

(A)  
L. G. P.



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales  
"ARAGON"

Manual de Prácticas de Laboratorio de Máquinas  
y Mecanismos de la E. N. E. P. Aragón.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :  
Ingeniero Mecánico Electricista  
P R E S E N T A :  
Juan Alfredo Escobar Muñoz



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INTRODUCCION

El estudiante de una carrera de Ciencias Físico-Matemáticas como lo es la de Ingeniería Mecánica específicamente, se enfrenta a varios problemas durante su aprendizaje de las diversas materias que conforman su carrera. Uno de los principales escollos que se le presentan es la visualización en forma práctica de los conceptos enunciados en sus materias teóricas.

En todo estudio para relacionar la teoría y la práctica, y para poder hacer que éstas se integren en un solo común denominador, se han implementado las clases prácticas o de laboratorio con el equipo adecuado y suficiente para demostrar al alumno en forma experimental la veracidad de sus conceptos teóricos.

En la E.N.E.P. Aragón, particularmente, la Sección Mecánica se encontraba hasta hace un año desprovista de un equipo adecuado para poder brindar al alumnado la preparación práctica de algunas de las materias que comprenden la mencionada sección.

Afortunadamente, y gracias a todas aquellas personas que lo hicieron posible, se adquirió un paquete de equipo de laboratorio para la Sección Mecánica. No solo se necesitaba que el equipo ya existiera, lo importante era preparar un Manual de Prácticas para ese equipo.

El presente trabajo es el Manual de Prácticas necesitado.

Se debe hacer notar que en este trabajo se ha puesto mucha atención en la claridad de su contenido y en la secuencia lógica del desarrollo de cada práctica.

El Manual contiene seis capítulos, uno por cada equipo existente :

Aparato Universal de Vibraciones

Mecanismos de Eslabones Articulados

Aparato de Coriolis

Mecanismos de Corredera - Leva - Engranés

Aparato de Balanceo Estático y Dinámico

Máquina de Velocidad de Rotación Crítica de Flechas

Estos aparatos están manufacturados por TecEquipment Limited-Inglaterra, a excepción de los Mecanismos de Corredera - Leva - Engranés los cuales son de marca Terco Suiza.

Con cada uno de los aparatos anteriores se pueden realizar - varias Prácticas cada una de las cuales presenta el siguiente - contenido :

Introducción

Teoría (cuando es necesaria)

Objetivo

Equipo

Desarrollo Experimental

Resultados

Conclusiones

Cada uno de estos puntos en la Práctica se describen en forma concreta y concisa, con el objeto de que el estudiante al - realizarla lo haga en forma ágil y dinámica, por lo que se recomienda leer con atención cada una de las Prácticas antes de realizarlas.

Como lo indica el Título de esta Tesis, el Manual de Prácticas se realizó para el Laboratorio de Máquinas y Mecanismos de la E.N.E.P. Aragón, el cual con la confirmación de las autoridades de la Carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica de esta escuela, podrá empezar a funcionar a la mayor brevedad posible.

Es muy importante mencionar que este Laboratorio de Máquinas y Mecanismos y lógicamente las Prácticas presentadas en este Manual, abarcan buena parte de los temarios de las materias de : Mecánica II, Mecánica Aplicada I y Mecánica Aplicada II.

Por último de una manera muy cordial se pide a las generaciones futuras de alumnos y profesores que podrán gozar de todo el equipo de laboratorio para el cual se ha elaborado este trabajo que la limpieza, lubricación y los mayores cuidados que se tengan con el equipo, nunca estarán de más para un óptimo aprovechamiento del mismo.

## INDICE

	Pág.
CAPITULO 1. APARATO UNIVERSAL DE VIBRACIONES.....	1
1.I Vibraciones Libres sin Amortiguamiento.....	3
Práctica 1.1 Péndulo Simple .....	11
Práctica 1.2 Péndulo Compuesto.....	21
Práctica 1.3 Centro de Percusión.....	32
Práctica 1.4 Determinación de la Aceleración de la Gravedad por medio del - Péndulo Reversible Kater.....	42
Práctica 1.5 Suspensión Bifilar.....	51
Práctica 1.6 Sistema Masa Resorte.....	60
Práctica 1.7 Oscilaciones Torsionales de un Rotor Simple.....	79
Práctica 1.8 Oscilaciones Torsionales de Dos Rotores.....	94
1.II Vibraciones Libres con Amortiguamiento.....	104
Práctica 1.9 Oscilaciones Torsionales de un Rotor Simple con Amortiguamien to Viscoso.....	109
1.III Vibraciones Forzadas.....	133
Práctica 1.10 Vibraciones Laterales de Vigas.....	138
Práctica 1.11 Vibraciones Laterales de Vigas con Amortiguamiento.....	153
Práctica 1.12 Absorber de Vibraciones sin Amortiguamiento.....	167
Práctica 1.13 Vibraciones Forzadas con Amorti guamiento Despreciable.....	172
Práctica 1.14 Vibraciones Libres con Amorti guamiento Viscoso.....	183

Práctica 1.15 Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso.....	195
CAPITULO 2. MECANISMOS DE ESLABONES ARTICULADOS.....	208
Práctica 2.1 Mecanismo Corredera-Biela-Manivela.....	209
Práctica 2.2 Mecanismo de Yugo Escocés.....	228
Práctica 2.3 Mecanismo de Retorno Rápido "Whitworth".....	236
CAPITULO 3. APARATO DE CORIOLIS.....	247
Práctica 3.1 Aparato de Coriolis.....	248
CAPITULO 4. MECANISMOS DE CORREDERA-LEVA-ENGRANES.....	268
Práctica 4.1 Mecanismo Corredera-Biela-Manivela con Graficador.....	269
Práctica 4.2 Analizador de Levas.....	276
Práctica 4.3 Analizador de Engranés.....	292
CAPITULO 5. APARATO DE BALANCEO ESTÁTICO Y DINÁMICO.....	325
Práctica 5.1 Aparato de Balanceo Estático y Dinámico.....	326
CAPITULO 6. MÁQUINA DE VELOCIDAD DE ROTACIÓN CRÍTICA DE FLECHAS.....	357
Práctica 6.1 Máquina de Velocidad de Rotación Crítica de Flechas.....	358
BIBLIOGRAFIA.....	396

## C A P I T U L O 1

### APARATO UNIVERSAL DE VIBRACIONES

Una vibración mecánica es el movimiento de una partícula o de un cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio.

En la mayoría de las máquinas y de las estructuras las vibraciones son indeseables porque aumentan los esfuerzos mecánicos y las pérdidas de energía que los acompañan. Por consiguiente deben eliminarse lo máximo que sea posible mediante diseños apropiados. En los últimos años se ha hecho mucho más importante el análisis de las vibraciones, debido a la tendencia actual de construir máquinas de mayores velocidades y estructuras mas livianas.

Generalmente se presenta una vibración mecánica cuando se se para un sistema de su posición de equilibrio estable. El sistema tiende a regresar a esa posición bajo la acción de fuerzas de recuperación (ya sean fuerzas elásticas como en el caso de una masa suspendida de un resorte, o fuerzas gravitacionales como en el caso de un péndulo). Pero generalmente el sistema llega a su posición original con cierta velocidad que ha adquirido, la cual hace que el sistema sobrepase dicha posición.

Como el proceso puede repetirse indefinidamente, el sistema se mantiene en movimiento hacia uno y otro lado de su posición de equilibrio.

Cuando el movimiento se debe únicamente a las fuerzas de recuperación se dice que la vibración es una "vibración libre".

Cuando al sistema se aplica una fuerza periódica, se describe el movimiento resultante como "vibración forzada".

Cuando se pueden despreciar los efectos de rozamiento se dice que la vibración es no amortiguada. Sin embargo en cierto grado todas las vibraciones son realmente amortiguadas.

Con el Aparato Universal de Vibraciones podremos observar y analizar, tanto sistemas bajo vibraciones libres como forzadas con y sin amortiguamiento, a través de las practicas que se su-

giere realizar.

Las prácticas de este capítulo se han ordenado de menor a mayor grado de dificultad, con el objeto de ir aumentando poco a poco el interés y el estudio por las vibraciones mecánicas.

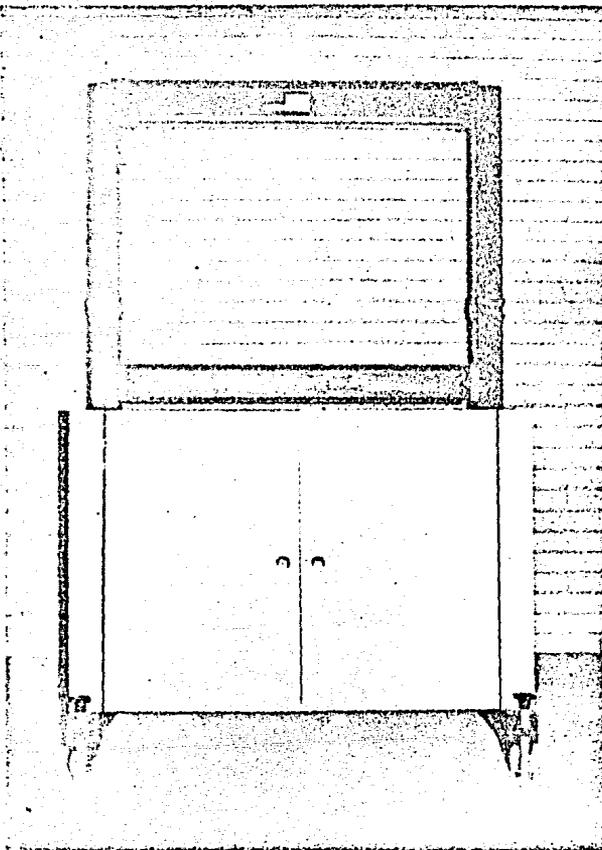
Aunque debido a la gran extensión que presenta el tema de Vibraciones y además a que solo se pueden realizar prácticas específicas, la mayoría de las prácticas se limita al estudio de los tipos más sencillos de vibración, como son, las vibraciones de un cuerpo o sistema de cuerpos con un grado de Libertad.

Se debe hacer notar de antemano que todo el equipo que se enlista en cada una de las prácticas, para su realización deberá montarse sobre el Marco General del Aparato Universal de Vibraciones (figura 1.1). Además cada uno de los equipos ha sido marcado y clasificado para su fácil localización, y en cada práctica aparece una fotografía mostrando la colocación del mismo.

En este capítulo se han intercalado tres secciones teóricas en el siguiente orden :

- 1.I Vibraciones libres sin Amortiguamiento
- 1.II Vibraciones libres con Amortiguamiento
- 1.III Vibraciones Forzadas.

El objeto de estas secciones teóricas es recordar algunos conceptos generales antes de efectuar una serie de prácticas del mismo tipo, por lo que las prácticas también han sido ordenadas conforme correspondan a las secciones teóricas anteriores a excepción de la Práctica 1.14 (Vibraciones Libres con Amortiguamiento Viscoso) que ha sido colocada dentro de la sección 1. III , debido a que la colocación del equipo es exactamente la misma de las prácticas 1.13 y 1.15 las cuales sí corresponden a la sección 1.III.



*Figura 1.1*

*Marco o Bastidor General.*

## 1.1.- VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO

### TEORIA

#### Vibraciones Libres de Partículas.

Consideremos un cuerpo de masa "m" suspendido de un resorte de constante k (figura 1.1). Por el momento sólo nos interesa el movimiento de su centro de masa, por lo tanto, consideraremos al cuerpo como una partícula. Cuando la partícula está en equilibrio estático, las fuerzas que actúan sobre ella, son su peso  $W$  y la fuerza  $T$  ejercida por el resorte, de magnitud  $T = k \delta_{st}$ , (diagrama de cuerpo libre de la figura 1.1.1), donde  $\delta_{st}$  representa la deflexión estática del resorte. Tenemos entonces que:

$$W = K \delta_{st} \quad (1.1.1)$$

Supongamos que ahora la partícula se desplaza una distancia  $X_m$  desde su posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial. Si  $X_m$  es menor que  $\delta_{st}$ , la partícula se moverá hacia uno y otro lado de su posición de equilibrio; se genera entonces una vibración de amplitud  $X_m$ . Si se observa la vibración también puede producirse imprimiendo cierta velocidad inicial a la partícula cuando está en su posición de equilibrio  $x = 0$  o más generalmente, imprimiéndole a la partícula en cualquier posición  $x = x_0$  una velocidad inicial  $V_0$ .

Para analizar la vibración consideremos la partícula en una posición  $P$  en un instante arbitrario  $t$  (figura 1.1.2). Si representamos por  $x$  el desplazamiento arbitrario  $OP$  medido desde la posición de equilibrio (positivo hacia abajo), observamos que las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso  $W$  y la fuerza  $T$  ejercida por el resorte la cual en esta posición tiene una magnitud  $T = K (\delta_{st} + x)$ , (del diagrama de cuerpo libre de la figura 1.1.2).

Recordando (1.1.1), encontramos que la magnitud de la resul-

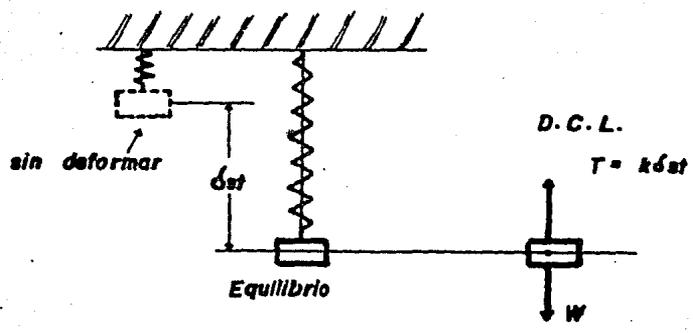


Figura 1.1.1

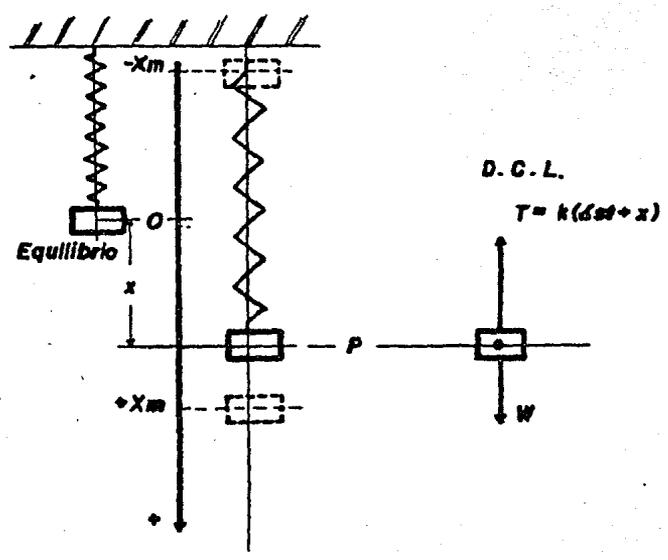


Figura 1.1.2

tante  $F$  de las dos fuerzas, es :

$$F = W - K (\delta_{\pi} + x) \\ F = -Kx \quad (1.1.2)$$

Entonces la resultante de las fuerzas ejercidas sobre la partícula es proporcional al desplazamiento  $OP$  medido a partir de la posición de equilibrio. Tomando en cuenta la convención de signos establecida, observamos que  $F$  se dirige siempre hacia la posición de equilibrio  $O$ . Sustituyendo  $F$  en la ecuación fundamental de la segunda ley de Newton  $F = ma$  y recordando además - que  $a = d^2x/dt^2$ , tenemos :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \quad (1.1.3)$$

La ecuación (1.1.3) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Dividiendo entre  $m$  cada término de la ecuación anterior tenemos :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

Y estableciendo

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad (1.1.4)$$

Se puede expresar (1.1.3) en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.1.5)$$

El movimiento definido por la ecuación (1.1.5) se llama movimiento armónico simple. Se caracteriza por el hecho de que la aceleración es proporcional al desplazamiento y de dirección - opuesta. Observamos que cada una de las funciones  $x_1 = \text{sen } \omega t$  y  $x^2 = \text{cos } \omega t$  satisface la ecuación (1.1.5). Luego estas funciones constituyen dos soluciones particulares de la ecuación - (1.1.5). Puede obtenerse la solución general de (1.1.5) multiplicando las dos soluciones particulares por las constantes arbitrarias  $A$  y  $B$  y sumándolas. Entonces

$$x = Ax_1 + Bx_2 = A \text{sen } \omega t + B \text{cos } \omega t \quad (1.1.6)$$

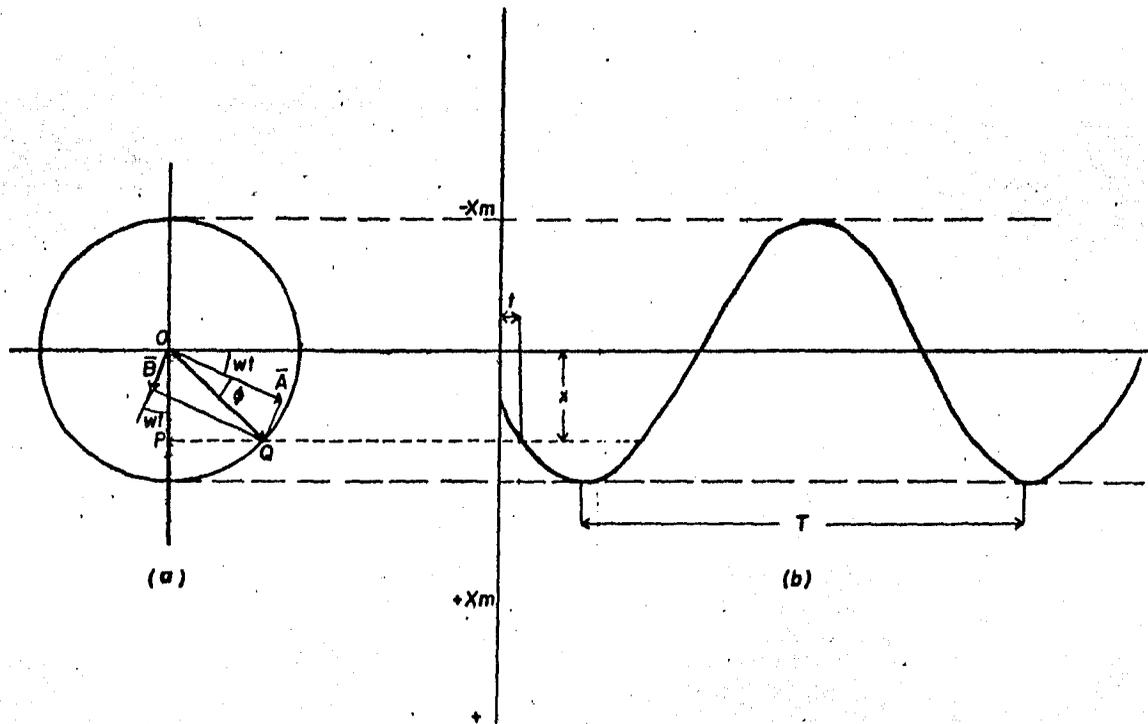


Figura 1.1.3

Derivándolas obtenemos sucesivamente la velocidad y la aceleración en el tiempo t-

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \quad (1.I.7)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega \sin \omega t - B\omega \cos \omega t \quad (1.I.8)$$

Verificamos que la expresión (1.I.6) proporciona una solución de la ecuación diferencial (1.I.5) al sustituir (1.I.6) y (1.I.3) en (1.I.5). Como esta expresión contiene dos constantes arbitrarias A y B, la solución obtenida es la solución general de la ecuación diferencial. Los valores de las constantes A y B dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

Por ejemplo, tenemos que A = 0 si la partícula está desplazada de su posición de equilibrio y se suelta en t = 0 sin velocidad inicial; tenemos que B = 0 si P parte de O en t = 0 con cierta velocidad inicial.

En general, encontramos que A = Vo/ω y B = x₀ cuando sustituimos t = 0 y los valores iniciales x₀ y v₀ del desplazamiento y la velocidad en (1.I.6) y (1.I.7).

Las expresiones obtenidas del desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una partícula se pueden escribir en forma más compacta si observamos que (1.I.6) expresa que el desplazamiento x = OP es la suma de las componentes x de dos vectores A y B de magnitudes A y B dirigidos como se muestra en la figura 1.I.3a. Cuando t varía, ambos vectores rotan en el sentido de giro de las agujas del reloj; observamos también que la magnitud de su resultante OQ es igual al desplazamiento máximo Xm con una velocidad angular constante ω. Designando por φ el ángulo formado por los vectores OQ y A, tenemos

$$OP = OQ \sin (\omega t + \phi) \quad (1.I.9)$$

lo que conduce a nuevas expresiones de desplazamiento, velocidad y aceleración de P

$$x = X_m \sin (\omega t + \phi) \quad (1.I.10)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega \cos(\omega t + \phi) \quad (1.I.II)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -X_m \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (1.I.12)$$

La curva desplazamiento-tiempo está representada por una curva sinusoidal (figura 1.I.3b), y el valor máximo  $X_m$  del desplazamiento se llama la amplitud de la vibración. La velocidad angular  $\omega$  del punto Q que describe la circunferencia auxiliar, se conoce como frecuencia angular de la vibración y se mide en rad/seg, mientras que el ángulo  $\phi$  que define la posición inicial de Q en la circunferencia se llama ángulo de fase.

Observamos en la figura 1.I.3 que se ha descrito un ciclo completo después de que el ángulo  $\omega t$  ha aumentado  $2\pi$  radianes.

El valor del tiempo en el cual se genera un ciclo completo se le llama periodo de vibración y se mide en segundos. El número de ciclos descritos en la unidad de tiempo es la frecuencia de vibración la cual se representa por  $f$ . Las frecuencias se miden en ciclos/seg, cps, seg<sup>-1</sup>, o Hz, ya que los ciclos son unidades adimensionales.

$$\text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.I.13)$$

$$\text{Frecuencia} = f = 1/T = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.I.14)$$

Recordando que en (1.I.4) se definió  $\omega$  en función de la constante  $K$  del resorte y de la masa  $m$  de la partícula, observamos que el periodo y la frecuencia son independientes de las condiciones iniciales y de la amplitud de la vibración. Observamos también que  $T$  y  $f$  dependen de la masa  $m$  más bien que del peso de la partícula y entonces son independientes del valor de  $g$  (aceleración de la gravedad).

Las curvas velocidad-tiempo, y aceleración-tiempo pueden representarse por curvas sinusoidales del mismo periodo de la curva desplazamiento-tiempo, pero con ángulos diferentes de fase.

## CONCEPTOS FUNDAMENTALES PARA LAS PRACTICAS DE VIBRACION

### MOMENTO DE INERCIA.

De un sólido es una medida de la resistencia que opone todo-cuerpo a ponerse en movimiento de rotación o cambiar de velocidad angular. El momento de inercia depende de la masa total del sólido y de su distribución con respecto al eje de rotación.

Si un cuerpo está constituido por las masas  $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$ , a distancias  $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ , del eje de rotación, su momento de inercia  $I$  con respecto a éste viene dado por :

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + \dots = \sum m r^2$$

### RADIO DE GIRO.

Radio de giro de un cuerpo es la distancia al eje de rotación, de un punto, en el que se pueda considerar concentrada toda su masa, que posea el mismo momento de inercia.

El momento de inercia  $I$  de un sólido de masa  $m$  y radio de giro  $K$  es :

$$I = m K^2$$

### MOMENTO Y ACELERACION ANGULAR.

Un par de momento  $T$  actuando sobre un sólido de momento de inercia  $I$ , le comunica una aceleración  $\alpha$  dada por :

$$T = I \alpha$$

### TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS.

El momento de inercia  $I$  de un sólido con respecto a un eje cualquiera paralelo a otro que pase por su centro de gravedad está dado por :

$$I = I_G + m h^2$$

en donde

$I_G$  = momento de inercia con respecto a un eje que pase -  
por el centro de gravedad.

$m$  = masa total del sólido.

$h$  = distancia entre los dos ejes paralelos.

#### GRADOS DE LIBERTAD

Es la mínima cantidad de coordenadas que ubican o determinan la localización geométrica de un cuerpo o de las masas de un sistema en el espacio.

En otras palabras si un sistema puede vibrar únicamente de una sola manera o en una sola dirección o en un solo plano, se dice que el sistema es de un grado de libertad.

PRACTICA 1.1

PENDULO SIMPLE.

1.1.1.- INTRODUCCION.

Uno de los ejemplos más simples de vibración sin amortiguamiento es el péndulo simple.

Una descripción general de Péndulo es la siguiente :

Péndulo es todo cuerpo rígido sometido solamente a la fuerza de gravedad y libre de girar alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento, llamado eje de suspensión.

El péndulo se encuentra en reposo o en equilibrio estable cuando su centro de gravedad se halla en un plano vertical que pasa por el eje de suspensión. Si se abandona a partir de cualquier otra posición, entra en oscilación con un periodo que prácticamente no depende de la amplitud de las oscilaciones, pero sí de la distribución de las masas en torno al eje y del valor de la aceleración de la gravedad.

Péndulo Simple, es un péndulo teórico, reducido a un cuerpo muy pequeño suspendido de un hilo flexible, inextensible y de peso despreciable y, prescindiendo de la resistencia del aire, si se aparta del plano vertical que pasa por el eje de suspensión y se abandona sin ningún impulso inicial, éste entrará en oscilación.

Sea O el punto de suspensión (figura 1.1.1), Po la posición de equilibrio del punto material y l la longitud OP del péndulo.

Una posición cualquiera P quedará determinada mediante el valor θ del ángulo  $\widehat{PoP}$  afectado de signo + o -, según coincida o no con el sentido adoptado como positivo. Las fuerzas que actúan sobre el punto material son su peso, de intensidad mg, y la tensión T del hilo dirigida hacia O.

Las ecuaciones de movimiento, referidas a dos ejes móviles definidos por los vectores tangente y normal a la trayectoria serán respectivamente:

$m l \ddot{\theta} = - m g \text{ sen } \theta$  (1.1.1)

$m l \dot{\theta}^2 = - m g \text{ cos } \theta + T$  (1.1.2)

De la ecuación (1.1.1) podemos eliminar  $m$  de ambos miembros. Además para ángulos pequeños (oscilaciones de pequeña amplitud), se cumple que  $\sin \theta \approx \theta$ , expresado en radianes. Por lo tanto tendremos :

$$\ddot{\theta} + g/l \theta = 0 \quad (1.1.3)$$

La ecuación anterior corresponde a un movimiento armónico simple, en comparación con (1.I.5)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Para este caso la frecuencia angular  $\omega$  de las oscilaciones es igual a  $(g/l)^{1/2}$ . Y al sustituir en :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Se encuentra el periodo de las oscilaciones pequeñas de un péndulo de longitud  $l$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (1.1.4)$$

#### 1.1.2.- OBJETIVOS.

- Analizar la ecuación para el periodo de un péndulo simple (1.1.4), mediante variaciones de  $l$  (longitud del péndulo).
- Determinar el valor de la aceleración de la gravedad ( $g$ ) utilizando un péndulo simple.

#### 1.1.3.- EQUIPO.

- . Viga horizontal de acero endurecido B1
- . Péndulo de bola de madera B2
- . Péndulo de bola de acero B3
- . Cordel
- . Cronómetro
- . Flexómetro

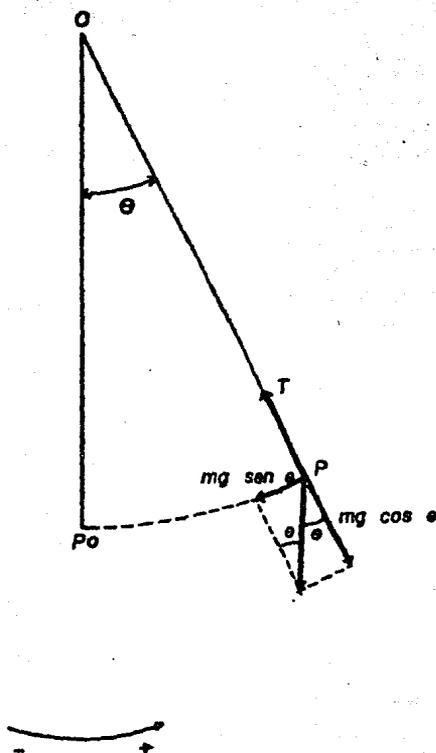


Figura 1.1

#### 1.1.4.- METODO EXPERIMENTAL .

La ecuación (1.1.4), nos define el periodo para un péndulo simple.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

En donde el periodo  $T$  de un péndulo nos indica el tiempo - transcurrido para que el péndulo efectúe una oscilación completa . Una oscilación completa empieza de una posición extrema a la otra y otra vez de regreso, como se muestra en la figura 1.1.2.

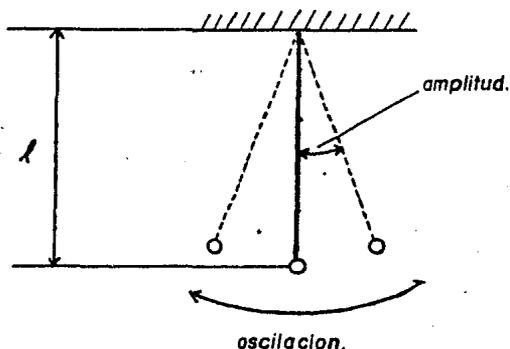


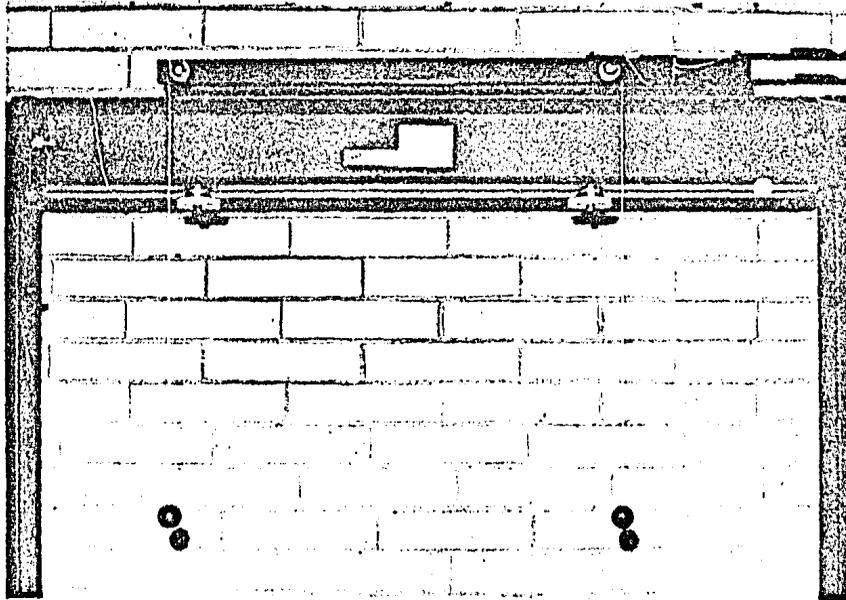
Figura 1.1.2

En la figura 1.1.2 podemos apreciar también la longitud del péndulo ( $l$ ) y la amplitud de la oscilación.

Para llevar a cabo el experimento, las bolas de acero y de madera se aseguran con cordeles y ambas se suspenden de pequeñas boquillas situadas en los extremos de la viga horizontal - de acero endurecido BI, como se muestra en la figura 1.1.3.

La longitud de los péndulos de madera y acero puede variarse tirando de la cuerda y apretando la boquilla.

Se usará un flexómetro para medir la longitud  $l$ , siendo ésta la distancia desde la base de la boquilla hasta la línea central de la bola.



*Figura 1.1.3*

*Péndulo Simple.*

Desplazar el péndulo un pequeño ángulo con respecto a su posición de equilibrio y dejar que se balancee.

Tomar el tiempo (t) para 30 oscilaciones de cada bola y obtener el periodo T , donde :

$$T = \frac{\text{tiempo transcurrido (t)}}{\text{número de oscilaciones}}$$

Repetir esto para varios valores de  $l$  y para los dos materiales de las bolas ; obteniendo así valores prácticos de T , como se muestra en la tabla de resultados 1.1.1.

Sustituir las diferentes longitudes del péndulo ( $l$ ) en la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Y obtener los valores teóricos de T.

$$\text{para } l = 0.10 \text{ m , } T = 2\pi \sqrt{\frac{0.10}{9.81}} = 0.63 \text{ seg}$$

$$\text{para } l = 0.20 \text{ m , } T = 2\pi \sqrt{\frac{0.20}{9.81}} = 0.89 \text{ seg}$$

$$\text{para } l = 0.30 \text{ m , } T = 2\pi \sqrt{\frac{0.30}{9.81}} = 1.09 \text{ seg}$$

$$\text{para } l = 0.40 \text{ m , } T = 2\pi \sqrt{\frac{0.40}{9.81}} = 1.26 \text{ seg}$$

$$\text{para } l = 0.50 \text{ m , } T = 2\pi \sqrt{\frac{0.50}{9.81}} = 1.41 \text{ seg}$$

$$\text{para } l = 0.60 \text{ m , } T = 2\pi \sqrt{\frac{0.60}{9.81}} = 1.55 \text{ seg}$$

La siguiente es una tabla de resultados en donde se muestran valores teóricos y prácticos de T así como T<sup>2</sup>.

30 Oscilaciones								
Prácticos							Teóricos	
l	Madera		Acero		Mad.	Acer.	Mad. y Acer.	
	t	T	t	T	T'	T''	T	T'
m	seg	seg	seg	seg	seg <sup>2</sup>	seg <sup>2</sup>	seg	seg <sup>2</sup>
0.10	19.0	0.633	13.3	0.626	0.401	0.392	0.63	0.396
0.20	26.9	0.396	26.6	0.886	0.804	0.736	0.39	0.792
0.30	32.9	1.090	33.0	1.100	1.200	1.210	1.09	1.138
0.40	37.6	1.253	37.8	1.260	1.570	1.600	1.26	1.587
0.50	42.6	1.420	42.8	1.426	2.010	2.030	1.41	1.938
0.60	46.4	1.546	46.2	1.540	2.390	2.371	1.55	2.402

Tabla de resultados 1.1.1

Se tabuló T<sup>2</sup> debido a que existe una relación entre T<sup>2</sup> y l de la forma :

$$T^2 = K l \quad (1.1.5)$$

En donde K es una constante que se obtiene de la siguiente forma:

De la ecuación(1.1.4) del péndulo simple

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

de aquí

$$K = \frac{4\pi^2}{g} \quad (1.1.6)$$

Para diferentes valores prácticos de  $T^2$  y  $l$  para el péndulo de madera y de acero podemos obtener las gráficas de las figuras 1.1.4 y 1.1.5 las cuales muestran líneas aproximadamente rectas con una pendiente aproximadamente constante.

Para obtener el valor de  $K$  despejamos éste de la ecuación (1.1.5)

$$T^2 = K l$$

$$K = \frac{T^2}{l} \quad (1.1.7)$$

Lo cual nos indica que  $K$  es el valor de la pendiente en cada punto de las líneas graficadas. Debido a que las líneas no son exactamente rectas, encontraremos el valor promedio de  $K$  para cada una de las gráficas y por último el promedio de ambas.

Abajo aparecen los valores de  $K$  para cada punto de los péndulos de madera y acero.

	Madera	Acero
$l$	$K$	$K$
0.10	4.010	3.926
0.20	4.020	3.930
0.30	4.000	4.033
0.40	3.926	4.000
0.50	4.020	4.060
0.60	3.983	3.950

$K$  promedio para el péndulo de madera es:

$$\frac{4.01 + 4.02 + 4.0 + 3.926 + 4.02 + 3.983}{6}$$

$$K = 3.993 \text{ seg}^2/\text{m}$$

$K$  promedio para el péndulo de acero es :

$$\frac{3.926 + 3.93 + 4.033 + 4.0 + 4.06 + 3.95}{6}$$

$$K = 3.983 \text{ seg}^2/\text{m}$$

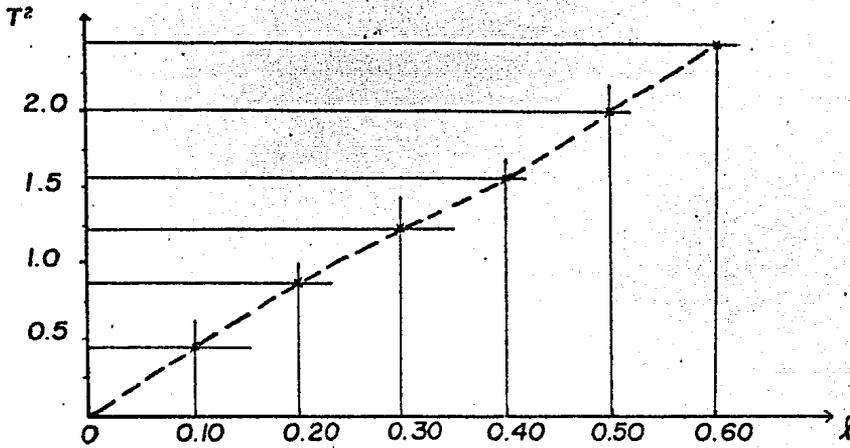


Figura 1.1.4 Péndulo de madera.

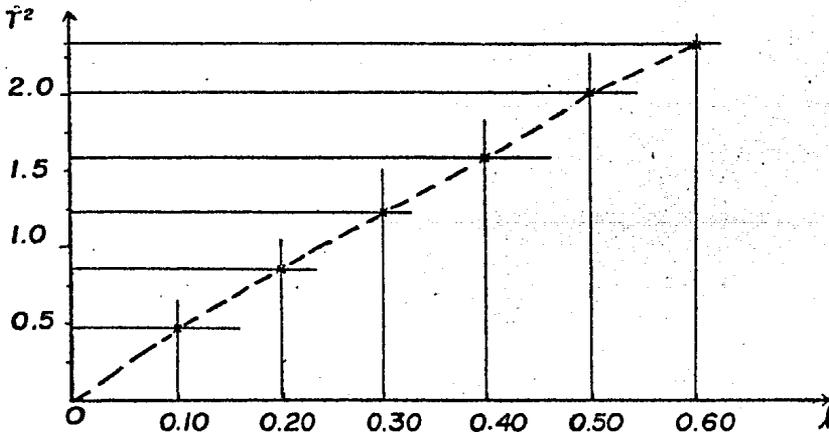


Figura 1.1.5 Péndulo de acero.

Y por último el promedio de ambas es :

$$\frac{1.993 + 3.983}{2} = 3.988$$

$$K = 3.988 \text{ seg}^2 / \text{m}$$

Para cumplir con el segundo objetivo de la práctica , encontraremos el valor de  $g$ , a partir de la ecuación (1.1.5)

$$K = \frac{4 \pi^2}{g}$$

Si ya conocemos el valor de  $K$ , solo resta despejar el valor de  $g$ .

$$g = \frac{4 \pi^2}{K}$$

$$g = \frac{4 \pi^2}{3.988} = 9.89 \text{ m/seg}^2$$

#### 1.1.5.- CONCLUSIONES.

Como podemos observar en la tabla de resultados 1.1.1, la diferencia entre los valores prácticos y teóricos del periodo  $T$  de un péndulo simple es debida principalmente a la aceleración de la gravedad  $g$ , puesto que ésta varía dependiendo del lugar donde se mida.

Se observa también en la tabla que el periodo de un péndulo simple está en función de la longitud del péndulo  $l$  y de la aceleración de la gravedad  $g$  únicamente y no de la masa de la partícula.

El valor obtenido de  $g$  utilizando un péndulo simple, tiene un error del 0.8 % con respecto al valor universal de 9.8116 m/seg<sup>2</sup> indicando esto que es un método apropiado para calcular la aceleración de la gravedad pero no el más exacto.

## PRACTICA 1.2

### PENDULO COMPUESTO.

#### 1.2.1.- INTRODUCCION.

Cualquier cuerpo rígido soportado de tal forma que pueda oscilar en un plano vertical en torno a algún eje que pase por uno de sus puntos, recibe el nombre de Péndulo Físico o Compuesto. Se trata de una generalización del péndulo simple, en el cual una cuerda sin peso soporta a una sola partícula.

De hecho todos los péndulos reales son péndulos físicos.

Escojamos, por conveniencia, un péndulo en forma de un cuerpo laminar, tal como el que se puede obtener al cortar una lámina de madera terciada (triplay) con una sierra, y seleccionemos el eje de oscilación perpendicular al plano de este cuerpo.

No se pierde ningún aspecto esencial con ésta restricción.

En la figura 1.2.1 se muestra un cuerpo de forma irregular, pivoteado en torno a un eje perpendicular sin fricción, que pasa por P y desplazado un ángulo  $\theta$  de su posición de equilibrio.

La posición de equilibrio es aquella en la que el centro de gravedad CG del cuerpo se encuentra verticalmente por debajo de P.

La distancia del pivote al centro de gravedad es  $h$ , la inercia rotacional del cuerpo en torno al eje que pasa por el pivote es  $I$  y la masa del cuerpo es  $m$ .

De la figura 1.2.1 el par restaurador para el desplazamiento angular  $\theta$  es :

$$T_o = - mg \text{ sen } \theta h \quad (1.2.1)$$

NOTA: El signo (-) en la ecuación (1.2.1) es debido a que el par restaurador se opone al sentido de movimiento adoptado como positivo. Además el par  $T_o$  se debe a la componente tangencial de  $mg$ .

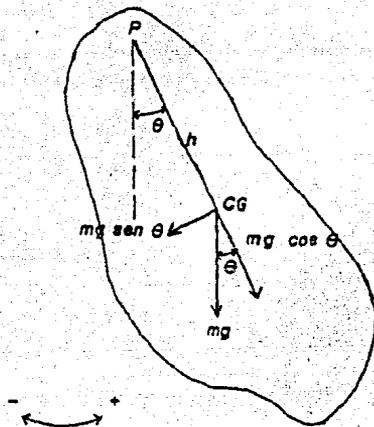


Figura 1.2.1

Para desplazamientos angulares pequeños, resulta que la aproximación  $\sin \theta \doteq \theta$  (expresado en radianes), es una aproximación excelente, por lo tanto para pequeñas amplitudes tenemos:

$$T_o = - mg h \theta \quad (1.2.2)$$

La ecuación anterior la podemos expresar como:

$$T_o = - k \theta \quad (1.2.3)$$

en donde

$$k = mg h \quad (1.2.4)$$

De los conceptos de momento y aceleración angular tenemos:

$$T_o = I \alpha$$

$$T_o = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

despejando

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{T_o}{I} \quad (1.2.5)$$

sustituyendo (1.2.3) en (1.2.5)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I} \theta \quad (1.2.6)$$

Esta ecuación corresponde a un movimiento armónico simple cuyo periodo es :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (1.2.7)$$

Sustituyendo (1.2.4) en (1.2.7)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg h}} \quad (1.2.8)$$

La ecuación anterior no define el periodo T para un péndulo compuesto que oscila con una amplitud pequeña. Cuando la amplitud es grande, el péndulo físico realiza un movimiento armónico pero no armónico simple.

Este razonamiento se aplica a un objeto laminar de cualquier forma en donde el pivote puede estar localizado en cualquier punto del cuerpo.

Si I es el momento de inercia del péndulo en torno al eje - que pasa por el pivote e IG es el momento de inercia en torno - al centro de gravedad (CG) entonces:

$$I = IG + m h^2 \quad (1.2.9)$$

por el teorema de ejes paralelos.

$$IG = m K^2 \quad (1.2.10)$$

donde K es el radio de giro en torno al centro de gravedad.

m es la masa total del péndulo compuesto.

h es la distancia del punto de oscilación al CG.

Sustituyendo (1.2.9) en (1.2.8)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{IG + m h^2}{mgh}} \quad (1.2.11)$$

Ahora sustituyendo (1.2.10) en (1.2.11)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mK^2 + mh^2}{mgh}}$$

sacando como factor común a m tenemos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(K^2 + h^2)}{mgh}}$$

Resultando por último

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + h^2}{gh}} \quad (1.2.12)$$

#### 1.2.2.- OBJETIVO.

Observar los valores obtenidos del periodo  $T$ , haciendo variar las distancias  $h$  y  $L$ , para un péndulo compuesto como el que se muestra en la figura 1.2.2.

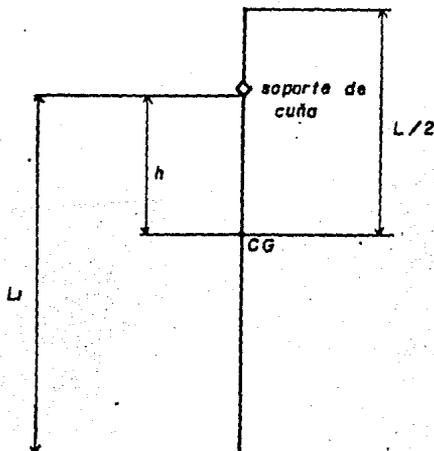


Figura 1.2.2

## 1.2.3.- EQUIPO.

- . Viga horizontal de acero endurecido. B1
- . Varilla de acero de 12.7 mm de diámetro y 0.915 m de longitud.
- . Soporte de cuña ajustable. B6
- . Flexómetro.
- . Cronómetro.

## 1.2.4.- METODO EXPERIMENTAL.

Colocar el péndulo compuesto como se muestra en la figura (1.2.3). Determinar el CG de la varilla siendo éste igual a  $L/2$  en donde  $L$  es la longitud total de la varilla.

Apretar el soporte de cuña dando un valor de  $L_1$  desde el borde del soporte de cuña hasta el extremo final de la varilla.

Determinar el valor de la distancia  $h$  siendo ésta la distancia desde el borde del soporte de cuña hasta el CG de la varilla.

Habiendo colocado el péndulo sobre la viga horizontal de acero endurecido, como se muestra en la figura 1.2.3, de manera que pueda moverse libremente, se desplaza el péndulo un pequeño ángulo con respecto a su posición vertical de equilibrio y se deja oscilar libremente.

Tomar el tiempo  $t$  para 20 oscilaciones y obtener el periodo  $T$ , donde:

$$T = \frac{\text{tiempo transcurrido (t)}}{\text{número de oscilaciones}}$$

Repetir este procedimiento para diferentes valores de  $L_1$  y  $h$ , obteniendo también para cada prueba los valores del radio de giro  $K$ , de la siguiente manera:

De la ecuación (1.2.12) despejamos el valor de  $K$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{g l}} \quad (1.2.12)$$

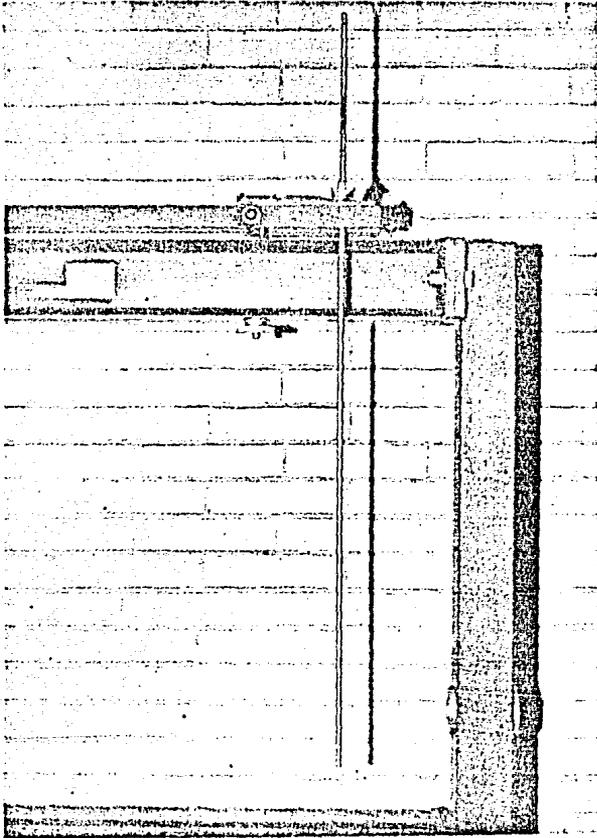


Figura 1.2.3

Péndulo Compuesto

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior.

$$T^2 = 4l^2 \frac{K^2 + h^2}{gh}$$

despejando el valor de  $K^2$

$$K^2 + h^2 = \frac{T^2 gh}{4l^2}$$

$$K^2 = \frac{T^2 gh}{4l^2} - h^2$$

obteniendo la raíz cuadrada para ambos miembros nos queda

$$K = \sqrt{\frac{T^2 gh}{4l^2} - h^2} \quad (1.2.13)$$

La tabla 1.2.1 nos muestra los resultados obtenidos para varias pruebas efectuadas con el péndulo compuesto.

20 oscilaciones				
$L_1$	$h$	$t$	$T$	$K$
(m)	(m)	(seg)	(seg)	(m)
0.50	0.0425	59.6	2.98	0.3032
0.55	0.0925	33.8	1.94	0.2791
0.60	0.1425	32.9	1.645	0.2757
0.65	0.1925	30.6	1.53	0.2737
0.70	0.2425	29.3	1.49	0.2733
0.75	0.2925	29.7	1.435	0.2733
0.80	0.3425	30.0	1.5	0.2723
0.85	0.3925	30.7	1.535	0.2752

Tabla de resultados 1.2.1

Memoria de cálculo para obtener los valores del radio de giro (K) de la tabla 1.2.1

Para los cálculos de la tabla anterior se tomaron los siguientes valores:

$$L = 0.915 \text{ m}$$

$$L/2 = 0.4575 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/seg}^2$$

$$K = \sqrt{\frac{T^2 gh}{4\pi^2} - h^2}$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{(2.98)^2 (9.81) (0.0425)}{4\pi^2} - (0.0425)^2}$$

$$K_1 = 0.303279 \text{ m}$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{(1.94)^2 (9.81) (0.0925)}{4\pi^2} - (0.0925)^2}$$

$$K_2 = 0.279197 \text{ m}$$

$$K_3 = \sqrt{\frac{(1.645)^2 (9.81) (0.1425)}{4\pi^2} - (0.1425)^2}$$

$$K_3 = 0.274797 \text{ m}$$

$$K_4 = \sqrt{\frac{(1.53)^2 (9.81) (0.1925)}{4\pi^2} - (0.1925)^2}$$

$$K_4 = 0.2737713 \text{ m}$$

$$K_5 = \sqrt{\frac{(1.49)^2 (9.81) (0.2425)}{4\pi^2} - (0.2425)^2}$$

$$K_5 = 0.273814 \text{ m}$$

$$K_6 = \sqrt{\frac{(1.435)^2 (9.31) (0.2925)}{4 \pi^2} - (0.2925)^2}$$

$$K_6 = 0.273362 \text{ m}$$

$$K_7 = \sqrt{\frac{(1.5)^2 (9.31) (0.3425)}{4 \pi^2} - (0.3425)^2}$$

$$K_7 = 0.272372 \text{ m}$$

$$K_8 = \sqrt{\frac{(1.535)^2 (9.31) (0.3925)}{4 \pi^2} - (0.3925)^2}$$

$$K_8 = 0.275230 \text{ m}$$

Antes de hacer conclusiones nos haremos la siguiente pregunta:

¿Qué longitud deberá tener un péndulo simple para que produzca el mismo periodo que un péndulo compuesto?

Puesto que queremos encontrar iguales periodos de oscilación trabajaremos con las ecuaciones que nos definen el periodo para un péndulo simple y para un péndulo compuesto, (1.1.4) y (1.2.12) respectivamente.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.1.4)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + h^2}{gn}} \quad (1.2.12)$$

igualando ambas tenemos

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + h^2}{gn}}$$

elevando al cuadrado los dos miembros

$$4\pi^2 \frac{l}{g} = 4\pi^2 \frac{K^2 + h^2}{gn}$$

despejando

$$l = \frac{4\pi^2}{4\pi^2} \frac{g(K^2 + h^2)}{gh}$$

por lo tanto

$$l = \frac{K^2 + h^2}{h} \quad (1.2.14)$$

La ecuación (1.2.14) nos determina la longitud equivalente de un péndulo simple para que produzca el mismo periodo que un péndulo compuesto. Es decir, si calculamos  $T$  para un péndulo simple de longitud  $l$ , será el mismo periodo que para un péndulo compuesto de parámetros  $K$  y  $h$ , haciendo alusión a la fórmula (1.2.14).

Como un ejemplo tomaremos los valores  $K$  y  $h$  de la sexta prueba de la tabla 1.2.1.

$$K = 0.273362 \text{ m}$$

$$h = 0.2925 \text{ m}$$

Para estos valores se tiene un periodo  $T = 1.435$  seg para un péndulo compuesto.

Para conocer la longitud del péndulo simple correspondiente de periodo  $T = 1.435$  seg, sustituimos  $K$  y  $h$  en la ecuación (1.2.14.)

$$l = \frac{K^2 + h^2}{h} \quad (1.2.14)$$

$$l = \frac{(0.273362)^2 + (0.2925)^2}{0.2925}$$

$$l = 0.5479 \text{ m}$$

Entonces, utilizando ahora un péndulo simple, ya sea de bola de madera o de acero, damos una longitud del péndulo de 0.5479 m, tomamos 20 oscilaciones y obtenemos un periodo  $T = 1.435$  seg, comprobando que es el mismo periodo exactamente que para un péndulo

dulo compuesto con los parámetros  $K = 0.273362$  y  $h = 0.2925$  m.

#### 1.2.5.- CONCLUSIONES.

Podemos observar de la tabla de resultados 1.2.1 que mientras aumenta la longitud  $L_1$ , el periodo de oscilación  $T$  disminuye debido a que el C.G. del péndulo se aleja del soporte de cuña hasta que para una longitud  $L_1 = 0.30$  m el periodo  $T$  empieza a aumentar comportándose como un péndulo simple.

Por lo que comprobamos que el periodo  $T$  de un péndulo compuesto depende de la distribución de las masas en torno al eje que pasa por el pivote.

La longitud equivalente de un péndulo simple nos indica que hay una distancia medida desde el punto de suspensión para un péndulo compuesto en la cual se localiza un punto en donde se supone concentrada la masa total del péndulo compuesto por lo que se comporta como un péndulo simple.

## PRACTICA 1.3

### CENTRO DE PERCUSION.

#### 1.3.1.- INTRODUCCION.

De la práctica 1.2 obtuvimos la ecuación que nos define la longitud equivalente de un péndulo simple que produce el mismo periodo que un péndulo compuesto.

$$l = \frac{K^2 + h^2}{h} \quad (1.2.14)$$

En otras palabras, el periodo de un péndulo físico es igual al de un péndulo simple que tenga una longitud  $l$  (ecuación - 1.2.14); este valor se denomina "longitud equivalente para un péndulo simple".

Un péndulo compuesto oscila como si su masa estuviera concentrada en un solo punto a una distancia  $l$  del centro de suspensión. Este punto recibe el nombre de "centro de percusión" o "centro de oscilación".

Si el péndulo compuesto es golpeado en el centro de percusión adquiere un movimiento de oscilación en torno al eje perpendicular al plano de oscilación que pasa por el centro de suspensión sin que exista deslizamiento en el punto de suspensión.

#### 1.3.2.- OBJETIVOS

- Encontrar el centro de percusión de un péndulo compuesto, variando la distribución de las masas a lo largo de éste.
- Obtener el radio de giro  $K_0$  con respecto al punto de soporte.

#### 1.3.3.- EQUIPO.

- . Péndulo simple de plomada esferoidal B6

- . Soporte de cuña ajustable
- . Péndulo compuesto rectangular de madera B5
- . Viga horizontal de acero endurecido B1
- . Flexómetro
- . Cronómetro
- . Plomada

#### 1.3.4.- METODO EXPERIMENTAL.

El equipo se coloca como se muestra en la figura 1.3.1.

El soporte de cuña del péndulo simple se localiza en una ranura de la viga, mientras que el soporte de cuña del péndulo compuesto descansa sobre una superficie plana de la viga.

Trabajaremos primeramente con el péndulo compuesto.

Para determinar el centro de percusión del péndulo compuesto de madera es necesario determinar su periodo de oscilación usando la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + h^2}{hg}} \quad (1.2.12)$$

$$\text{Si definimos } Ko^2 = K^2 + h^2 \quad (1.3.1)$$

en donde  $Ko$  es el radio de giro en torno al punto de suspensión.

Por lo tanto

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ko}{hg}} \quad (1.3.2)$$

El parámetro  $h$ , como lo definimos en la práctica 1.2, es la distancia desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad del péndulo de madera (figura 1.3.2)

NOTA: En la práctica el punto de suspensión es el borde del soporte de cuña ajustable que descansa sobre la viga horizontal de acero endurecido.

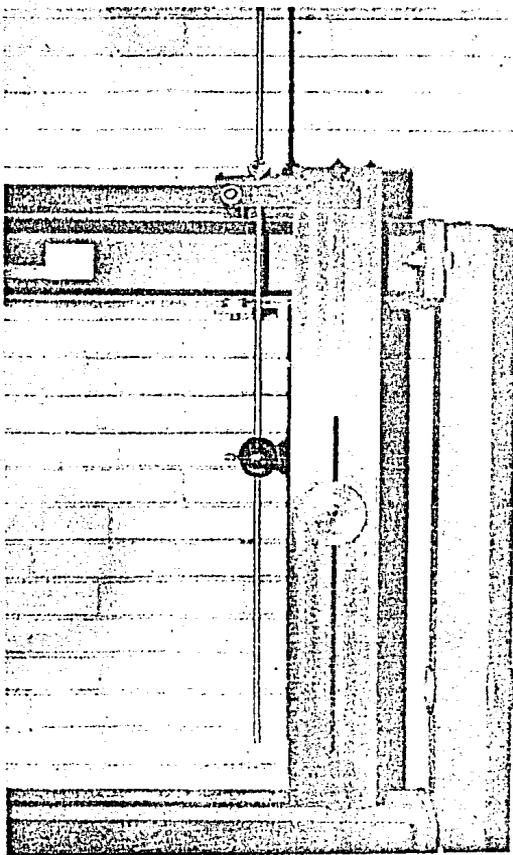


Figura 1.3.1

Centro de Percusión.

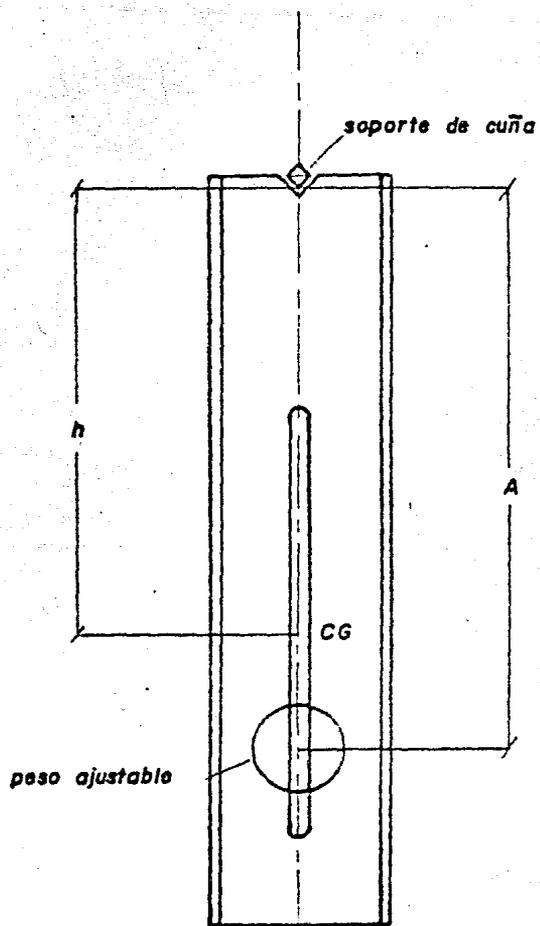
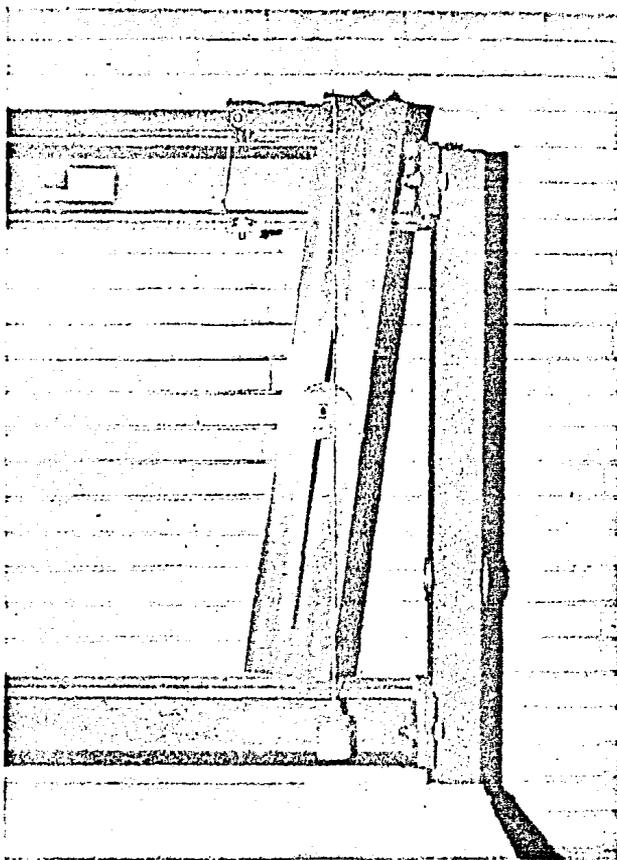


Figura 1.3'2



*Figura 1.3.3*

*Método de la Plomada.*

Para encontrar el centro de gravedad (CG) del péndulo compuesto, debido a que posee un peso de acero ajustable y esto lo hace no homogéneo en peso, utilizaremos el siguiente método práctico denominado método de la plomada.

El péndulo compuesto de madera tiene dos orificios en dos de sus esquinas, por uno de estos orificios se hace pasar un perno y se hace descansar sobre la viga horizontal, colocando una plomada como se muestra en la figura 1.3.3.

Debido a que el péndulo de madera es rectangular y que tiene una ranura central a lo largo de su superficie, se puede determinar a simple vista su eje de simetría a lo largo del péndulo.

Justo en la intersección de la línea de la plomada y el eje de simetría del péndulo compuesto encontramos el CG.

Para comprobarlo hacemos pasar el perno por el segundo orificio y repetimos el procedimiento anterior.

Una vez encontrado el centro de gravedad podemos medir la distancia  $h$ , desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad encontrado. Ahora calculamos su período para 20 oscilaciones haciendo variar las posiciones del peso de acero a lo largo de la ranura del péndulo de madera, obteniendo distintas distancias  $A$  medidas desde el borde del soporte de cuña hasta el centro del peso ajustable, (figura 1.3.2).

Conociendo los parámetros  $T$ ,  $h$ , y  $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$ , para cada prueba efectuada calculamos también los valores del radio de giro en torno al punto de suspensión ( $K_0$ ), despejando de la ecuación (3.2).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_0^2}{hg}} \quad (1.3.2)$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{K_0^2}{hg}$$

despejando  $K_0$

$$K_0^2 = \frac{T^2 hg}{4\pi^2}$$

y obteniendo la raíz cuadrada de ambos miembros resulta

$$K_0 = \sqrt{\frac{T^2 h g}{4 \pi^2}} \quad (1.3.3)$$

Conociendo ahora los valores de  $K_0$ , encontraremos los de  $K$  (radio de giro en torno al centro de gravedad), despejando éste de la ecuación (1.3.1).

$$K_0^2 = K^2 + h^2 \quad (1.3.1)$$

$$K = \sqrt{K_0^2 - h^2} \quad (1.3.4)$$

Y por último, para saber la distancia a la cual se encuentra el centro de percusión sustituimos los valores de  $K$  y  $h$  en la ecuación (1.2.14).

$$l = \frac{K^2 + h^2}{h} \quad (1.2.14)$$

La tabla 1.3.1 nos muestra los valores obtenidos de  $T$ ,  $h$ ,  $K_0$ ,  $K$  y  $l$  para diferentes distancias  $A$ . También se encuentran tabulados  $K_0^2$  y  $h^2$  para facilidad de cálculos.

20 oscilaciones								
t	T	A	h	$K_0$	$K_0^2$	K	$h^2$	l
seg	seg	m	m	m	m <sup>2</sup>	m	m <sup>2</sup>	m
30.9	1.595	0.69	0.394	0.4834	0.2337	0.2301	0.1552	0.5930
29.6	1.480	0.60	0.368	0.4475	0.2002	0.2545	0.1354	0.5439
28.7	1.435	0.50	0.353	0.4250	0.1306	0.2366	0.1246	0.5115
27.9	1.395	0.40	0.331	0.4000	0.1600	0.2247	0.1095	0.4833
27.5	1.375	0.30	0.302	0.3766	0.1413	0.2249	0.0912	0.4694

Tabla de resultados 1.3.1

Memoria de cálculo para los valores obtenidos en la tabla 1.3.1

$$K_o = \sqrt{\frac{T^2 \Sigma h}{4 \pi^2}}$$

$$K_{o_1} = \sqrt{\frac{(1.545)^2 (9.81) (0.394)}{4 \pi^2}} \quad K_{o_1} = 0.4834 \text{ m}$$

$$K_{o_2} = \sqrt{\frac{(1.48)^2 (9.81) (0.363)}{4 \pi^2}} \quad K_{o_2} = 0.4475 \text{ m}$$

$$K_{o_3} = \sqrt{\frac{(1.435)^2 (9.81) (0.353)}{4 \pi^2}} \quad K_{o_3} = 0.4250 \text{ m}$$

$$K_{o_4} = \sqrt{\frac{(1.395)^2 (9.81) (0.331)}{4 \pi^2}} \quad K_{o_4} = 0.4000 \text{ m}$$

$$K_{o_5} = \sqrt{\frac{(1.375)^2 (9.81) (0.302)}{4 \pi^2}} \quad K_{o_5} = 0.3766 \text{ m}$$

$$K_{o_1}^2 = 0.2337 \text{ m}^2$$

$$K_{o_2}^2 = 0.2002 \text{ m}^2$$

$$K_{o_3}^2 = 0.1806 \text{ m}^2$$

$$K_{o_4}^2 = 0.2247 \text{ m}^2$$

$$K_{o_5}^2 = 0.2249 \text{ m}^2$$

$$K_o^2 = K^2 + h^2$$

$$K_o = \sqrt{K_o^2 - h^2}$$

$$K_1 = \sqrt{0.2337 - 0.1552} \quad K_1 = 0.2801 \text{ m}$$

$$K_2 = \sqrt{0.2002 - 0.1354} \quad K_2 = 0.2545 \text{ m}$$

$$K_3 = \sqrt{0.1806 - 0.1246} \quad K_3 = 0.2366 \text{ m}$$

$$K_4 = \sqrt{0.1600 - 0.1095}$$

$$K_4 = 0.2247 \text{ m}$$

$$K_5 = \sqrt{0.1418 - 0.0912}$$

$$K_5 = 0.2249 \text{ m}$$

$$l = \frac{K^2 + h^2}{h}$$

$$l_1 = \frac{(0.2801)^2 + (0.1552)}{0.394}$$

$$l_1 = 0.5930 \text{ m}$$

$$l_2 = \frac{(0.2545)^2 + 0.1354}{0.368}$$

$$l_2 = 0.5439 \text{ m}$$

$$l_3 = \frac{(0.2366)^2 + 0.1246}{0.353}$$

$$l_3 = 0.5115 \text{ m}$$

$$l_4 = \frac{(0.2247)^2 + 0.1095}{0.331}$$

$$l_4 = 0.4833 \text{ m}$$

$$l_5 = \frac{(0.2249)^2 + 0.0912}{0.302}$$

$$l_5 = 0.4694 \text{ m}$$

Al principio de la práctica se dijo que si al péndulo compuesto se le golpea justamente en su centro de percusión, ad quiere un movimiento de oscilación en torno al eje que pasa por el punto de suspensión, sin que exista deslizamiento en este punto de suspensión.

Como ejemplo tomaremos ahora los valores obtenidos de la cuarta prueba:

$$T = 1.395 \text{ seg}$$

$$h = 0.331 \text{ m}$$

$$A = 0.40 \text{ m}$$

$$l = 0.4833 \text{ m}$$

En esta prueba el centro de percusión del péndulo compuesto se encuentra a una distancia  $l = 0.4833 \text{ m}$  medida desde el punto de suspensión. Entonces utilizando el péndulo simple de plomada esferoidal B6 y colocándolos como se muestra en la figura 13.1 dando una distancia  $l = 0.4833 \text{ m}$  medida desde el -

punto de suspensión al centro de la plomada esferoidal, se hace golpear al péndulo compuesto en su centro de percusión con la plomada esferoidal. Se observa que el péndulo compuesto empieza a oscilar en torno al punto de suspensión pero lentamente - los golpes del péndulo simple en el centro de percusión del péndulo compuesto hacen retardar el movimiento de oscilación, de este último sin que exista deslizamiento del punto de suspensión ( o sea del borde del soporte de cuña sobre la viga de acero).

### 1.3.5.- CONCLUSIONES.

La distribución de las masas a lo largo de un péndulo compuesto en torno a su punto de suspensión, determina el centro de percusión del mismo.

Si se golpea a un péndulo compuesto justo en su centro de percusión, es decir en donde se considera concentrada su masa; no habrá ninguna reacción horizontal en su punto de suspensión.

Si no es golpeado exactamente en su centro de percusión existe deslizamiento del punto de suspensión, es decir hay reacción horizontal en ese punto.

## PRACTICA 1.4

DETERMINACION DE LA ACELERACION DE LA GRAVEDAD POR MEDIO  
DEL PENDULO REVERSIBLE KATER.

## 1.4.1.- INTRODUCCION:

La aceleración de la gravedad ( $g$ ) es una de las constantes - más importantes en el estudio de la Mecánica.

Esta varía principalmente del lugar en el que se efectúan - las pruebas mecánicas.

La aceleración de la gravedad puede encontrarse por medio de las ecuaciones de movimiento . Pero una manera más exacta y - sencilla para determinarla, es usando el péndulo Kater, que esencialmente es un péndulo compuesto reversible (figura 1.4.1).

## 1.4.2.- OBJETIVO:

Evaluar la aceleración de la gravedad por medio del péndulo- Kater.

## 1.4.3.- EQUIPO:

- . Varilla de acero de 0.915 m de longitud.
- . Plomada cilíndrica ajustable B4.
- . 2 soportes de cuña ajustables.
- . Viga horizontal de acero endurecido E1 .
- . Cronómetro.
- . Flexómetro.

## 1.4.4.- DESARROLLO :

## TEORIA

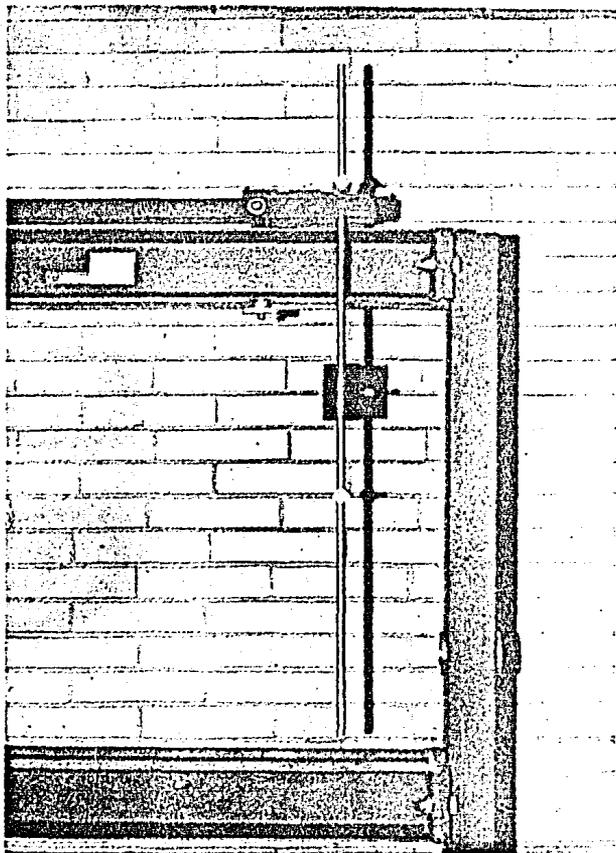


Figura 1.4.1

Péndulo Kater.

El arreglo del péndulo reversible Kater se muestra en la figura 1.4.2

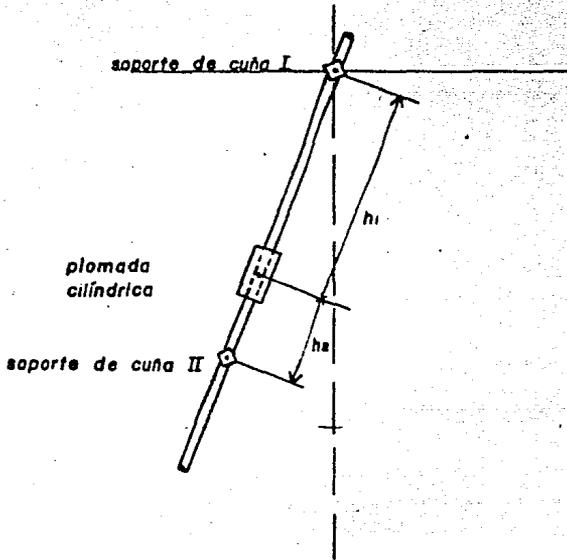


Figura 1.4.2

En donde se observa que la distancia del centro de los soportes de cuña a cada uno de los extremos es diferente. Y que la plomada cilíndrica no está colocada a la mitad de la distancia entre los dos soportes.

Si suponemos que el centro de gravedad del sistema de la figura 1.4.2 se encuentra exactamente en el centro de la plomada cilíndrica. La ecuación que nos define el periodo para esta posición (según la ecuación (1.2.12) obtenida en la práctica 1.2 para un péndulo compuesto) es:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{h_1^2 + K^2}{gh_1}} \quad (1.4.1)$$

Ahora si invertimos el péndulo y lo colocamos como lo muestra la figura 1.4.3.

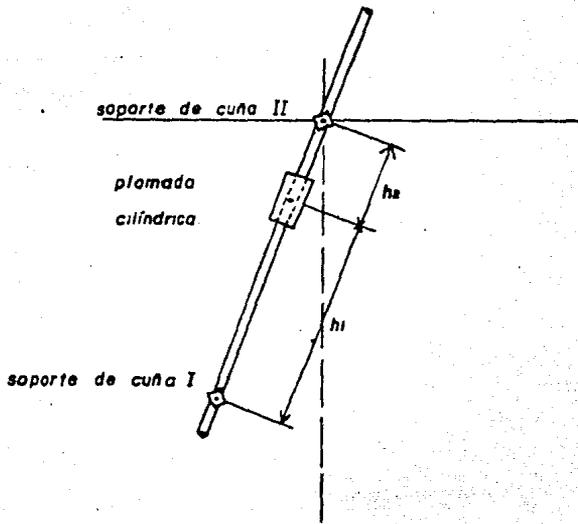


Figura 1.4.3

La ecuación que define el periodo para esta posición (según la ecuación (1.2.12) obtenida en la práctica 1.2 para un péndulo compuesto) es :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{h_2^2 + K^2}{gh_2}} \quad (1.4.2)$$

Si para las posiciones de las figuras 1.4.2 y 1.4.3 se logra que el período  $T_1$  sea aproximadamente igual al período  $T_2$ , - las ecuaciones (1.4.1) y (1.4.2) se podrán trabajar simultáneamente.

Si despejamos  $K^2$  en ambas tendremos:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{h_1^2 + K^2}{gh_1}}$$

$$T_1^2 = 4\gamma^2 \left( \frac{h_1^2 + K^2}{gh_1} \right)$$

$$K^2 = \frac{T_1^2 gh_1}{4\gamma^2} - h_1^2 \quad (1.4.3)$$

$$T_2 = 2\gamma \sqrt{\frac{h_2^2 + K^2}{gh_2}}$$

$$T_2^2 = 4\gamma^2 \left( \frac{h_2^2 + K^2}{gh_2} \right)$$

$$K^2 = \frac{T_2^2 gh_2}{4\gamma^2} - h_2^2 \quad (1.4.4)$$

Iguando (1.4.3) y (1.4.4)

$$\frac{T_1^2 gh_1}{4\gamma^2} - h_1^2 = \frac{T_2^2 gh_2}{4\gamma^2} - h_2^2$$

Efectuando el álgebra necesaria para despejar  $g$  se obtiene:

$$\frac{T_1^2 gh_1}{4\gamma^2} - h_1^2 - \frac{T_2^2 gh_2}{4\gamma^2} + h_2^2 = 0$$

$$\frac{g}{4\gamma^2} (T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2) - h_1^2 + h_2^2 = 0$$

$$\frac{g}{4\gamma^2} = (T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2) = h_1^2 - h_2^2$$

$$\frac{g}{4\gamma^2} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{(T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2)}$$

$$g = \frac{4\gamma^2 (h_1^2 - h_2^2)}{(T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2)} \quad (1.4.5)$$

Por medio de la ecuación (1.4.5) , conociendo los parámetros  $T_1$  ,  $T_2$  ,  $h_1$  y  $h_2$  , podremos obtener un valor aceptable y a -  
proximado de la aceleración de la gravedad ( $g$ ) para el lugar  
en donde se efectúan las pruebas.

Para llevar a cabo el experimento procederemos como sigue:

1.- Colocar el péndulo Kater como se muestra en la figura -  
1.4.2, de manera que las distancias del centro de la plomada  
cilíndrica al centro de los soportes de cuña sean diferentes.

Así como las distancias de los bordes de cuña a los extre-  
mos de la varilla también sean diferentes.

2.- Para esta posición. Tomar al tiempo transcurrido para 10  
oscilaciones y obtener su periodo ( $T_1$  ).

3.- Invertir el péndulo Kater de manera que se encuentre co-  
mo en la figura 1.4.3 y para 10 oscilaciones obtener su perio-  
do ( $T_2$ ).

4.- Se observará que  $T_1 \neq T_2$  .

5.- Sin mover los soportes de cuña, recorrer la plomada ci-  
lindrica a lo largo de la varilla, y volver a calcular  $T_1$  y -  
 $T_2$  , hasta que estos periodos sean aproximadamente iguales -  
( $T_1 \approx T_2$  ).

6.- Obtener  $h_1$  y  $h_2$  siendo éstas las distancias del centro -  
de gravedad del sistema a los soportes de cuña I y II respec-  
tivamente.

7.- Con los valores obtenidos de  $T_1$  ,  $T_2$  ,  $h_1$  y  $h_2$  encontrar el  
valor de  $g$ , utilizando la ecuación (1.4.5).

Al efectuar estas pruebas en la Ciudad de México se obtuvie-  
ron los siguientes resultados:

Para un arreglo como el que se muestra en la figura 1.4.4

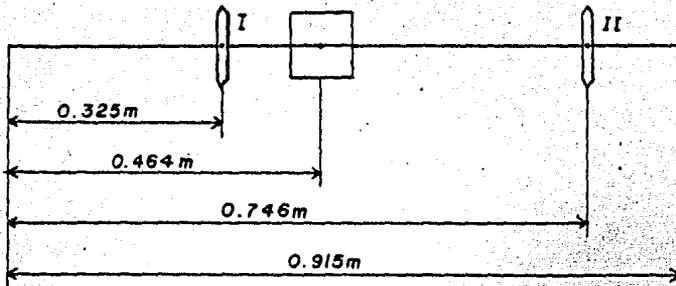


Figura 1.4.4

Se obtuvo que :

$$T_1 = 1.252 \text{ seg.}$$

$$T_2 = 1.276 \text{ seg.}$$

Para localizar el centro de gravedad del sistema de la figura 1.4.4 se recurrió al método por W.G. McLean en su libro - Mecánica Técnica, en donde el centro de gravedad de un conjunto es:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \Delta i}{\sum_{i=1}^n \Delta i}$$

en donde:

$\Delta i$  = magnitud . Por ejemplo, podría ser un elemento de longitud, área, volumen o masa.

$r_i$  = Vector de posición del elemento

$\sum_{i=1}^n \Delta i$  = suma de todos los n elementos

$\sum_{i=1}^n r_i \Delta i =$  momento de primer orden de todos los elementos respecto a un punto 0 seleccionado.

Por lo tanto:

masa de la varilla de acero  $m_1 = 0.091$  Kg.

masa de los soportes de cuña  $m_2 = m_4 = 0.016$  Kg.

masa de la plomada cilíndrica  $m_3 = 0.112$  Kg.

Si calculamos  $r$  medida a partir de 0 (figura 1.4.5) tenemos:

$$\bar{r} = \frac{m_1 (0.4575) + m_2 (0.325) + m_3 (0.464) + m_4 (0.746)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Sustituyendo:

$$\bar{r} = \frac{0.091 (0.4575) + 0.016(0.325) + 0.112 (0.464) + 0.016(0.746)}{0.091 + 0.016 + 0.112 + 0.016}$$

$$\bar{r} = 0.4713 \text{ m}$$

Es decir que el centro de gravedad (C.G) del sistema se encuentra a 0.4713 m a partir de 0 (figura 1.4.5)

Por lo tanto

$$h_1 = 0.1463 \text{ m}$$

$$h_2 = 0.2747 \text{ m}$$

Sustituyendo estos resultados obtenidos en forma experimental en la ecuación (1.4.5) tenemos:

$$g = \frac{4\pi^2 [(0.1463)^2 - (0.2747)^2]}{[(1.252)^2 (0.1463) - (1.276)^2 (0.2747)]}$$

$$g = 9.792 \text{ m / seg}^2$$

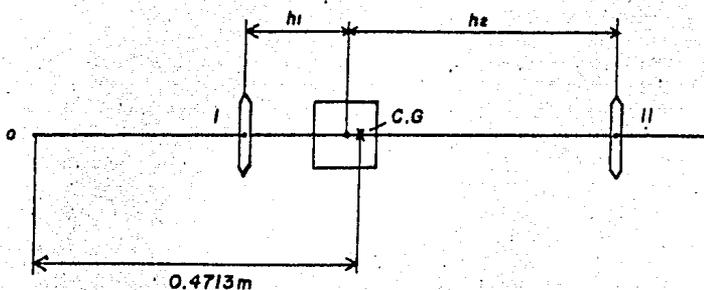


Figura 1.4.5

#### 1.4.5.- CONCLUSION

Al observar el resultado obtenido en esta práctica,  $g = 9.792 \text{ m/seg}^2$  en la Ciudad de México, podemos constatar la aceptabilidad de este valor con el valor oficial de  $g = 9.76 \text{ m/seg}^2$ .

Este método es muy conveniente y fácil para encontrar el valor de la aceleración de la gravedad, pero debe tenerse cuidado al efectuar las mediciones de tiempo puesto que cualquier error en éstas equivaldría a obtener un valor de  $g$  equivoco.

## PRACTICA 1.5

### SUSPENSION BIFILAR.

#### 1.5.1.- INTRODUCCION.

La Suspensión Bifilar es usada para determinar el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje que pase a través de su centro de gravedad. Si se tiene un cuerpo suspendido por dos cuerdas paralelas de longitud  $l$ , separados una distancia  $d$  y si la masa del cuerpo es  $m$ , como se muestra en la figura 1.5.1 entonces la tensión en cualquiera de los dos cuerdas es:

$$T = \frac{mg}{2} \quad (1.5.1)$$

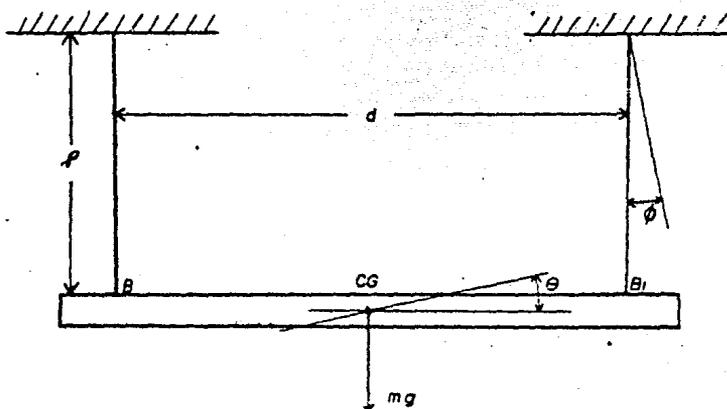


Figura 1.5.1

Si se rompe el estado de equilibrio del sistema, es decir, si el cuerpo se desplaza hacia un lado, los cuerdas formarán un ángulo  $\phi$  con respecto a la posición vertical original. Esto equivale a desplazar el cuerpo un pequeño ángulo  $\theta$  con respecto a su centro de gravedad CG.

Si ambos ángulos son pequeños se cumple que:

$$l \phi = \frac{d}{2} \theta \quad (1.5.2)$$

Suponiendo que para pequeños desplazamientos angulares  $\phi$ , la tensión en los cordales es la misma  $T = mg/2$ .

La fuerza restauradora sobre el eje  $x$ , ( $F_x$ ), (figura 1.5.2) en los puntos de adhesión de los cordales ( $B$  y  $B_1$ ), será :

$$F_x = \text{sen } T \phi$$

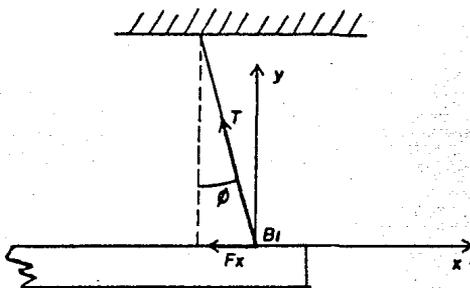


Figura 1.5.2

pero sabemos que

$$T = \frac{mg}{2} \quad (1.5.1)$$

por lo tanto

$$F_x = \frac{mg \text{ sen } \phi}{2}$$

pero para valores pequeños de  $\phi$ ,  $\text{sen } \phi \doteq \phi$ , entonces

$$F_x = \frac{mg}{2} \phi \quad (1.5.3)$$

además de la ecuación (1.5.2)

$$\phi = \frac{d\theta}{2l}$$

sustituyendo en (1.5.3) tenemos

$$\text{fuerza restauradora} = \frac{mg}{4} \frac{d\theta}{l} \quad (1.5.4)$$

y el par restaurador es

$$\text{par restaurador} = - \frac{mg}{4} \frac{d\theta}{l} \cdot d$$

ordenando

$$\text{par restaurador} = - \frac{mg}{4l} d^2 \theta \quad (1.5.5)$$

Aplicando los conceptos de momento y aceleración angular tenemos:

$$- \frac{mg}{4l} d^2 \theta = I \ddot{\theta} \quad (1.5.6)$$

ordenando la ecuación anterior

$$\ddot{\theta} + \frac{mg}{4I} \frac{d^2}{l} \theta = 0 \quad (1.5.7)$$

Resultando un movimiento Armónico Simple cuyo periodo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4}{m} \frac{I}{g} \frac{l}{d^2}} \quad (1.5.8)$$

y de esta ecuación

$$I = \frac{mg}{16} \frac{d^2 T^2}{l} \quad (1.5.9)$$

La ecuación (1.5.3) también la podemos expresar de la siguiente forma:

$$T = 2\pi \frac{2I}{d} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.5.10)$$

si definimos

$$K^2 = \frac{I}{m} \quad (1.5.11)$$

de la ecuación (5.10)

$d$  es la distancia entre los cordeles.

$l$  es la longitud de los cordeles.

$K$  es el radio de giro del cuerpo con respecto a su centro de gravedad.

#### 1.5.2.- OBJETIVO.

Determinar el momento de inercia ( $I$ ) de una barra rectangular, con respecto al eje que pasa a través de su centro de gravedad, utilizando masas bifilares y variando la longitud de sus pennisión.

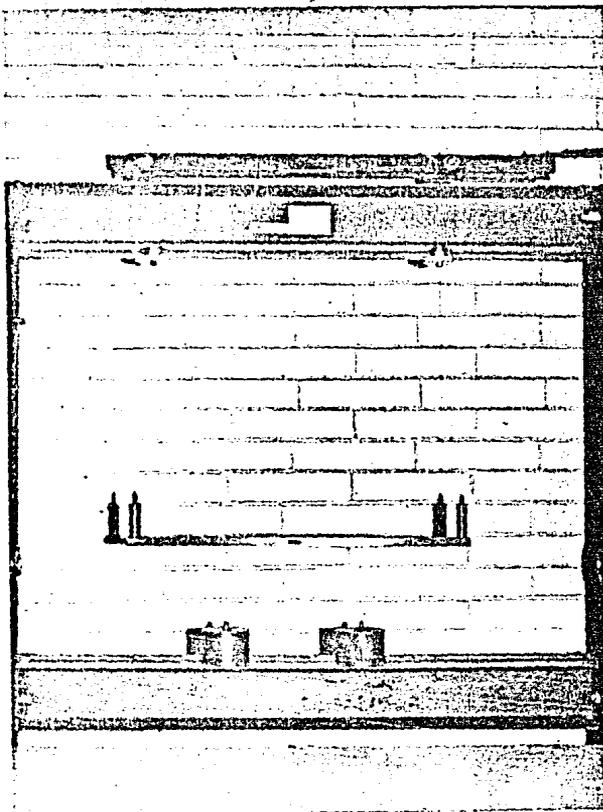
#### 1.5.3.- EQUIPO.

- . Viga horizontal de acero endurecido BI
- . Barra rectangular de acero.
- . 2 pesos de acero (1.35 Kg c/u) .
- . 2 cables delgados.
- . Flexómetro.
- . Cronómetro.

#### 1.5.4.- METODO EXPERIMENTAL.

El equipo se coloca como se muestra en la figura 1.5.3.

La viga se suspende de los dos cables delgados y éstos se hacen pasar a través de las boquillas de la viga horizontal BI, cuidando que las longitudes de los dos cables ( $l$ ), sean las mismas.



*Figura 1.5.3*

*Suspensión Bifilar.*

NOTA: Tener cuidado de apretar fuertemente las boquillas para evitar que la viga caiga.

Desplazar un pequeño ángulo los cables de su posición vertical original y dejar que la barra oscile libremente.

Tomar el tiempo para 20 oscilaciones y obtener su periodo de oscilación (T). Obtener también el valor de K despejando éste de la ecuación (1.5.10).

$$T = \frac{4\pi K}{d} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.5.10)$$

$$K = \frac{T d}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.5.12)$$

Sabiendo que d es la distancia entre los cables y ésta es constante e igual a 0.492 m, además  $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$ .

Por último determinar el valor de I de la ecuación (1.5.10)

$$K^2 = \frac{I}{m} \quad (1.5.11)$$

$$I = K^2 m \quad (1.5.13)$$

En donde K es el radio de giro previamente calculado y m es la masa de la viga y ésta es igual a 0.1416 Kg.

Podemos efectuar el mismo desarrollo anterior para cuando variamos la longitud (l) y la masa total de la viga (m), adiciéndole a ésta dos masas de 0.5133 Kg cada una a distancias iguales de su centro de gravedad CG, siendo b la distancia entre las masas. Y de esta manera calculamos I nuevamente.

NOTA: La viga tiene perforaciones a lo largo de ella en las cuales se incertan las masas.

A continuación se muestra una tabla de resultados para diferentes valores de I, m y b, y en la cual se pueden observar los valores obtenidos de K e I.

20 oscilaciones								
Prueba	t	T	l	b	K	K <sup>2</sup>	m	I
No	seg	seg	m	m	m	m <sup>2</sup>	Kg	Kg-m <sup>2</sup>
1	19.7	0.935	0.24	sin masas	0.2415	0.0583	0.1416	0.0032
2	19.7	0.985	0.24	0.25	0.2415	0.0583	0.5188	0.0302
3	22.1	1.105	0.30	0.25	0.2423	0.0587	0.5188	0.0304
4	28.6	1.430	0.50	0.25	0.2429	0.0590	0.5188	0.0306
5	33.7	1.685	0.70	0.35	0.2419	0.0585	0.5183	0.0303
6	36.0	1.800	0.79	0.35	0.2432	0.0591	0.5183	0.0306

Tabla de resultados 1.5.1

Memoria de cálculo para la tabla 1.5.1

$$K = \frac{T d}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$K_1 = \frac{0.935 (0.482)}{4\pi} \sqrt{\frac{9.81}{0.24}} ; K_1 = 0.2415 \text{ m} ; K_1^2 = 0.0583 \text{ m}^2$$

$$K_2 = \frac{0.985 (0.482)}{4} \sqrt{\frac{9.81}{0.24}} ; K_2 = 0.2415 \text{ m} ; K_2^2 = 0.0583 \text{ m}^2$$

$$K_3 = \frac{1.105 (0.482)}{4} \sqrt{\frac{9.81}{0.30}} ; K_3 = 0.2423 \text{ m} ; K_3^2 = 0.0587 \text{ m}^2$$

$$K_4 = \frac{1.43 (0.432)}{47} \sqrt{\frac{9.81}{0.50}} ; K_4 = 0.2429 \text{ m} ; K_4^2 = 0.0590 \text{ m}^2$$

$$K_5 = \frac{1.685 (0.432)}{47} \sqrt{\frac{9.81}{0.70}} ; K_5 = 0.2419 \text{ m} ; K_5^2 = 0.0583 \text{ m}^2$$

$$K_6 = \frac{1.8 (0.482)}{47} \sqrt{\frac{9.81}{0.79}} ; K_6 = 0.2432 \text{ m} ; K_6^2 = 0.0591 \text{ m}^2$$

$$I = K^2 m$$

$$I_1 = 0.0583 (0.1416) = 0.0082 \text{ Kgm}^2$$

$$I_2 = 0.0583 (0.5188) = 0.0302 \text{ Kgm}^2$$

$$I_3 = 0.0587 (0.5188) = 0.0304 \text{ Kgm}^2$$

$$I_4 = 0.0590 (0.5188) = 0.0306 \text{ Kgm}^2$$

$$I_5 = 0.0585 (0.5188) = 0.0303 \text{ Kgm}^2$$

$$I_6 = 0.0591 (0.5188) = 0.0306 \text{ Kgm}^2$$

#### 1.5.5.- CONCLUSIONES.

Podemos observar en las pruebas efectuadas cuyos resultados aparecen en la tabla 1.5.1, lo siguiente:

1) El radio de giro de la viga con respecto a su centro de gravedad (K) es el mismo para la viga con y sin masas adicionales.

2) El momento de inercia con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad es mucho mayor con masas adicionales que sin ellas. Por lo tanto si aumenta la masa total de la viga (m), aumenta el momento de inercia (I).

3) El radio de giro ( $K$ ) y el momento de inercia ( $I$ ), se mantienen constantes, aunque varíe la longitud de suspensión ( $l$ ).

4) Se observa también que cuando existe un cambio en la separación entre las masas el momento de inercia ( $I$ ) se mantiene constante.

## PRACTICA 1.6 .

## SISTEMA MASA-RESORTE.

## 1.6.1.-INTRODUCCION.

Cuando un resorte helicoidal se somete a extensión, debido a la aplicación de una carga, la deformación elástica que sufre es proporcional a la fuerza aplicada, conforme la Ley de Hooke:

$$F = Kx$$

Si se traza una gráfica de carga contra extensión, generalmente obtendremos una línea recta (figura 1.6.1).

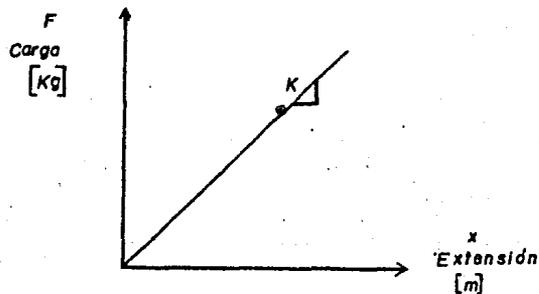


Figura 1.6.1

La pendiente de esta línea recta es  $K$ , y se le conoce como constante elástica del resorte, y sus unidades son  $\text{Kg}/\text{m}$ .

De acuerdo con la teoría de Vibraciones, vista en este manual si el resorte ejecuta oscilaciones verticales libremente, la ecuación de movimiento será:

$$m \ddot{x} + K x = 0 \quad (1.I.3)$$

Físicamente esta ecuación representa una vibración libre sin amortiguamiento, en la cual el periodo de vibración es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}} \quad (1.6.1)$$

Donde  $\sqrt{\frac{K}{M}} = \omega$  representa la frecuencia angular de la vibración, y sus unidades son rad/seg.

Y  $\frac{1}{T} = f$  representa la frecuencia natural de la vibración y sus unidades son ciclos/seg, Hz o  $\text{seg}^{-1}$ .

#### 1.6.2.- OBJETIVOS.

1.- Encontrar la constante elástica (K) de tres resortes helicoidales diferentes.

2.- Obtener el periodo de vibración (T), la frecuencia angular de vibración ( $\omega$ ) y la frecuencia natural de vibración (f), para tres resortes helicoidales diferentes, variando la masa del sistema.

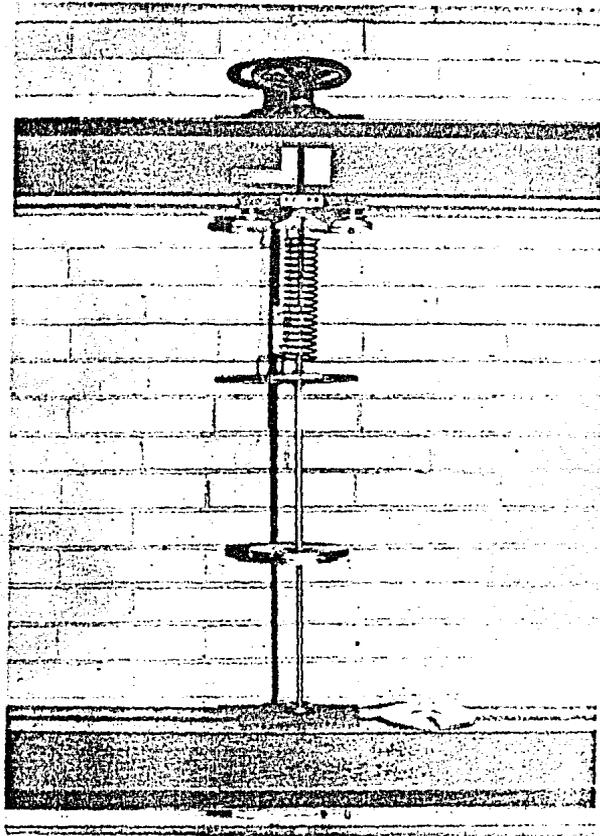
#### 1.6.3.- EQUIPO.

- . 3 resortes helicoidales.
- . Soporte de resortes C1.
- . Cojinete Guía C2
- . Plataforma de carga C3
- . 15 discos con pesos de 0.4 Kg c/u .
- . Calibrador de fondo con Vernier.
- . Cronómetro.

#### 1.6.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

El equipo se coloca como se muestra en la figura 1.6.2.

Se toma cualquiera de los tres resortes y se sujeta de un ex



*Figura 1.6.2*

*Sistema Masa Resorte.*

tremo del soporte de resortes CI. Antes de colocar la plataforma de carga C3 en el otro extremo del resorte, medimos la longitud de éste con ayuda del calibrador de fondo con Vernier ajustado a un lado del soporte de resortes CI (figura 1.6.3).

NOTA: Al colocar la plataforma de carga de peso 1.47 Kg, el resorte sufre una deformación o extensión en su longitud que debemos tomar en cuenta.

La varilla de la plataforma de carga deberá pasar a través del cojinete guía C2, para evitar el movimiento en cualquier otra dirección, de tal manera que estén alineados verticalmente el eje de la varilla de la plataforma de carga y el eje central del resorte.

Cualquier grado de desalineamiento acarreará errores en nuestros resultados.

NOTA: Podemos reducir la fricción entre el cojinete guía y la varilla al mínimo, untando un poco de grasa alrededor del cojinete.

Ahora debemos ir colocando pesos sobre la plataforma de carga en forma proporcional e ir midiendo los incrementos de la longitud del resorte para cada peso anexado utilizando el calibrador.

Las tablas 1.6.1, y 1.6.3 nos muestran una relación de carga contra extensión para cada uno de los resortes, indicando el diámetro del alambre para su identificación.

Para cada una de las tablas anteriores, trazaremos su correspondiente gráfica de Carga (F) contra Extensión (x), las cuales se muestran en las figuras 1.6.4, 1.6.5 y 1.6.6.

NOTA: El primer punto de cada gráfica corresponde a la extensión que sufre el resorte al suspenderse de él la plataforma de carga C3 de peso 1.47 Kg.

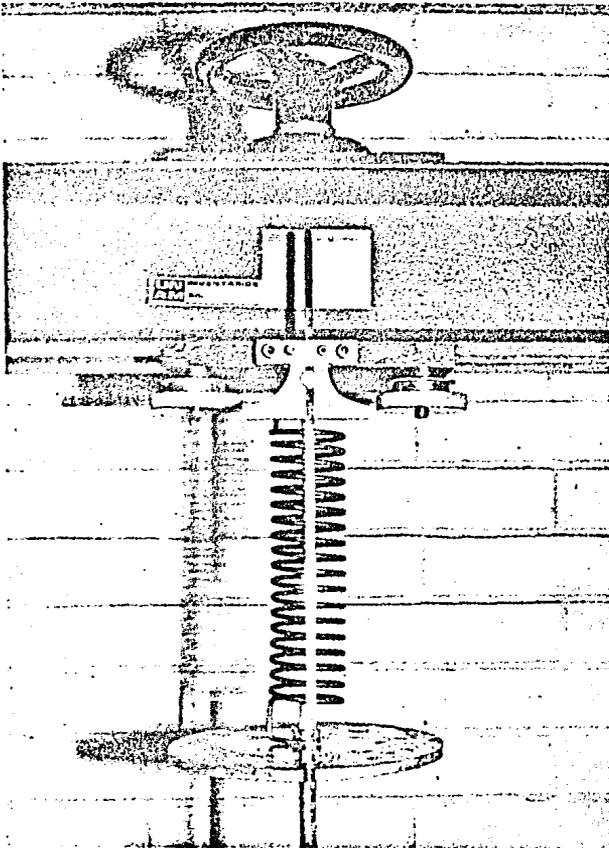


Figura 1.6.3

Sistema Masa Resorte (detalle).

Carga	Extensión
F	x
Kg	m
1.47	0.0435
1.97	0.0552
2.27	0.0671
2.67	0.0788
3.07	0.0905
3.47	0.1017
3.87	0.1133
4.27	0.1250

Tabla de resultados 1.6.1

Diámetro de la espira = 0.0454 m

Diámetro del alambre = 0.00265 m

Carga	Extensión
F	x
Kg	m
1.47	0.0155
1.37	0.0200
2.27	0.0238
2.67	0.0238
3.07	0.0327
3.47	0.0360
3.37	0.0430
4.27	0.0454
4.67	0.0497
5.07	0.0544
5.47	0.0592
5.37	0.0624
6.27	0.0668
6.67	0.0711
7.07	0.0753
7.47	0.0796

Tabla de resultados 1.6.2

Carga	Extensión
F	x
Kg	m
1.47	0.0004
1.37	0.0014
2.27	0.0024
2.67	0.0034
3.07	0.0044
3.47	0.0054
3.87	0.0064
4.27	0.0074
4.67	0.0084
5.07	0.0094
5.47	0.0104
5.37	0.0114
6.27	0.0124
6.67	0.0134
7.07	0.0144
7.47	0.0154

Tabla de resultados 1.6.3

Diámetro de la espira = 0.0441 m      Diámetro de la espira = 0.0435 m

Diámetro del alambre = 0.0033 m      Diámetro del alambre = 0.0033 m

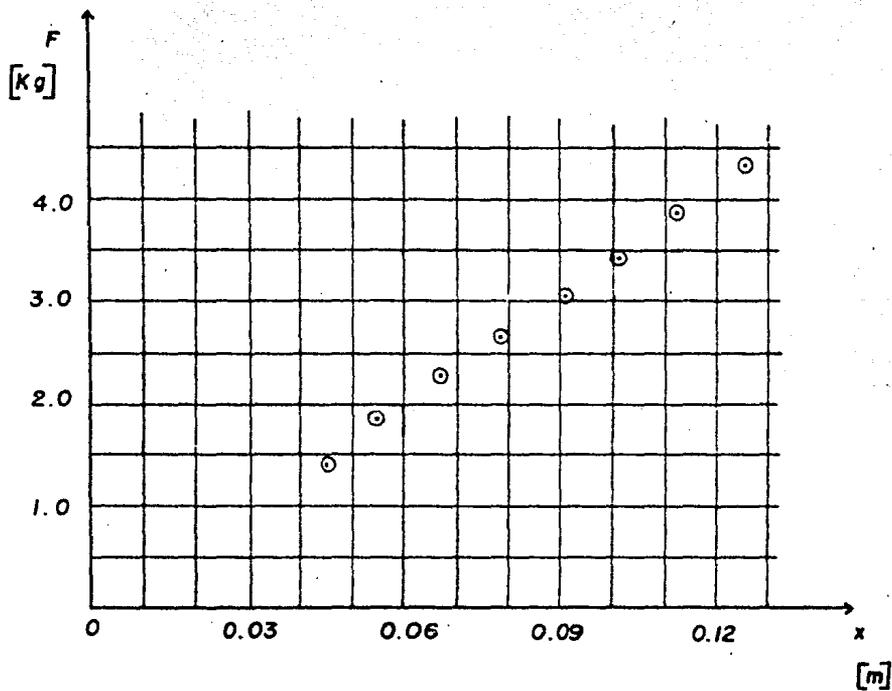


Figura 1.6.4

Diámetro de la espira = 0.0454m

Diámetro del alambre = 0.00265m

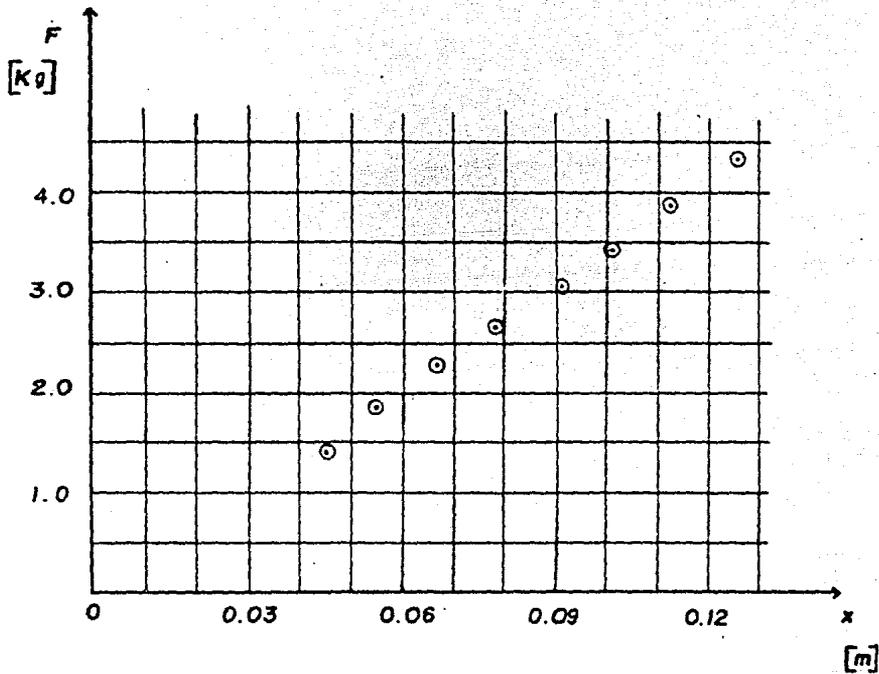


Figura 1.6.4

Diámetro de la espira = 0.0454m

Diámetro del alambre = 0.00265m

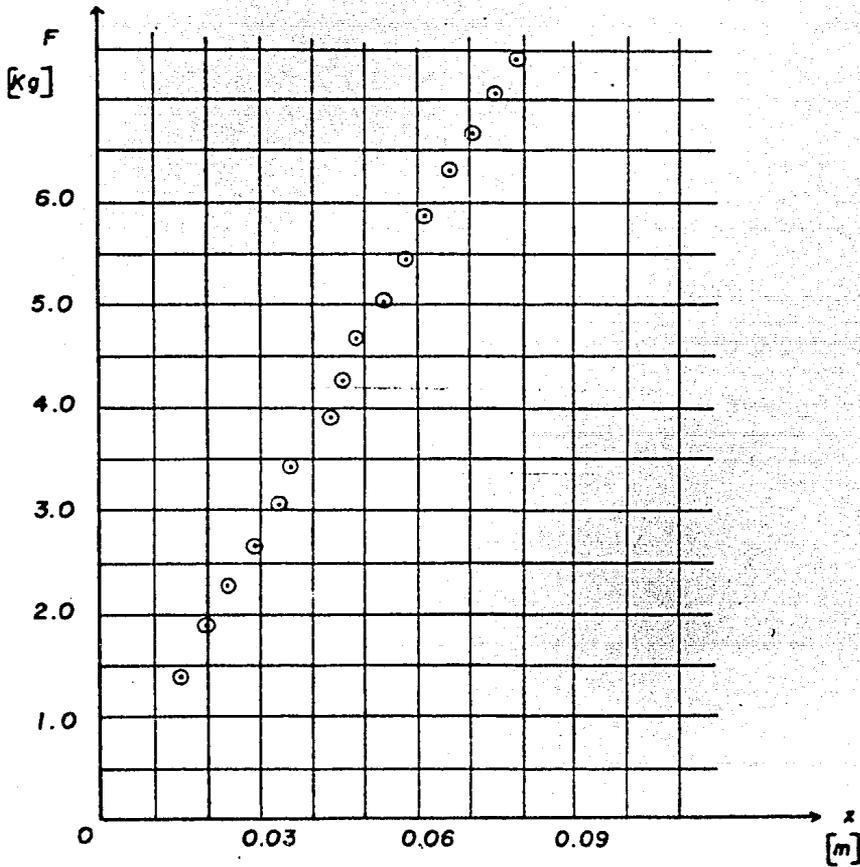


Figura 1.6.5

Diámetro de la espira = 0.0441 m

Diámetro del alambre = 0.0033 m

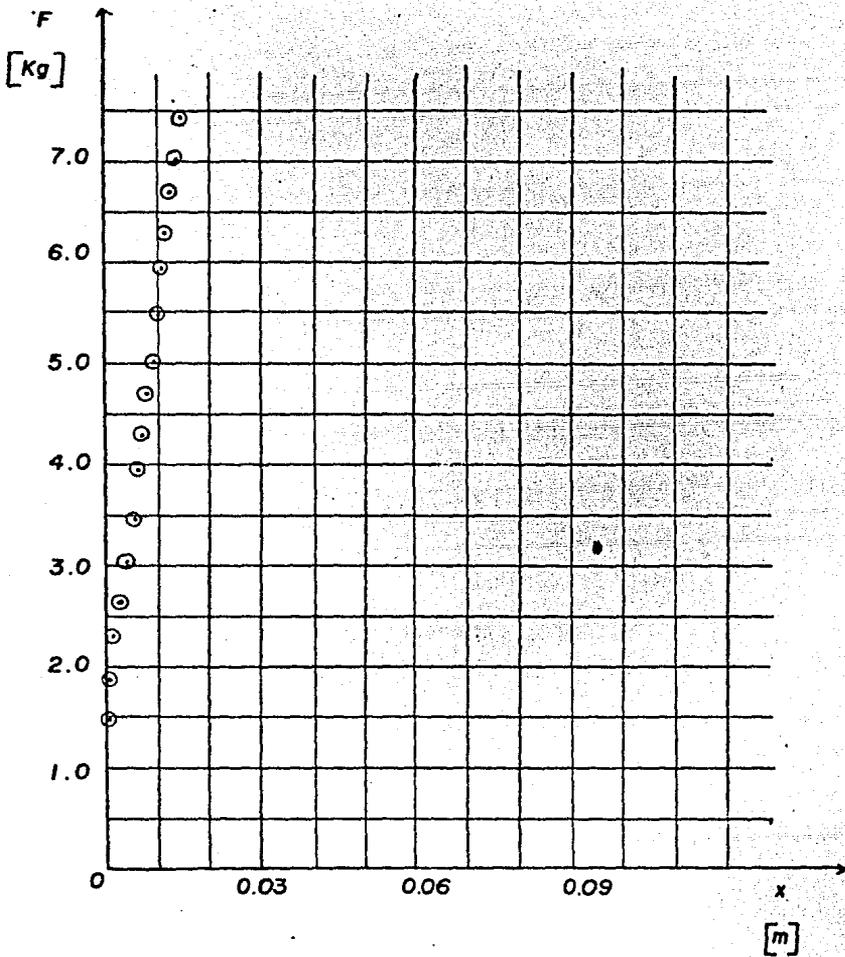


Figura 1.6.6

Diámetro de la espira = 0.0485 m

Diámetro del alambre = 0.0050 m

En las gráficas trazadas , la secuencia de puntos grafica dos no trazan exactamente una línea recta, por lo tanto podemos utilizar cualquier método de linealización como lo es el Método de Mínimos Cuadrados, y así obtener una pendiente común para cada gráfica.

Entonces para la gráfica de la figura 1.6.4 resulta :

$\tau$	$x$		
$y$	$x$	$xy$	$x^2$
1.47	0.0435	0.063945	0.0013923
1.87	0.0552	0.103224	0.003047
2.27	0.0671	0.152317	0.0045024
2.67	0.0788	0.210396	0.0062094
3.07	0.0905	0.277835	0.0081903
3.47	0.1017	0.352899	0.0103429
3.87	0.1133	0.438471	0.0128369
4.27	0.1250	0.533750	0.0156250

$$\sum y = 22.96 \quad \sum x = 0.6751 \quad \sum xy = 2.132837 \quad \sum x^2 = 0.0626462$$

De la relación lineal  $y = mx + b$

$$m = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Sustituyendo

$$m = \frac{8(2.132837) - 0.6751(22.96)}{8(0.0626462) - (0.6751)^2}; \quad m = 34.406829$$

$$b = \frac{(22.96)(0.0626462) - (2.132837)(0.6751)}{8(0.0626462) - (0.6751)^2}; \quad m = 34.406829$$

$$b = -0.0335063$$

Por lo tanto  $y = 34.406829 x - 0.0335063$

Para la gráfica de la figura 1.6.5 resulta :

F	x		
y	x	xy	x <sup>2</sup>
1.47	0.0155	0.022785	0.0002403
1.87	0.0200	0.0374	0.0004000
2.27	0.0238	0.05221	0.0005664
2.67	0.0280	0.07476	0.000784
3.07	0.0327	0.100389	0.0010693
3.47	0.0360	0.12492	0.001296
3.87	0.0430	0.16641	0.001849
4.27	0.0454	0.193358	0.002.612
4.67	0.0497	0.232099	0.0024701
5.07	0.0548	0.275808	0.003003
5.47	0.0582	0.318354	0.003372
5.87	0.0624	0.366288	0.0033933
6.27	0.0668	0.418836	0.0044622
6.67	0.0711	0.474237	0.0050552
7.07	0.0753	0.532371	0.0056701
7.47	0.0796	0.594612	0.0063362

$$\sum y = 71.52 \quad \sum x = 0.7623 \quad \sum xy = 3.935337 \quad \sum x^2 = 0.042544$$

De la relación lineal  $y = mx + b$

$$m = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Sustituyendo.

$$m = \frac{16(3.935337) - (0.7623)(71.52)}{16(0.042544) - (0.7623)^2}$$

$$m = 92.825747$$

$$b = \frac{(71.52)(0.042544) - (3.985337)(0.7623)}{16(0.042544) - (0.7623)^2}$$

$$b = 0.0474333$$

Por lo tanto  $y = 92.825747 x + 0.0474333$

Para la gráfica de la figura 1.6.6 resulta :

F y	X x	xy	x <sup>2</sup>
1.47	0.0004	0.000588	0.0000002
1.87	0.0014	0.002618	0.000002
2.27	0.0024	0.005448	0.0000058
2.67	0.0034	0.009078	0.0000116
3.07	0.0044	0.013508	0.0000194
3.47	0.0054	0.018738	0.0000292
3.87	0.0064	0.024768	0.000041
4.27	0.0074	0.031598	0.0000548
4.67	0.0084	0.039228	0.0000706
5.07	0.0094	0.047658	0.0000384
5.47	0.0104	0.056888	0.0001082
5.87	0.0114	0.066918	0.00013
6.27	0.0124	0.077748	0.0001538
6.67	0.0134	0.089378	0.0001796
7.07	0.0144	0.101808	0.0002074
7.47	0.0154	0.115038	0.0002372

$$\sum y = 71.52 \quad \sum x = 0.1264 \quad \sum xy = 0.701008 \quad \sum x^2 = 0.0013392$$

De la relación lineal  $y = mx + b$

$$m = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Sustituyendo

$$m = \frac{16(0.701008) - (0.12640)(71.52)}{16(0.0013392) - (0.1264)^2} \quad m = 399.24847$$

$$b = \frac{71.52(0.0013392) - (0.701008)(0.1264)}{16(0.0013392) - (0.1264)^2} \quad b = 1.3159371$$

$$\text{Por lo tanto} \quad y = 399.24847 x + 1.3159371$$

La pendiente obtenida (m) para cada recta nos representa la relación F/x e indica el valor de la constante K en Kg/m.

Por lo tanto

Para el resorte helicoidal de diámetro de la espira = 0.0454 m y diámetro del alambre = 0.00265 m, su constante de elasticidad es :

$$K = 34.406829 \text{ Kg/m}$$

Para el resorte helicoidal de diámetro de la espira = 0.0441 m y diámetro del alambre = 0.0033 m, su constante de elasticidad es:

$$K = 92.825747 \text{ Kg/m}$$

Y para el resorte helicoidal de diámetro de la espira = 0.0485 m y diámetro del alambre = 0.0050 m, su constante de elasticidad es :

$$K = 399.24847 \text{ Kg/m}$$

A continuación encontraremos el periodo de vibración (T), la frecuencia angular de vibración ( $\omega$ ) y la frecuencia natural (f) para cada resorte variando la masa del sistema.

Para esto trabajaremos con cada uno de los resortes colocándolos como muestra la figura 1.6.1.

Sin anexar pesos a la plataforma de carga, tiramos de ésta cuidadosamente hacia abajo y la soltamos, induciendo vibraciones verticales en el sistema; tomamos el tiempo (t) para 20 vibraciones y calculamos el periodo de vibración del sistema.

En forma proporcional vamos adicionando pesos, colocándolos sobre la plataforma de carga y obtenemos el periodo de vibración para cada peso adicionado al sistema.

De los valores prácticos obtenidos de T, K y m, calculamos la frecuencia angular de vibración ( $\omega$ )

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

y la frecuencia natural de vibración (f)

donde

$$f = \frac{1}{T}$$

Esto para cada prueba efectuada.

Las tablas 1.6.4, 1.6.5 y 1.6.6 muestran los resultados obtenidos para los tres resortes helicoidales.

20 oscilaciones.				
m	t	T	$\omega$	f
Kg	seg	seg	rad/seg	Hz
0.1498	3.6	0.43	15.153	2.325
0.1906	9.5	0.475	13.435	2.105
0.2313	10.5	0.525	12.196	2.904
0.2721	11.4	0.57	11.244	1.754
0.3129	12.2	0.61	10.486	1.639
0.3537	12.3	0.64	9.862	1.562
0.3944	13.6	0.63	9.340	1.470
0.4352	14.2	0.71	8.891	1.408

Tabla de resultados 1.6.4

Diámetro de la espira = 0.0454 m

Diámetro del alambre = 0.00265 m

20 oscilaciones				
m	t	T	$\omega$	f
Kg	seg	seg	rad/seg	Hz
0.1498	5.2	0.26	24.843	3.846
0.1906	5.7	0.285	22.068	3.503
0.2313	6.4	0.32	20.033	3.125
0.2721	6.5	0.325	18.470	3.076
0.3129	7.3	0.365	17.223	2.739
0.3537	7.9	0.395	16.200	2.531
0.3944	8.2	0.41	15.341	2.439
0.4352	8.6	0.43	14.604	2.325
0.4760	9.0	0.45	13.964	2.222
0.5168	9.4	0.47	13.402	2.127
0.5575	9.7	0.485	12.903	2.061
0.5983	10.1	0.505	12.455	1.980
0.6391	10.5	0.525	12.051	1.904
0.6799	10.7	0.535	11.684	1.869
0.7206	11.1	0.555	11.349	1.801
0.7591	11.4	0.57	11.058	1.754

Tabla de resultados 1.6.5

Diámetro de la espira = 0.0441 m

Diámetro del alambre = 0.0033 m

20 oscilaciones .				
m	t	T	$\omega$	f
Kg	seg	seg	rad/seg	Hz
0.1498	2.4	0.120	51.625	3.333
0.1906	2.5	0.125	45.767	3.000
0.2313	2.6	0.130	41.546	2.692
0.2721	3.1	0.155	38.305	2.451
0.3129	3.3	0.165	35.720	2.260
0.3537	3.8	0.190	33.597	2.063
0.3944	4.0	0.200	31.816	1.900
0.4352	4.2	0.210	30.233	1.761
0.4760	4.5	0.225	28.961	1.644
0.5168	4.9	0.245	27.794	1.581
0.5575	5.0	0.250	26.760	1.500
0.5983	5.2	0.260	25.832	1.446
0.6391	5.3	0.265	24.994	1.377
0.6799	5.3	0.270	24.232	1.377
0.7206	5.4	0.270	23.538	1.303
0.7591	5.5	0.275	22.933	1.266

Tabla de resultados 1.6.6.

Diámetro de la espira = 0.0435 m

Diámetro del alambre = 0.0050 m

### 1.6.5.- CONCLUSIONES .

Conforme disminuye el diámetro del alambre de un resorte, - disminuye la constante de elasticidad (K) del mismo, y viceversa.

Esto lo podemos confirmar con la ecuación para encontrar la constante K de un resorte, que nos muestra Shigley en su libro- Diseño en Ingeniería Mecánica, Capítulo 8 Resortes Mecánicos:

$$K = \frac{d^4 G}{8 D^3 N}$$

donde

- K = Constante elástica de un resorte.
- d = diámetro del alambre del resorte.
- D = diámetro medio de la espira.
- N = número de espiras activas.
- G = módulo de elasticidad transversal.

De la cual observamos que al aumentar el diámetro del alambre del resorte (d), la constante de elasticidad (K) aumenta directamente proporcional a la cuarta potencia, y viceversa.

Cuando se inducen vibraciones verticales en un sistema masa-resorte:

a) El periodo de vibración será mayor utilizando un resorte de diámetro del alambre delgado, que uno de diámetro del alambre grueso.

b) Las frecuencias angular y natural del sistema serán menores utilizando un resorte de diámetro del alambre delgado, que uno de diámetro del alambre grueso.

c) Y para ambos diámetros del alambre (delgado y grueso), conforme aumenta la masa del sistema el periodo de vibración también aumenta, ocurriendo lo contrario con la frecuencia angular y la frecuencia natural del sistema.

## PRACTICA 1.7

## OSCILACIONES TORSIONALES DE UN ROTOR SIMPLE

## 1.7.1.- INTRODUCCION.

Otro ejemplo de movimiento armónico simple es la vibración angular periódica de una flecha elástica sujeta rígidamente a un rotor, también llamada vibración torsional.

Cuando una flecha se encuentra rígidamente unida a uno de sus extremos, y el otro extremo también se encuentra rígidamente unido pero a un rotor, si se hace girar el rotor (torciendo entonces la flecha) y luego se suelta, se inducirán vibraciones angulares en la flecha y oscilaciones torsionales en el rotor (figura 1.7.1).

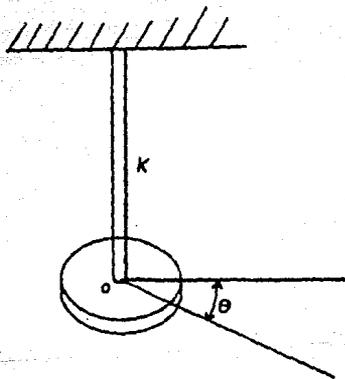


Figura 1.7.1

NOTA: Al arreglo de la figura 1.7.1, comúnmente se le llama péndulo de torsión.

Si representamos por  $\theta$  el desplazamiento angular del rotor, establecemos que la magnitud del par ejercido sobre la flecha

(figura 1.7.2)

$$\text{es :} \quad M = K \theta \quad (1.7.1)$$

Donde K es la constante de torsión de la flecha, o módulo de rigidez a la torsión.

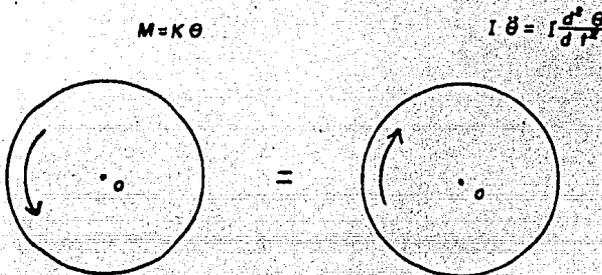


Figura 1.7.2

Como este par debe ser equivalente al par  $I \ddot{\theta}$  que representa las fuerzas activas del rotor, donde  $\ddot{\theta}$  es la aceleración angular e I es el momento de inercia de la masa del rotor, tenemos:

$$+ K \theta = - I \ddot{\theta} \quad (1.7.2)$$

$$\ddot{\theta} + K/I \theta = 0 \quad (1.7.3)$$

La ecuación (1.7.3) nos representa un movimiento armónico simple, para el cual el periodo de vibración torsional es :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} \quad (1.7.4)$$

De acuerdo a la teoría de Resistencia de Materiales, el ángulo de torsión de una flecha es :

$$\theta = \frac{M l}{(\pi d^4 / 32) G} \quad (1.7.5)$$

en donde

$M$  es el par ejercido sobre la flecha.

$l$  es la longitud de la flecha.

$G$  es el módulo de elasticidad transversal o al esfuerzo cortante.

$d$  es el diámetro de la flecha.

Por lo tanto de la ecuación (1.7.1)

$$K = \frac{M}{\theta}$$

Sustituyendo el ángulo  $\theta$  como lo define (1.7.5) tenemos :

$$K = \frac{\pi d^4 G}{32 l} \quad (1.7.6)$$

De la ecuación (1.7.6) podemos escribir

$$\frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}$$

donde  $R$  es el radio de la flecha, entonces la ecuación (1.7.6) queda de la siguiente forma :

$$K = \frac{\pi R^4 G}{2 l} \quad (1.7.7)$$

Ahora sustituyendo (1.7.7) en (1.7.4) tenemos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\pi R^4 G}} \quad (1.7.8)$$

pero de esta ecuación

$$\frac{\pi R^4}{2} = J$$

Donde J nos indica el segundo momento de área de la flecha - llamado también momento polar de inercia.

Por lo tanto la ecuación (1.7.3) se modifica de la siguiente manera.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I \ell}{J G}} \quad (1.7.9)$$

#### 1.7.2.- OBJETIVO.

Determinar la frecuencia torsional de un sistema flecha - rotor, variando la longitud y diámetro de la flecha.

#### 1.7.3.- EQUIPO.

- . Volante de inercia de acero de 130 mm de diámetro x 50 mm de espesor H2.
- . Ménsula H1.
- . Un par de masas de 1800 g cada una.
- . 3 flechas de prueba de acero standard de 3.18, 4.76 y 6.35 mm de diámetro respectivamente y de 0.985 m de longitud cada una.
- . Llaves de boquilla.
- . Flexómetro.
- . Cronómetro.

#### 1.7.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

##### a) Paso Teórico.

Antes de efectuar el experimento, debemos obtener el momento de inercia (I) del volante de inercia de acero de 130 mm de espesor adicionando a éste un par de masas de 1800 g cada una.

La figura 1.7.3 muestra la configuración para la cual debemos obtener el momento de inercia (I).

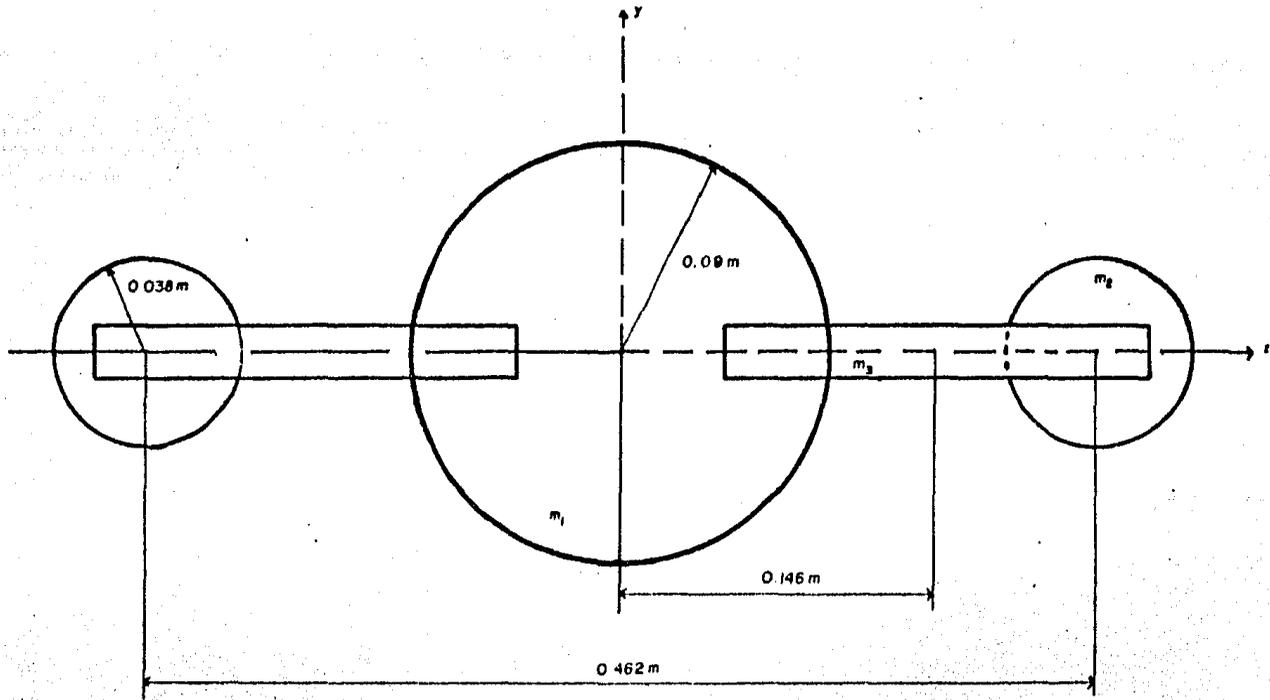


Figura 1.7.3

El sistema real consta de un volante de masa  $m_1 = 12.7$  Kg, -  
2 masas  $m_2 = 1.8$  Kg. y 4 barras de masa  $m_3 = 0.3$  Kg.

Utilizando el teorema de ejes paralelos o de Steiner (del -  
cual se hace mención en este manual), y utilizando las fórmulas  
simplificadas para momentos de inercia de masas respecto a ejes  
que pasan por el centro de gravedad que presenta W.G. McLean, -  
en su libro "Mecánica Técnica", el momento de inercia (I) del  
sistema con respecto al eje x (perpendicular al plano del dibujo) es :

$$I_x = 2 \frac{1}{2} m_2 (0.038) + m_2 (0.231) + \\ 4 \frac{1}{2} m_3 (0.204) + \\ m_3 (0.146) + \frac{1}{2} m_1 (0.09)$$

Por lo tanto sustituyendo los valores de  $m_1, m_2, m_3$  tenemos :

$$I = 2 \frac{1}{2} (1.8)(0.038) + (1.8)(0.231) + 4 \frac{1}{2} (0.3)(0.204) + \\ (0.3)(0.146) + \frac{1}{2} (12.7)(0.09)$$

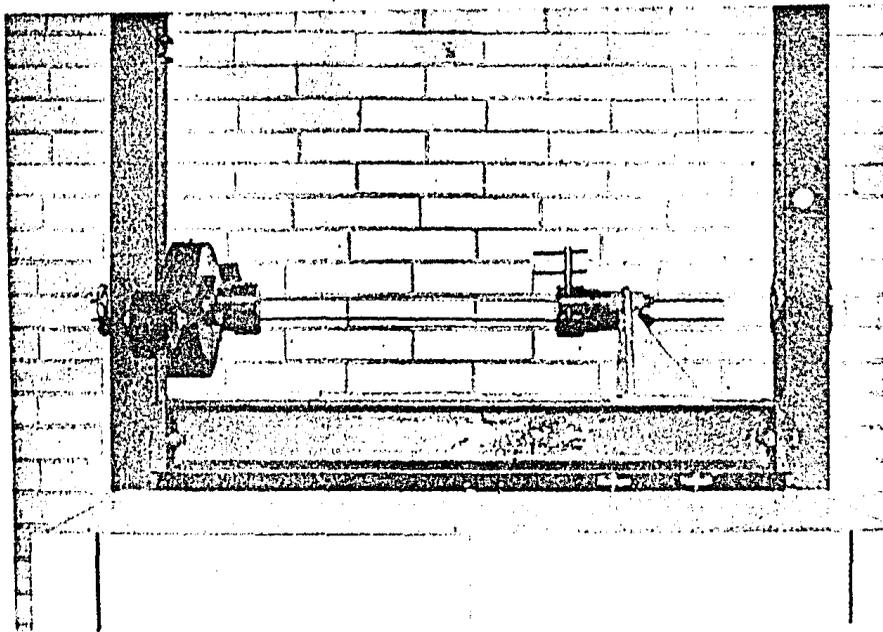
$$I = 0.2758746 \text{ Kg-m}^2$$

#### b) Paso Experimental.

Habiendo determinado el valor de I para el sistema de la figura 1.7.3 (rotor), podemos obtener el período y la frecuencia torcional utilizando cualesquiera de las 3 flechas de prueba en forma experimental y compararlos con valores teóricos.

El equipo se coloca como muestra la figura 1.7.4.

Introducimos una flecha a través de las bocuillas de la ménsula y del rotor, damos una separación  $l$  adecuada entre ambas bocuillas y apretamos éstas fuertemente para evitar la posibilidad de que la flecha resbale. Estando seguros de esto debemos desplazar el rotor un pequeño ángulo  $\theta$  y soltarlo. Observaremos que se inducen vibraciones torsionales en la flecha y oscilaciones torsionales en el rotor, tomamos el tiempo transcurrido para 10 oscilaciones del rotor y determinamos el periodo de



*Figura 1.7.4*

*Oscilaciones Torsionales de un Rotor Simple.*

oscilación ( $T$ ), así como la frecuencia torsional ( $f$ ).

Iremos variando la distancia entre las boquillas lo que equivale a variar la longitud de la flecha ( $l$ ) y obteniendo sus respectivos periodos y frecuencias de vibración para cada arreglo de flecha - rotor. Esto lo haremos para las 3 flechas en cuestión.

Las tablas 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3 nos muestran los valores obtenidos del periodo de vibración torsional ( $T$ ) y la frecuencia torsional ( $f$ ) para cada uno de los sistemas flecha - rotor, variando la longitud de las flechas.

10 oscilaciones.				
$l$	$t$	$T$	$f$	$T$
mm	seg	seg	Kz	seg
100	12.3	1.23	0.813	1.5129
150	14.6	1.46	0.684	2.1316
200	16.9	1.69	0.591	2.3561
250	18.6	1.86	0.537	3.1596
300	20.4	2.04	0.490	4.1616
375	22.5	2.25	0.444	5.0625
450	24.7	2.47	0.404	6.1009

Tabla de resultados 1.7.1

Flecha de diámetro = 3.13 mm .

10 oscilaciones.				
$l$	$t$	$T$	$f$	$T$
mm	seg	seg	Hz	seg
100	5.3	0.53	1.336	0.2309
150	6.6	0.66	1.515	0.4356
200	7.5	0.75	1.332	0.5625
250	3.3	0.33	1.204	0.6339
300	3.9	0.39	1.123	0.7921
375	10.0	1.00	1.000	1.0000
450	10.3	1.03	0.925	1.1664

Tabla de resultados 1.7.2

Flecha de diámetro = 4.76 mm .

5 oscilaciones.				
$l$	$t$	$T$	$f$	$T$
mm	seg	seg	Hz	seg
200	2.0	0.20	5.000	0.0400
300	2.4	0.24	4.166	0.0576
400	2.3	0.28	3.571	0.0734
500	3.2	0.32	3.125	0.1024

Tabla de resultados 1.7.3

Flecha de diámetro = 6.35 mm .



NOTA: Para la flecha de diámetro = 6.35 mm solo se tomó el tiempo transcurrido para 5 oscilaciones debido a que como se observa las frecuencias de oscilación son muy altas, y las oscilaciones no se pueden medir con exactitud.

En las tablas anteriores determinamos el valor de  $T^2$  debido a que existe una relación entre  $l$ , longitud de la flecha y  $T^2$ , el cuadrado del periodo de vibración, de la forma :

$$T^2 = C l \quad (1.7.10)$$

donde  $C$  es una constante cuyo valor es

$$C = \frac{47^4 I}{G J} \quad (1.7.11)$$

que se obtiene de elevar al cuadrado ambos términos de la ecuación (1.7.8).

Las figuras 1.7.5, 1.7.6 y 1.7.7 muestran 3 gráficas de  $T^2$  contra  $l$ , para cada una de las flechas de prueba.

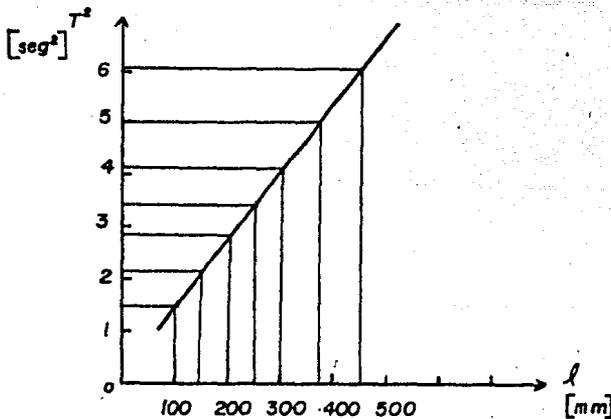


Figura 1.7.5

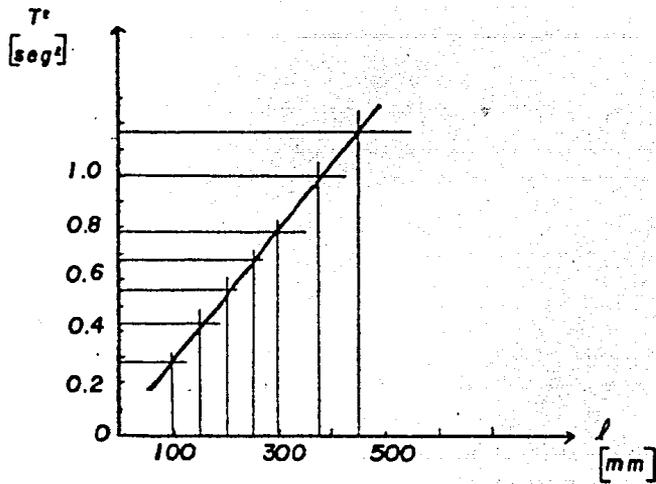


Figura 1.7.6

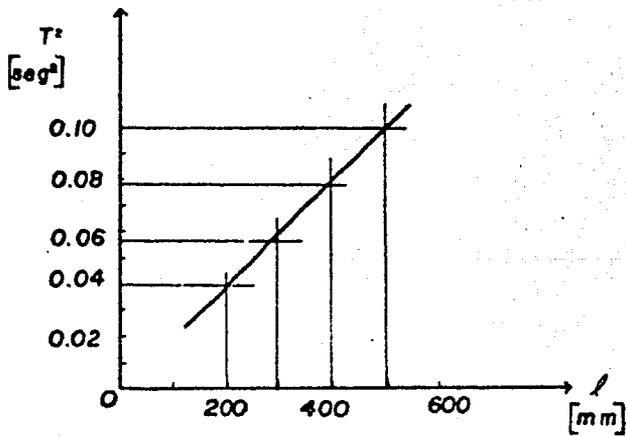


Figura 1.7.7

Podemos determinar teóricamente el valor del periodo de oscilación torsional del sistema flecha-rotor, para alguna de las flechas de longitud determinada :

Como ejemplo tomaremos los valores de la sexta prueba de la tabla 1.7.1

$$l = 375 \text{ mm}$$

$$T = 2.25 \text{ seg}$$

$$\text{diámetro de la flecha} = 3.18 \text{ mm}$$

$$I = 0.2758746 \text{ Kg-m}^2$$

NOTA: Para las flechas de acero standard el módulo de elasticidad transversal es :

$$G = 8.276 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Y el segundo momento de inercia para la flecha en cuestión es :

$$J = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi (0.00159)^4}{2}$$

$$J = 1.0039414 \times 10^{-11} \text{ m}^4$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación(17.9)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I l}{G J}}$$

tenemos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(0.2758746)(0.375)}{(8.276 \times 10^{10})(1.0039414 \times 10^{-11})}}$$

$$T = 2.21 \text{ seg.}$$

El valor práctico de  $T = 2.25$  seg comparado con el valor teórico obtenido de  $T = 2.21$  seg, tiene un error de  $0.04$  seg (1.8%) debido a pequeños errores de medición, pero pueden compararse - ambos favorablemente.

### 1.7.5.- CONCLUSIONES.

Podemos observar de las tablas 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3, que para cada flecha en particular utilizando el mismo rotor de momento de inercia  $I$ , para poder torcer la flecha un ángulo  $\theta$ ; conforme aumenta la longitud de torsión de la flecha, el periodo de vibración aumenta, no así la frecuencia torsional que disminuye. Puesto que el periodo de vibración es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de la flecha, como lo muestra la ecuación (1.7.9).

Y conforme aumenta el diámetro de la flecha del mismo material el periodo de vibración disminuye y la frecuencia torsional aumenta, puesto que el periodo de vibración es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la flecha elevado a la cuarta potencia, como lo muestra la ecuación (1.7.8).

Los valores teórico y práctico del periodo de vibración ( $T$ ) obtenidos en esta práctica, para la sexta prueba de la tabla 1.7.1, difieren muy poco el uno del otro, constatando de esta manera la veracidad de los resultados experimentales obtenidos en esta práctica.

## PRACTICA 1.8.

## OSCILACIONES TORSIONALES DE DOS ROTORES.

## 1.8.1.- INTRODUCCION .

Generalmente, las flechas pueden girar en sus cojinetes de soporte al tiempo que transmiten par de un rotor a otro. En la figura 1.8.1 se muestra un caso común de un rotor transmisor de par en que la flecha conecta 2 rotores que tienen momentos de inercia  $I_1$  e  $I_2$ .

Para determinar el periodo de vibración torsional del sistema, se considera primero la condición no rotatoria. Si se desplaza el rotor 1 un determinado ángulo  $\theta$  mediante la aplicación de un par, mientras que se mantiene estático el rotor 2 por medio de un par de torsión resistente igual, entonces cuando se quiten los pares, los rotores vibrarán torsionalmente. La experiencia demuestra que las frecuencias naturales de ambos rotores son las mismas aunque los desplazamientos angulares de los rotores son opuestos y hay un plano transversal en la flecha entre los rotores que permanece fijo. El plano fijo en la flecha representa el nodo o la posición de un plano que no tiene movimiento.

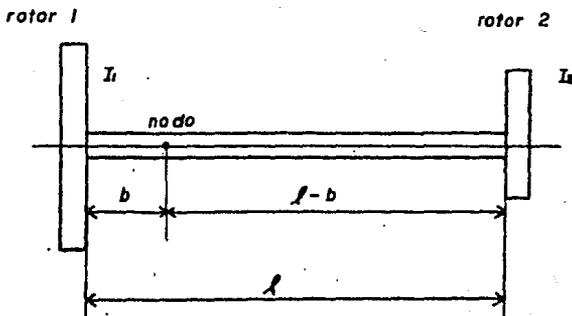


Figura 1.8.1

Entonces si se sujeta el rotor 2 y se desplaza el rotor 1 un ángulo  $\theta$  pequeño y después se liberan ambos, el sistema oscilará.

Como se supone que no actúan sobre el sistema pares externos se conserva el momento cinético del sistema. Por tanto:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 = - \left( \frac{I_1}{I_2} \right) \ddot{\theta}_1 \quad (1.3.1)$$

Donde  $\ddot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_2$  representan las aceleraciones angulares variables de  $I_1$  e  $I_2$  durante un ciclo completo para cada masa del rotor.

Como la ecuación (1.3.1) indica que los rotores están siempre girando en sentidos opuestos, hay una sección del eje que está siempre en reposo (nodo). Este nodo puede emplearse para estudiar el movimiento de las masas de los rotores, ya que puede considerarse que cada una es un péndulo de torsión.

El tiempo que tarda una masa en completar un ciclo debe ser igual al tiempo que tarda la otra en completar un ciclo. Si fueran diferentes llegaría un momento en que una giraría en el mismo sentido que la otra. Pero la ecuación (1.3.1) indica que las masas de los rotores siempre giran en sentidos opuestos.

Como los periodos son iguales, el número de ciclos por segundo de cada una deben de ser iguales. Así pues,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{I_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{I_2}} \quad (1.3.2)$$

en donde  $K_1$  y  $K_2$  son las constantes de torsión de las partes del eje contadas a partir de la sección nodal hasta cada extremo.

Por tanto, las constantes están relacionadas por

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad (1.3.3)$$

Sabemos de la ecuación(1.7.6) que para un eje cilíndrico

$$K = \frac{\pi d^4 G}{32L}$$

en donde  $d$  es su diámetro,  $G$  es el módulo de elasticidad al es-  
fuerzo cortante y  $l$  su longitud. Supongamos que la sección no-  
dal está a la distancia  $b$  de la masa  $I_1$  (figura 1.3.1) entonces

$$K_1 = \frac{\pi d^4 G}{32 b} \quad (1.3.4)$$

y

$$K_2 = \frac{\pi d^4 G}{32 (l - b)} \quad (1.3.5)$$

$$\text{De donde } \frac{K_1}{K_2} = \frac{l - b}{b} = \frac{I_1}{I_2}$$

Por lo tanto

$$b = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2} \quad (1.3.6)$$

Así queda situada la sección nodal o nodo.

Ahora para la parte izquierda tenemos

$$f = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{K_1}{I_1}}$$

Sustituyendo (1.3.6) en (1.3.4) tenemos:

$$K = \frac{\pi d^4 G}{32 b} = \frac{\pi d^4 G (I_1 + I_2)}{32 l I_2}$$

Por lo tanto

$$f = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{\pi d^4 G (I_1 + I_2)}{32 l I_1 I_2}} \quad (1.3.7)$$

Pero como sabemos de la práctica 1.7 que :

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

en donde  $J$  es el segundo momento de área de la flecha.

Entonces la ecuación (1.8.7) se modifica de la siguiente manera

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{J G (I_1 + I_2)}{I_1 I_2 l}} \quad (1.8.8)$$

Finalmente sabemos que la frecuencia es el inverso del periodo por lo tanto:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2 l}{J G (I_1 + I_2)}} \quad (1.8.9)$$

La ecuación (1.8.9) nos representa el periodo de vibración torsional para un sistema de dos rotores unidos por una flecha.

#### 1.8.2.- OBJETIVO.

Comparar valores teóricos y prácticos del periodo de vibración torsional para un sistema de dos rotores, utilizando flechas del mismo material pero de diferentes diámetros.

#### 1.8.3.-EQUIPO.

- Volante de inercia de acero de 180 mm de diámetro x 50 mm de espesor H2.
- Volante de inercia de acero de 255 mm de diámetro x 52 mm de espesor H1.
- Un par de masas de 1800 g cada una.
- Tres flechas de prueba de acero estándar de 3.18, 4.76 y 6.35 mm de diámetro respectivamente y de 0.985 m de longitud cada una.
- Llaves de boquilla.
- Flexómetro.
- Cronómetro.

#### 1.3.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

El equipo se coloca como se muestra en la figura 1.3.2 , de manera que los volantes de inercia (rotores) H1 y H2 pueden rotar libremente con respecto a un mismo eje horizontal.

Tomamos cualesquiera de las flechas de prueba y la sujetamos entre las boquillas de ambos volantes, de manera que la longitud de ésta no puede variar y apretamos fuertemente las mordazas de las boquillas para evitar que la flecha resbale o se barra.

Ahora desplazamos los dos rotores un pequeño ángulo en direcciones opuestas y los soltamos. Tomamos el tiempo transcurrido para 10 oscilaciones para cualesquiera de los dos rotores y obtenemos su periodo de vibración torsional experimentalmente, dividiendo el tiempo transcurrido entre el número de oscilaciones.

Repetimos este mismo procedimiento para las dos flechas restantes, obteniendo así mismo su periodo de vibración torsional experimentalmente.

Con ayuda de la ecuación (1.3.9) calculamos los valores teóricos del periodo de vibración torsional, y los comparamos con los valores obtenidos en forma experimental.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2 \ell}{J G(I_1 + I_2)}} \quad (1.8.9)$$

En donde

$I_1$  = momento de inercia del rotor H1

$I_2$  = momento de inercia del rotor H2

$\ell$  = longitud de la flecha entre boquilla y boquilla

$J$  = segundo momento de area de la flecha

$G$  = módulo de elasticidad transversal

Antes de proceder a utilizar la ecuación (1.8.9) calcularemos primero el momento de inercia ( $I_1$ ) de la masa del volante de inercia (rotor) H1.

NOTA: El valor  $I_2$  para el volante de inercia (rotor) H2 se obtuvo en la práctica 1.7, siendo  $I_2 = 0.2758786 \text{ Kg-m}^2$

Utilizando la fórmula simplificada para momentos de inercia

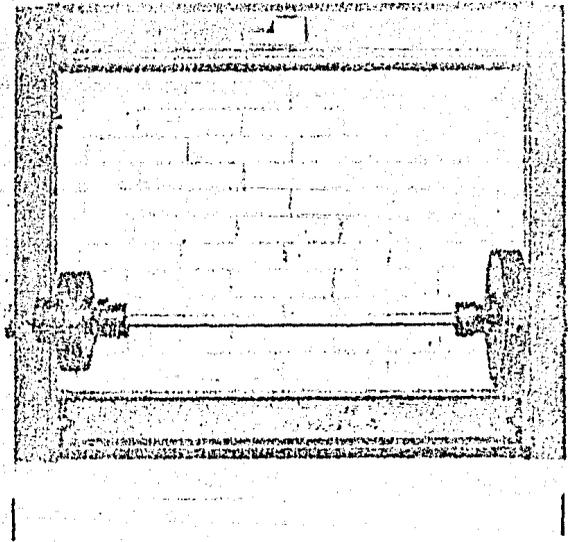


Figura 1.8.2

Oscilaciones Torsionales de dos Rotores.

de masas respecto a ejes que pasan por el centro de gravedad, - que presenta W.G. McLean en su libro "Mecánica Técnica", y con los siguientes datos, tenemos:

radio del volante de inercia  $I_1$  ,  $r = 0.1275$  m  
masa  $m = 21.550$  Kg.

$$I_1 = 1/2 m (r)^2$$

Sustituyendo valores

$$I_1 = 1/2 (21.550)(0.1275)^2$$

$$I_1 = 0.1751611 \text{ Kg-m}^2$$

La tabla 1.8.1 muestra los resultados obtenidos para las 3 - flechas de prueba de diferente diámetro.

10 oscilaciones .							
Diámetro Flecha	$I_2$	$I_1$	t	T teorico	T práctico	f teorico	f práctico
mm	Kg - m <sup>2</sup>	Kg - m <sup>2</sup>	seg	seg	seg	Hz	Hz
3.18	0.2753	0.1751	13.3	1.83	1.81	0.546	0.552
4.76	0.2753	0.1751	7.9	0.79	0.81	1.265	1.234
6.35	0.2753	0.1751	4.5	0.45	0.45	2.222	2.222

Tabla de resultados 1.8.1

Memoria de cálculo de la tabla 1.8.1.

NOTA: El módulo de elasticidad transversal para el acero y la longitud de la flecha entre boquillas son los mismos valores para las tres flechas, siendo estos valores los que se indican a continuación.

$$G = 8.276 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$l = 0.648 \text{ m}$$

Flecha de prueba de diámetro = 3.18 mm.

radio,  $R = 0.00159 \text{ m}$

segundo momento de área

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi (0.00159)^4}{2}$$

$$J = 1.0039414 \times 10^{-11} \text{ m}^4$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2 l}{J G (I_1 + I_2)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(0.1751611)(0.2753746)(0.648)}{(1.0039414 \times 10^{-11})(8.276 \times 10^{10})(0.1751611 + 0.2753746)}}$$

$$T = 1.8162356 \text{ seg.}$$

Flecha de prueba de diámetro = 4.76 mm.

radio,  $R = 0.00238 \text{ m}$

segundo momento de área

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi (0.00238)^4}{2}$$

$$J = 5.0399671 \times 10^{-11} \text{ m}^4$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2 l}{J g (I_1 + I_2)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(0.1751611) (0.2753746) (0.648)}{(5.0399571 \times 10^{-10}) (3.276 \times 10^{-10}) (0.1751611 + 0.2753746)}}$$

$$T = 0.8106611 \text{ seg.}$$

Flecha de prueba de diámetro = 6.35 mm.

radio, R = 0.003175 m

segundo momento de área

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi (0.003175)^4}{2}$$

$$J = 1.5962275 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2 l}{J g (I_1 + I_2)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(0.1751611) (0.2753746) (0.648)}{(1.5962275 \times 10^{-10}) (3.276 \times 10^{-10}) (0.1751611 + 0.2753746)}}$$

$$T = 0.4554901 \text{ seg.}$$

### 1.8.5.- CONCLUSION.

Para un sistema de dos rotores unidos por una flecha, los desplazamientos angulares de los rotores son opuestos, los periodos y frecuencias de vibración torsional son los mismos para ambos puesto que cada uno se comporta como un péndulo simple de torsión a partir del nodo o la sección nodal, ya que se transmite el par de un rotor a otro, por lo que se pueden contar el mismo número de oscilaciones en un tiempo determinado para ambos rotores.

Además conforme aumenta el diámetro de la flecha disminuye el periodo de vibración torsional y aumenta la frecuencia natural. Los valores teóricos y prácticos obtenidos para el periodo de vibración varían muy poco, por lo que podemos comprobar de esta manera la veracidad de la teoría enunciada en esta práctica.

#### Comentario:

La sección nodal o nodo la podemos encontrar mediante la ecuación (1.8.6) enunciada en la Introducción de esta práctica.

$$b = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2} \quad (1.8.6)$$

En este caso si sustituimos valores en la ecuación anterior obtendremos

$$b = \frac{(0.2753746)(0.648)}{(0.1751611 + 0.2753746)}$$

$$b = 0.3963 \text{ m}$$

Es decir la sección nodal o nodo se encuentra a 0.3963 m del volante de inercia  $H$ , esto se puede comprobar haciendo una pequeña marca con una pluma sobre la flecha y observando que al momento de oscilar los rotores, en ese punto de la flecha, ésta no se tuerce.

## 1.II.- VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO.

## TEORIA

Los sistemas en vibración considerados hasta ahora, los hemos supuesto sin amortiguamiento. Realmente todas las vibraciones están más o menos amortiguadas por fuerzas de rozamiento.

Estas fuerzas pueden ser originadas por rozamiento seco o rozamiento de Coulomb, entre cuerpos rígidos, por rozamiento entre las moléculas de un fluido viscoso, o por rozamiento interno entre las moléculas de un cuerpo aparentemente elástico.

Un tipo de amortiguamiento de interés especial es el amortiguamiento viscoso originado por rozamiento en fluidos a velocidades bajas y moderadas. El amortiguamiento viscoso se caracteriza porque la fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo en movimiento. Como ejemplo consideraremos nuevamente un cuerpo de masa  $m$  suspendido de un resorte de constante  $K$ , y supondremos que el cuerpo está unido al émbolo de un amortiguador viscoso (figura 1.II.I).

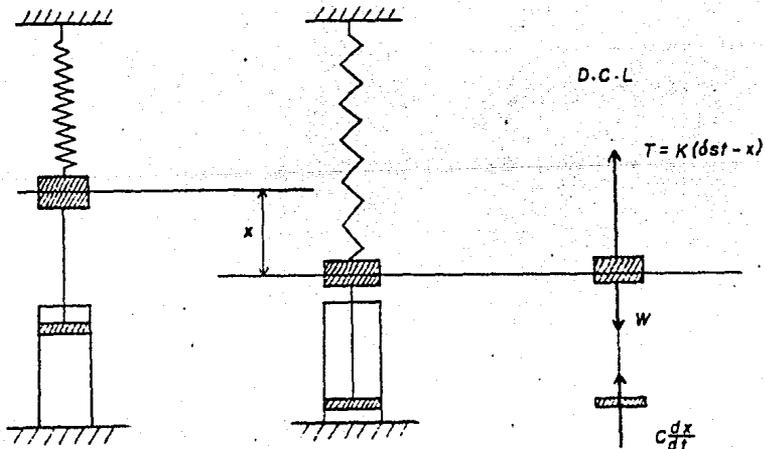


Figura 1.II.1

La magnitud de la fuerza de rozamiento ejercida sobre el ómbolo por el fluido que lo rodea es igual a  $C \frac{dx}{dt}$ , donde la constante  $C$ , expresada en Kg-sec/m y conocida como el coeficiente de amortiguamiento viscoso, depende de las propiedades físicas del fluido y de la construcción del amortiguador. La ecuación del movimiento es :

$$+\downarrow \cdot \sum F = m a$$

$$W - K (\delta_{st} + x) - C \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Recordando la ecuación (1.I.1)

$$W = K \delta_{st}$$

escribimos la ecuación de movimiento como :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad (1.II.1)$$

La solución de la ecuación (1.II.1) no es fácil de obtener - pero si consideramos la función  $x = e^{\lambda t}$ , donde  $t$  es el tiempo y  $\lambda$  una constante desconocida, se ve que al obtener la derivada, resulta la misma función, pero multiplicada por una constante. Sustituyendo esta función en la ecuación (1.II.1), nos permite dividir por  $e^{\lambda t}$  lo que nos lleva a una ecuación algebraica, en lugar de una ecuación diferencial, lo cual es una gran simplificación. Así pues resulta:

$$m \lambda^2 + C \lambda + K = 0 \quad (1.II.2)$$

Esta es una ecuación algebraica de segundo grado para la cual sus raíces son :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad (1.II.3)$$

Definiendo el coeficiente de amortiguamiento crítico  $C_c$ , como el valor de  $C$  que hace que el radical de la ecuación (1.II.3) sea igual a cero, escribimos :

$$\left(\frac{Cc}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m} = 0$$

despejando  $Cc$

$$Cc = 2m \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (1.II.4)$$

pero como  $\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega$ , por lo tanto

$$Cc = 2 m \omega \quad (1.II.5)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular del sistema cuando no hay amortiguamiento.

Podemos distinguir tres casos de amortiguamiento, dependiendo de los valores de  $C$ .

1.- Amortiguamiento fuerte o Sobreamortiguamiento:  $C > Cc$ .

Las raíces características  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la ecuación (1.II.2) son reales y diferentes, y la solución general de la ecuación diferencial (1.II.1) es:

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad (1.II.6)$$

Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio. - Ya que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son negativas, la amplitud ( $x$ ), se aproxima a cero cuando  $t$  crece indefinidamente. El sistema real recobra su posición de equilibrio después de un tiempo finito.

2.- Amortiguamiento Crítico o Críticamente Amortiguado :  $C = Cc$  la ecuación (1.II.2) tiene una raíz doble  $\lambda = -\frac{Cc}{2m} = -\omega$ , y la solución general de (1.II.1) es :

$$x = (A + Bt) e^{\lambda t} \quad (1.II.7)$$

El movimiento obtenido tampoco es vibratorio. Los sistemas críticamente amortiguados son de especial interés en aplicaciones de Ingeniería ya que ellos regresan a su posición de equilibrio en el menor tiempo posible sin oscilar.

3.- Amortiguamiento Débil o Subamortiguamiento :  $C < C_c$ . Las raíces de la ecuación (1.II.2) son complejas y conjugadas y la solución general de (1.II.2) es de la forma:

$$x = e^{-\frac{C}{2m}t} (A \operatorname{sen} qt + B \operatorname{cos} qt) \quad (1.II.8)$$

Donde  $q$  está definida por la relación

$$q^2 = \frac{K}{m} - \left(\frac{C}{2m}\right)^2 \quad (1.II.9)$$

Sustituyendo  $\frac{K}{m} = \omega^2$  y recordando (1.II.5) escribimos:

$$q = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{C}{2m}\right)^2}$$

$$q = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{C}{2m}\right)^2}$$

$$q = \sqrt{\omega^2 - \frac{C^2}{4m^2}}$$

$$q = \omega \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{C}{2m}\right)^2}$$

$$q = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{C}{2m\omega}\right)^2}$$

$$q = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{C}{C_c}\right)^2} \quad (1.II.10)$$

Donde la constante  $\frac{C}{C_c}$  se llama el factor de amortiguamiento. La ecuación (1.II.8) que es la solución general de la ecuación (1.II.1) también se escribe de la forma:

$$X_m = X_m e^{-\frac{C}{2m}t} \operatorname{sen}(qt + \phi) \quad (1.II.11)$$

Donde  $X_m$  es la amplitud de la oscilación y  $\phi$  es el ángulo de fase.

El movimiento definido por la ecuación (1.II.11) es vibratorio con disminución de la amplitud (figura 1.II.2). Aunque el mismo movimiento realmente no se repite, el tiempo  $T = 2\pi/\omega$ , que corresponde a dos puntos sucesivos donde la curva toca las curvas limitantes mostradas en la figura 1.II.2, frecuentemente se refiere al periodo de vibración amortiguada.

Cuanto más pequeña sea la constante de amortiguamiento  $C$ , más aplastada resultará la curva y más ciclos se requerirán para que se desvanescan las vibraciones.

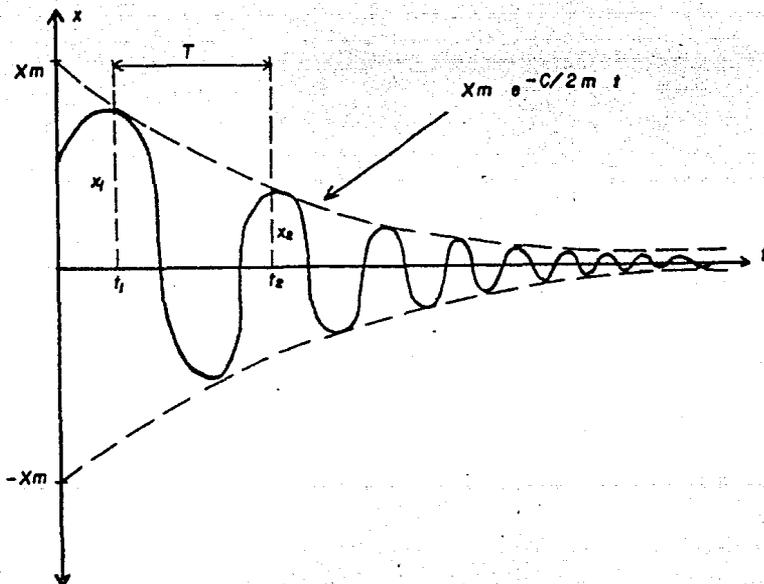


Figura 1.II.2

## PRACTICA 1.9

OSCILACIONES TORSIONALES DE UN ROTOR SIMPLE CON  
AMORTIGUAMIENTO VISCOZO

## 1.9.1.- INTRODUCCION.

En este experimento investigaremos los efectos de la introducción de un amortiguador dentro de un sistema bajo oscilaciones torsionales.

Cuando una flecha se encuentra rígidamente unida a uno de sus extremos, y el otro extremo también se encuentra rígidamente unido pero a un rotor y éste se encuentra en un medio viscoso. Si se desplaza el rotor un pequeño ángulo dentro del medio viscoso (torciendo entonces la flecha) y luego se suelta, se inducirán vibraciones angulares en la flecha y oscilaciones torsionales en el rotor.

Las oscilaciones torsionales de un rotor simple con amortiguamiento viscoso se caracterizan porque:

El par de amortiguamiento es directamente proporcional a la velocidad angular unitaria del cuerpo en movimiento.

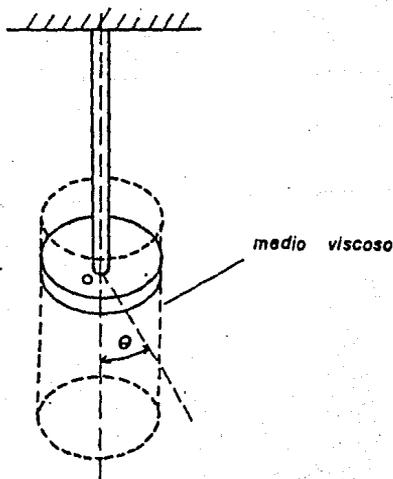


Figura 1.9.1

Por lo tanto, si representamos por  $\theta$  el desplazamiento angular del rotor (Figura 1.9.1) establecemos que la magnitud del par ejercido por la flecha en un medio viscoso es :

$$q \theta$$

donde  $q$  es la constante de torsión de la flecha.

Y el par de amortiguamiento por velocidad angular unitaria es:

$$C \frac{d\theta}{dt}$$

donde  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ , es la velocidad angular unitaria del rotor, y -

$C$  es el coeficiente de amortiguamiento.

La suma de estos pares debe ser equivalente al par  $I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , que representa las fuerzas activas del rotor donde  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$  es la aceleración angular del rotor e  $I$  es el momento de inercia de la masa del rotor (Figura 1.9.2)

$$- ( C \frac{d\theta}{dt} + q\theta )$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

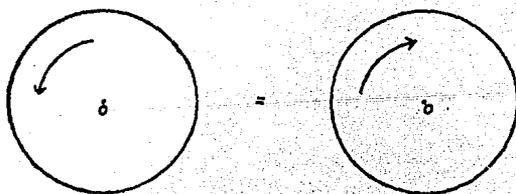


Figura 1.9.2

Por lo tanto la ecuación de movimiento es:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left( c \frac{d \theta}{dt} + q \theta \right)$$

o igualando a cero

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + c \frac{d \theta}{dt} + q \theta = 0 \quad (1.9.1)$$

dividiendo entre I cada uno de los términos de la ecuación (1.9.1) la podemos reescribir como:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + a_1 \frac{d \theta}{dt} + b_1 \theta = 0 \quad (1.9.2)$$

donde:

$$a_1 = \frac{c}{I} \frac{d \theta}{dt} \quad (1.9.3)$$

y

$$b_1 = \frac{q}{I} \quad (1.9.4)$$

### 1.9.2.- OBJETIVO.

Mostrar que la cantidad de amortiguamiento en un sistema es proporcional a el área de contacto de un pistón-amortiguador - dentro de un medio viscoso.

### 1.9.3.- EQUIPO.

- Ménsula K1
- Ensamblaje con amortiguador K2
- Volante de inercia cónico K3
- Cilindro contenedor transparente K4
- Tres flechas de prueba de acero standard de 3.13, 4.76 y 6.35 mm. de diámetro respectivamente y de 0.985 m. de longitud - c/u.
- Aceite

- . Marcador o Pluma
- . Papel Graficador (138 mm. de ancho)
- . Cronómetro
- . Flexómetro
- . Llaves de bocuilla
- . Tornillo y Tuercas
- . Referencia de plástico

#### 1.9.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

El arreglo final de los equipos y accesorios sobre el marco o bastidor general se ilustra en la Figura 1.9.3 ; para realizarlo llevaremos a cabo los siguientes pasos :

1.- Colocar el ensamblaje con amortiguador K2 en el extremo izquierdo del bastidor.

2.- Llenar con aceite el cilindro del amortiguador de K2 con un pequeño embudo de papel.

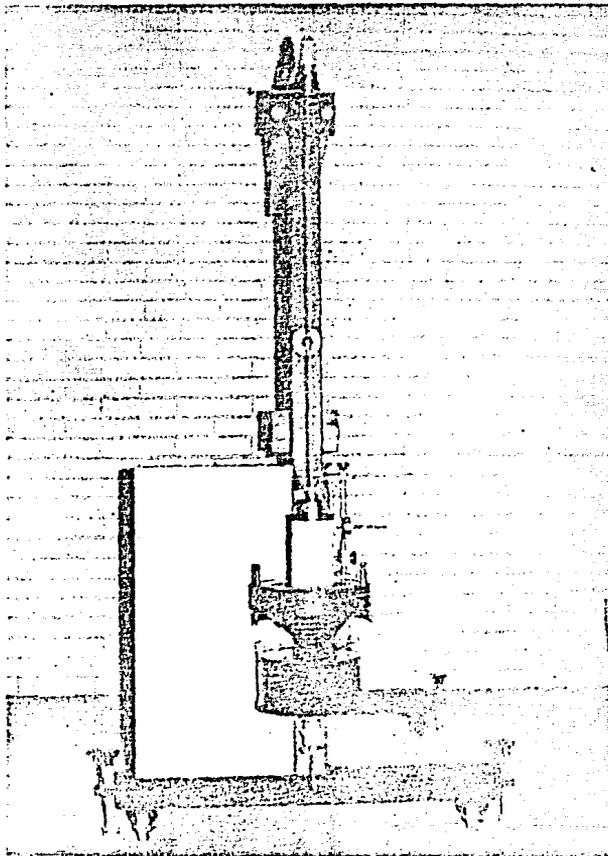
3.- Sujetar la ménsula K1 en la parte superior izquierda del marco general.

4.- Sujetar el cilindro contenedor transparente K4 por medio de un tornillo, y hacer pasar éste a través del orificio de una ménsula fija al ensamblaje K2. Por medio de dos tuercas , una a cada extremo del tornillo, se podrá subir o bajar el cilindro contenedor, y sujetarlo rígidamente al ensamblaje K2.

5.- Tomar el volante cónico K3 y colocarlo sobre un arco base del ensamblaje con amortiguador K2, cuidando de no golpear al cilindro contenedor.

6.- Seleccionar una cualesquiera de las flechas de prueba y hacerla pasar a través de las bocuillas de la ménsula K1 y del volante cónico K3 respectivamente, sin apretarlas.

7.- Levantar una pequeña distancia (10 mm. apróx) el volante cónico K3 del arco base y varietar fuertemente las bocuillas de



*Figura 1.9.3*

*Oscilaciones Torsionales de un Rotor Simple con  
Amortiguamiento Viscoso.*

la ménsula K1 y del volante K3, quedando el volante suspendido de la flecha.

NOTA: Tener cuidado de apretar fuertemente las boquillas de los equipos, para evitar que el volante cónico K3 resbale o caiga.

3.- Hacer los ajustes necesarios para que la flecha de prueba - unida ahora al volante cónico esté en posición completamente - vertical, y el volante no roce con alguna parte del equipo.

9.- Teniendo sujeto el cilindro contenedor transparente K4 en su posición más baja, se procede a llenar éste con aceite hasta aproximadamente 10 mm del borde superior, utilizando para esto - un embudo.

NOTA: En este experimento se utilizó aceite SAE-140 para llenar el cilindro contenedor transparente K4, y aceite propio del e - quipo para llenar el cilindro del amortiguador del ensamble - K2.

10.- Por último colocar una pluma o marcador en el sostenedor - de pluma del ensamble K2, colocar papel graficador en toda la superficie del tambor del volante cónico K3 y colocar una refe - rencia de plástico en el ensamble K2 para poder medir el ángu - lo de torsión del volante (rotor).

Para demostrar que la cantidad de amortiguamiento en el sis - tema de la figura 1.9.3 es proporcional a el área de contacto - de un pistón-amortiguador (en este caso un volante cónico o ro - tor) dentro de un medio viscoso (aceite) procederemos como si - gue:

Primero necesitamos encontrar el momento de inercia I de la masa del volante cónico K3. Esto lo podemos hacer como en el - experimento 1.7 con la fórmula.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I d}{J G}} \quad (1.7.9)$$

en éste caso no haremos uso del aceite del contenedor y coloca-

mos el equipo como en la figura 1.9.3, lógicamente sin el contenedor cilíndrico K4, utilizando una cualesquiera de las flechas de prueba giramos el volante o rotor un pequeño ángulo y lo soltamos.

Tomamos el tiempo transcurrido para 20 oscilaciones, por ejemplo, y determinamos su periodo de oscilación, así como los parámetros  $I$ ,  $G$  y  $J$ .

Siguiendo estos pasos, tenemos el siguiente análisis para determinar  $I$ .

**DATOS:**

Diámetro de la flecha = 3.18 mm.

Tiempo transcurrido = 56 seg.

Número de oscilaciones = 20

Por lo tanto  $T = 56/20 = 2.8$  seg.

Longitud de la flecha de boquilla a boquilla,  $l = 0.877$  m.

Módulo de elasticidad transversal,  $G = 8.276 \times 10^{10}$  N/m

Momento polar de área de la flecha,  $J = 1.0039414 \times 10^{11}$  m<sup>4</sup>  
(de práctica 1.7)

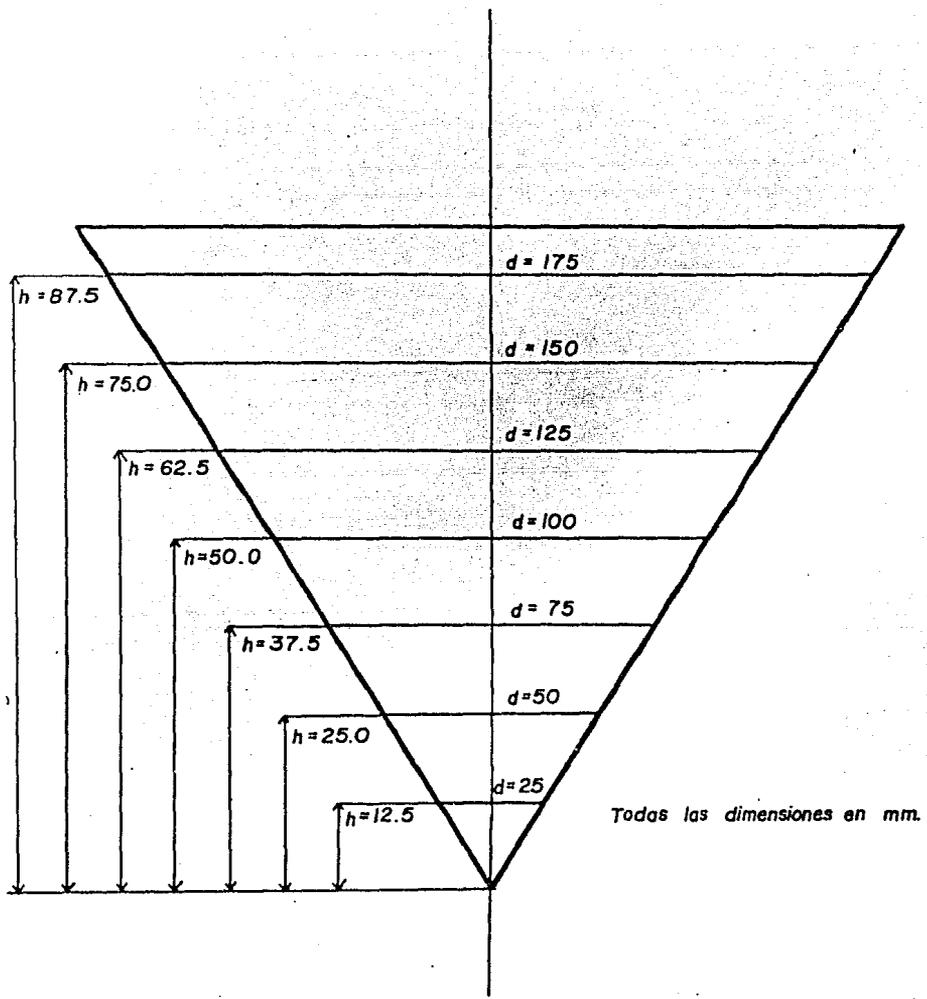
Por lo tanto, despejando  $I$  de la ecuación (1.7.9) y sustituyendo valores, tenemos:

$$I = \frac{T^2 G J}{4\pi^2 l}$$

$$I = \frac{(2.8)^2 (8.276 \times 10^{10}) (1.0039414 \times 10^{11})}{4\pi^2 (0.877)}$$

$$I = 0.1891419 \text{ Kg-m}^2$$

Ahora, el volante de inercia cónico K3 ó rotor, tiene 7 graduaciones en su parte cónica (figura 1.9.4) de tal manera que el aceite puede cubrir siete diferentes áreas del cono; precisamente estas áreas de contacto entre el aceite en el contenedor y la superficie cónica del volante al ser alteradas varían la fuerza de amortiguamiento sobre las oscilaciones del rotor.



Detalle de las graduaciones del volante cónico.

Figura 1.9.4

Para demostrarlo haremos las siguientes pruebas :

Teniendo el equipo listo como en la figura 1.9.3, elevamos el contenedor cilíndrico hasta que el nivel de aceite llegue a la primer graduación (12.5 mm) y lo sujetamos rígidamente al ensamblaje, ajustamos la pluma y el sostenedor para que estén en la posición más baja del tambor del rotor sin que toque a éste y sin que la punta de la pluma toque el papel. Hacemos girar un pequeño ángulo el rotor (sin que se barra la flecha de las mordazas de la boquilla) y lo soltamos, de manera que el rotor oscile.

Levantamos el émbolo del amortiguador del ensamblaje K2 hasta el tope, lo bajamos poco a poco hasta que el émbolo siga bajando, hacemos que la punta de la pluma toque el papel graficador por medio de un tornillo de ajuste situado en la base del brazo del sostenedor de la pluma. Ahora dejamos que el émbolo baje libremente hasta el tope y tomamos el tiempo de descenso (desde el momento que los soltamos hasta que llega al tope).

En la figura 1.9.5, apreciamos esto con más detalle.

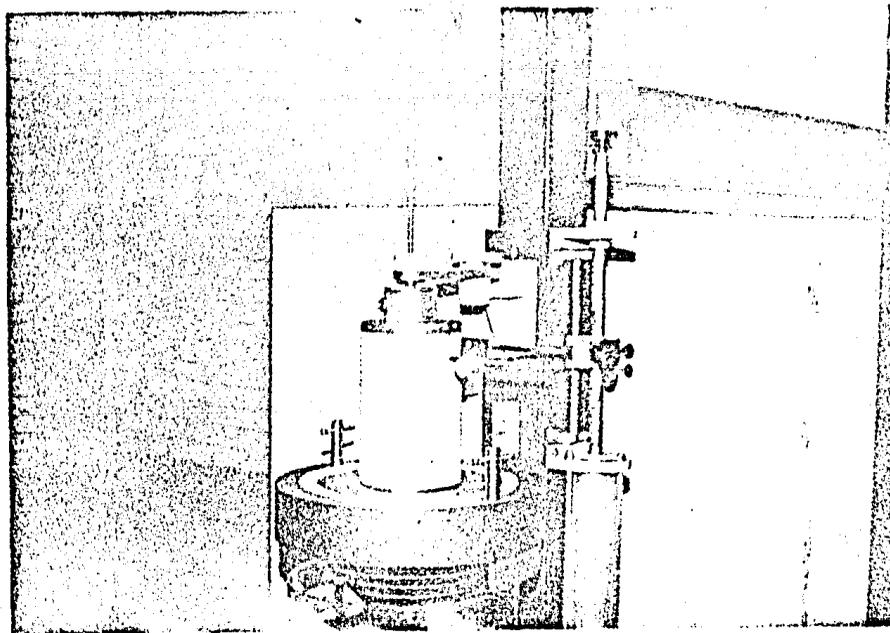
En el papel graficador registramos un trazo de la amplitud de la oscilación contra el tiempo de oscilación, se observará que la vibración va en declive o disminuye conforme transcurre el tiempo debido al amortiguamiento.

Repetiendo este procedimiento para cada una de las siete graduaciones del rotor, obtendremos un trazo característico para cada una de las áreas de amortiguamiento, ésto lo haremos para las tres flechas en cuestión.

NOTA: Para cada flecha de prueba, dar el mismo ángulo de torsión para todas y cada una de las diferentes áreas de contacto con el aceite. Evitar en todo lo posible que el movimiento posea más de un grado de libertad.

Debemos analizar cada uno de los trazos para determinar el decremento logarítmico del amortiguamiento, midiendo las amplitudes de las oscilaciones sucesivas, encontrando:

$$K = \text{Ln} \frac{Y_1}{Y_2}$$



*Figura 1.9.5*

*Oscilaciones Torsionales de un Rotor Simple con Amortiguamiento Viscoso (detalle).*

en donde  $K$  es el decremento logarítmico, y  $Y_1$  e  $Y_2$  son la primera y segunda amplitudes respectivamente (figura 1.14.1).

También debemos encontrar el período de vibración  $T_a$ , dividiendo la distancia (en mm) cubierta en el registro por un ciclo ( $d$ ), entre la razón de descenso de la pluma en mm/seg.

El valor de la constante  $a_1$  lo podremos obtener de la siguiente ecuación:

$$a_1 = \frac{2}{T_a} \ln \frac{Y_1}{Y_2} \quad (1.9.5)$$

De esta manera, podremos encontrar también el valor de  $C \frac{d\theta}{dt}$  despejando éste de la ecuación (1.9.3), por lo tanto:

$$C \frac{d\theta}{dt} = a_1 I \quad (1.9.6)$$

Las tablas 1.9.1, 1.9.2 y 1.9.3 muestran los resultados obtenidos para oscilaciones torsionales con amortiguamiento viscoso para cada una de las flechas de prueba.

La nomenclatura de estas tablas es la siguiente:

$r$  = radio de la base de la sección cónica sumergida.

$h$  = graduación del volante de inercia cónico (ver figura 1.9.4)

$Y_1$  y  $Y_2$  = primera y segunda amplitud respectivamente.

$K = \ln Y_1/Y_2$  = decremento logarítmico.

$t$  = tiempo de descenso de la pluma.

$L$  = longitud total de la gráfica.

$L/t$  = razón de descenso.

$d$  = distancia cubierta en el registro por un ciclo.

$T_a = d/\text{razón de descenso}$ .

$a_1 = (2/T_a)(\ln Y_1/Y_2)$ .

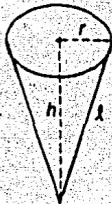
$I$  = momento de inercia de la masa del volante cónico.

$C \frac{d\theta}{dt}$  = par de amortiguamiento por velocidad angular unitaria.

A = área de amortiguamiento (área de la superficie lateral)

$$A = \pi r l$$

En donde  $l$  se indica en la siguiente figura:



Y por el teorema de Pitágoras.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Y enseguida, después de las tablas 1.9.1, 1.9.2 y 1.9.3, se muestran las gráficas características obtenidas experimentalmente para diferentes diámetros de flechas, con las cuales se formaron dichas tablas.

Por último también se muestran 3 gráficas (figuras 1.9.6, 1.9.7 y 1.9.8) de el par de amortiguamiento por velocidad angular unitaria  $C \frac{d\theta}{dt}$  contra el área de amortiguamiento A, con el objeto de poder observar más claramente la proporcionalidad entre ambos.

$r$	$h$	$Y_1$	$Y_2$	$K$	$t$	$L$	$\frac{L}{t}$	$d$	$T_0$	$a_1$	$I$	$C \frac{d^3}{dt} \times 10^{-3}$	$A$	$l$
mm	mm	mm	mm	—	seg	mm	$\frac{mm}{seg}$	mm	seg	$\frac{rad}{seg}$	$Kg - m^2$	$Kg - m^2 \frac{rad}{seg}$	$mm^2$	mm
12.5	12.5	16.0	15.0	0.0645	17.10	106.0	6.198	18.0	2.904	0.0444	0.1881419	8.357	694.2	17.677
25.0	25.0	14.0	13.0	0.0741	18.65	105.0	6.306	18.0	2.854	0.0519	0.1881419	9.769	2776.8	35.355
37.5	37.5	13.5	12.5	0.0769	18.90	106.0	6.666	18.0	2.700	0.0569	0.1881419	10.717	6247.8	53.033
50.0	50.0	13.0	12.0	0.0800	18.40	104.0	6.753	18.0	2.665	0.0600	0.1881419	11.295	11107.2	70.710
62.5	62.5	11.5	10.2	0.1199	18.50	104.5	6.741	18.0	2.670	0.0898	0.1881419	16.897	17355.0	88.388
75.0	75.0	8.5	7.4	0.1388	18.60	105.5	6.762	19.0	2.809	0.0986	0.1881419	18.553	24991.2	106.066
87.5	87.5	7.5	6.5	0.1431	18.50	104.5	6.741	19.0	2.818	0.1015	0.1881419	19.108	34015.8	123.743

Tabla de resultados 1.9.1

Flecha de prueba de diámetro = 3.18mm

r	h	Y1	Y2	K	t	L	$\frac{L}{t}$	d	Ta	$\alpha_1$	I	$C \frac{d\epsilon^{x10^{-2}}}{dt}$	$A_0$	l
mm	mm	mm	mm	-	seg	mm	$\frac{mm}{seg}$	mm	seg	$\frac{rad}{seg}$	Kg-m <sup>2</sup>	Kg-m <sup>2</sup> $\frac{rad}{seg}$	mm <sup>2</sup>	mm
12.5	12.5	5.5	5.0	0.0953	14.85	104.0	7.003	9.0	1.285	0.1483	0.1881419	27.906	694.2	17.677
25.0	25.0	5.0	4.5	0.1053	14.90	104.0	6.979	8.5	1.217	0.1730	0.1881419	32.557	2776.8	35.355
37.5	37.5	4.5	4.0	0.1177	15.20	104.0	6.842	9.0	1.315	0.1790	0.1881419	33.679	6247.8	53.033
50.0	50.0	4.0	3.5	0.1335	15.70	107.0	6.815	9.0	1.320	0.2022	0.1881419	38.056	11107.2	70.710
62.5	62.5	3.3	2.8	0.1643	15.20	105.0	6.907	9.0	1.303	0.2521	0.1881419	47.447	17355.0	88.388
75.0	75.0	2.5	2.0	0.2231	16.10	104.0	6.459	8.0	1.238	0.3604	0.1881419	67.810	24991.2	106.066
87.5	87.5	1.9	1.4	0.3053	16.30	104.0	6.380	9.0	1.410	0.4330	0.1881419	81.474	34015.8	123.743

Tabla de resultados 1.9.2

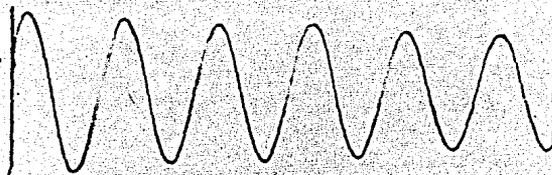
Flecha de prueba de diametro = 4.76 mm

r	h	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	K	l	L	$\frac{l}{T}$	d	T <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	I	$C_{dt}^{x10^{-8}}$	A	l
mm	mm	mm	mm	—	seg	mm	$\frac{mm}{seg}$	mm	seg	$\frac{rad}{seg}$	Kg - m <sup>2</sup>	Kg - m <sup>2</sup> $\frac{rad}{seg}$	mm <sup>2</sup>	mm
12.5	12.5	3.0	2.8	0.0689	15.25	104.0	6.819	5.0	0.7332	0.1879	0.1881419	35.360	694.2	17.677
25.0	25.0	2.5	2.3	0.0833	15.30	106.0	6.928	5.0	0.7217	0.2308	0.1881419	43.431	2776.8	35.355
37.5	37.5	2.0	1.8	0.1053	14.60	104.0	7.123	5.0	0.7019	0.3000	0.1881419	56.450	6247.8	53.033
50.0	50.0	1.8	1.6	0.1177	14.55	104.0	7.147	5.0	0.6995	0.3365	0.1881419	63.214	11107.2	70.710
62.5	62.5	1.5	1.3	0.1431	15.50	106.0	6.838	5.0	0.7312	0.3914	0.1881419	73.640	17355.0	88.388
75.0	75.0	1.0	0.8	0.2231	15.15	105.0	6.930	5.0	0.7215	0.6184	0.1881419	116.353	24991.2	106.066
87.5	87.5	0.5	0.3	0.5108	14.55	105.0	7.216	5.0	0.6929	1.4743	0.1881419	277.383	34015.8	123.743

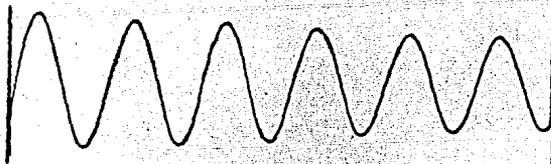
Tabla de resultados 1.9.3

Flecha de prueba de diámetro = 6.35 mm

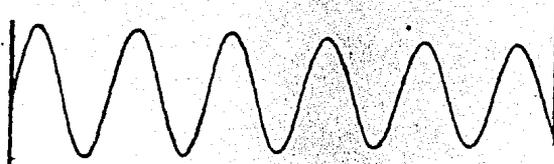
Flecha de prueba de diámetro = 3.18 mm .



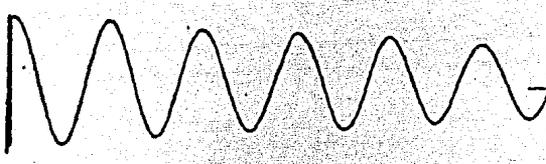
Graduación h = 12.5 mm.



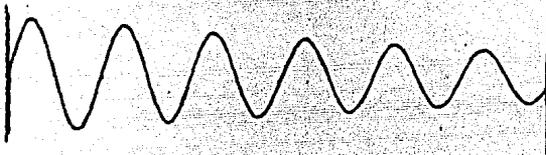
Graduación h = 25.0 mm.



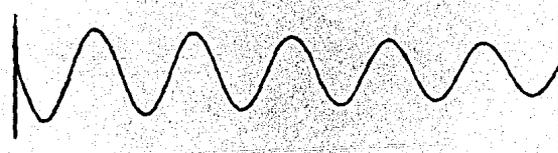
Graduación h = 37.5 mm.



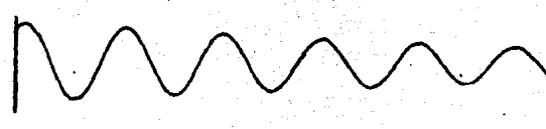
Graduación  $h = 50.0$  mm.



Graduación  $h = 62.5$  mm.



Graduación  $h = 75.0$  mm.



Graduación  $h = 87.5$  mm.

NOTA: Para estas pruebas se utilizó un ángulo de torsión  $\theta = 20^\circ$

Flecha de prueba de diámetro = 4.76 mm.



Graduación h = 12.5 mm.



Graduación h = 25.0 mm.



Graduación h = 37.5 mm.



Graduación h = 50.0 mm.



Graduación h = 62.5 mm.



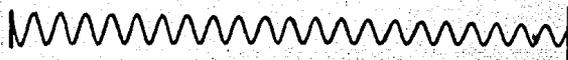
Graduación  $h = 75.0 \text{ mm}$ .



Graduación  $h = 37.5 \text{ mm}$ .

NOTA: Para estas pruebas se utilizó un ángulo de torsión  $\theta = 1^\circ$

Flecha de prueba de diámetro = 6.35 mm.



Graduación  $h = 12.5$  mm.



Graduación  $h = 25$  mm.



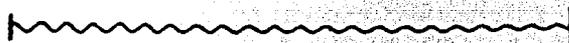
Graduación  $h = 37.5$  mm.



Graduación  $h = 50.0$  mm.



Graduación  $h = 62.5$  mm.



Graduación  $h = 75.0$  mm.



Graduación  $h = 87.5$  mm.

NOTA: Para estas pruebas se utilizó un ángulo de torsión  $\theta = 5^\circ$

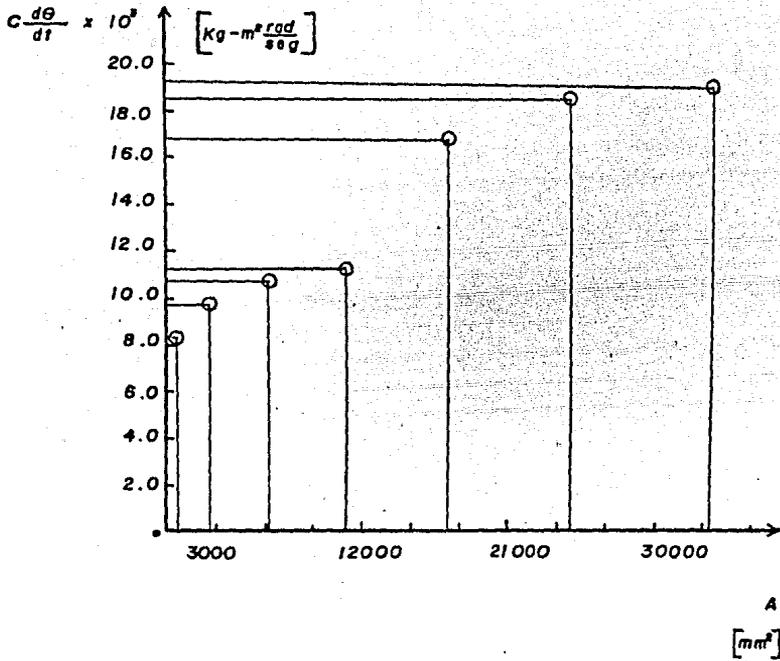


Figura 1.9.6

Par de amortiguamiento por velocidad angular unitaria ( $C \frac{dQ}{dt}$ )  
 contra área de amortiguamiento (A) para una flecha de diámetro = 3.18 mm.

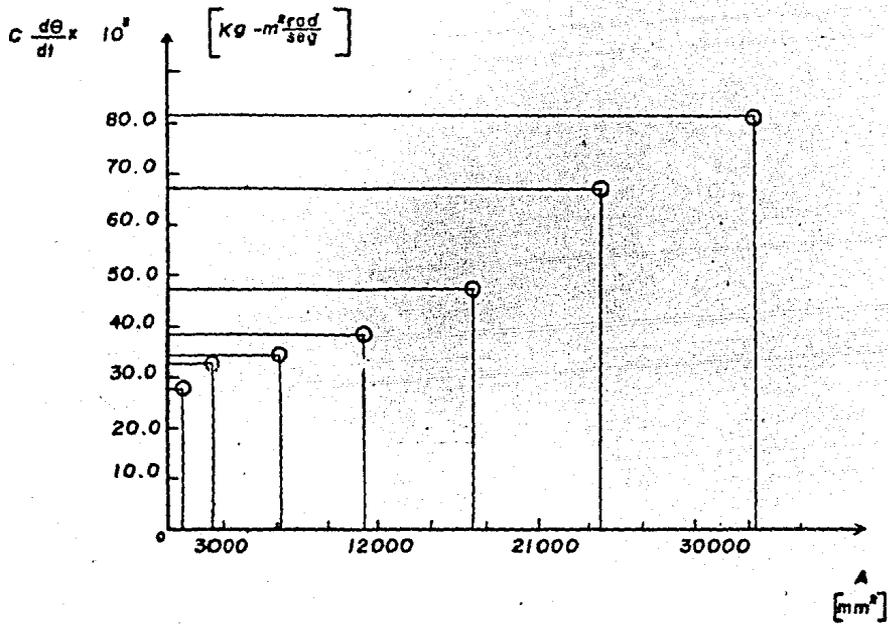


Figura 1.9.7.

Par de amortiguamiento por velocidad angular unitaria  
 $(C \frac{d\theta}{dt})$  contra área de amortiguamiento (A) para una flecha de  
 diámetro = 4.76 mm.

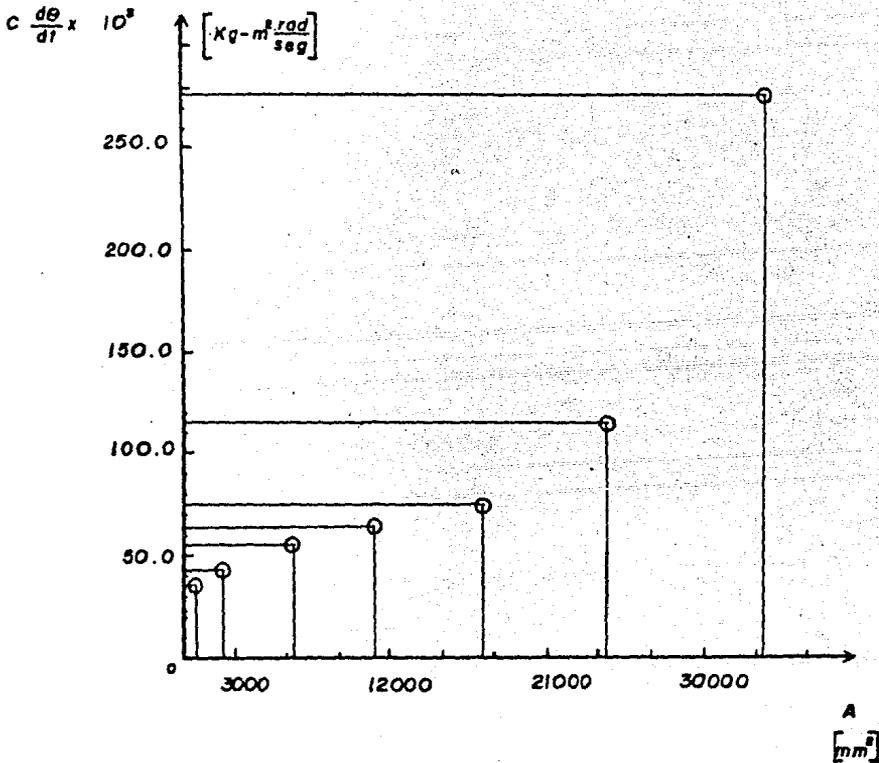


Figura 1.9.8.

Por de amortiguamiento por velocidad angular unitaria  
 $(c \frac{d\theta}{dt})$  contra área de amortiguamiento (A) para una flecha de diámetro =  
 = 6.35 mm.

### 1.9.5.- CONCLUSIONES.

De los resultados expuestos en las tablas 1.9.1, 1.9.2, y 1.9.3, podemos concluir lo siguiente:

1.- Conforme aumentamos el área de contacto entre el aceite y la superficie cónica del rotor, el par de amortiguamiento por velocidad angular unitaria del rotor también aumenta.

2.- Conforme aumenta el diámetro de la flecha del mismo material, el periodo de vibración disminuye y la frecuencia aumenta.

Puesto que el periodo de vibración es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la flecha elevado a la cuarta potencia, como lo muestra la ecuación (1.7.8) de la práctica 1.7.

3.- De los trazos característicos obtenidos experimentalmente que muestran la amplitud de la oscilación contra el tiempo de oscilación, observamos que la vibración va en declive o disminuye conforme transcurre el tiempo de oscilación, esto debido al amortiguamiento; por lo tanto las amplitudes sucesivas van disminuyendo poco a poco.

#### Comentario:

En el desarrollo experimental de esta práctica se observó que: Si el medio viscoso (aceite) es de una alta viscosidad, los trazos obtenidos ilustran mejor la vibración amortiguada, es decir el declive de la vibración es más acentuado, y por lo tanto se pueden hacer mejores mediciones: es por esta razón que no se utilizó el aceite propio del equipo para llenar el cilindro contenedor puesto que posee poca viscosidad sino que se utilizó aceite más viscoso (aceite SAE 140).

## 1.III.- VIBRACIONES FORZADAS

## TEORIA

Cuando está actuando una fuerza perturbadora periódica  $Q = Q \sin \omega t$  sobre el cuerpo vibratorio (figura 1.III.1), la ecuación diferencial de la vibración será :

$$m \ddot{x} + C \dot{x} + K x = Q \sin \omega t \quad (1.III.1)$$

Las vibraciones constan de dos partes, vibraciones libres - amortiguadas como las representadas por la ecuación (1.II.1) y vibraciones forzadas. Las vibraciones libres se amortiguan hasta anularse, y sólo las forzadas son de importancia práctica.

La expresión general para las vibraciones forzadas es :

$$x = y \sin (\omega t - \phi) \quad (1.III.2)$$

en donde la amplitud de vibración y el ángulo de fase están expresadas por las fórmulas siguientes:

$$y = (Q/K) \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)^2 + C^2 \frac{\omega_e^2}{K^2}}} \right] \quad (1.III.3)$$

$$\operatorname{tg} \phi = C \frac{\omega_e}{K} \left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right) \quad (1.III.4)$$

donde :

$y$  = amplitud de vibración

$\phi$  = ángulo de fase

$C$  = constante de amortiguamiento

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  frecuencia angular del sistema.

$\omega_e$  = frecuencia angular de excitación.

$K$  = constante de elasticidad de resorte, esto es, - la fuerza necesaria para producir una deforma -

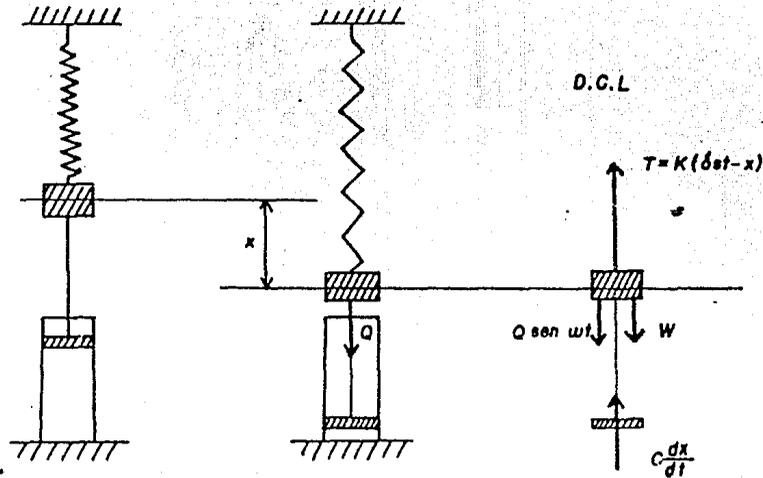


Figura 1.III.1

ción de un resorte igual a la unidad o el momento del par necesario para producir un ángulo de torsión en un árbol o flecha igual a un radián.

$Q$  = fuerza perturbadora periódica.

El primer factor del segundo miembro de la fórmula (1.III.3) es la deformación calculada estáticamente, esto es, por división de la magnitud máxima de la fuerza perturbadora por la constante de resorte. El segundo factor es debido a las condiciones dinámicas y se le llama factor de amplificación.

En la figura 1.III.2 está representado el factor de amplificación en función de la relación  $\omega_e/\omega$  y para diversos valores de la constante  $C$  que es el coeficiente de amortiguamiento.

Cuando la fuerza perturbadora tiene una frecuencia muy baja en relación con la de las vibraciones naturales del sistema, la relación  $\omega_e/\omega$  es pequeña y el factor de amplificación se aproxima a la unidad. Otro caso extremo se presenta cuando la fuerza perturbadora tiene una frecuencia muy alta.

En tal caso, la relación  $\omega_e/\omega$  es un número grande y el factor de amplificación se aproxima a cero. Cuando  $\omega_e$  se aproxima o tiende a  $\omega$ , esto es, cuando la frecuencia de la fuerza perturbadora se aproxima a la de las vibraciones naturales del sistema y las fuerzas amortiguantes son pequeñas, el factor de amplificación se hace grande. Esto significa que una fuerza perturbadora periódica pequeña puede producir vibraciones forzadas muy grandes siempre que esté en resonancia con las vibraciones naturales del sistema. De la fórmula (1.III.2) se ve que la vibración forzada está siempre defasada en retraso con respecto a la fuerza perturbadora.

Cuando  $C$  es pequeño u  $\omega_e$  es considerablemente menor que  $\omega$ , la diferencia de fase  $\phi$  es pequeña. Cuando  $\omega_e$  se aproxima a  $\omega$  tiene lugar una pronunciada variación de la fase de las vibraciones forzadas y la resonancia. Además  $\phi$  se hace igual a  $\pi/2$ . Cuando  $\omega_e$  es considerablemente mayor que  $\omega$ , la diferencia de fase se aproxima al valor  $\pi = \phi$ .

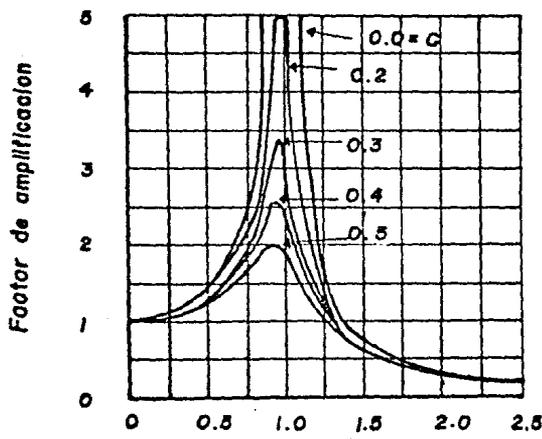


Figura: 1. III.2

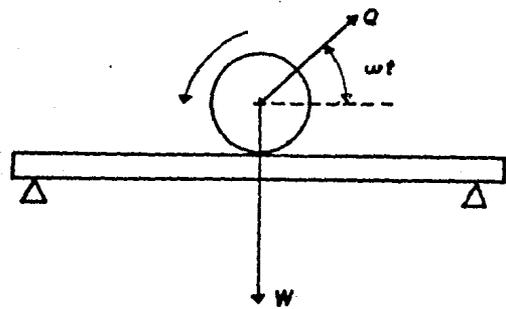


Figura: 1. III.3

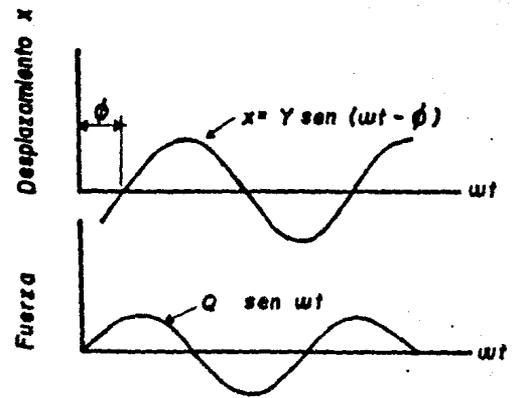


Figura: 1. III.4

Son un ejemplo de vibraciones forzadas las producidas por el desequilibrio de una máquina rotatoria. Tomando en consideración solamente la componente vertical de la fuerza centrífuga,  $Q$  (figura 1.III.3), la fuerza perturbadora será  $Q \sin \omega t$ .

Esta fuerza producirá fuertes vibraciones cuando el número de revoluciones por segundo de la máquina se aproxime a la frecuencia de las vibraciones naturales del sistema que consta de la masa de la máquina y de las vigas que la soportan.

NOTA:  $\phi$  es el ángulo de retraso del desplazamiento de la vibración, con respecto a la fuerza que produce la vibración como se muestra en la figura 1.III.4.

Las prácticas 1.10, 1.11, 1.12, 1.13 y 1.15 son ejemplos claros de vibraciones forzadas con amortiguamiento y sin amortiguamiento.

## PRACTICA 1.10

## VIBRACIONES LATERALES DE VIGAS

## 1.10.1.- INTRODUCCION

Para verificar la regla de Dunkerley, se debe investigar la variación de la primer frecuencia natural de una viga homogénea de sección transversal uniforme, conforme se varía una carga - aplicada en el centro de ésta.

En general la regla de Dunkerley establece que :

$$\frac{1}{f_c^2} = \frac{1}{f_i^2} + \frac{1}{f_b^2} \quad (1.10.1)$$

donde

$f_c$  es la frecuencia natural de la viga (considerando su masa pequeña) con una carga grande.

$f_i$  es la frecuencia natural de la viga (considerando - su masa pequeña) con una carga grande.

$f_b$  es la frecuencia natural de la viga (unicamente) - sin carga.

## 1.10.2.- TEORIA.

Los sistemas mecánicos, tales como cables, varillas, vigas, - placas, etc, que tienen sus masas y sus fuerzas elásticas dis - tribuidas, en lugar de tener masas concentradas, separadas por resortes, son susceptibles de tener las llamadas vibraciones de medios continuos.

Estos sistemas constan de un número infinito de partículas - y por tanto requieren igual cantidad de coordenadas para especi - ficar su configuración. En consecuencia, los sistemas mecánicos de esta clase tienen un infinito número de frecuencias natura -

les y de modos naturales de vibración.

En general, las vibraciones de medios continuos están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales y para su análisis se supone que todos los materiales son homogéneos y obedecen a la ley de Hooke.

Para una viga de sección transversal uniforme que está bajo un régimen de vibración continua, la ecuación diferencial de la viga según Den Hartog en su libro "Mecánica de las Vibraciones" es:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.10.2)$$

donde

$E$  es el módulo de Young.

$J$  es el 2º momento de área de la viga.

$y$  es la deflexión de la viga.

$x$  es la coordenada a lo largo del eje longitudinal de la viga.

$\mu_1$  es la masa de la viga por unidad de longitud.

Suponiendo una vibración libre sostenida con una frecuencia angular  $\omega$  de tipo armónico se tiene:

$$y(x, t) = y(x) \text{ sen } \omega t$$

que da a la ecuación (1.10.2) la forma

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \mu_1 \omega^2 y \quad (1.10.3)$$

El primer miembro es la expresión elástica de la carga, mientras que el lado derecho es el valor máximo de la carga de inercia.

Las funciones que satisfacen la ecuación (1.10.3) deberán tener la propiedad de que, tras una cuarta diferenciación, volverá a asumir su forma original multiplicada por la constante  $\mu_1 \omega^2$ .

sitiva  $\mu \omega^2 / E J$ . Podemos recordar cuatro funciones con esta propiedad, a saber,

$$e^{ax}, e^{-ax}, \operatorname{sen} ax \text{ y } \operatorname{cos} ax$$

donde el coeficiente  $a$  se escogerá de tal suerte que :

$$a = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{E J}} \quad (1.10.4)$$

Así pues, la solución general de la ecuación (1.10.3) que contiene cuatro constantes de integración puede escribirse como:

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \operatorname{sen} ax + C_4 \operatorname{cos} ax \quad (1.10.5)$$

Las cuatro constantes de integración  $C$  se calculan por las condiciones de sus extremos. A cada extremo de la viga le corresponden dos de estas condiciones, totalizando de esta manera con sus dos extremos las cuatro condiciones requeridas.

Estas son:

Extremo libremente apoyado :  $y = 0$  ,  $y'' = 0$   
(deformación y momento flector nulo)

Extremo libre :  $y'' = 0$  ,  $y''' = 0$   
( momento flector nulos y fuerza cortante nula )

Extremo empotrado :  $y = 0$  ,  $y' = 0$   
( pendiente y deformación nulas )

En cualquier caso específico, las cuatro condiciones de los extremos sustituidos en la ecuación (1.10.5) proporcionan cuatro ecuaciones algebraicas homogéneas de las cuatro constantes  $C$ . Igualando a cero el determinante de ese sistema, se obtiene una ecuación en  $a$ , que con la ecuación (1.10.4) es la ecuación de la frecuencia angular.

Para el caso de una viga apoyada libremente se tiene que las condiciones de los extremos son:

$$x = 0, y = y'' = 0 \quad \text{y} \quad x = l, y = y'' = 0$$

Vemos que la forma de una onda senoidal satisface estas condiciones, mientras que las funciones coseno o las funciones de e las violan. De esta manera para una viga sobre dos extremos libremente apoyados, la ecuación (1.10.5) se simplifica a :

$$y(x) = C \sin ax$$

de manera que las curvas elásticas normales de una viga uniforme sobre dos extremos libremente apoyados, son las mismas que las de una cuerda uniforme, pero sus frecuencias angulares son diferentes. Estas se obtienen haciendo que el argumento del seno sea igual a  $\pi$  veces un número entero o,

$$al = l \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{EJ}} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

de manera que :

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}}, \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}}$$

y en general

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}} \quad (1.10.6)$$

Para esta práctica la primera frecuencia angular natural es:

Cuando  $n = 1$

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}} \quad (1.10.7)$$

donde  $\mu_1 = \frac{m}{l}$

pero sabemos que  $m = \frac{W}{g}$

sustituyendo en (1.10.7) tenemos:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J}{\frac{W}{E l}}}$$

Ordenando tenemos:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l} \sqrt{\frac{E J E}{\frac{W}{l}}}$$

si  $\frac{W}{l} = w_0$  tenemos:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J E}{w_0}}$$

pero

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \quad \text{entonces}$$

$$2\pi f_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J E}{w_0}}$$

Despejando  $f_1$  (primer frecuencia natural)

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{E J E}{w_0}} \quad (1.10.8)$$

La ecuación (1.10.8) nos representa la primer frecuencia natural para una viga de sección transversal uniforme, libremente apoyada.

### 1.10.3.- OBJETIVOS.

1.- Para una barra de sección transversal uniforme analizar la frecuencia natural de vibración para diferentes cargas aplicadas.

2.- Verificar la regla de Dunkerley

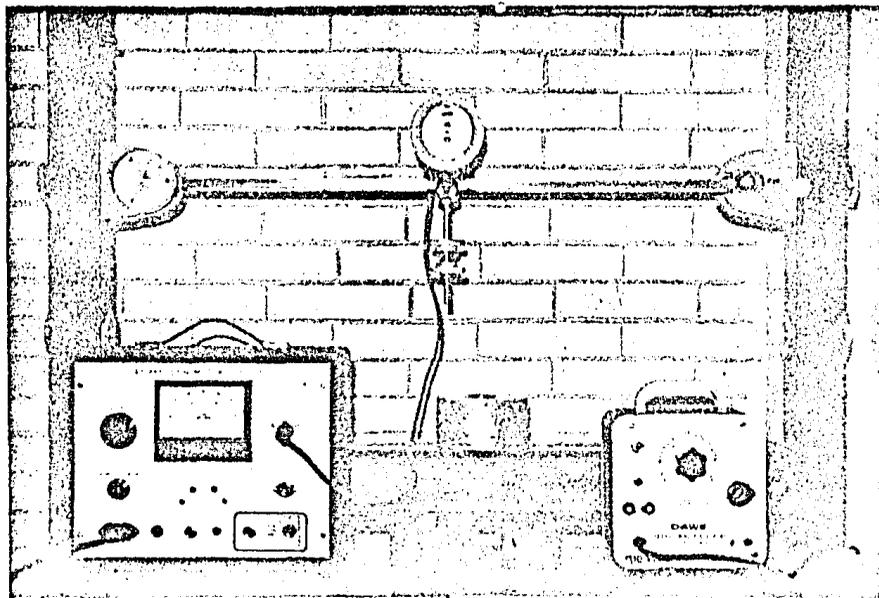


Figura 1.10.1

Vibraciones Laterales de Vigas.

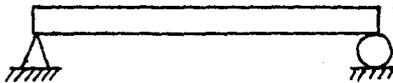
## 1.10.4.- EQUIPO.

- . barra de acero de sección rectangular EG
- . muñón de montaje DI
- . muñón de montaje con movimiento lateral EI
- . motor excitador con disco graduado EII
- . 15 discos de pesos de 400 g c/u
- . 2 pesos cilíndricos de acero (1.85 Kg y 3.2 Kg respectivamente )
- . unidad de control de velocidad del motor EII
- . estroboscopio
- . flexómetro

## 1.10.5.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

El equipo se debe de montar como se muestra en la figura 1.10.1, cuidando de colocar el motor en el centro de la viga.

Debido a la estructura de los muñones la barra se encuentra libremente apoyada en los extremos. Puesto que el muñón de la izquierda es una articulación móvil, el sistema lo podemos representar de la siguiente forma.



Este montaje es indispensable en este experimento, puesto - que si la barra estuviera empotrada en los extremos, en el mo - mento en que esta barra entrara en resonancia (es decir cuando la frecuencia de vibración de la barra fuera igual a la frecuen - cia natural del sistema ) fácilmente podría fracturarse o sufrir una deformación plástica permanente.

Entonces las articulaciones o apoyos usados permiten a la ba - rra vibrar sin los efectos que tendría si estuviera fijamente - apoyada (empotrada).

La unidad de control de velocidad del motor E II , cuenta - con dos rangos de velocidades; de 0 a 1500 rpm y de 1500 a 3000 rpm. La velocidad del motor la podemos leer en el marco cen - tral del aparato en el cual se encuentra una escala graduada y una aguja indicadora.

NOTA: Antes de tomar mediciones en el aparato, debemos cali - brar éste, haciendo coincidir la aguja con el cero de la escala mediante un pequeño tornillo de ajuste situado debajo del marco de la escala.

El cambio de rangos de velocidad opera automáticamente, y el aparato nos indica en cuál escala se está trabajando al enten - derse uno de los dos pequeños diodos rotulados 1500 y 3000, si tuados debajo del marco de la escala.

Antes de encender la unidad de control de velocidad, debemos asegurarnos que la perilla de control de velocidad, situada en la parte superior izquierda del aparato, esté girada completa - mente hacia la izquierda, para evitar arrancar el motor con una velocidad alta.

El motor sujeto rígidamente al centro de la barra, tiene aca - plado en su eje un disco desbalanceado (agujerado).

Entonces al incrementar la velocidad del motor aumenta la - fuerza rotacional desequilibrada provocada por el disco desba - lanceado induciendo vibración en la barra, por lo tanto al lle - gar el sistema a la primer frecuencia natural la frecuencia -

a la que gira el disco del motor es la misma frecuencia a la que vibra lateralmente la barra, y ésta la podemos leer en la escala de la unidad de control en rpm (cpm).

Para obtener una mayor exactitud en la medición vamos a utilizar el Estroboscopio cuyo manejo esta descrito en el Apéndice del Capítulo 6 . Así cuando sea obtenida la primer frecuencia natural del sistema su valor también lo podemos leer directamente en la escala del estroboscopio al sincronizar la razón de relampagueo con la velocidad a la que gira el disco del motor o la frecuencia a la que vibra la barra.

Para llevar a efecto el Desarrollo Experimental actuaremos bajo la siguiente secuencia

- 1.- Asegurarse de que estén bien atornillados el motor a la viga, y los extremos de la viga a los muñones DI y EI.
- 2.- Conectar el motor al Control de velocidad EII.
- 3.- Colocar el estroboscopio frente al sistema armado.
- 4.- Encender el Control de velocidad E II.
- 5.- Girar la perilla de control hacia la derecha poco a poco incrementando de esta manera la velocidad del motor.
- 6.- Seguir aumentando la velocidad del motor hasta notar que la vibración producida en la viga llega a la primer frecuencia natural, es decir cuando las deflexiones de la viga sean las más grandes y el ruido producido sea el mas intenso.
- 7.- Sostener esa vibración y anotar las revoluciones por minuto a las que gira el motor.
- 8.- Encender el estroboscopio, que deberá operar en forma interna ( ver Apéndice del Capítulo 6) y girar la perilla de control, hasta lograr sincronizar los ciclos por minuto (revolucio

nes por minuto) a los que gira el motor, con la razón de relampagueo de la lámpara en flashes/minuto. En este instante se notará que la viga aparece estática, así como el disco del motor.

- 9.- Anotar la razón de relampagueo del estroboscopio.
- 10.- Bajar la velocidad del motor hasta el mínimo y apagarlo.
- 11.- Bajar la razón de relampagueo del estroboscopio hasta el mínimo y apagarlo.
- 12.- Colocar la carga indicada en el tornillo de pesos situado debajo del motor y asegurarla con dos tuercas en los extremos.
- 13.- Seguir de nuevo los pasos del 1 al 11 cada que se haga variar la carga.

#### 1.10.6.- RESULTADOS.

La tabla de resultados 1.10.1 nos muestra la primer frecuencia natural del sistema (  $f_c$  ) obtenida en forma práctica al aplicar diferentes pesas (  $w$  ) a la barra.

Si en la regla general de Dunkerley

$$\frac{1}{f_c^2} = \frac{1}{f_i^2} + \frac{1}{f_b^2} \quad (1.10.1)$$

$f_b$  nos representa la frecuencia natural de la barra sin carga-  
 $w$ . Cuando  $w = 0$ , entonces  $f_i = 0$ , Por lo tanto  $f_c = f_b$ .

Entonces el valor de  $f_b$  lo podemos encontrar al trazar una gráfica de  $\frac{1}{f_c^2}$  contra  $w$  (figura 1.10.2) donde la intersección de la línea dibujada con la ordenada  $\frac{1}{f_b^2}$  nos dará un valor igual a  $\frac{1}{f_b^2}$ .

Para la figura 1.10.2 el valor de  $\frac{1}{f_b^2}$  es  $0.125 \times 10^{-6}$

Entonces  $\frac{1}{F_0^2}$  es  $0.125 \times 10^{-6}$  por lo tanto

$$f_c = f_b = 47.14 \text{ Hz}$$

Este valor obtenido prácticamente lo podemos comparar con el que se obtiene en forma teórica utilizando la ecuación (1.10.8)

$$f_b = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E J g}{w_0}}$$

donde

$l$  longitud de la barra en m

$g$  aceleración de la gravedad en m/seg

$E$  módulo de Young en Kg/m<sup>2</sup>

$J$  segundo momento de area

$w_0$  peso por unidad de longitud de la viga

Para la barra de nuestro experimento tenemos:

$$l = 0.785 \text{ m}$$

$$w_0 = \frac{2.05}{0.785} \text{ Kg/m}$$

$$E = 2.109 \times 10^{10} \text{ Kg/m}^2$$

$$J \text{ para una sección rectangular} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$b = \text{ancho} = 0.0254 \text{ m}$$

$$h = \text{espesor} = 0.0127 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/seg}$$

$$\pi = 3.1416$$

Sustituyendo estos valores, en la ecuación (1.10.8) resulta

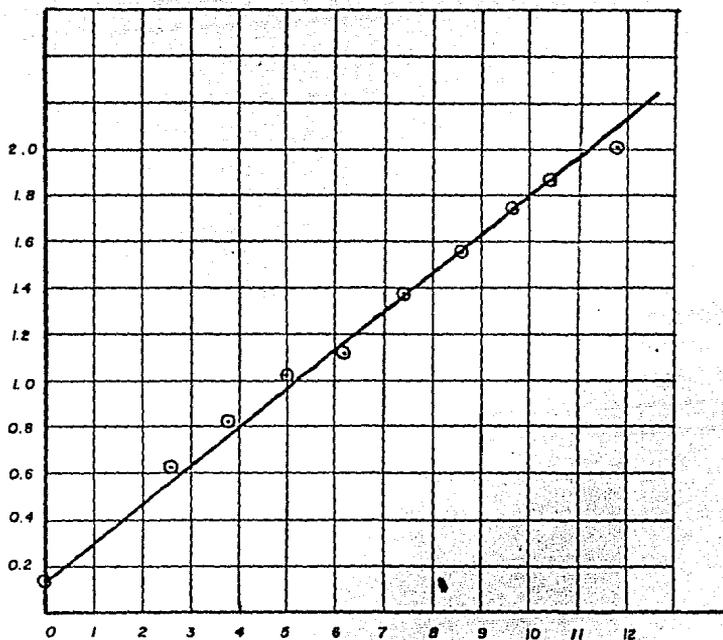
$$f_b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(9.81)(2.109 \times 10^{10})(1/12)(0.0254)(0.0127)^3}{\frac{2.05}{0.785}}}$$

$$f_b = 47.24 \text{ Hz}$$

el cual es congruente con el obtenido en forma práctica con la figura 1.10.2; así se verifica entonces la regla de Dunkerley para vibraciones laterales de vigas.

$f_c$  = primer frecuencia natural del sistema [cpm]

$$\frac{1}{f_c^2} \times 10^{-6}$$



intersección

$$\frac{1}{f_c^2} = 0.125 \times 10^{-6}$$

[kg]

Figura 1.10.2

$w$	$f_c$	$f_c \cdot 10^6$	$\frac{1}{f_c} \times 10^{-6}$
Kg	cm	-	-
2.6	1257.5	1.2575	0.632
3.8	1100.0	1.1000	0.826
5.0	990.0	0.9900	1.020
6.2	917.5	0.9175	1.137
7.4	350.0	0.7225	1.334
8.6	800.0	0.8400	1.562
9.65	755.0	0.5700	1.754
10.45	730.0	0.5329	1.876
11.8	687.5	0.4726	2.115

Tabla de resultados 110.1

NOTA: Todos los valores de  $f_c$  son un promedio de las mediciones obtenidas con la unidad de control de velocidad E II y con el Estroboscopio.

El primer valor de  $f_c$  corresponde a la frecuencia natural de la barra con el motor, el tornillo porta pesos y las tuercas, - todo con peso  $w = 2.6$  Kg.

### 1.10.7.- CONCLUSIONES.

1) En una vibración forzada el sistema tenderá a vibrar en su propia frecuencia natural, así como también a seguir la frecuencia de la fuerza de excitación.

2) Se observa en la tabla de resultados 1.10.1, que conforme se aumenta la carga  $w$  en el centro de la barra, la primer frecuencia natural del sistema  $f_0$  disminuye, es decir  $f_0$  varía en forma inversamente proporcional a la carga aplicada, lo cual también se puede observar en la figura 1.10.2.

3) A manera de ejemplo si la barra del experimento se representara por un puente, a través del cual un grupo de soldados fueran a pasar a "paso corto" (un paso sucesivamente marcado igual y constante), este movimiento produciría una vibración forzada sobre el puente, entonces cuando esta frecuencia de excitación (paso corto) fuera igual a la frecuencia natural del sistema, las deflexiones del puente serían tan grandes que éste se vendría abajo.

## PRACTICA 1.11

## VIBRACIONES LATERALES DE VIGAS CON AMORTIGUAMIENTO

## 1.11.1.- INTRODUCCION

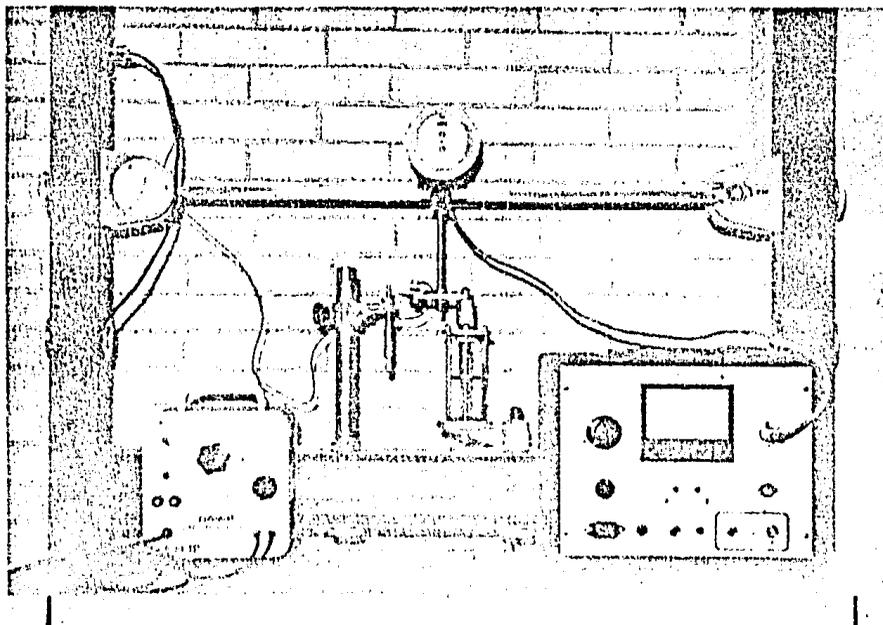
Como se dijo en prácticas anteriores las fuerzas de amortiguamiento, son fuerzas que se oponen o que llevan la contraria en un sistema de vibraciones, las cuales constantemente reducen el movimiento. El amortiguamiento ocurre en todas las vibraciones naturales y son la causa de la fricción entre partículas en la atmósfera, en los líquidos o entre un sólido y otro. En este experimento se hace un examen de la vibración transversal amortiguada de una viga (barra de sección transversal uniforme) producida por la introducción de un amortiguador.

## 1.11.2.- OBJETIVO

Analizar una barra de sección transversal uniforme, libremente apoyada en sus extremos, bajo vibraciones transversales con amortiguamiento ligero, pesado y sin amortiguamiento.

## 1.11.3.- EQUIPO

- . barra de acero de sección rectangular E 6
- . muñón de montaje D1
- . muñón de montaje con movimiento lateral E 1
- . motor excitador con disco graduado E 11
- . Unidad de control de velocidad del motor E 11
- . estroboscopio
- . micrómetro
- . soporte del micrómetro E 3



*Figura 1.11.1*

*Vibraciones Laterales de Vigas con Amortiguamiento.*

- . amortiguador D 2
- . soporte del amortiguador E 2
- . contactor E 5
- . aceite

#### 1.11.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

Esta práctica es un complemento de la anterior (vibraciones laterales de vigas) únicamente que ahora introducimos un amortiguador al sistema.

Para llevar a cabo la práctica debemos montar el equipo como se muestra en la figura 1.11.1, en la cual podemos observar, - que en el centro de la barra se coloca de nuevo el motor con el disco desbalanceado, pero ahora debajo de el motor, en el tornillo porta pesos, acoplamos el amortiguador D 2 junto con su soporte E 2 y éste último lo fijamos al marco inferior del Aparato Universal de Vibraciones.

El amortiguador tiene una pequeña barrita para ensamblarla - al tornillo porta pesos, del lado izquierdo de esta barrita debemos sujetar firmemente el contactor E 5, de manera tal que al vibrar la barra, la laminilla del contactor pueda hacer buen contacto con la cabeza del micrómetro, el cual debemos sujetarlo al soporte E 3 y éste último al marco inferior del Aparato Universal.

Además debemos hacer las siguientes conexiones :

- Operar el estroboscopio en forma externa utilizando el rango mas bajo.
- Hacer la conexión, del estroboscopio a una de las dos entradas de la parte izquierda del marco del Aparato Universal.
- Conectar la terminal del contactor a la otra entrada del marco.

En este experimento la amplitud central de vibración ( $y$ ) de la barra y el ángulo de fase ( $\theta$ ) de la viga bajo vibraciones amortiguadas, serán medidas directamente en el sistema armado en forma muy precisa con cualquier frecuencia de excitación aplicada a la barra.

Estas mediciones las haremos primero para vibraciones de la barra sin amortiguamiento, es decir sin introducir aceite en el amortiguador, pero estando colocado éste, como en la figura 1.11.1. Entonces realizaremos los pasos siguientes.

**IMPORTANTE.**- Calibrar la unidad de control de velocidad del motor E 11 y el estroboscopio antes de empezar el experimento.

Para el sistema armado calcular su frecuencia natural como se hizo en la práctica 1.10.

1.- Encender los aparatos.

2.- Colocar el micrómetro lo más cerca posible del contactor, y desplazar la cabeza del micrómetro hasta hacer contacto con la laminilla del contactor, por lo que el estroboscopio efectuará una descarga de luz. (figura 1.11.2)

Justo a la primera descarga tomar la lectura del micrómetro que nos servirá como referencia para las demás medidas.

3.- Desplazar hacia abajo la cabeza del micrómetro.

4.- Energizar el motor produciendo cualquier frecuencia de excitación para que la barra comience a vibrar.

5.- Desplazar hacia arriba la cabeza del micrómetro hasta que de nuevo haga contacto con la laminilla del contactor, produciéndose descargas del estroboscopio debido a la vibración de la barra.

6.- Tomar la lectura del micrómetro, que nos indicará la amplitud central de vibración de la barra para una determinada frecuencia de excitación.

**NOTA:** Es importante tomar el contacto que sea el primero en pro

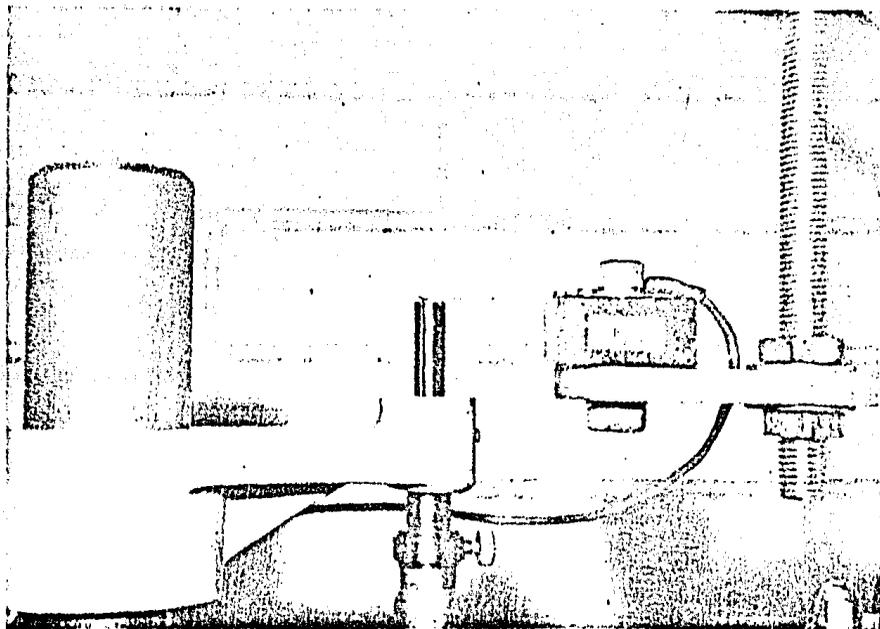


Figura 1.11.2

Vibraciones Laterales de Vigas con Amortiguamiento (detalle).

ducir descargas uniformes del estroboscopio, es decir, se debe tomar la lectura exactamente en el momento en que se uniformiza el contacto entre la laminilla y la cabeza del micrómetro.

7.- Dirigir el relampagueo del estroboscopio al disco graduado del motor, de tal manera que éste se observe estático, y medir entonces el ángulo de fase.

8.- Desplazar de nuevo hacia abajo la cabeza del micrómetro por lo que el estroboscopio dejará de relampaguear.

9.- Aumentar la frecuencia de excitación y seguir los pasos 6, 7, y 8 para tomar nuevas lecturas.

10.- Seguir aumentando la frecuencia de excitación a intervalos pequeños e iguales, hasta llegar a la frecuencia natural del sistema y aún hasta pasarla.

NOTA: A bajas frecuencias el ángulo de fase no se puede leer.

Para efectuar el mismo experimento pero ahora con amortiguamiento, debemos llenar con aceite el cilindro transparente del amortiguador hasta tres cuartas partes de su capacidad total.

Y podremos variar la cantidad de amortiguamiento girando los dos platos de orificios del amortiguador uno con respecto del otro, variando el área del pistón del amortiguador obteniendo así un amortiguamiento ligero y otro pesado.

Las tablas 1.11.1, 1.11.2 y 1.11.3 nos muestran los resultados obtenidos para varias frecuencias de excitación para vibraciones transversales de la barra, sin amortiguamiento, con amortiguamiento ligero y con amortiguamiento pesado respectivamente.

En las tablas antes citadas aparecen resultados de : ángulo de fase ( $\phi$ ) en grados, y amplitud central de vibración de la barra ( $y$ ) en milímetros para un amplio rango de frecuencias de excitación ( $f_e$ ). Además también aparece tabulado la "razón de frecuencia" ( $f_e/f_c$ ), es decir la frecuencia de excitación entre la frecuencia natural del sistema ( $f_c$ ).

Por último en las figuras 1.11.3 y 1.11.4 aparecen graficados la amplitud de vibración y el ángulo de fase respectivamente contra la razón de frecuencia, para vibraciones sin amortiguamiento y con amortiguamiento ligero y pesado.

$f_c$	$\phi$	$y$	$f_c/f_c$
cm	grados	mm	-
900	-	0.04	0.750
925	-	0.06	0.770
950	-	0.08	0.791
975	-	0.09	0.812
1000	0	0.10	0.833
1025	0	0.11	0.854
1050	0	0.13	0.875
1075	0	0.14	0.895
1100	0	0.23	0.916
1125	5	0.34	0.937
1150	10	0.57	0.958
1175	20	1.16	0.979
1180	25	1.38	0.993
1135	35	1.56	0.937
1190	50	2.73	0.951
1195	70	3.63	0.995
1200	90	4.46	1.000
1205	110	3.35	1.004
1210	120	3.54	1.008
1215	140	3.00	1.012
1220	155	2.28	1.016
1225	160	1.98	1.020
1250	160	0.73	1.041
1275	160	0.42	1.062
1300	160	0.28	1.083
1325	160	0.19	1.104
1350	160	0.13	1.125
1375	160	0.08	1.145
1400	160	0.06	1.166

Tabla de resultados 1.11.1

Vibración transversal de la barra sin amortiguamiento

$f_e$	$\phi$	$y$	$f_e / f_e$
cpm	grados	mm	-
900	0	0.05	0.750
925	0	0.07	0.770
950	0	0.08	0.791
975	5	0.09	0.812
1000	10	0.13	0.833
1025	12	0.14	0.854
1050	15	0.17	0.875
1075	20	0.20	0.895
1100	25	0.26	0.916
1125	35	0.36	0.937
1150	40	0.49	0.958
1175	50	0.78	0.979
1180	60	0.83	0.933
1185	70	0.93	0.937
1190	80	1.17	0.941
1195	85	1.21	0.995
1200	90	1.27	1.000
1205	98	1.25	1.024
1210	105	1.23	1.008
1215	115	1.21	1.012
1220	125	1.11	1.016
1225	130	1.06	1.020
1230	135	0.99	1.025
1235	140	0.93	1.029
1240	145	0.81	1.033
1245	150	0.73	1.037
1250	155	0.66	1.041
1275	160	0.49	1.062
1300	160	0.38	1.083
1325	160	0.30	1.104
1350	160	0.24	1.125

Tabla de resultados 1.11.2

Vibración Transversal de la barra con amortiguamiento ligero

f e	$\phi$	y	fe / fc
opm	grados	mm	-
900	0	0.07	0.750
925	5	0.03	0.770
950	10	0.10	0.791
975	15	0.12	0.812
1000	20	0.13	0.833
1025	25	0.15	0.854
1050	30	0.18	0.875
1075	35	0.21	0.895
1100	40	0.25	0.916
1125	45	0.30	0.937
1150	50	0.36	0.958
1175	60	0.43	0.979
1185	65	0.44	0.987
1190	75	0.45	0.991
1195	85	0.44	0.995
1200	90	0.47	1.000
1215	100	0.45	1.012
1225	115	0.44	1.020
1250	125	0.39	1.041
1275	135	0.36	1.062
1300	145	0.31	1.083
1325	155	0.28	1.104
1350	160	0.26	1.125
1375	160	0.25	1.145
1400	160	0.23	1.166

Tabla de resultados 1.11.3

Vibración transversal de la barra con amortiguamiento pesado

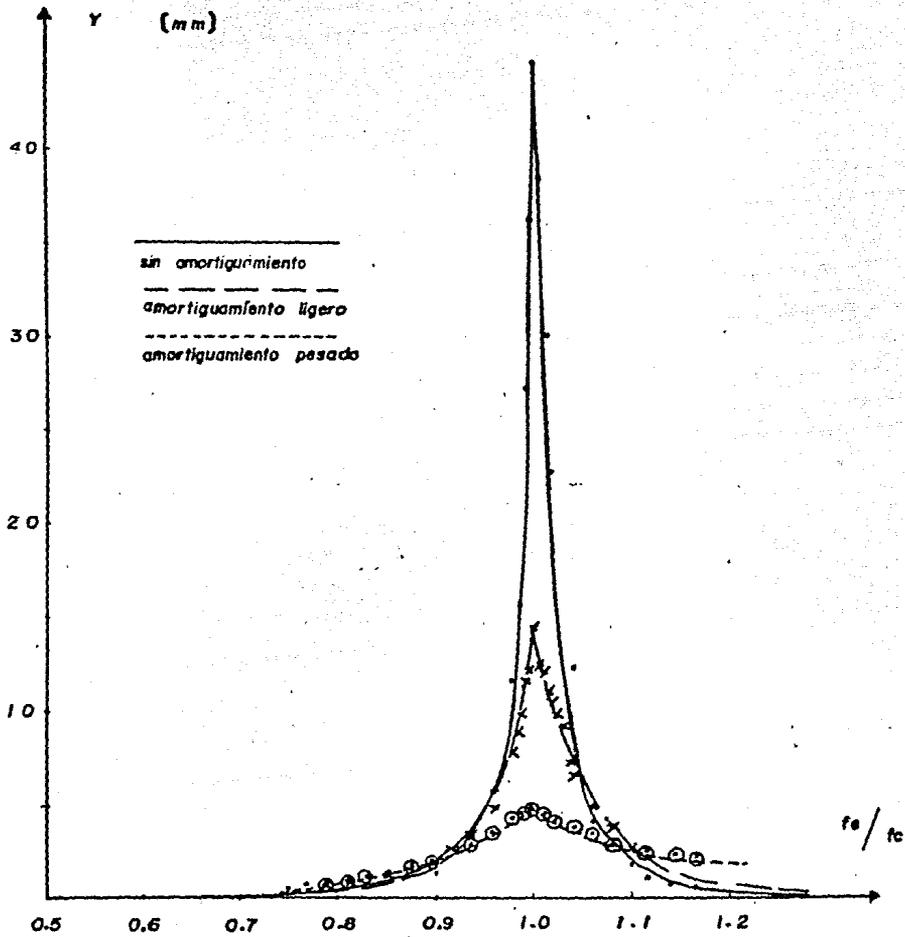


Figura 1.11.3

Amplitud central de vibración ( $Y$ ) contra razón de frecuencia ( $f_0/f_c$ )

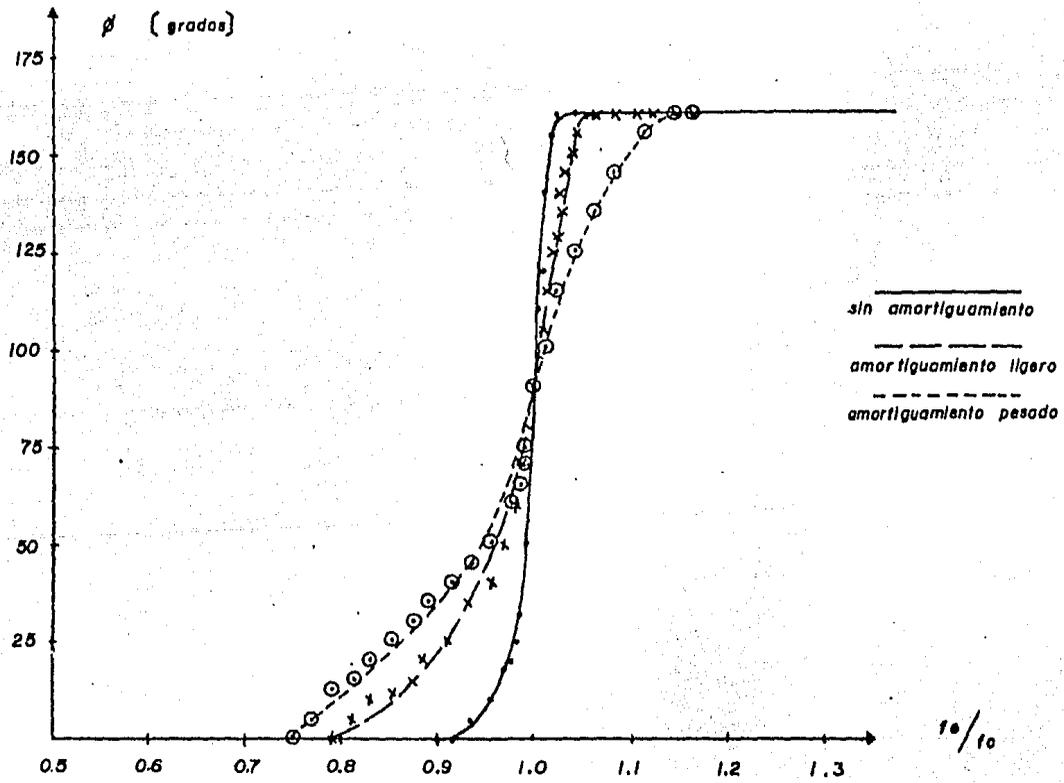


Figura 1.11.4

Angulo de fase ( $\phi$ ) contra razón de frecuencia ( $f_0/f_c$ )

$y = 0.47 \text{ mm.}$

5.- En la figura 1.11.3 que nos muestra la amplitud central de vibración ( $y$ ) contra la razón de frecuencia ( $f_e/f_c$ ), podemos observar que cuando la razón de frecuencia es baja,  $f_e/f_c < 1$  la frecuencia de la fuerza de excitación (provocada por el desbalanceo del motor, el cual causa la vibración forzada), es sumamente lenta y la barra se defleca por esta fuerza una mínima cantidad.

Cuando la razón de frecuencia es alta  $f_e/f_c > 1$ , la fuerza se mueve hacia arriba y hacia abajo tan de prisa que la barra simplemente no tiene tiempo para seguirla y la amplitud resulta pequeña. Cuando  $f_e/f_c = 1$ , es decir, cuando la frecuencia forzada coincide exactamente con la frecuencia natural. La fuerza entonces puede siempre empujar a la barra en el momento oportuno en la dirección adecuada y la amplitud puede aumentar enormemente. Es el caso de un péndulo al que se le empuja ligeramente en la dirección de su movimiento cada vez que se balancea: Una fuerza relativamente pequeña puede hacer la amplitud sumamente grande. Este fenómeno tan importante ya lo conocemos con el nombre de "resonancia", y a la frecuencia natural se la suele llamar también frecuencia de resonancia.

6.- En la figura 1.11.4 que nos muestra el ángulo de fase ( $\phi$ ) - contra la razón de frecuencia ( $f_e/f_c$ ), podemos observar que, para un amortiguamiento nulo y para bajas frecuencias de excitación la fuerza excitadora y el desplazamiento de la barra están en fase ( $\phi = 0^\circ$ ), al ir aumentando la frecuencia de excitación, la fuerza y el desplazamiento comienzan a defasarse rápidamente hasta llegar a la frecuencia de resonancia donde se hallan defasadas  $90^\circ$ . Al ser mayor la frecuencia de excitación que la frecuencia natural del sistema, la fuerza y el desplazamiento comienzan rápidamente a defasarse aún más hasta alcanzar los  $160^\circ$  de defasamiento.

Para valores de amortiguamiento diferentes de cero (amortiguamiento ligero y pesado). Puede verse que, en general, el amortiguamiento tiende a suavizar las crestas de los diagramas de amortiguamiento nulo, tanto en la amplitud como en la fase.

### 1.11.5.- CONCLUSIONES.

1.- En una vibración forzada el sistema inicialmente tenderá a vibrar en su propia frecuencia natural, y posteriormente seguirá la frecuencia de la fuerza de excitación. Por lo tanto en presencia de fricción (amortiguamiento), la porción de la amplitud total de vibración que no es ayudada por la fuerza externa, gradualmente decae. Entonces, después de un corto tiempo el sistema vibra a la frecuencia de la fuerza de excitación, siendo indiferente de las condiciones iniciales de la frecuencia natural del sistema.

2.- Podemos observar en la tabla de resultados 1.11.1 para vibración transversal de la barra sin amortiguamiento, que al ir aumentando la frecuencia de excitación ( $f_e$ ), la amplitud de vibración ( $y$ ) también va en aumento, hasta llegar a la resonancia es decir, donde la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema ( $f_c$ ) son las mismas ( $f_e/f_c = 1$ ), es en este momento donde tenemos la mayor deflexión central de la barra - 4.46 mm y se alcanza a una frecuencia de excitación  $f_e = 1200$  cpm. Después de este punto  $f_e$  sigue aumentando pero ahora  $y$  va disminuyendo.

3.- En la tabla de resultados 1.11.2 para vibración transversal de la barra con amortiguamiento ligero, se observa también la misma relación directa entre la frecuencia de excitación y la amplitud de vibración hasta llegar a la resonancia ( $f_e/f_c=1$ ) donde empieza a disminuir la amplitud de vibración conforme aumenta la frecuencia de excitación. Pero en presencia de amortiguamiento ligero las deflexiones centrales de la barra son menores como se observa en el punto de resonancia para  $f_e = 1200$  cpm,  $y = 1.27$  mm.

4.- La misma observación del punto anterior, entre  $f_e$  e  $Y$ , se puede hacer para la tabla de resultados 1.11.3 para vibración transversal de la barra con amortiguamiento pesado; solamente que las amplitudes de vibración son ahora más pequeñas debido al gran amortiguamiento, notando que en el punto de resonancia-

## PRACTICA 1.12

## ABSORSOR DE VIBRACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO

## 1.12.1.- INTRODUCCION

Una máquina o parte de una máquina sobre la cual actúa una fuerza alterna de frecuencia constante percibe vibraciones, detestables especialmente cuando está cerca de entrar en resonancia. Para mejorar esta situación, podemos intentar primero la eliminación de la fuerza. A menudo esto no es ni práctico ni posible. Por lo tanto, podemos cambiar la masa o la constante de resorte del sistema en un intento para alejarnos de las condiciones de resonancia, aunque a veces esto tampoco resulta práctico. La tercera posibilidad consiste en la aplicación del "absorbor de vibraciones".

En la figura 1.12.1, sea la combinación de  $K$  y  $M$  la representación esquemática de la máquina en consideración, y actuando sobre ella una fuerza  $Q \sin \omega t$ . El amortiguador de vibraciones es un sistema vibratorio relativamente pequeño con un resorte cuya constante es  $k$  y de masa  $m$ , acoplado a la masa principal  $M$ . La frecuencia angular  $k/m$  del sistema acoplado se esoge de manera que sea igual a la frecuencia angular de la fuerza perturbadora o de excitación. Se demostrará entonces que la masa principal  $M$  no vibra en lo absoluto, y que el pequeño sistema  $k$  y  $m$  vibra de tal manera que su fuerza de resorte es en todo instante igual y de sentido contrario a  $Q \sin \omega t$ .

Así pues, no habrá ninguna fuerza neta actuando sobre  $M$  y por lo tanto la masa no vibrará.

Para el siguiente experimento nuestro absorbor de vibraciones consistirá simplemente de dos masas iguales las cuales se fijan en alguna posición a lo largo de dos pequeñas barras en voladizo (cantilivers horizontales).

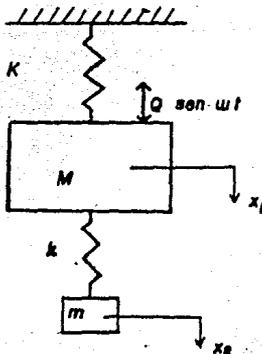


Figura 1.12.1

### 1.12.2.- OBJETIVO

Encontrar la longitud  $\ell$  a la cual se deben colocar las masas del absorber de vibraciones para que la frecuencia angular del absorber sea igual a la frecuencia angular de un sistema barra con motor libremente apoyada y sin amortiguamiento como el de la figura 1.10.1.

### 1.12.3.- EQUIPO

- barra de acero de sección rectangular E 6
- muñón de montaje D 1
- muñón de montaje con movimiento lateral E 1
- motor excitador con disco graduado E 11
- unidad de control de velocidad del motor E 11
- absorber de vibraciones G 1
- flexómetro

- micrómetro
- contactor
- estroboscopio

#### 1.12.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

El absorber de vibraciones G 1 se monta en el sistema como se muestra en la figura 1.12.2. Para cualquier frecuencia de excitación que se le aplique al motor, debemos ajustar las masas de vibración para que la energía de vibración sea transmitida al absorber, dejando libres de vibración tanto al motor - como a la viga. El método para analizar este efecto es : ajustar el micrómetro y el contactor, (como se describió en la práctica 1.11) y aplicar cualquier frecuencia de excitación - por medio de la unidad de control de velocidad. El valor de  $l$ , es decir, la distancia del centro de una de las masas al extremo empotrado del absorber, puede ser calculada con la siguiente fórmula

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E J g}{W l^3}} \quad [\text{Hz}] \quad (1.12.1)$$

donde

$f_e$  es la frecuencia de excitación aplicada en Hz

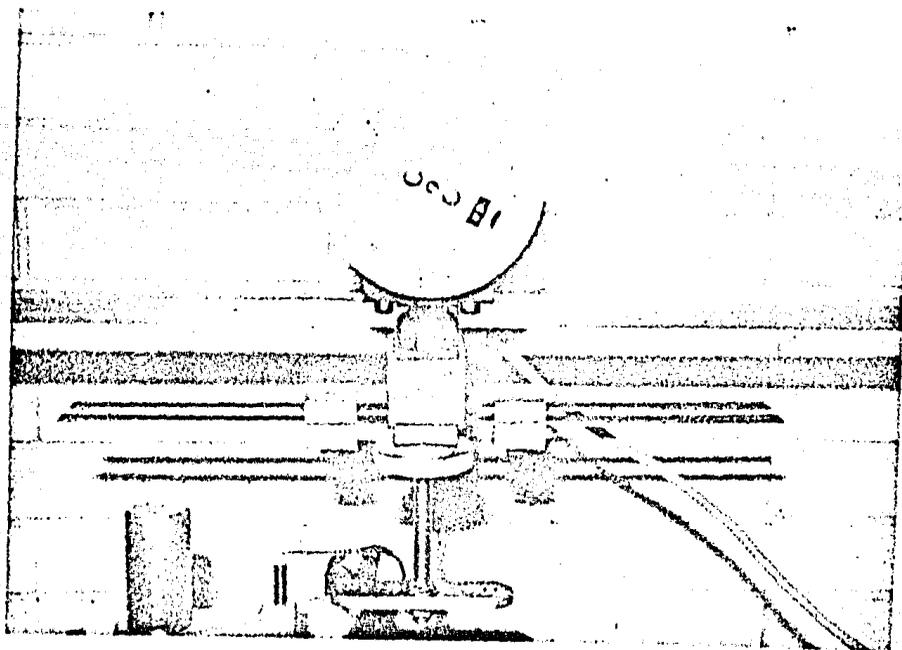
$E$  es el módulo de Young para el acero

$J$  es el segundo momento de área del absorber

$W$  es el peso de una de las masas del absorber

$l$  es la distancia del centro de una masa al extremo empotrado del absorber

Cuando las masas sean correctamente ajustadas a  $l$ , observaremos que la amplitud de vibración decrece considerablemente probando así la validez de la fórmula anterior y demostrando - el uso del absorber de vibraciones.



*Figura 1.12.2*

*Absorsor de Vibraciones.*

## 1.12.5.- RESULTADOS.

Como un ejemplo del uso del absorbtor se efectúa el siguiente experimento

Para una frecuencia de excitación aplicada  $f_e = 1280 \text{ cpm} = 21.33 \text{ Hz}$  se tiene:

$$E = 2.109 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$J = 0.0003375 \text{ cm}^4$$

$$W = 0.17329 \text{ Kg}$$

$$g = 981 \text{ cm/seg}^2$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{.3(2.109 \times 10^6)(0.0003375)(981.0)}{4 \cdot 2^2(21.33)^2(0.17329)}}$$

$$l = 8.763 \text{ cm}$$

Al colocar cada una de las masas una distancia igual a 8.763 cm a partir de su centro al extremo empotrado del absorbtor, se observa que la amplitud de vibración obtenida a 21.33 Hz es mucho menor que la que se obtiene a esta misma frecuencia sin el absorbtor, comprobando de esta forma la eficacia del mismo.

## 1.12.6.- CONCLUSION.

Al introducir un absorbtor de vibraciones a un sistema vibratorio, la energía de vibración de este sistema es transmitida al absorbtor, siempre y cuando se iguale la frecuencia angular del absorbtor con la frecuencia angular del sistema.

## PRACTICA 1.13

## VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO DESPRECIABLE

## 1.13.1.- INTRODUCCION

En una vibración forzada el sistema inicialmente tenderá a vibrar en su propia frecuencia natural, y posteriormente seguirá la frecuencia de la fuerza de excitación, aquella parte del movimiento que no se mantiene por la fuerza de excitación senoidal, desaparecerá gradualmente.

Como resultado el sistema vibrará en la frecuencia de la fuerza de excitación, sin importar las condiciones iniciales ni la frecuencia natural del sistema. A la parte de vibración que se mantiene se le llama comúnmente "vibración del estado estacionario" o "respuesta del sistema".

## 1.13.2.- TEORIA

Si tenemos una barra (figura 1.13.1) de longitud AB, de masa m, articulada en el punto A, estando soportada en C por un resorte de constante K.

Si consideramos el motor localizado en D, de masa M, el momento de inercia del sistema con respecto a A estará dado como:

$$I = M (AD)^2 + \left( \frac{m}{3} (AC)^2 \right) \quad (1.13.1)$$

Ahora, si el desplazamiento hacia abajo sobre C es x, y el desplazamiento angular de la barra es  $\theta$ , entonces la fuerza restauradora real del resorte es:

$$F = Kx \quad (1.13.2)$$

Por lo tanto el momento restaurador con respecto a A es:

$$T_A = F (AC) = Kx (AC) \quad (1.13.3)$$

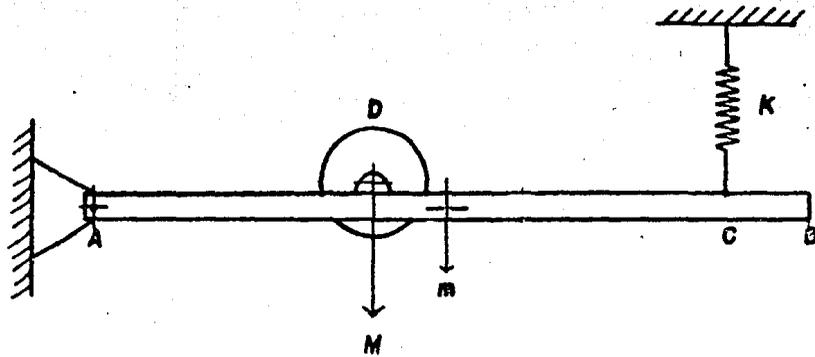


Figure: I.13.1

pero

$$x = AC \operatorname{sen} \theta$$

y para pequeños valores de  $\theta$   $x = AC (\theta)$   
( $\theta$  dado en radianes)

Por lo tanto

$$T_A = K (AC)^2 \theta \quad (1.13.4)$$

Si designamos como  $I = X$  y  $T_A = Y$

Entonces la ecuación de movimiento será

$$X \frac{d^2 \theta}{dt^2} + Y \theta = 0 \quad (1.13.5)$$

Dividiendo entre  $X$  tenemos:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{Y}{X} \theta = 0 \quad (1.13.6)$$

siendo  $\omega = \sqrt{\frac{Y}{X}}$  (rad/seg) (1.13.7)

y  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (Hz) (1.13.8)

NOTA: En el análisis anterior se han tratado las vibraciones forzadas como vibraciones libres por lo que la ecuación de movimiento (1.13.5) está igualada a *cero*, para de esta manera determinar la "frecuencia de la máxima amplitud forzada" que le llamaremos como "frecuencia natural de la vibración forzada"

### 1.13.3.- OBJETIVO

- Obtener en forma práctica la frecuencia natural de la vibración forzada de una barra de sección rectangular, y compararla con la frecuencia teórica vista en esta práctica.

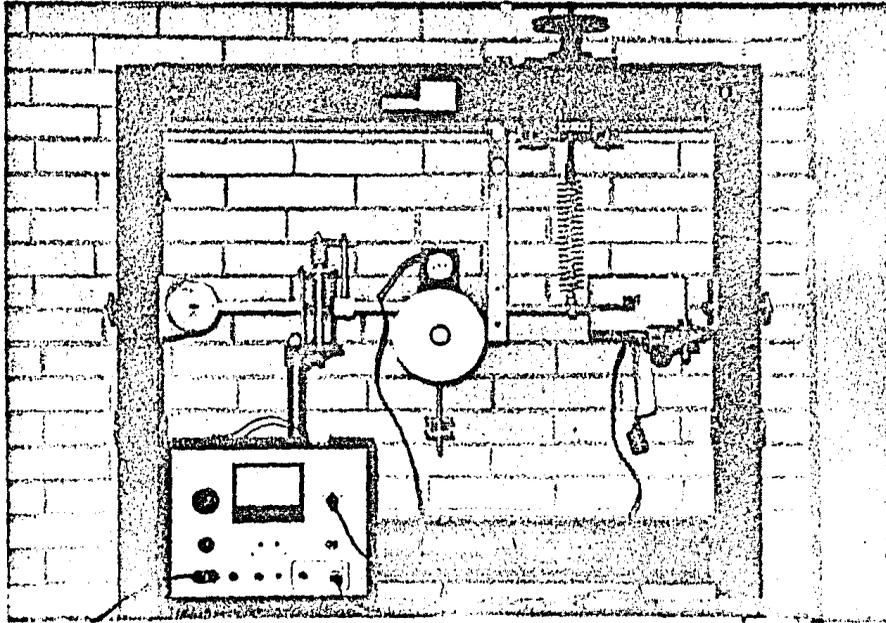


Figura 1.13.2

*Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Despreciable.*

## 1.13.4.- EQUIPO

- . barra de acero de sección rectangular D 6
- . muñón de montaje D 1
- . motor excitador E 11
- . unidad de control de velocidad del motor E 11
- . resorte helicoidal de constante K conocida
- . soporte de resortes C 1
- . ensamble de discos desbalanceados D 4
- . tambor registrador D 7
- . soporte de la barra D 5
- . amortiguador D 2
- . soporte del amortiguador E 3
- . abrazadera de sujeción de la barra D 9
- . banda dentada
- . aceite
- . flexómetro
- . cronómetro
- . rollo de papel graficador (38 mm de ancho)
- . pluma o marcador
- . peso con ganchillo .

## 1.13.5.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

El equipo se debe montar como se muestra en la figura 1.13.2 siendo arbitraria la distancia a la cual se coloque el motor -

E 11 con respecto al muñón de montaje D 1.

El ensamblaje de discos desbalanceados D 4 se sujeta a la base del motor E 11 quedando entre ambos la barra de sección rectangular D 6.

El amortiguador D 2 se sujeta al soporte E 3 y éste al marco inferior del Aparato Universal de Vibraciones. La abrazadera D 9 se une al amortiguador y a la barra, (es conveniente colocar el amortiguador cerca de la articulación de la barra).

El soporte D 5 se hace pasar a través de la barra para evitar las amplitudes excesivas.

El soporte de resortes se coloca en la parte superior izquierda del marco, de manera que al colocar el resorte al extremo derecho de la barra, el resorte quede en posición vertical.

Por último se sujeta el tambor registrador D 7 al lado derecho del marco.

Para llevar a efecto el experimento haremos lo siguiente :

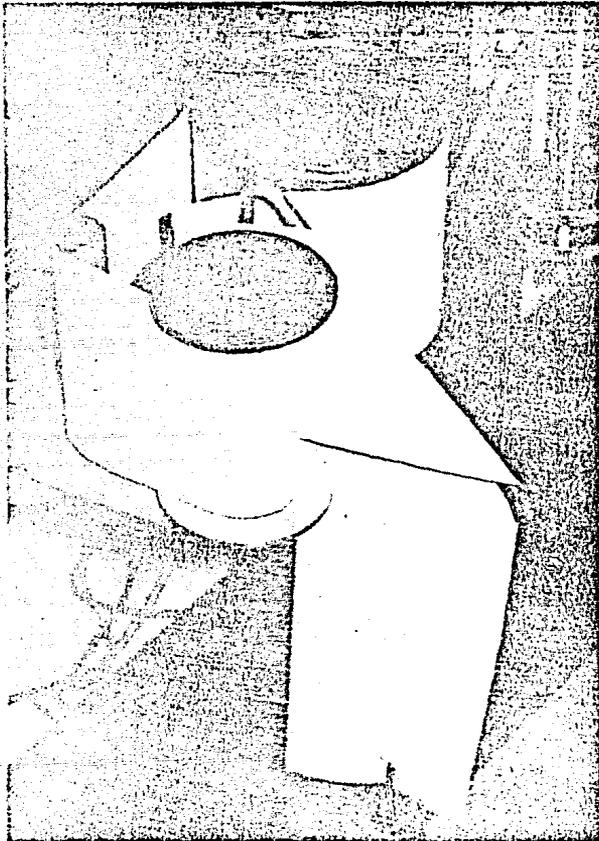
1.- Colocar la barra en forma horizontal , subiendo o bajando el extremo derecho de ésta, haciendo girar la manivela del soporte de resortes.

2.- Llenar de aceite el cilindro del amortiguador hasta  $3/4$  partes de su capacidad, de manera que se tenga un amortiguamiento ligero (platos con orificios abiertos).

3.- Colocar un rollo de papel graficador en un perno del tambor registrador, y hacerlo pasar por el tambor como se muestra en la figura 1.13.3. Además ajustar un peso con ganchillo al extremo del papel como se ve en la misma figura 1.13.3.

4.- Introducir una pluma o marcador a un orificio del extremo derecho de la barra.

NOTA: Mediante un tornillo de ajuste situado en el tambor registrador acercar o retirar éste de la punta de la pluma o marcador.



*Figura 1.13.3*

*Vibraciones Forzadas con amortiguamiento Despreciable  
(detalle).*

6.- Conectar el eje del motor al ensamblaje de discos desbalanceados por medio de una banda dentada.

7.- Conectar las terminales del motor y del tambor registrador a la unidad de control de velocidad.

8.- Encender la Unidad de Control de velocidad del motor y girar hacia la derecha la perilla de control, incrementando de esta manera la velocidad angular de la flecha del motor haciendo girar también los discos desbalanceados por medio de la transmisión por banda.

9.- Seguir incrementando poco a poco la velocidad del motor - (causando vibraciones forzadas en la barra debido al desbalanceo de los discos) hasta que las oscilaciones del extremo de la barra sean las de mayor amplitud, es decir hasta que se llegue a la frecuencia natural de la barra bajo vibraciones forzadas.

NOTA: Todas las vibraciones libres o transitorias del sistema - son rápidamente eliminadas colocando el amortiguador (con bajo coeficiente de amortiguamiento) cerca de la articulación de la barra.

10.- Al momento de localizar las oscilaciones de mayor amplitud de la barra, debemos encender el tambor registrador y accionar el cronómetro tomando, digamos 20 segundos, tiempo en el cual - sobre el papel enrollado al tambor (con velocidad de rotación constante) se registrarán las oscilaciones efectuadas por la barra. Una vez transcurridos los 20 segundos debemos detener la rotación del tambor.

11.- Disminuir completamente la velocidad del motor y apagarlo.

Una vez registrado el trazo sobre el papel graficador debemos analizarlo, obteniendo en forma práctica la frecuencia natural de vibración.

## 1.13.5.- RESULTADOS

Como ejemplo se tiene el siguiente experimento:

Datos (ver figura 1.13.1)

$$AD = 0.475 \text{ m}$$

$$DC = 0.165 \text{ m}$$

$$AC = 0.640 \text{ m}$$

$$K \text{ resorte} = 92.825 \text{ Kg/m ( de la práctica 6)}$$

$$M = 4.833 \text{ Kg (masa total del motor y el ensamblaje de discos - desbalanceados)}$$

$$m = 1.937 \text{ Kg}$$

En forma teórica la frecuencia natural de vibración de las - oscilaciones de la barra bajo vibración forzada, es :

$$I = M (AD)^2 + \left( \frac{m (AC)^2}{3} \right)$$

$$I = 4.833 (0.475)^2 + \left( \frac{1.937 (0.640)^2}{3} \right)$$

$$I = 1.3549 \text{ ( Kg - m}^2 \text{ )}$$

$$\therefore X = 1.3549$$

$$T_A = K (AC)^2 \theta$$

$$T_A = 92.825 (0.640) (10)$$

$$T_A = 380.2112$$

$$\therefore Y = 380.2112$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{Y}{X}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{380.2112}{1.3549}}$$

$$\omega = 16.7516 \left( \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)$$

$$\therefore f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16.7516}{2\pi}$$

$$f = 2.65 \text{ (Hz)}$$

Analizando el trazo obtenido para este experimento (figura - 1.13.4) la frecuencia natural es :

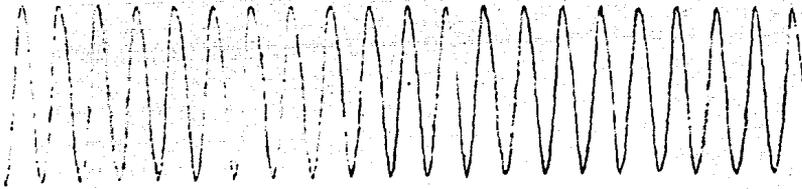


Figura 1.13.4

Segmento del trazo obtenido en el experimento, el cual muestra una típica vibración forzada.

Longitud del trazo para 20 segundos = 364 mm

Por lo tanto velocidad lineal del papel =  $\frac{364}{20} = 18.2 \frac{\text{mm}}{\text{seg}}$

Longitud del trazo para 10 ciclos = 72 mm

Por lo tanto, longitud para 1 ciclo = 7.2 mm

Entonces el periodo de oscilación es

$$T = \frac{7.2}{18.2} = 0.3956 \text{ (seg)}$$

$$\therefore f = \frac{1}{T} = 2.53 \text{ (Hz)}$$

NOTA: El anclaje de los cables se realizó en la parte superior de la barra.

#### 1.13.6.- CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en los ensayos de laboratorio de esta práctica difieren muy poco entre sí.

$$f_{\text{caric}} = 2.00 \text{ (kg)}$$

$$f_{\text{práctico}} = 1.91 \text{ (kg)}$$

Por lo que podemos concluir la veracidad de la teoría.

## PRACTICA 1.14

### VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

#### 1.14.1.- INTRODUCCION

Durante estas vibraciones, se disipa energía, y la amplitud de las vibraciones no puede mantenerse constante, sin sufrir cambios en el transcurso del tiempo. El tratamiento matemático más simple de amortiguamiento, es el amortiguamiento viscoso, en el cual la fuerza de amortiguamiento viscoso es proporcional a la velocidad del cuerpo en movimiento (ver figura 1.II.1).

Una manera conveniente de medir la cantidad de amortiguamiento presente en un sistema es medir la razón de decremento de la oscilación expresado por el término "decremento logarítmico", definido como el logaritmo natural de la razón entre dos amplitudes sucesivas (ver figura 1.14.1)

#### 1.14.2.- OBJETIVO

Analizar el efecto, de la posición del amortiguador y su severidad, sobre las vibraciones libres del sistema de la figura 1.14.2.

#### 1.14.3.- EQUIPO

Exactamente el mismo de la práctica 1.13

#### 1.14.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

El equipo se debe montar como se muestra en la figura 1.13.2 solamente que ahora haremos variaciones de la distancia del punto central donde está colocada la abrazadera de sujeción D 9 - (que une la barra y el amortiguador) hasta el punto de articulación de la barra D 6.

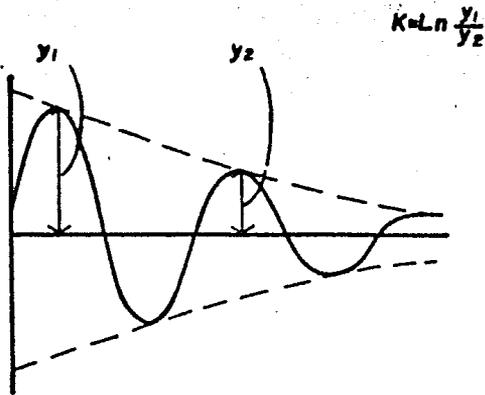


Figura: 1.14.1 Decremento Logarítmico

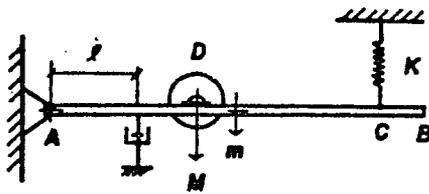


Figura: 1.14.2

En esta práctica, debido a que se estudian las vibraciones libres únicamente, no accionaremos el motor con los discos desbalanceados, aunque éstos permanecerán montados sobre la barra.

Los pasos a seguir para el experimento son :

1.- Ajustar el amortiguador a la barra a una longitud  $l$  previamente establecida a partir de la articulación de ésta.

2.- Colocar la barra en forma horizontal, subiendo o bajando el extremo derecho de ésta, haciendo girar la manivela del soporte de resortes.

NOTA: Medir la longitud del resorte sin carga y con carga (cuando esté montado todo el equipo).

3.- Llenar de aceite el cilindro del amortiguador, hasta  $3/4$  partes de su capacidad total.

4.- Girar los platos de orificios del pistón del amortiguador de manera que se tenga un amortiguamiento ligero (orificios abiertos).

5.- Colocar un rollo de papel graficador en un perno del tambor registrador, hacerlo pasar por el tambor y ajustar un peso con ganchillo en el extremo del papel, como se muestra en la figura 1.13.3.

6.- Introducir una pluma o marcador al orificio del extremo de recho de la barra.

7.- Acercar la punta de la pluma al papel registrador moviendo el tornillo de ajuste del tambor registrador.

8.- Conectar la terminal del tambor registrador a la Unidad de Control de velocidad.

9.- Desplazar el extremo derecho de la barra una pequeña amplitud (25 mm aproximadamente) y soltarla.

10.- Al momento de soltar la barra, se debe encender el tambor registrador (que rotará con velocidad constante) y además en ese mismo momento también se debe tomar el tiempo transcurrido para las oscilaciones que se irán grabando en el papel graficador.

11.- Al momento de reducirse al máximo las amplitudes de vibración, se debe apagar el tambor registrador y detener al cronómetro.

12.- Anotar el tiempo transcurrido en el trazo registrado sobre el papel.

13.- Girar los platos de orificios del pistón del amortiguador de manera que ahora se tenga un amortiguamiento pesado (orificios cerrados).

14.- Repetir los pasos 9,10,11 y 12 para obtener un segundo trazo sobre el papel graficador.

Este Desarrollo Experimental se efectuará para varias distancias ( $l$ ) a las cuales se coloque el amortiguador.

Una vez obtenidos los trazos haremos un análisis de éstos para llegar a los siguientes resultados:

#### 1.14.5.- RESULTADOS

Analizando el trazo para una distancia  $l = 0.1$  m a la cual se coloca el amortiguador con respecto a la articulación de la barra, y para un amortiguamiento ligero (Area del pistón mínima) se tiene:

$$l = 0.1 \text{ m}$$

$$Y_1 = 14.5 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 13.0 \text{ mm}$$

tiempo transcurrido desde que inicia hasta que termina la vibración  $t = 12.4$  seg.

número de oscilaciones medidas sobre el papel  $n = 32$

Por lo tanto

$$\text{período de vibración } T = \frac{t}{n} = \frac{12.4}{32} = 0.387 \text{ seg}$$

$$\text{frecuencia natural de vibración } f = \frac{1}{T} = 2.58 \text{ Hz}$$

$$\text{decremento logarítmico } K_1 = \ln \frac{Y_1}{Y_2}$$

$$K_1 = \ln \frac{14.5}{13.0} = 0.1091$$

Fuerza que actúa sobre el resorte  $F = K x$

donde  $K =$  constante elástica del resorte  $= 92.8257 \text{ Kg/m}$

$$x = X_B - X_A$$

siendo  $X_A =$  longitud del resorte sin carga  $= 13.2 \text{ cm}$

$X_B =$  longitud del resorte con carga  $= 18.2 \text{ cm}$

$$\therefore x = 18.2 - 13.2 = 5.0 \text{ cm} = 0.050 \text{ m}$$

entonces  $F = (92.8257)(0.050)$

$$F = 4.6412 \text{ Kg}$$

$$F = 45.5310 \text{ N}$$

De la ecuación diferencial para vibraciones amortiguadas libres :

$$m \ddot{x} + C \dot{x} + K x = 0 \quad (1.14.1)$$

se extrae la siguiente ecuación

$$\frac{C}{F} = \frac{2}{T} \ln \frac{Y_1}{Y_2} \quad (1.14.2)$$

Donde  $C =$  coeficiente de amortiguamiento

Entonces despejando  $C$  de (1.14.2) y sustituyendo valores se tiene:

$$C = (F) \frac{2}{T} \ln \frac{Y_1}{Y_2}$$

$$C = \frac{(45.5310)}{(9.81)} \cdot \frac{2}{0.387} \ln \frac{14.5}{13.0} = 2.6127 \frac{N}{m/seg}$$

Las tablas de resultados 1.14.1 y 1.14.2 nos muestran los valores obtenidos de  $T$ ,  $f$ ,  $K_1$ , y  $C$  para diferentes longitudes  $l$ , para amortiguamiento ligero (area del pistón mínima) y amortiguamiento pesado (area del pistón máxima) respectivamente.

A continuación de las tablas de resultados aparecen los trazos obtenidos en forma práctica con los cuales se formaron las tablas antes mencionadas.

Por último aparecen graficados el coeficiente de amortiguamiento  $C$  contra  $l^2$  para vibraciones libres amortiguadas (figura 1.14.3).

$l$	$l^2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1/Y_2$	$\frac{v}{1000}$	$T$	$f$	$C$	$K_1$
m	m <sup>2</sup>	mm	mm	-	-	seg	Hz	$\frac{K}{m^2 \cdot sec}$	-
0.10	0.0100	14.5	13.0	1.115	$\frac{13.4}{13}$	0.337	2.58	2.612	0.109
0.15	0.0225	15.0	13.0	1.153	$\frac{3}{21}$	0.340	2.62	3.440	0.143
0.20	0.0400	13.4	10.2	1.313	$\frac{5}{15}$	0.333	3.00	7.596	0.272
0.25	0.0625	9.5	6.5	1.461	$\frac{6.3}{15}$	0.310	3.22	11.340	0.379

Tabla de resultados 1.14.1

Amortiguamiento ligero ( Area del pistón mínima )

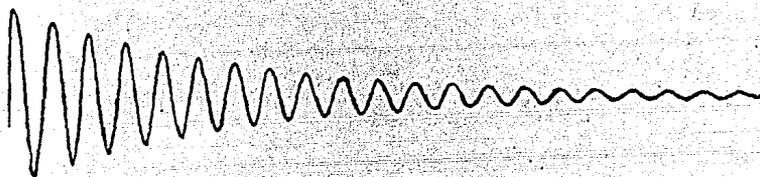
$l$	$l^2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1/Y_2$	$\frac{v}{1000}$	$T$	$f$	$C$	$K_1$
m	m <sup>2</sup>	mm	mm	-	-	seg	Hz	$\frac{K}{m^2 \cdot sec}$	-
0.10	0.0100	14.5	11.0	1.318	$\frac{5.4}{12}$	0.450	2.22	5.591	0.276
0.15	0.0225	11.7	7.2	1.625	$\frac{2.9}{7}$	0.414	2.41	10.36	0.435
0.20	0.0400	11.4	4.9	2.326	$\frac{1.5}{3}$	0.375	2.66	20.34	0.824
0.25	0.0625	9.1	3.0	3.033	$\frac{1.1}{3}$	0.366	2.72	23.01	1.109

Tabla de resultados 1.14.2

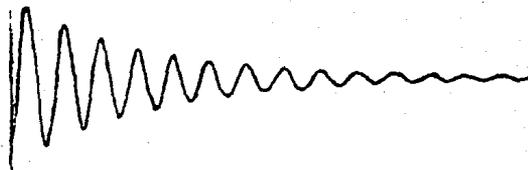
Amortiguamiento pesado ( Area del pistón máxima )

Gráficas para vibración libre amortiguada  
obtenidas en esta práctica

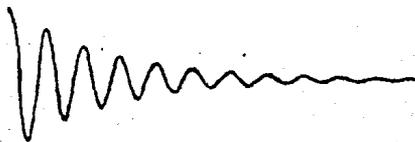
Amortiguamiento Ligero



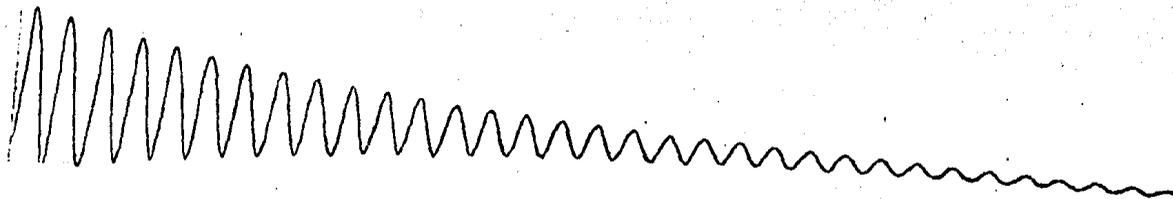
$$l = 0.15 \text{ m}$$



$$l = 0.20 \text{ m}$$

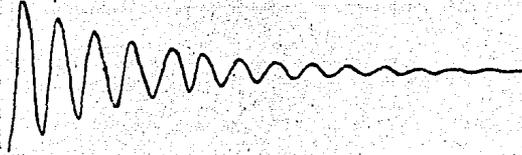


$$l = 0.25 \text{ m}$$

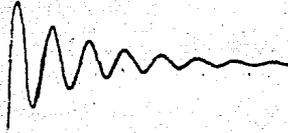


$$\lambda = 0.10\text{m}$$

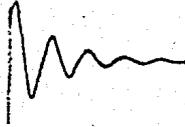
## Amortiguamiento Pesado



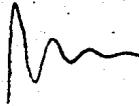
$$l = 0.10 \text{ m}$$



$$l = 0.15 \text{ m}$$



$$l = 0.20 \text{ m}$$



$$l = 0.25 \text{ m}$$

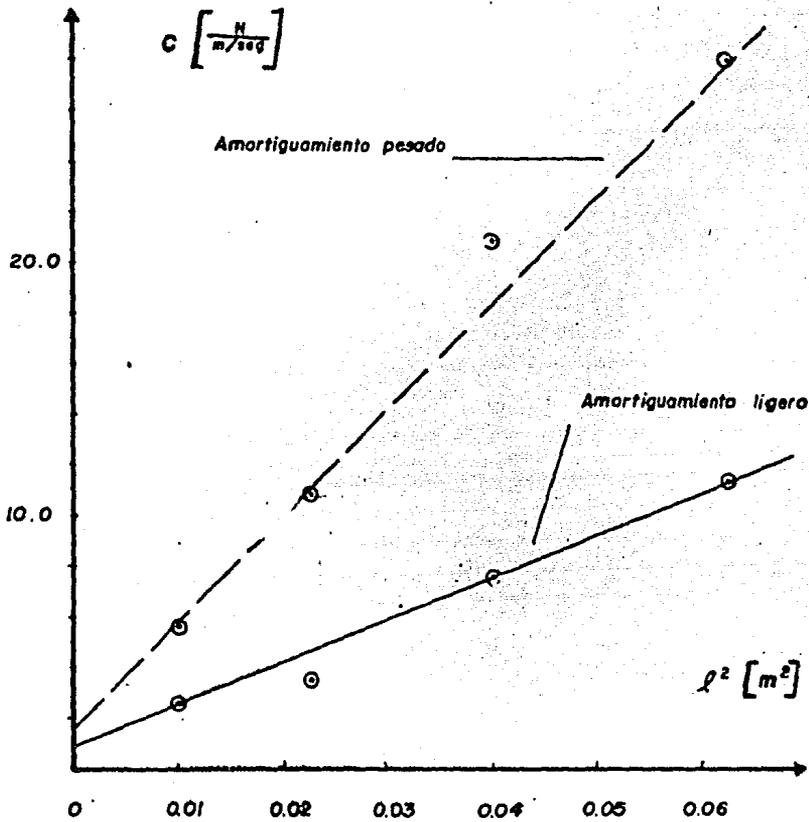


Figura: 114.3 Gráfico del coeficiente de amortiguamiento ( $C$ ), contra  $\lambda^2$ , para vibraciones libres amortiguadas.

#### 1.14.6.- CONCLUSIONES

1.- De las tablas de resultados 1.14.1 y 1.14.2 se observa, - que conforme se va acercando el amortiguador al extremo final - de la barra, las amplitudes de vibración de ésta son mas pequeñas, el periodo de vibración disminuye y la frecuencia aumenta.

Además el coeficiente de amortiguamiento aumenta conforme aumenta  $\lambda$ .

2.- De las tablas de resultados y las gráficas obtenidas vemos que para las condiciones de amortiguamiento pesado los efectos sobre la vibración son mas severos que para las condiciones de amortiguamiento ligero, siendo mayores los coeficientes de amortiguamiento para un área del pistón máxima que para un área mínima.

3.- De la figura 1.14.3 se concluye que el coeficiente de amortiguamiento varía en forma directa proporcional al cuadrado de la distancia del amortiguador.

## PRACTICA 1.15

## VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

## 1.15.1.- INTRODUCCION

Habiendo observado los efectos del amortiguamiento viscoso sobre vibraciones libres en la practica anterior, observaremos ahora los efectos de este amortiguamiento viscoso en una vibracion forzada. La manera de determinar la magnitud relativa de la vibración forzada, es utilizar el concepto de "exagerador dinámico", que es , la razón entre la amplitud de la vibracion forzada, y la deflexión estática del resorte , esta última se puede calcular prácticamente dividiendo la fuerza de desbalanceo (F) entre la constante elástica del resorte (K).

## 1.15.2.- OBJETIVO

Analizar los efectos del amortiguamiento viscoso sobre vibraciones forzadas.

## 1.15.3.- EQUIPO

Exactamente el mismo de las prácticas 1.13 y 1.14, adicionando :

- articulación D 8
- círculos de papel (152 mm de diámetro)

## 1.15.4.- TEORIA

Antes de comenzar con el experimento hagamos el siguiente análisis con respecto a las figuras 1.14.2 y 1.15.1.

Al girar el motor y transmitir movimiento a los discos desbalanceados se presenta la fuerza desbalanceadora F la cual está dada por :

$$F = 2 m r \omega^2 \quad (1.15.1)$$

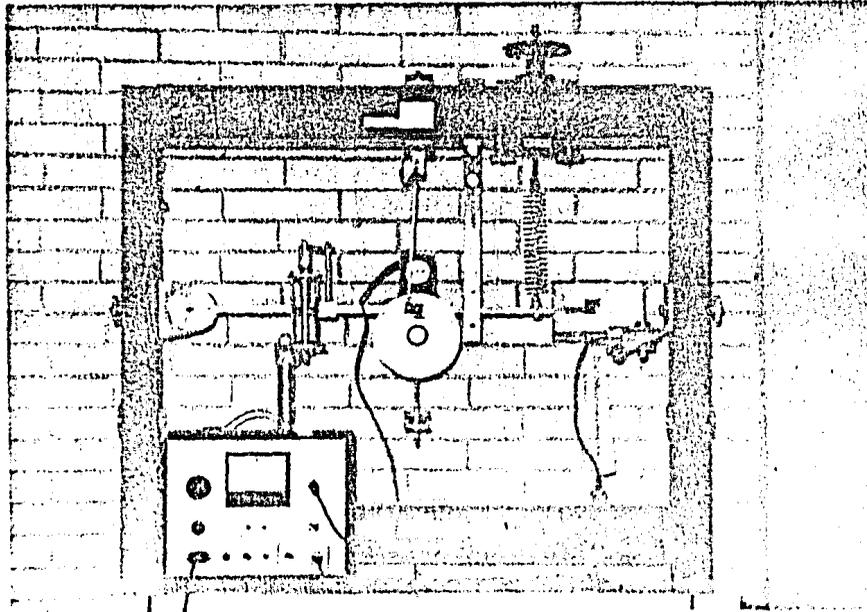


Figura 1.15.1

*Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso.*

donde

$m$  = masa correspondiente al agujero en el disco

$r$  = posición radial del agujero

$\omega$  = velocidad angular del disco en rad/seg.

NOTA: La relación de velocidad en rpm, entre la velocidad de el motor y la velocidad de los discos desbalanceados es de 72:22.

La cual debe tomarse en cuenta para la realización de esta práctica.

De la geometría y características propias de los discos desbalanceados se tiene que:

$$F = \frac{\omega^2}{830} [N] \quad (1.15.2)$$

Entonces la fuerza sobre el resorte es :

$$F' = F \left( \frac{A \cdot D}{A \cdot C} \right) [N] \quad (1.15.3)$$

La deflexión estática real para esta fuerza sobre el resorte en el extremo de la viga sería :

$$d = \frac{F'}{K} \left( \frac{A \cdot B}{A \cdot C} \right) [mm] \quad (1.15.4)$$

Por lo tanto sustituyendo (1.15.3) en (1.15.4) se tiene

$$d = \frac{\omega^2}{830 \cdot K} \left( \frac{A \cdot D}{A \cdot C} \right) \left( \frac{A \cdot B}{A \cdot C} \right) \quad (1.15.5)$$

Entonces el exagerador dinámico se define como :

$$D = \frac{\text{deflexión actual de la barra}}{\text{deflexión estática real (d)}}$$

#### 1.15.5.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

El equipo se debe colocar como se muestra en la figura 1.15.1 sujetando la articulación D 3 al marco superior del Aparato Uní

versal de Vibración, introduciendo una pluma o marcador en un sujetador que esté al final de la varilla de la articulación D 3 y colocando también un círculo de papel sobre un plato de aluminio sujeto a un disco desbalanceado.

NOTA: Las distancias a las cuales se coloquen el amortiguador y los discos desbalanceados a lo largo de la barra serán arbitrarias. Además para un arreglo determinado se debe calcular la frecuencia natural de vibración como se hizo en la práctica 1.13

Debemos realizar el experimento como sigue:

1.- Colocar la barra en forma horizontal y hacer pasar el rollo de papel graficador como se hizo en las prácticas 1.13 y 1.14.

2.- Vertir aceite en el cilindro del amortiguador y girar los discos de orificios para tener un amortiguamiento ligero.

3.- Encender la unidad de control de velocidad del motor.

4.- Marcar el orificio del disco sobre el círculo de papel.

5.- Hacer llevar la varilla de la articulación D 3 hasta que la pluma toque al círculo de papel en un punto a cualquier radio de éste.

6.- Operar el motor a una velocidad angular muy baja (15 rpm aproximadamente), únicamente para que se dibuje un círculo (trazo dato) sobre el círculo de papel.

7.- Retirar la pluma del disco de papel.

8.- Aumentar la velocidad del motor (500 rpm aproximadamente) hasta que comiencen a presentarse vibraciones en la barra de pequeña amplitud.

9.- Hacer llevar de nuevo la varilla con la pluma al disco de

panel, dibujándose entonces un "trazo dinámico" sobre éste.

NOTA: Al ocurrir vibraciones en la barra los discos desbalanceados no sólo presentan un movimiento rotatorio sino además uno de translación debido a la fuerza de desbalanceo, por lo tanto el trazo dinámico será un círculo descentrado con respecto al círculo trazado inicialmente.

10.- Encender el tambor registrador obteniendo entonces un trazo de las oscilaciones del extremo de la barra con una amplitud y frecuencia de excitación específicas.

11.- Detener el motor y cambiar el círculo de panel.

12.- Repetir los pasos del 4 al 10, aumentando cada vez la velocidad del motor hasta llegar a la frecuencia de la máxima amplitud forzada y hasta pasarla.

Una vez obtenidas las gráficas para una serie de pruebas efectuadas de vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso podremos comparar estas gráficas con las que se obtienen sin amortiguamiento viscoso, únicamente vaciando el aceite del cilindro, y repitiendo el experimento para otra serie de pruebas.

#### 1.15.6.- RESULTADOS

Las tablas 1.15.1 y 1.15.2 nos muestran los resultados obtenidos de Deflexión actual, Angulo de fase, Deflexión estática, Frecuencia de excitación, Razón de frecuencias y valores del "Exagerador Dinámico" para varias velocidades de excitación del motor.

Para conformar las tablas antes citadas el arreglo hecho fue el siguiente:

$$AD = 0.327 \text{ m}$$

$$AC = 0.640 \text{ m}$$

$$DC = 0.313 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= 0.750 \text{ m} \\
 K &= 92.825 \text{ Kg/m} \\
 M &= 4.833 \text{ Kg} \\
 m &= 1.937 \text{ Kg}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la frecuencia natural del sistema se encuentra como en la práctica 1.13.

$$\begin{aligned}
 I &= M (AD)^2 + \frac{m (AC)^2}{3} \\
 I &= 4.833 (0.327)^2 + \left[ \frac{1.937 (0.640)^2}{3} \right] \\
 I &= X = 0.7812529
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_A &= K (AC)^2 \theta \\
 T_A &= 92.825 (0.640)^2 (10) \\
 T_A &= Y = 380.2112 \\
 \therefore \omega &= \sqrt{\frac{Y}{X}}
 \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{380.2112}{0.7812529}} = 22.060565 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3.511048 \text{ [Hz]}$$

Tomando como ejemplo la primer prueba de la tabla 1.15.1 se tiene:

velocidad de excitación del motor 500 rpm

Si la relación de velocidad entre el motor y los discos desbalanceados debido a la transmisión por banda es 72:22 entonces:

$$\begin{aligned}
 72:22 \\
 500:\omega
 \end{aligned}$$

$$\omega = 152.777 \text{ rpm} \left( \frac{2\pi}{60} \right) = 16 \text{ rad/seg}$$

La deflexión actual se obtiene al medir la amplitud de la vibración que se obtuvo en el papel registrador y ésta es de 1.4-mm.

El ángulo de fase ( $\phi$ ) se obtiene como se muestra en la figura 1.15.2. Se traza un sistema de ejes en el centro del círculo del papel, el eje vertical debe de pasar por el centro del agujero del disco desbalanceado trazado previamente.

Se une con una línea recta las intersecciones del trazo dato y el trazo dinámico.

Y por último se traza una perpendicular a la línea recta anterior que pase por el origen del sistema de ejes, el ángulo de fase entonces es el indicado en la figura.

NOTA: A bajas velocidades de excitación del motor, los círculos de la figura 1.15.2 son casi concéntricos por lo tanto resulta difícil hacer el análisis gráfico del ángulo de fase.

Deflexión estática (d)

$$d = \frac{\omega^2}{630 K} \left( \frac{A D}{A C} \right) \left( \frac{A B}{A C} \right)$$

K debe darse en N/mm por lo tanto

$$K = 92.825 \text{ Kg/m} = 0.9106133 \text{ N/mm}$$

$$\therefore d = \frac{(16)^2}{630 (0.9106133)} \left( \frac{327}{640} \right) \left( \frac{750}{640} \right)$$

$$d = 0.2671 \text{ mm}$$

la frecuencia de excitación ( $f_e$ ) para la vibración forzada se obtiene como en la práctica 1.13 :

Se mide la longitud para 5 ciclos por ejemplo = 33.3 mm por lo tanto la longitud para un ciclo es  $33.3/5 = 6.66$  mm el periodo de vibración (T) esta dado como  $\frac{d}{V}$ .

donde d es la distancia graficada para un ciclo  
y V es la velocidad lineal del papel graficador

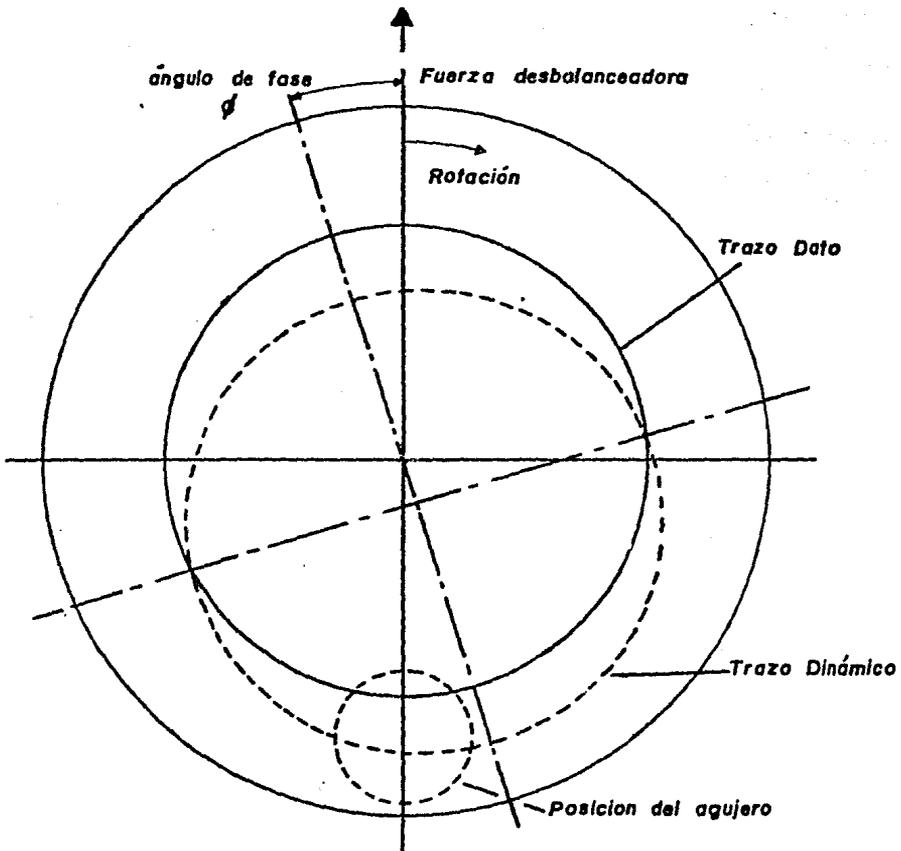


Figura 1.15.2

Análisis gráfico del ángulo de fase.

De la práctica 1.13,  $V = 18.2 \text{ mm/seg.}$

$$\therefore T = \frac{6.66}{18.2} = 0.3659 \text{ seg}$$

$$f = \frac{1}{T} = 2.7327 \text{ Hz}$$

La razón de frecuencia será

$$\frac{f_e}{f} = \frac{2.7327}{3.9110} = 0.77$$

y el valor del "exagerador dinámico" es entonces :

$$D = \frac{1.4}{0.2571} = 5.2414$$

Por último en las figuras 1.15.3 y 1.15.4 aparecen graficados valores del exagerador dinámico contra la razón de frecuencias - y el ángulo de fase contra la razón de frecuencias respectivamente.

#### 1.15.7.- CONCLUSIONES

1.- La amplitud de la vibración forzada disminuye con el amortiguamiento .

2.- El amortiguamiento tiende a suavizar las crestas de los diagramas de amortiguamiento nulo, tanto con la amplitud como en la fase.

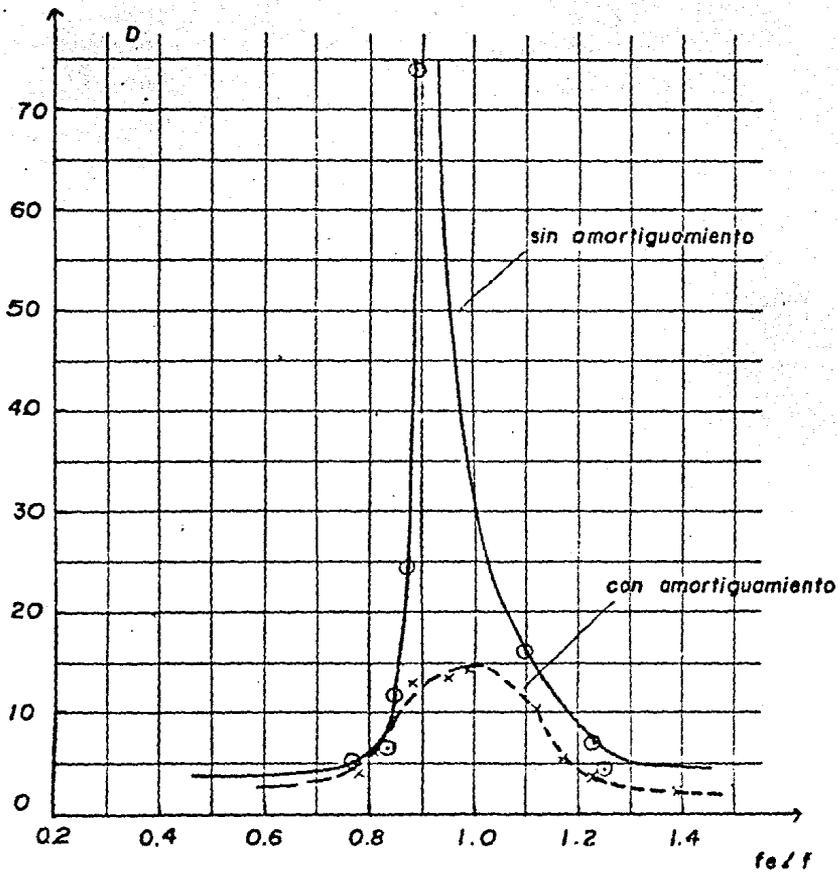


Figura 1.15.3

Gráfico de Exagerador Dinámico ( $D$ ) contra razón de frecuencia  $f_e/f$

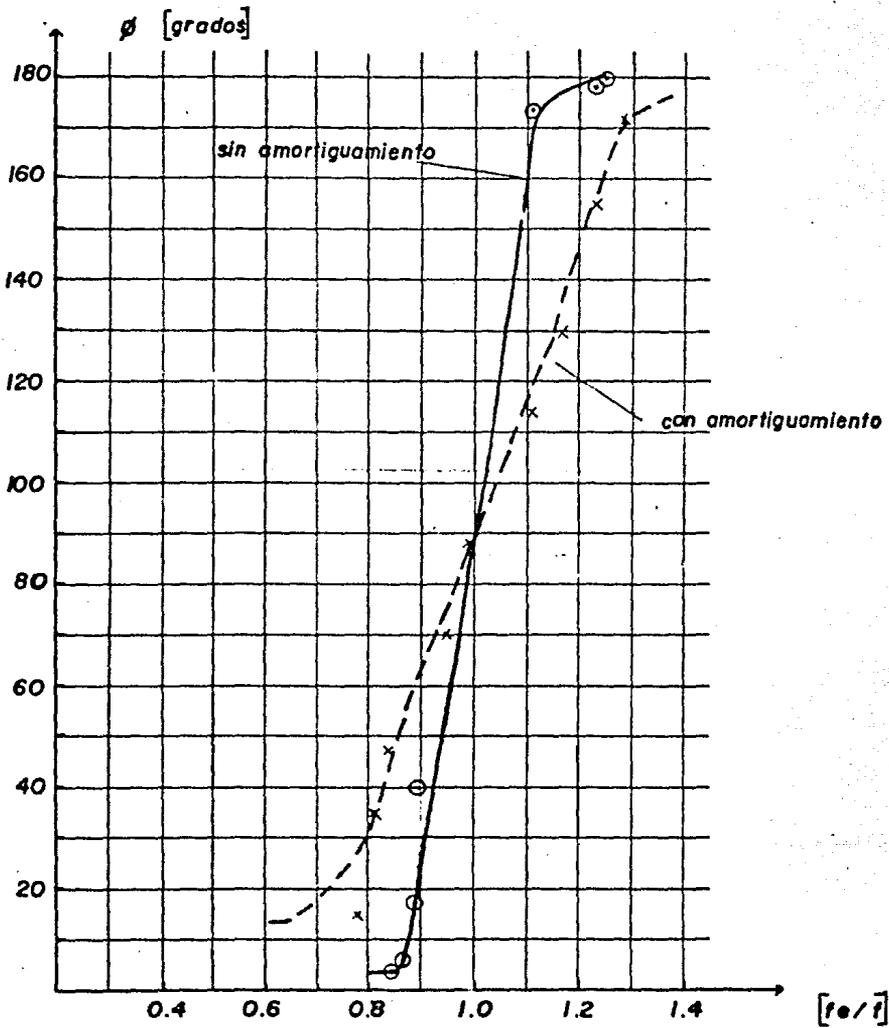


Figura 1.15.4

Gráfica de ángulo de fase ( $\phi$ ) contra razón de frecuencia ( $f_e/f$ )

Velocidad de excitación - de el motor	Velocidad de el disco $\omega$	De flexión actual	Angulo de fase $\phi$	De flexión Estática	frecuencia de Excitación $f_e$	Razón de frecuencia $f_e/f$	Exagerador Dinámico $D$
rpm	$\frac{\text{rad}}{\text{Seg}}$	mm	grados	mm	Hz	-	-
500	16.0	1.4	-	0.2671	2.77	0.77	5.2414
525	16.3	2.0	-	0.2945	2.94	0.84	6.7911
550	17.6	3.3	4	0.3232	2.93	0.85	11.7574
565	18.0	9.4	6	0.3331	3.05	0.87	27.3024
575	18.3	26.1	17	0.3495	3.12	0.89	74.6731
585	18.7	35.3	40	0.3649	3.15	0.90	93.1090
600	19.2	6.5	174	0.3847	3.39	1.11	16.3962
625	20.0	3.0	178	0.4174	4.31	1.23	7.1373
650	20.3	2.0	180	0.4515	4.38	1.25	4.4296

Tabla de resultados 1.15.1

Vibración Forzada sin Amortiguamiento

Velocidad de excitación - del motor	Velocidad de el disco $\omega$	De flexión actual	Angulo de fase $\phi$	De flexión Estática $d$	Frecuencia de excitación $f_e$	Razón de frecuencia $f_e/f$	Resonancia por Diámetro D
mm	mm/s	mm	grados	mm	Hz	-	-
500	16.0	1.2	15	0.2671	2.75	0.73	4.4286
525	16.3	1.3	35	0.2945	2.86	0.81	6.1129
550	17.6	3.2	47	0.3232	2.93	0.84	9.0009
575	18.3	4.3	61	0.3495	3.10	0.83	11.7339
590	18.5	5.0	70	0.3572	3.27	0.95	13.9577
595	19.7	5.2	83	0.3649	3.50	0.99	14.3504
600	19.2	4.0	114	0.3347	3.95	1.12	14.3977
625	20.0	2.3	130	0.4174	4.13	1.17	5.5193
650	20.3	1.3	155	0.4515	4.33	1.23	3.6857
675	21.5	1.2	172	0.4824	4.55	1.29	2.4375

Tabla de resultados 1.15.2.

Vibración Forzada con Amortiguamiento

## C A P I T U L O 2

## MECANISMOS DE ES LABONES ARTICULADOS

Un mecanismo es una parte de una máquina formado por elementos ligados para producir un movimiento definido.

En este capítulo se analizarán en forma práctica los movimientos de entrada y salida de los siguientes tres mecanismos de eslabones articulados :

2.1.- Mecanismo Corredera - biela - manivela.

2.2.- Mecanismo de Yugo Escocés.

2.3.- Mecanismo de retorno rápido "Whitworth".

Siendo los dos primeros, mecanismos de cuatro eslabones, barras o elementos y el tercero de seis.

## PRÁCTICA 2.1

### MECANISMO CORREDERA - BIELA - MANIVELA

#### 2.1.1.- INTRODUCCION

Este mecanismo de cuatro barras encuentra su mayor aplicación en el motor de combustión interna.

La figura 2.1.1 muestra el mecanismo Corredera-Biela-Manivela en el cual, el eslabón 1 es el marco (que se considera fijo) el eslabón 2 es la manivela, el eslabón 3 es la biela y el eslabón 4 es la corredera. En el motor de combustión interna, el eslabón 4 es el pistón sobre el que se ejerce la presión del gas. Esta fuerza se transmite por medio de la biela a la manivela.

Se puede ver que hay dos puntos muertos durante el ciclo, uno a cada posición extrema del recorrido de la corredera.

Con el propósito de vencerlos, es necesario fijar un volante a la manivela de manera que se puedan pasar los puntos muertos.

El uso opuesto de éste mecanismo se presenta en las bombas recíprocas o en los compresores; en estos la manivela accionada por un motor eléctrico gira para producir un movimiento lineal del pistón.

Si la manivela gira con una velocidad angular constante el movimiento de deslizamiento de la corredera es aproximadamente senoidal.

La desviación de un verdadero movimiento senoidal es causada por el balanceo de las conexiones de las barras.

La continua aceleración y desaceleración del pistón por cada vuelta de la manivela produce fuerzas de inercia los cuales causan vibración, tensión y desgaste. Esto debe de ser considerado cuando se diseña un mecanismo pistón-biela-manivela.

Al considerar este mecanismo, con frecuencia es necesario calcular el desplazamiento de la corredera y su velocidad y aceleración correspondientes.

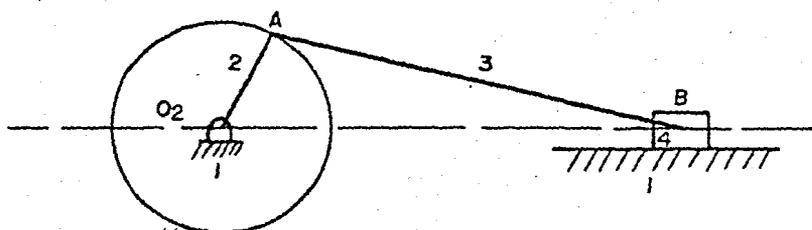


Figura 2.1.1

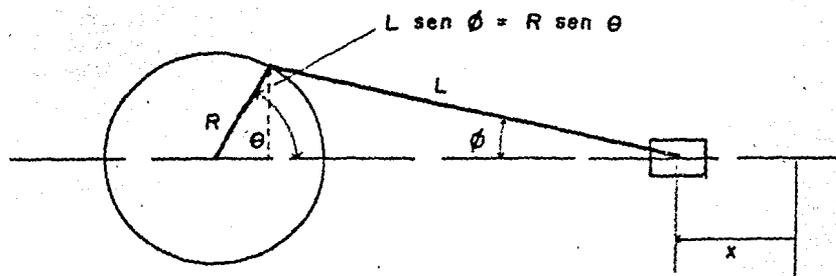


Figura 2.1.2

Empleando la figura 2.1.2 se obtienen las ecuaciones para el desplazamiento, velocidad y aceleración por lo que :

$$\begin{aligned}
 x &= R + L - R \cos \theta - L \cos \phi \\
 x &= R (1 - \cos \theta) + L (1 - \cos \phi) \\
 x &= R (1 - \cos \theta) + L \left[ 1 - \sqrt{1 - (R/L)^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (2.1.1)
 \end{aligned}$$

Para poder simplificar la expresión anterior, se puede aproximar el radical reemplazándolo con la serie

$$(1 \pm B^2)^{1/2} = 1 \pm 1/2 B^2 - \frac{B^4}{2 \cdot 4} \pm \frac{1 \cdot 3 B^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 B^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \pm \dots$$

en que  $B = (R/L) \sin \theta$

Por lo general, es bastante exacto emplear solamente los dos primeros términos de la serie.

En consecuencia,

$$\sqrt{1 - (R/L)^2 \sin^2 \theta} = 1 - 1/2 (R/L)^2 \sin^2 \theta \quad (\text{aproximadamente})$$

y

$$x = R (1 - \cos \theta) + R^2/2 L \sin^2 \theta \quad (2.1.2)$$

en que  $\theta = \omega t$  debido a que  $\omega$  es constante.

Y los términos de velocidad y aceleración serán :

$$v = \frac{d x}{d t} = R \omega \left[ \sin \theta + \frac{R}{2L} \sin 2\theta \right] \quad (2.1.3)$$

$$a = \frac{d^2 x}{d t^2} = R \omega^2 \left[ \cos \theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta \right] \quad (2.1.4)$$

### 2.1.2.- OBJETIVO

En un mecanismo Corredera - biela - manivela, determinar la-

velocidad y aceleración para diferentes desplazamientos de la corredera.

### 2.1.3.- EQUIPO

Mecanismo Corredera-Bicla-Manivela T M 115 (fig.2.1.3).

### 2.1.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

1.- Colocar el volante graduado de la manivela en la posición  $\theta = 0^\circ$  de manera que la marca sobre la corredera coincida con el cero de la escala de desplazamientos.

2.- Girar la manivela cada  $15^\circ$  y registrar el desplazamiento de la corredera, hasta acompletar una revolución completa de la manivela ( $360^\circ$ ). Formando así la tabla 2.1.1.

3.- Trazar una gráfica de desplazamiento de la corredera ( $x$ ) contra desplazamiento angular ( $\theta$ ) de la manivela (fig. 2.1.4).

4.- Al derivar gráficamente la curva anterior se obtiene la curva de velocidad de la corredera ( $V$ ) contra posición de la manivela ( $\theta$ ) para una velocidad angular unitaria. (fig.2.1.5).

5.- Volver a derivar gráficamente la curva anterior para así obtener una gráfica de aceleración de la corredera ( $a$ ) contra posición de la manivela ( $\theta$ ), para una aceleración angular unitaria. (figura 2.1.6).

NOTA: Las tablas 2.1.2 y 2.1.3 nos muestran los valores obtenidos en las gráficas de las figuras 2.1.5 y 2.1.6 respectivamente.

6.- Con ayuda de las ecuaciones (2.1.2), (2.1.3) y (2.1.4) obtener el desplazamiento, velocidad y aceleración de la corredera respectivamente, para diferentes posiciones de la manivela.

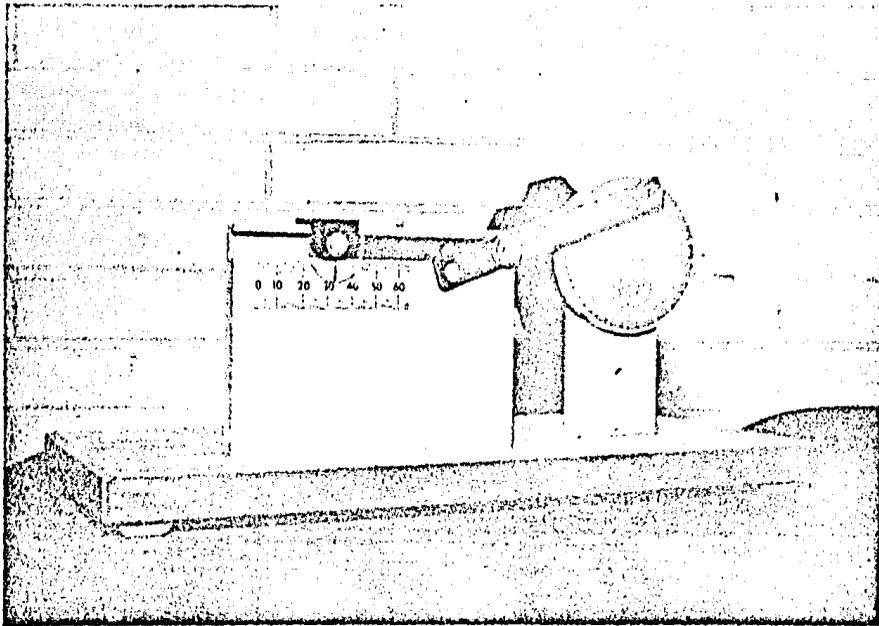


Figura 2.1.3

Mecanismo Corredera - Biela - Manivela.

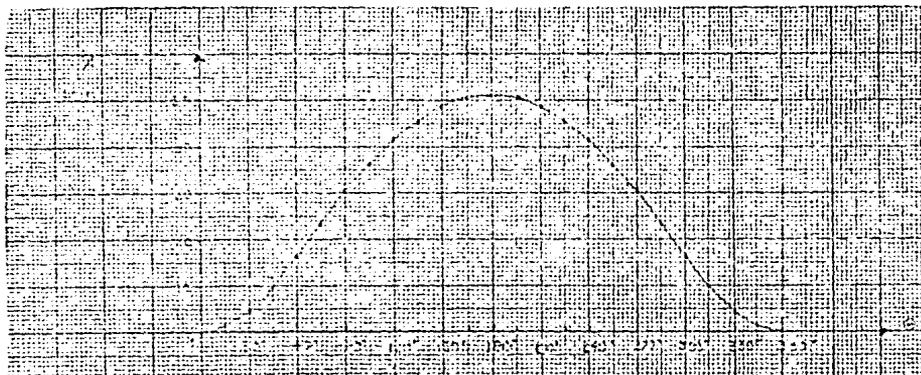


Figura 2.1.4

Desplazamiento de la corredera ( $x$ ) contra ángulo de giro de la manivela ( $\theta$ ).

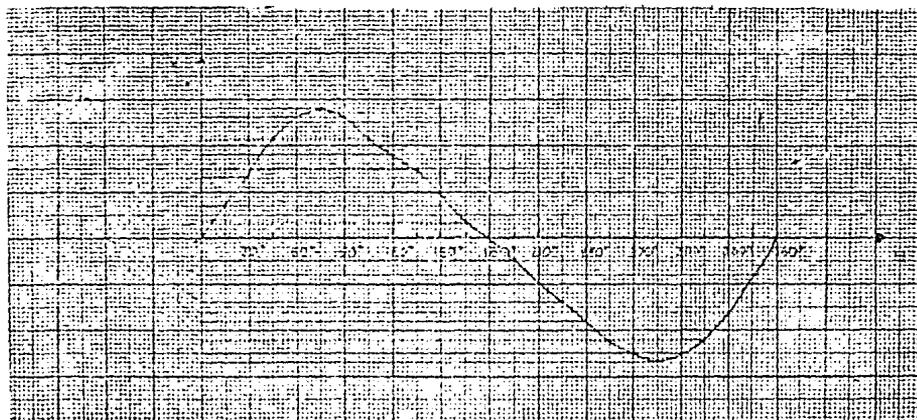


Figura 2.1.5

Velocidad de la corredera ( $V$ ) contra ángulo de giro de la manivela ( $\theta$ )

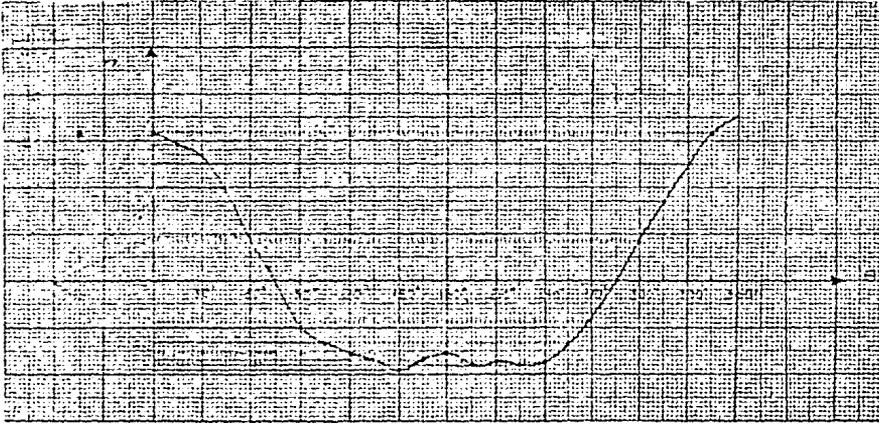


Figura 2.1.6

*Aceleración de la correa (a) contra ángulo de giro de la manivela (θ)*

NOTA: Para nuestro mecanismo corredera - biela - manivela T.M. - 115.

$$R = 0.025 \text{ m} \quad \text{y} \quad L = 0.075 \text{ m}$$

Las tablas 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 nos muestran los resultados obtenidos teóricamente.

$\theta$	x
grados	mm
0	0.0
15	1.3
30	4.3
45	10.0
60	16.5
75	23.4
90	30.4
105	36.4
120	41.3
135	45.3
150	48.8
165	50.4
180	50.3
195	50.4
210	48.3
225	45.3
240	41.8
255	36.4
270	30.4
285	23.4
300	16.5
315	10.0
330	4.3
345	1.3
360	0.0

Tabla de resultados 2.1.1.

$\theta$	$\gamma$
grados	m / seg
0	0.0000
15	0.0070
30	0.0132
45	0.0214
60	0.0262
75	0.0280
90	0.0262
105	0.0214
120	0.0130
135	0.0146
150	0.0190
165	0.0034
180	0.0000
195	- 0.0048
210	- 0.0010
225	- 0.0140
240	- 0.0180
255	- 0.0224
270	- 0.0250
285	- 0.0270
300	- 0.0250
315	- 0.0224
330	- 0.0162
345	- 0.0070
360	0.0000

Tabla de resultados 2.1.2

$\theta$	$a$
grados	m /seg <sup>2</sup>
0	0.0313
15	0.0290
30	0.0270
45	0.0200
60	0.0094
75	0.0000
90	- 0.0100
105	- 0.0132
120	- 0.0155
135	- 0.0170
150	- 0.0190
165	- 0.0170
180	- 0.0155
195	- 0.0130
210	- 0.0170
225	- 0.0130
240	- 0.0175
255	- 0.0135
270	- 0.0035
285	0.0000
300	0.0035
315	0.0170
330	0.0250
345	0.0315
360	0.0350

Tabla de resultados 2.1.3 .

$\theta$	$x$
grados	mm
0	0.00
15	1.13
30	4.39
45	9.40
60	15.62
75	21.95
90	29.16
105	35.35
120	40.62
135	44.76
150	47.69
165	44.76
180	50.00
195	49.42
210	47.69
225	44.76
240	40.62
255	35.35
270	29.16
285	21.95
300	15.62
315	9.40
330	4.39
345	1.13
360	0.00

Tabla de resultados 2.1.4 .

$\theta$	$v$
grados	m /seg.
0	0.00000
15	0.00355
30	0.01610
45	0.02134
60	0.02525
75	0.02623
90	0.02500
105	0.02206
120	0.01304
135	0.01351
150	0.00889
165	0.00433
180	0.00000
195	- 0.00433
210	- 0.00839
225	- 0.01351
240	- 0.01304
255	- 0.02206
270	- 0.02500
285	- 0.02623
300	- 0.02525
315	- 0.02134
330	- 0.01610
345	- 0.00855
360	0.00000

Tabla de resultados 2.1.5.

$\theta$	$a$
grados	m / seg <sup>2</sup>
0	0.03333
15	0.03136
30	0.02581
45	0.01767
60	0.00333
75	- 0.00074
90	- 0.00333
105	- 0.01363
120	- 0.01666
135	- 0.01767
150	- 0.01743
165	- 0.01693
180	- 0.01743
195	- 0.01767
210	- 0.01743
225	- 0.01767
240	- 0.01666
255	- 0.01363
270	- 0.00333
285	- 0.00074
300	- 0.00333
315	- 0.01767
330	- 0.02581
345	0.03136
360	0.03333

Tabla de resultados 2.1.6 .

### 2.1.5.- CONCLUSIONES.

1.- La curva desplazamiento de la corredera contra posición de la manivela es aproximadamente un movimiento senoidal.

2.- Para los puntos muertos del mecanismo ( $0^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $360^\circ$ ) se tiene una velocidad nula.

3.- Se observa en las gráficas de las figuras 2.1.4 y 2.1.5, - que en los puntos de velocidad nula se tienen aceleraciones - máximas, y en los puntos de velocidades máximas se presentan - aceleraciones nulas.

4.- Los valores obtenidos experimentalmente (mediante las lecturas del aparato y las diferenciaciones gráficas) difieren muy poco de los valores teóricos obtenidos en base a las ecuaciones 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4, de esta manera podemos constatar la veracidad de la teoría.

5.- La distorsión del movimiento de la corredera con respecto al movimiento armónico simple se llama "efecto de la biela".

Con referencia a la tabla 2.1.2 y a la figura 2.1.4 se puede observar que este efecto, tiende a aumentar la velocidad de la corredera durante los periodos anteriores y posteriores al paso de la manivela por el punto muerto y tiene un efecto opuesto en las otras partes de la carrera. La velocidad máxima de la corredera se obtiene un poco antes de la mitad de la carrera de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  de desplazamiento de la manivela, y un poco después de la mitad de la carrera de  $180^\circ$  a  $360^\circ$  del desplazamiento de la misma manivela.

Aumentando la longitud de la biela en proporción a la longitud de la manivela se reduce el desplazamiento angular de la anterior, y el movimiento de la corredera tiende a aproximarse al armónico simple. Si la biela tuviera una longitud infinita, se obtendría exactamente esta condición.

## COMENTARIOS

## INVERSIONES DE CADENA

En un mecanismo corredera-biela-manivela como el que se muestra en la figura 2.1.1, es posible fijar algún eslabón distinto al 1 y de esta manera obtener tres inversiones, los que se muestran en la figura 2.1.7. En la figura 2.1.7a se mantiene fija la manivela y se permite el movimiento del resto, lo que da un mecanismo que se usó en los primeros motores de aviación, conocidos como motores rotatorios debido a que el cigueñal estaba fijo y los cilindros rotaban alrededor del cigueñal.

Una aplicación más moderna de esta inversión es en el mecanismo Whitworth. La figura 2.1.7b muestra una inversión en la que se mantiene fija la biela. Esta inversión se emplea en máquinas de vapor y también es la base para el mecanismo accionador de un cepillo.

La tercera inversión en la que se mantiene fija la corredera, - la figura 2.1.7.c a veces se usa en las bombas manuales de agua.

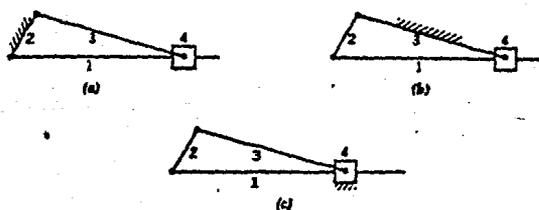


Figura 2.1.7

## APENDICE

### DIFERENCIACION GRAFICA

La diferenciación gráfica consiste en el trazado de las líneas tangentes con respecto a la curva de partida y transfiriendo luego la pendiente a una segunda curva al mismo valor de tiempo sin calcular el valor numérico de la pendiente. El procedimiento consiste en marcar un punto hacia la izquierda del origen de la segunda curva. Si el punto se coloca a una unidad hacia la izquierda del origen, entonces una unidad arriba en el eje de las  $x$  tendrá un valor unitario tal como se ilustra en la figura 2.1.3.

La curva de desplazamiento se diferencia en la curva de velocidad mediante varias etapas. Se trazan líneas tangentes a la curva de desplazamiento considerando intervalos, con un número mayor de tangentes en donde se tenga un cambio repentino de la curvatura para lograr mayor precisión. Luego se coloca una regla de trazado paralela a la tangente y se desliza hacia abajo hasta el punto de partida en la curva de velocidad. La mejor forma de lograr esto es deslizando la misma a lo largo del borde de una regla  $T$ . Se marca una línea tenue en el eje de velocidad. Posteriormente se traza una línea horizontal a través del tiempo correspondiente y el punto marcado. Esto se repite hasta que toda la curva de velocidad pueda trazarse mediante el ajuste de curva entre los puntos marcados. La curva de aceleración se obtiene de la curva de velocidad en la misma forma.

La figura 2.1.9 muestra un conjunto completo de curvas para un trazado de desplazamiento típico.

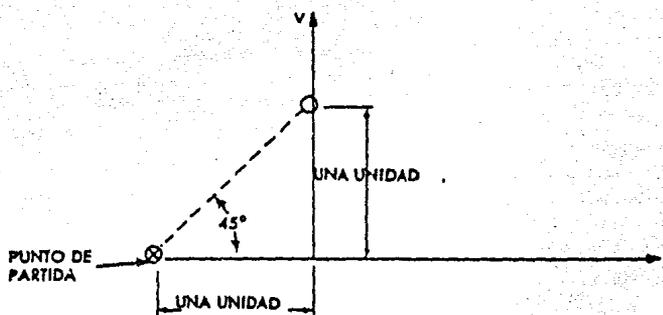


Figura 2.1.8

Derivación Gráfica.

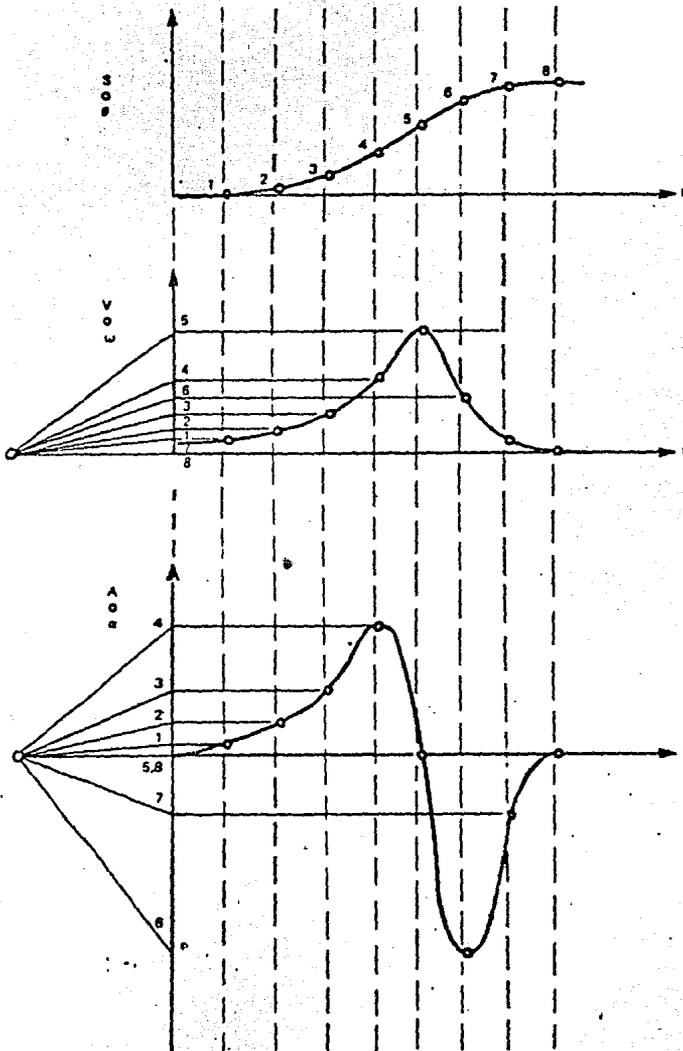


Figura 2.1.9

Derivación gráfica.

## PRACTICA 2.2

## YUGO ESCOCÉS

## 2.2.1.- INTRODUCCION.

Diferentes mecanismos pueden ser usados para obtener un movimiento recíprocante a partir de una entrada debida a rotación o vice-versa. En estos mecanismos se incluyen el Mecanismo de Retorno Rápido 'Whitworth' y el Mecanismo Pistón-Biela-Manivela.

Pero ninguno de estos mecanismos puede producir un verdadero movimiento senoidal recíprocante a la salida.

Esto sin embargo puede llevarse a cabo con el mecanismo de Yugo Escocés.

Este mecanismo es tal que proporciona un movimiento armónico simple. Su primera aplicación fue en bombas de vapor.

Actualmente se usa como generador de senos-cosenos para elementos de computación. La figura 2.2.1 es una ilustración de este mecanismo; la figura 2.2.2 muestra la forma como se genera el movimiento armónico simple. El radio  $r$  gira a una velocidad angular constante  $\omega r$ , y la proyección del punto P sobre el eje de las X (ó de las Y) se mueve con movimiento armónico simple. El desplazamiento desde donde el círculo corta el eje de las X y crece a la izquierda es

$$X = r - r \cos \theta_r \quad \text{en que } \theta_r = \omega r t$$

En consecuencia

$$X = r (1 - \cos \omega r t) \quad (2.2.1)$$

y

$$V = \frac{dX}{dt} = r \omega r \sin \omega r t = r \omega r \sin \theta_r \quad (2.2.2)$$

$$a = \frac{d^2X}{dt^2} = r \omega r^2 \cos \omega r t = r \omega r^2 \cos \theta_r \quad (2.2.3)$$

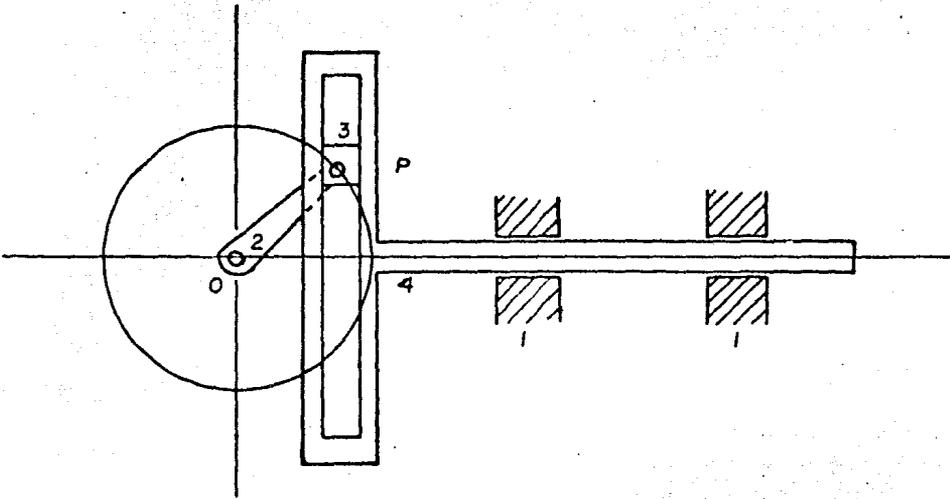


Figura 2.2.1

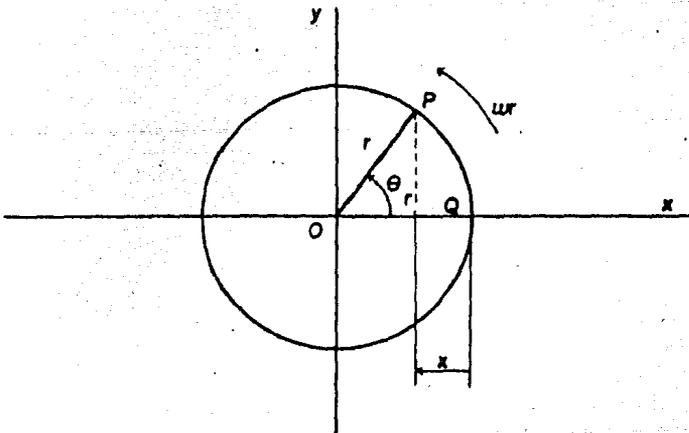


Figura 2.2.2

La figura 2.2.3 muestra la construcción geométrica para la localización de un punto A sobre el perímetro de un círculo girando a lo largo de una superficie recta. Este es un verdadero movimiento senoidal. La figura 2.2.4 demuestra que el movimiento vertical de el punto P en el mecanismo de Yugo Escocés - también sigue un movimiento senoidal.

### 2.2.2.- OBJETIVO.

Comprobar el movimiento senoidal a la salida del mecanismo de Yugo Escocés.

### 2.2.3.- EQUIPO.

Mecanismo de Yugo Escocés TM 112 (figura 2.2.5)

### 2.2.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

1.- Colocar el volante graduado de la manivela en la posición  $\theta = 0^\circ$  de manera que la marca sobre la corredera coincida con el cero de la escala de desplazamientos.

2.- Girar la manivela (barra de entrada) cada  $30^\circ$  y registrar el desplazamiento de la corredera (barra de salida), hasta completar una revolución completa de la manivela.

3.- Dibujar una gráfica de desplazamiento de la corredera (x) - contra posición de la manivela. ( $\theta$ ).

La tabla 1.2.1 nos muestra los valores obtenidos de desplazamiento de la corredera (x) contra posición de la manivela ( $\theta$ ).

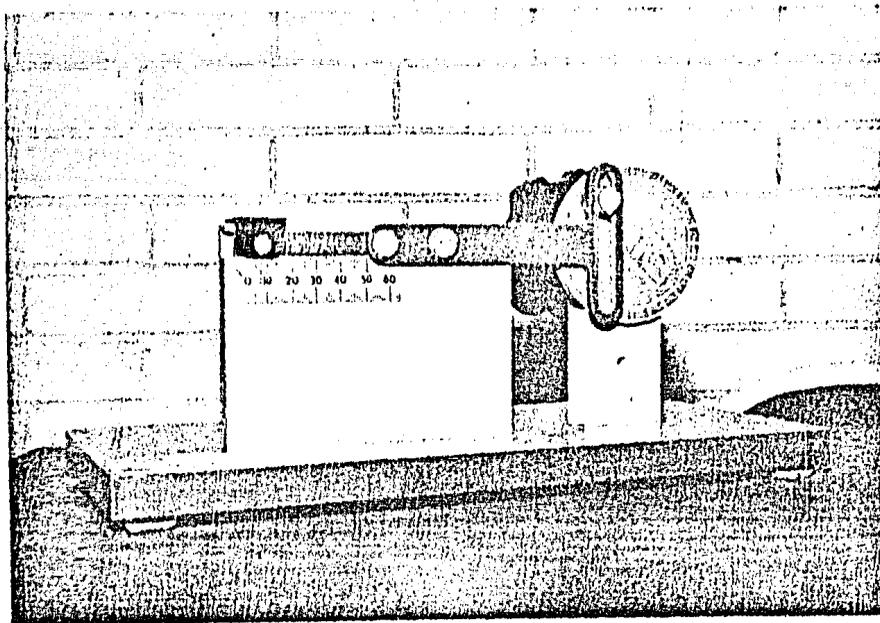


Figura 2.2.5

Mecanismo de Yugo Escocés.

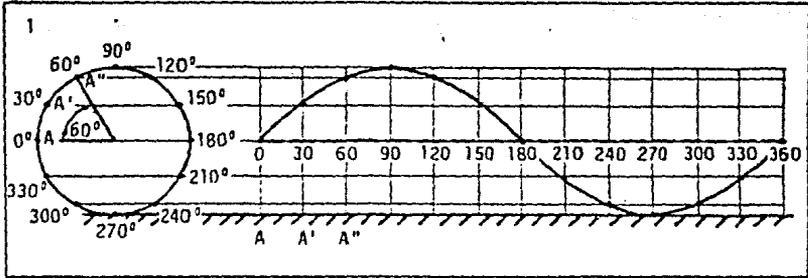


Figura 2.2.3

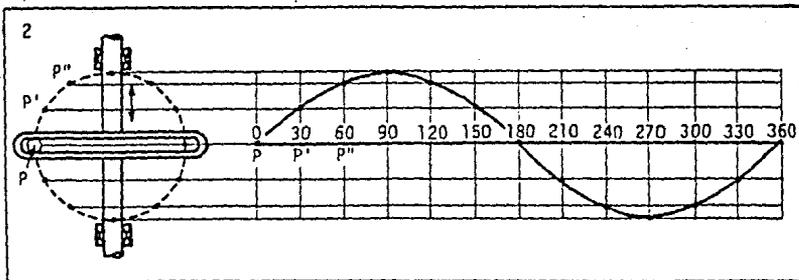


Figura 2.2.4

$\theta$	$x$
grados	mm
0	0.0
30	3.0
60	12.0
90	25.0
120	37.0
150	46.0
180	50.0
210	46.0
240	36.4
270	24.0
300	11.5
330	2.5
360	0.0

Tabla de resultados 2.2.1 .

En la figura 2.2.6 encontramos graficados los parámetros de la tabla 2.2.1 y sobre esta misma gráfica dibujamos un movimiento senoidal, trazando primero una semicircunferencia a la izquierda de la ordenada (x) que tenga como diámetro el máximo desplazamiento obtenido; dividimos la semicircunferencia en la mitad de divisiones de la abscisa ( $\theta$ ) es decir en 6 divisiones. Y proyectamos los puntos del a al g horizontalmente hasta cortarlos con las divisiones de la abscisa  $0^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $180^\circ$  respectivamente, siendo la segunda parte del movimiento simétrica a la primera.

De esta manera podemos comparar las curvas trazadas.

NOTA: La curva con línea continua corresponde a los valores obtenidos experimentalmente, y la curva segmentada corresponde al movimiento senoidal, obtenido gráficamente.

### 2.2.3.- CONCLUSIONES.

Podemos observar de la gráfica de la figura 2.2.6 que el movimiento seguido por el mecanismo de Yugo Escocés TM 112 es su momento aproximado a un movimiento senoidal.

Podemos atribuir la pequeña diferencia entre las curvas, al grado de desalineamiento que posee el mecanismo de Yugo Escocés.

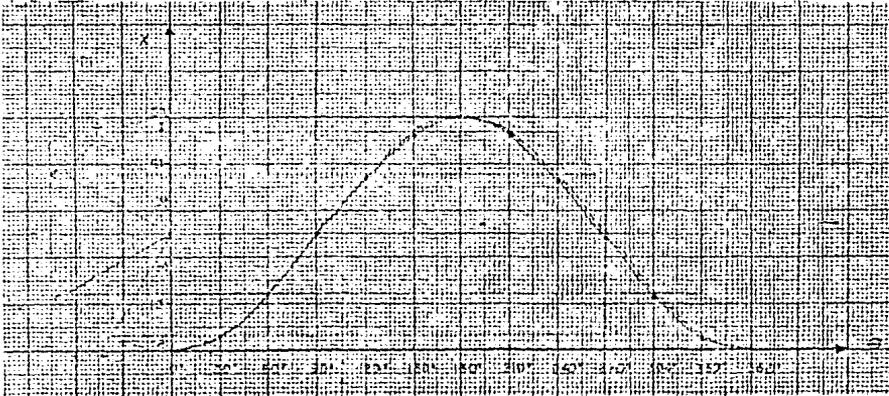


Figura 2.2.6

Gráfica del desplazamiento de la corredera ( $x$ ) contra ángulo de giro de la manivela ( $\theta$ ), comparado con un movimiento armónico simple o senoidal.

## PRACTICA 2.3

## MECANISMO DE RETORNO RAPIDO "WHITWORTH"

## 2.3.1.- INTRODUCCION

Los mecanismos de retorno rápido se emplean en máquinas herramientas que tienen una carrera lenta de corte y una carrera rápida de retorno para una velocidad constante de la manivela motriz. Son una combinación de eslabones simples tales como el mecanismo de cuatro barras y el mecanismo pistón-biela-manivela.

También se emplea una inversión de la biela-manivela combinada con la biela-manivela convencional.

Al diseñar mecanismos de retorno rápido, se tiene en cuenta especialmente la relación del ángulo de la manivela para la carrera de corte (de ida) al de la carrera de retorno; esta relación se conoce como relación de tiempo. Para producir un retorno rápido de la herramienta de corte, esta relación debe ser mayor que la unidad y tan grande como sea posible. A manera de ejemplo, el ángulo de la manivela para la carrera de corte del mecanismo mostrado en la figura 2.3.3 está marcado con  $\alpha$  y para la carrera de retorno está marcado con  $\beta$ .

Suponiendo que la manivela opera a velocidad constante, entonces la relación de tiempo es  $\alpha/\beta$  que es mucho mayor que la unidad.

Existen varios tipos de mecanismos de retorno rápido que se describen a continuación:

De eslabón de arrastre.- Este mecanismo se obtiene a partir del mecanismo de cuatro barras articuladas y aparece en la figura 2.3.1. Para una velocidad angular constante del eslabón 2 el 4 gira a velocidad no uniforme. El martinete 6 se mueve con velocidad constante en casi toda la carrera ascendente para dar una carrera ascendente lenta y una carrera descendente rápida cuando el eslabón motriz 2 gira en el sentido de las manecillas del reloj.

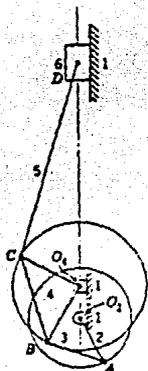


Figura 2.3.1

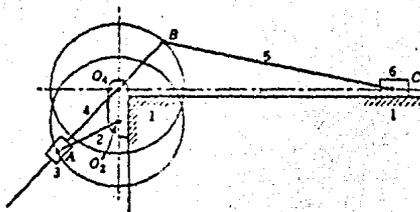


Figura 2.3.2

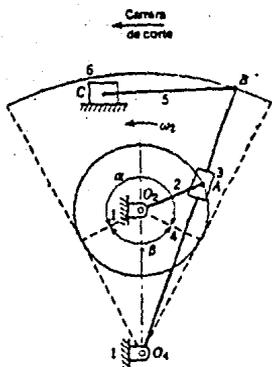


Figura 2.3.3

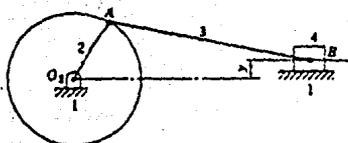


Figura 2.3.4

Whitworth.- Esta es una variante de la primera inversión de la biela-manivela en que se mantiene fija la manivela.

La figura 2.3.2 muestra el mecanismo en que tanto el eslabón 2 como el 4 giran revoluciones completas.

Mecanismo de Gavillo.- Este mecanismo es una variante de la segunda inversión de la biela-manivela en que se mantiene fija la biela. La figura 2.3.3 muestra el arreglo en el que el eslabón 2 gira completamente y el eslabón 4 oscila. Si la distancia  $O_2 O_4$  se reduce hasta ser menor que la manivela entonces el mecanismo se convierte en un Whitworth. Mecanismo biela-manivela descentrado. Como lo muestra la figura 2.3.4, este mecanismo puede estar descentrado, lo que permite un movimiento rápido de retorno. Sin embargo la cantidad de retorno rápido es muy pequeña, por lo que el mecanismo solamente se debe usar en los casos en que el espacio está limitado; el mecanismo debe ser sencillo.

### 2.3.2.- OBJETIVO

Analizar los movimientos de las barras de entrada y de salida en un mecanismo de retorno rápido Whitworth.

### 2.3.3.- EQUIPO

Mecanismo de Retorno Rápido Whitworth TM 110 (figura 2.3.5)

### 2.3.4.- OPERACION

Este mecanismo presenta un movimiento de retorno rápido a partir de una velocidad de rotación constante de entrada.

El deslizamiento de la corredera en una dirección ocupa mayor tiempo que el deslizamiento de retorno. Así un deslizamiento es más rápido que el otro. Las variaciones en velocidad son acompañadas de variaciones correspondientes en la fuerza generada, por lo que existe un lento deslizamiento potente en una

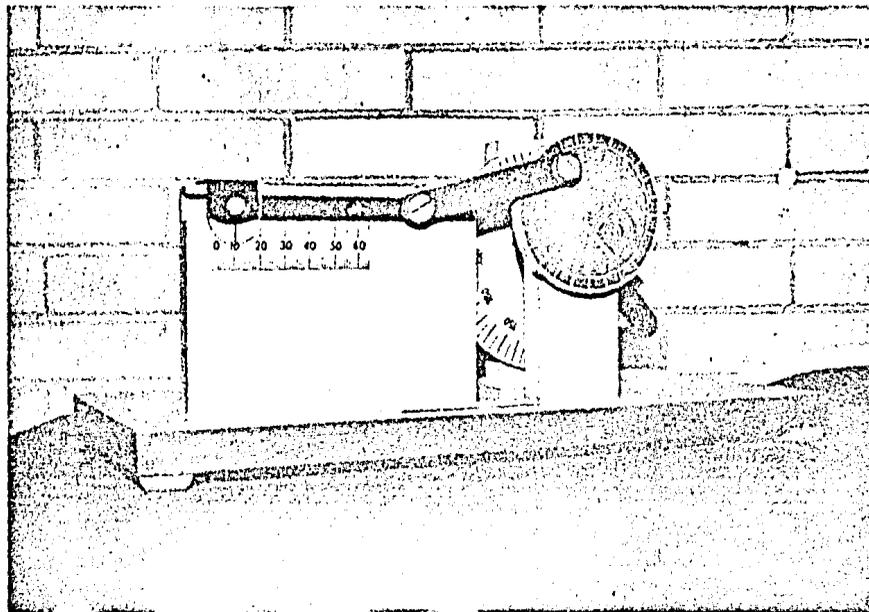


Figura 2.3.5

Mecanismo de Retorno Rápido "Whitworth".

dirección y un rápido deslaminamiento débil de retorno.

En la figura 2.3.6, que esquematiza el mecanismo Whitworth - TH 110 el punto C representa el centro de rotación de la barra de entrada, y el punto O representa el centro de rotación de la barra de salida o conducida.

El punto T rota alrededor de C sobre la trayectoria mostrada (P T R S). La barra OB está conectada a T por una corredera y por lo tanto gira alrededor de O conforme la flecha de entrada se mueve.

La barra BO se prolonga para dar la manivela OA. De esta manera el punto A gira alrededor de O sobre la trayectoria mostrada (W X Y Z).

Y por último el punto A se conecta a la corredera D, la cual provee el movimiento de salida del mecanismo.

Considerando los dos límites del movimiento del punto A, representados por los puntos W e Y. Si el punto T se mueve a través del arco RSP, entonces el punto A deberá moverse a través del semicírculo WXY. Similarmente si el punto T se mueve a través del arco PR, entonces el punto A deberá moverse a través del semicírculo YZW.

De este modo el deslizamiento de la corredera en la dirección E F es producido por una rotación de la barra de entrada mayor que  $180^\circ$  y el deslizamiento de la corredera en la dirección F E por una rotación menor que  $180^\circ$ . Si la barra de entrada gira a velocidad constante el deslizamiento de la corredera en la dirección E F es lento y en la dirección F E es rápido.

La razón de los tiempos de deslizamiento es igual a la razón de las longitudes de los arcos RSP y PQR.

$$\frac{t_{E F}}{t_{F E}} = \frac{\widehat{R S P}}{\widehat{P Q R}}$$

Y esta razón depende de la medida de el ángulo PQR.

La longitud del deslizamiento es establecida por el radio de la manivela de salida OA.

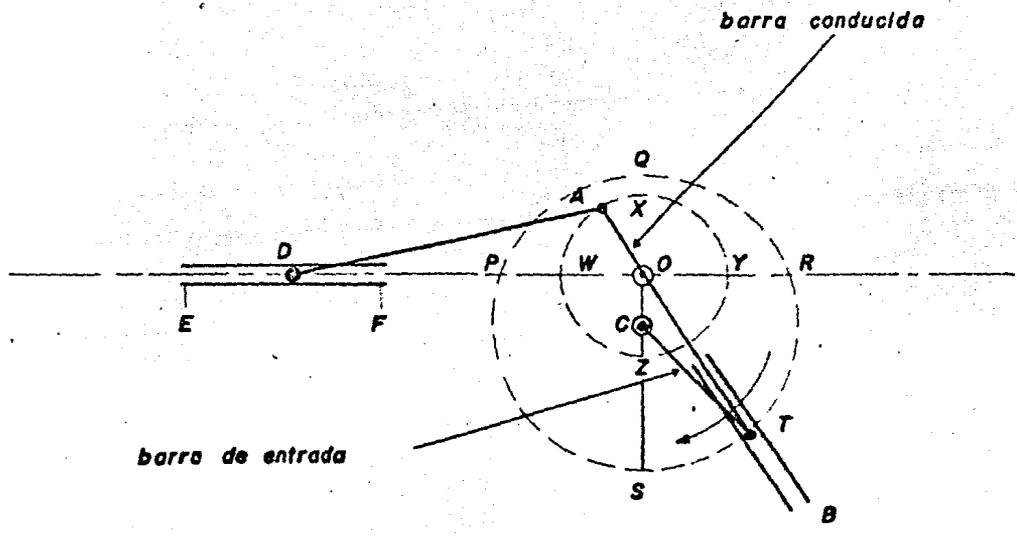


Figura 2.3.6

Esquema del Mecanismo de Retorno Rápido "Whitworth"

### 2.3.3.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

1.- Colocar el volante graduado que representa a la barra de entrada en la posición  $\theta = 0^\circ$ , de manera que la marca sobre la corredera coincida con el cero de la escala de desplazamientos.

2.- Girar la barra de entrada cada  $15^\circ$  y registrar el desplazamiento de la corredera, hasta completar una revolución completa de la barra de entrada ( $360^\circ$ ). Formando así la tabla 2.3.1.

3.- Trazar una gráfica de desplazamiento de la corredera ( $x$ ) - contra desplazamiento angular de la barra de entrada ( $\theta$ ) (figura 2.3.2).

4.- Derivar gráficamente la curva anterior obteniendo de esta manera la curva de velocidad de la corredera ( $V$ ) contra la posición de la barra de entrada ( $\theta$ ), para una velocidad angular unitaria (figura 2.3.3).

NOTA: La tabla 2.3.2 muestra los valores obtenidos en la gráfica de la figura 2.3.3.

$\theta$	x
grados	mm
0	0.0
15	0.5
30	2.0
45	6.0
60	9.0
75	14.0
90	18.0
105	23.0
120	23.0
135	32.0
150	36.0
165	40.0
180	43.0
195	46.0
210	43.0
225	49.0
240	57.0
255	49.0
270	47.0
285	41.0
300	31.0
315	13.0
330	7.0
345	2.0
360	0.0

Tabla de resultados 2.3.1 .

$\theta$	V
grados	mm / seg
0	0.0
15	4.3
30	9.0
45	12.4
60	14.2
75	16.3
90	17.3
105	13.5
120	10.7
135	20.0
150	17.0
165	15.0
180	12.4
195	10.0
210	7.0
225	4.3
240	0.0
255	- 7.0
270	- 16.0
285	- 24.0
300	- 46.0
315	- 32.0
330	- 26.0
345	- 11.6
360	0.0

Tabla de resultados 2.3.2.

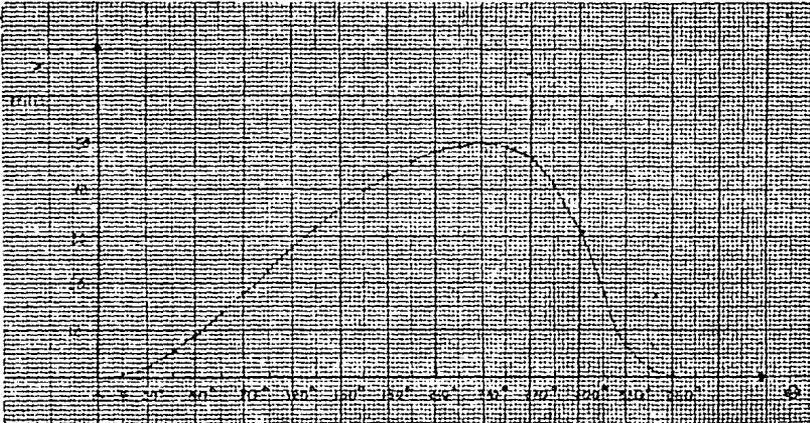


Figura 2.3.7

Desplazamiento de la corredera ( $x$ ) contra ángulo de giro ( $\theta$ ) de la barra de entrada.

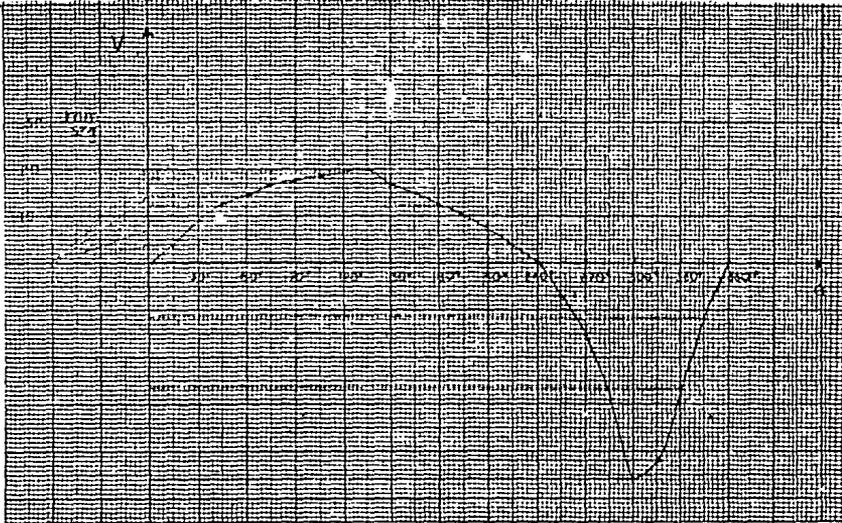


Figura 2.3.8

Velocidad de la corredera ( $V$ ) contra ángulo de giro ( $\theta$ ) de la barra de entrada.

## 2.3.6.- CONCLUSIONES.

De la gráfica 2.3.7 se observa que :

1.- Para un desplazamiento angular de  $240^{\circ}$  de la barra de entrada se tiene un deslizamiento de la corredera de 50 mm en la dirección E F (figura 2.3.5).

2.- Para completar el giro total de la barra de entrada (120) se tiene también un deslizamiento de la corredera de 50 mm pero ahora en la dirección F E .

De la gráfica 2.3.8 se observa que:

1.- La velocidad máxima alcanzada en el desplazamiento de la corredera en la dirección E F es de 20 mm/seg.

2.- La velocidad máxima alcanzada en el desplazamiento de la corredera en la dirección F E es de 46 mm/seg.

3.- Por lo tanto se concluye que el movimiento de retorno de la corredera (dirección F E) es más rápido que el movimiento en la dirección E F para una velocidad angular constante de la barra de entrada.

## C A P I T U L O 3

## APARATO DE CORIOLIS

Al estudiar los mecanismos de barras articuladas, en movimiento, generalmente se necesita conocer las componentes de aceleración de diferentes puntos del mecanismo para una posición específica de éste. Una de las componentes de aceleración es la llamada "Aceleración de Coriolis", la cual se presenta cuando existe movimiento relativo entre dos puntos.

En esta práctica podremos visualizar y cuantificar la Aceleración de Coriolis a través de un sistema mecánico-hidráulico-eléctrico, como lo es el Aparato de Coriolis.

## PRACTICA 3.1

### APARATO DE CORIOLIS .

#### 3.1.1.- INTRODUCCION

El estudio de la componente de aceleración de Coriolis está usualmente relacionado con la aceleración y fuerzas en los mecanismos, pero en este aparato, la teoría es aplicada a un fluido fluyendo radialmente hacia afuera a lo largo de un tubo el cual está rotando alrededor de un eje normal al eje del tubo.

El par requerido para acelerar el agua en una dirección tangencial es medido y comparado con la teoría.

#### 3.1.2.- TEORIA

La aceleración de Coriolis existe cuando el movimiento relativo de translación entre dos puntos está sujeto a un movimiento de rotación .

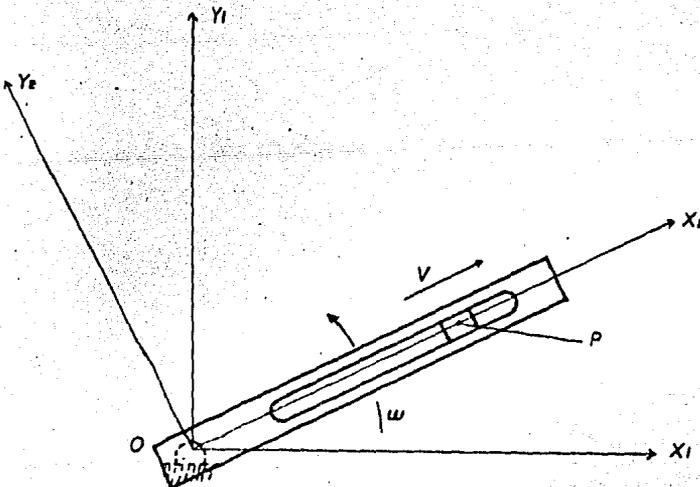


Figura 3.1.1

En la figura 3.1.1, el brazo ramurado gira a una velocidad angular constante ( $\omega$ ), en el plano  $X_1 Y_1$ , en la dirección mostrada, y el punto P de la corredera se desliza sobre el brazo ramurado alejándose del origen (O) a una velocidad constante (V).

En este caso el punto P se mueve con respecto de O con un movimiento de translación, pero además el punto P se mueve con respecto de O con un movimiento de rotación.

Recorriremos el movimiento de rotación y translación de un punto en el plano, empleando sistemas de referencia auxiliares.

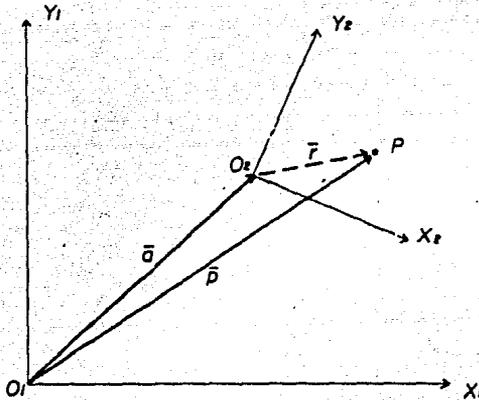


Figura 3.1.2

En la figura 3.1.2 se tiene un punto P que tiene un movimiento de translación y rotación con respecto del sistema  $X_1 Y_1$ .

Utilizando un sistema auxiliar  $X_2 Y_2$ , podemos definir la posición instantánea del punto P con respecto a este sistema auxiliar por medio del vector de posición  $\vec{r}$ .

Así mismo, podemos definir la posición de P en el sistema  $X_1 Y_1$  por medio del vector de posición  $\vec{r}_1$ . Además también definimos la posición del origen  $O_2$  del sistema auxiliar  $X_2 Y_2$  con respecto al origen  $O_1$  del sistema  $X_1 Y_1$ .

Trabajando en notación matricial, de la figura 3.1.2 se tiene:

$$[\vec{r}_1]_1 = [\vec{r}_2]_2 + [\vec{r}]_2 \quad (3.1.1)$$

NOTA: Los subíndices de las matrices indican en qué sistema se están tomando los vectores.

Pero de la ecuación (3.1.1) que define la posición de P, el vector  $\bar{a}$  está referido al sistema  $X_1 Y_1$  y el vector  $\bar{r}$  está referido al sistema  $X_2 Y_2$ . Para poder ser congruentes matemáticamente, debemos de referir la posición de P con respecto a un solo sistema: en éste caso al sistema original  $X_1 Y_1$ ; es decir, la ecuación (3.1.1) debe de estar escrita en la siguiente forma:

$$[\bar{p}]_1 = [\bar{a}]_1 + [\bar{r}]_1 \quad (3.1.2)$$

Para esto, vamos a encontrar el vector  $\bar{r}$  referido al sistema  $X_1 Y_1$ , por lo que debemos premultiplicar a  $[\bar{r}]_2$  por la matriz de rotación  $[Q]$ , puesto que esta matriz nos permite referir un sistema con respecto a otro.

Por lo tanto:

$$[\bar{r}]_1 = [Q]_1 [\bar{r}]_2 \quad (3.1.3)$$

Ahora sustituyendo (3.1.3) en (3.1.1) tenemos :

$$[\bar{p}]_1 = [\bar{a}]_1 + [Q]_1 [\bar{r}]_2 \quad (3.1.4)$$

La ecuación (3.1.4) nos define la posición instantánea del punto P referido al sistema  $X_1 Y_1$ .

Si derivamos la ecuación (3.1.4) con respecto al tiempo, obtendremos la siguiente relación de velocidad:

$$[\bar{v}_p]_1 = [\bar{v}_o]_1 + [\dot{Q}]_1 [\bar{r}]_2 + [Q]_1 [\dot{\bar{r}}]_2 \quad (3.1.5)$$

En donde  $[\bar{v}_p]_1$ , nos indica la velocidad instantánea del punto P referido al sistema original.

Y  $[\bar{v}_o]_1$ , nos indica la velocidad de translación del origen del sistema auxiliar ( $O_2$ ) con respecto al origen del sistema uno ( $O_1$ ).

Pero la matriz de rotación  $[Q]$  es ortogonal, por lo que :

$$[Q]_1^{-1} [Q]_1 = [I] \quad (3.1.6a)$$

$${}^y [Q]_1^T [Q]_1 = [I] \quad (3.1.6b)$$

Por lo tanto, si multiplicamos el segundo término del miembro derecho de la ecuación (3.1.5) por la matriz identidad  $[I]$  éste no se altera y se tendrá:

$$[\dot{Q}]_1 [I] [\bar{F}]_2$$

Sustituyendo cualquiera de las ecuaciones (3.1.6a) y (3.1.6b) en el término anterior se tendrá :

$$[\dot{Q}]_1 [Q]_1^T [Q]_1 [\bar{F}]_2$$

Pero por definición el producto  $[\dot{Q}]_1 [Q]_1^T$  es igual a la matriz  $[\Omega]$ .

Por lo tanto el 2º término de la derecha de la ecuación (3.1.5) queda :

$$[\Omega]_1 [Q]_1 [\bar{F}]_2$$

Y finalmente la ecuación (3.1.5) se modifica de la siguiente manera

$$[\bar{v}_p]_1 = [\bar{v}_o]_1 + [\Omega]_1 [Q]_1 [\bar{F}]_2 + [Q]_1 [\dot{\bar{F}}]_2 \quad (3.1.7)$$

En donde el primer término de la derecha es la componente de velocidad debido a translación, el segundo término es la componente debida a rotación y el tercero es una velocidad medida en el sistema '2' .

Si derivamos ahora la ecuación (3.1.7) con respecto al tiempo obtendremos una relación de aceleración del punto P de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} [\bar{a}_p]_1 = [\bar{a}_o]_1 = & [\dot{\Omega}]_1 [Q]_1 [\bar{F}]_2 + [\Omega]_1 [\dot{Q}]_1 [\bar{F}]_2 + [\Omega]_1 [Q]_1 [\dot{\bar{F}}]_2 \\ & + [\dot{Q}]_1 [\dot{\bar{F}}]_2 + [Q]_1 [\ddot{\bar{F}}]_2 \quad (3.1.8) \end{aligned}$$

Si al tercero y quinto términos de la derecha los multiplicamos por la matriz identidad  $[I]$  y luego ésta la sustituimos por las ecuaciones (3.1.6a) o (3.1.6b), como se hizo con el segundo término de la derecha de la ecuación (3.1.5) se tiene:

$$[\bar{a}_p]_1 = [\bar{a}_o]_1 + [\dot{\Omega}]_1 [\bar{r}]_2 - [\Omega]_1^2 [\bar{r}]_2 + 2[\Omega]_1 [\dot{r}]_2 + [\dot{Q}]_1 [\bar{r}]_2 \quad (3.1.9)$$

La ecuación de aceleración anterior la podemos escribir en forma vectorial o notación de Gibbs como sigue, en donde la matriz  $[Q]$  está implícita en esta notación:

$$\bar{a}_p = \bar{a}_o + \dot{\omega} \times \bar{r} + \omega^2 \times \bar{r} + 2 \left( \omega \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) + \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \quad (3.1.10)$$

En donde:

$$[\bar{a}_p]_1 = \bar{a}_p = \text{aceleración instantánea del punto P}$$

$$[\bar{a}_o]_1 = \bar{a}_o = \text{aceleración debida a translación, del origen del sistema auxiliar con respecto al origen del sistema original.}$$

$$[\dot{\Omega}]_1 [\bar{r}]_2 = \dot{\omega} \times \bar{r} = \text{aceleración debido a rotación, componente tangencial.}$$

$$[\Omega]_1^2 [\bar{r}]_2 = \omega^2 \times \bar{r} = \text{aceleración debido a rotación, componente radial.}$$

$$2[\Omega]_1 [\dot{r}]_2 = 2 \left( \omega \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \text{aceleración de Coriolis.}$$

$$[\dot{Q}]_1 [\bar{r}]_2 = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \text{aceleración medida en el sistema auxiliar}$$

NOTA: La forma matricial permite ver en qué sistema se miden cada uno de los vectores, en la forma vectorial se supone el sistema en que se mide.

Para el caso de la figura 3.1.1, si deseamos obtener la aceleración absoluta del punto P, podemos escoger un sistema auxiliar cuyo origen también se encuentre en O, y el eje  $X_2$  sobre el brazo ranurado, como se indica en la misma figura, entonces se anularán los siguientes términos de la ecuación (3.1.10) ;  $\bar{a}_0 = 0$ , debido a que no existe aceleración debido a translación del origen del sistema auxiliar con respecto al origen del sistema original.

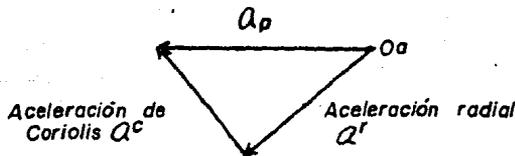
$\bar{\omega} \times \bar{r} = 0$ , debido a que el brazo ranurado se mueve con una velocidad angular constante.

$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = 0$ , debido a que la corredera se aleja del origen de ambos sistemas a una velocidad constante.

Por lo tanto la aceleración del punto P en este caso es :

$$a_p = \omega^2 \bar{r} + 2 \left( \omega \times \frac{d \bar{r}}{dt} \right) \quad (3.1.11)$$

Estas aceleraciones representadas en un polígono de aceleraciones quedaría de la siguiente forma:



Nótese en el polígono que la aceleración de Coriolis es perpendicular al vector de posición  $OP$  (figura 3.1.1) y va en el sentido de movimiento.

A continuación (figura 3.1.3) se muestran los casos generales para la dirección y sentido en la aceleración de Coriolis ( $a^c$ ).

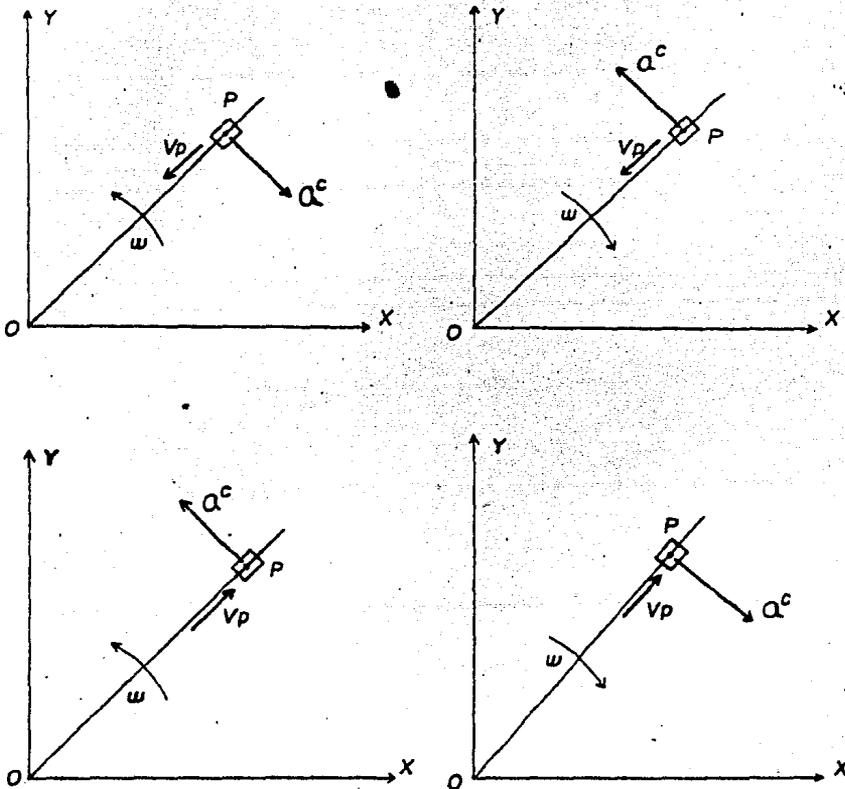


Figura 3.1.3

Casos generales de la Aceleración de Coriolis.

Aplicando la teoría básica anterior a un elemento de agua -  
fluyendo radialmente con velocidad  $V$  a lo largo de un tubo ro-  
tando con una velocidad angular  $\omega$  como se muestra en la figura  
3.1.4.

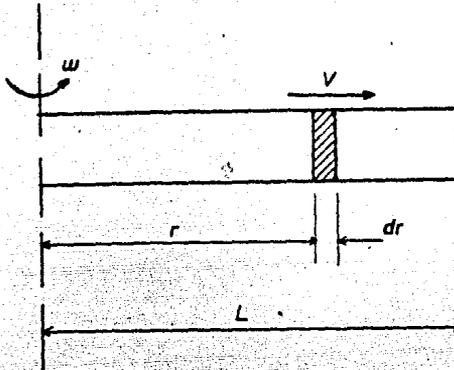


Figura 3.1.4

La aceleración de Coriolis en una dirección tangencial es:

$$a^c = 2 V \omega \quad (3.1.12)$$

La masa de agua en el elemento es  $(\rho a dr)$ , donde  $\rho$  es la densidad (agua) y  $a$  es el área de la sección transversal del tubo.

Aplicando la segunda ley de Newton  $F = m \times a$ , se tiene que el diferencial de par requerido para producir la componente de aceleración de Coriolis es:

$$d T = (2 V \omega) \rho a r dr$$

Y el par total para un tubo de longitud  $L$  es, entonces

$$\int d T = \int_0^L 2 V \omega \rho a r dr$$

Integrando

$$T = 2 V \omega \rho a \int_0^L r^2/2 \, dr$$

Sustituyendo límites

$$T = V \omega \rho a L^2$$

El aparato tiene dos tubos, y cada uno es de longitud  $L$ , por lo tanto el par total es :

$$T = 2 V \omega \rho a L^2 \quad (3.1.13)$$

donde

$T$  = par de Coriolis

$2V\omega$  = aceleración de Coriolis

$\rho$  = densidad de líquido que se maneja

$a$  = área de la sección transversal del tubo

$L$  = longitud del tubo

Esta ecuación puede ser usada directamente para calcular la aceleración de Coriolis mediante las mediciones del par  $T$ . Pero en este caso es conveniente hacer las siguientes sustituciones.

$$\omega = \frac{2 \pi N}{60}$$

donde  $N$  = velocidad en revoluciones por minuto

$$V = \frac{Q}{2 \rho a}$$

Donde  $Q$  es el flujo total de agua para los dos tubos en  $Km^3/sec$ , sustituyendo en la ecuación (3.1.12) tenemos :

$$T = Q N \left( \frac{2}{3} L^2 \right) \quad (3.1.14)$$

Pero en el aparato de Coriolis la longitud de los tubos es - 0.270 m, para finalmente tener :

$$T = 0.00763 \quad Q N \quad [N - m] \quad (3.1.15)$$

Esta es una ecuación simple que nos permite conocer los valores del par T mediante el conocimiento de Q y N .

### 3.1.3.- OBJETIVO

1.- Calcular la aceleración de Coriolis mediante las mediciones del par de Coriolis variando velocidades y flujos.

2.- Comparar el par medido en la práctica y el par calculado mediante la fórmula (3.1.15).

### 3.1.4.- EQUIPO

- . Aparato de Coriolis TX 17 Mk II
- . Torquímetro digital E 101
- . Unidad de control de velocidad E3 Mk II
- . Tacómetro electrónico analógico 964 Mk II
- . Tina Hidráulica HI
- . Transformador portátil (110 volts de entrada, 240 volts de salida ).

### 3.1.5.- DESCRIPCIÓN DEL APARATO DE CORIOLIS

El aparato consiste de un rotor montado en un motor eléctrico C D de velocidad variable. El rotor tiene dos tubos radiales - de cobre los cuales están conectados a un tubo principal de entrada de agua, ésta pasa por este tubo y sale por los dos tubos

radiales.

El par producido por el motor es registrado por dos resortes sujetos a un brazo torque, y el par de Coriolis puede ser medido por una simple escala o por lecturas derivadas de un potenciómetro lineal conectado al brazo torque. Un medidor de par digital E 101, es conectado con el aparato para tomar lecturas del par usando el potenciómetro lineal.

La velocidad de rotación del rotor es controlada usando un control de velocidad E 3 Mk II, conectado al aparato básico.

La velocidad del rotor es medida por un Tacómetro electrónico E 64 Mk II.

El rotor está contenido entre dos tapas de fibra de vidrio y una moldura de plástico transparente alrededor de su periferia.

El drenaje de agua del aparato se realiza por medio de un tubo situado en el centro de la tapa inferior.

El aparato está diseñado para usarse junto con la Tina Hidráulica que lo provee del recuerimiento de agua necesario.

Cuando se usa la Tina Hidráulica el tubo del drenaje se debe de colocar sobre el agujero de la tapa de la Tina.

### 3.1.6.- DESARROLLO EXPERIMENTAL.

#### Preparación

Para instalar y conectar el equipo como se muestra en la figura 3.1.5, llevaremos a cabo los siguientes pasos:

1.- Llenar la Tina Hidráulica con agua limpia hasta aproximadamente la mitad de su capacidad.

2.- Levantar el aparato de Coriolis y colocarlo sobre la Tina Hidráulica, en una posición de tal manera que el drenaje coincida con el agujero de la Tapa de la Tina.

3.- Conectar la manguera desde la tina hasta la entrada de agua del aparato y asegurarla con una abrazadera.

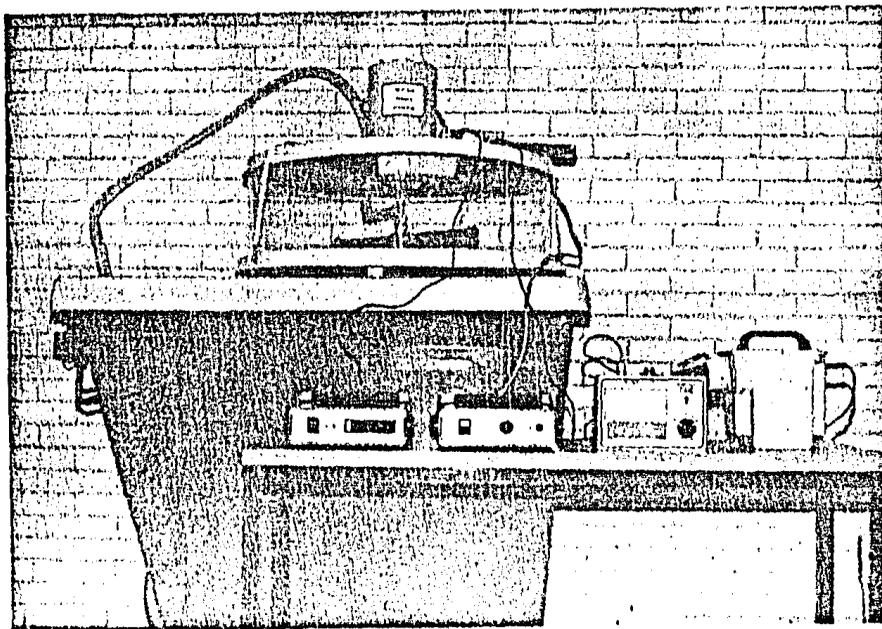


Figura 3.1.5

Aparato de Coriolls.

4.- Tomar los equipos eléctricos y colocarlos sobre una mesa, separados de la Tina Hidráulica, y hacer las siguientes conexiones :

a) Conectar el motor del Aparato de Coriolis al control de velocidad E3 Mk II.

b) Conectar la salida del Tacómetro E 64 Mk II al potenciómetro lineal.

c) Conectar la salida del Medidor de par digital E 101 al potenciómetro lineal.

NOTA: El aparato está construido para trabajar con un motor de 240 volts y un transformador para obtener ese voltaje. En este caso el control de velocidad también está conectado al transformador.

IMPORTANTE: Antes de proceder hay que tener cuidado cuando se esté usando agua en presencia de aparatos eléctricos. Todas las precauciones razonables que se tomen no estarán de más.

Si cualquier accidente ocurre desconectar de inmediato todos los aparatos eléctricos.

Los aparatos eléctricos no deben ser operados sobre la tapa de la Tina Hidráulica.

#### Verificaciones y Calibraciones.

Todas las unidades deben estar calibradas antes de empezar la práctica, y se deben hacer todos los arreglos que sean necesarios. Por lo tanto se deben chequear los ceros de la siguiente manera :

a) La aguja del tacómetro electrónico E 64 Mk II colocarla en cero si es necesario utilizando un tornillo que está abajo de la escala milimétrica.

b) El Brazo Torque del aparato de Coriolis debe estar situado justamente a la izquierda de la escala de desplazamiento y de

be marcarse aproximadamente cero. Esta posición puede ser ajustada si es necesario por medio de unos tornillos y resortes situados a cada uno de los extremos del brazo.

c) El Torquímetro digital E 101 debe marcar aproximadamente cero cuando el brazo torque esté en la posición cero de la escala de desplazamiento. En caso de que la posición del cero no es crítica pero hubieran que hacer los ajustes necesarios, calibrando el torquímetro digital por medio de un tornillo situado atrás de la unidad.

### Procedimiento

- 1.- Encender todas las unidades eléctricas.
- 2.- Cerrar la válvula de la tina y accionar la bomba.
- 3.- Lentamente abrir la válvula de la tina hasta que el agua fluya a través de los tubos del aparato.
- 4.- Cerciorarse de que el drenaje del agua baje a la tina.
- 5.- Usar la perilla de control de la Unidad de Control de Velocidad E 3 MK II, y accionarla hasta una baja velocidad de 100 r.p.m.
- 6.- Con la velocidad de 100 r.p.m. anterior establecer un flujo de agua  $Q = 0.35 \text{ Kg/seg.}$  (1/2 apertura de la válvula).
- 7.- Tomar el valor del par (en N-m) que aparece en el display de el torquímetro digital E 101.
- 8.- Para este mismo flujo de agua  $Q = 0.35 \text{ Kg/seg.}$ , ir aumentando la velocidad angular a intervalos de 100 r.p.m. e ir tomando los valores del par obtenido.
- 9.- Variar el flujo de agua a 0.70 y 1.05 Kg/seg., obteniendo valores del par para cada 100 r.p.m.

NOTA: Para 1/2 abertura de la válvula de la tina se tiene un flujo de agua  $Q = 0.35$  Kg/seg, para 3/4 de abertura  $Q = 0.45$  Kg/seg, para 1 abertura  $Q = 0.70$  Kg/seg y para 1 1/2 abertura  $Q = 1.05$  Kg/seg .

NOTA: Tener cuidado de no incrementar el flujo de agua cuando esta golpea o suba a la base del aparato. No excederse de 700 r.p.m.

IMPORTANTE: Para cada variación del flujo de agua volver a calibrar los aparatos para evitar errores posibles.

La tabla 3.1.1 nos muestra los resultados del par de Coriolis (2) obtenidos prácticamente al variar las revoluciones por minuto (N) del rotor y el flujo de agua (Q) ; también nos muestra los valores del par (T) calculados mediante la fórmula (3.1.15). Y también se encuentran tabulados los valores prácticos y teóricos de la Aceleración de Coriolis, estos últimos calculados a partir de la fórmula (3.1.13).

Prueba	N	Q	T medida	T calcu- lada	$a^c$ experi- mental	$a^c$ calcu- lada
Nº	r.p.m	Kg/seg	N - m	N - m	m/seg <sup>2</sup>	m/seg <sup>2</sup>
1	100	0.35	0.25	0.2670	10.91	11.05
2	100	0.70	0.52	0.5341	22.70	23.31
3	100	1.05	0.73	0.8011	34.05	34.97
4	200	0.35	0.52	0.5341	22.70	23.31
5	200	0.70	0.93	1.0632	42.73	46.63
6	200	1.05	1.55	1.6023	67.67	69.95
7	300	0.35	0.79	0.8011	34.49	34.97
8	300	0.70	1.36	1.6023	63.10	69.95
9	400	0.35	0.99	1.0632	43.22	46.63
10	400	0.525	1.55	1.6023	67.67	69.95

Tabla de resultados 3.1.1

Memoria de cálculo para la tabla 3.1.1.

De la ecuación :

$$T = 2 V \omega \rho a L \quad (3.1.13)$$

Despejando la Aceleración de Coriolis ( $a^c = 2 V \omega$ ).

$$2 V \omega = \frac{T}{\rho a L^2}$$

donde :

$$\begin{aligned} L &= 0.270 \text{ m (longitud de cada tubo)} \\ \rho &= 1000 \text{ Kg/m (densidad del agua)} \\ a &= \text{area de la sección transversal del tubo} \\ a &= \frac{\pi \phi^2}{4} \end{aligned}$$

donde

$$\phi = 0.02 \text{ m (diámetro interior del tubo)}$$

Por lo tanto :

$$a = \frac{\pi (0.02)^2}{4}$$

$$a = 0.0003142 \text{ m}^2$$

Aceleración de Coriolis empleando el par T medido.

$$a_1^c = \frac{0.25}{1000 (0.0003142) (0.270)}$$

$$a_1^c = 10.914 \text{ m/seg}^2$$

El término  $\rho a L^2$  es constante e igual a 0.0229

$$a_2^c = \frac{0.52}{0.0229} = 22.702 \text{ m/seg}^2$$

$$a_3^c = \frac{0.73}{0.0229} = 34.053 \text{ m/seg}^2$$

$$a_4^c = \frac{0.52}{0.0229} = 22.702 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_5 = \frac{0.98}{0.0229} = 42.785 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_6 = \frac{1.55}{0.0229} = 67.670 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_7 = \frac{0.79}{0.0229} = 34.490 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_8 = \frac{1.56}{0.0229} = 68.106 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_9 = \frac{0.99}{0.0229} = 43.221 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_{10} = \frac{1.55}{0.0229} = 67.670 \text{ m/seg}^2$$

Aceleración de Coriolis empleando el par T calculado.

$$a'_1 = \frac{0.26705}{0.0229} = 11.658 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_2 = \frac{0.5341}{0.0229} = 23.317 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_3 = \frac{0.30115}{0.0229} = 13.151 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_4 = \frac{0.5341}{0.0229} = 23.317 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_5 = \frac{1.0682}{0.0229} = 46.635 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_6 = \frac{1.6023}{0.0229} = 69.953 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_7 = \frac{0.30115}{0.0229} = 13.151 \text{ m/seg}^2$$

$$a'_8 = \frac{1.6023}{0.0229} = 69.953 \text{ m/seg}^2$$

$$a_9^c = \frac{1.0682}{0.0229} = 46.635 \text{ m/seg}^2$$

$$a_{10}^c = \frac{1.6023}{0.0229} = 69.953 \text{ m/seg}^2$$

3.1.7.- CORIOLIS.

Como podemos observar de la tabla de resultados :

1.- Las revoluciones por minuto (H) del rotor y el flujo de agua (Q), están en proporción directa con respecto al par de Coriolis (T) . Esto lo podemos confirmar con la ecuación :

$$T = 0.00763 \cdot Q \cdot H \quad (3.1.12)$$

2.- El par T medido y el par T calculado difieren ambos en una proporción muy pequeña. Por lo tanto los valores experimentales demuestran la veracidad de la teoría.

3.- La Aceleración de Coriolis como la define la ecuación :

$$a^c = 2 \cdot v \cdot \omega = \frac{T}{\rho \cdot A \cdot L^2} \quad (3.1.13)$$

Es directamente proporcional al par T e inversamente proporcional a  $\rho$  a  $L^2$  , pero en la práctica  $\rho$  a  $L^2$  se mantiene constante. Es por esto que en la tabla 3.2.1 se observa la proporción directa entre T y  $a^c$ .

4.- Los valores teóricos y experimentales de  $a^c$  también difieren, pero en una pequeña proporción. Por lo que los valores experimentales demuestran la autenticidad de la teoría.

## C A P I T U L O 4

## MECANISMOS DE CORREDERA - LEVA - ENGRANES

Con el equipo que cuenta la caja de mecanismos de corredera-leva- engranes se pueden efectuar las siguientes prácticas :

4.1.- MECANISMO CORREDERA - BIELA -  
MANIVELA CON GRAFICADOR

## 4.2.- ANALIZADOR DE LEVAS

## 4.3.- ANALIZADOR DE ENGRANES

La práctica 4.1 es un complemento de la práctica 2.1 Mecanismo Corredera - biela - manivela. La modificación que se presenta ahora es la obtención directa de una gráfica de desplazamiento de la corredera contra ángulo de giro de la manivela, y a partir de ésta se hace el análisis de velocidades y aceleraciones de la corredera como se efectuó en la práctica 2.1 .

La práctica 4.2 presenta un mecanismo de leva-seguidor con el cual se hacen 3 diferentes variaciones de perfiles de levas, además se obtienen gráficas del desplazamiento del seguidor contra el ángulo de giro de la leva para estas 3 variaciones.

Posteriormente se hace un análisis gráfico de desplazamientos, velocidades y aceleraciones del seguidor.

En la práctica 4.3 se analiza un tren de engranes de dientes rectos en los siguientes aspectos :

- Manufactura
- Interferencia
- Corrección en el perfil del diente
- Cambio en la distancia entre centros

Por último se ilustra un método gráfico de obtención de perfiles de dientes.

## PRÁCTICA 4.1

### MECANISMO CORREDERA-BIELA-MANIVELA CON GRAFICADOR

#### 4.1.1.- INTRODUCCION

Esta práctica es un complemento de la práctica 2.1 Mecanismo Corredera-Biela-Manivela, en donde con el equipo T.L. 115 se determinó la velocidad y aceleración para diferentes desplazamientos de la corredera.

En esta práctica vamos a obtener una gráfica directamente con el equipo usado, de desplazamiento de la corredera contra ángulo de giro de la manivela, sin tener que tomar lecturas del aparato.

#### 4.1.2.- OBJETIVO

En un mecanismo corredera-biela-manivela, obtener el desplazamiento, velocidad y aceleración de la corredera para diferentes ángulos de giro de la manivela.

#### 4.1.3.- EQUIPO

- . bancada o bastidor metálico
- . rueda de metal dentada
- . placa dentada de acrílico
- . varilla (corredera)
- . guías de plástico duro
- . manivela y biela articuladas
- . papel graficador
- . minas

#### 4.1.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

1.- Gire la placa dentada hacia la derecha de la bancada metálica .

2.- Apriete la manivela y biela articuladas al centro de la rueda dentada y al extremo final de la varilla respectivamente.

3.- Asegúrese de que tanto la manivela como la biela están en la misma dirección que la línea de desplazamiento de la corredera.

4.- Coloque una hoja de papel graficador sobre la placa dentada, asegurándose de que los lados de la hoja sean exactamente paralelos a los lados de la placa dentada y además haciendo coincidir el barrero situado a la derecha de la varilla (corredera) con el cero de la escala del papel.

5.- Fije una mina en el barrero antes mencionado.

NOTA : El arreglo final se muestra en la figura 4.1.1

6.- Gire la rueda dentada en sentido contrario a las manecillas del reloj, obteniendo de esta forma el desplazamiento de la corredera sobre el papel graficador.

NOTA : Solo obtendremos graficado sobre el papel, el desplazamiento de la corredera para  $180^\circ$  de ángulo de giro de la manivela.

Ahora, si suponemos una velocidad angular de la manivela  $\omega = 1 \text{ rad/seg}$ , obtendremos gráficamente la velocidad y aceleración de la corredera para un rango de desplazamiento angular de la manivela de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  . Las figuras 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4, nos muestran el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la corredera respectivamente.

#### 4.1.5.- RESULTADOS

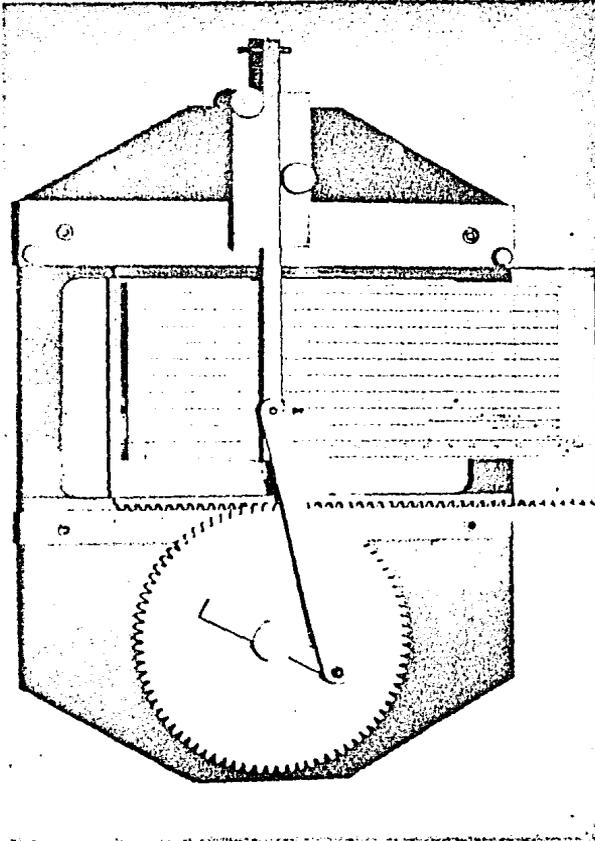


Figura 4.1.1

*Mecanismo Corredera Biela Manivela con Graficador.*

La figura 4.1.2 nos muestra el desplazamiento de la corredera ( $x$ ) dado en mm contra el ángulo de giro de la manivela ( $\theta$ ) en grados. En esta gráfica el desplazamiento máximo de la corredera es de 30 mm alcanzado a los  $130^\circ$  de ángulo de giro de la manivela.

La figura 4.1.3 nos muestra la velocidad de la corredera ( $\dot{x}$ ) medido en mm/seg contra el ángulo de giro de la manivela ( $\theta$ ) en grados. En esta gráfica la velocidad máxima alcanzada es de 40 mm/seg a  $35^\circ$  aproximadamente, teniendo velocidades nulas a  $0^\circ$  y  $130^\circ$ .

La figura 4.1.4 nos muestra la aceleración de la corredera ( $\ddot{x}$ ) medida en mm/seg contra el ángulo de giro de la manivela ( $\theta$ ) en grados. En esta gráfica la aceleración máxima alcanzada es de  $33 \text{ mm/seg}^2$  aproximadamente a  $0^\circ$ , teniendo una aceleración nula a  $35^\circ$  aproximadamente.

#### 4.1.3.- CONCLUSIONES:

Podemos concluir como en la práctica 2.1 lo siguiente :

1.- La curva desplazamiento de la corredera contra posición de la manivela es aproximadamente un movimiento armónico simple o cenoidal.

2.- Para los puntos muertos del mecanismo ( $0^\circ$  y  $180^\circ$ ) se tienen velocidades nulas.

3.- Se observa en las gráficas 4.1.3 y 4.1.4 que en los puntos de velocidad nula se tienen aceleraciones máximas, y en los puntos de velocidades máximas se presentan aceleraciones nulas.

Lo cual comprueba la conclusión 1.

4.- En este mecanismo también se presenta el efecto de la biela brevemente explicado en el punto 5 de Conclusiones de la práctica 2.1.

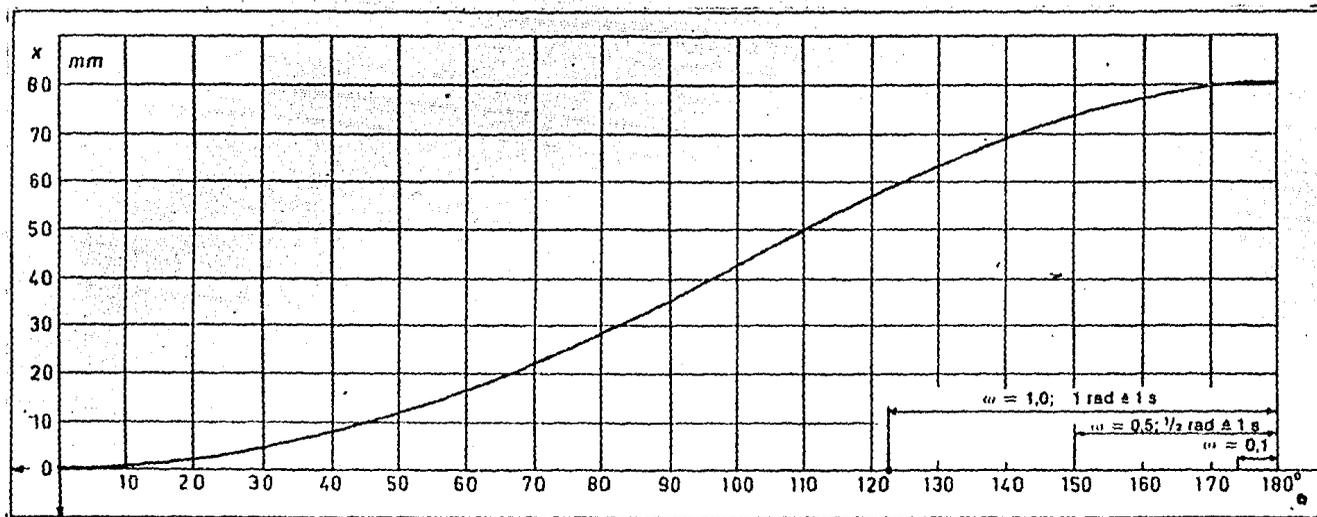


Figura 4.1.2

Gráfica de desplazamiento de la corredera contra ángulo de giro de la manivela

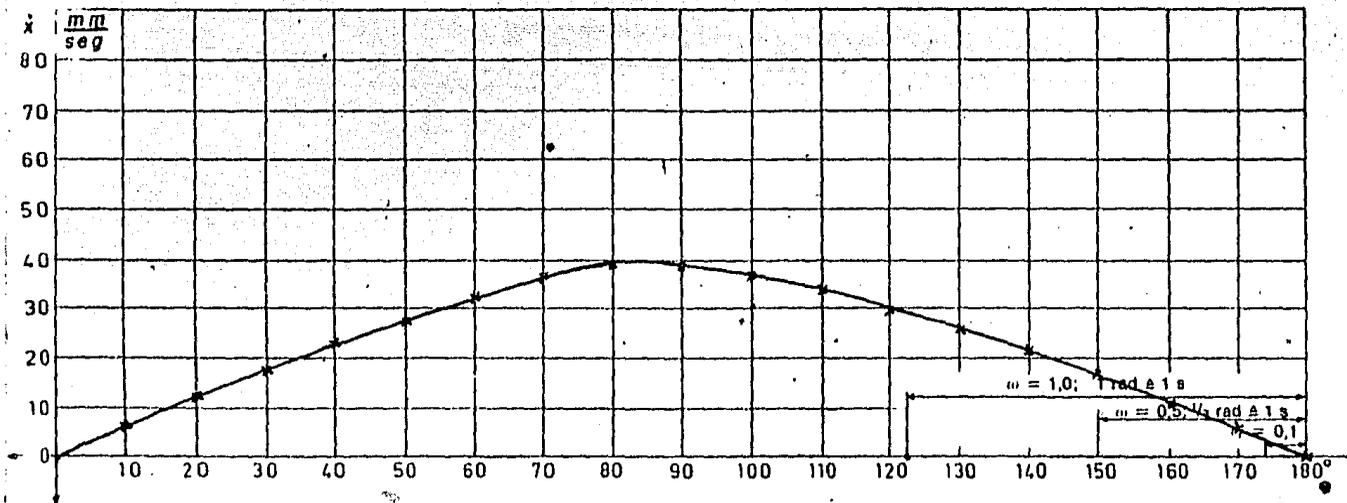


Figura 4.1.3

Gráfica de velocidad de la correa de la manivela contra ángulo de giro de la manivela

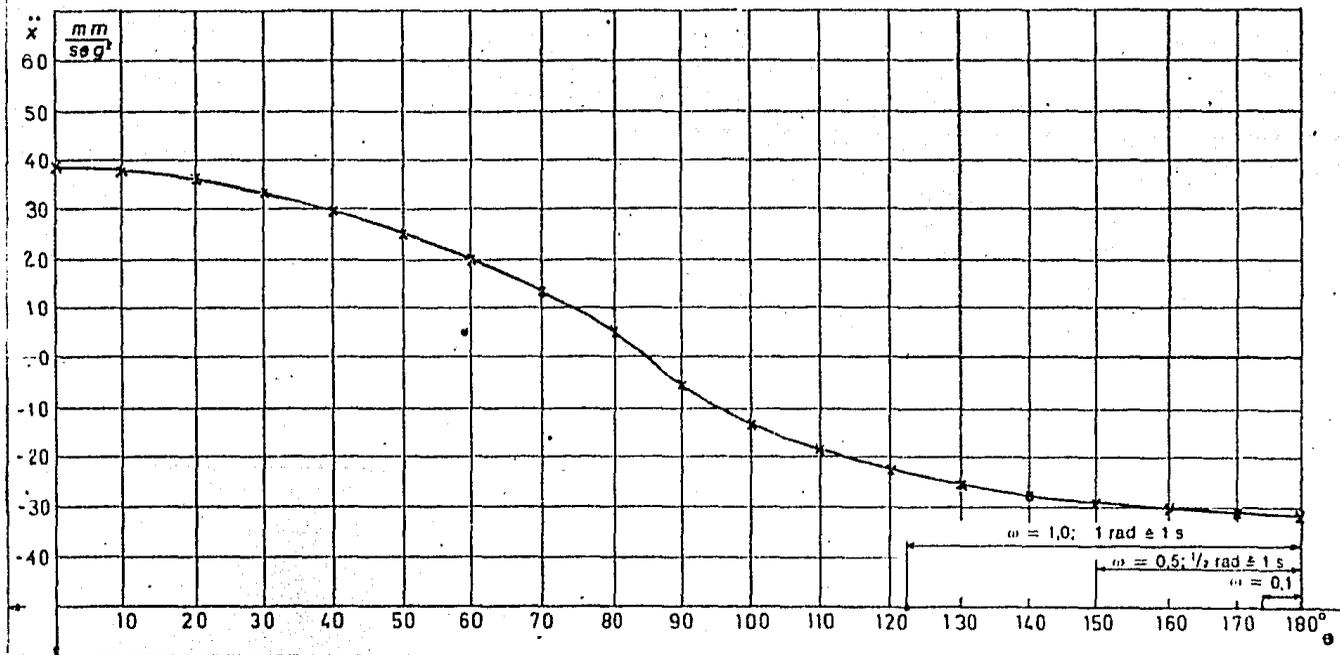


Figura 4.1.4

Gráfica de aceleración de la corredera contra ángulo de giro de la manivela

## PRACTICA 4.2

### ANALIZADOR DE LEVAS

#### 4.2.1.- INTRODUCCION

Una leva es un elemento mecánico de una máquina que se utiliza para conducir otro elemento llamado seguidor, transmitiéndole por contacto directo un movimiento determinado.

Los mecanismos de levas se emplean extensamente en los motores de combustión interna, máquinas herramienta, computadores mecánicos, instrumentos y en general en cualquier tipo de máquinas denominadas automáticas.

Todos los mecanismos de levas se componen cuando menos de tres eslabones :

- a) Leva
- b) Seguidor.- cuyo movimiento se produce por el contacto de la leva.
- c) Bancada.- que soporta y guía al seguidor y a la leva.

NOTA: El perfil de la leva depende del movimiento que se desea transmitir al seguidor.

#### 4.2.2.- OBJETIVO

Analizar el movimiento del seguidor para diferentes perfiles de levas.

#### 4.2.3.- EQUIPO

- . analizador de levas
- . 3 levas de disco en material acrílico
- . hojas para diagramas de deslazamiento
- . Minns

El analizador de levas consta de :

- . un engrane cilíndrico de dientes rectos
- . una placa dentada de acrílico
- . varilla de metal
- . guías de plástico duro
- . resorte
- . seguidor de rodillo o carretilla

Todo lo anterior montado sobre una bancada o bastidor metálico.

#### 4.2.4.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

Para llevar a cabo el experimento debemos colocar el Analizador como lo muestra la figura 4.2.1 y llevar a efecto los siguientes pasos :

- 1.- Fijar la leva I a la rueda dentada del Analizador
- 2.- Cerciorarse de que haya un buen contacto entre leva y seguidor .
- 3.- Colocar una hoja de diagrama de desplazamiento sobre la placa de acrílico dentada y fijarla con cinta adhesiva, verificando que los lados de la hoja sean exactamente paralelos a los lados de la placa y que el cero del diagrama coincida con el barreno que se encuentra al lado derecho de la varilla.
- 4.- Fijar una mina en el barreno de la varilla anteriormente mencionado.
- 5.- Hacer girar la leva  $180^{\circ}$ , obteniendo de ésta manera el movimiento del seguidor gráficamente .

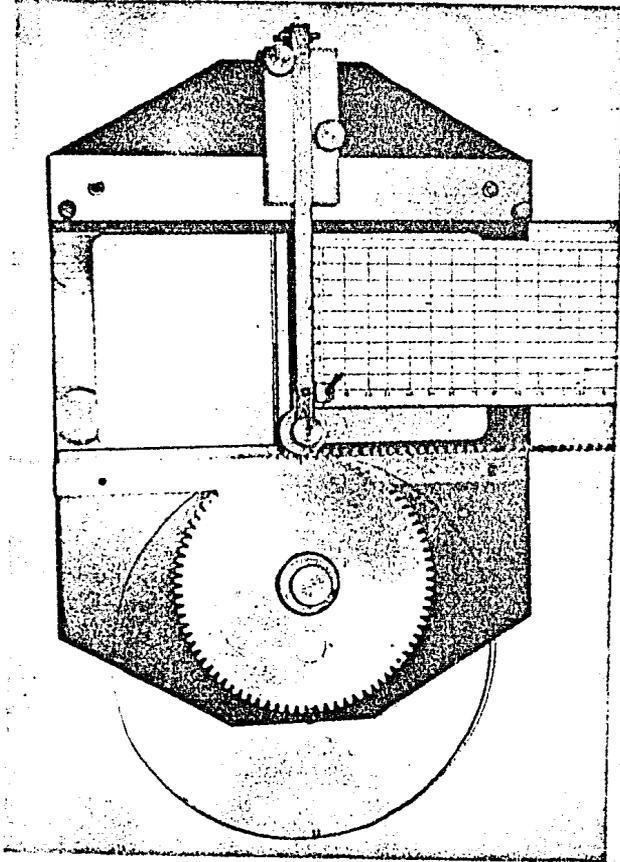


Figura 4.2.1

Analizador de Levas.

6.- Repetir los pasos del 1 al 5 para las levas II y III, obteniendo sus respectivos diagramas de desplazamiento.

NOTA: Colocar las levas I, II y III de tal forma que una marca azul sobre sus superficies, coincida con el punto de contacto inicial leva-seguidor y con el inicio del movimiento de ascenso del seguidor.

Los diagramas de desplazamiento obtenidos para las levas I, II y III aparecen en la figura 4.2.2.

Donde la ordenada  $y$  representa el desplazamiento del seguidor en mm y la abscisa  $\alpha$  representa el ángulo de giro de la leva en grados.

NOTA: En esta práctica únicamente se analizan levas de disco, radiales con seguidor de carretilla translacional, y los perfiles de las levas I, II y III se encuentran dibujados en las figuras 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.5 respectivamente.

Como un desarrollo adicional de esta práctica podemos obtener las gráficas de velocidad y aceleración para cada una de las curvas de desplazamiento del seguidor de la figura 4.2.2, suponiendo que la leva tiene una velocidad angular ( $\omega$ ) unitaria constante,  $\omega = 1.0$  es decir  $1 \text{ rad} \triangleq 1 \text{ seg}$  puesto que :

$$\text{Si } \omega = 1 \text{ rad/seg}$$

$$\omega t = \alpha \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right] \left[ \text{seg} \right] = \left[ \text{rad} \right]$$

$$\therefore t = \alpha \quad \therefore 1 \text{ seg} \triangleq 1 \text{ rad}$$

Las gráficas de velocidad y aceleración aparecen en las figuras 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.9 y 4.2.10 y la manera de obtenerlas aparece en este manual en el apéndice de la práctica 2.1 de mecanismo Corredera-Biela-Manivela.

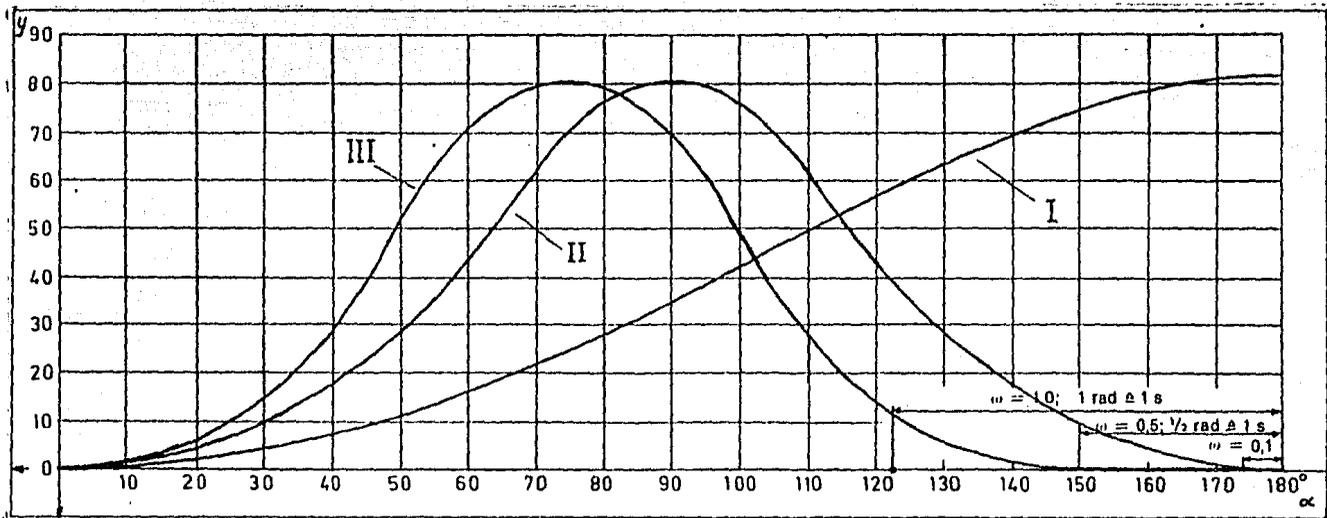
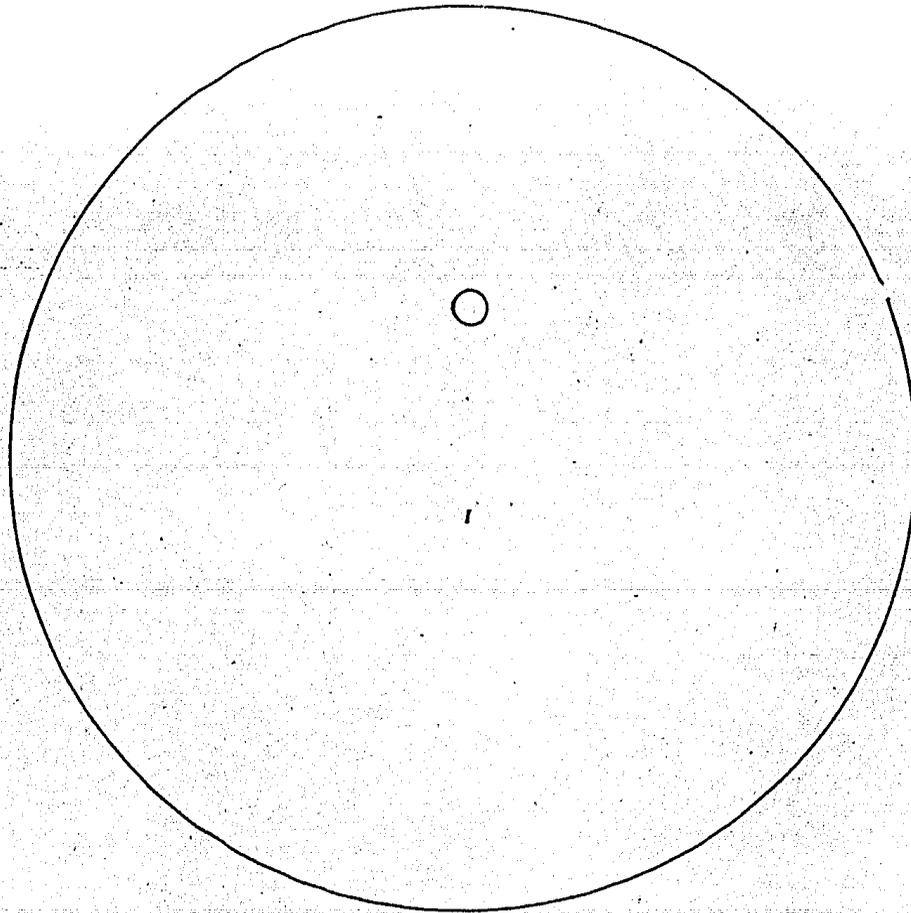


Figura 4.2.2

Diagrama de desplazamiento del seguidor para los levas I, II y III.



*Figura 4.2.3*  
*Perfil de la leva I*

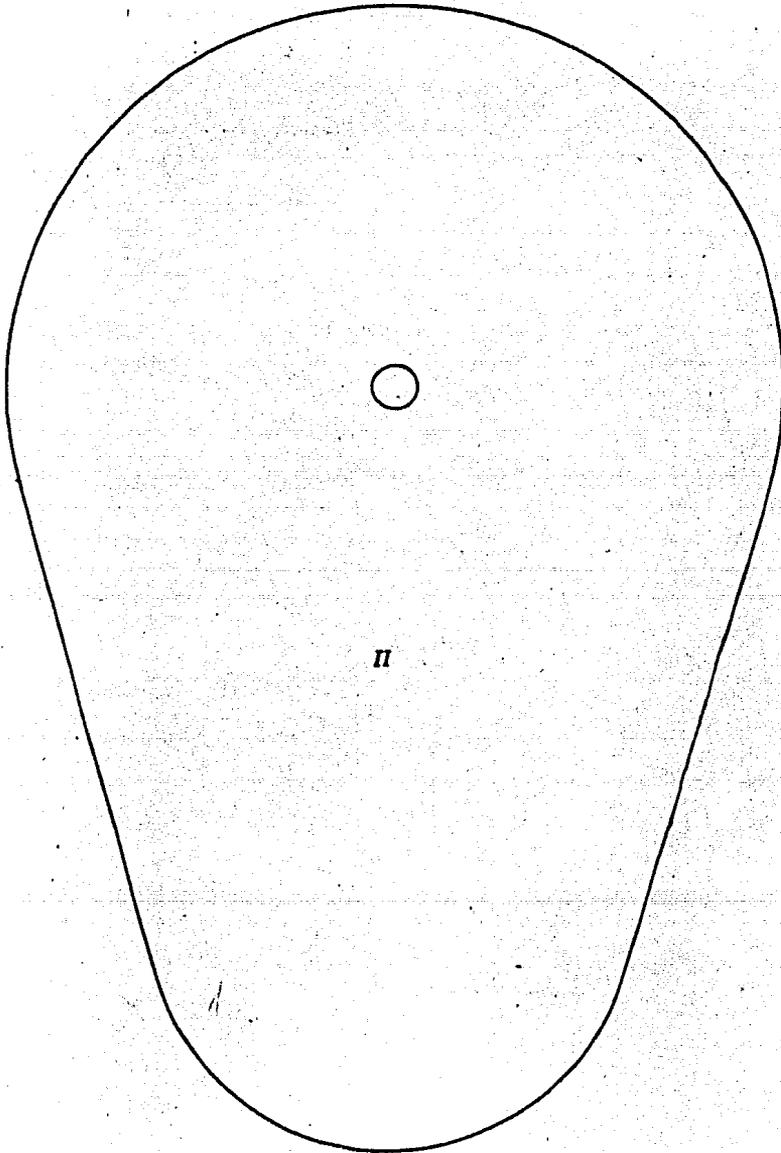
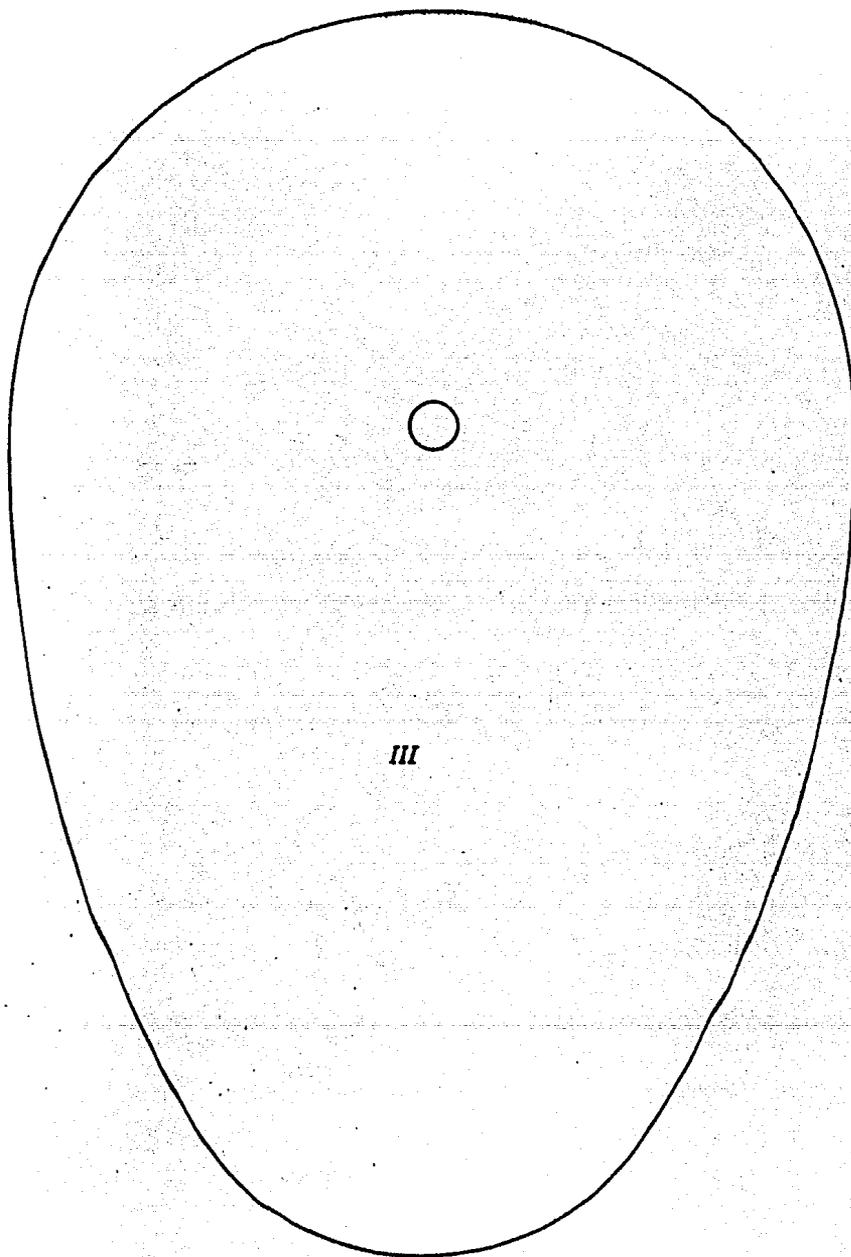


Figura 4.2.4  
Perfil de la leva  $\Pi$



*Figura 4.2.5*

*Perfil de la leva III*

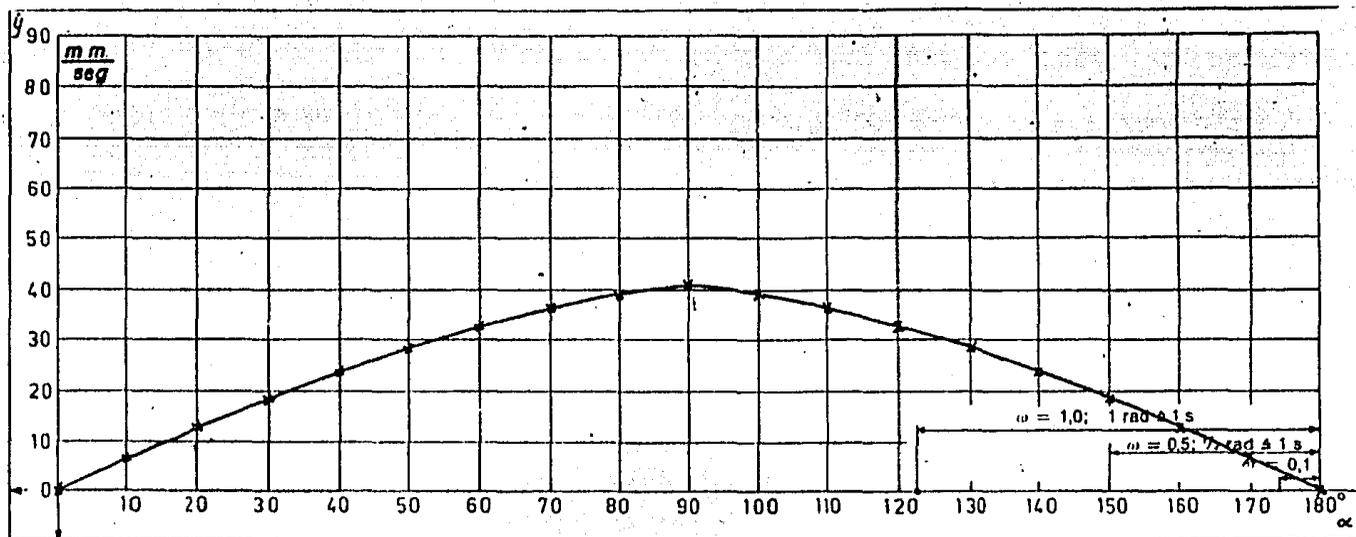


Figura 4.2.6

Gráfica de velocidad del seguidor contra ángulo de giro de la leva I.

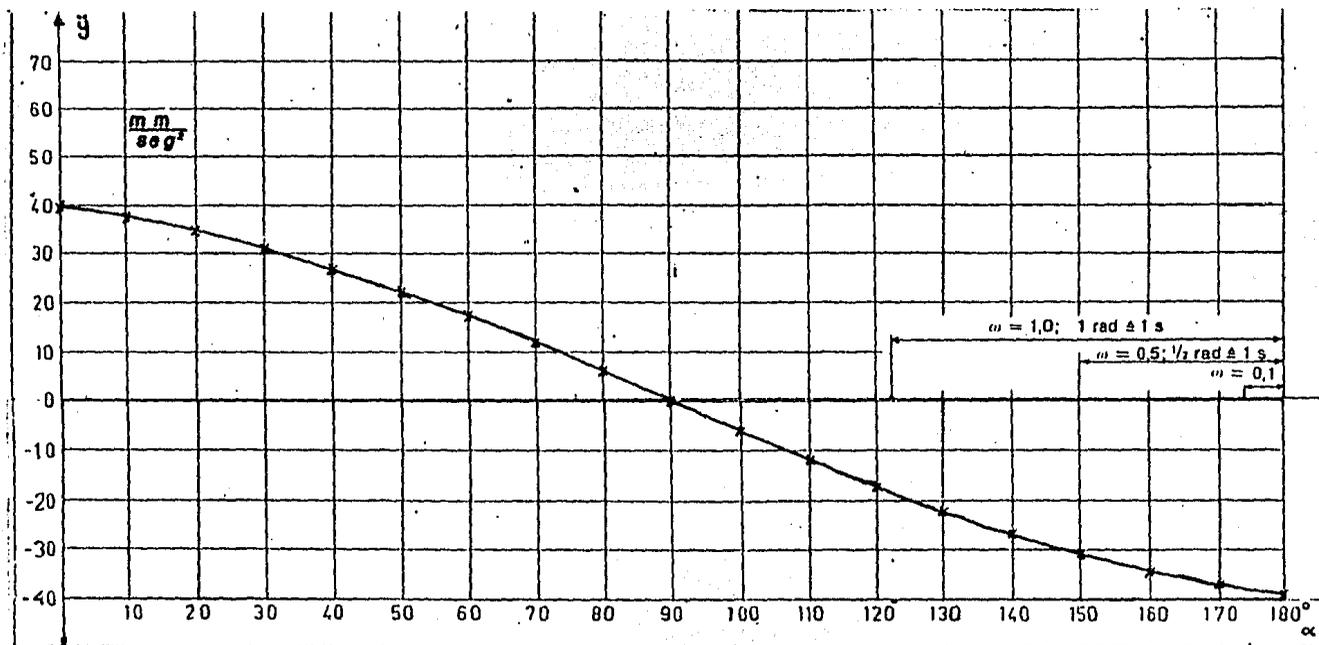


Figura 4.2.7

Gráfica de aceleración del seguidor contra ángulo de giro de la leva I.

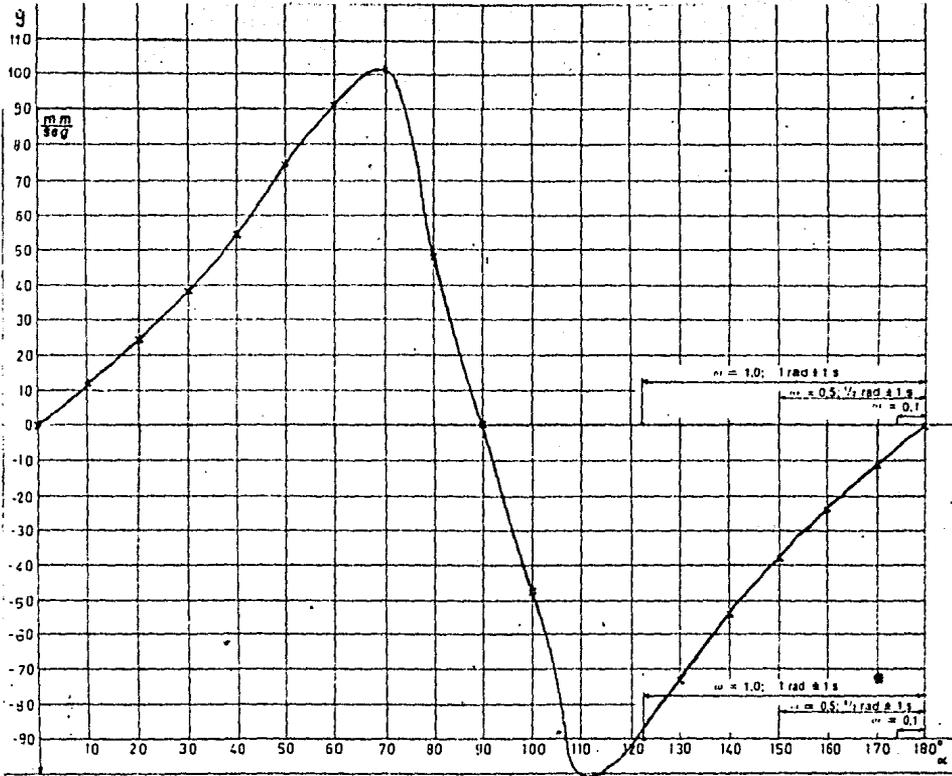


Figura 4.2.B

Gráfica de velocidad del seguidor contra ángulo de giro de la leva II.

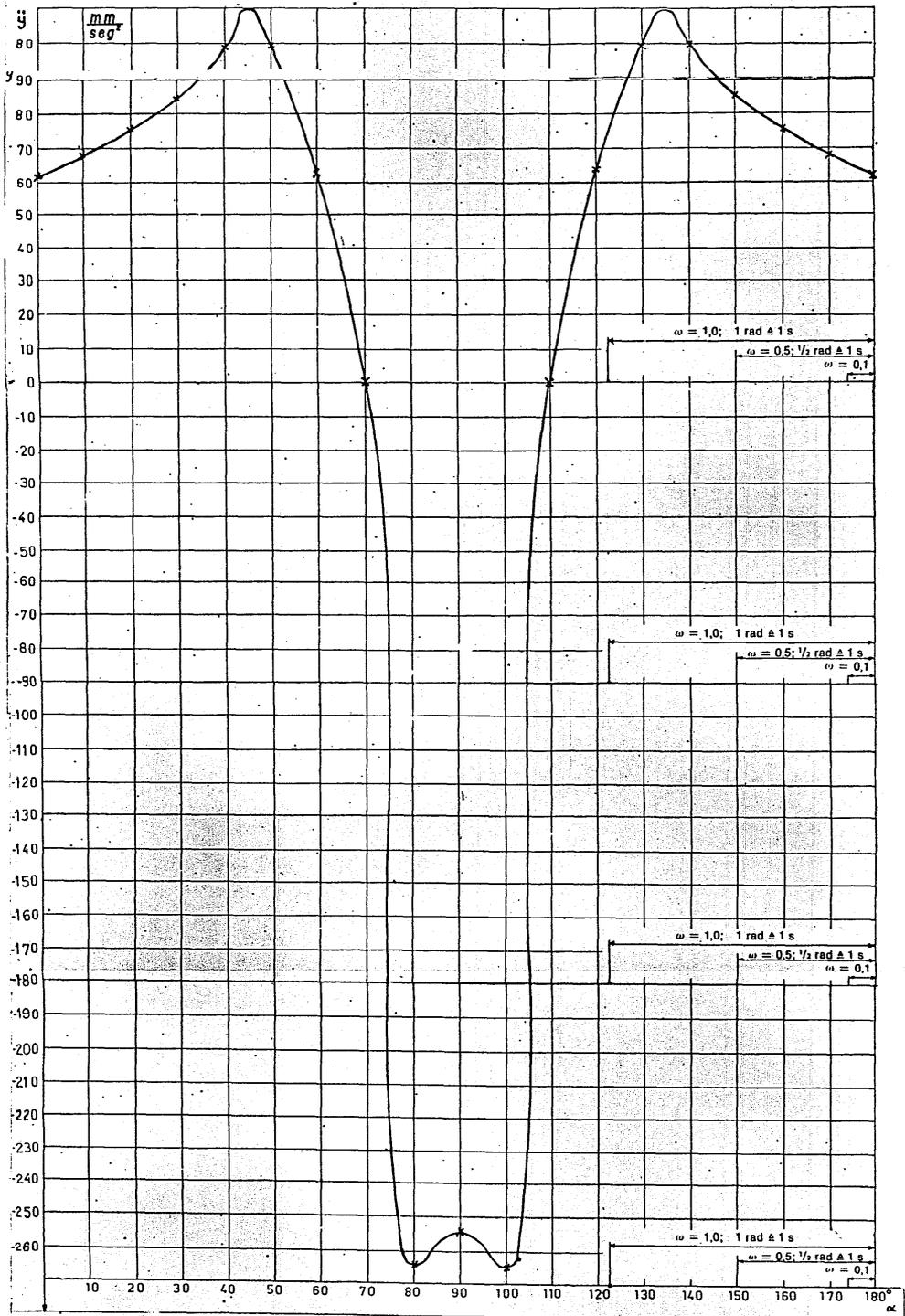


Figura 4.2.9

Gráfica de aceleración del seguidor contra ángulo de giro de la leva II.

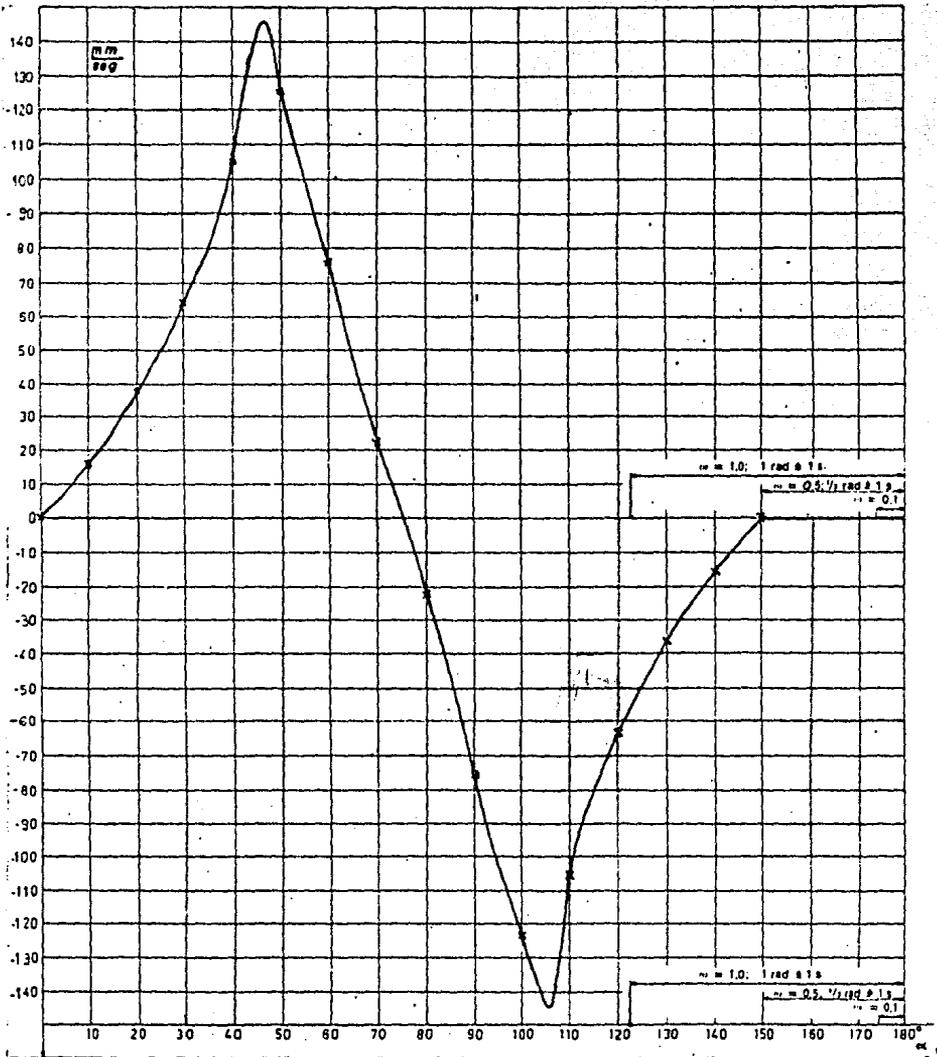


Figura 4.2.10

Gráfica de velocidad del seguidor contra ángulo de giro de la leva III.

## 4.2.5.- RESULTADOS

## Leva I.-

Para la leva I, se tiene un movimiento de ascenso de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  de desplazamiento angular de la leva y un movimiento de descenso simétrico de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ , alcanzándose un desplazamiento máximo del seguidor de 82 mm (figura 4.2.2.).

La figura 4.2.6 nos muestra la velocidad del seguidor ( $\dot{y}$ ) en mm/seg (considerando una velocidad angular unitaria de la leva I) contra el ángulo de desplazamiento de la leva ( $\alpha$ ) en grados.

Solo se observa graficada la velocidad del seguidor para  $-180^\circ$  de rotación de la leva, teniéndose una velocidad máxima de 42 mm/seg aproximadamente, alcanzada a  $90^\circ$  de ángulo de giro de la leva.

La curva de velocidad del seguidor para la rotación de la leva de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ , es simétrica a la de la figura 4.2.6 sólo que las velocidades son negativas.

La figura 4.2.7 nos muestra la aceleración del seguidor ( $\ddot{y}$ ) en mm/seg<sup>2</sup> contra el ángulo de desplazamiento de la leva ( $\alpha$ ) en grados. Se graficó la aceleración del seguidor para  $180^\circ$  de rotación de la leva, obteniéndose una aceleración máxima de 39 mm/seg<sup>2</sup> a los  $180^\circ$  de giro de la leva.

Para esta curva se tiene también una aceleración nula a los  $90^\circ$  de giro de la leva.

La curva de aceleración del seguidor para la rotación de la leva de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ , es simétrica a la de la figura 4.2.7, teniendo una aceleración de  $-39$  mm/seg<sup>2</sup> a los  $180^\circ$  y de  $39$  mm/seg<sup>2</sup> a los  $360^\circ$ , con aceleración nula a los  $270^\circ$  de giro de la leva.

## Leva II.-

Para la leva II, se tiene un movimiento de ascenso de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  de rotación de la leva un movimiento de descenso simétrico de  $90^\circ$  a  $180^\circ$  y un reposo de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ , obteniéndose un des -

plazamiento máximo de 30 mm a los  $90^\circ$  de giro de la leva (figura 4.2.2)

La figura 4.2.3 nos muestra la velocidad del seguidor ( $\dot{y}$ ) - en mm/seg contra el ángulo de giro ( $\alpha$ ) en grados.

Para la figura 4.2.3 se graficó la velocidad del seguidor de  $0^\circ$  a  $130^\circ$  de rotación de la leva únicamente puesto que para los restantes  $130^\circ$  de giro de la leva se tiene una velocidad y aceleración nula por no existir desplazamiento del seguidor.

Se observa en la figura 4.2.3 que se tiene una velocidad máxima de  $103$  mm/seg a  $68^\circ$  y de  $-103$  mm/seg a  $112^\circ$  de giro de la leva aproximadamente con velocidades nulas a  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  y de  $-130^\circ$  en adelante.

La figura 4.2.9 muestra la aceleración del seguidor ( $\ddot{y}$ ) en mm/seg<sup>2</sup> contra el ángulo de giro de la leva ( $\alpha$ ) en grados.

Se puede observar que se tienen aceleraciones máximas positivas de  $90$  mm/seg<sup>2</sup> aproximadamente a  $45^\circ$  y  $135^\circ$  respectivamente y aceleraciones máximas negativas de  $-265$  mm/seg<sup>2</sup> aproximadamente a  $80^\circ$  y  $100^\circ$  respectivamente del ángulo de giro de la leva.

### Leva III.-

Para la leva III se tiene un movimiento de ascenso de  $0^\circ$  a  $-75^\circ$ , descenso de  $75^\circ$  a  $150^\circ$ , terminando con un movimiento de reposo de  $150^\circ$  a  $360^\circ$ . Obteniéndose un desplazamiento máximo de 30 mm. La figura 4.2.10 muestra la curva de velocidad del seguidor ( $\dot{y}$ ) en mm/seg contra el ángulo de giro de la leva ( $\alpha$ ) en grados. En esta curva se observan las velocidades máximas alcanzadas:  $145$  mm/seg a  $47^\circ$  y  $-145$  mm/seg a  $113^\circ$  aproximadamente, con velocidades nulas a  $0^\circ$ ,  $75^\circ$  y de  $150^\circ$  en adelante.

La curva de aceleración no se muestra por ser similar a la figura 4.2.7 teniéndose el movimiento de  $0^\circ$  a  $150^\circ$  únicamente.

#### 4.2.6.- CONCLUSION

1.- A partir de los diagramas de desplazamientos obtenidos en el Analizador, para 3 perfiles de levas diferentes, podemos encontrar la velocidad y aceleración del seguidor mediante derivación gráfica.

NOTA: En las hojas de diagramas vienen 3 puntos diferentes marcados sobre la abscisa inferior, estos puntos son útiles para la derivación gráfica (véase anéndice de la práctica 2.1), trasladando pendientes de diferentes puntos de una curva a estos puntos y proyectándolos sobre la ordenada de la derecha de el diagrama, podemos medir velocidades y aceleraciones del seguidor para diferentes ángulos de giro de la leva, suponiendo  $\omega = 1.0$ ;  $1 \text{ rad} \triangleq 1 \text{ seg}$ ,  $\omega = 0.5$ ;  $1/2 \text{ rad} \triangleq 1 \text{ seg}$ , o  $\omega = 0.1$ ;  $1/10 \text{ rad} \triangleq 1 \text{ seg}$ .

2.- Cuando el radio de curvatura del perfil de la leva es constante, se tiene un movimiento de reposo; es decir no hay desplazamiento del seguidor, lo cual se puede observar en los perfiles de las levas II y III.

3.- En las gráficas de velocidad y aceleración para las levas I, II y III, se observa que en los puntos de velocidad nula se tienen aceleraciones máximas y viceversa.

#### COMENTARIO

Como ejercicio, se sugiere obtener por medio de un método de dibujo, los perfiles de las levas I, II y III a partir de sus respectivos diagramas de desplazamiento (figura 4.2.2).

## PRACTICA 4.3

## ANALIZADOR DE ENGRANES

## 4.3.1.- INTRODUCCION

Los engranes se emplean comúnmente para transmitir movimiento y potencia mecánica proveniente de una flecha de entrada a una flecha de salida.

En comparación con la transmisión por fricción o bandas, se diferencian en que se adaptan especialmente donde se requiere una relación exacta de velocidad.

Un tren de engranes es el acoplamiento entre dos o más engranes. En la mayoría de las aplicaciones reales, los motores proporcionan potencia mecánica a una velocidad angular demasiado alta, y por lo mismo con un par muy pequeño. Con un tren de engranes se logra disminuir la velocidad angular y aumentar el par al valor deseado.

Existe una diferencia esencial de funcionamiento entre engranes y levas, ésta consiste en que la reducción de velocidad en un tren de engranes es constante, mientras que en las levas en general no lo es.

## 4.3.2.- OBJETIVO

Analizar un tren simple de engranes cilíndricos de dientes rectos.

## 4.3.3.- EQUIPO

Analizador de engranes que consta de :

- . base de metal
- . disco de metal dentado
- . placa de acrílico dentada
- . 3 micas modelo para los engranes (A, B y C)
- . varilla sujetadora
- . cremallera de acrílico (herramienta)

# TERMINOLOGIA DE UN ENGRANAJE

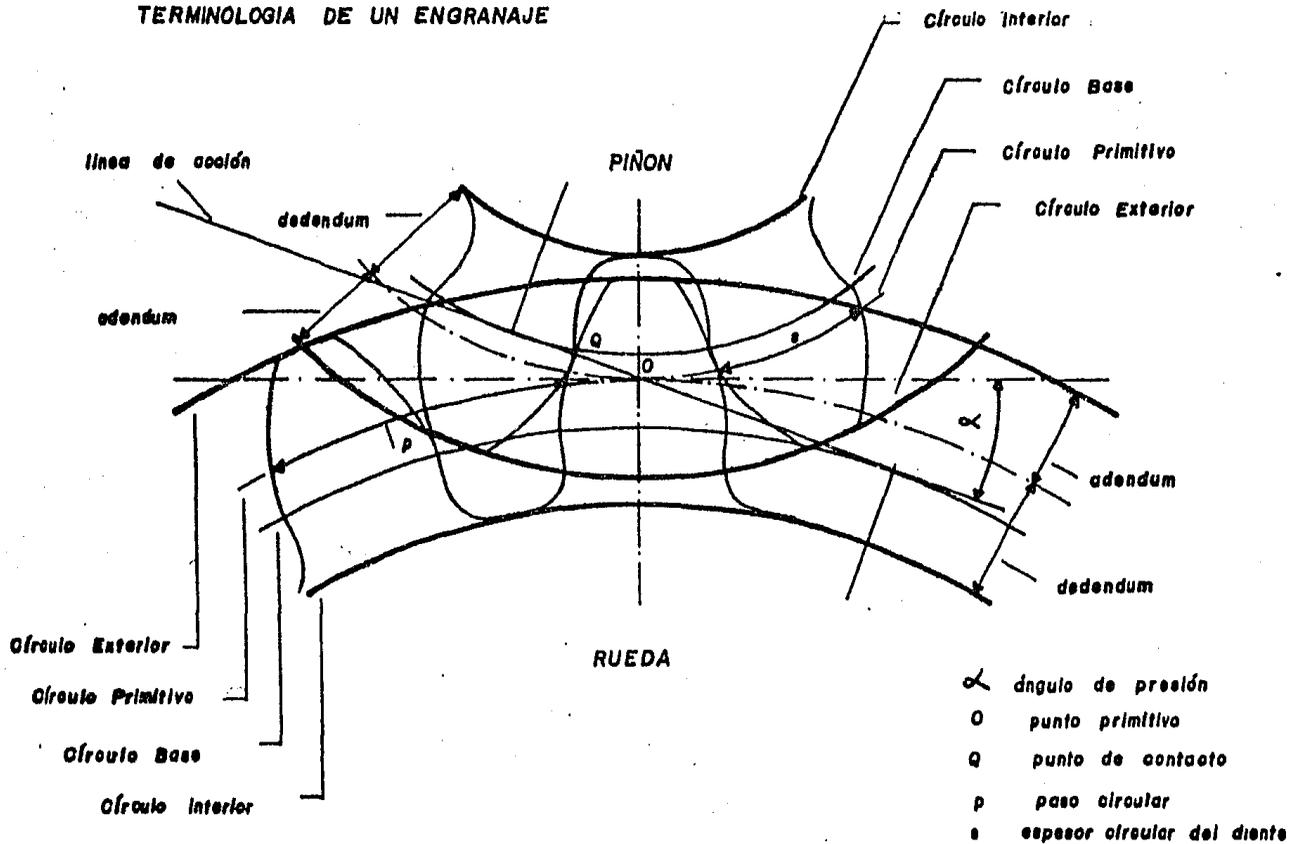


Figura 4.3.1

# HERRAMIENTA O UTIL DE CREMALLERA

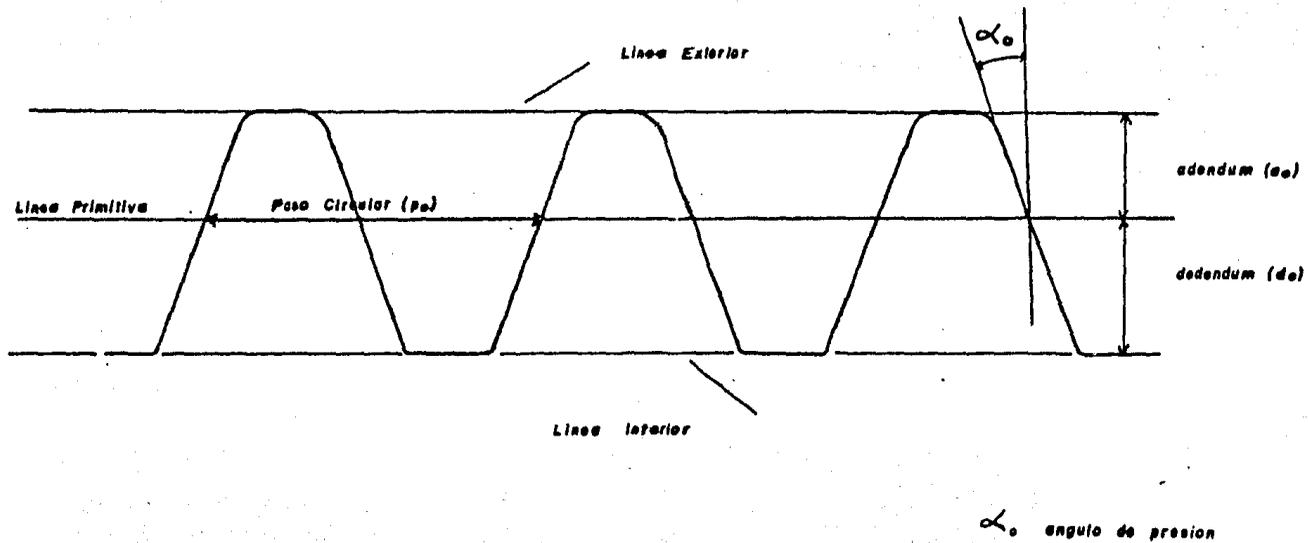


Figura 4.3.2

- . 6 secciones de engranes (A1, A2, B1, B2, C1 y C2)
- . discos de cartón

#### 4.3.4.- DEFINICIONES

Con base a las figuras 4.3.1 y 4.3.2 que nos representan la terminología de un engranaje y de la herramienta tenemos :

- Círculo Primitivo - es el círculo teórico, base de todos los cálculos.
- Círculo Exterior - es el que limita los extremos exteriores de los dientes.
- Círculo Interior - es el que limita los fondos de los dientes
- Círculo Base - es el círculo empleado como base para generar las involutas
- Paso Circular - es la distancia, medida sobre el círculo primitivo, entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos.
- Adendum - es la distancia radial entre el círculo primitivo y el círculo exterior
- Dedendum - es la distancia radial entre el círculo primitivo y el círculo interior .
- Espesor circular del diente - es la anchura del diente (magnitud de arco) medida sobre el círculo primitivo.
- Línea de acción - línea tangente a los círculos bases que pasa por el punto primitivo
- Angulo de presión - ángulo formado entre la línea tangente a los círculos primitivos y la línea de acción.

Punto primitivo - es el punto de tangencia de los círculos primitivos.

Módulo - es el cociente entre el diámetro primitivo y el número de dientes. Nos indica cuántos milímetros corresponden en el diámetro primitivo a cada diente.

#### 4.3.5.- NOTACIONES

En esta práctica utilizaremos las siguientes notaciones

Módulo de la herramienta	$m_o$
Módulo de los engranes	$m$
Angulo de presión para la herramienta	$\alpha_o$
Angulo de presión para los engranes	$\alpha$
Paso circular de la herramienta	$p_o$
Paso circular de los engranes	$p$
Adendum de los engranes	$a$
Dedendum de los engranes	$d$
Adendum de la herramienta	$a_o$
Dedendum de la herramienta	$d_o$
Espesor circular del diente	$s$
Distancia entre centros	$C$
Número de dientes de la rueda pequeña	$Z_1$
Número de dientes de la rueda grande	$Z_2$
Punto primitivo	$O$
Punto de Contacto	$Q$
Radio del círculo primitivo	$R_p$
Radio del círculo exterior	$R_e$
Radio del círculo interior	$R_i$
Radio del círculo base	$R_b$

Factor de corrección o modificación  
del perfil del diente de la rueda -  
pequeña x<sub>1</sub>

Factor de corrección o modificación  
del perfil del diente de la rueda -  
grande x<sub>2</sub>

Radio de la nariz de la herramienta r

#### 4.3.6.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

##### EXPERIMENTO I

##### MANUFACTURA DE LAS RUEDAS DENTADAS

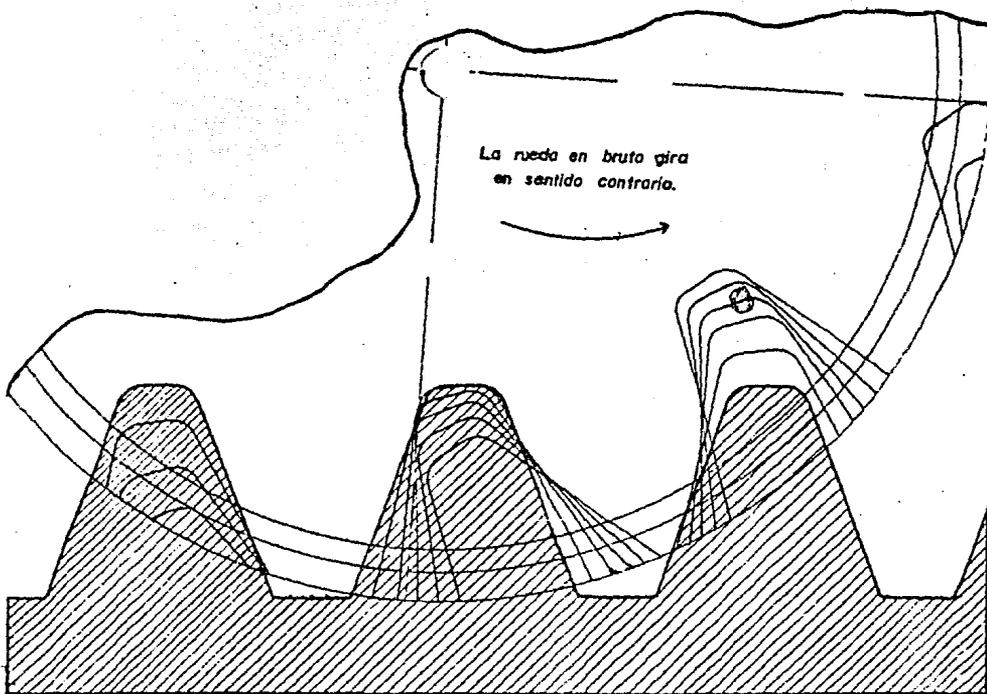
##### TEORIA

Hay muchas formas de obtener los dientes en los engranes.

En efecto, pueden obtenerse por fundición colando en arena, en molde, por fundición de precisión a modelo perdido, colocando en coquillas, o bien fundiendo a presión o mediante fundición centrífuga. También pueden obtenerse por pulvimetalurgia o por extrusión. Normalmente, sin embargo, todos los engranajes proyectados para transmitir cargas pesadas respecto de su tamaño se hacen de acero y se mecanizan con arranque de viruta empleando útiles de forma o métodos de generación. En los útiles de forma el hueco entre dientes toma la forma exacta del útil. En el método por generación se consigue la forma exacta del diente mediante un movimiento relativo del cilindro bruto en el que se tallan los dientes respecto del útil que, normalmente tiene una forma muy distinta al perfil deseado en los dientes.

En esta práctica se emplea el Mortajado que es un método muy favorable de obtener dientes por generación.

El útil de corte puede ser un piñón o una cremallera. Para nuestro caso utilizaremos un útil de cremallera. La cremalle-



La cuchilla cremallera se mueve en dirección normal a esta página con movimiento alternativo.

Figura 4.3.3

Martajado de una rueda dentada con cuchilla cremallera.

ra (figura 4.3.3), con movimiento alternativo de corte, se introduce en la rueda en bruto hasta conseguir que el círculo primitivo de la rueda y la línea primitiva de la cremallera sean tangentes. Entonces después de cada carrera de corte, la rueda en bruto y el útil generador ruedan ligeramente en sus círculos primitivos. Cuando la rueda en bruto y el útil de tallar han girado una cantidad igual al paso circular, el cortador se devuelve a su punto de partida y se continúa el proceso hasta que se termina de tallar el último diente. En este procedimiento sólo se necesita un útil de corte para cada módulo y con él pueden tallarse ruedas de cualquier número de dientes.

#### OBJETIVO

Mostrar el proceso de manufactura de los dientes de un engrane por el método de Mortajado.

#### DESARROLLO

- 1.- Seleccione las secciones de engranes A1 y A2.
- 2.- Ajuste la mica modelo para las ruedas A sobre la placa dentada de acrílico con dos tornillos situados en la parte superior de la base metálica.
- 3.- Coloque A1 sobre el punto AB de la base metálica.
- 4.- Coloque la herramienta o útil de cremallera de acrílico sobre la varilla sujetadora de manera que la línea exterior de la cremallera sea tangente al círculo interior de el engrane A1. (figura 4.3.4).
- 5.- Al mover entonces la herramienta ésta generará los dientes del engrane A1 de manera análoga al método de Mortajado explicado en la teoría.
- 6.- Coloque ahora el engrane A2 sobre el eje central del disco

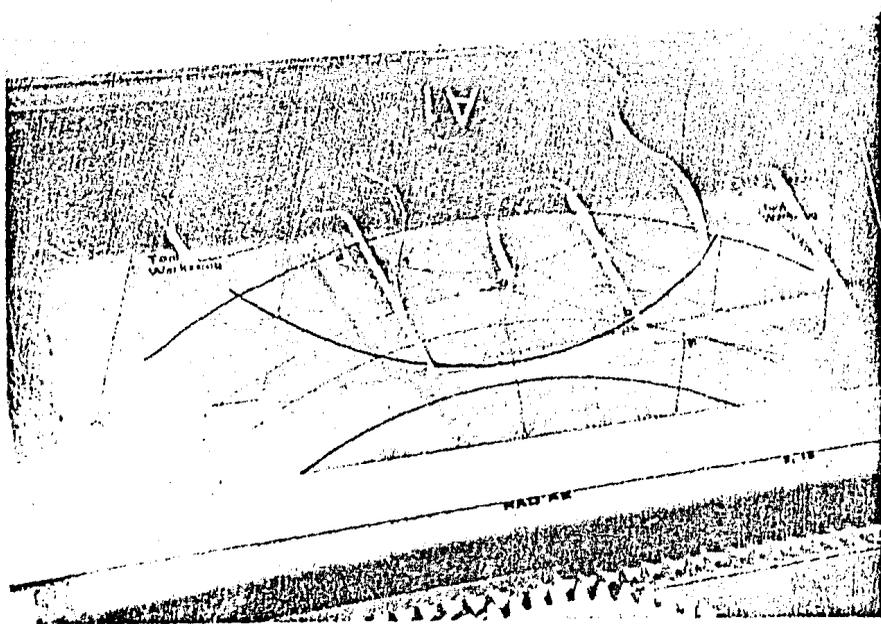


Figura 4.3.4

Manufactura de las Ruedas Dentadas.

dentado pero sin atornillarlo.

7.- Repita el punto 4 con el engrane A2.

8.- Observe de nuevo, al mover la herramienta cómo se generan los dientes del engrane.

NOTA: Especificaciones para la herramienta o util de cremalle -  
ra empleada para todas las micas modelos para los engranes A, -  
B y C :

$$m_o = 20 \text{ mm} \qquad d_o = 1.25 m_o = 1.25(20) = 25 \text{ mm}$$

$$\alpha_o = 20^\circ \qquad a_o = m = 20 \text{ mm}$$

$$r = 0.25 m_o = 0.25(20) = 5 \text{ mm}$$

$$p_o = \pi m_o = \pi(20) = 62.8 \text{ mm}$$

## EXPERIMENTO II

### DEMOSTRACION DE LA MICA MODELO PARA LAS RUEDAS A

#### OBJETIVO

Observar los puntos de interferencia entre dos ruedas denta-  
das.

#### DESARROLLO

1.- Ajuste la mica modelo para las ruedas A, sobre la placa den-  
tada de acrílico.

2.- Coloque la sección de engrane A1 sobre el punto AB de la -  
base metálica.

3.- Coloque la sección de engrane A2 sobre el eje central del-  
disco dentado pero sin atornillar.

Teniendo el engranaje listo como lo muestra la figura 4.3.5- haga girar A1 en el sentido contrario a las manecillas del reloj y en consecuencia A2 girará en sentido manecillas, y realice el siguiente análisis.

- Identifique, los círculos Interiores, Exteriores, Bases y Primitivos para cada uno de los engranes.

- Observe cómo el punto de contacto entre dos dientes siempre se desplaza a lo largo de la línea de acción.

- Observe los puntos donde se inicia el contacto entre dientes y donde termina.

- Identifique los adendums y dedendums y ángulo de presión.

#### CALCULOS

Entonces para los engranes A1 y A2 sin modificaciones del perfil de sus dientes, se tiene :

$$m_o = 20 \text{ mm/diente}$$

$$\alpha_o = 20^\circ$$

$$P_o = \pi m_o = \pi(20) = 62.8 \text{ mm}$$

$$Z_1 = 8 \text{ dientes}$$

$$Z_2 = 16 \text{ dientes}$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

Por lo tanto para ambas ruedas

$$m = 20 \text{ mm/diente}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$p = 62.8 \text{ mm}$$

$$s = p/2 = 31.4 \text{ mm}$$

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$d = 25 \text{ mm}$$

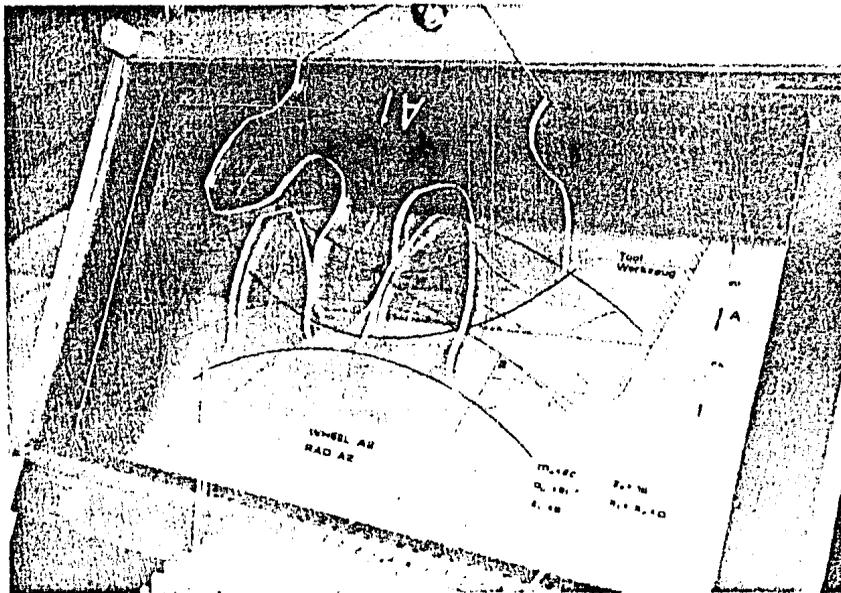


Figura 4.3.5

*Demostración de la Mica Modelo para las Ruedas A.*

$$C = \frac{m (Z_1 + Z_2)}{2} = \frac{20 (3 + 16)}{2} = 240 \text{ mm}$$

Para la rueda A1

$$R_p = \frac{Z_1 m}{2} = \frac{3 (20)}{2} = 30 \text{ mm}$$

$$R_i = R_p - d = 30 - 25 = 55 \text{ mm}$$

$$R_e = R_p + a = 30 + 20 = 100 \text{ mm}$$

$$R_b = R_p \cos \alpha_o = 75.18 \text{ mm}$$

Para la rueda A2

$$R_p = \frac{Z_2 m}{2} = \frac{16 (20)}{2} = 160 \text{ mm}$$

$$R_i = R_p - d = 160 - 25 = 135 \text{ mm}$$

$$R_e = R_p + a = 160 + 20 = 180 \text{ mm}$$

$$R_b = R_p \cos \alpha_o = 160 \cos 20^\circ = 156.36 \text{ mm}$$

Se observa sobre la mica modelo para las ruedas A (figura - 1.3.6) que al hacer girar los engranes A1 y A2, el punto de contacto de un diente de A1 con otro diente de A2 empieza en el punto a y termina en el punto b. También en la misma mica, la línea de acción es tangente a los dos círculos base de los engranes A1 y A2, en los puntos 1 y 2, estos dos puntos representan los límites extremos de la longitud de acción y se les llaman puntos de "interferencia".

Una involuta comienza en el círculo base y se genera hacia afuera, en consecuencia, es imposible tener una involuta dentro del círculo base. Si los dientes tienen tal proporción que el inicio de contacto ocurre antes que se encuentre el punto de interferencia, entonces la porción involuta del engrane movido se

acopla con una porción involuta <sup>no</sup> del engrano motor, es decir, la punta del diente movido penetra o recorta el flanco del diente del motor, y este es el caso que se presenta en el Experimento II y que se observa en la figura 4.3.6.

La interferencia de involuta o de funcionamiento es indeseable por varias razones. La interferencia y el rebaje resultante no solamente debilitan el diente del piñón sino que también pueden quitar una pequeña porción de la involuta próxima al círculo base, lo que puede reducir seriamente la longitud de acción.

### EXPERIMENTO III

#### CORRECCION DEL PERFIL DEL DIENTE SIN VARIAR LA DISTANCIA ENTRE CENTROS

##### TEORIA

La modificación o corrección de perfiles de dientes se hace principalmente por tres razones :

Eliminar la interferencia de tallado, prevenir la interferencia de funcionamiento y obtener una relación de contacto razonable.

NOTA: Cuando los dientes se tallan por un procedimiento de generación, la interferencia de funcionamiento, o de materia real, se elimina totalmente debido a que la herramienta de tallar suprime la parte de metal que estorba. Este efecto recibe el nombre de erosionado o "interferencia de tallado" y si es pronunciado se obtienen dientes muy debilitados.

Para reducir la interferencia que se presenta con los engranes A1 y A2 vamos a corregir el perfil de los dientes pero sin variar la distancia entre centros de los engranes.

Se puede obtener una mejor forma del diente, retirando la he

(MICA MODELO PARA LAS RUEDAS A)  
**ENGAGEMENT PATTERN A-WHEEL**  
**ENGRIFFMUSTER A-RÄDER**

(Perfil del diente sin modificación)  
 Non-modified profile tooth  
 Nicht profilveränderter Zahn

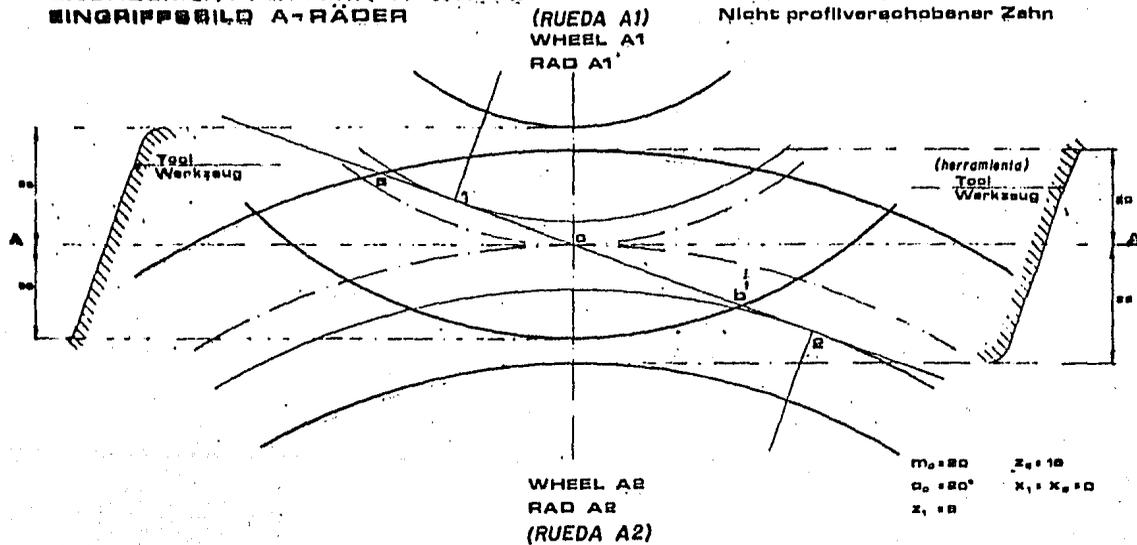


Figura 4.3.6

herramienta talladora de éste (figura 4.3.7a), el efecto de esta retirada es crear manecillas activos de involutas más alejadas - de la circunferencia base. Esto produce entonces dientes más fuertes.

**Nota:** Para la siguiente parte teórica utilizaremos el término - "piñón" para la rueda más pequeña del engranaje y "rueda" para la más grande del mismo engranaje.

Si la herramienta talladora (cremallera) se introduce más - de lo normal en el cilindro en bruto de la rueda y precisamente una distancia igual a la que se retiró al tallar el piñón, se - utilizará más dedendum en la rueda (menos dedendum en el piñón) y simultáneamente se habrá conseguido que la distancia entre - centros no haya variado.

Estos sistemas se suelen llamar de adendum largo y corto, pero según norma, se denominan corregidos sin variación de la - distancia entre centros.

En los sistemas así corregidos no hay cambio en los círculos primitivos y bases ni en el ángulo de presión.

## OBJETIVO

Observar el sistema de adendum largo y corto para corregir - la interferencia entre dientes.

## DESARROLLO

- 1.- Seleccione las secciones de engranes B1 y B2
- 2.- Coloque la mica modelo para las ruedas B sobre la placa - dentada de acrílico y ajústala con los tornillos.
- 3.- Coloque B1 en el punto AB del bastidor de metal y B2 en el eje central de engrane metálico sin atornillar.
- 4.- Teniendo el engranaje listo, haga girar B1 en el sentido - contrario de las manecillas del reloj y en consecuencia B2 gira

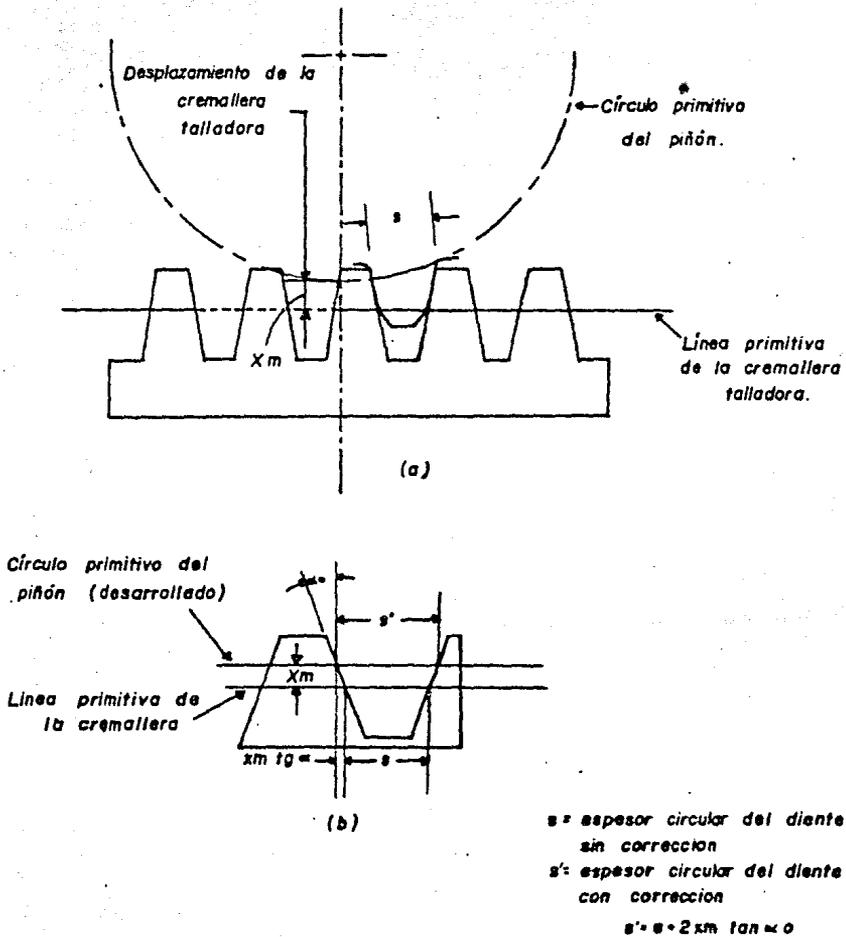


Figura 4.3.7

rá en sentido manecillas.

NOTA: Para entender bien la corrección que se ha hecho a los dientes de los engranes B1 y B2, se recomienda colocar la mica modelo para los engranes A debajo de la mica para los engranes B.

Ahora hagamos el siguiente análisis.

- En la mica para las ruedas B (figura 4.3.3) vemos que se han hecho modificaciones en los perfiles de los dientes,  $x_1 = +0.23$  y  $x_2 = -0.234$  donde  $x$  representa el factor de corrección.

El módulo de generación es el mismo que para las ruedas A,  $m_o = 20$ , así como el ángulo de presión de generación  $\alpha_o = 20^\circ$  y los números de dientes de los engranes.

- existe un desplazamiento ( $x_1, m_o$ ) de la cremallera talladora, retirándola de la rueda B1 y un desplazamiento ( $x_2, m_o$ ) de la misma cremallera introduciéndose en la rueda B2.

- Los círculos primitivos y bases de ambas ruedas corregidas B1 y B2 son los mismos que para las ruedas sin corrección A1 y A2 así como el ángulo de presión sigue siendo el mismo, puesto que se han generado con la misma herramienta.

- Los adendums y dedendums de ambas ruedas corregidas con respecto a las ruedas sin corregir, han variado así como los círculos interiores y exteriores de ambos engranes corregidos.

- La interferencia no ha desaparecido aunque sí ha disminuido puesto que la distancia del punto a al punto l en la mica B es menor que la distancia de a al punto l en la mica A, donde dicha distancia nos indica el grado de interferencia.

A manera de comprobación podemos efectuar los mismos pasos del Experimento I en su Desarrollo para cerciorarnos de que los engranes B1 y B2 han sido generados con la misma herramienta de cremallera.

(MICA MODELO PARA LAS RUEDAS B)  
**ENGAGEMENT PATTERN B-WHEEL**  
**EINGRIFFSBILD B-RÄDER**

(Perfil del diente con modificación pero sin  
 cambio en la distancia entre centros)

Modified-profile tooth with unchanged  
 centre distance

Profilverschobener Zahn mit  
 unverändertem Achsabstand

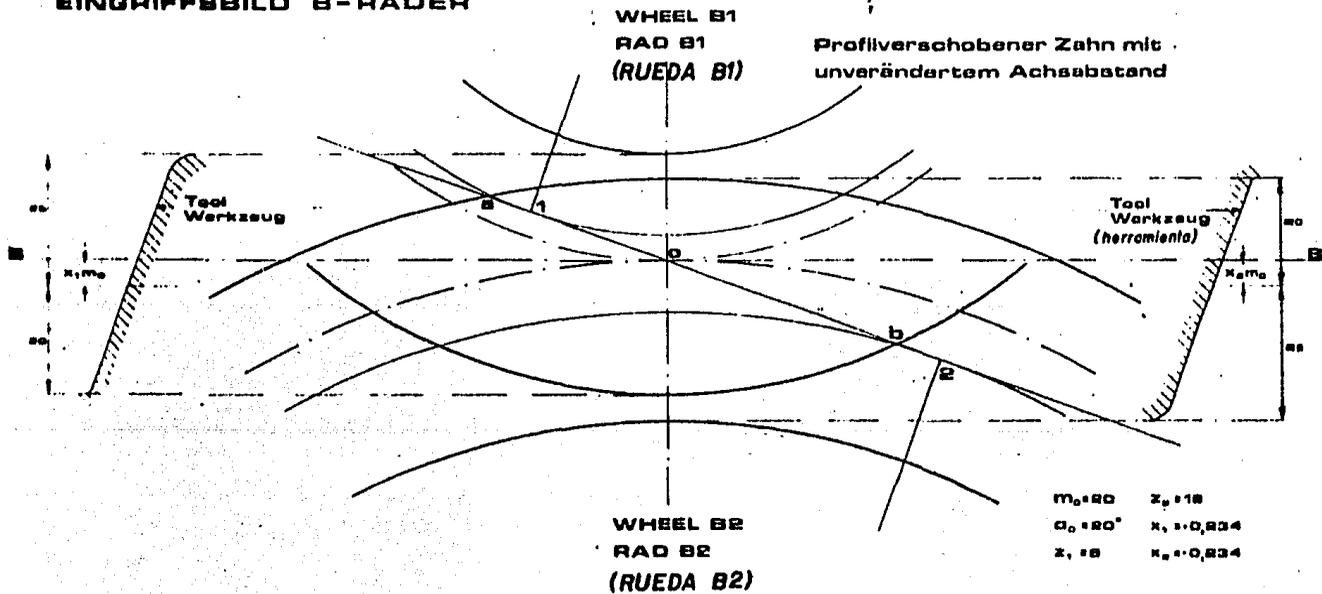


Figura 4.3.8

## CALCULOS

Para los engranes B1 y B2 con modificaciones del perfil de sus dientes, pero sin cambio en la distancia entre centros se tiene :

$$m_o = 20 \text{ mm/diente}$$

$$\alpha_o = 20^\circ$$

$$P_o = m = (20) = 62.8 \text{ mm}$$

$$Z_1 = 3 \text{ dientes}$$

$$Z_2 = 16 \text{ dientes}$$

$$x_1 = + 0.234$$

$$x_2 = - 0.234$$

$$m = 20 \text{ mm}$$

$$p = 62.8 \text{ mm}$$

$$C = \frac{m (Z_1 + Z_2)}{2} = \frac{20 (3 + 16)}{2} = 240 \text{ mm}$$

$$s = \frac{Z_1 m}{2} + 2 x_1 m \operatorname{tg} \alpha_o \quad (\text{ver fig 7b})$$

$$s = \frac{(3)20}{2} + 2 (0.234) (20) \operatorname{tg} 20^\circ$$

$$s_1 = 34.3 \text{ mm} \quad , \quad s_2 = 28.0 \text{ mm}$$

Para la rueda B1

$$R_p = \frac{Z_1 m}{2} = \frac{3 (20)}{2} = 30$$

$$R_i = R_o - d_o + x_1 m_o = 30 - 25 + (0.234) (20) = 59.63 \text{ mm}$$

$$R_e = R_p + a_o + x_1 m_o = 30 + 20 + (0.234) (20) = 104.63 \text{ mm}$$

$$R_b = R_p \cos \alpha_o = 75.18 \text{ mm}$$

$$a = a_{A1} + x_1 m_o = 20 + 0.234 (20) = 24.63 \text{ mm}$$

$$d = d_{A1} - x_1 m_o = 25 - 0.234 (20) = 20.32 \text{ mm}$$

Para la rueda B2

$$R_p = \frac{Z_2 m}{2} = \frac{16 \cdot (20)}{2} = 160 \text{ mm}$$

$$R_i = R_p - d_o - x_2 m_o = 160 - 25 - (0.234) (20) = 130.32 \text{ mm}$$

$$R_e = R_p + a_o - x_2 m_o = 160 + 20 - (0.234) (20) = 175.32 \text{ mm}$$

$$R_b = R_p \cos \alpha_o = 160 \cos 20^\circ = 156.36 \text{ mm}$$

$$a = a_{A2} - x_2 m_o = 20 - (0.234) (20) = 15.32 \text{ mm}$$

$$d = d_{A2} + x_2 m_o = 25 + (0.234) (20) = 29.68 \text{ mm}$$

#### EXPERIMENTO IV

#### CORRECCION DEL PERFIL DEL DIENTE CON VARIACION EN LA DISTANCIA ENTRE CENTROS

##### TEORIA

Cuando las ruedas dentadas deben engranar entre sí, o con otras ruedas mayores, y tienen un número pequeño de dientes, puede obtenerse una reducción en la interferencia y un aumento en la relación de contacto si se aumenta la distancia entre centros, aunque este sistema cambia las proporciones de los dientes y el ángulo de presión de funcionamiento de las ruedas.

Para reducir aún más la interferencia que se presenta con los engranes B1 y B2, vamos de nuevo a corregir el perfil de los dientes pero ahora variando la distancia entre centros de los engranes.

##### OBJETIVO

Observar el método de corrección del perfil del diente con variación en la distancia entre centros para corregir la interferencia entre dientes.

## DESARROLLO

- 1.- Seleccione las secciones de engranes C1 y C2.
- 2.- Coloque la mica modelo para las ruedas C sobre la placa -  
degradada y ajústela con tornillos.
- 3.- Coloque C1 en el punto C del bastidor de metal y C2 en el -  
eje del engrane metálico sin atornillar.
- 4.- Teniendo el engranaje listo, haga girar C1 en el sentido -  
contrario de las manecillas del reloj, y en consecuencia C2 en el -  
sentido manecillas.

NOTA: Para entender bien la corrección que se ha hecho a los -  
dientes de los engranes C1 y C2, y el cambio en la distancia en -  
tre centros, se recomienda colocar la mica modelo para los en -  
granes B debajo de la mica modelo para los engranes C.

Ahora observando hagamos el siguiente análisis.

- En la mica para las ruedas C (figura 4.3.9) vemos que se han -  
hecho modificaciones en los perfiles de los dientes,  $x_1 = 0.532$   
y  $x_2 = 0.064$ , el módulo de generación de la herramienta (crema -  
llera) es el mismo  $m_o = 20$  así como el ángulo de presión de ge -  
neración  $\alpha_o = 20^\circ$ , pero el módulo para los engranes ha variado  
 $m = 20.9$ , y también el ángulo de presión de funcionamiento de -  
los engranes  $\alpha = 25.75^\circ$ , esto debido al cambio de la distancia  
entre centros. Aunque el número de dientes de los engranes si -  
gue siendo el mismo.

- Existe un desplazamiento ( $x_1, m_o$ ) de la herramienta talladora  
retirándola de la rueda C1, y otro desplazamiento ( $x_2, m_o$ ) de la  
misma herramienta también retirándola de la rueda C2.

- Los círculos primitivos, interiores y exteriores de ambas -  
ruedas C1 y C2 han cambiado con respecto a las de las ruedas B1  
y B2, en consecuencia de la anterior los adendums y dedendums -

(MICA MODELO PARA LAS RUEDAS C)  
 ENGAGEMENT PATTERN C-WHEEL  
 EINGRIFFSBILD C-RÄDER

(Perfil del diente con modificación y  
 cambio en la distancia entre centros)

Modified-profile tooth with changed  
 centre distance

Profilverschobener Zahn mit  
 verändertem Achsabstand

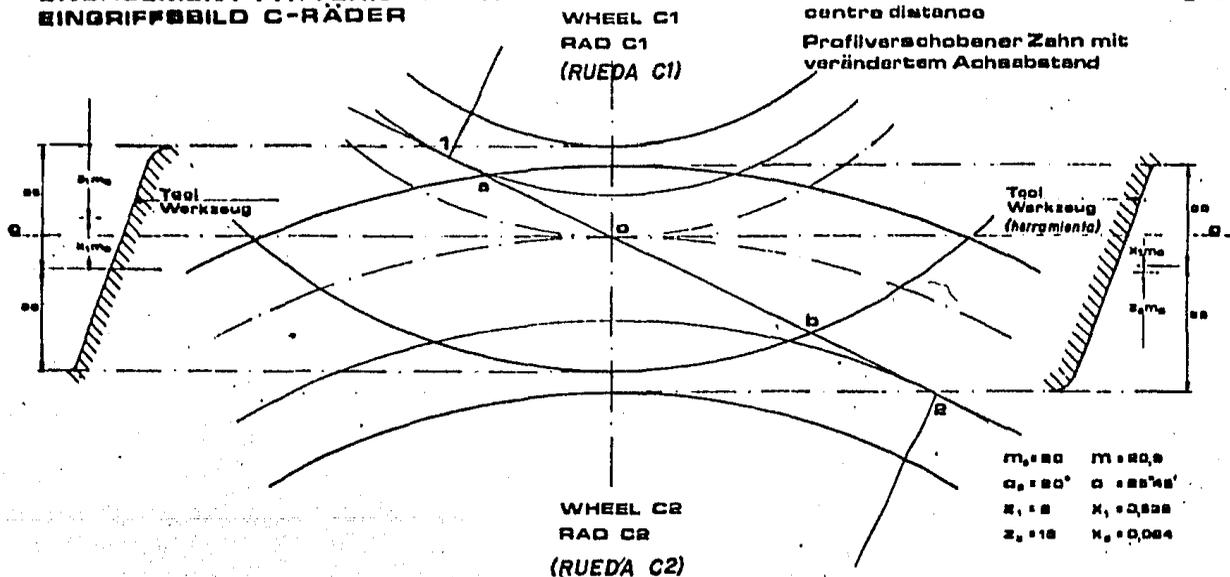


Figura 4.3.9

también son diferentes.

- El punto primitivo O, también ha variado con respecto al engranaje de las ruedas B.

- Los círculos bases son círculos fijos pues no cambian al modificar los dientes.

- La interferencia ha desaparecido puesto que el punto de contacto inicial entre los dientes comienza en "a" y éste está después del punto de interferencia l.

Podemos cerciorarnos también de que los engranes C1 y C2 han sido generados con la misma herramienta de cremallera que para los demás, siguiendo los mismos pasos del Desarrollo para el experimento I.

#### CALCULOS

Para los engranes C1 y C2 con modificaciones del perfil de sus dientes, y cambio en la distancia entre centros se tiene:

$$m_o = 20 \text{ mm/diente}$$

$$\alpha_o = 20^\circ$$

$$Z_1 = 3 \text{ dientes}$$

$$Z_2 = 16 \text{ dientes}$$

$$x_1 = +0.532$$

$$x_2 = +0.064$$

$$\text{función de evolvente} = ev \alpha = \tan \alpha - \alpha$$

$$\text{función de evolvente} = ev \alpha_o = \tan \alpha_o - \alpha_o$$

$$x_1 + x_2 = (Z_1 + Z_2) (ev \alpha - ev \alpha_o) / 2 \tan \alpha_o$$

$$0.532 + 0.064 = (3 + 16) (ev \alpha - 0.14904) / 2 \tan 20^\circ$$

$$\therefore ev \alpha = 0.033024$$

Del anéndice para funciones de evolventes de Shigley en su libro Análisis Cinemático de Mecanismos.

$$\alpha = 25.75^\circ$$

$$m = m_o \cos \alpha_o / \cos \alpha$$

$$m = 20.9 \text{ mm/diente}$$

$$C = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2}$$

$$C = \frac{20.9(3 + 16)}{2}$$

$$C = 250.8 \text{ mm}$$

$$p = \pi m = \pi(20.9) = 65.7 \text{ mm}$$

Para el engrane G1 se tiene

$$s = m (\pi(0.5) + 2 x_1 \tan \alpha_o) + Z_1 m (ev \alpha_o - ev \alpha)$$

$$s = 20.9 (\pi(0.5) + 2(0.532) \tan 20^\circ) + (3)(20.9) [0.914904 - 0.932974]$$

$$s = 38 \text{ mm}$$

$$R_D = \frac{Z_1 m}{2} - \frac{3(20.9)}{2} = 83.6 \text{ mm}$$

$$R_i = \frac{m_o Z_1}{2} - a_o + x_1 m_o = \frac{(20)(3)}{2} - 25 + (0.532)(20)$$

$$R_i = 65.64 \text{ mm}$$

$$R_e = \frac{m_o Z_1}{2} + d_o + x_1 m_o = \frac{20(3)}{2} + 20 + (0.532)(20)$$

$$R_e = 110.64 \text{ mm}$$

$$R_b = R_D \cos \alpha = 83.6 \cos 25.75^\circ = 75.13 \text{ mm}$$

Para el engrane G2 se tiene.

$$s = m ((0.5)z + 2(x_2) \tan \alpha_o) + 2x_2 m (ev \alpha_o - ev \alpha)$$

$$s = 20.9 ((0.5)z + 2(0.064) \tan 20^\circ) + (16)(20.9) [0.014904 - 0.032974]$$

$$s = 27.7 \text{ mm}$$

$$R_p = \frac{z_2 m}{2} = \frac{16(20.9)}{2} = 167.2 \text{ mm}$$

$$R_i = \frac{m z_2^2}{2} - a_o + x_2 m_o = \frac{20(16)}{2} - 25 + (0.064)(20) = 136.28 \text{ mm}$$

$$R_e = \frac{m z_2^2}{2} + d_o + x_2 m_o = \frac{20(16)}{2} + 20 + (0.064)(20) = 181.28 \text{ mm}$$

$$R_v = R_p \cos \alpha = 167.2 \cos 25.75^\circ = 150.36 \text{ mm}$$

#### EXPERIMENTO V

##### OBTENCION GRAFICA DE LOS PERFILES DE DIENTES PARA LAS RUEDAS A1, B1, C1 :

Este experimento sirve para ilustrar el principio de operación de generadores de dientes de engranes con herramienta o útil de crenallera.

#### OBJETIVO

Obtener gráficamente los perfiles de dientes para las ruedas A1, B1 y C1 .

#### DESARROLLO

1.- Inserte un disco de cartón en el eje central del engrane metálico, y adhiéralo con cinta adhesiva.

NOTA: El disco de cartón tiene dibujados en su superficie los círculos exteriores de los engranes A1, B1 y C1, en sus dimensiones reales. Además tiene especificadas las dimensiones de

los radios de los círculos exteriores y las correcciones para cada perfil de diente de los engranes antes mencionados.

2.- Coloque la varilla sujetadora a la placa dentada de acrílico y sobre ésta coloque la cremallera.

3.- Una con cinta adhesiva la cremallera y la varilla sujetadora para evitar que la cremallera se desplace.

4.- Seleccione una de las ruedas para la cual se desee generar los perfiles de sus dientes.

5.- Desplaze la cremallera y la varilla sobre la placa dentada de acrílico de tal manera que la línea interior de la cremallera sea tangente al círculo exterior de la rueda seleccionada.

6.- La forma del diente se determina moviendo la cremallera por medio de pequeños desplazamientos y dibujando en cada posición el perfil del diente de la cremallera sobre el disco de cartón como lo muestra la figura 4.3.10. El perfil del diente es la curva tangente al desarrollo de los contornos del diente de la cremallera (figura 4.3.11).

Si se desea comprobar la veracidad de los trazos, incerte en el centro del disco la sección de engrane para el cual se hizo el trazo (A1, B1 o C1) y compruebe la similitud de los perfiles de los dientes.

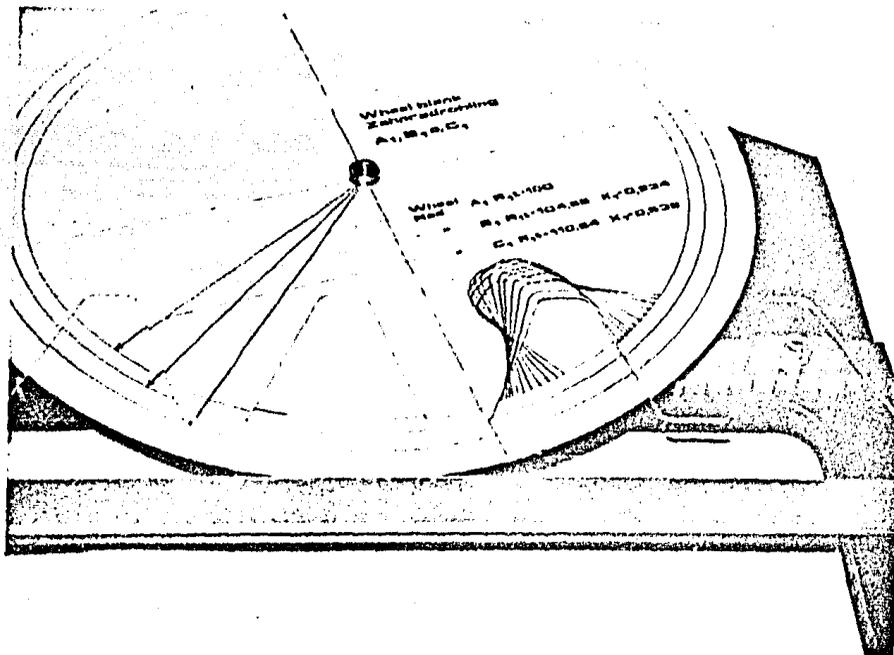


Figura 4.3.10

Obtención Gráfica de los Perfiles de Dientes.

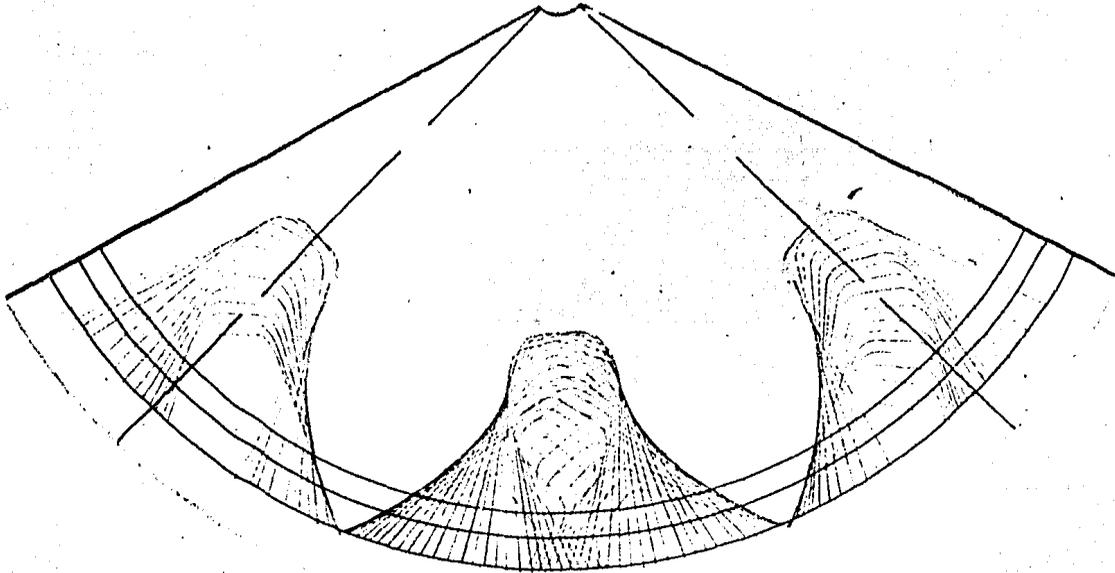


Figura 4.3.11

Trazo del perfil de los dientes del engrane  $C_1$

#### 4.3.7.- CONCLUSIONES

1.- En base a los experimentos llevados a cabo en esta práctica se observa más claramente la terminología principal de los engranajes cilíndricos de dientes rectos, así como algunas características de su funcionamiento.

2.- Se ha tratado de ilustrar lo mejor posible la manufactura de las ruedas dentadas por el método de generación principalmente el de "mortajado", para que de esta manera se capten mejor los otros métodos de generación muy importantes como son el de "fresado" y el método "Fellows". (figuras 4.3.12 y 4.3.13).

3.- Con el mismo útil o herramienta de cremallera se han generado los engranes A1 y A2, así como los de dientes modificados B1, B2, C1 y C2.

4.- Existe interferencia cuando los perfiles de los dientes en contacto no son conjugados y a lo largo de esta práctica se ha visto la forma de reducirla y eliminarla mediante correcciones en los perfiles de los dientes y cambio en la distancia entre centros, todo esto sin variar la herramienta o útil generador.

## APENDICE

### Generacion de un engrane cilindrico con una fresa (fig 4.3.12)

El método de tallar engranes por fresa es muy similar al método de generacion por cremallera o mortajado. El útil es un cortador cilíndrico con uno o varios filetes helicoidales como un tornillo robusto y lados resistentes como una cremallera.

El útil y la pieza (tejo en la figura) giran continuamente - con la relacion de velocidades angulares conveniente y se introduce entonces el útil en la pieza tallándose progresiva y simultáneamente todos los dientes desde un lado al otro de la rueda - en bruto.

En este procedimiento hace falta un solo útil para tallar todas las ruedas del mismo módulo, cualquiera que sea su número - de dientes.

Los acabados necesarios para las ruedas dentadas cuando han de obtenerse perfiles muy precisos son los de rectificado, la - peado, afeitado y roñado o bruñido.

### Método Fellows de generación de engranes (figura 4.3.13)

El cortador generador o cuchilla-piñón tiene los dientes - iguales a los de un engrane del mismo tamaño, excepto que está ajustado para la holgura. El engrane que se talla y el cortador giran conjuntamente cuando al mismo cortador se desplaza - verticalmente en movimiento alternativo (vista de perfil en la - figura 4.3.13), generando el perfil del diente en el engrane a tallar.

NOTA: Para las figuras 4.3.12 y 4.3.13, el círculo de paso es - igual al círculo primitivo.

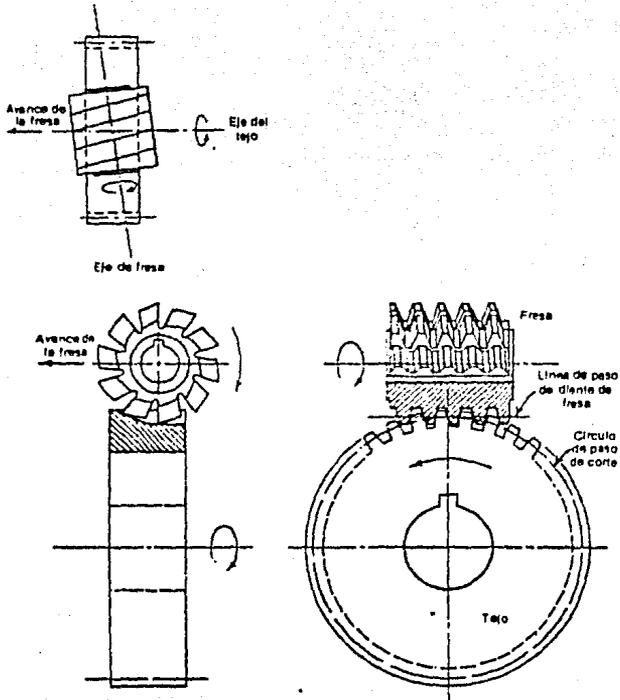


Figura 4.3.12

Generación de un engrane cilíndrico con una fresa

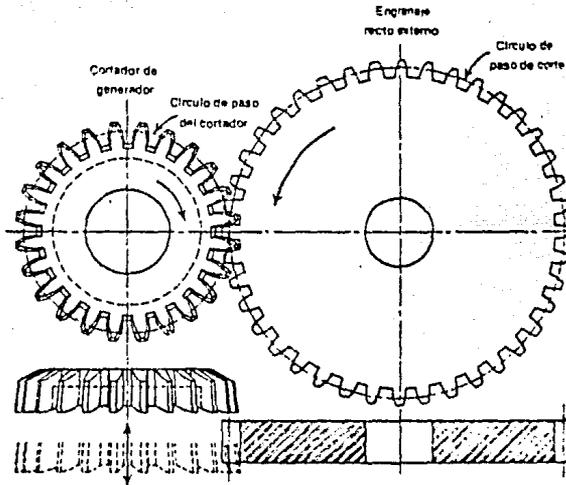


Figura 4.3.13

**Método Fellows de generación de engranes**

## C A P I T U L O 5

## . APARATO DE BALANCEO ESTÁTICO Y DINÁMICO

Este aparato permite obtener el balanceo estático y dinámico en forma práctica, de un sistema de 4 masas que giran alrededor de un eje común, utilizando métodos gráficos y analíticos, los cuales se enuncian en la práctica correspondiente.

## PRACTICA 5.1

### APARATO DE BALANCEO ESTATICO Y DINAMICO

#### 5.1.1.- INTRODUCCION

Las flechas y rotores que giran a altas velocidades deben balancearse cuidadosamente para que no vibren demasiado.

Aún a bajas velocidades de rotación las flechas desbalanceadas producen indeseables vibraciones, por lo que a velocidades muy altas pueden ocurrir fisuras catastróficas.

Por ejemplo, si la rueda delantera de un coche está ligeramente desbalanceada se sentirán vibraciones en el volante, y el control del coche se hace difícil a alta velocidad, causando desgaste en la llanta, rodamientos y suspensión, especialmente si la frecuencia de vibración coincide con cualquiera de las frecuencias naturales del sistema. Estos problemas pueden solucionarse si se coloca una pequeña masa en un punto cuidadosamente determinado sobre el rim de la rueda corrigiendo de esta manera el desbalanceo.

#### 5.1.2.- TEORIA

Una flecha con masas montadas sobre ella puede balancearse estática o dinámicamente. Si es balanceada estáticamente permanecerá en cualquier posición angular sin rotar, entonces el balanceo estático es un balanceo de fuerzas debidas a la acción de la gravedad. Si es balanceada dinámicamente deberá rotar a cualquier velocidad angular sin que exista vibración, entonces el balanceo dinámico es debido a la acción de las fuerzas de inercia producidas durante la rotación.

Generalmente si una flecha está balanceada dinámicamente también lo estará estáticamente, pero lo contrario de esta afirmación frecuentemente no se cumple.

Se pueden presentar 3 casos de balanceo en sistemas de masas

que giran alrededor de un eje común.

a) Balanceo de masas que roten sobre un plano radial común -  
(figura 5.1.1) .

b) Balanceo de masas que roten sobre un plano axial común -  
(figura 5.1.2).

c) Balanceo de masas que roten en varios planos transversales-  
y radiales (figura 5.1.3).

Esta práctica se centrará en el análisis del caso c) por ser uno de los más usuales.

#### BALANCEO ESTÁTICO

La figura 5.1.4 muestra un caso simple donde dos masas se montan sobre una flecha. Si la flecha debe de ser balanceada estáticamente el momento que causa el peso de la masa (1) hará que la flecha rote en sentido manecillas del reloj, y el momento causado por el peso de la masa (2) tratará de hacer girar a la flecha en sentido contrario manecillas del reloj.

Por lo tanto para que exista balanceo estático.

$$W_1 r_1 = W_2 r_2 \quad (5.1.1)$$

donde  $W_1$  = peso de la masa 1

$W_2$  = peso de la masa 2

$r_1$  = radio de la masa (1) desde su centro de gravedad hasta el eje central de la flecha.

$r_2$  = radio de la masa (2) desde su centro de gravedad hasta el eje central de la flecha.

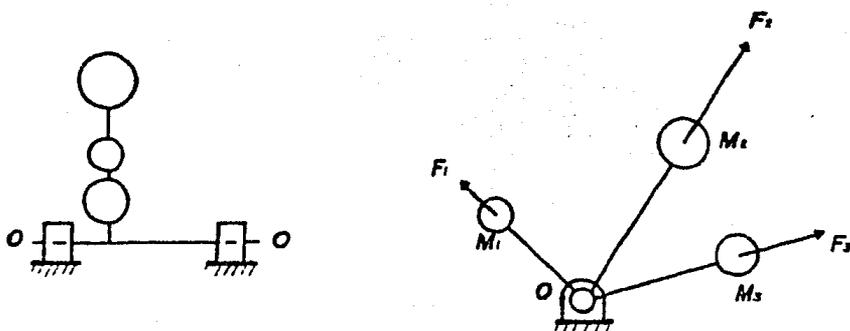


Figura 5.1.1

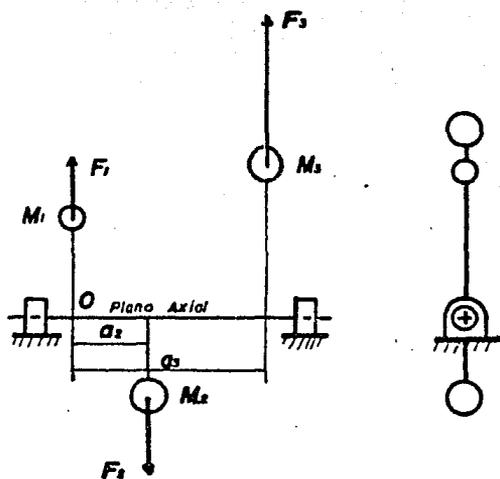


Figura 5.1.2

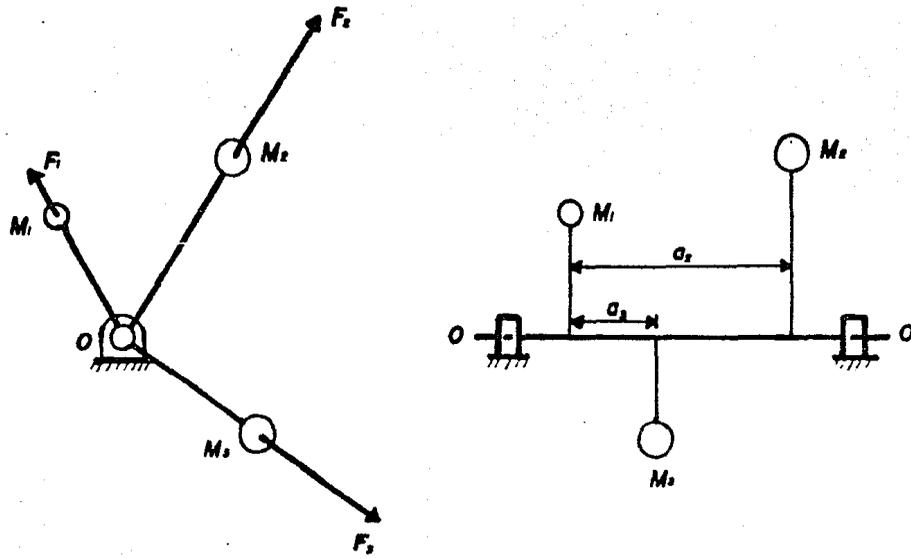


Figura 5.1.3

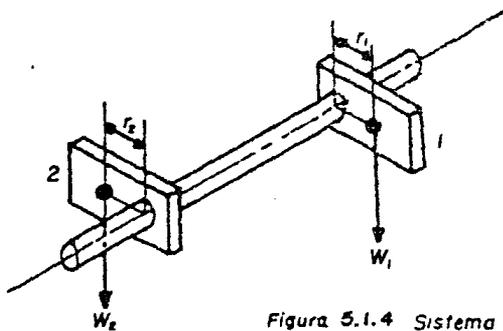
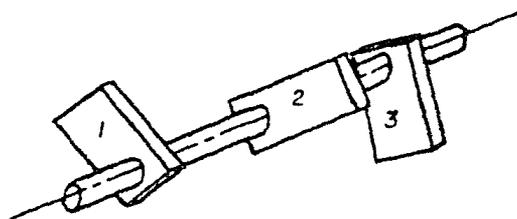


Figura 5.1.4 Sistema Simple de Dos Masas.



Representación esquemática de la flecha y masas

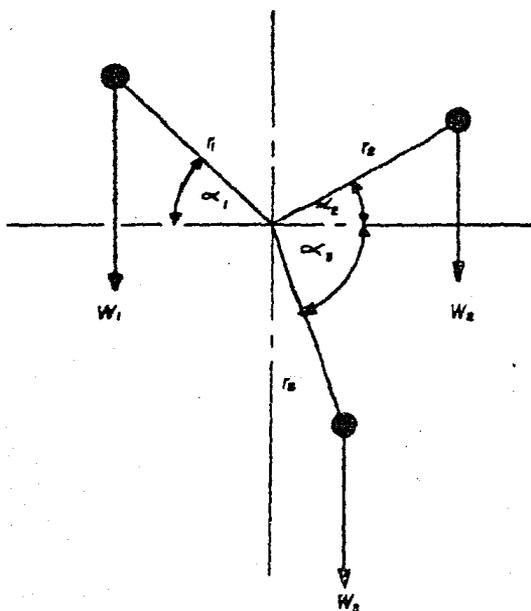


Figura 5.1.5 Sistema de tres masas.

Se tiene el mismo principio si hay más de dos masas montadas sobre una flecha como se muestra en la figura 5.1.5.

Los momentos que hacen girar a la flecha debido a las masas aplicadas son :

Masa	Momento	Dirección
(1)	$W_1 r_1 \cos \alpha_1$	Contrario manecillas
(2)	$W_2 r_2 \cos \alpha_2$	Favor manecillas
(3)	$W_3 r_3 \cos \alpha_3$	Favor manecillas

Por lo tanto para que exista balanceo estático :

$$W_1 r_1 \cos \alpha_1 = W_2 r_2 \cos \alpha_2 + W_3 r_3 \cos \alpha_3 \quad (5.1.2)$$

Si los valores  $W$ ,  $r$  y  $\alpha$  son los adecuados la flecha estará balanceada estáticamente.

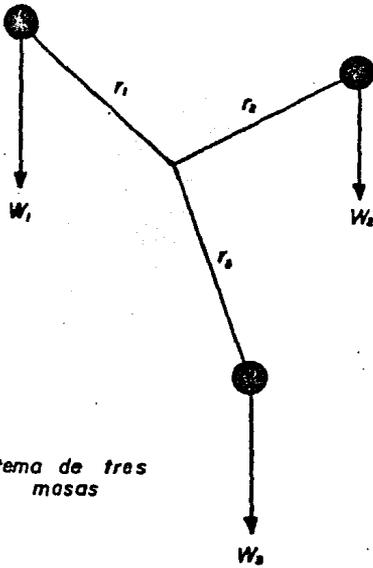
NOTA: Para los experimentos en esta práctica el producto  $Wr$  es medido directamente para cada una de las masas.

Si las posiciones angulares de dos de las masas se fijan, la posición de la tercera puede encontrarse analíticamente o por método gráfico.

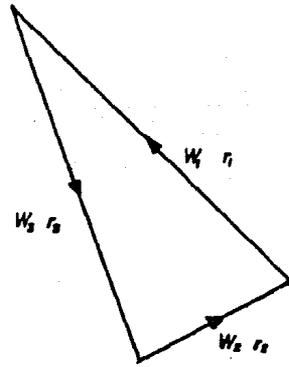
Analíticamente despejando el valor de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  o  $\alpha_3$ , de la ecuación (5.1.2).

Gráficamente, los momentos  $Wr$  son representados por vectores como lo muestra la figura 5.1.6a. El vector momento tiene una longitud proporcional al producto  $Wr$  y se dibuja paralelo a la dirección de  $r$ . Para obtener balanceo estático el triángulo de momentos debe unirse y la dirección del momento desconocido se determina de acuerdo al triángulo.

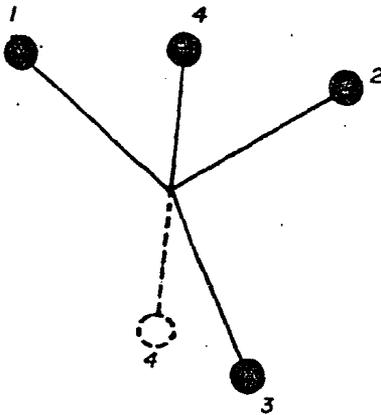
Si hay más de 3 masas la figura de momentos se cierra en un polígono como lo muestra la figura 5.1.6b, siendo indiferente el orden en el que se dibujan los vectores como muestran los dos ejemplos de la figura 5.1.6b.



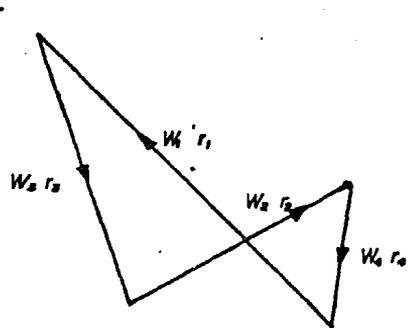
a) Sistema de tres masas



Triángulo de momentos



b) Sistema de cuatro masas



Ejemplo de polígonos de momentos.

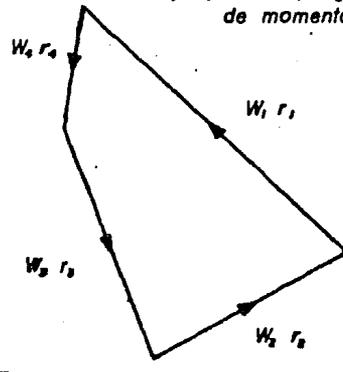


Figura 5.1.6 Polígonos de momentos para balanceo estático de un sistema de 3 y 4 masas

Si al cerrar el polígono el sentido del vector  $W_1 r_1$  resulta opuesto a la posición que guarda, la posición de la masa (4) deberá entonces invertirse para tener balanceo estático.

### BALANCEO DINAMICO

Las masas están sujetas a fuerzas centrífugas cuando la flecha está rotando. Dos condiciones deben satisfacerse si no se quiere que la flecha vibre.

- a) No debe haber fuerzas centrífugas desbalanceadas tratando de deflectar la flecha.
- b) No debe haber momentos o pares desbalanceados tratando de deflectar la flecha.

Si estas dos condiciones anteriores no se cumplen, la flecha no está dinámicamente balanceada.

Aplicando la condición (a) a la flecha mostrada en la figura número 5.1.7, con :

$$F_1 = F_2 \quad (5.1.3)$$

Donde la fuerza centrífuga  $F$  para cualquier masa dada  $m$  es -  
 $m r \omega^2$  o  $\frac{W}{g} r \omega^2$ .

donde  $W$  = peso de la masa

$g$  = aceleración de la gravedad

$\omega$  = velocidad angular de la flecha (constante)

$$\therefore \frac{W_1}{g} r_1 \omega^2 = \frac{W_2}{g} r_2 \omega^2 \quad (5.1.4)$$

Ya que  $\frac{\omega^2}{g}$  es una constante para las dos masas se tiene

$$W_1 r_1 = W_2 r_2 \quad (5.1.5)$$

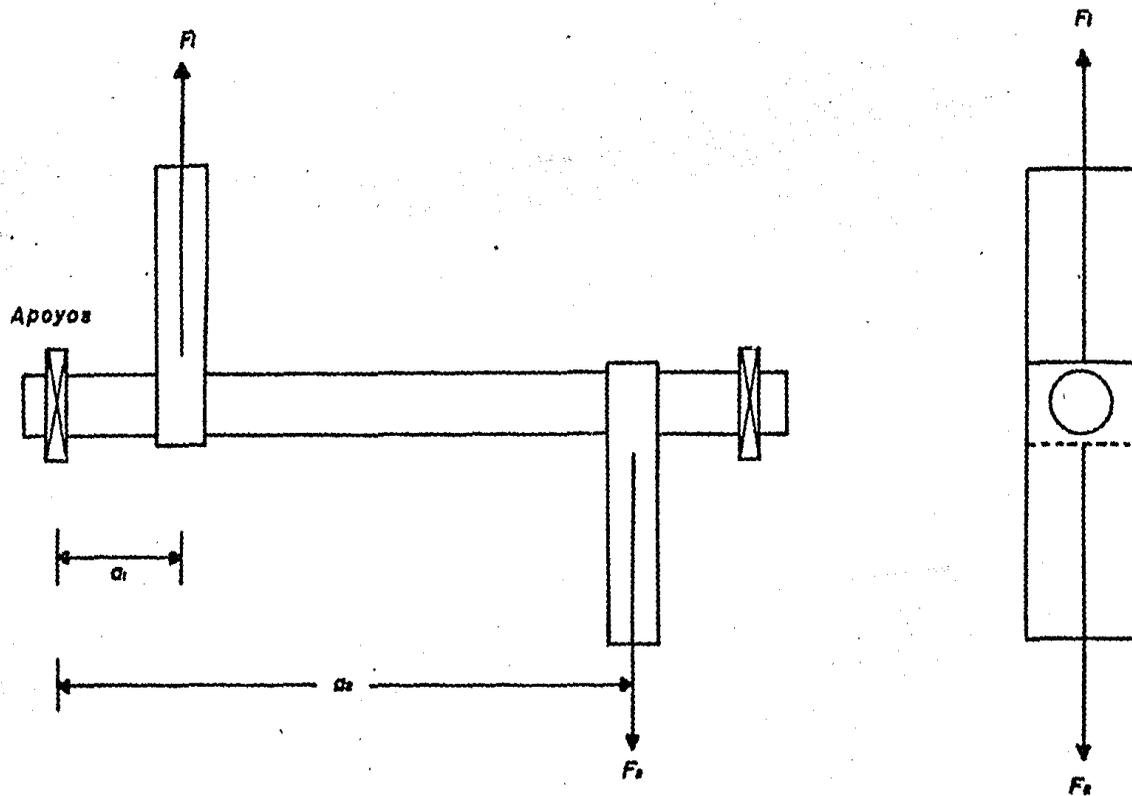


Figura 5.1.7 Desbalanceo dinámico para un sistema de dos masas.

Este es el mismo resultado obtenido en la ecuación (5.1.1) - para el balanceo estático de la flecha. Así si una flecha está balanceada dinámicamente también estará balanceada estáticamente.

Ahora aplicando la condición (b) a la misma flecha de la figura 5.1.7, tomando momentos con respecto a alguna referencia - conveniente como lo es uno de los rodamientos se tiene:

$$a_1 F_1 = a_2 F_2 \quad (5.1.6)$$

donde "a" es el brazo de momentos de cualquier fuerza dada F.

Pero de la ecuación (5.1.3)  $F_1 = F_2$  por lo que necesariamente  $a_1 = a_2$ .

Por lo tanto en este simple caso el balanceo dinámico puede llevarse a cabo si las dos masas se montan en el mismo punto a lo largo de la flecha.

Generalmente es conveniente tomar momentos con respecto a una de las masas por lo que el efecto de esa masa es suprimido de la ecuación de momentos.

En este caso tomando momentos con respecto a la masa (1) tenemos :

$$F_2 (a_2 - a_1) = 0 \quad (5.1.7)$$

Puesto que la fuerza centrífuga  $F_2$  no puede ser cero,  $a_1$  debe ser igual a  $a_2$  como se dijo anteriormente.

Entonces si una flecha está balanceada estáticamente no necesariamente lo estará dinámicamente.

Podemos concluir que las dos condiciones a satisfacer en el balanceo dinámico son :

$$a) \sum (Wr) = 0$$

$$b) \sum (Wra) = 0$$

NOTA: Cuando se requiere balancear dinámicamente un par de masas que roten sobre un plano axial común, como el caso anterior, generalmente se necesitan dos masas adicionales para proporcionar un par de balanceo.

## BALANCEO DINAMICO DE TRES MASAS

Si consideramos el caso mostrado en la figura 5.1.8a la condición b para balanceo dinámico puede expresarse matemáticamente por las ecuaciones de momentos para fuerzas centrífugas en ambos planos horizontal y vertical. Para simplificar las ecuaciones es conveniente tomar momentos con respecto a la masa (1), entonces se tiene :

$$\text{Horizontal : } a_2 F_2 \cos \alpha_2 = 0 \quad (5.1.8)$$

$$\text{Vertical : } a_2 F_2 \sin \alpha_2 = F_3 a_3 \quad (5.1.9)$$

Las condiciones las cuales satisfacen la ecuación (5.1.8) son; ya sea  $a_2 = 0$  o  $\alpha_2 = 90^\circ$  o  $270^\circ$ .

Si sustituimos estas condiciones en la ecuación (5.1.9) tenemos :

$$(1) a_2 = 0$$

Para esta condición  $a_3$  debe ser también cero.

Así para valores arbitrarios de  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , las tres masas deben estar localizadas en el mismo punto a lo largo de la flecha.

$$(11) \alpha_2 = 90^\circ \text{ o } 270^\circ$$

Aplicando la condición a) para balanceo dinámico

$$\text{Horizontal } F_1 \cos \alpha_1 = F_2 \cos \alpha_2 \quad (5.1.10)$$

$$\text{Vertical } F_3 = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 \quad (5.1.11)$$

Si  $\alpha_2 = 90^\circ$ , la ecuación (5.1.10) nos da  $\alpha_1 = 90^\circ$  o  $270^\circ$

Si  $\alpha_2 = 90^\circ$ , la ecuación (5.1.11) se reduce a :

$$F_3 = F_1 + F_2 \quad (5.1.12)$$

Por lo tanto la ecuación (5.1.9) también se reduce a :

$$a_2 F_2 = a_3 F_3 \quad (5.1.13)$$

Trabajando simultáneamente con las ecuaciones (5.1.12) y (5.1.13) y despejando  $F_1$  nos dá :

$$F_1 = F_3 \left( 1 - \frac{a_1}{a_2} \right) \quad (5.1.14)$$

Ahora si  $a_3$  es más grande que  $a_2$  (como se indica en la figura 5.1.9) se encuentra que  $F_1$  debe ser negativo y  $\alpha_1 = 270^\circ$ .

La configuración resultante para el balanceo dinámico es mostrada en la figura 5.1.8b y las siguientes condiciones deben ser satisfechas.

- 1) La masa central está a  $180^\circ$  con respecto a las otras dos masas.
- 2) Las masas escogidas deben ser tales que :

$$F_2 = F_1 + F_3$$

- 3) Las masas distribuidas a lo largo de la flecha deben ser tales que :

$$a_2 F_2 = a_3 F_3$$

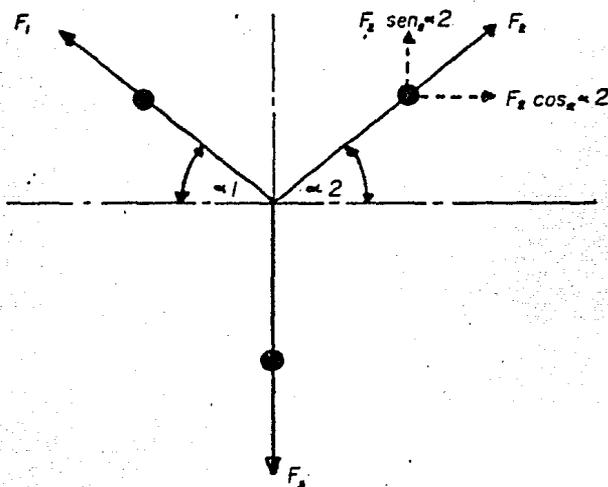
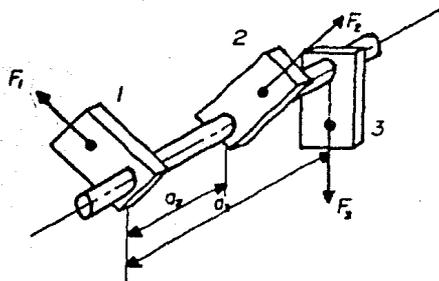
#### BALANCEO DINAMICO DE MAS DE TRES MASAS

Si hay más de tres masas, la posición angular de éstas puede determinarse aplicando las condiciones para balanceo estático y la condición (b) para balanceo dinámico.

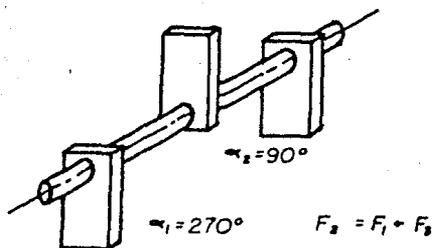
La distribución de las masas a lo largo de la flecha se encuentra aplicando la condición (a) para balanceo dinámico.

Esto también puede efectuarse por un método de dibujo como el que se describe en la sección para balanceo estático.

A continuación se indican el método analítico y el método gráfico (o de dibujo) para el balanceo dinámico de más de 3 masas.



a) Caso general para un sistema de tres masas



b) Solución del sistema de tres masas

Figura 5.1.8 Balanceo dinámico para un sistema de tres masas.

### Método Analítico

Refiriéndonos a la figura 5.1.9, los momentos que tienden a deflectar la flecha debido a las masas aplicadas se dividen en sus componentes en los planos horizontal y vertical.

El momento neto en cada plano debe ser cero si la flecha está balanceada dinámicamente como se anunció anteriormente.

Si tomamos momentos con respecto a la masa (1) tenemos :

Momentos horizontales con respecto a la masa (1)

$$- a_2 F_2 \cos \alpha_2 + a_3 F_3 \cos \alpha_3 + a_4 F_4 \cos \alpha_4 = 0 \quad (5.1.15)$$

Momentos verticales con respecto a la masa (1)

$$a_2 F_2 \sin \alpha_2 + a_3 F_3 \sin \alpha_3 - a_4 F_4 \sin \alpha_4 = 0 \quad (5.1.16)$$

Debemos observar que  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  son proporcionales a  $W_2 r_2$ ,  $W_3 r_3$  y  $W_4 r_4$ . En los experimentos llevados a cabo en esta práctica los valores de  $(Wr)$  son conocidos para las masas, así que estos valores podrán sustituirse por los de  $(F)$  en las ecuaciones (5.1.15) y (5.1.16). Si se conocen las posiciones angulares de dos de las masas, las posiciones angulares de las otras dos pueden encontrarse por los métodos dados en la sección de balanceo estático. Además si también se conocen los brazos de momentos ( $a$ ) de dos fuerzas centrífugas, la localización de los otros dos pueden encontrarse sustituyendo los valores conocidos en las ecuaciones simultáneas (5.1.15) y (5.1.16).

### Método Gráfico o de Dibujo

Los momentos no necesitan dividirse en sus componentes en este método. Los valores  $W_1 r_1 a_1$ ,  $W_2 r_2 a_2$ , ...,  $W_n r_n a_n$  son representados por vectores proporcionales a los momentos  $F_1 a_1$ ,  $F_2 a_2$ , ...,  $F_n a_n$ , y se dibujan de manera análoga como para el caso de balanceo estático (método del polígono de momentos

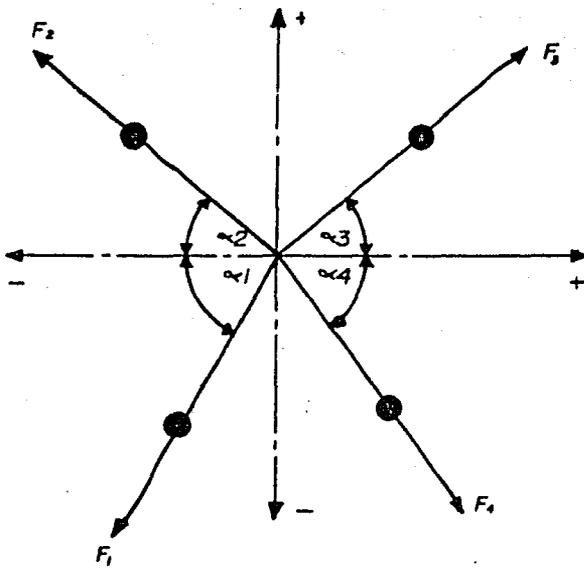
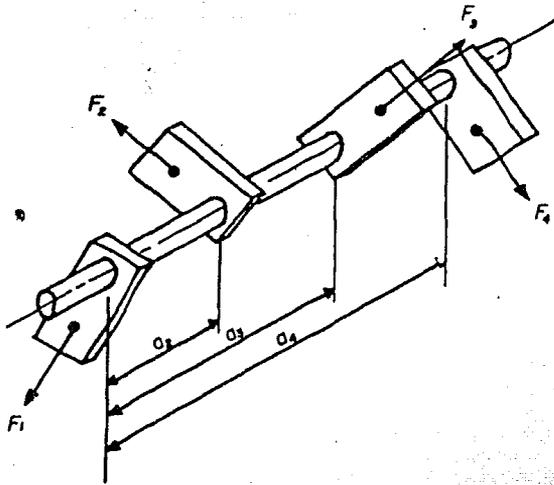


Figura 5.1.9 Nomenclatura para un sistema arbitrario de cuatro masas

sección de balanceo estático, figura 5.1.6) solamente dos valores desconocidos pueden ser encontrados con esta técnica a partir de la condición de que el polígono debe de cerrarse.

NOTA: El método analítico y gráfico mencionados en esta sección se ilustran más objetivamente en un ejemplo de la sección 5.1.5.

### 5.1.3.- EQUIPO.

El aparato de balanceo estático y dinámico TM 102 (figura - 5.1.10) consiste de una flecha perfectamente balanceada en la - cual pueden colocarse y sujetarse 4 bloques rectangulares.

La flecha gira sobre rodamientos de bolas y es accionada por un motor eléctrico de 12 volts a través de una transmisión de - polea y banda.

El motor y la flecha están montados sobre un plato de metal - el cual está soportado sobre unos pies de goma resistentes.

Estos pies o soportes permiten que el plato vibre cuando la - flecha está desbalanceada.

Cuatro discos con agujeros excéntricos de diferentes diáme - tros, se colocan en los bloques rectangulares (1 en cada bloque) para que el momento debido al desbalanceo pueda variar. Los - bloques pueden colocarse en la flecha en cualquier posición an - gular y en cualquier punto a lo largo de ella.

Dos llaves exagonales (Allen) se utilizan, la más grande se - usa para sujetar los bloques a la flecha, mientras que la más - pequeña aprieta los tornillos de los discos excéntricos.

Los bloques pueden colocarse en cualquier punto a lo largo - de la flecha. El brazo de momentos ( $a$ ) de cualquier fuerza da da  $F$  puede ser medido con una escala lineal colocada al lado de la flecha, paralela a ésta. La escala cuenta con una correde - ra, que funciona como marca de referencia y como tope para los - bloques.

Para medir la posición angular de los bloques el aparato - cuenta con un disco unido rígidamente a la flecha en uno de sus extremos, este disco está graduado de  $0^{\circ}$  a  $360^{\circ}$  de manera que - la posición angular de cada bloque puede ser medida.

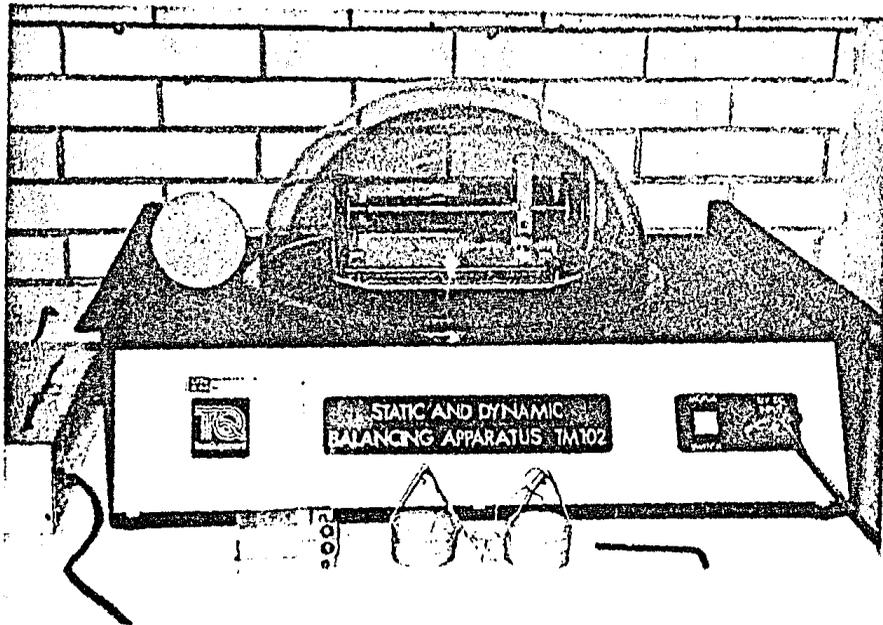


Figura 5.1.10

Aparato de Balanceo Estático y Dinámico.

Las fuerzas centrífugas o de inercia que causan el desbalanceo ( $Wr$ ) son cuantificadas colocando una extensión de flecha con polea a la flecha principal.

Un bloque rectangular se fija a la flecha y se hace pasar un cordel por la polea de la extensión de la flecha; a cada extremo del cordel se ata una canastilla de pesos, pequeñas bolas de acero se colocan poco a poco sobre una canastillas hasta que el bloque gire  $90^\circ$ , la fuerza de desbalanceo es entonces proporcional al número de bolas requerido para mover el bloque  $90^\circ$  desde su posición de equilibrio estático.

El aparato cuenta con tres micro switches sobre los cuales se ajusta un domo de plástico, la función de estos micro switches es evitar que el aparato funcione sin el domo protector, puesto que si no son bien apretados los bloques a la flecha estos podrían salir disparados debido a la rotación de la flecha además se prevee cualquier accidente al intentar introducir la mano al sistema en rotación.

NOTA: El motor requiere de un suministro de energía de 12 volts a 2 amperes, esto es previsto mediante un transformador adicional conectado al aparato.

#### 5.1.4.- OBJETIVO

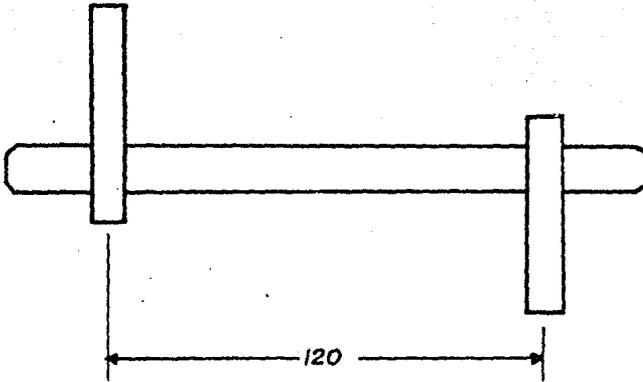
Para un sistema de cuatro masas encontrar las posiciones angulares y los brazos de momentos de dos masas, dadas las posiciones angulares y los brazos de momentos de las otras dos.

Efectuando esto en forma teórica y práctica.

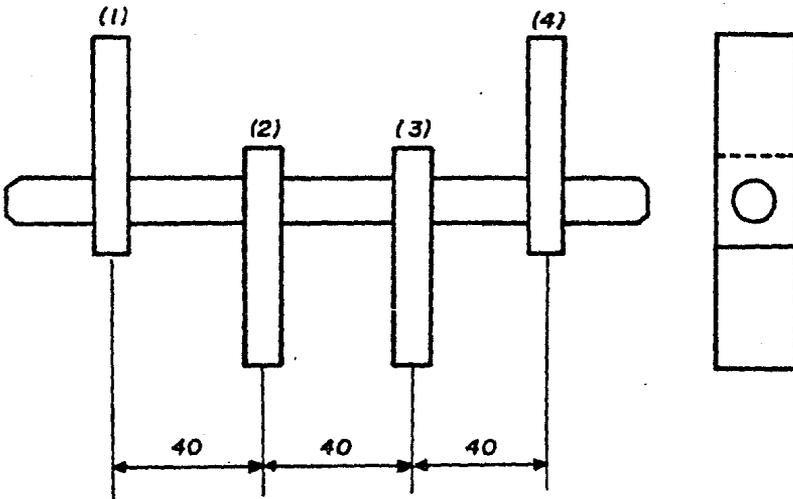
#### 5.1.5.- METODO EXPERIMENTAL

5.1.5.1.- Demostración del Balanceo Estático pero dinámicamente desbalanceado.

1) Quite los discos de los cuatro bloques rectangulares y coloque dos de ellos como se muestra en la figura 5.1.11, con un desplazamiento angular relativo entre discos de  $180^\circ$  y una separación de 120 mm. Use la corredera para colocar y leer las po



a) *Balaceo estático para un sistema de dos masas*



b) *Balaceo estático y dinámico para un sistema de cuatro masas*

Figura 5.1.1) *Configuración para demostraciones simples*

siciones de los bloques.

2) Observe que la flecha queda en cualquier posición angular y por lo tanto balanceada estáticamente.

3) Conecte la banda, del motor a la polea de la flecha.

4) Asegúrese de que la corredera sobre la escala lineal no obstruya el movimiento de los bloques.

5) Coloque el domo sobre el aparato.

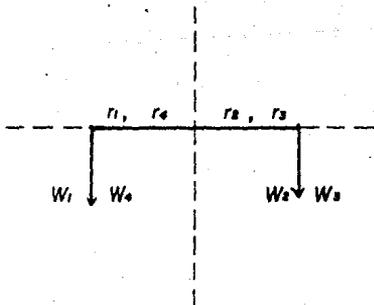
6) Arranque brevemente el motor. Observe el severo desbalanceo de la flecha.

#### 5.1.5.2.- Demostración del Balanceo Dinámico

1) Quite el domo y coloque los cuatro bloques rectangulares como se muestra en la figura 5.1.11b.

2) Pruebe teóricamente que la flecha está estática y dinámicamente balanceada.

NOTA: De acuerdo a lo visto en la Teoría de esta práctica se tiene :

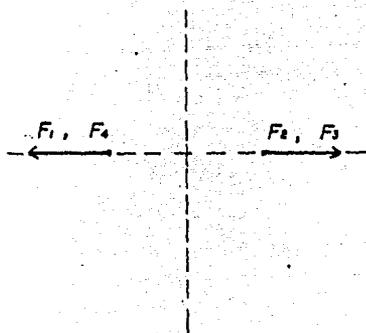


a) Condición para balanceo estático

$$\sum(Wr) = 0$$

$$W_1 r_1 + W_4 r_4 - W_2 r_2 - W_3 r_3 = 0$$

Y esto se cumple puesto que los bloques son de igual peso y el radio de la masa del bloque desde su centro de gravedad al eje central de la flecha, es el mismo para todos.



b) Condición para balanceo dinámico

$$\sum (Wr_a) = 0$$

$$\sum (F_a) = 0$$

tomando momentos con respecto a la masa (1)

$$F_2(40) + F_3(80) - F_4(120) = 0$$

$$\text{Pero } F_1 = F_2 = F_3 = F_4$$

Puesto que el producto  $Wr$  es el mismo para todos los bloques por lo tanto está balanceado dinámicamente.

3) Pruebe que la flecha está balanceada estáticamente, en forma práctica (la flecha queda en cualquier posición angular).

4) Coloque la banda y el domo. Accione el motor y observe la falta de vibración, mostrando que la flecha está dinámicamente balanceada.

5.1.5.3.- Determinación experimental de los valores de  $Wr$ .

- 1) Quite el domo y desajuste la banda
- 2) Inserte la extensión de flecha a la flecha principal.
- 3) Mueva el aparato a un extremo de la mesa de trabajo.
- 4) Haga pasar un cordel 2 o 3 veces por la polea de la extensión de la flecha, y ate a los extremos del cordel las canastillas de pesos (ver figura 5.1.12).
- 5) Fije un bloque rectangular a la flecha.
- 6) Inserte un disco excéntrico en el bloque.
- 7) Poco a poco deposite las bolas de acero en una canastilla de pesos, hasta que el bloque se halla desplazado  $90^\circ$  a partir de su posición inicial, ocasionalmente golpee el sistema para vencer la fricción.

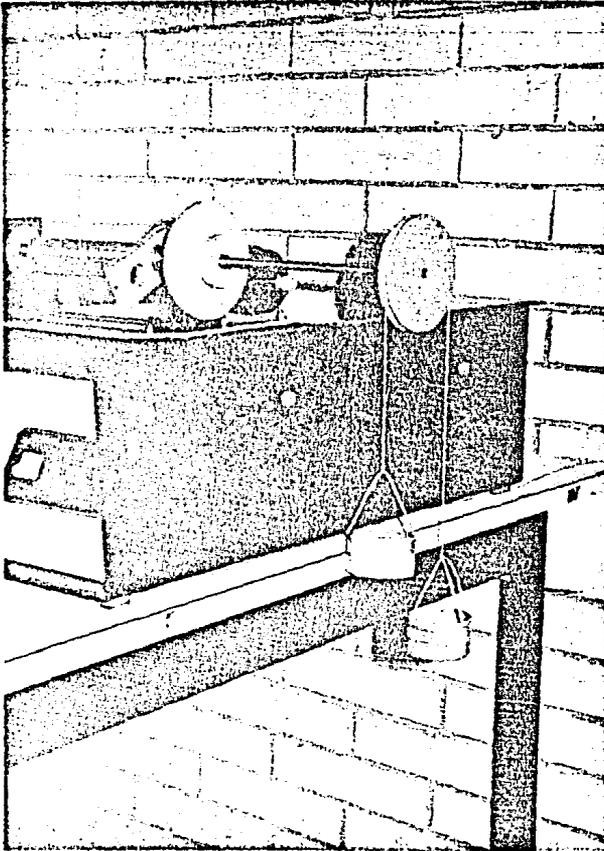


Figura 5.J.12

Determinación Experimental de los Valores de  $W_r$ .

8) Registre el número de bolas de acero depositados en la canastilla. Este es proporcional al momento de desbalanceo del bloque ( $W_r$ ).

9) Fije un disco excéntrico a cada bloque y repita el procedimiento anterior para cada bloque en turno.

NOTA: La tabla 5.1.1 nos muestra los resultados para cada uno de los bloques y discos excéntricos.

#### 5.1.5.4.- Balanceo Estático y Dinámico para un Sistema de 4 masas .

Vamos a encontrar las posiciones angulares y los brazos de momentos para los bloques (3) y (4), dadas las posiciones angulares y brazos de momentos de los bloques (1) y (2).

La tabla de resultados número 5.1.2 nos muestra 10 posibles experimentos a efectuarse con un sistema de 4 masas, en esta tabla los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $x_1$  y  $x_2$  funcionan como datos.

El procedimiento es de la manera siguiente :

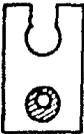
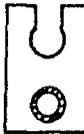
1) Seleccione un experimento de la tabla 5.1.2 tomando como datos las posiciones angulares y los brazos de momentos para los bloques (1) y (2).

NOTA: Los momentos de desbalanceo ( $W_r$ ) de los bloques pueden cambiar si los discos excéntricos se colocan en diferentes posiciones a los de la tabla 5.1.1, por lo tanto se aconseja primero obtener los valores de ( $W_r$ ) antes de realizar el experimento y tomar las tablas 5.1.1 y 5.1.2 únicamente como guías.

2) Encuentre la posición angular de los bloques (3) y (4) analítica o gráficamente.

3) Encuentre los brazos de momentos de los bloques (3) y (4) analítica o gráficamente.

4) Ensamble los cuatro bloques sobre la flecha en las posicio-

				
<i>Bloque</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>Wr (Bolas)</i>	<i>88</i>	<i>82</i>	<i>74</i>	<i>64</i>

*Tabla 5.1.1 Valores de Wr para las posiciones mostradas*

nes obtenidas.

5) Pruebe prácticamente si la flecha está balanceada estáticamente.

6) Coloque la banda y el domo y pruebe en forma práctica si la flecha está balanceada dinámicamente.

7) Si la flecha no está balanceada, repita los cálculos y dibujos para encontrar el error.

8) Si la flecha ya está balanceada, cambie la posición de uno de los bloques y observe que se pierde el balanceo.

5.1.5.5.- Ejemplo de la Obtención del balanceo Estático y Dinámico para un Sistema de cuatro Masas, Aplicando el método analítico y gráfico.

Supóngase que el bloque (1) se coloca a 17 mm desde el extremo de la flecha con una posición angular de  $0^\circ$ , y que el bloque (2) se coloca a 100 mm del bloque (1) con una posición angular de  $120^\circ$  y los momentos de desbalanceo para ambos bloques son las que aparecen en la tabla 5.1.1.

Primero es necesario dibujar a escala el polígono de momentos de los valores  $Wr$  como se muestra en la figura 5.1.13a .

Las magnitudes y direcciones de  $(Wr)_1$  y  $(Wr)_2$  son conocidas y sólo se conocen las magnitudes de  $(Wr)_3$  y  $(Wr)_4$  , para poder encontrar sus direcciones trazamos arcos con estas magnitudes a escala apoyándonos en los extremos de  $(Wr)_1$  y  $(Wr)_2$  .

De esta manera cerramos el polígono de momentos puesto que el sistema deberá estar balanceado estáticamente.

La figura 5.1.13b muestra una interpretación gráfica de la posición angular de los bloques obtenida a partir del polígono de momentos. La figura 5.1.13c nos muestra la localización de los bloques sobre la flecha.

La localización a lo largo de la flecha de los bloques (3) y (4) puede ser obtenida gráficamente como se muestra en la figura 5.1.14a , denominando como  $a_3$  y  $a_4$  a los brazos de momentos-

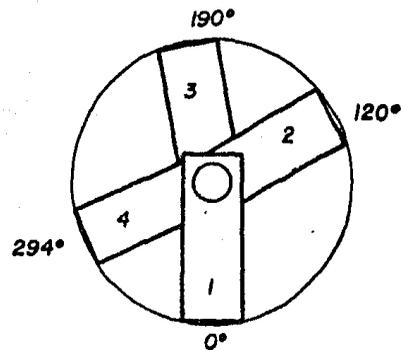
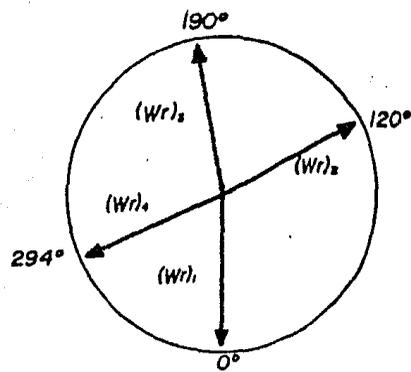
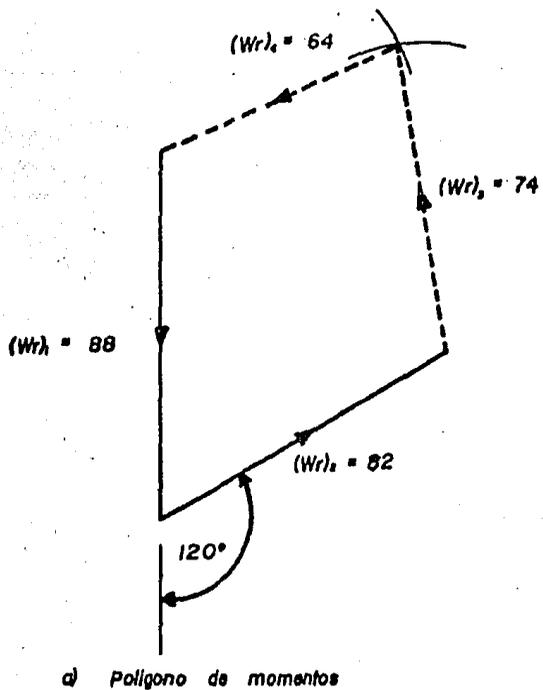
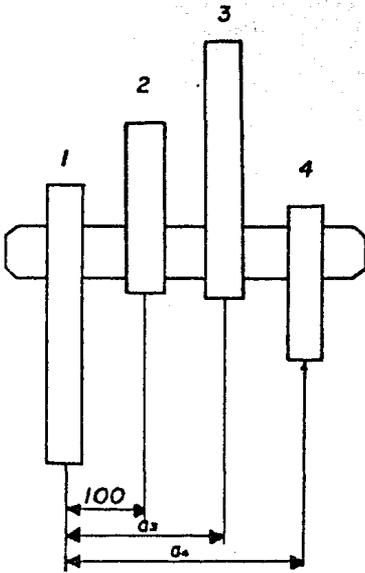
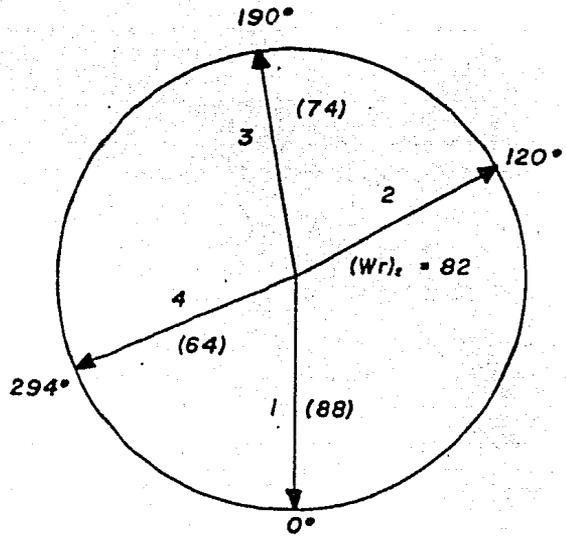


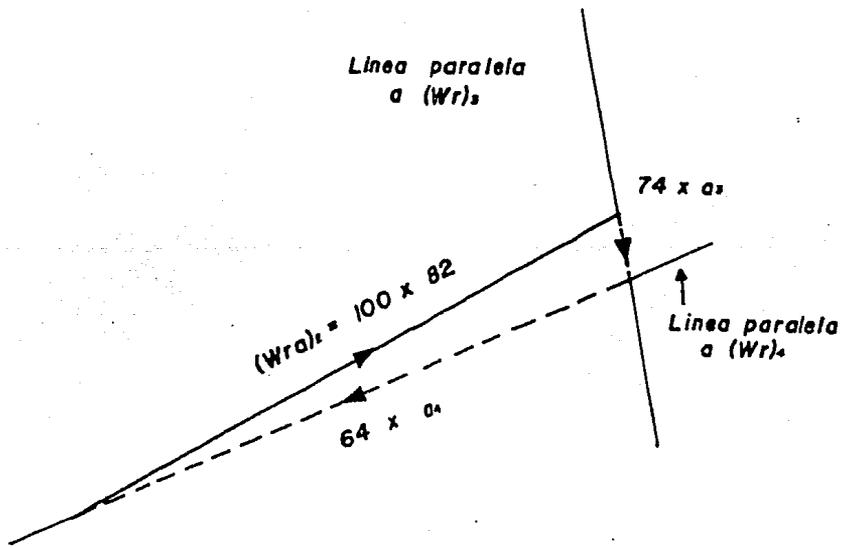
Figura 5.1.13 Determinación de las posiciones angulares para un sistema de cuatro masas



a) Localizacion de los bloques



b) Posiciones angulares



c) Triangulo de momentos con respecto al bloque cuatro

Determinacion de las posiciones para un sistema de cuatro masas

Figura 5.1.14

de los bloques (3) y (4) respectivamente a partir del bloque (1).

La figura 5.1.14b muestra las posiciones angulares de los bloques como previamente se determinaron.

Tomaremos momentos ( $Wra$ ) con respecto al bloque (1), por lo tanto éste no aparecerá en el dibujo ni en los cálculos.

Ahora dibujamos un vector de (100 x 82) unidades a escala paralelo a la dirección ( $Wr$ )<sub>2</sub> y cerramos el triángulo de momentos trazando líneas paralelas a ( $Wr$ )<sub>3</sub> y ( $Wr$ )<sub>4</sub> que representan a los vectores ( $Wra$ )<sub>3</sub> y ( $Wra$ )<sub>4</sub>.

Las magnitudes de ( $Wra$ )<sub>3</sub> y ( $Wra$ )<sub>4</sub> se encuentran midiendo las magnitudes del triángulo.

Si observamos en el triángulo de momentos el vector ( $Wra$ )<sub>3</sub> - resultó en sentido contrario a ( $Wr$ )<sub>3</sub> esto nos indica que  $a_3$  debe ser negativo y el bloque (3) deberá estar antes del bloque (1) sobre la flecha.

Del triángulo de vectores resulta :

$$a_3 = - 12 \text{ mm}$$

$$a_4 = 124 \text{ mm}$$

Para colocar todos los bloques sobre la flecha, el bloque (3) debemos colocarlo 5 mm a partir del extremo izquierdo de la flecha. Por lo tanto las posiciones relativas de los bloques serán :

Bloque	Posición angular	Brazo de momento a partir del extremo izquierdo de la flecha.
1	0°	17 mm
2	120°	117 mm
3	190°	5 mm
4	294°	141 mm

Los valores de  $a_3$  y  $a_4$  pueden también encontrarse analíticamente de la siguiente forma.

Tomando momentos con respecto al bloque (1). Observando la figura 5.1.14b.

Componentes horizontales

$$[100 \times 32 \sin(180-120)^\circ] - [74 \times a_3 \sin(190-180)^\circ] = [64 \times a_4 \sin(360-294)^\circ]$$

$$\therefore 7101 - 12.9 a_3 - 58.5 a_4 = 0 \quad \text{a)}$$

Componentes verticales.

$$[100 \times 32 \cos(180-120)^\circ] + [74 \times a_3 \cos(190-180)^\circ] = [64 \times a_4 \cos(360-294)^\circ]$$

$$\therefore 4100 + 72.8 a_3 - 26 a_4 = 0 \quad \text{b)}$$

Resolviendo las ecuaciones a) y b) en forma simultánea, obtenemos :

$$a_3 = -11.75 \text{ mm}$$

$$a_4 = 123.7 \text{ mm} \quad \text{medidas desde el bloque (1)}$$

Observamos que los valores gráficos y analíticos se aproximan mucho, por lo tanto ambos son válidos.

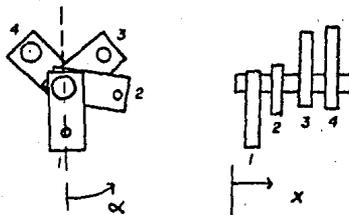
NOTAS: La tabla 5.1.2 fué hecha haciendo variar el ángulo  $\alpha_2$  que define la posición angular del bloque (2) de  $160^\circ$  a  $81^\circ$ , manteniendo constante la posición angular del bloque (1) de  $0^\circ$ .

Para la tabla 5.1.2 se tiene :

- $\alpha$  Ángulo medido con respecto al bloque (1)
- x Distancias medidas desde el cero de la escala
- Wr Momentos de desbalanceo para el bloque (1) 88; 2 (82); 3 (74); 4(64) (medidos en bolas de acero)
- Distancia entre (1) y (2), 100 mm (constante)

Prueba	Bloque (1)		Bloque (2)		Bloque (3)		Bloque (4)		Secuencia de Bloques
	$\alpha_i^\circ$	$X_1$ mm	$\alpha_2^\circ$	$X_2$ mm	$\alpha_3^\circ$	$X_3$ mm	$\alpha_4^\circ$	$X_4$ mm	
1	0	5	160	105	192	50	349	178	1324
2	0	5	150	105	190	25	333	142	1324
3	0	5	140	105	190	11	320	142	1324
4	0	14	130	114	191	5	306	141	3124
5	0	17	120	117	191	5	293	139	3124
6	0	25	110	125	192	5	280	152	3124
7	0	29	100	129	194	5	268	162	3124
8	0	41	90	141	198	5	254	187	3124
9	0	156	85	256	203	5	234	373	3124
10	0	$\infty$	81	$\infty$	217	5	217	$\infty$	3124

Tabla de resultados 5.1.2



### 5.1.6.- CONCLUSIONES

Para el sistema de balanceo de 4 masas visto en esta práctica, es posible determinar las posiciones angulares y los brazos de momentos de las masas (3) y (4), si se conocen las posiciones angulares y los brazos de momentos de las masas (1) y (2) - por medio de un método analítico y uno de dibujo o gráfico.

Si se observa en la tabla de resultados 5.1.2, para 10 combinaciones diferentes de las posiciones de los bloques, existen algunas restricciones debidas al diseño del aparato, al colocar los cuatro bloques en la flecha, puesto que en algunas ocasiones la flecha resulta demasiado corta o los bloques resultan demasiado juntos.

Se recomienda que los discos excéntricos se coloquen a diferentes posiciones en los bloques para así poder variar la magnitud  $W_r$  para cada masa de desbalanceo y obtener diferentes posiciones de los bloques a las mostradas en la tabla 5.1.2, que como se dijo anteriormente es útil sólo como una guía.

## C A P I T U L O 6

## MAQUINA DE VELOCIDAD DE ROTACION CRITICA DE FLECHAS

La práctica que podremos realizar con esta máquina, nos permite hacer un análisis de las velocidades críticas de rotación para varios diámetros y longitudes de flechas de un mismo material, con carga y sin carga, utilizando varias combinaciones de condiciones de soportes o apoyos. Además con ayuda del Estroboscopio, cuya operación y manejo se describe en el Apéndice de la misma práctica, lograremos observar claramente los modos de rotación cuando son alcanzadas las velocidades críticas de una flecha.

## PRACTICA 6.1

### MAQUINA DE VELOCIDAD DE ROTACION CRITICA DE FLECHAS

#### 6.1.1.- INTRODUCCION

Para cualquier flecha en rotación, existe una cierta velocidad a la cual ocurre una inestabilidad violenta. La flecha sufre una deflexión excesiva y sucede un fenómeno conocido como "velocidad crítica de rotación".

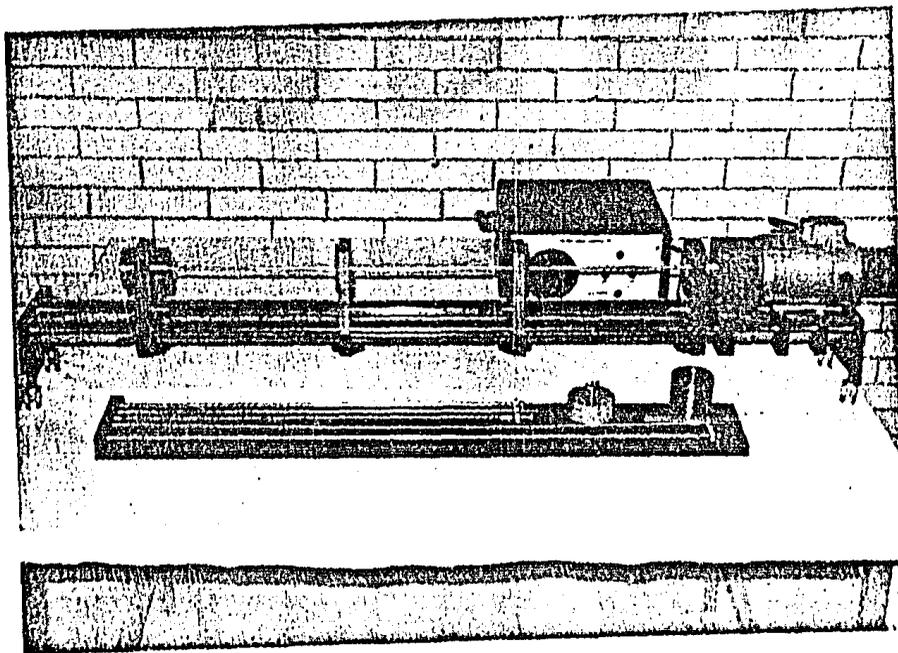
Si esta velocidad crítica de rotación se mantiene, entonces la amplitud resultante viene a ser suficiente para causar deformación plástica permanente y rotura en la flecha. Sin embargo si se incrementa rápidamente la velocidad al empezar a manifestarse los efectos anteriores, entonces la flecha se reestablece y seguirá rotando hasta alcanzar alguna otra velocidad específica a la cual se producirá un doble arco de deflexión en la flecha.

Las fuerzas centrífugas las cuales causan la deflexión de la flecha desde su posición de reposo son prácticamente inevitables, además la no homogeneidad del material y las dificultades de ensamblaje determinan que el centro de gravedad de la flecha o su centro de masa no puedan coincidir con su eje de rotación.

Dunkerley fué el primero que investigó las fuerzas centrífugas involucradas en las flechas y determinó que la única fuerza reestabilizadora era la que resultaba de las propiedades de elasticidad de la flecha. A partir de aquí él pudo deducir la velocidad a la cual la flecha sufriría una deflexión infinita propia de la velocidad crítica de rotación.

El aparato usado para analizar los efectos de velocidad crítica de rotación se muestra en la figura 6.1.1.

Dos características son incorporadas en este aparato, las cuales permiten que la flecha adopte la configuración predicha por la teoría de la elasticidad. La primera es un par cinemático localizado en el extremo conducido de la flecha, el cual está diseñado para prevenir la transmisión de cualquier fuerza ajena del motor a la flecha. La segunda característica es una boquilla deslizante con rodamientos de bolas la cual se acopla-



*Figura 6.1.1*

*Máquina de Velocidad de Rotación Crítica de Flechas.*

a la boquilla fija al par cinemático, mientras la flecha rota en el cojinete.

El aparato permite un análisis de las velocidades críticas de rotación para varios diámetros y longitudes de flechas, con carga y sin carga y con varias combinaciones de condiciones de soporte o apoyo.

### 6.1.2.- TEORIA

Consideremos un disco giratorio desequilibrado de masa  $m$  sobre una flecha que gira sobre dos apoyos, con velocidad angular constante  $\omega$ , como se ve en la figura 6.1.2. Si suponemos que el centro de gravedad  $G$  de el disco está a una distancia radial  $\delta$  de el centro geométrico  $C$ . La línea central de los apoyos  $O O'$  intersecta el plano del disco en  $D$ , el punto en el cual el centro  $C$  del disco se deflecta una distancia  $A$ .

De esta manera el centro de gravedad  $G$  gira alrededor del punto  $D$ , describiendo un círculo de radio  $(A + \delta)$  y la reacción centrífuga producida es :

$$R = m \omega^2 (A + \delta) \quad (6.1.1)$$

Esta fuerza acorde con Dunkerley, está balanceada por una fuerza elástica de la flecha en el punto  $D$  igual a :

$$F = K A \quad (6.1.2)$$

donde  $K$  es la constante de resorte de la flecha en flexión.

Por lo tanto :

$$R = F$$

$$m \omega^2 (A + \delta) = K A \quad (6.1.3)$$

Despejando  $A$

$$A = \frac{m \omega^2 \delta}{K - m \omega^2} \quad (6.1.4)$$

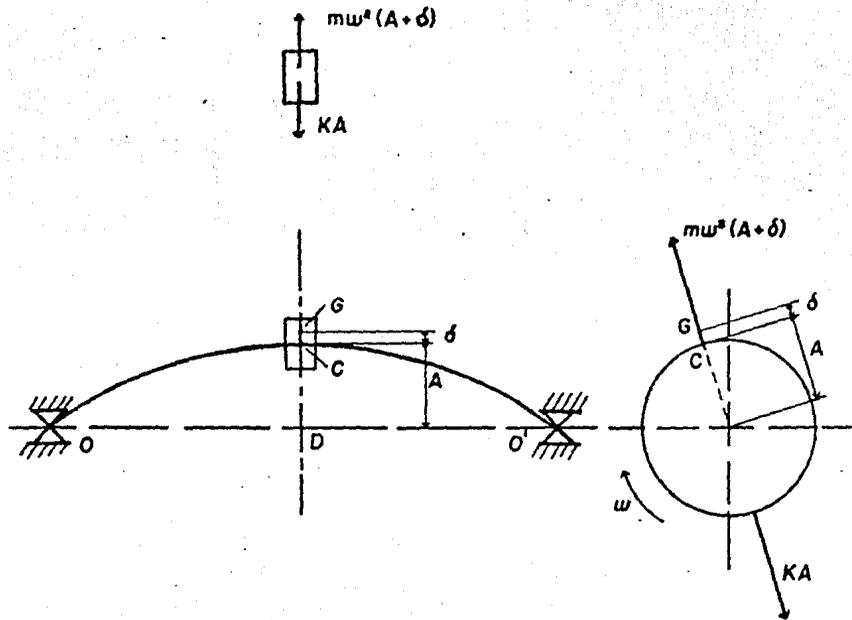


Figura 6.1.2

Esta ecuación llegará a ser infinita cuando  $K - m\omega^2 = 0$  o cuando  $\omega^2 = \frac{K}{m}$ . Por lo tanto si  $\omega_c$  denota la velocidad de rotación crítica, entonces  $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , y si sustituimos esto en la ecuación (6.1.1) obtendremos :

$$A = \frac{\omega^2 \delta}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad (6.1.5)$$

Por lo tanto cuando  $\omega < \omega_c$ , entonces  $A$  y  $\delta$  tendrán el mismo signo, y el centro de gravedad  $G$  estará situado como lo muestra la figura 6.1.2. Cuando  $\omega = \omega_c$ , la deflexión  $A$  llegará a ser infinita como anteriormente se ha descrito.

Cuando  $\omega > \omega_c$ ,  $A$  y  $\delta$  serán de signo opuesto y entonces el centro de gravedad se encontrará entre  $C$  y  $D$ .

Para muy altas velocidades, donde  $\omega \gg \omega_c$ , la amplitud  $A \rightarrow -\delta$ , entonces el disco rota con respecto a  $G$  con una perfecta estabilidad.

Visto desde el extremo de la flecha, como en la misma figura 6.1.2, la fuerza centrífuga  $m\omega^2(A + \delta)$ , la cual actúa cuando el disco gira en torno al eje central de la flecha, puede sustituirse por sus componentes horizontal y vertical, y así se ve que el mismo resultado se obtendrá al sumar dos fuerzas vibratorias, una horizontal y otra vertical.

Es pues, de esperarse que el disco vibre en las direcciones horizontal y vertical simultáneamente, y, en particular, esperamos que el disco vibre violentamente, cuando estos impulsos entran en resonancia con la frecuencia natural del conjunto, es decir, cuando la velocidad angular  $\omega$  de la flecha coincide con la frecuencia natural de vibración  $f$  del sistema sin girar, debido a la elasticidad de su flecha.

Esta conclusión no se restringe al caso de un solo disco montado simétricamente sobre dos apoyos rígidos, es válida también para sistemas más complicados. Las velocidades que originan vibraciones violentas, como las descritas, se conocen como "velocidades críticas". En general, las velocidades críticas de cualquier flecha cilíndrica con varios discos girando sobre dos o más apoyos rígidos, coincide con las frecuencias naturales de vibración de las flechas, sin girar sobre sus apoyos.

Dunkerley dedujo que las velocidades de rotación eran iguales a las frecuencias naturales de vibración transversal, siendo el mismo número de vibraciones de rotación como las frecuencias naturales para un sistema dado. Así un valor teórico de la velocidad crítica se debe obtener por la fórmula fundamental de vibraciones transversales :

$$f_1 = \sqrt{\frac{EJ}{Wl^3} C} \quad (6.1.6)$$

donde :

$f_1$  = primera frecuencia natural de vibración transversal.

$E$  = módulo de Young.

$J$  = segundo momento de área de la flecha.

$W$  = peso por unidad de longitud de la flecha.

$g$  = aceleración de la gravedad.

$C$  = constante que depende de las condiciones de apoyo.

El valor de  $C$  es el que resulta de la teoría de Vigas y para varias condiciones de apoyo, los valores están mostrados en la tabla 6.1.1. El valor  $C_1$  es la constante para usarla en el cálculo de la primera frecuencia natural y  $C_2$  es el que se necesita para el segundo modo de la frecuencia. De la tabla 6.1.1 el tercer caso se incluye solamente para propósitos comparativos, puesto que este caso no se podrá experimentar.

### 6.1.3.- EQUIPO

- . Máquina de velocidad de rotación crítica de flechas
- . Control de velocidad del motor E3.
- . 6 flechas de acero standard.
- . 3 discos de acero.

caso		Apoyos	$C_1$	$C_2$
1		Libre-Libre	1.572	6.3
2		Fijo - Fijo	3.57	8.82
3		Voladizo	0.56	-
4		Fijo -Libre	2.459	7.96

Tabla 6.1.1

Tabla de constantes para calcular la frecuencia de vibraciones transversales para varias condiciones de apoyo .

- . Boquilla intercambiable
- . Estroboscopio
- . Flexómetro

#### 6.1.4.- DESCRIPCION DEL APARATO.

Una representación diagramática del aparato de velocidad de rotación crítica de flechas se muestra en la figura 6.1.3a.

La flecha I, es de la forma mostrada en la figura 6.1.3b y se localiza entre las boquillas F y N las cuales están conectadas al soporte A del aparato.

Usaremos flechas de varios diámetros y longitudes, las cuales aparecen tabuladas en la tabla 6.1.2.

Los soportes de las boquillas F y N han sido diseñados para admitir el movimiento de la flecha en una dirección longitudinal para el propósito de colocación antes de apretar la flecha y para la sujeción direccional de los extremos de la flecha (a apoyo fijo). La boquilla corrediza intercambiable T admite un soporte libre direccional (apoyo libre). Las boquillas aparecen dibujadas en las figuras 6.1.4 y 6.1.5.

Un soporte móvil E se conecta a la boquilla F; cuando éste se mueve hacia la derecha de la posición mostrada en el diagrama provee al soporte final del motor un apoyo libre idéntico al de la boquilla T.

De esta manera con la selección de los soportes requeridos, cualquier combinación de apoyo libre o fijo pueda ser experimentada como se muestra en la tabla 6.1.1.

El motor B trabaja a 6000 rpm corriente directa, la flecha es movida por una fracción de caballo de potencia a través del par cinerático C, mostrado en la figura 6.1.6. La velocidad del motor es controlada por la unidad de control de velocidad del motor E y la cual ha sido diseñada para prevenir sobrecargas considerables.

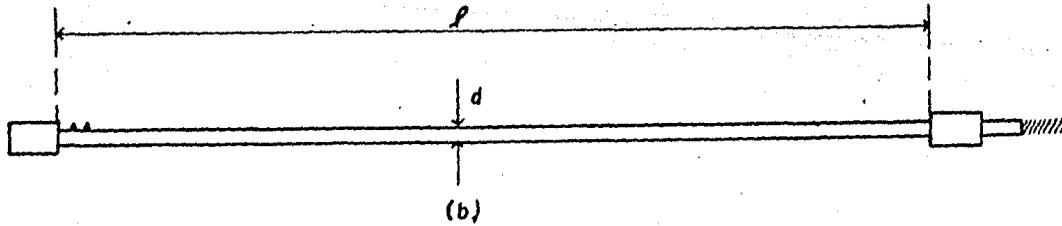
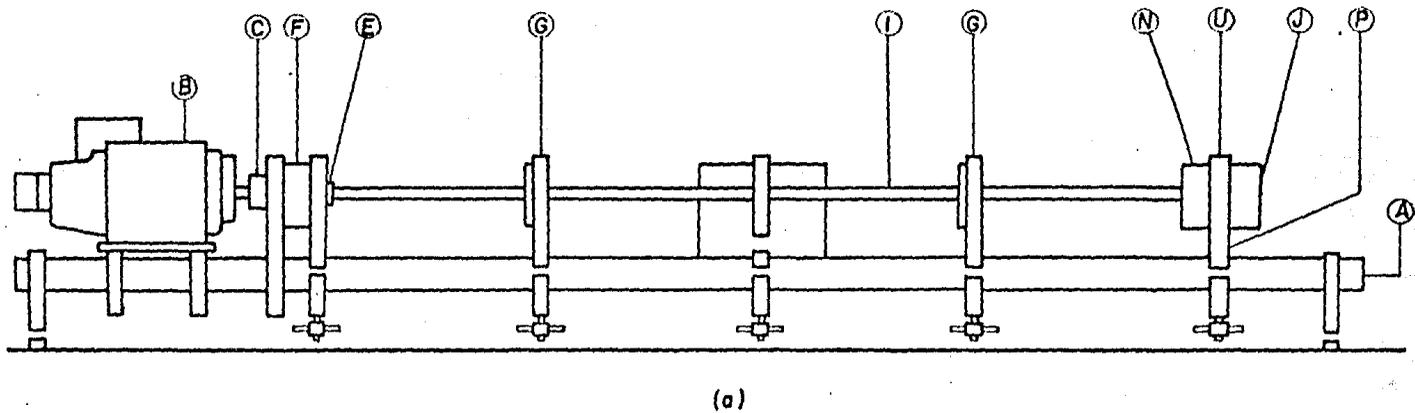


Figura 6.1.3

Flecha número	d	<i>l</i>
	mm	m
1	3.175	0.6096
2	3.175	0.9144
3	6.350	0.6096
4	6.350	0.9144
5	7.143	0.6096
6	7.143	0.9144

Tabla 6.1.2

Diámetros y longitudes de las flechas de prueba.

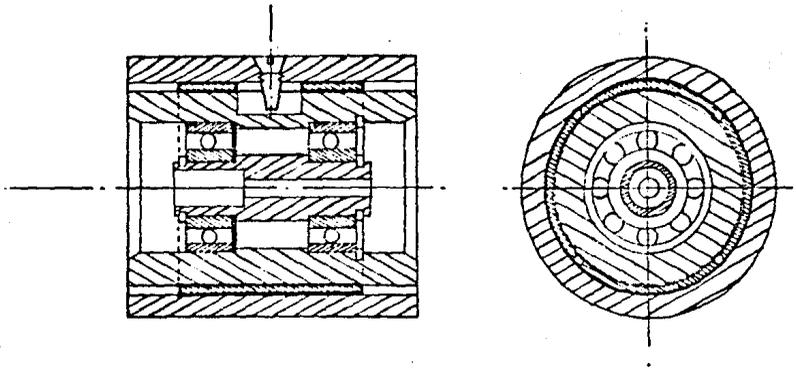


Figura 6.1.4

Soporte de boquilla N

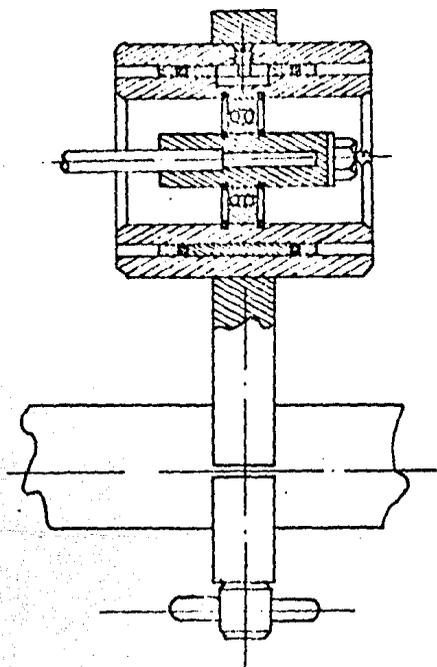


Figura 6.1.5  
Soporte de boquilla T

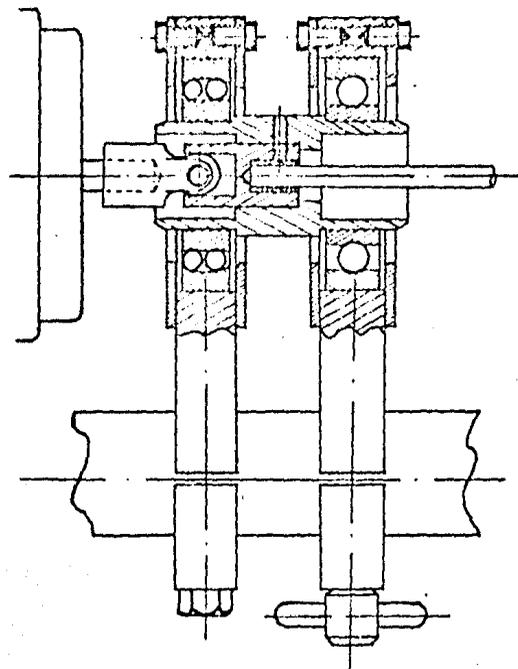


Figura 6.1.6  
Par Cinemático C

Debido a la posibilidad de amplitudes excesivas y posible rotura de la flecha, existen las guardas G manufacturadas con cojinetes de metal braidite para amortiguar los golpes de la flecha. Estas se ajustan a través de toda la longitud del aparato y han sido diseñadas para limitar las amplitudes de las flechas en rotación.

La boquilla N también está provista con un soporte ajustable P, para colocar varias longitudes de flechas.

Se utilizarán 3 discos de acero para ser colocados en las flechas 5 y 6 de 7.143 mm de diámetro. Dos discos son de igual peso (322 g) por lo que se podrán analizar flechas con cargas simétricas. Y el tercer disco es más pesado (440 g) por lo que también se analizarán flechas con cargas asimétricas.

#### 6.1.5.- DESCRIPCIÓN DEL ESTROBOSCOPIO

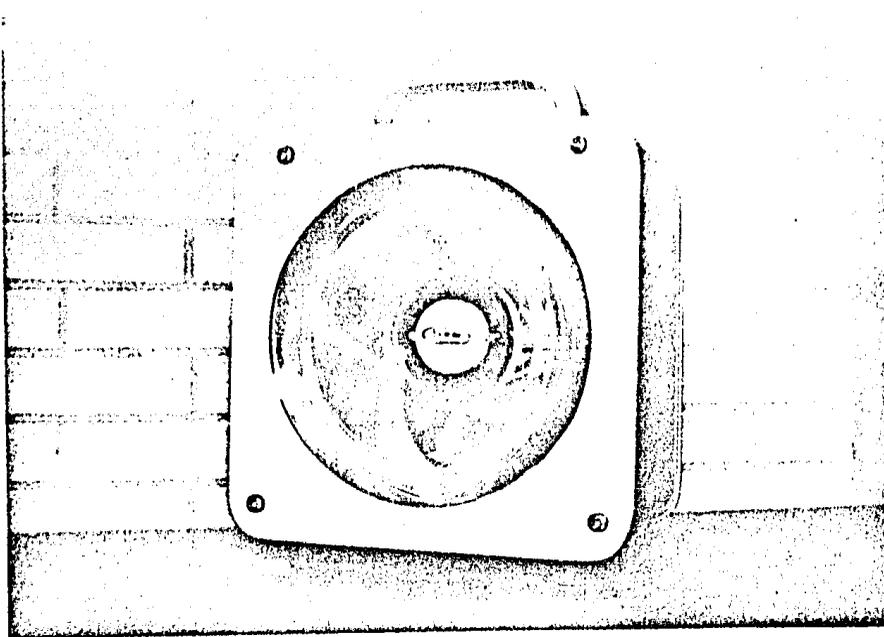
El estroboscopio mostrado en las figuras 6.1.7a y 6.1.7b, es un instrumento totalmente transistorizado, portátil y con doble rango de relampagueo a través de todo el rango de velocidad del motor.

Al trabajar con el aparato de rotación crítica de flechas es necesario el uso del estroboscopio. En los experimentos sobre rotación crítica de flechas, un contacto eléctrico fijado al eje del motor transmitirá un destello por cada revolución de la flecha en exactamente la misma posición. Así a cualquier velocidad a la que deba rotar la flecha, ésta aparecerá como estacionaria. El estroboscopio se usará para medir la velocidad rotacional y observar la configuración de la flecha durante la velocidad crítica de rotación.

NOTA: Especificaciones más detalladas y el manejo conveniente del estroboscopio se enuncian en el Apéndice de esta práctica.

#### 6.1.6.- METODO EXPERIMENTAL

6.1.6.1.- Velocidad de rotación crítica de una flecha sin cargas, rígidamente apoyada a ambos extremos.



*Figura 6.1.7a*

*Estroboscopio Vista Anterior.*

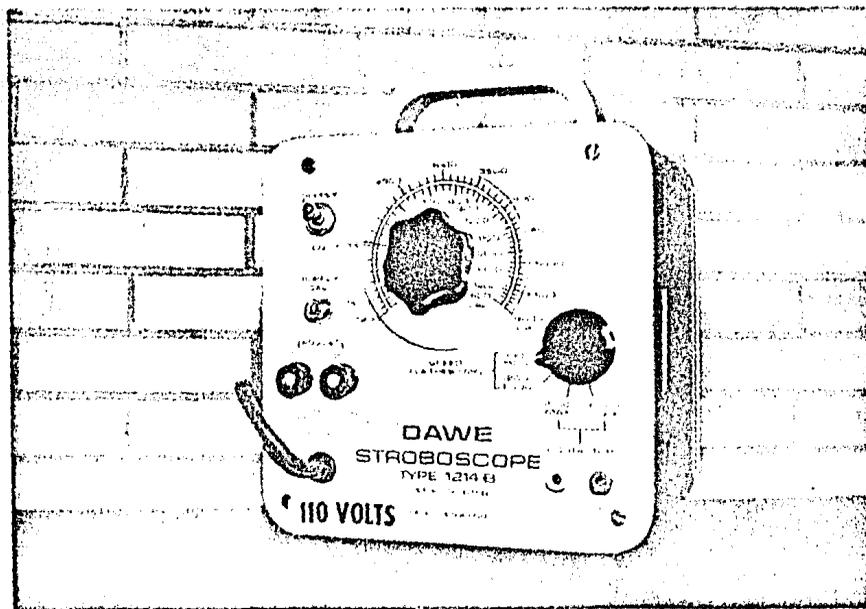


Figura 6.1.7b

*Estraboscopio Vista Posterior.*

Este experimento corresponde al caso 2 de la tabla 6.1.1, en el cual la flecha está rigidamente colocada en las boquillas a ambos extremos. Se selecciona una flecha en particular, siendo la más adecuada la de diámetro mayor (7.143 mm) debido a que esta sección es menos propensa a deformarse o romperse.

Esta flecha, ya sea de 0.6096 m o 0.9144 m de longitud deberá colocarse un extremo en la boquilla F y apretarse, pasarla a través de las guías G y colocar su otro extremo en la boquilla H sobre el soporte P y apretarse.

Es necesario asegurarse que todos los tornillos estén debidamente apretados y que las guías y soportes de las boquillas estén perfectamente fijos al marco del aparato para evitar que la flecha se doble o fracture al efectuar las pruebas.

El control de velocidad E 3 debe entonces encenderse y la perilla de control girada lentamente en dirección manecillas del reloj. La velocidad de la flecha se debe incrementar hasta un punto en el cual la inestabilidad empieza a manifestarse, mostrando que la velocidad crítica está empezando a aparecer.

Para acertar con esta velocidad, el estroboscopio deberá encenderse y con el selector en el rango de 300 a 1500 flash/min, dirigir la razón de relampagueo a la flecha. Deberá incrementarse la razón de relampagueo hasta algún punto conveniente donde se observe que la flecha parece estar estacionaria, en este punto la razón de relampagueo coincide con la velocidad de rotación de la flecha; la lectura de la escala en el estroboscopio nos indicará la velocidad angular de la flecha en ese instante.

Para determinar la magnitud de la velocidad crítica de rotación es necesario incrementar las rotaciones de la flecha hasta observar que la amplitud de las vibraciones transversales lleguen a un máximo. Esto lo podemos determinar cuando el ruido producido por la rotación de la flecha y el golpeteo contra las guardas llega a ser muy grande. La razón de relampagueo debe entonces ajustarse por un segundo operador, hasta que la flecha aparezca estacionaria de nuevo.

El valor de la razón de relampagueo debe anotarse y ser igual al valor de la velocidad crítica.

Una manera alternativa de determinar la velocidad crítica es anotar los valores de la frecuencia a la cual las amplitudes - excesivas comienzan y luego terminan, estos serán los límites - de la banda de frecuencias en la cual se encuentra la velocidad crítica.

Entonces la velocidad crítica se tomará como el promedio de éstos valores. La figura 6.1.8 muestra un típico primer modo de la velocidad de rotación crítica de una flecha sin carga.

Después de localizar la primera velocidad de rotación crítica la velocidad se incrementa hasta que las amplitudes excesivas terminen y la flecha retorne a estabilizarse. La velocidad debe entonces incrementarse aún más hasta que un doble arco comience a formarse con la flecha, indicando que el segundo modo ha sido alcanzado. El proceso anterior se repite en el mismo orden para determinar la segunda velocidad de rotación crítica. La figura 6.1.9 muestra una forma típica de este modo de rotación. La velocidad de el motor debe entonces regresarse rápidamente a cero, no dando tiempo para que las amplitudes vuelvan a formarse, y así no exista la posibilidad de una deflexión permanente de la flecha.

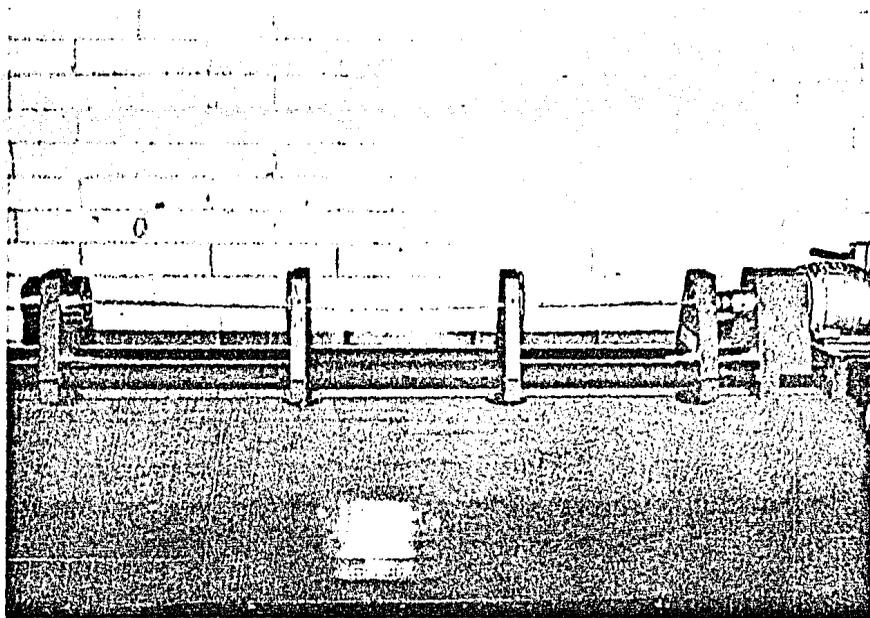
Para observar el modo de rotación de la flecha el estroboscopio se conecta en forma externa (ver apéndice) para que la razón de relampagueo sea igual a la velocidad rotacional de la flecha.

Este experimento podrá repetirse para varias longitudes y diámetros de flechas.

#### 6.1.6.2.- Velocidad de rotación crítica de una flecha Sin carga con un apoyo fijo y uno libre.

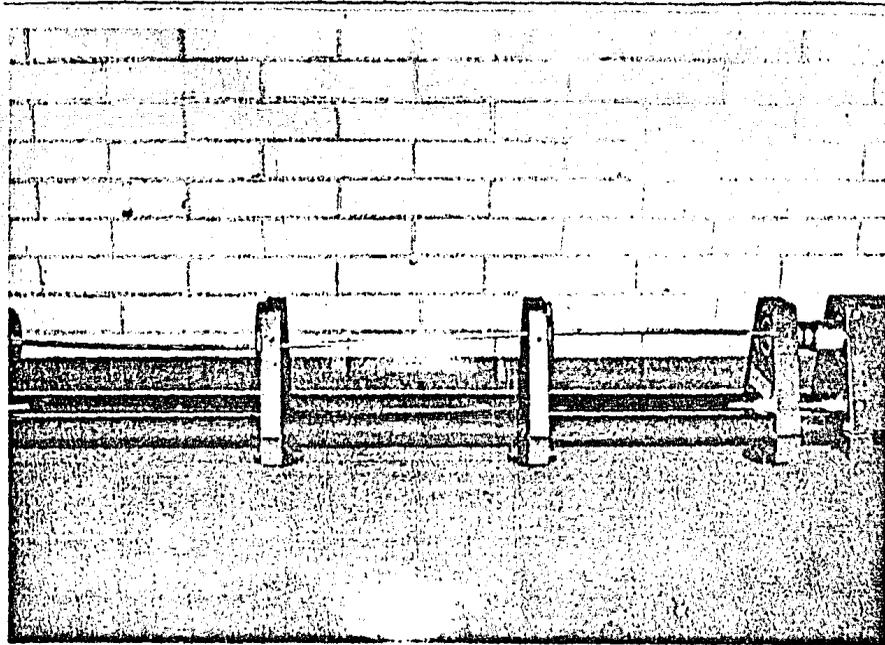
El aparato se ensambla de la misma manera que en 6.1.6.1, con excepción de la boquilla N la cual es reemplazada por la boquilla T.

Los experimentos se llevan a cabo siguiendo los mismos pasos que para 6.1.6.1, utilizando varias longitudes y diámetros de flechas.



*Figura 6.1.8*

*Primer modo de la velocidad de rotación crítica de una flecha sin carga.*



*Figura 6.1.9*

*Segundo modo de la velocidad de rotación crítica de una flecha sin carga.*

### 6.1.6.3.- Velocidad de rotación crítica de una flecha sin carga con apoyos libres.

Para este experimento la boquilla T permanece en su lugar y el soporte E se mueve a la derecha de la boquilla F.

### 6.1.6.4.- Velocidad de rotación crítica de una flecha con cargas.

Para cualquier combinación de apoyos en los extremos de la flecha; deben investigarse los efectos de cargas concentradas sobre el modo de rotación y la velocidad crítica de rotación.

De esta manera sistemas con una, dos o tres masas se analizarán colocando discos de diferentes pesos a lo largo de la flecha fijados con tornillos a ésta.

Se toma en cuenta la colocación geométrica de los discos a lo largo de la flecha y las guardas G del aparato se colocan entre cada masa para asegurar la protección de la flecha. Por lo tanto pruebas similares a 6.1.6.1, 6.1.6. y 6.1.6.3 podrán llevarse a cabo.

### 6.1.7.- RESULTADOS

Las tablas 6.1.3 y 6.1.4 muestran los modos típicos de rotación a velocidades críticas, en las cuales se encuentran tabuladas los desplazamientos de flecha observados con la razón de resaca igual a la velocidad rotacional de la flecha.

La tabla 6.1.5 muestra los resultados obtenidos para flechas sin carga, las columnas 11 y 12 contienen las velocidades críticas observadas experimentalmente y obtenidas según el método descrito en la sección 6.1.5. Además también se encuentran tabulados los valores teóricos de la velocidad crítica obtenidos con la fórmula fundamental de vibraciones transversales.

#### 6.1.7.1.- Cálculo de la primera frecuencia natural, primera velocidad crítica de rotación.

Prueba Nº	Condiciones de los apoyos	Modo de Rotación	
1	Libre - Fijo	1º	
2		2º	
3	Fijo - Fijo	1º	
4		2º	
5	Libre - Fijo	1º	
6		2º	

Tabla 6.1.3

Experimentos realizables con flechas elásticas

Prueba No	Modo de rotación	Condiciones de Apoyo		
		Libre - Fijo	Fijo - Fijo	Libre - Libre
Sistema de una sola masa				
1	1°			
2	2°			
3	3°			
Sistema de dos masas				
4	1°			
5	2°			
6	1°			
7	2°			
8	1°			
9	2°			
Sistema de tres masas				
10	1°			
11	1°			
12	1°			

Tabla 6.1.4

Experimentos realizables con flechas elásticas con cargas concentradas.

\*\* Indica frecuencias fuera de la capacidad del motor.

Prueba No.	Apoyo 1	Apoyo 2	d mm	$\lambda$ m	W N	I m <sup>4</sup>	E N/m <sup>2</sup>	f TEORICO cps		f EXPERIMENTAL cpm		f TEORICO cpm	
								1º modo	2º modo	1º modo	2º modo	1º modo	2º modo
1	Libre	Fijo	3.175	0.6096	0.6131	$5 \times 10^{-12}$	$207 \times 10^9$	26.57	86.3	15.50	5000	1594	5179
2	Libre	Fijo	3.175	0.9144	0.6131	$5 \times 10^{-12}$	$207 \times 10^9$	11.81	38.3	750	2400	709	2302
3	Libre	Fijo	6.350	0.6096	2.435	$8 \times 10^{-11}$	$207 \times 10^9$	53.62	174.2	3400	**	3217	10452
4	Libre	Fijo	6.350	0.9144	2.435	$8 \times 10^{-11}$	$207 \times 10^9$	23.94	77.7	1500	5000	1436	4665
5	Libre	Fijo	7.143	0.6096	3.0833	$1.3 \times 10^{-10}$	$207 \times 10^9$	61.02	198.3	3600	**	3661	11898
6	Libre	Fijo	7.143	0.9144	3.0833	$1.3 \times 10^{-10}$	$207 \times 10^9$	27.10	88.0	1600	5350	1626	5280
7	Libre	Fijo	3.175	0.9144	0.6131	$5 \times 10^{-12}$	$207 \times 10^9$	17.02	47.4	1050	3000	1021	2844
8	Fijo	Fijo	6.350	0.9144	2.435	$8 \times 10^{-11}$	$207 \times 10^9$	34.5	95.95	21.50	**	2070	5757
9	Fijo	Fijo	7.143	0.6096	3.0833	$1.3 \times 10^{-10}$	$207 \times 10^9$	87.9	244.6	5500	**	5274	14676
10	Fijo	Fijo	7.143	0.9144	3.0833	$1.3 \times 10^{-10}$	$207 \times 10^9$	39.0	108.6	2300	**	2340	6516
11	Libre	Libre	3.175	0.9144	0.6131	$5 \times 10^{-12}$	$207 \times 10^9$	7.6	30.4	500	1900	466	1824
12	Libre	Libre	6.350	0.9144	2.435	$8 \times 10^{-11}$	$207 \times 10^9$	15.3	61.6	1000	3750	918	3696
13	Libre	Libre	7.143	0.6096	3.0833	$1.3 \times 10^{-10}$	$207 \times 10^9$	39.1	158.9	2300	**	2346	9414
14	Libre	Libre	7.143	0.9144	3.0833	$1.3 \times 10^{-10}$	$207 \times 10^9$	17.3	69.4	1200	4200	1038	4154

Tabla 6.1.5

Tabla de resultados para flechas sin carga.

$$f_1 = \sqrt{\frac{E J g}{W \ell^4}} C_1 \quad (6.1.6)$$

Como ejemplo un cálculo de  $f_1$  para la prueba 1 de la tabla - 6.1.5 sería :

$f_1$  = frecuencia

$E$  = Módulo de Young =  $207 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$

$J$  = segundo momento de área para una sección circular

$$J = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{donde} \quad d = 3.175 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/seg}^2$$

$W$  = peso por unidad de longitud, para la flecha de  $3.175 \times 10^{-3}$  m de diámetro = 0.6131 N/m

$\ell$  = longitud de la viga = 0.6096 m

$C_1$  = constante de la tabla 1, para apoyos  
Libre - Fijo,  $C_1 = 2.459$

Por lo tanto

$$f_1 = \sqrt{\frac{(207 \times 10^9)(0.003175)^4(9.81)}{(0.6131)(64)(0.6096)^4}} \times 2.459$$

$$f_1 = 26.57 \text{ cps} = \underline{1594 \text{ cpm}}$$

Este valor se compara favorablemente con el valor experimental de 1550 cpm.

Similarmente, para calcular la segunda velocidad crítica la misma fórmula es usada pero con  $C_2 = 7.96$

Por lo tanto,  $f_2 = 86.33 \text{ cps} = 5179 \text{ cpm}$

De nuevo es congruente con el valor experimental de 5000 cpm.

La tabla 6.1.6 muestra los resultados obtenidos para varias combinaciones de flechas con cargas.

La manera de calcular el valor de una velocidad crítica de rotación para una flecha con carga aparece en la mayoría de los textos de vibraciones y está basada en una fórmula aproximada - derivada por Dunkerley. Esta ecuación toma la forma de :

$$N_c = \frac{187.8}{\sqrt{(\delta_1 + \delta_2 + \dots + 1 - \frac{\delta_s}{27})}} \quad [\text{cpm}]$$

donde :

$N_c$  = velocidad crítica

$\delta_1, \delta_2, \text{etc}$  = son las deflexiones del sistema para cada masa - actuando sola.

$\delta_s$  = es la deflexión estática de la viga a media envergadura bajo su propio peso.

La tabla 6.1.7 nos muestra las fórmulas de deflexión para usarse en la ecuación de Dunkerley.

donde :

$\delta_s$  = deflexión de la flecha, [m]

$\delta_1$  = deflexión debida a la masa 1, [m]

$\delta_2$  = deflexión debida a la masa 2, [m]

$l$  = longitud de la flecha, [m]

$E$  = módulo de Young, [N/m<sup>2</sup>]

$J$  = segundo momento de area de la flecha, [m<sup>4</sup>]

Prueba No	Apoyo 1	Apoyo 2	No. de pesos	W <sub>1</sub> gr	W <sub>2</sub> gr	Deflexión δ <sub>1</sub> m	Deflexión δ <sub>2</sub> m	Deflexión δ <sub>e</sub> de la flecha m	N <sub>i</sub> Teórico apm	N <sub>i</sub> Experimental apm
1	Libre	Fijo	1	322	—	$1.873 \times 10^{-3}$	—	$4.174 \times 10^{-4}$	4002	3700
2	Fijo	Fijo	1	322	—	$1.873 \times 10^{-3}$	—	$2.087 \times 10^{-4}$	4160	3700
3	Libre	Libre	1	322	—	$1.873 \times 10^{-3}$	—	$10.43 \times 10^{-4}$	3618	3400
4	Libre	Fijo	2	322	322	$1.48 \times 10^{-3}$	$1.48 \times 10^{-3}$	$4.174 \times 10^{-4}$	3274	3400
5	Fijo	Fijo	2	322	322	$1.48 \times 10^{-3}$	$1.48 \times 10^{-3}$	$2.087 \times 10^{-4}$	3360	3600
6	Libre	Libre	2	322	322	$1.48 \times 10^{-3}$	$1.48 \times 10^{-3}$	$10.43 \times 10^{-4}$	2968	3200
7	Libre	Fijo	2	322	440	$1.48 \times 10^{-3}$	$2.02 \times 10^{-3}$	$4.174 \times 10^{-4}$	3035	3300
8	Fijo	Fijo	2	322	440	$1.48 \times 10^{-3}$	$2.02 \times 10^{-3}$	$2.087 \times 10^{-4}$	3102	3400
9	Libre	Libre	2	322	440	$1.48 \times 10^{-3}$	$2.02 \times 10^{-3}$	$10.43 \times 10^{-4}$	2786	2900

Tabla 6.1.6.

Tabla de resultados para flechas con carga.

Nota: Todas las pruebas se efectuaron con la flecha número 3 (ver tabla 6.1.2).

Flecha con ambos extremos fijos	$\delta_s = \frac{1}{384} \frac{W l^4}{E J}$
Flecha con ambos extremos Libres (simplemente apoyada)	$\delta_s = \frac{5}{384} \frac{W l^4}{E J}$
Flecha con extremos Fijo - Libre	$\delta_s = \frac{1}{192} \frac{W l^4}{E J}$
Sistema de una sola masa	$\delta_1 = \frac{W l^3}{48 E J}$
Sistema de dos masas	$\delta_1 = \frac{W_1 a_1^2 b_1^2}{3 E J l} \quad \delta_2 = \frac{W_2 a_2^2 b_2^2}{3 E J l}$

Tabla 6.1.7

Fórmulas de deflexión usadas en la ecuación de Dunkerley

$a_1, b_1 =$  las dos partes de la flecha entre  $W_1$ , [m]

$a_2, b_2 =$  las dos partes de la flecha entre  $W_2$ , [m]

6.1.7.2.- Cálculo de la primer frecuencia natural para un sistema de una flecha con 2 masas.

Un ejemplo de cálculo para el sistema de 2 masas analizando en la prueba 6 de la Tabla 6.1.6 sería como sigue:

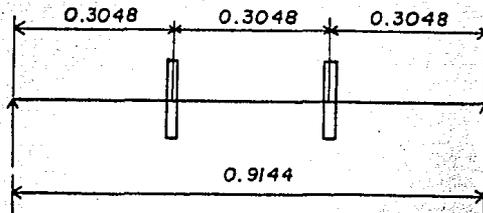
$$E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64}; \quad d = 7.143 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$N_c = \frac{187.8}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2 + 1.27}}$$

$$l = 0.9144 \text{ m}$$

$$W = 3.159 \text{ N}$$



$$\delta_s \text{ (para una flecha libremente apoyada)} = \frac{5}{384} \frac{W l^4}{EJ}$$

Por lo tanto

$$\delta_s = \frac{(5)(3.159)(0.9144)^4}{(384)(207 \times 10^9)(1.3 \times 10^{-10})}$$

$$\delta_s = 1.043 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{W_1 a_1^2 b_1^2}{3 E J \lambda}$$

donde

$$W_1 = W_2 = 3.159 \text{ N} = 0.322 \text{ Kg}$$

$$a_1 = 0.3048 \text{ m}$$

$$b_1 = 0.6096 \text{ m}$$

Por lo tanto

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{(3.159) (0.3048)^2 (0.6096)^2}{(3) (207 \times 10^9) (1.3 \times 10^{-4}) (0.9144)}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 1.48 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Entonces

$$N_c = \frac{137.3}{\sqrt{(1.48+1.48 + \frac{1.043}{1.27}) \times 10^{-3}}}$$

$$N_c = 2968 \text{ cpm}$$

### 6.1.3.- CONCLUSIONES

1.- En la realización de esta práctica se observó claramente - los modos de las velocidades críticas de rotación de una flecha con cargas y sin cargas con ayuda del Estroboscopio.

2.- Se recomienda utilizar el Estroboscopio en un local a media luz, para que sean más claras las observaciones.

3.- Refiriéndonos a las tablas de resultados 6.1.5 y 6.1.6 para flechas sin carga y con carga respectivamente, podemos observar que los valores obtenidos experimentalmente de la velocidad crítica de rotación difieren en un mínimo porcentaje a los valores analíticos obtenidos en base a las ecuaciones establecidas en la teoría.

4.- Para una flecha de un mismo diámetro, a menor longitud entre apoyos, las velocidades críticas de rotación se alcanzan a mayor velocidad angular de la flecha.

5.- Para una flecha de un mismo diámetro y una misma longitud las velocidades críticas de rotación se alcanzan a una mayor velocidad angular de la flecha, en el siguiente orden ascendente: cuando está soportada sobre apoyos Libre-Libre; Fijo-Libre - Fijo-Fijo.

6.- El punto anterior también se cumple cuando se trata de una flecha de igual diámetro y longitud con cargas simétricas o asimétricas aunque la diferencia entre los valores numéricos de las velocidades críticas es menor que para flechas sin carga.

7.- La velocidad crítica de una flecha es aquella a la cual - sus fuerzas elásticas están completamente neutralizadas, de manera que son incapaces de ofrecer resistencia alguna a una - fuerza deformante o flexionante. Esta velocidad es numérica - mente igual a la frecuencia de vibración de la flecha con masas montadas sobre ella, si es deformada por una fuerza externa -

mientras la flecha está parada. Su valor depende de la longitud de la flecha, de sus diversos diámetros, de la manera como es soportada y de la magnitud y distribución de las cargas que soporta.

## APENDICE

### ESTROBOSCOPIO TIPO 1214 B

#### 1.- INTRODUCCION

El estroboscopio se utiliza en laboratorios de escuelas y universidades para hacer observaciones de movimientos rotacionales rápidos y objetos recíprocos. Este estroboscopio en particular (figuras 6.1.7a y 6.1.7b) ha sido diseñado por la Sección de Fotografía Estroboscópica del Departamento de Educación Escocés, y se recomienda el uso de una cámara polaroid como accesorio. Este instrumento es capaz de hacer mediciones directas de velocidades angulares desde 300 a 6000 rpm, y de mediciones indirectas hasta de 60000 rpm.

El principio de la medición del Estroboscopio descansa sobre una comparación de la velocidad de relampagueo conocida de una lámpara con la velocidad de rotación desconocida de un objeto.

Cuando la razón de relampagueo de la lámpara en flashes/min, es idéntica con la razón de rotación de un cuerpo en rpm  $\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{minuto}}\right)$ , el cuerpo parece estar en reposo y de esta forma si una marca es hecha sobre el cuerpo ésta será iluminada siempre en la misma posición.

Si la razón de relampagueo es ligeramente más lenta que la razón de rotación, el cuerpo aparecerá rotando a una velocidad lenta en el sentido de rotación normal, esto se debe a que cualquier punto dado sobre el cuerpo avanza liberamente más rápido por cada tiempo de relampagueo de la lámpara.

Si la razón de relampagueo es ligeramente más rápida que la razón de rotación, el cuerpo aparecerá rotando a una velocidad lenta pero en el sentido inverso de la rotación normal, esto se debe a que puntos sucesivos sobre el cuerpo son iluminados por cada tiempo de relampagueo y esto dentro del campo de visión humana se observa al cuerpo girando en sentido opuesto al normal.

#### 2.- PRECAUCIONES

- No quitar la cubierta del instrumento cuando este funciona-

do. El tubo de relampagueo opera a alto voltaje.

- No dirigir la luz a los ojos, una exposición directa prolongada podrá ser peligrosa.

- Mantener el estroboscopio a una cierta distancia del objeto en estudio para evitar el contacto con partes en movimiento.

### 3.- PARTES PRINCIPALES

- Pánel de Control
- Lámpara con cubierta transparente
- Tubo de relampagueo

### 4.- CONTROLES

Solo hay 3 controles de operación

- Control de encendido
- Control de velocidad
- Control de rangos de velocidad

El instrumento debe conectarse a la línea principal de suministro de energía y encenderse con el control de encendido en la posición ON. El control de encendido se encuentra en la parte superior izquierda del panel de control.

El control de velocidad situado al centro del panel de control posee una aguja que marca sobre dos rangos calibrados sobre una misma escala. La posición de la aguja sobre el rango apropiado nos da la lectura de la velocidad en flashes/min.

Y en la parte inferior derecha del panel de control se encuentra el control de rangos de velocidad, con el cual se selecciona el rango apropiado de velocidad con respecto al cual se toman las mediciones. Además este control selecciona la forma interna o externa de operación del aparato.

Las dos posiciones más altas seleccionan los rangos para operación interna y las dos posiciones más bajas seleccionan los rangos para operación externa.

#### 5.- CALIBRACION

El aparato debe calibrarse antes de cualquier operación de la siguiente forma :

- Coloque el control de rangos de velocidad a 300 - 1500 flashes/min.
- Encienda el aparato
- Coloque la aguja del control de velocidad a 1200 flash/min
- Debajo del control de encendido se encuentra una lámpara indicadora de Neón para calibración, si la lámpara prende y - apaga continuamente el aparato está mal calibrado.
- Para hacer la correcta calibración, debajo de la lámpara se encuentra un tornillo de ajuste con la inscripción 1200, al ajustar este tornillo y observar que la lámpara de Neón se mantiene encendida, el rango 300 - 1500 flash/min. estará - calibrado.

Ahora para calibrar el rango 1200 - 6000 flash/min. se procederá como sigue :

- Coloque el control de rangos de velocidad a 1200 - 1600 - flashes/min.
- Encienda el aparato
- Coloque la aguja del control de velocidad a 3600 flash/min.
- Debajo de la lámpara de Neón se encuentra otro tornillo de ajuste con la inscripción 3600, al ajustar este tornillo y

observar que la lámpara se mantiene encendida, el rango -  
1200 - 6000 flashes/min estará calibrado.

## 6.- OPERACION

Cuando se trate de encontrar una velocidad de rotación desconocida de un cuerpo, el estroboscopio debe operar en forma interna seleccionando cualesquiera de los dos rangos (300 - 1500 o, 1200 - 6000 flash/min) de las dos posiciones superiores del control de rangos de velocidad.

Si se trata de igualar una velocidad de rotación conocida de un cuerpo con la razón de relampagueo del estroboscopio, éste deberá operar en forma externa, seleccionando cualesquiera de los 2 rangos (1500 máx o 6000 máx) de las dos posiciones inferiores del control de rangos de velocidad.

Al operar el aparato en forma externa se debe hacer la siguiente conexión.

En la parte inferior derecha del panel de control se encuentran 2 entradas (amarillo y verde) estas se deben conectar mediante una extensión a otro contacto situado en la máquina rotativa o reciprocante:

De esta manera se sincroniza la razón de relampagueo del estroboscopio y la razón de velocidad de rotación del objeto en estudio.

Estando debidamente calibrado el instrumento, la secuencia recomendada de operación es la siguiente :

- a) Coloque el control de rangos de velocidad en su correcta posición ya sea operación interna o externa y después seleccione el rango de velocidad apropiado.
- b) Conecte el instrumento al suministro de energía y enciéndalo .
- c) Dirija la luz del estroboscopio al objeto en estudio.

d) Opere el control de velocidad como se requiera.

#### PRECAUCION:

El estroboscopio opera a alto voltaje y la cubierta de la lámpara no debe ser removida hasta 5 minutos después de desconectarse.

#### 7.- MEDICION DE LA VELOCIDAD

Una imagen estacionaria del objeto aparecerá cuando el relampagueo y la velocidad de rotación sean iguales.

Cuando la velocidad de rotación de algún cuerpo se desconozca completamente, se comienza a operar el estroboscopio con una razón de relampagueo alta (observandose varias imagenes) y se reduce la frecuencia hasta que una sola imagen estacionaria aparezca.

La escala apropiada dará la lectura directa de la velocidad de rotación del cuerpo en Flash/min. equivalentes a ciclos/min (cpm) o revoluciones/minutos (rpm).

También aparecerá una imagen estacionaria del objeto cuando la velocidad de rotación sea exactamente un múltiplo de la razón de relampagueo.

Pero si la razón de relampagueo es el doble de la velocidad de rotación se observarán 2 imagenes estacionarias a  $180^\circ$  cada una, de esta manera se obtendrán los mismos efectos para razones de relampagueo múltiples.

Si la velocidad de rotación se conoce aproximadamente el estroboscopio se coloca a esta velocidad y se ajusta para obtener una imagen estacionaria. La velocidad de rotación puede entonces leerse directamente en la escala de el aparato.

#### 3.- MEDICIONES DE ALTAS VELOCIDADES

En casos donde la velocidad del objeto esté fuera del rango del estroboscopio, debe seguirse el siguiente procedimiento:

Obtener una sola imagen estacionaria y anotar la lectura x -

obtenida en la escala.

Cambiar la razón de relampagueo hasta que el siguiente punto de sincronismo aparezca leyendo en la escala un valor  $y$ .

La velocidad del objeto estará dada por :

$$\frac{x \cdot y}{x - y}$$

cuando  $x$  es la más grande de las dos lecturas.

Ejemplo :

Se obtienen dos lecturas en las cuales el objeto aparece estacionario, estas son 4500 y 4000 flas/min.

Por lo tanto la velocidad real de rotación del objeto es :

$$\frac{4500 \times 4000}{4500 - 4000} = 36000 \text{ rpm}$$

## 9.- ESPECIFICACIONES

Rangos	2 rangos dando mediciones directas de velocidad 300 a 1500 flash/min y 1200 a 6000 flash/min
Precisión	± 5 % de la lectura de la escala.
Duración del Flash	5 a 10 microsegundos
Potencia del tubo de relampagueo	60 watts máxima. Alta intensidad de luz blanca.
Iluminación	80 Lux a 1 metro aproximadamente

Operación	Por medio de un Oscilador interno o por un par de contactos externos.
Calibración	Utilizando una lámpara de calibración de Neón.
Suministro de energía	110 volts, 60 Hertz, 240 Watts - aproximadamente.
Montaje	Cabina de metal portátil y compacta
Dimensiones	185 mm x 154 mm x 220 mm
Peso	3.2 Kg.
Marca	DAWE Instruments Limited Inglaterra .

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Análisis Cinemático de Mecanismos  
Joseph Edward Shigley
- 2.- Cam - Piston - Gear Mechanism MT 240  
Theory and Laboratory Exercises  
TecQuipment
- 3.- Cinemática de las Máquinas  
Guillet
- 4.- Coriolis Apparatus  
Instruction Book  
TecQuipment
- 5.- Diseño de Elementos de Máquinas  
V.M. Faires
- 6.- Diseño en Ingeniería Mecánica  
Shigley
- 7.- Física General  
Carel W. vander Merwe
- 8.- Hombre, Ciencia y Tecnología  
Encyclopedia Británica
- 9.- Mecánica de las Vibraciones  
J.P. Den Hartog
- 10.- Mecánica Técnica  
W.G. Mc Lean
- 11.- Mecánica Vectorial para Ingenieros Dinámica  
Beer y Johnston

- 12.- Mecanismos Máquinas  
Delmar Publishers
- 13.- Mecanismos y Dinámica de Maquinaria  
Hamilton H. Mabie, Fred W Ocvirk
- 14.- Mechanism Synthesis and Analysis  
Atmaram H. Soni
- 15.- Scotch Yoke  
Mechanisms Teaching Notes  
TecQuipment
- 16.- Slider Crank  
Mechanisms Teaching Notes  
TecQuipment
- 17.- Static and Dynamic Balancing Apparatus TM 102  
Technical Manual  
TecQuipment
- 18.- Stroboscope Type 1214 B  
Instruction Book  
TecQuipment
- 19.- Universal Vibration Apparatus TM 16  
Technical Manual  
TecQuipment
- 20.- Vibraciones Mecánicas  
William W Seto
- 21.- Whirling of Shafts Machine TM 1  
Technical Manual  
TecQuipment