973854E+02		
50	.1498749E+03 .1351266E+03	.1425419 +02 .1194346E+02	-.8556325 +02 -.1112350E+03	-.1041485E+03 -.5669167E+03	-.4821449E+03 .6343796E+02	-.4900875E+02	.1339597E+02
51	.1378376E+03 .6765669E+02	.1359122E+03 .1058674E+03	.4490661E+02 -.3343369E+02	-.1254080E+03 -.2988606E+03	-.5697513E+03 .2294837E+02	-.3801244E+02	.6406076E+02
52	.7032318E+02 -.8239152E+02	.6890918E+02 .2627770E+02	.1055405E+03 .1744591E+02	-.8953178E+02 .1816764E+02	-.3100802E+03 -.6747510E+02	.1178758E+02	-.2769534E+03
53	-.2770703E+03 .7370918E+02	-.8241490E+02 -.8025149E+02	-.5017573E+01 -.7692596E+02	.1684580E+02 -.2517219E+03	.1804762E+02 -.1083795E+02	.6439496E+02	.8142488E+02
54	.7436441E+02 .1320247E+03	.7229709E+02 -.1176869E+02	-.8055908E+02 -.9879410E+02	-.2194002E+02 -.4315558E+03	-.2407247E+03 .4236616E+02	-.2642423E+02	.1453189E+03
55	.1458068E+03 .7194327E+02	.1321223E+03 -.8011489E+02	.1142268E+02 -.2026402E+02	-.1010802E+03 -.2419011E+03	-.4320131E+03 .2666913E+02	-.4202308E+02	.7330620E+02
56	.8127611E+02 -.8206459E+02	.7353725E+02 .4267921E+01	.8027743E+02 .1825763E+02	-.7895758E+02 .1676590E+02	-.2536398E+03 -.6546615E+02	.1054329E+02	-.2787294E+03
57	-.2781816E+03 .6950646E+02	-.3195503E+02 -.1184696E+03	-.2622426E+02 -.8719657E+02	.1574274E+02 -.3031849E+03	-.1626292E+02 -.1491901E+02	.6432636E+02	.7143354E+02
58	.6515812E+02 .1375826E+03	.6225137E+02 -.4447921E+02	-.1065311E+03 -.1243030E+03	-.3227404E+02 -.5629999E+03	-.2922004E+03 .3798251E+02	-.2406871E+02	.1393946E+03
59	.1355139E+03 .1439001E+03	.1368065E+03 .8574248E+02	-.1233492E+02 -.1036916E+03	-.1094374E+03 -.4789784E+03	-.5600268E+03 .5075971E+02	-.4731770E+02	.1506852E+03
60	.1525243E+03 -.4370288E+02	.1442679E+03 .1471435E+03	.9518596E+02 .7104110E+02	-.1215054E+03 .3911431E+02	-.4825412E+03 .1398577E+02	-.3797180E+02	.3050798E+02
61	.3220629E+02 .2434977E+03	-.1730711E+02 -.7708323E+01	-.5106154E+02 .1423603E+03	.5121970E+02 .9646071E+02	.5963158E+02 -.1035245E+03	-.1468777E+03	.2794411E+03
62	.2706523E+03 .2852440E+03	.2417399E+03 .3322237E+02	-.5529302E+02 .1288140E+03	.1405877E+03 .1078981E+03	.9610619E+02 .1029873E+02	-.7881667E+02	.2769223E+03



65	.2814797E+07 .1419092E+03	.2861591E+03 .4771371E+02	-.1567895E+02 .6252786E+02	.1323919E+03 .5927218E+02	.1J86737E+03 .1087367E+03	.4524408E+02	.1176849E+03
64	.1433663E+03 -.1150059E+03	.1470454E+03 -.3025921E+02	.4459207E+02 -.2660969E+03	.6878628E+02 -.2810831E+02	.6122467E+02 .3291889E+02	.1077702E+03	-.5205353E+03
65	-.5211772E+03 .1139035E+03	-.1151343E+03 -.3453551E+02	.3822134E+02 .7959314E+02	-.2662137E+03 .6455048E+02	-.2813169E+02 -.8363597E+02	-.1087913E+02	.1524103E+03
66	.1268199E+03 .2071542E+03	.1037854E+03 .2295712E+02	-.4114817E+02 .1391262E+03	.7253267E+02 .1010616E+03	.6313838E+02 -.1655012E+02	-.8055541E+02	.2687996E+03
67	.2687074E+03 .1087096E+03	.2071358E+03 .4116741E+02	-.2287721E+02 .7146751E+02	.1396142E+03 .6274982E+02	.1011592E+03 .8065012E+02	.1660549E+02	.1264686E+03
68	.1518827E+03 -.1153229E+03	.1177934E+03 -.3793791E+02	.3461876E+02 -.2679932E+03	.7943742E+02 -.2839350E+02	.6434380E+02 .1104719E+02	.8360385E+02	-.5220784E+03
69	-.5215206E+03 .1470882E+03	-.1152113E+03 -.4428451E+02	.3060481E+02 .7001400E+02	-.2674453E+03 .6240876E+02	-.2827394E+02 -.1077568E+03	-.3289751E+02	.1439033E+03
70	.1181922E+03 .2864136E+03	.1419460E+03 .1569975E+02	-.4740227E+02 .1339832E+03	.6373858E+02 .1105256E+03	.6115368E+02 -.4551846E+02	-.1037105E+03	.2825264E+03
71	.2779186E+03 .2419507E+03	.2554920E+03 .8508018E+02	-.3395330E+02 .1413991E+03	.1301025E+03 .9746688E+02	.1097494E+03 .7872946E+02	-.1030402E+02	.2713081E+03
72	.2801015E+03 -.1714034E+02	.2437094E+03 .5072851E+02	.7355500E+01 .5112229E+02	.1432382E+03 .5936870E+02	.9783749E+02 .1471120E+03	.1037390E+03	.3222671E+02
73	.3037300E+02 .2301074E+03	.4582051E+01 .1019407E+03	.1202648E+03 .2772281E+03	.3711071E+02 .2324328E+03	.7214969E+01 -.4846700E+02	-.3014290E+02	.2389995E+03
74	.2249504E+03 .2735943E+03	.2272976E+03 .8946540E+01	.4558162E+02 .2759468E+03	.2694393E+03 .2803666E+03	.2306750E+03 -.3004515E+02	.6588930E+01	.2294841E+03
75	.2397027E+03 .1446652E+03	.2756561E+03 -.7616538E+02	-.5351207E+02 .1168436E+03	.2805222E+03 .1377025E+03	.2812817E+03 .1166233E+02	.3431614E+02	.1042594E+03
76	.1495023E+03 -.9755648E+02	.1574488E+03 -.8641780E+02	-.8633015E+02 -.5177475E+03	.1425250E+03 -.1010669E+03	.1428388E+03 .4764677E+02	.1695441E+02	-.4463900E+03



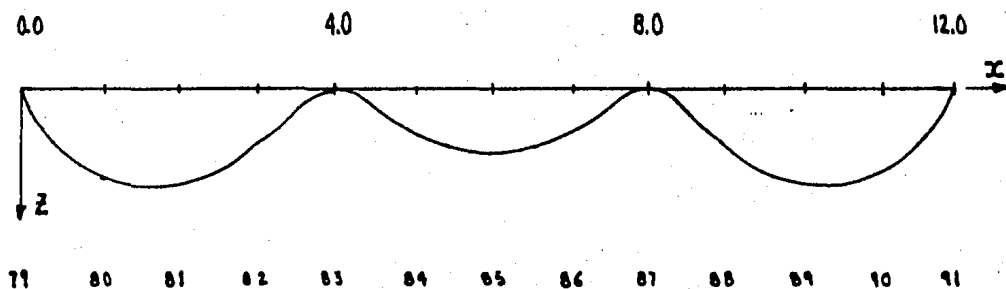
77	-0.4462859E+03	-0.9765566E+02	-0.7766427E+02	-0.5193224E+03	-0.1011953E+03	-0.3842416E+02	-0.1532018E+03
	0.1274754E+03	0.6825320E+02	0.1516946E+03	0.1103250E+03	-0.0727234E+01		
79	0.1090817E+03	0.1186514E+03	0.454944E+02	0.1261042E+03	0.1352059E+03	-0.1930635E+01	-0.2253364E+03
	0.2089017E+03	0.2701102E+02	0.2675131E+03	0.2022216E+03	-0.2944905E+02		
79	0.2253650E+03	0.2089017E+03	-0.2821817E+02	0.2677209E+03	0.2022031E+03	0.2832066E+02	0.1088224E+03
	0.1186094E+03	-0.5460271E+02	0.1257477E+03	0.1051043E+03	0.1936115E+01		
80	0.1529741E+03	0.1274397E+03	-0.6641645E+02	0.1511678E+03	0.1101888E+03	0.9680461E+01	-0.6672895E+03
	-0.9772203E+02	-0.3740608E+02	-0.092995E+03	-0.1014282E+03	0.5369033E+02		
81	-0.4467777E+03	-0.9761966E+02	0.5584992E+02	-0.5197417E+03	-0.1013166E+03	-0.4739139E+02	-0.1486651E+03
	0.1573905E+03	0.8665229E+02	0.1430660E+03	0.1429019E+03	-0.1658992E+02		
82	0.1044223E+03	0.1485423E+03	0.7452976E+02	0.1173550E+03	0.1377597E+03	-0.1134707E+02	0.2602575E+03
	0.2756235E+03	0.5202969E+02	0.2015620E+03	0.2315912E+03	-0.3434713E+02		
83	0.2299326E+03	0.2735587E+03	-0.8918245E+01	0.2769542E+03	0.2804697E+03	0.3002443E+02	0.2252798E+03
	0.2273829E+03	-0.4597389E+02	0.2691147E+03	0.2309335E+03	-0.6931125E+01		
84	0.2393868E+03	0.2500954E+03	-0.1022571E+03	0.2779081E+03	0.2327422E+03	0.4819959E+02	0.3036802E+02
	0.6631121E+01	-0.1206359E+03	0.7708514E+02	0.7151825E+01	0.2976079E+02		
85	0.8381153E+02	0.9400752E+02	0.2132719E+03	0.2400094E+02	-0.2726225E+02	0.1341263E+03	-0.2693477E+02
	0.2598205E+02	0.1352059E+03	0.2418111E+03	0.2441652E+03	0.5606290E+02		
86	0.4573275E+01	0.3028364E+02	0.1214348E+03	0.2277619E+03	0.2413554E+03	0.1020194E+03	0.7027085E+01
	0.3704071E+02	-0.2694971E+02	0.2312416E+03	0.2823320E+03	-0.4436411E+02		
87	-0.1571297E+01	0.3249269E+02	-0.6892970E+02	0.2415502E+03	0.2844438E+03	-0.5228423E+01	0.5672986E+02
	0.0000000E+00	-0.1459388E+03	0.1146955E+03	0.1507854E+03	-0.1030379E+03		
88	-0.4074967E+02	0.3080245E+02	-0.1470692E+03	0.1489383E+03	0.1596342E+03	-0.9257545E+02	0.3663385E+02
	0.2290598E+02	-0.1007104E+02	-0.4496544E+03	-0.1139783E+03	0.2646276E+02		
89	0.2300397E+02	0.6960998E+02	-0.2345180E+01	-0.4501503E+03	-0.1139775E+03	-0.4410255E+02	-0.4102127E+02
	0.3074913E+02	0.1129744E+03	0.1537207E+03	0.1300702E+03	0.7121792E+02		
90	0.6764700E+01	0.5261718E+02	0.1112619E+03	0.1026006E+03	0.1212462E+03	0.8246317E+02	-0.1709188E+02



	.312096E+02	.3948327E+1	.2271993E+03	.2131661E+03	-.1985026E+02		
91	-.1713765E+02	.3120045E+02	-.9058901E+01	.2272179E+03	.2181719E+03	.1973592E+02	.5678847E+02
	.5027205E+02	-.1112738E+03	.1093411E+03	.1212025E+03	-.8248398E+02		
92	-.4104206E+02	.3070594E+02	-.1129946E+03	.1534928E+03	.1300329E+03	-.7123607E+02	.3819595E+02
	.6959915E+02	.2563660E+01	-.4505536E+03	-.1140424E+03	.4432717E+02		
93	.3668151E+02	.6929626E+02	.2824398E+02	-.4500418E+03	-.1139401E+03	-.2620587E+02	-.4085410E+02
	.3079596E+02	.1473588E+03	.1490990E+03	.1595539E+03	.9290893E+02		
94	.5679010E+02	.5032590E+02	.1462376E+03	.1048561E+03	.1507113E+03	.1033445E+03	-.1574711E+02
	.3249017E+02	.4816814E+02	.2420158E+03	.2844150E+03	.5275013E+01		
95	.7021708E+01	.3704394E+02	.2699844E+02	.2316919E+03	.2823502E+03	.4638864E+02	.4597307E+01
	.3028900E+02	-.1217067E+03	.2280959E+03	.2413666E+03	-.1023165E+03		
96	-.2698384E+02	.2397277E+02	-.1354837E+03	.2421548E+03	.2441763E+03	-.5635720E+02	.8366599E+02
	.8400564E+02	-.2136816E+03	.2398913E+02	-.2726331E+02	-.1345551E+03		



Graficaremos el desplazamiento vertical de la placa a lo largo del eje X (Fig. IV.2) para cuando $Y = 2.0$ y $Y = 6.0$ que por simetría y observando los resultados son iguales (Ver gráfica IV.3



CURVA ELASTICA DE LA PLACA
 ($Y = 2.0$ ó $Y = 6.0$)
 GRAFICA IV.3

En la gráfica IV.4 se encuentran graficados los momentos M_x , para la curva elástica anterior ($Y = 2.0$ ó $Y = 6.0$)

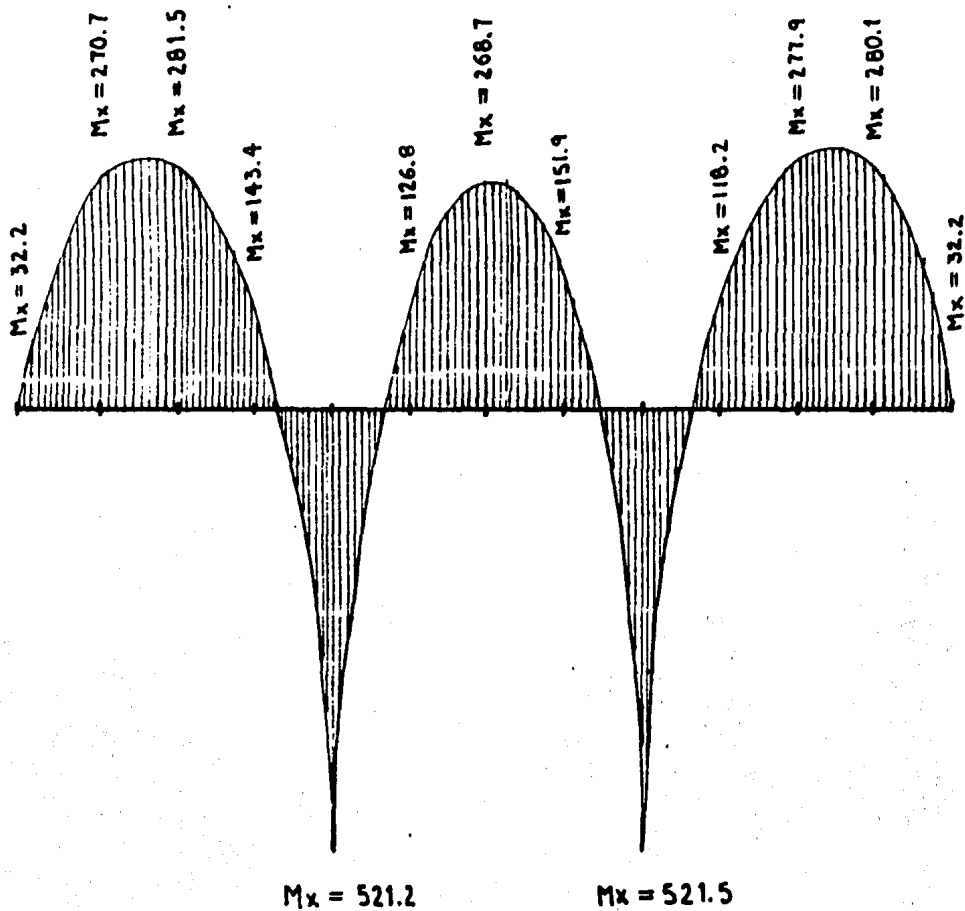


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES

GRAFICA IV.4

De esta misma forma podriamos graficar deformaciones y momentos para cualquier punto de la placa, datos con los cuales podemos diseñar, por ejemplo en nuestro caso, el acero de refuerzo necesario para nuestra losa.

ANEXO " A "

LISTADO DEL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS.

Se incluye en este anexo el listado completo en Fortran del programa usado para resolver los ejemplos del Capítulo IV.


```
IC(12)=ID(14,3)
WRITE(1) RIF,IC
007:009:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 007:009
WRITE(2) R6,IC
007:004:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 007:004
WRITE(3) R5F,IC
007:00F:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 007:00F
CALL RAND4(IC,12,MR)
500 CONTINUE
010 FORMAT(7/5X,"LIEBANTON",2X,"N000 1",2X,"N000 2",2X,"N000 3",2X,
* "N000 4",2X,"MATERIAL",2X,"GEOMETRIAN",/)
1000 FORMAT(7F5)
1001 FORMAT(6X,14,5X,15,3X,15,3X,15,3X,15,5X,13,6X,13)
RETURN
END
```

```
C 007:009:1
C 007:009:5
C 007:009:4
C 007:004:4
C 007:00F:4
C 007:00F:5
C 007:00E:3
C 007:00E:3
C 007:00E:3
C 007:00E:3
C 007:00E:3
C 007:00E:3
C 007:00E:0
SEGMENT 007 IS 0110 LONG
```




```

SUBROUTINE FNF(NC,NF,NC)
DIMENSION NF(NC)
DO 300 J=1,NC,5
  JH=J+7
  IF(JH.LE.NC) GO TO 210
  JH=0
210 WRITE(6,200)(I,N=J,JH)
  DO 300 I=1,NF
300 WRITE(6,200)I,(A(I,K),K=J,JH)
RETURN
2000 FORMAT(///4X,8:12)
3001 FORMAT(14,3X,RE12.5)
END

```

```

C START OF SEGMENT 009
C 009:0000:0
C 009:0000:0
C 009:0000:4
C 009:0002:1
C 009:0003:1
C 009:0004:0
C 009:0005:2
C 008:0011:0
C 009:0026:5
C 009:0027:2
C 009:0027:2
C 009:0027:2
SEGMENT 009 IS 0033 LONG

```



```
SUBROUTINE SUMS(A,B,C,N,M)
DIMENSION A(N,M),R(N,M),C(N,M)
DO 100 J=1,M
DO 100 I=1,N
100 C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
RETURN
END
```

```
START OF SEGMENT 00C
C 00C:0000:0
C 00C:0000:0
C 00C:0000:0
C 00C:0000:0
C 00C:0001:2
C 00C:0010:0
C 00C:0010:0
SEGMENT 00C IS 0018 LONG
```



```
SUBROUTINE RANDA(IC,MBL,MR)
DIMENSION IC(NSDL)
DO 200 I=1,NSDL
IT=IC(I)
IF(IT.EQ.1) GO TO 200
DO 100 J=1,NSDL
JJ=IC(J)
IF(JJ.EQ.1) GO TO 100
NDIF=ABS(IC(I)-JJ)
IF(MDIF.GT.MR) MR=NDIF
100 CONTINUE
200 CONTINUE
RETURN
END
```

```
START OF SEGMENT 000
C 000:0000:0
C 000:0000:0
C 000:0000:0
C 000:0000:4
C 000:0002:5
C 000:0003:4
C 000:0004:2
C 000:0006:3
C 000:0007:2
C 000:0009:0
C 000:000A:5
C 000:0009:3
C 000:0010:1
C 000:0010:4
SEGMENT 000 IS 0019 LONG
```




```

SUBROUTINE TOTA(NFC, M1, N0, AA, NEMAX)
DIMENSION AA(1), NEMAX(1)
IF(NFC EQ 1) RETURN
NEMAX=NEMAX
N=NEMAX-1
DO 300 N=1, NE
NEMAX(N)=1
DO 100 I=1, NEMAX(N)
IF(ABS(AA(I, NEMAX(N))) EQ 0) NEMAX(N)=I
CONTINUE
100 IF(AA(N), EQ 0) GO TO 300
IL=NEMAX(N)
IL=NEMAX(N)
IM=NEMAX(N)
L=N
DO 200 I=IL, 1H, NEMAX(N)
L=I+1
IF(AA(I), EQ 0) GO TO 200
CC=AA(I)/AA(N)
J=L-I
DO 150 K=1, IM, NEMAX(N)
150 AA(K+J)=AA(K+J)-CC*AA(K)
AA(I)=CC
200 CONTINUE
300 CONTINUE
RETURN
END

```

```

START OF SEGMENT 011
C 011:0000:0
C 011:0000:0
C 011:0001:1
C 011:0002:4
C 011:0004:0
C 011:0004:4
C 011:0006:4
C 011:0007:3
C 011:000C:1
C 011:000F:0
C 011:0011:3
C 011:0013:0
C 011:0015:1
C 011:0016:0
C 011:0016:5
C 011:001A:1
C 011:001A:4
C 011:001B:4
C 011:0020:1
C 011:0021:0
C 011:002A:0
C 011:002D:1
C 011:0030:0
C 011:0032:4
C 011:0033:1
SEGMENT 011 IS 0039 LONG

```



```

SUBROUTINE SACKI(NEC,NEI,AA,IRMAX,IR)
DIMENSION AA(1),IR(1),IRMAX(1)
IL=NEC
DO 400 K=1,NEC
  CC=IR(K)
  IF(AA(K).NE.0) IR(K)=IR(K)/AA(K)
  IF(N.EQ.NE) GO TO 450
  IL=IL+1
  IR=IRMAX(K)
  K=N
DO 350 I=IL,IH,NEC
  V=V+1
350 IR(K)=IR(K)-AA(I)*CC
400 CONTINUE
450 IL=2*NEC
500 IL=IL-1
  N=N-1
  IF(N.LQ.0) RETURN
  IR=IRMAX(N)
  K=N
DO 600 I=IL,IH,NEC
  V=V+1
600 IR(K)=IR(K)-AA(I)*IR(K)
  GO TO 500
END

```

```

START OF SEGMENT 012
C 012:0000:0
C 012:0000:0
C 012:0000:0
C 012:0001:3
C 012:0003:4
C 012:0004:1
C 012:0005:3
C 012:0006:5
C 012:0007:0
C 012:0007:5
C 012:0010:4
C 012:0012:0
C 012:0016:0
C 012:0018:0
C 012:0019:3
C 012:0020:1
C 012:0021:0
C 012:0023:1
C 012:0024:0
C 012:0024:5
C 012:0026:1
C 012:0026:5
C 012:0027:5
SEGMENT 012 IS 0036 LONG

```



```
SUBROUTINE MULT(A,B,C,M,N,L)
DIMENSION A(N,M),B(M,L),C(N,L)
DO 100 I=1,N
DO 100 J=1,L
C(I,J)=0
DO 100 K=1,M
C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)+B(K,J)
100 RETURN
END
```

```
START OF SEGMENT 013
013:0000:0
013:0001:0
013:0002:4
013:0003:2
013:0004:4
013:0005:2
013:0006:1
013:0007:4
SEGMENT 013 IS 0022 LONG
```



```

SUBROUTINE SIGFL(A, L, A1)
DIMENSION A1(12,12)
P=PI**2/A**2
DO 100 I=1,12
DO 100 J=1,12
100 A1(I,J)=P*A(I,
A1(I,1)=P*A(I,
A1(I,2)=P*A(I,
A1(I,3)=P*A(I,
A1(I,4)=P*A(I,
A1(I,5)=P*A(I,
A1(I,6)=P*A(I,
A1(I,7)=P*A(-A(I,
A1(I,8)=P*A(I,
A1(I,9)=P*A(-3*A(I,
A1(I,10)=P*A(I,
A1(I,11)=P*A(I,
A1(I,12)=P*A(I,
A1(I,1)=P*A(I,
A1(I,2)=P*A(I,
A1(I,3)=P*A(-15.),
A1(I,4)=P*A(I,
A1(I,5)=P*A(I,
A1(I,6)=P*A(-3*A(I,
A1(I,7)=P*A(I,
A1(I,8)=P*A(-A(I,
A1(I,9)=P*A(I,
A1(I,10)=P*A(I,
A1(I,11)=P*A(I,
A1(I,12)=P*A(I,
A1(I,1)=P*A(I,
A1(I,2)=P*A(I,
A1(I,3)=P*A(-15.),
A1(I,4)=P*A(I,
A1(I,5)=P*A(I,
A1(I,6)=P*A(-3*A(I,
A1(I,7)=P*A(I,
A1(I,8)=P*A(I,
A1(I,9)=P*A(-15.),
A1(I,10)=P*A(I,
A1(I,11)=P*A(I,
A1(I,12)=P*A(I,
DO 150 I=1,12
DO 150 J=1,12
150 A1(I,J)=A1(J,I)
RETURN
END

```

```

START OF SEGMENT 014
C 014:0000:J
C 014:0000:J
C 014:0000:0
C 014:0002:J
C 014:0002:4
C 014:0003:5
C 014:0003:5
C 014:0003:4
C 014:0010:J
C 014:0012:2
C 014:0014:4
C 014:0017:1
C 014:0019:3
C 014:0019:0
C 014:0019:2
C 014:0023:4
C 014:0023:J
C 014:0025:2
C 014:0027:5
C 014:0027:1
C 014:0027:6
C 014:0028:2
C 014:0031:3
C 014:0031:4
C 014:0034:4
C 014:0034:1
C 014:0034:3
C 014:0038:0
C 014:0038:2
C 014:0038:4
C 014:0042:1
C 014:0044:3
C 014:0047:0
C 014:0049:2
C 014:0049:4
C 014:0049:1
C 014:0053:3
C 014:0053:J
C 014:0055:2
C 014:0057:5
C 014:0058:1
C 014:0058:3
C 014:0058:0
C 014:0061:2
C 014:0062:0
C 014:0062:4
C 014:0069:2
C 014:0069:2
SEGMENT 014 IS 0075 LONG

```



SUBROUTINE RIGEL2(A,R,A2)
DIMENSION A2(12,12)

100

A2(1,1)=0*40.
A2(2,1)=0*(-30.)
A2(3,1)=0*(-40.)
A2(4,1)=0*(-30.)
A2(5,1)=0*30.
A2(6,1)=0*(-15.)
A2(7,1)=0*(-15.)
A2(8,1)=0*(-15.)
A2(9,1)=0*20.
A2(10,1)=0*30.
A2(11,1)=0*10.
A2(12,1)=0*15.
A2(1,2)=0*15.
A2(2,2)=0*40.
A2(3,2)=0*30.
A2(4,2)=0*15.
A2(5,2)=0*15.
A2(6,2)=0*15.
A2(7,2)=0*15.
A2(8,2)=0*15.
A2(9,2)=0*15.
A2(10,2)=0*15.
A2(11,2)=0*15.
A2(12,2)=0*15.
A2(1,3)=0*15.
A2(2,3)=0*15.
A2(3,3)=0*15.
A2(4,3)=0*15.
A2(5,3)=0*15.
A2(6,3)=0*15.
A2(7,3)=0*15.
A2(8,3)=0*15.
A2(9,3)=0*15.
A2(10,3)=0*15.
A2(11,3)=0*15.
A2(12,3)=0*15.
A2(1,4)=0*15.
A2(2,4)=0*15.
A2(3,4)=0*15.
A2(4,4)=0*15.
A2(5,4)=0*15.
A2(6,4)=0*15.
A2(7,4)=0*15.
A2(8,4)=0*15.
A2(9,4)=0*15.
A2(10,4)=0*15.
A2(11,4)=0*15.
A2(12,4)=0*15.
A2(1,5)=0*15.
A2(2,5)=0*15.
A2(3,5)=0*15.
A2(4,5)=0*15.
A2(5,5)=0*15.
A2(6,5)=0*15.
A2(7,5)=0*15.
A2(8,5)=0*15.
A2(9,5)=0*15.
A2(10,5)=0*15.
A2(11,5)=0*15.
A2(12,5)=0*15.
A2(1,6)=0*15.
A2(2,6)=0*15.
A2(3,6)=0*15.
A2(4,6)=0*15.
A2(5,6)=0*15.
A2(6,6)=0*15.
A2(7,6)=0*15.
A2(8,6)=0*15.
A2(9,6)=0*15.
A2(10,6)=0*15.
A2(11,6)=0*15.
A2(12,6)=0*15.
A2(1,7)=0*15.
A2(2,7)=0*15.
A2(3,7)=0*15.
A2(4,7)=0*15.
A2(5,7)=0*15.
A2(6,7)=0*15.
A2(7,7)=0*15.
A2(8,7)=0*15.
A2(9,7)=0*15.
A2(10,7)=0*15.
A2(11,7)=0*15.
A2(12,7)=0*15.
A2(1,8)=0*15.
A2(2,8)=0*15.
A2(3,8)=0*15.
A2(4,8)=0*15.
A2(5,8)=0*15.
A2(6,8)=0*15.
A2(7,8)=0*15.
A2(8,8)=0*15.
A2(9,8)=0*15.
A2(10,8)=0*15.
A2(11,8)=0*15.
A2(12,8)=0*15.
A2(1,9)=0*15.
A2(2,9)=0*15.
A2(3,9)=0*15.
A2(4,9)=0*15.
A2(5,9)=0*15.
A2(6,9)=0*15.
A2(7,9)=0*15.
A2(8,9)=0*15.
A2(9,9)=0*15.
A2(10,9)=0*15.
A2(11,9)=0*15.
A2(12,9)=0*15.
A2(1,10)=0*15.
A2(2,10)=0*15.
A2(3,10)=0*15.
A2(4,10)=0*15.
A2(5,10)=0*15.
A2(6,10)=0*15.
A2(7,10)=0*15.
A2(8,10)=0*15.
A2(9,10)=0*15.
A2(10,10)=0*15.
A2(11,10)=0*15.
A2(12,10)=0*15.
A2(1,11)=0*15.
A2(2,11)=0*15.
A2(3,11)=0*15.
A2(4,11)=0*15.
A2(5,11)=0*15.
A2(6,11)=0*15.
A2(7,11)=0*15.
A2(8,11)=0*15.
A2(9,11)=0*15.
A2(10,11)=0*15.
A2(11,11)=0*15.
A2(12,11)=0*15.
A2(1,12)=0*15.
A2(2,12)=0*15.
A2(3,12)=0*15.
A2(4,12)=0*15.
A2(5,12)=0*15.
A2(6,12)=0*15.
A2(7,12)=0*15.
A2(8,12)=0*15.
A2(9,12)=0*15.
A2(10,12)=0*15.
A2(11,12)=0*15.
A2(12,12)=0*15.
DO 150 I=1,12
DO 150 J=1,12
A2(I,J)=A2(J,I)
RETURN
END

150

START OF SEGMENT 015

015:J001:0
015:0001:0
015:0002:0
015:0003:2
015:0004:5
015:0005:6
015:0006:4
015:0007:3
015:0008:0
015:0009:0
015:0010:7
015:0011:5
015:0012:2
015:0013:5
015:0014:1
015:0015:3
015:0016:3
015:0017:5
015:0018:6
015:0019:0
015:0020:0
015:0021:2
015:0022:4
015:0023:0
015:0024:0
015:0025:3
015:0026:3
015:0027:3
015:0028:5
015:0029:2
015:0030:4
015:0031:0
015:0032:3
015:0033:3
015:0034:5
015:0035:2
015:0036:6
015:0037:1
015:0038:1
015:0039:3
015:0040:5
015:0041:5
015:0042:5
015:0043:4
015:0044:4
015:0045:2
015:0046:4
015:0047:2
015:0048:2
015:0049:6
015:0050:1
015:0051:4
015:0052:1
015:0053:3
015:0054:5
015:0055:3
015:0056:5
015:0057:5
015:0058:1
015:0059:3
015:0060:1
015:0061:3
015:0062:4
015:0063:1



SEGMENT 015 IS 0075 LONG

```

SUBROUTINE FICLZ(C,AX)
  014  NS7=N-AX(12,12)
  00  1=N-1
  00  1=N-1
  00  1=N-1
  100  A3(1,1)=C
  A3(1,1)=C*30.
  A3(2,1)=C*(-15.)
  A3(3,1)=C*15.
  A3(4,1)=C*(-30.)
  A3(5,1)=C*15.
  A3(6,1)=C*(-15.)
  A3(7,1)=C*30.
  A3(8,1)=C*15.
  A3(9,1)=C*30.
  A3(10,1)=C*30.
  A3(11,1)=C*(-15.)
  A3(12,1)=C*15.
  A3(13,1)=C*(-15.)
  A3(14,1)=C*30.
  A3(15,1)=C*15.
  A3(16,1)=C*30.
  A3(17,1)=C*15.
  A3(18,1)=C*30.
  A3(19,1)=C*15.
  A3(20,1)=C*30.
  A3(21,1)=C*15.
  A3(22,1)=C*30.
  A3(23,1)=C*15.
  A3(24,1)=C*30.
  A3(25,1)=C*15.
  A3(26,1)=C*30.
  A3(27,1)=C*15.
  A3(28,1)=C*30.
  A3(29,1)=C*15.
  A3(30,1)=C*30.
  A3(31,1)=C*15.
  A3(32,1)=C*30.
  A3(33,1)=C*15.
  A3(34,1)=C*30.
  A3(35,1)=C*15.
  A3(36,1)=C*30.
  A3(37,1)=C*15.
  A3(38,1)=C*30.
  A3(39,1)=C*15.
  A3(40,1)=C*30.
  A3(41,1)=C*15.
  A3(42,1)=C*30.
  A3(43,1)=C*15.
  A3(44,1)=C*30.
  A3(45,1)=C*15.
  A3(46,1)=C*30.
  A3(47,1)=C*15.
  A3(48,1)=C*30.
  A3(49,1)=C*15.
  A3(50,1)=C*30.
  A3(51,1)=C*15.
  A3(52,1)=C*30.
  A3(53,1)=C*15.
  A3(54,1)=C*30.
  A3(55,1)=C*15.
  A3(56,1)=C*30.
  A3(57,1)=C*15.
  A3(58,1)=C*30.
  A3(59,1)=C*15.
  A3(60,1)=C*30.
  A3(61,1)=C*15.
  A3(62,1)=C*30.
  A3(63,1)=C*15.
  A3(64,1)=C*30.
  A3(65,1)=C*15.
  A3(66,1)=C*30.
  A3(67,1)=C*15.
  A3(68,1)=C*30.
  A3(69,1)=C*15.
  A3(70,1)=C*30.
  A3(71,1)=C*15.
  A3(72,1)=C*30.
  A3(73,1)=C*15.
  A3(74,1)=C*30.
  A3(75,1)=C*15.
  A3(76,1)=C*30.
  A3(77,1)=C*15.
  A3(78,1)=C*30.
  A3(79,1)=C*15.
  A3(80,1)=C*30.
  A3(81,1)=C*15.
  A3(82,1)=C*30.
  A3(83,1)=C*15.
  A3(84,1)=C*30.
  A3(85,1)=C*15.
  A3(86,1)=C*30.
  A3(87,1)=C*15.
  A3(88,1)=C*30.
  A3(89,1)=C*15.
  A3(90,1)=C*30.
  A3(91,1)=C*15.
  A3(92,1)=C*30.
  A3(93,1)=C*15.
  A3(94,1)=C*30.
  A3(95,1)=C*15.
  A3(96,1)=C*30.
  A3(97,1)=C*15.
  A3(98,1)=C*30.
  A3(99,1)=C*15.
  A3(100,1)=C*30.
  150  A3(1,1)=7/3(1,1)
  RETURN
END

```

```

START OF SEGMENT 016
016:0001:0
016:0002:0
016:0003:0
016:0004:0
016:0005:0
016:0006:0
016:0007:0
016:0008:0
016:0009:0
016:0010:0
016:0011:0
016:0012:0
016:0013:0
016:0014:0
016:0015:0
016:0016:0
016:0017:0
016:0018:0
016:0019:0
016:0020:0
016:0021:0
016:0022:0
016:0023:0
016:0024:0
016:0025:0
016:0026:0
016:0027:0
016:0028:0
016:0029:0
016:0030:0
016:0031:0
016:0032:0
016:0033:0
016:0034:0
016:0035:0
016:0036:0
016:0037:0
016:0038:0
016:0039:0
016:0040:0
016:0041:0
016:0042:0
016:0043:0
016:0044:0
016:0045:0
016:0046:0
016:0047:0
016:0048:0
016:0049:0
016:0050:0
016:0051:0
016:0052:0
016:0053:0
016:0054:0
016:0055:0
016:0056:0
016:0057:0
016:0058:0
016:0059:0
016:0060:0
SEGMENT 016 IS 0064 LONG

```



SUBROUTINE PIGEL4(C,A4)

DIMENSION A4(12,12)

R=(1.-C)/2.

DO 100 I=1,12

DO 100 J=1,12

100

A4(I,J)=C.
A4(1,1)=R*84.
A4(2,1)=R*(-6.)
A4(3,1)=R*6.
A4(4,1)=R*(-84.)
A4(5,1)=R*(-6.)
A4(6,1)=R*(-6.)
A4(7,1)=R*(-84.)
A4(8,1)=R*6.
A4(9,1)=R*6.
A4(10,1)=R*84.
A4(11,1)=R*6.
A4(12,1)=R*(-6.)
A4(1,2)=R*8.
A4(2,2)=R*6.
A4(3,2)=R*(-2.)
A4(4,2)=R*6.
A4(5,2)=R*(-2.)
A4(6,2)=R*6.
A4(7,2)=R*(-8.)
A4(8,2)=R*(-8.)
A4(9,2)=R*2.
A4(10,2)=R*2.
A4(11,2)=R*2.
A4(12,2)=R*2.
A4(1,3)=R*8.
A4(2,3)=R*(-6.)
A4(3,3)=R*(-8.)
A4(4,3)=R*(-6.)
A4(5,3)=R*(-2.)
A4(6,3)=R*6.
A4(7,3)=R*2.
A4(8,3)=R*6.
A4(9,3)=R*84.
A4(10,3)=R*6.
A4(11,3)=R*84.
A4(12,3)=R*6.
A4(1,4)=R*6.
A4(2,4)=R*84.
A4(3,4)=R*(-6.)
A4(4,4)=R*(-6.)
A4(5,4)=R*(-84.)
A4(6,4)=R*(-6.)
A4(7,4)=R*6.
A4(8,4)=R*8.
A4(9,4)=R*8.
A4(10,4)=R*8.
A4(11,4)=R*8.
A4(12,4)=R*8.
A4(1,5)=R*8.
A4(2,5)=R*6.
A4(3,5)=R*2.
A4(4,5)=R*(-6.)
A4(5,5)=R*(-8.)
A4(6,5)=R*8.
A4(7,5)=R*6.
A4(8,5)=R*2.
A4(9,5)=R*2.
A4(10,5)=R*(-6.)
A4(11,5)=R*(-8.)
A4(12,5)=R*8.
A4(1,6)=R*6.
A4(2,6)=R*2.
A4(3,6)=R*8.
A4(4,6)=R*(-6.)
A4(5,6)=R*(-6.)
A4(6,6)=R*8.
A4(7,6)=R*6.
A4(8,6)=R*2.
A4(9,6)=R*2.
A4(10,6)=R*(-6.)
A4(11,6)=R*(-2.)
A4(12,6)=R*8.
A4(1,7)=R*84.
A4(2,7)=R*(-6.)
A4(3,7)=R*(-6.)
A4(4,7)=R*(-84.)
A4(5,7)=R*(-6.)
A4(6,7)=R*(-6.)
A4(7,7)=R*84.
A4(8,7)=R*6.
A4(9,7)=R*6.
A4(10,7)=R*84.
A4(11,7)=R*6.
A4(12,7)=R*84.
A4(1,8)=R*8.
A4(2,8)=R*8.
A4(3,8)=R*8.
A4(4,8)=R*8.
A4(5,8)=R*8.
A4(6,8)=R*8.
A4(7,8)=R*8.
A4(8,8)=R*8.
A4(9,8)=R*8.
A4(10,8)=R*8.
A4(11,8)=R*8.
A4(12,8)=R*8.
A4(1,9)=R*8.
A4(2,9)=R*6.
A4(3,9)=R*6.
A4(4,9)=R*6.
A4(5,9)=R*6.
A4(6,9)=R*6.
A4(7,9)=R*6.
A4(8,9)=R*6.
A4(9,9)=R*6.
A4(10,9)=R*6.
A4(11,9)=R*6.
A4(12,9)=R*6.
A4(1,10)=R*84.

START OF SEGMENT 017

C 017:0000
C 017:0001
C 017:0002
C 017:0003
C 017:0004
C 017:0005
C 017:0006
C 017:0007
C 017:0008
C 017:0009
C 017:0010
C 017:0011
C 017:0012
C 017:0013
C 017:0014
C 017:0015
C 017:0016
C 017:0017
C 017:0018
C 017:0019
C 017:0020
C 017:0021
C 017:0022
C 017:0023
C 017:0024
C 017:0025
C 017:0026
C 017:0027
C 017:0028
C 017:0029
C 017:0030
C 017:0031
C 017:0032
C 017:0033
C 017:0034
C 017:0035
C 017:0036
C 017:0037
C 017:0038
C 017:0039
C 017:0040
C 017:0041
C 017:0042
C 017:0043
C 017:0044
C 017:0045
C 017:0046
C 017:0047
C 017:0048
C 017:0049
C 017:0050
C 017:0051
C 017:0052
C 017:0053
C 017:0054
C 017:0055
C 017:0056
C 017:0057
C 017:0058
C 017:0059
C 017:0060
C 017:0061
C 017:0062
C 017:0063
C 017:0064
C 017:0065
C 017:0066
C 017:0067
C 017:0068
C 017:0069
C 017:0070
C 017:0071
C 017:0072
C 017:0073
C 017:0074
C 017:0075
C 017:0076
C 017:0077
C 017:0078
C 017:0079
C 017:0080
C 017:0081
C 017:0082
C 017:0083
C 017:0084
C 017:0085
C 017:0086
C 017:0087
C 017:0088
C 017:0089
C 017:0090
C 017:0091
C 017:0092



```
A4(I1,I0)=R*6.  
A4(I2,I0)=R*(-6.)  
A4(I1,I1)=P*8.  
A4(I2,I2)=P*8.  
DO 150 I=1,12  
DO 150 J=1,12  
A4(I,J)=A4(J,I)  
RETURN  
END
```

150

```
C 017:0096:4  
C 017:0099:3  
C 017:0098:5  
C 017:009D:5  
C 017:00A0:1  
C 017:00A0:5  
C 017:00A1:3  
C 017:00AC:4  
C 017:00AD:1  
SEGMENT 017 IS 00B3 LONG
```



```
SUBROUTINE LLLL(A,B,C)
DIMENSION AS(12)
AS(1)=1
AS(2)=2
AS(3)=3
AS(4)=4
AS(5)=5
AS(6)=AS(2)
AS(7)=AS(3)
AS(8)=AS(2)
AS(9)=AS(3)
AS(10)=1
AS(11)=AS(2)
AS(12)=AS(3)
RETURN
END
```

```
START OF SEGMENT 018
C 018:0000:0
C 018:0001:0
C 018:0002:0
C 018:0003:1
C 018:0004:2
C 018:0005:2
C 018:0006:2
C 018:0007:2
C 018:0008:0
C 018:0009:5
C 018:0010:5
C 018:0011:1
C 018:0012:0
C 018:0013:4
C 018:0014:2
C 018:0015:1
C 018:0016:4
SEGMENT 018 IS 0022 LONG
```



C

```
SUBROUTINE V (A, B, T, V, M, A6)
DIMENSION AK(12)
W=RESO TOTAL DE LA PLACA EN TON/M2
W1=(T*A)+V
W1=W*A**B
AK(1)=W1
AK(2)=W1*(-B/3.)
AK(3)=W1*(B/3.)
AK(4)=W1
AK(5)=W1*(B/3.)
AK(6)=W1*(B/3.)
AK(7)=W1
AK(8)=W1*(-B/3.)
AK(9)=W1*(-A/3.)
AK(10)=W1
AK(11)=W1*(B/3.)
AK(12)=W1*(-A/3.)
RETURN
END
```

```
START OF SEGMENT 019
C 019:000000
C 019:000000
C 019:000000
C 019:000000
C 019:000155
C 019:000322
C 019:000454
C 019:000723
C 019:000A22
C 019:000C11
C 019:000E00
C 019:001155
C 019:001344
C 019:001654
C 019:001944
C 019:001E33
C 019:002122
C 019:002155
SEGMENT 019 IS 0028 LONG
```



```

SUBROUTINE SFULF(C, P, C, S, LSF)
DIMENSION E(12,12)
DO 100 I=1,12
DO 100 J=1,12
SF(I,J)=1
P=7/(4+* * * )
SF(1,1)=1*(6*((P/I)+C*(L/P)))
SF(2,1)=1*(6*((A/P)+C*(P/A)))
SF(3,1)=1*(-1+C)
SF(4,1)=1*(4+C*(A/S))
SF(5,1)=1*(4+C*(S/A))
SF(6,1)=SF(3,1)
SF(7,1)=1*(6*(R/L))
SF(8,1)=1*(6*(R/A))
SF(9,1)=SF(3,1)
SF(10,1)=SF(3,1)
SF(11,1)=SF(3,1)
SF(12,1)=1*(4+* * * )
SF(1,2)=1*(4+* * * )
SF(2,2)=1*(4+* * * )
SF(3,2)=1*(4+* * * )
SF(4,2)=1*(4+* * * )
SF(5,2)=1*(4+* * * )
SF(6,2)=1*(4+* * * )
SF(7,2)=1*(4+* * * )
SF(8,2)=1*(4+* * * )
SF(9,2)=1*(4+* * * )
SF(10,2)=1*(4+* * * )
SF(11,2)=1*(4+* * * )
SF(12,2)=1*(4+* * * )
SF(1,3)=1*(4+* * * )
SF(2,3)=1*(4+* * * )
SF(3,3)=1*(4+* * * )
SF(4,3)=1*(4+* * * )
SF(5,3)=1*(4+* * * )
SF(6,3)=1*(4+* * * )
SF(7,3)=1*(4+* * * )
SF(8,3)=1*(4+* * * )
SF(9,3)=1*(4+* * * )
SF(10,3)=1*(4+* * * )
SF(11,3)=1*(4+* * * )
SF(12,3)=1*(4+* * * )
SF(1,4)=1*(4+* * * )
SF(2,4)=1*(4+* * * )
SF(3,4)=1*(4+* * * )
SF(4,4)=1*(4+* * * )
SF(5,4)=1*(4+* * * )
SF(6,4)=1*(4+* * * )
SF(7,4)=1*(4+* * * )
SF(8,4)=1*(4+* * * )
SF(9,4)=1*(4+* * * )
SF(10,4)=1*(4+* * * )
SF(11,4)=1*(4+* * * )
SF(12,4)=1*(4+* * * )
SF(1,5)=1*(4+* * * )
SF(2,5)=1*(4+* * * )
SF(3,5)=1*(4+* * * )
SF(4,5)=1*(4+* * * )
SF(5,5)=1*(4+* * * )
SF(6,5)=1*(4+* * * )
SF(7,5)=1*(4+* * * )
SF(8,5)=1*(4+* * * )
SF(9,5)=1*(4+* * * )
SF(10,5)=1*(4+* * * )
SF(11,5)=1*(4+* * * )
SF(12,5)=1*(4+* * * )
SF(1,6)=1*(4+* * * )
SF(2,6)=1*(4+* * * )
SF(3,6)=1*(4+* * * )
SF(4,6)=1*(4+* * * )
SF(5,6)=1*(4+* * * )
SF(6,6)=1*(4+* * * )
SF(7,6)=1*(4+* * * )
SF(8,6)=1*(4+* * * )
SF(9,6)=1*(4+* * * )
SF(10,6)=1*(4+* * * )
SF(11,6)=1*(4+* * * )
SF(12,6)=1*(4+* * * )
SF(1,7)=1*(4+* * * )
SF(2,7)=1*(4+* * * )
SF(3,7)=1*(4+* * * )
SF(4,7)=1*(4+* * * )
SF(5,7)=1*(4+* * * )
SF(6,7)=1*(4+* * * )
SF(7,7)=1*(4+* * * )
SF(8,7)=1*(4+* * * )
SF(9,7)=1*(4+* * * )
SF(10,7)=1*(4+* * * )
SF(11,7)=1*(4+* * * )
SF(12,7)=1*(4+* * * )
SF(1,8)=1*(4+* * * )
SF(2,8)=1*(4+* * * )
SF(3,8)=1*(4+* * * )
SF(4,8)=1*(4+* * * )
SF(5,8)=1*(4+* * * )
SF(6,8)=1*(4+* * * )
SF(7,8)=1*(4+* * * )
SF(8,8)=1*(4+* * * )
SF(9,8)=1*(4+* * * )
SF(10,8)=1*(4+* * * )
SF(11,8)=1*(4+* * * )
SF(12,8)=1*(4+* * * )
SF(1,9)=1*(4+* * * )
SF(2,9)=1*(4+* * * )
SF(3,9)=1*(4+* * * )
SF(4,9)=1*(4+* * * )
SF(5,9)=1*(4+* * * )
SF(6,9)=1*(4+* * * )
SF(7,9)=1*(4+* * * )
SF(8,9)=1*(4+* * * )
SF(9,9)=1*(4+* * * )
SF(10,9)=1*(4+* * * )
SF(11,9)=1*(4+* * * )
SF(12,9)=1*(4+* * * )
SF(1,10)=1*(4+* * * )
SF(2,10)=1*(4+* * * )
SF(3,10)=1*(4+* * * )
SF(4,10)=1*(4+* * * )
SF(5,10)=1*(4+* * * )
SF(6,10)=1*(4+* * * )
SF(7,10)=1*(4+* * * )
SF(8,10)=1*(4+* * * )
SF(9,10)=1*(4+* * * )
SF(10,10)=1*(4+* * * )
SF(11,10)=1*(4+* * * )
SF(12,10)=1*(4+* * * )
SF(1,11)=1*(4+* * * )
SF(2,11)=1*(4+* * * )
SF(3,11)=1*(4+* * * )
SF(4,11)=1*(4+* * * )
SF(5,11)=1*(4+* * * )
SF(6,11)=1*(4+* * * )
SF(7,11)=1*(4+* * * )
SF(8,11)=1*(4+* * * )
SF(9,11)=1*(4+* * * )
SF(10,11)=1*(4+* * * )
SF(11,11)=1*(4+* * * )
SF(12,11)=1*(4+* * * )
SF(1,12)=1*(4+* * * )
SF(2,12)=1*(4+* * * )
SF(3,12)=1*(4+* * * )
SF(4,12)=1*(4+* * * )
SF(5,12)=1*(4+* * * )
SF(6,12)=1*(4+* * * )
SF(7,12)=1*(4+* * * )
SF(8,12)=1*(4+* * * )
SF(9,12)=1*(4+* * * )
SF(10,12)=1*(4+* * * )
SF(11,12)=1*(4+* * * )
SF(12,12)=1*(4+* * * )

```

```

START OF SEGMENT U1A
01A:0000:0
01A:0001:0
01A:0002:0
01A:0003:0
01A:0004:0
01A:0005:0
01A:0006:0
01A:0007:0
01A:0008:0
01A:0009:0
01A:0010:0
01A:0011:0
01A:0012:0
01A:0013:0
01A:0014:0
01A:0015:0
01A:0016:0
01A:0017:0
01A:0018:0
01A:0019:0
01A:0020:0
01A:0021:0
01A:0022:0
01A:0023:0
01A:0024:0
01A:0025:0
01A:0026:0
01A:0027:0
01A:0028:0
01A:0029:0
01A:0030:0
01A:0031:0
01A:0032:0
01A:0033:0
01A:0034:0
01A:0035:0
01A:0036:0
01A:0037:0
01A:0038:0
01A:0039:0
01A:0040:0
01A:0041:0
01A:0042:0
01A:0043:0
01A:0044:0
01A:0045:0
01A:0046:0
01A:0047:0
01A:0048:0
01A:0049:0
01A:0050:0
01A:0051:0
01A:0052:0
01A:0053:0
01A:0054:0
01A:0055:0
01A:0056:0
01A:0057:0
01A:0058:0
01A:0059:0
01A:0060:0
01A:0061:0
01A:0062:0
01A:0063:0
01A:0064:0
01A:0065:0
01A:0066:0
01A:0067:0
01A:0068:0
01A:0069:0
01A:0070:0
01A:0071:0
01A:0072:0
01A:0073:0
01A:0074:0
01A:0075:0
01A:0076:0
01A:0077:0
01A:0078:0
01A:0079:0
01A:0080:0
01A:0081:0
01A:0082:0
01A:0083:0
01A:0084:0
01A:0085:0
01A:0086:0
01A:0087:0
01A:0088:0
01A:0089:0
01A:0090:0
01A:0091:0
01A:0092:0
01A:0093:0
01A:0094:0
01A:0095:0
01A:0096:0
01A:0097:0
01A:0098:0
01A:0099:0
01A:0100:0

```



```

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20)
(21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40)
(41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60)
(61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80)
(81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)
(101) (102) (103) (104) (105) (106) (107) (108) (109) (110) (111) (112) (113) (114) (115) (116) (117) (118) (119) (120)
(121) (122) (123) (124) (125) (126) (127) (128) (129) (130) (131) (132) (133) (134) (135) (136) (137) (138) (139) (140)
(141) (142) (143) (144) (145) (146) (147) (148) (149) (150) (151) (152) (153) (154) (155) (156) (157) (158) (159) (160)
(161) (162) (163) (164) (165) (166) (167) (168) (169) (170) (171) (172) (173) (174) (175) (176) (177) (178) (179) (180)
(181) (182) (183) (184) (185) (186) (187) (188) (189) (190) (191) (192) (193) (194) (195) (196) (197) (198) (199) (200)

```

```

01A:00B6:0000
01A:00C0:0000
01A:00C4:0000
01A:00C8:0000
01A:00CC:0000
01A:00D0:0000
01A:00D4:0000
01A:00D8:0000
01A:00DC:0000
01A:00E0:0000
01A:00E4:0000
01A:00E8:0000
01A:00EC:0000
01A:00F0:0000
01A:00F4:0000
01A:00F8:0000
01A:00FC:0000
01A:0100:0000
01A:0104:0000
01A:0108:0000
01A:010C:0000
01A:0110:0000
01A:0114:0000
01A:0118:0000

```

SEGMENT 01A IS 0110 LONG



C O N C L U S I O N

Hemos visto, através de este trabajo, la facilidad con que se resuelven problemas relativamente complejos, usando el método -- del elemento finito. La ventaja de este método radica en la generalidad de su formulación. Si se incrementara el número de elementos para representar la placa, los pasos a seguir serían los mismos, independientemente de las condiciones de borde y del tipo de cargas, lo que no sucede con los métodos tradicionales. -- En estos últimos, cualquier variación en condiciones de apoyo o de carga, hace el problema más complejo.

Otra de las ventajas del método del elemento finito es que las matrices que se usan son fáciles de manipular con la computadora.

El método del elemento finito , como todo, también tiene sus desventajas. Una de ellas es que se obtiene una solución aproximada. Esto se debe a que las funciones polinómicas que representan el comportamiento del desplazamiento en cada elemento sólo aproximan el desplazamiento exacto de la placa. Al incrementar el número de elementos para obtener una solución más exacta, aumenta el tiempo y costo del análisis en la computadora.

Con el advenimiento de computadoras pequeñas, y de gran capacidad, el problema de la máquina se ha vuelto relativamente sencillo. Actualmente existen máquinas de escritorio con capacidad de hasta 100 kilobytes y con acceso a disco de memoria. El costo de estas máquinas esta incluso al alcance de un Ingeniero particular.

El problema que hemos analizado, placas sujetas a cargas transversales, tiene una aplicación práctica muy común, por ejemplo - en el análisis de placas base para columnas, placas o losas planas con o sin agujeros, conexiones atornilladas para edificios, etc.

En la planta nucleoelectrica Laguna Verde, Ver. se utilizó el -- método del elemento finito para el análisis de placas base para soporteria de tuberias, donde fué practico pues esta planta cuenta con aproximadamente con 6000 soportes con placas base.

El uso del elemento finito en estos casos representa como se aplican los últimos avances en ingeniería estructural y en tecnolo - gía, para lograr estructuras mas seguras y económicas dejando al ingeniero en libertad para dedicarse a labores creativas, proporcionando un mejor servicio a la sociedad.

REFERENCIAS

- 1.- Salazar Polanco. Estabilidad de las construcciones. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A.
- 2.- O.C. Zienkiewicz. El método de los elementos finitos. Ed. Reverte S.A. 1980
- 3.- Dr. Porfirio Ballesteros. Apuntes de análisis estructural. Centro de Educación continua U.N.A.M. -- 1978.
- 4.- Rodolfo Luthé. Análisis estructural. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A.
- 5.- Hayrettin Kardestuncer. Introducción al análisis estructural con matrices. Ed. McGraw-Hill.
- 6.- Carlos Magdaleno. Análisis matricial de estructuras reticulares. I.P.N.
- 7.- George Ed. Mase. Mecánica del medio continuo Ed. - McGraw-Hill.
- 8.- Sr. Timoshenko. Teoría de placa y láminas.