Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DEL CONCEPTO DE INFINITO EN LOS GRIEGOS Y SU INFLUENCIA EN DENEKIND Y NEWTON.

T E S I S

Que para obtener el Título de:

MATEMATICO

P r e s e n t a

REYNALDO DE LA VEGA CERON

México, D. F. 1985

I N D I C E

Contenido | Página

INTRODUCCION

Al iniciar el presente trabajo pretendiamos hacer una síntesis de el nacimiento y evolución del concepto de infinito através de la historia de las matemáticas y de la filosofía; sin embargo, casí de inmediato notamos que uno de los principales problemas al abordar este tema es la enorme amplitud del mismo, ya que a través de la historia han sido miles de mentes las que se han dedicado, desde sus diferentes puntos de vista, a estudiarlo.

Por lo tanto en este trabajo sólo trataremos algunos aspectos de tan importante tema, reconociendo de antemano que en él omitiremos el pensamiento de matemáticos y filósofos que a través de la historia han contribuido a obtener grandes adelantos en su estudio, influyendo su obra hasta en el modo de vida de los diferentes pueblos.

Una de las principales omiciones a las que hemos hecho mención es sobre la obra de George Cantor, el cual con su teoría de los números transfinitos libro a los conjuntos infinitos de su aparente contradicción que implicaba el hecho de que dichos conjuntos fuesen equivalentes con algunos subconjuntos propios hecho que, inclusive, a mentes tan ilustres como Galileo y Leibniz les habia llevado a negar la existencia de los números infinitos.

Esta teoría está basada en un tratamiento matemático del infinito actual. Cantor asigna un número cardinal transfinito "aleph 0" $\aleph_0$, a los conjuntos numerables, o sea aquellos que son biyectables al conjunto de los números naturales, demuestra además que existen números transfinitos mayores que $\aleph_0$ haciendo posible una aritmética de los números transfinitos similar a la aritmética ordinaria.

Las ideas intuitivas que Cantor expone en su teoría de los números transfinitos, así como sus métodos de demostración, siguen siendo, después de cien años, el fundamento del moderno planteamiento de la Teoría de los Conjuntos y han abierto el camino hacia regiones totalmente nuevas de la matemática y la filosofía en el siglo XX.

A pesar de omisiones como la anterior, debidas a lo extenso del tema, si tratamos de realizar un trabajo como el presente, se pueden obtener experiencias y conocimientos muy valiosos, los cuales redundarán en un mayor y más profundo conocimiento de las bases que sustentan a las matemáticas modernas y ayudarán a las personas dedicadas a la docencia (aportando nuevos y muy importantes recursos) a realizar su difícil tarea con mayor eficacia.

Epistemológicamente, este trabajo tratará de resaltar la unidad histórica del pensamiento humano, especialmente en sus formas más elevadas, ya que no es posible que surjan espontáneamente ideas que cambien el rumbo del pensamiento del hombre, siendo necesaria para su aparición, la influencia del legado cultural, religioso, social y económico de toda la humanidad.

En primer lugar nos remontaremos a los primeros pensadores griegos, ya que la teoría del infinito tuvo sus orígenes en este sorprendente pueblo (como casi todas las teorías que dominan el pensamiento moderno occidental). Nos ocuparemos primero de la escuela eleática, que fué la primera en abordar el problema del Ser como algo inmutable e ilimitado. Estas teorías que quizá parezcan hasta infantiles, fueron las que dieron origen a una gran cantidad de corrientes en el estudio de la teoría del infinito.

A continuación abordaremos la crítica que a esta escuela hizo Aristóteles así como la enorme influencia en Platón y los Platónicos, de entre quienes surgen matemáticos de gran importancia, como Eudoxio, a quien debemos la teoría de la proporción y el método de exhaución, temas íntimamente relacionados con este trabajo.

En los siguientes capítulos estudiaremos las principales características de estas teorías, ambas contenidas en LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES, buscando analogías y diferencias entre ellas y la teoría de los números de Dedekind y los principios del cálculo diferencial en Isaac Newton, respectivamente.

Para realizar esto, en algunas partes del trabajo hemos reproducido textos especialmente reveladores de la obra de estos hombres para poderlos comparar y, de esta forma, sacar concordancias y divergencias.

Hemos procurado, asimismo, acudir a las fuentes bibliográficas originales de estos grandes pensadores, en sus traducciones al inglés o al español, así como a trabajos de análisis y críticas de personajes que han sabido captar, según nuestro criterio, la esencia de las diferentes corrientes del pensamiento universal.

CAPITULO I

ANTECEDENTES

LA ESCUELA DE ELEA

La ciudad de Elea fue fundada, según Heródoto, por los focenses en la costa meridional de Itàlia hacia los años 540-39, alcanzando inmediatamente un gran progreso [7] Pag. 75. En el campo de las letras y la filosofía fue cuna de una de las escuelas filosóficas más prestigiadas de la antigüedad, conocida como escuela eleatense o eleática.

La escuela eleática parece ser la continuadora de la escuela jónica. Los jónicos buscaron como las demás escuelas presocráticas el primer principio de las cosas y procuraron conocer de qué están hechas, de qué constan; buscaron el principio material concreto y constitutivo y lo encontraron en la naturaleza.

En los eleatas, principalmente en Parménides, encontramos también el fervor por la filosofía de la naturaleza, aunque ya desde un punto de vista personal y metafísico. Existe por lo tanto continuidad pero a la vez progreso entre la escuela jónica y la escuela eleática, progreso que alcanzará su clímax en Atenas, en la segunda mitad del siglo V a.c.

Aristóteles, tan poco inclinado hacia la escuela eleática, considera como fundador de ésta a Jenófanes de Colòfón, [1] Pág. 918, aseveración que no es aceptada en nuestros días; pero se puede considerar a este hombre como un enlace entre la escuela jónica y la escuela eleática, aunque aparece en él una caracterís tica propia de la escuela itálica, que no existía en los pensadores jónicos; dicha característica es una personalidad que se pierde en los filósofos de la naturaleza, enmedio del mito y la leyenda.

El estagirita atribuye a Jenófanes un sentimiento religioso que concreta a una unidad formal: "tan sólo al dirigir sus miradas sobre el conjunto del cielo -haciendo una alusión a Jenófanes-, ha dicho que la unidad es Dios" [4] , Pág. 13.

Platón nos dice en sus diálogos (Teetetos y el Parménides) que los pensadores de la escuela eleática son filósofos partidarios del "todo" y el "todo" es la unidad indivisible; en el caso de Jenófanes, según la Metafísica de Aristóteles, sin embargo, aunque este filósofo ya vislumbraba el amanecer del eleatismo no logró desprender a su obra de un carácter religioso, que le impide alcanzar el ideal metafísico propio de la escuela de Elea.

Al eliminar a Jenófanes como fundador de la escuela de Elea, podemos considerar a Parménides como tal y, como principales representantes de dicha escuela a él, a Zenón y a Meliso. Es cierto que existen antecedentes del espíritu metafísico de la escuela eleatense entre los jonios y que para lo eleatences la influencia de la escuela petagórica es también muy importante. Sin embargo, las nuevas rutas que marcan Parménides y Zenón, junto con lo sistemático de su obra, los alejan definitivamente de las concepciones míticas y de las fórmulas religiosas tradicionales, llevándoles hacia una filosofía racional que habria de alcanzar su clímax en Platón.

Los problemas planteados por la escuela de Elea son problemas que tienen que ver con el Ser y con la facultad de conocerlo y juzgarlo. La escuela eleática admitía una realidad continua por esencia, cuestión que los pitagóricos no alcanzaban a comprender y que ya Parménides plantea en su poema sobre la naturaleza: [4] Págs. 15 y 16.

"no fue ni será jamás, ya que es ahora
en toda su integridad.
uno y continuo, porque, en efecto,
¿Qué origen podrías buscarle?
¿De dónde le vendría su crecimiento?
no admitiré que me digas o que pienses
que haya podido venir del no-ser, porque
no se puede decir ni pensar que el Ser no sea.

Los pitagóricos permanecieron aferrados a la teoría de la discontinuidad, ya que, al parecer, pensaban que el tiempo y el espacio estaban formados por instantes y puntos indivisibles respectivamente. Aristóteles nos dice: "Los pitagóricos afirmaban la existencia del vacío, que gracias a lo ilimitado de su soplo, penetra incluso hasta el mismo cielo; el cielo respira el vacío el cual, de esta manera, delimitaría las naturalezas; el vacío sería, pués, una separación de los seres consecutivos y su límite, y, además, sería una primera determinación en los números, pues el vacío es lo que delimita sus naturalezas" [1] Pág. 621.

Esto parece implicar que consideraron a la materia como compuesta de átomos con espacio vacío entre ellos, lo cual es totalmente opuesto a la escuela eleática que consideraba al todo como algo inmóvil y continuo.

Por lo tanto, la escuela eleática forma la avanzada que lleva a la filosofía jónica hasta Atenas, tomando todo lo bueno que había en la investigación anterior; retomándolo desde un punto de vista racional, guiados por algo que no es un principio cosmológico ni una entidad numérica, sino por un Ser inmutable, permanente e ilimitado que garantiza nuestro pensamiento y el valor de verdad objetiva que de él se desprende. A continuación veremos la obra de Parménides y Zenón y su influencia en la filosofía del continuo.

PARMENIDES

De entre los tres representantes de la escuela eleática citados con anterioridad, es Parménides, sin duda, el que mayor prestigio alcanzó tanto entre sus contemporáneos como entre los comentaristas posteriores de esta escuela. Parménides aparece a los ojos de Platón como un filósofo "venerable y temible". Nos dice en el Teetetos: "a mi parecer, Parménides como el héroe de Homero, es venerable a la vez que temible. Tuve contacto con este hombre cuando yo todavía era joven y él viejo; y justamente me pareció que tenía pensamientos muy profundos". [11] Págs.325 y 326.

Jean Zefirópulo resalta la influencia de la escuela pitagórica sobre Parménides en el siguiente párrafo: "Parménides hijo de Pyres, era natural y ciudadano de Elea; esta ciudad, dada su posición geográfica, debía ciertamente pertenecer a la zona de influencia pitagórica y no ha de sorprendernos el encontrar la obra de Parménides toda impregnada de las ideas de dicha escuela. Esta influencia se transparenta de tal modo en su obra, que ya desde la antigüedad numerosos historiadores reconocieron el carácter profundamente pitagórico de la escuela de Elea y Jámblico en su catálogo de los pitagóricos, cita a nuestro filósofo como el único representante de esta ciudad" [16] Págs. 50 y 51.

Tanto para Platón como para Aristóteles Parménides es el filósofo de la suprema unidad, siendo al mismo tiempo fundador del eleatismo como escuela filosófica, siendo también aquél que mayor rango alcanzara entre los representantes de esta escuela, siendo considerado por Platón como el auténtico inspirador de la dialéctica de Zenón, el cual fué su discípulo predilecto.

Si bien es cierto que existen graves obstáculos para conocer la personalidad y la obra de Parménides, existe la certeza de que su renombre como político fue siempre en aumento, ya que dió a Elea unas leyes para que se gobernara y siempre se preocupó por el destino de ella.

A pesar de que Aristóteles considera a Jenófones el principal maestro de Parménides, sin lugar a duda, la mayor influencia que recibe el fundador del eleatismo es por parte de la escuela pitagórica; en efecto, "Diogenes Larcio nos habla de un pitagórico - llamado Ameinias como el verdadero maestro del fundador del eleatismo". [4] pag. 21.

No obstante la gran influencia ejercida por la escuela - naturalista, a través de Jenófanes y el ambiente pitagórico en que se desenvuelve, Parménides representa el profundo cambio de mentalidad que se da en la Magna Grecia a fines del siglo V a. c. Todos los restos de la creencia pitagórica fueron dirigidos por este filósofo hacia la consideración del esfuerzo cognositivo del hombre y a investigar hasta donde podría llegar una indagación racional.- El hombre racional puede de esta manera, por primera vez, hacerse partícipe del poder divino, preocupándose ya por el pensar filosófico y metafísico.

Parménides sienta, pues, las bases para el pensamiento y la obra de Platón. Esto bastaría para hacerle inmortal en el mundo del pensamiento, sin embargo, al fundar y alentar una escuela tan importante como la eleática, hace posible que la filosofía del continuo y el conocimiento de los infinitesimales tome los cauces que la han llevado hasta nuestros días.

EL PROBLEMA DEL SER Y LA TEORIA DEL CONOCIMIENTO

Por estar íntimamente relacionado con el tema de este trabajo y principalmente por ser el núcleo de la filosofía de Parménides y de la escuela eleática, conviene resaltar las grandes aportaciones que al problema del ser y a la posibilidad de su conocimiento hace el filósofo de Elea. En su poema sobre la naturaleza, Parménides postula por primera vez una realidad única, que es a la vez continua y eterna, la cual no puede ser captada por el pensamiento humano y en la que la nada es siempre nada y el Ser es siempre Ser.

El poema sobre la naturaleza es una obra de carácter alegórico que consta de tres partes:

Introducción: Nos presenta al poeta mismo en un viaje inusitado en busca de la luz, descubre las limitaciones del ser humano, necesitado de la luz divina si realmente aspira a la plenitud del conocimiento verdadero.

A partir del fragmento II la diosa manifiesta a Parménides cuáles son las vías posibles en la búsqueda de la verdad:

"Aquella que afirma que el Ser es y el no-Ser no es, significa la vía de la persuasión puesto que acompaña a la verdad.

Y la que dice que el No-Ser existe y que su existencia es necesaria, ésta, no tengo reparo en anunciártelo, resulta un camino totalmente negado para el conocimiento". [4] Pág. 26.

De los fragmentos anteriores se deduce que para Parménides existen dos caminos para buscar la verdad; más adelante en el fragmento VI, la diosa propone un tercer camino, el de la opinión de los mortales.

En esta tercera vía las cosas se describen no como son, sino como parecen ser, atribuyéndoles generación y destrucción, cambio de forma, de lugar, etc., teniendo el peligro de tomar la apariencia como realidad total.

En el fragmento VIII Parménides nos habla acerca del camino correcto hacia la sabiduría: El Ser es increado e imperecedero inmóvil e ilimitado, no fue ni será, sino que es solamente. Citaremos el verso 25 perteneciente al fragmento VIII donde Parménides atribuye al Ser la cualidad de ser continuo, por la sencilla razón de que todo está lleno de Ser y porque el Ser necesariamente toca al Ser:

"Nada hay de más que llegue a romper su continuidad, ni nada de menos, puesto que todo está lleno de Ser."

De esto podemos deducir que es el hombre quien pone límite a la realidad inmutable y eterna, él es el que atomiza lo que en el reino del Ser es unidad indivisible, esto que no es más que apariencia "hace que el observador permanezca ajeno a lo que observa."[4], pág. 56.

Podemos decir, resumiendo, que Parménides advierte por primera vez que lo primero que hay que decir de lo real es que es, que es ser. Ahora bien ¿cuáles son las características de ese ser? Ante todo, el ser debe ser, de ahí el principio: el ser es, en contraposición con su compañero: el no ser no es. De estos dos principios deduce todo su sistema. En efecto, si sólo el ser es, debe ser único, pues, de existir algo junto al ser, solo podría ser el no-ser y el no-ser no es. Debe ser también inmóvil, pues el ser que cambia todavía no es, sino que se hace. Debe ser finalmente increado, ya que de lo contrario sólo podría proceder del no-ser y el no-ser no es. El ser es, pues, para Parménides, uno, inmóvil e increado.

Por último, Parménides nos dice que el ser es continuo, cuestión que para este trabajo viene a ser lo más importante, ya que es aquí donde podemos encontrar los primeros antecedentes de este concepto tan importante para el desarrollo de las matemáticas. Además al proponer la continuidad para las magnitudes y el tiempo acepta implicitamente la infinita divisibilidad tanto de unas como del otro. Esto se encuentra en contradicción con los pitagóricos y atomistas.

Los pitagóricos aceptaban el infinito en la serie de los números naturales pero no podían aceptarlo en el campo de la geometría, pues para ellos toda línea estaba formada por un número finito de puntos; los atomistas creían que todas las cosas estaban compuestas por átomos, los cuales son físicamente indivisibles, sostenían que los átomos siempre han estado y estarán en movimiento y que entre cada uno de ellos había espacio vacío. Demócrito uno de los principales representantes de esta escuela decía que no hay ni arriba ni abajo en el espacio infinito en el cual se encuentran dichos átomos.

En síntesis, tanto pitagóricos como atomistas consideraron al espacio formado por una infinidad de elementos discontinuos, mientras que los eleatenses lo consideraron como un todo continuo, finito en su extensión pero infinito en cuanto a su número de elementos.

La obra de Parménides deja el terreno listo para que uno de sus discípulos más amados, Zenón de Elea, formule sus célebres paradojas, que vendrían a poner en crisis la ciencia y la filosofía de los griegos.

ZENON DE ELEA

Zenón al igual que Parménides, es originario de Elea. — Su nacimiento fue hacia el año 489 y la flor de su edad (40 años), hacia el 449, justamente hacia la mitad del siglo V a.c., época en que la ciudad de Atenas alcanzaba su más alta prosperidad pública.

Zenón fue considerado en su época como un hábil y eficaz pedagogo y parece que vivió y enseñó en Atenas durante algún período de su vida. Por todo lo anterior podemos deducir que Zenón llevó las ideas de la escuela de Elea hasta Atenas, dejándose sentir la influencia de estas ideas sobre muchos pensadores de la Elade.

Platón atribuye a Zenón una sola obra, en la que aparecen sus célebres Paradojas. Dicha obra de carácter dialéctico tenia como principal finalidad la defensa de la teoría parmenideana de un todo continuo; sin embargo, al mismo tiempo destrozaba las tesis contrarias en las que el tiempo y las magnitudes estaban formadas por unidades indivisibles.

Zenón enriqueció la doctrina de Parménides haciendo una exposición sistemática y accesible de la versión altamente intelectual y minoritaria de su maestro; por lo tanto si éste fue considerado como el fundador de la escuela de Elea y como hombre venerable y temible, Zenón tiene el mérito de sistematizar y popularizar su obra permitiendo, de esta manera, la perpetuación indiscutible de su doctrina.

A pesar de la enorme influencia que ha tenido en la matemática y en la filosofía el pensamiento de Zenón, su obra está casi completamente destruida y sólo a través de las versiones de sus comentaristas y críticos nos ha llegado el contenido de ella; sin embargo, dichas versiones quizá no reflejan con toda exactitud el pensamiento del eleata.

Zenón con sus argumentos hace temblar la estructura del pensamiento antiguo. Dichos argumentos jamás fueron anulados en la antigüedad y solo bajo un enfoque moderno de la noción espacio-tiempo pudo anularse por completo la argumentación del pensador de Elea. En las paradojas de Zenón aparecen de una manera implícita los conceptos de continuidad e infinitesimal y son el punto de partida para el posterior desarrollo de estos conceptos, por lo que es necesario para este trabajo exponer el contenido de dichas paradojas.

Estas paradojas han llegado hasta nosotros a través de la obra de sus comentaristas y críticos, principalmente Aristóteles que en su obra "La Física" hace alusión a las cuatro paradojas: "Dicotomía", "Aquiles y la Tortuga", "La Flecha" y "El Estadio". En seguida expondré una interpretación a la versión que de las paradojas aparece en dicha obra del gran filósofo de Estagira:

"DICCTOMIA"

"En el primero la imposibilidad del movimiento está sacada de lo siguiente: el móvil transportado debe llegar a la mitad antes de llegar a su término" [1] Pág. 660.

Por lo tanto podemos recorrer un número infinito de puntos en un lapso de tiempo finito. Esto lo podemos ver gráficamente en la siguiente figura; antes de recorrer la totalidad de una distancia AB, tendremos que recorrer su mitad AC, pero para llegar a C, tendremos que llegar al punto medio de AC que es D. Y así seguiremos hasta el infinito. Por lo que ya que existe un número infinito de puntos en un espacio dado, no podremos cruzarlo en un tiempo finito.

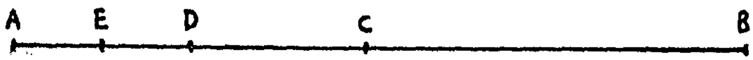


Fig. 1

"AQUILES"

"El que corre más despacio en una carrera no será alcanzado por el que corre más rápido, pués el que persigue al otro debe siempre comenzar por alcanzar el punto de que ha partido ya el fugitivo, de manera que el más lento posee siempre una ventaja" [1] Pag. 660.

En esta paradoja conocida como la carrera de Aquiles y la tortuga, Aquiles tiene que alcanzar primero el lugar en que la tortuga empezó la carrera; en este tiempo la tortuga habrá recorrido un pequeño camino. Aquiles tendrá que recorrerlo y entonces la tortuga estará adelante. Aquiles estará cada vez más cerca, pero nunca podrá alcanzar a la tortuga.

"LA FLECHA"

"Si todo ser está en un instante dado en reposo o en movimiento y si él está en reposo cuando está en un espacio igual a si mismo, supuesto que, por otra parte, lo que es trasladado está siempre en el instante, la flecha en movimiento es siempre inmóvil." [1] Pag. 660.

Este argumento contra la posibilidad de movimiento a través de un espacio hecho de puntos es que, sobre esta hipótesis, una flecha en cualquier momento dado de su vuelo, tiene que estar en reposo en algún punto en particular.

"EL ESTADIO"

Sean tres hileras paralelas de puntos en yuxtaposición.-

A	A	A	A	A	A
•	•	•	•	•	•
B	B	B	B	B	B
•	•	•	•	•	•
C	C	C	C	C	C
•	•	•	•	•	•

Fig. 2

Una de ellas B, no se mueve, mientras A y C se mueven con igual velocidad, pero en distintas direcciones, hasta alcanzar la posicion de la figura (3)

```
A    A    A    A    A    A
.    .    .    .    .    .
     B    B    B    B    B    B
     .    .    .    .    .    .
          C    C    C    C    C    C
          .    .    .    .    .    .    Fig. 3
```

El movimiento de c con respecto a A, será el doble que con respecto a B; en otras palabras, cualquier punto dado en C, ha pasado el doble de puntos en relación a A, que los pasados en relación a B. Esto no puede ser, ya que un instante de tiempo corresponde al pasaje de un punto a otro.

Existen muchas versiones y críticas para las cuatro paradojas de Zenón, aunque en realidad Aristóteles y los subsecuentes escritores griegos interpretaron estos argumentos como falacias, dedicando su inteligencia a encontrar la naturaleza de ellas.

Por nuestra parte podemos decir que sus argumentos son correctos si admitimos que cualquier intervalo de espacio o tiempo consta de un número finito de puntos e instantes respectivamente, ahora bien, para evitar estas paradojas si bien podemos aceptar que el espacio y el tiempo están formados de puntos e instantes, necesariamente el número tanto de unos como de otros tendrá que ser infinito en cualquier intervalo por pequeño que éste sea, característica que distingue al continuo.

Parece ser que el problema de Zenón era un problema sobre el infinito y se originó probablemente del supuesto que para llegar al final de una colección de objetos tengamos que pasar revista a cada uno de ellos. Sin embargo nosotros sabemos que puede conocerse una colección finita o infinita sin necesidad de conocer a todos y cada uno de sus elementos.

A partir de que Cántor liberó a los conjuntos infinitos de sus aparentes contradicciones estas han podido aceptarse sin ningún prejuicio, así como las series cuyos términos no son consecutivos, lo cual nos permite trabajar con el tiempo y el espacio como un conjunto infinito de elementos, tales que entre dos - cualesquiera de ellos siempre existirá un número infinito de ellos.

Aristóteles reconoció la gran dificultad de exponer el origen oculto del error lógico contenido en estas paradojas. El libro sexto de su física está dedicado a la discusión de las nociones sutiles de continuidad e infinitud. En realidad la Física, que consta de 9 libros, está dedicada en su totalidad a la discusión del-movimiento, divisibilidad, continuidad, infinitud y el vacío. Es - importante analizar la crítica de Aristóteles a los argumentos de Zenón, ya que durante 2000 años, dicha crítica ha servido como punto de partida, junto con la de Platón, para la discusión filosófica del problema.

CRITICA DE ARISTOTELES.

Para Aristóteles la vía del conocimiento son los sentidos, esto es, para él el continuo es un problema físico, a cuya solución podemos llegar a través de los sentidos, encontrando la íntima relación que existe entre sus elementos; por lo tanto, existe muy poca abstracción y uso de la imaginación en el análisis que hace de este problema. Aristóteles distingue tres conceptos en el siguiente párrafo:

"... continuo es aquello cuyos extremos son una sola cosa; el contacto se halla donde los extremos existen simultáneamente; lo consecutivo es aquello entre lo que no hay ningún intermedio del mismo género, entonces es imposible que una cosa continua conste de partes indivisibles, por ejemplo, que una linea esté hecha de puntos"[1], pág. 647.

En otra parte de su física, Aristóteles expone los ar---

gumentos por medio de los cuales concluye que la línea no está hecha por la unión de puntos:

"Ahora, si los términos "continuo", "en contacto" y "en sucesión" se entienden como fueron definidos anteriormente (párrafo anterior), nunca lo que es continuo puede estar formado por indivisibles, es decir, una línea no puede estar formada de puntos, la línea es continua y el punto indivisible, porque los extremos de dos puntos no pueden ser ni de uno ni de otro."

"Además, si la cosa continua está compuesta por indivisibles puntos, estos puntos tienen que ser continuos o en contacto con otro y el mismo razonamiento se aplica en el caso de todos los indivisibles. Ahora, por el razonamiento anterior, ellos no pueden ser continuos. Y una cosa está en contacto con otra sólo si el todo está en contacto con el todo o una parte con el todo o una parte con una parte; pero ya que los indivisibles no tienen partes, ellos están en contacto uno a otro como todo con todo. Y si están en contacto como todo con todo, ellas no serán continuas porque para que sean continuas deberán poseer partes extrañas las unas a las otras, es decir, que estén separadas en cuanto al lugar."[1], pág. 648.

De la misma manera, y también en su Física, Aristóteles sostiene que el tiempo no está formado de indivisibles instantes.

"Dado que toda magnitud puede dividirse en magnitudes (porque hemos probado que el continuo no puede constar de indivisibles y toda magnitud es continua), el más rápido de dos tiene que moverse una distancia mayor en igual tiempo y en menor tiempo una distancia igual y también en menor tiempo una distancia más grande".

"Ya que todo movimiento se realiza en el tiempo y en todo tiempo hay posibilidad de movimiento y toda cosa movible puede moverse más rápido y también más lento, entonces puede ocurrir en cada tiempo el movimiento más rápido o más lento. Si esto es así, entonces el tiempo es continuo, ya que es divisible en partes divisibles....."

"Por lo tanto, la continuidad del tiempo y la magnitud serán correlativas, porque en la mitad de tiempo yo pasaré sobre la mitad de distancia y, en general, en menor tiempo menor distancia, ya que tiempo y distancia tienen la misma división; y si uno de los dos es ilimitado, el otro también lo es....Por esta razón los argumentos de Zenón asumen una falsedad, que un ilimitado no puede viajar sobre otro ilimitado a lo largo de todas sus partes, o tocar un ilimitado, en un tiempo finito; porque longitud así como tiempo y, en general toda cosa continua, puede considerarse ilimitada en un doble sentido, a saber, con respecto al número de divisiones o con respecto a las distancias entre los extremos finales."[1]págs. 649 y 650.

Esta crítica se refiere evidentemente a la paradoja de "Aquiles", donde existe el peligro de modificar en nuestra mente las condiciones actualmente existentes, estando en peligro de tomar la distancia entre Aquiles y la tortuga como decreciente y dado un ilimitado número de divisiones, donde el tiempo para atravesar esas subdivisiones sucesivas es el mismo para cada una de ellas. Ello resulta debido a la ilimitada división de una distancia finita y una ilimitada acumulación de intervalos de tiempo finitos. El problema anterior visto desde un punto de vista moderno constituye una serie convergente de intervalos de tiempo. Una distancia finita es recorrida en un tiempo finito.

Los argumentos de Aristóteles sobre Aquiles y la dicotomía son los mismos, y habla de ellos en otras partes de su Física.

Puesto que una línea no puede estar formada de puntos, no puede - ser subdividida realmente en puntos. Surge aquí el concepto de infinito potencial, en contraposición al de infinito actual.

Esto lo vemos señalado con mayor intensidad en el siguiente párrafo: "la continua bisección de una cantidad es ilimitada,-- por lo tanto lo ilimitado existe potencialmente, pero de hecho nunca alcanzado".[1], pág. 611.

Aristóteles admitía en el número lo infinito sólo en potencia y no en acto, por la imposibilidad de recorrer o numerar lo infinito, ya que si consideramos infinito a algún número, siempre- es posible pensar otro mayor que él. Por lo tanto, la infinitud para Aristóteles no está en algún número concreto, sino en la serie- de números mismos, esto es, en la posibilidad de superar siempre - por adición todo número dado.

Sin embargo, al tratar el problema de la división del - tiempo en el "antes" y el "después", Aristóteles introduce un "límite temporal", lo cual implica la infinitud del tiempo a través - de un proceso de división, cuestión que aparece ya en la dicotomía de Zenón, pero no reconoce el infinito por adición, sino como proceso inverso al infinito por división. Luego entonces, Aristóteles sólo acepta el infinito por adición, no como acto, sino como proceso inverso al de la división infinita y sin que su infinitud pueda nunca sobrepasar la magnitud finita de su totalidad.

Partiendo del proceso de división, que el estagirita concibe como recorrido infinito hacia lo infinitesimal, obtenemos la siguiente serie:

$$(1/2, 1/4, 1/8, \ldots\ldots\ldots\ldots 1/2^n)$$

Vemos en esta serie que aunque tiende a lo infinitesimal, nunca llega a agotar lo infinito, habiendo siempre más allá de toda cantidad pequeña una cantidad menor, ya que lo continuo no puede ser nunca indivisible ni constar de elementos indivisibles. - Por lo tanto Aristóteles no puede partír del último elemento de - esta serie, ya que no existe, para formar por vía de adición, la serie infinita inversa, lo que hace es proceder de una manera paralela a la serie resultante de la dicotomía presentada por Zenón de Elea, por lo tanto si la serie de Zenón es:

1/2 - 1/4 - 1/8 - 1/16........

La fórmula de la correspondiente serie de Aristóteles - será:

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16.........

Vemos pues que aquí el proceso de adición es infinito - potencialmente, ya que depende del proceso divisorio, pero el resultado es finito o menor que uno. (Magnitud total sometida al - proceso divisorio y tendiente infinitamente al límite 1).

Aristóteles al igual que Platón, acepta la distinción - entre los infinitos por adición o multiplicación y por sustracción o división, estableciendo así una distinción entre el infinito de las magnitudes y el infinito de los números.

INFINITO DE LAS MAGNITUDES: Aquí Aristóteles acepta el infinito por división, mientras que el infinito por adición sólo es aceptado como proceso paralelo al anterior, obteniendo siempre un resultado inferior a la unidad.

INFINITUD DE LOS NUMEROS: Aquí el filósofo de Estagira acepta el infinito por adición o multiplicación, pero por división tiene como límite a la unidad indivisible.

Parece pues que Aristóteles está a punto de alcanzar un concepto de magnitud matemática que sea al mismo tiempo continua- (infinitamente divisible), e infinitamente aumentable, para lo-grarlo era necesario unificar los dos conceptos de infinito citados anteriormente; sin embargo, y a pesar de que acepta en el tiempo el doble infinito (por multiplicación y por división), no puede llevar a cabo una unificación, ya que a esto se oponen dos motivos de orden filosófico; el concepto de individuo como base de la materia y forma y la limitación de toda magnitud extensa.

Como ya sabemos, existen grandes diferencias entre la filosofía aristotélica y la sostenida por la escuela pitagórica y Platón. A continuación mencionaremos dos de ellas, las cuales influyeron grandemente en el concepto de infinito y en el desarrollo de las matemáticas y que son: el idealismo platónico en contraposición al sensualismo del filósofo de Estagira y la importancia que las matemáticas tenían para Platón.

El sensualismo de Aristóteles quedó ya sentado en páginas anteriores; ahora para exponer en pocas palabras el idealismo platónico, heredado en la escuela pitagórica, citaremos un párrafo que aparece en su diálogo Teetetos, cuando Platón nos dice por boca de Sócrates:

"La ciencia no reside en las sensaciones, sino en el razonamiento sobre las sensaciones, puesto que, según parece, sólo por el razonamiento se puede descubrir la ciencia y la verdad y es imposible conseguirlo por otro rumbo". [11], Pág. 330.

En otra parte de este mismo diálogo, Platón va más allá al considerar a las ideas como objetos que podemos conocer aún sin la intervención de los sentidos, haciendo uso exclusivamente de nuestra razón, en efecto nos dice:

"Sócrates.- Además me has hecho un servicio dispensándo me de una larga discusión, si juzgas que hay objetos que el alma conoce por sí misma y otros que conoce por los órganos del cuerpo...

Teetetos.- Pues bien, yo pienso como tú.

Sócrates.- ¿En cúal de estas dos clases de objetos colocas al ser? porque es lo más común a todas las cosas.

Teetetos.- Le coloco en la clase de los objetos con los que el alma se pone en relación por sí misma" [11] Pag. 329.

Esto es: las entidades absolutamente reales, las formas e ideas, las concibe Platón como independientes de la percepción y susceptibles de una definición absolutamente precisa, considerándolas eternas e inmutables.

Por otra parte, Platón concedió primerísimo lugar al estudio de las matemáticas y en particular en la geometría, como lo comprueba la frase grabada en el pórtico de su academia: "No entre aquí, quien no sepa geometría".

El maestro Francisco Zubieta resalta un pasaje de la República, donde Platón nos dice su opinión sobre la geometría: — "Ciencia que atrae el alma hacia la verdad, forma en ella el espíritu filosófico, obligándola a dirigir a lo alto sus miradas..." [17] Pág. 73.

Debido al idealismo platónico y a la importancia tan grande que el filósofo de la academia da a las matemáticas, surgen entre sus discípulos matemáticos que contribuyeron a enriquecer la geometría, apareciendo la teoría de la proporción de Eudoxio y el método de exhaución, atribuido a este mismo personaje y que están contenidas dentro de la obra cumbre de la geometría —

griega "Los tratados de Euclides".

En los siguientes capítulos de este trabajo se expondrá el contenido de estas dos teorías, así como su relación con algunos pensamientos de la matemática surgida posteriormente.

CAPITULO II

TEORIA DE LA PROPORCION

INTRODUCCION:

En este capítulo trataremos la teoría de la proporción, atribuida al célebre matemático Eudoxio, aunque ya había sido desarrollada con anterioridad a él y se dice que la aplicaban en la aritmética, la geometría y la música.

Babilonia y Egipto son los lugares donde se originó la teoría primitiva de la proporción y fue la escuela pitagórica, que tuvo contacto con estos pueblos, la encargada de introducir su uso en Grecia, siendo únicamente aplicable a magnitudes conmensurables.

En efecto, Sir Thomas Heath nos dice: "es cierto que los pitagóricos ya habían trabajado con tal teoría observando los números que ellos entendían como conmensurables y números enteros pares". De este modo sabemos que los pitagóricos conocían tres medias: la geométrica, la aritmética y la media armónica. La media geométrica era llamada proporción por excelencia [5] Pág. 112.

Ahora bien, se atribuye también a los pitagóricos el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, lo cual anulaba su teoría de la proporción o, al menos, la limitaba grandemente. Surge entonces la figura de Eudoxio, que sienta las bases --

para una teoría de la proporción que funciona lo mismo para las magnitudes conmensurables, como para las inconmensurables.

Tannery, haciendo un comentario a lo anterior, nos dice: "La teoría de las proporciones y el principio de similitud, toman en los inicios de la geometría griega un aspecto más primitivo que el que tiene con Euclides, pero que a consecuencia del descubrimiento de los inconmensurables, el trato del tema fue fundamentalmente remodelado en el período entre Pitágoras y Eudoxio". [5] Pág. 113.

CONCEPTO PRIMITIVO.

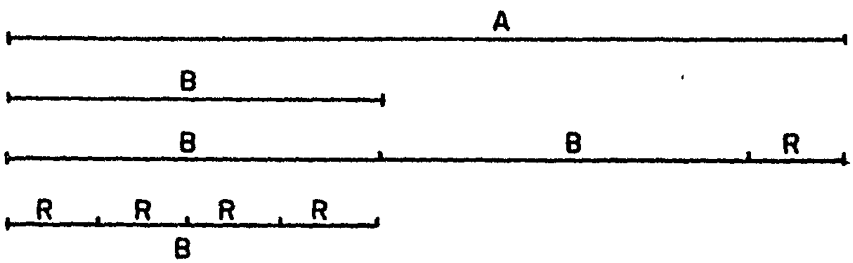
Resulta interesante exponer cual era el concepto de proporción que se usaba entre los griegos antes de Eudoxio y para esto resaltaremos que dicha concepción descansaba en el supuesto que no existen cantidades inconmensurables. Esto es, en su sentido primitivo, la palabra Logos sólo fue usada como relación entre conmensurables. Sir Thomas Heath nos dice: "que éste fue el primitivo significado de Logos, está probado que el uso de Logos para lo inconmensurable, que significa irracional en el sentido de no tener razón alguna para ser tomado como racional". [5] Pág. 117.

Euclides nos expone en su libro X el método por el cual obtenía la razón o magnitud relativa de dos cantidades conmensurables, enseguida expondremos dicho método que, de hecho, nos dice como encontrar la máxima medida común entre dos magnitudes.

Sean A y B las magnitudes conmensurables, donde A es mayor o igual que B, entonces tomemos de A una magnitud igual a B, quedándonos un residuo, tomemos de éste otra magnitud igual a B, y así sucesivamente, hasta que obtengamos un residuo menor que B, llamémosle R, tomemos de B tantas magnitudes iguales a R como sea necesario, hasta encontrar R', residuo menor que R. Repitiendo el proceso para R y R' y así sucesivamente hasta encontrar un residuo R^n que está contenido un número exacto de veces en el residuo anterior R^{n-1}.

Calculemos el número de veces que el último residuo se encuentra contenido en A y en B; pudiendo expresar la razón de A a B como la razón de un número a otro. Para mayor claridad presentamos el siguiente ejemplo en el que se aplica el método anterior:

Sea A igual a 27 unidades arbitrarias y B a 12 unidades, tomando B sobre A dos veces, obtendremos al final un residuo R igual a 3 unidades, en seguida tomemos sobre B cuatro veces a R; como no tenemos residuo, veremos que $R^n=3$ y que dicho residuo cabe en A nueve veces y en B cuatro, por lo que la razón de A y B es igual a la razón nueve a cuatro:



$$\frac{A}{B} = \frac{9}{4}$$

Dicho procedimiento se sigue utilizando en los textos modernos para encontrar m.c.d. entre dos números y por un procedimiento análogo, tambien el m.c.d. para polinomios.

MAGNITUDES INCONMENSURABLES.

Es claro que ya los pitagóricos conocían magnitudes inconmensurables y que en tiempos de Platón dichas magnitudes se conocían y estudiaban en Atenas. Como prueba de lo anterior diremos que en el Teetetos, este personaje explica a Sócrates como Teodoro de Sirene enseñaba dichos conceptos entre sus discípulos. En efecto, en dicho diálogo se dice que las raíces de tres y de cinco no son conmensurables en longitud con la de uno, continuando así hasta llegar a la de diez y siete.

También citaremos una demostración de la irracionalidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado del mismo, atribuida a los pitagóricos y como consecuencia del teorema del mismo nombre, en efecto:

Consideremos un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales sean de longitud uno en algún sistema de medida, el largo de la hipotenusa estará dado por la siguiente relación:

$$X = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

Supongamos a X número racional, o sea, conmensurable con la unidad, esto es $X = m/n$ (con M y n enteros primos relativos).

Sustituyendo X por m/n en (1), obtendremos que:

$m/n = \sqrt{2}$ por lo tanto
$m^2/n^2 = 2$ por lo tanto
$m^2 = 2\,n^2$ (2)

Por lo anterior tenemos que m^2 es par y por lo tanto m es par, ya que m es par podemos representarlo por $2r$. Sustituyendo en (2) tenemos:

$$(2r)^2 = 2n^2 \quad 4r^2 = 2n^2$$
$$2r^2 = n^2 \quad n^2 \text{ es par y } n \text{ es par}$$

Ya que supusimos que m y n eran primos relativos y por otra parte, se demostró que tanto m como n son pares.

LA CRISIS

Como consecuencia de la aparición de los inconmensurables no sólo la teoría de las proporciones, sino toda la estructura matemática griega se estremece y amenaza derrumbarse, surgiendo la necesidad de crear una teoría de la proporción, independiente de la conmensurabilidad de las cantidades.

En efecto, para que el proceso descrito anteriormente dé resultado, es necesario encontrar una parte alícuota común a A y B (último residuo obtenido en el procedimiento), tomando a esta parte como una nueva unidad, siendo A y B múltiplos de la unidad común de esta manera obtenida. Sin embargo, al aparecer las magnitudes inconmensurables entre sí, el proceso de dividir un residuo entre su predecesor se prolonga hasta el infinito, surgiendo de esta manera la necesidad de aceptar el proceso de división infinita.

Hemos dicho que la parte alícuota común a las magnitudes A y B es tomada como una nueva unidad, unidad de la cual A y B son múltiplos, entonces, al surgir magnitudes en las que el proceso divisorio se prolonga hasta el infinito, surge la imposibilidad de obtener dicha unidad, imposibilidad que afecta inclusive -

los principios ontológicos del universo griego. En otras palabras, al desaparecer la posibilidad de obtener una unidad común para magnitudes arbitrarias, no sólo la teoría primitiva de las proporciones queda en entredicho, sino que los fundamentos filosóficos de la matemática griega se estremecen, surgiendo la necesidad de adecuar la teoría de las proporciones a estos descubrimientos.

DEFINICION DE PROPORCION DE EUDOXIO

La teoría de la proporción de Eudoxio aparece en los Elementos de Euclides, obra inmortal del pensamiento griego. El libro V de dicha obra nos habla de las proporciones entre magnitudes en general y el libro VII hace referencia al caso particular de los números. Al analizar las definiciones que aparecen al principio de estos dos libros parece que el libro VII no es sino una repetición del libro V, considerando a los números como una especie particular de magnitud. En efecto, Aristóteles así lo hace, cuando dice: "No puedes adoptar el método aritmético de prueba a las propiedades de magnitudes, si las magnitudes no son números" [1], Pág. 362.

Eudoxio modifica la teoría de las proporciones para hacerla funcionar indistintamente entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables. La parte fundamental de dicha teoría se encuentra contenida en la definición número cinco del libro cinco cuyo enunciado es el siguiente:

"Dícese que la razón de una primera magnitud a una segunda, es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando la primera y tercera igualmente multiplicadas o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales o al mismo tiempo son inferiores que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas" [5], Pág. 114.

Esto significa en notación moderna que:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{Sii} \forall m, n \left[(m \cdot A > n \cdot B \ \& \ m \cdot C > n \cdot D) \text{ ó } (m \cdot A = n \cdot B \ \& \ m \cdot C = n \cdot D) \text{ ó } (m \cdot A < n \cdot B \ \& \ m \cdot C < n \cdot D) \right]$$

Eudoxio se encuentra en posibilidades de dar esta definición gracias al llamado Axioma de Arquímides, que en los libros de Euclides aparece antes de dicha definición en la forma de la definicion 4:

"Dícece que dos magnitudes tienen razón entre si, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra."

En esta definición Euclides hace posible comparar dos magnitudes, sean conmensurables o inconmensurables entre sí, porlo que ya no es necesario que exista una parte alícuota entre las magnitudes a comparar y haciendo posible la definición cinco queviene a ser, de hecho, el criterio para determinar cuando unas magnitudes están en proporción y que es por lo tanto, la parte esencial de la nueva teoría de la proporción.

CRITICA A ESTA DEFINICION

Es obvio que esta definición a la vez que ha sido una de las más importantes en los Elementos de Euclides, también ha sido una de las más criticadas por muchos de sus lectores.

A continuación expondremos algunas de las objeciones de que ha sido objeto dicha definición, que como mencionamos anteriormente, es la que contiene la parte medular de la teoría de las proporciones:

1.- No está demostrado que el predicado de la definición está en concordancia con la cosa definida.

Aquí tenemos que aclarar que existe una diferencia entre lo que es una definición matemática y lo que es una definición filosófica; para hacer dicha aclaración recurriremos a Bertrand Rusell, que nos dice: "Es necesario darse cuenta de que la definición en matemática no significa, como en filosofía, un análisis de la idea a definirse en ideas que la constituyen. Esta noción, en todo caso, es aplicable a los conceptos, mientras que en matemáticas es posible definir términos que no son conceptos" [14] , Pág. 413.

Mas adelante nos dice: "La definición matemática consiste en indicar una relacion fija, respecto a un término fijo, de la cual sólo un término es susceptible; entonces este término es definido por medio de la relación fija y el término fijo...". [14] , Pág. 414.

En este caso el término fijo es un conjunto ordenado de cuatro magnitudes: A, B, C, D, y la relación fija consiste en que dados los múltiplos de A éstos deben estar en la misma relación de orden con los múltiplos de B como los correspondientes múltiplos de de C lo están con los múltiplos de D. Esta relación y este término fijo vienen a definir un nuevo concepto al que puede llamarse "la misma razón".

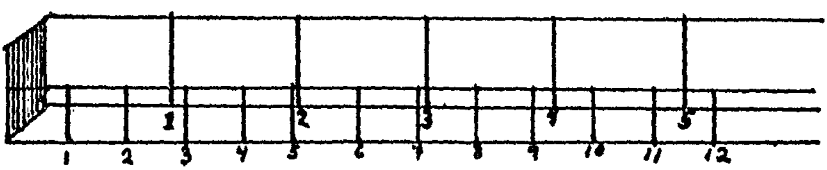
2.- Dicha definición es demasiado obscura y pesada, por lo que Euclides no pudo pretender que fuese aceptada de un modo natural, después de haber sido percibida al observar magnitudes similares o disímiles.

Para refutar esta objeción podemos decir que la menor o mayor dificultad que presente una definición para entenderla no le resta validez. Por otra parte este argumento carece de fundamento, ya que si la definición parece obscura dicha obscuridad se debe a la obscuridad inherente de los inconmensurables y a las diferentes interpretaciones que de ella se han hecho.

Además, podemos ver que la definición de Euclides es una consecuencia fácil y natural de la percepción fundamental que surge al estar entre figuras que se pueden comparar en magnitud.

Para ilustrar lo anterior, De Morgan nos de el siguiente ejemplo:

"Sea una columnata formada por columnas equidistantes y una hilera de barandillas equidistantes también, colocadas enfrente de la columnata; supongamos que la distancia entre cada par de columnas (C) es distinta a la que hay entre cada par de barandillas (B) y que dichas distancias son conmensurables o inconmensurables entre sí, esto es, que un número determinado de barandillas puede estar contenido o no, en un número determinado de columnas.



Entonces, si la construcción puede ser llevada a cualquier extensión, podemos comparar por inspección C con B a cualquier grado de precisión, por ejemplo si la décima barandilla está entre la cuarta y la quinta columna, tendremos que:

$$4C < 10B < 5C$$

$$\frac{4}{10}C < B < \frac{5}{10}C$$

Si queremos obtener una más exacta relación podemos tomar una diezmilésima barandilla; supongamos que ésta se encuentra entre la 4674 y 4675 columnas, por lo tanto:

$$4674/10\,000\ C < B < 4675/10\,000\ C$$

Podemos observar que nuestro grado de exactitud no tiene límite y que la razón de B a C estará determinada cuando el orden de distribución de las barandillas sobre las columnas está asignado ad infinitum.

Por otra parte, podemos ver que cualquier alteración, por pequeña que sea, entre la distancia de las barandillas afecta el orden de distribución; supongamos por ejemplo que existe una alteración de un milésimo de la distancia entre las columnas, entonces la segunda barandilla estara 2/1000 adelante, la tercera 3/1000 y así sucesivamente, por lo que después de la barandilla mil no tendrá el mismo orden con respecto a las columnas.

En seguida haremos un modelo de la construcción anterior en el que c será la distancia de las columnas y b la de las barandillas. Sin necesidad de la definición de proporción, podemos asegurar que C y B están en la misma razón que c y b, siempre y cuando el modelo esté correctamente formado. En efecto el hecho de que el modelo esté correctamente formado implica que siempre que mC exceda, iguale o sea menor que nB, entonces al aumentar o disminuir la escala del modelo necesariamente mc excederá, igualará, o será menor que nb. Vemos pues que siempre que la n-ésima columna aparece antes, enfrente o después de la n-ésima barandilla en el original, la n-ésima columna necesariamente aparecerá antes, enfrente o después de la n-ésima barandilla en el modelo del original.

Así es posible darse cuenta en el modelo de que la distribución de las barandillas respecto a las columnas queda descrita mediante las relaciones que entre los multiplos de C, B, b y c existen. Por tanto, la razón que existe entre las distancias a comparar puede captarse de una manera espontánea comparando los múltiplos como lo sugiere la definición.

3.- No es posible comparar cada uno de los infinitos múltiplos de A, con cada uno de los infinitos múltiplos de B.

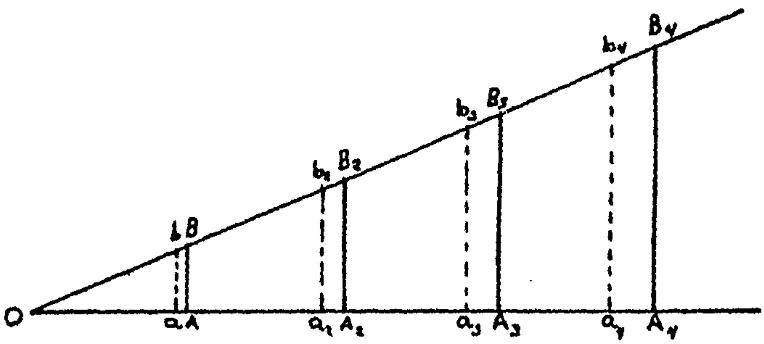
Esta crítica es, quizá, la que más relación tiene con la naturaleza del presente trabajo, ya que se refiere directamente al carácter infinito de la definición. Si cuatro magnitudes A, B, C, D, son proporcionales, tendremos que demostrar que todo múltiplo de A está alineado en el mismo intervalo de los múltiplos de B, como el correspondiente múltiplo de C, está alineado entre los respectivos múltiplos de D.

Ahora bien, si regresamos al ejemplo anterior, la distribución de las barandillas entre las columnas quizá sea conocida hasta la barandilla millonésima, tanto en el original como en el modelo construido, esto sólo nos asegura que nuestro modelo construido no contiene error en una millonésima parte de la distancia de las columnas. Sin embargo, no podemos observar un número infinito de casos y por lo tanto, no podemos afirmar la proporción absolutamente.

Esta dificultad se puede superar usando métodos matemáticos, tomando a cualquier múltiplo como si fuera un múltiplo en particular.

En efecto, De Morgan nos muestra el siguiente ejemplo en el que la definición de proporción de Eudoxio puede aplicarse, no obstante su carácter infinito.

Sea OAB un triángulo de lado AB, tracemos ab una parale la a AB, enseguida tracemos AA_2, A_2A3, etc. iguales a OA y aa_2, a_2a_3, etc. iguales a Oa, por cada uno de los puntos obtenidos---- tracemos paralelas a AB, cortándose con OB en b_2, B_2, etc.



Entonces podemos demostrar que bb_2, b_2b_3, etc. son es - trictamente iguales a Ob y BB_2, B_2B_3, etc. a OB.

Consecuentemente la distribución de los múltiplos de OA sobre los múltiplos de Oa, está hecha sobre una línea y de OB sobre los de Ob, sobre la otra.

El examen de esta distribución en toda su extensión (el cual es imposible), es innecesario, ya que por las propiedades de las paralelas si A_3 está entre a_3 y a_4, B_3 debe estar entre b_3 y b_4, porque si no, la línea A_3B_3 se cortaría con a_3b_3 o a_4b_4, lo - cual no es posible ya que A_3B_3 es paralela a ambas.

Entonces sin preguntarnos dónde está A_m nosotros sabe-- mos que está entre a_n y a_{n+1} y B_m debe estar entre b_n y b_{n+1} o, - si m(OA) está alineado en magnitud entre n(Oa) y n+1(Oa), entonces M(OB) estará entre n(Ob) y n+1(Ob).

Al analizar la respuesta que De Morgan da a la última - de las críticas propuestas podemos ver que ésta es superada siempre y cuando el infinito aceptado por Eudoxio sea un infinito potencial, en efecto, al decir que A_m está entre A_n y $A_n + 1$, sin importarnos el valor de m estamos aceptando que nuestra figura puede extenderse tanto como querramos, incluso hasta el infinito, pero nosotros sabemos que esto solo podemos hacerlo potencialmente, pero de hecho nunca alcanzado; tal y como Aristóteles concibe el infinito.

En síntesis, podemos decir que las críticas anteriores han sido anuladas y que la definición de proporción de Eudoxio supera las mismas y se convierte en una herramienta de gran eficacia en el tratamiento de cantidades que tienden a lo infinitesimal, como veremos posteriormente al estudiar el método de exhaución atribuido al mismo personaje en el que juega un papel bastante importante.

A continuación veremos de una manera breve la Teoría de la proporción de Dedekind, así como sus concordancias con la definición de Eudoxio.

LA DEFINICION DE PROPORCION DE EUDOXIO Y LA TEORIA DE DEDEKIND

Richard Dedekind, maestro en la Escuela Técnica de Brunswick durante treinta y un años, construyó una rigurosa teoría de los racionales, contenida en dos pequeños libros: STETIGKEIT UND IRRATIONALE ZAHLEN Y WAS SIND UND WAS SOLLEN DUE ZAHLEN (Continuidad y Números Racionales y La Naturaleza y Medida de los Números). Este trabajo proporciona la fundamentación puramente aritmética y estrictamente rigurosa de los numeros racionales.

La parte medular del trabajo de Dedekind es el concepto de cortadura, que define de una nueva manera a los números reales y que como haremos resaltar, tiene una extraordinaria similitud con la teoría de las proporciones de Eudoxio, que ya hemos visto con anterioridad.

En seguida expondremos la teoría de los números irracionales, debida al célebre matemático alemán, para resaltar a continuación las coincidencias entre su obra y la de Eudoxio. Dicha teoría se encuentra contenida en el primero de los libros citados con anterioridad.

Dedekind comienza aceptando a la unidad y que los números naturales son una consecuencia del acto de contar, definiendo a cada entero, distinto de la unidad, por su inmediato precedente. En seguida introduce la suma y la multiplicación como una combinación del acto de contar en un solo acto.

Al introducir las operaciones indirectas, resta y división, surgen los números negativos y fracciones, que son un producto de la mente del hombre. Todo este sistema de números recibe el nombre de números racionales, denotándolo por R.

Dicho conjunto cumple con las siguientes propiedades:

1) Sean a, b, c $\in$ R entonces si $a < b$ y $b < c$ tendremos que $a < c$
2) Si a, b $\in$ R y $a < b$ entonces existen infinidad de números que están entre a y b.
3) Si a es cualquier racional, entonces todos los racionales quedan divididos en dos conjuntos A_1 y A_2 tales que si $a_1 \in A_1$ entonces $a_1 \leq a$ y si $a_2 \in A_2$ entonces $a_2 > a$; podemos ver que todo número de A_1 es menor que todo número de A_2.

Al comparar Dedekind a R con los puntos de la recta, hace notar que a todo número recional le podemos hacer corresponder un punto en la recta, de tal forma que si a, b, son racionales a los que corresponden los puntos p y q respectivamente, entonces si $a < b$ tendremos que p estará a la izquierda de q.

Sin embargo hace notar la existencia de números irracionales (demostrada desde tiempo de los griegos) y, por lo tanto, existen puntos en la recta que no tienen sus correspondientes números racionales. Entonces de una manera semejante a como se definieron los números fraccionarios y negativos, define los números irracionales por medio de los racionales únicamente y para esto resalta la siguiente propiedad de la recta:

"Si todos los puntos de la recta numérica están agrupados en dos clases, tales que todo punto de la primera clase esté a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe un punto y sólo un punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases; esto es la separación de la línea recta en-dos porciones" [3], Pág. 11.

Esta propiedad le permite introducir el concepto de cortadura para el conjunto de los racionales y en general para todo-conjunto ordenado:

"Si ahora todo número racional da lugar a una partición del sistema de los números racionales, en dos clases A_1 y A_2, tal que dicha partición tenga la siguiente propiedad: que todo $a_1 \in A_1$ sea menor que todo $a_2 \in A_2$, y que A_2 no tenga primer elemento, entonces a dicha partición podemos considerarla como una cortadura-de R denotándolo por (A_1, A_2)" [3]Pág. 12 y 13.

Vemos pues que Dedekind nos afirma que todo racional a produce una cortadura diferente, sin embargo, nos recuerda que --existen infinidad de cortaduras que no se producen por un número-racional, surgiendo de esta manera los números irracionales, sugiriéndonos el siguiente ejemplo, en el que vemos la existencia de-uno de dichos números:

"Sea D un entero positivo tal que no sea el cuadrado de un entero, entonces existe un entero positivo λ tal que:

$$(1) \quad \lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

Sea la segunda clase A_2 tal que para todo $a_2 \in A_2$, $a_2^2 > D$ y la primera clase A_1, formada por los demás números racionales -- a_1, esta partición forma una cortadora (A_1, A_2)

Pero esta cortadura no está producida con ningun número racional. Para demostrarlo es necesario primero que no existe --ningun número racional cuyo cuadrado sea igual a D. Dedekind lo-hace por reducción al absurdo:

Supongamos que existe el racional cuyo cuadrado es ---- igual a D, existen dos enteros positivos tales que:

$$t^2/u^2 = D \quad \text{Por lo tanto}$$
$$t^2 = Du^2 \quad \text{de donde}$$
$$t^2 - Du^2 = 0$$

Supongamos que u es el menor entero positivo tal que su cuadrado multiplicado por D nos da el cuadrado de un entero t,

Multiplicando la desigualdad (1) por u^2 y simplificando tenemos que

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u$$

El número $u' = t - \lambda u$ es un entero positivo menor que - u. Si además proponemos $t' = Du - \lambda t$.

t' será un entero positivo y tendremos

$$\begin{aligned}
(t')^2 - D(u')^2 &= (Du - \lambda t)^2 - D(t - \lambda u)^2 \\
&= (D^2u^2 - 2Du\lambda t + \lambda^2 t^2) - (Dt^2 - 2Du\lambda t + D\lambda^2 u^2) \\
&= (D^2u^2 + \lambda^2 t^2 - Dt^2 - D\lambda^2 u^2) \\
&= t^2(\lambda^2 - D) - Du^2(\lambda^2 - D) \\
&= (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0 \ !
\end{aligned}$$

Ya que supusimos que U era el menor de los enteros positivos que cumplía con esta condición.

Entonces el cuadrado de todo número racional X es menor o mayor que D. Por lo tanto podemos decir que no existe un ele-- mento mayor en la clase A_1, ni un elemento menor en la clase A_2.

Porque si ponemos:

$$y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$$

tendremos: $y - x = \dfrac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}$

y también: $y^2 - D = \dfrac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}$

Si suponemos que X es un número positivo en la clase A_1, entonces $X^2 < D$ y por lo tanto $y > x$ y $y^2 < D$, por lo tanto y pertenece a la clase A_1 y éste no tendrá un último elemento.

Por otra parte si suponemos que X es un elemento de la clase A_2, entonces $X^2 > D$ y por lo tanto $Y < X$, $Y > 0$ y $Y^2 > D$ por lo que Y pertenecerá tambien a A_2 y esta no tendrá un primer elemento: y por lo tanto esta cortadura no estará producida por un número racional" [3], Pág. 13 a 15

Vemos pues que cortaduras como la del ejemplo anterior dan lugar a un nuevo número α llamado número irracional, el cual queda completamente definido por esta cortadura (A_1, A_2) de la siguiente manera:

"Un número irracional α esta definido cuando mediante una regla dividimos al conjunto de racionales en dos clases A_1 y A_2 tales que todo elemento de A_1, precede a todo elemento de A_2 y no existe un último elemento en A_1 ni primer elemento en A_2. —— La definición de α será entonces como un número que está entre todos los números de A_1 y todos los números de A_2" [5], Pág. 125.

Vemos pues que los puntos de la recta que no corresponden a los números racionales los identifica con los números irracionales a los cuales corresponde una cortadura, surgiendo de esta manera los números irracionales, en efecto Dedekind nos dice:

"A toda cortadura definida le corresponde un número racional o irracional y podemos tomar a dos números como diferentes o desiguales, siempre y cuando a ellos correspondan esencialmente diferentes cortaduras". [3] Pág. 15.

Entonces la totalidad de todos los cortes cumple todos los requisitos que ha de cumplir el conjunto de los números reales (los números racionales podemos tomarlos como elementos del conjunto de cortaduras que definen los reales y una cortadura que no es racional, se designará como irracional).

Al definir Dedekind a los números reales como cortaduras de los números racionales, previamente definidos, trata de demostrar que el continuo aritmético posee la propiedad de continuidad atribuida al continuo geométrico (puntos de la recta ordenados), y por lo tanto podemos basar en él todo el análisis infinitesimal.

La definición 5 de Eudoxio y la definición de cortadura de Dedekind tienen varias semejanzas, las cuales nos hacen pensar que ya los griegos tenían una concepción de los números bastante clara y casi idéntica a la concepción de Dedekind.

En efecto, en ambas definiciones podemos ver que existen diferentes representaciones para el mismo objeto matemático, ya que la proporción $A/C = B/D$ que expresa la igualdad de dos razones, nos dice que cada una de éstas representa al mismo número real (clases de equivalencia).

Además, si tomamos la definición de proporción de Eudoxio, tenemos que:

$$A/C = B/D$$

Implica que $\forall$ m y n, números naturales, mA y mB son respectivamente menores, iguales o mayores que nC y nD, esto es:

$$mA = nC \therefore mB = nD$$
$$mA > nC \therefore mB > nD$$
$$mA < nC \therefore mB < nD$$

Si se cumple el primero de los tres casos existirán dos enteros m y n arbitrarios, tales que:

$A/C = n/m = B/D$, y por lo que A/C y B/D serán un número racional ya que son la razón de dos magnitudes conmensurables. - En este caso, Dedekind nos dice que m/n lo podemos tomar como el mayor elemento de la clase izquierda, o bien, como el menor elemento de la clase derecha de la misma cortadura.

Si no se cumple el primer caso y sólo se cumplen los dos últimos, existirán enteros arbitrarios m', n', m'' y n''

$$A/C > n'/m', \quad B/D > n'/m'$$
$$A/C < n''/m'', \quad B/D < n''/m''$$

Aquí vemos que tanto A/C como B/D están definidos por la misma cortadura de los racionales, donde la clase izquierda está formada por todos los n'/m' menores que A/C y B/D y, la clase derecha estará formada por los n''/m'' mayores que A/C y B/D. - En este caso A/C representan a un número irracional y no pertenecen ni a la clase izquierda ni a la clase derecha de la cortadura.

Por último, tanto el concepto de cortadura como el de proporción, dividen al conjunto de los números racionales y al de las magnitudes en dos conjuntos ajenos, en los cuales todos los elementos de uno de estos subconjuntos son menores que todos los elementos de otro subconjunto.

Por lo anterior podemos decir que la definición de razones iguales contenida en el libro V de Euclides y atribuida a Eudoxio corresponde a la definición de número real debida a Dedekind. Ahora bien, tanto Eudoxio como Dedekind aceptan la existencia de un número infinito de puntos en un intervalo dado, pero mientras Eudoxio considera que al comparar dos magnitudes inconmensurables dicho infinito sólo existe en potencia, Dedekind, de hecho, lo acepta como infinito actual al concebir a los números reales, formados por racionales e irracionales y que se encuentran en correspondencia uno a uno con respecto a los puntos de la línea recta.

CAPITULO IV

EL METODO DE EXHAUCION DE EUDOXIO

ANTECEDENTES HISTORICOS.

Para encontrar los primeros vestigios de la teoría filosófica matemática que llega hasta Eudoxio y el método de Exhaución, será necesario remontarnos hasta los pitagóricos y Zenón de Elea.

En efecto, el primer y decisivo planteamiento del problema de lo infinitesimal lo encontramos en Zenón de Elea; pese a que los matemáticos griegos consideraron funestos para la teoría de lo infinitesimal sus argumentos, el influjo de éstos marca la dirección tomada por el cálculo infinitesimal en Grecia, pudiendo así llegar al descubrimiento del Método de Exhaución, utilizado para probar una gran cantidad de proposiciones.

Sin embargo, sabemos que los argumentos del éleáta para demostrar lo absurdo de la división hasta el infinito, están dirigidos contra la escuela petagórica, la cual sostenía dicha teoría que se hallaba dominada por el culto a las matemáticas y la teoría de las cosas número.

En efecto, la concepción de la infinita divisibilidad surgía como consecuencia del inesperado descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, por el cual son llevados a concebir los números irracionales. Ahora bien, dichos descubrimientos se dan a mediados del siglo VI a. c., pues ya Hipaso de Metaponte perteneciente a la generación posterior a Pitágoras, habla de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado, es decir la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Entonces podemos ver que para principios del siglo V a.c. la idea de la división de una recta hasta el infinito y la serie de cocientes de uno entre las potencias de dos, era una idea bastante generalizada entre los matemáticos griegos. El descubrimiento de lo inconmensurable es pues, anterior a Zenón; descubrimiento que da origen a una crisis en la escuela pitagórica, provocando el paso de una etapa en la que sólo se conocen los racionales, el número finito y la división limitada, a una segunda fase en la que lo inconmensurable exige la infinitud numérica y la ilimitada divisibilidad.

Entonces si bien es cierto que las dos primeras aporías de Zenón van dirigidas contra la divisibilidad infinita, al asimilarse ésta, Zenón nos hace ver en su tercera proposición que hasta la hipótesis de la indivisibilidad nos conduce a la opuesta de la división infinita, ya que de existir un instante indivisible en él la flecha se encontraría en reposo, estando en movimiento, lo cual es imposible. Por lo tanto Zenón reafirma en la tercera y cuarta proposición su concepto de un todo continuo; entendiendo a éste como aquello que no consta de partes indivisibles.

Por otro lado, al hablar de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, podemos hacer notar que la demostración atribuida al antiguo pitagorismo, es una demostración por reducción al absurdo, es decir, de la misma forma en que aparecen los razonamientos de Zenón, quien debió por lo tanto, hallarlo ya en uso en la matemática griega.

Ahora bien, la aportacion de Zenón al desarrollo de la teoría de lo infinitesinal tiene una máxima importancia al exigir una mayor perfección en las demostraciones, obligando a los matemáticos griegos a evitar la premura en el uso del infinito y de los infinitesimales y, al mismo tiempo, haciendo a un lado la concepción primitiva de lo indivisible como unidad puntual dotada de masa. Al enfrentar pues, uno a otro de los conceptos de finito e infinito, principia una nueva etapa en las matemáticas griegas que nos llevarían a la geometría de Eudoxio.

El método de exhaución atribuido a Eudoxio fué la respuesta de Zenón desde un punto de vista matemático. El mostró que no es necesario suponer la existencia de lo infinitamente pequeño, ya que era suficiente para los propósitos de las matemáticas suponer que por la continua bisección de una magnitud podamos finalmente llegar a una magnitud tan pequeña como querramos. Sacando de esta manera a la geometría del problema de las cantidades inconmensurables.

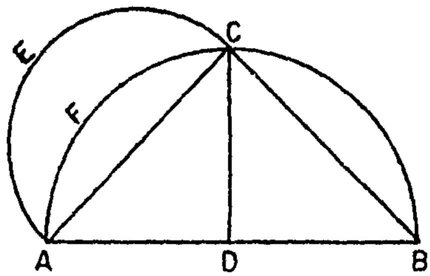
Anáxagoras hace la primera formulación clara del principio infinitesimal: "En lo pequeño no hay un mínimo, sino siempre un menor, porque lo que existe no puede ser convertido en inexistente por la división" [13], Pag. 72.

Este concepto de infinitesimal, como lo que es más pequeño que cualquier tamaño dado, lo aplica Anaxágoras en geometría al problema fundamental de su época: la cuadratura del círculo, empleando en su solución el método exhaustivo, duplicando indefinidamente el número de lados de un polígono inscrito o circunscrito en un círculo; al aumentar el número de lados, la diferencia entre las superficies de las dos figuras, se hace menor que cualquier magnitud apreciable, de modo que el polígono puede llegar a medir la superficie del círculo y se puede demostrar la proposición de que dos círculos son entre sí, como los cuadrados de sus diámetros.

Podemos ver que ya a mediados del siglo V se estudiaban las relaciones entre los círculos y los polígonos inscritos y quizá circunscritos, resaltando como ejemplo, el teorema de las lúnulas cuadrables, descubierto por Hipócrates de Quios, aunque sin emplear el método de exhaución, tal como lo desarrollo posteriormente Eudoxio: la suma de las lúnulas construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, es igual al área del triángulo.

En efecto, sea AC el lado de un cuadrado inscrito en un círculo y AB su diagonal; sea AEC un semicírculo con AC como diámetro, entonces tendremos:

$AB^2 = 2\,(AC)^2$



Por lo que, ya que círculos, y por lo tanto semicírculos, son uno a otro como el cuadrado de sus diámetros, tendremos:

Semicírculo ACB = 2 (semicírculo AEC) por lo tanto
Cuadrante AFCD = Semicírculo AEC y
Lúnula AECF = $\triangle$ ADC.

De una manera idéntica podemos demostrar que el área del $\triangle$ BCD es igual a la de la lúnula construida sobre BC, por lo que el área del triángulo rectángulo ABC es igual a la suma de las lúnulas construidas sobre sus catetos [5] Pág. 366.

Aunque en algún modo el atomismo marca un retroceso en cuanto a la teoría de lo infinitesimal, da un gran paso al aplicarla a la geometría de los sólidos. En efecto, Demócrito, uno de los principales representantes de esta escuela, al plantearse el problema de calcular el volumen de la pirámide y el cono, llega a calcular dichos volúmenes en un tercio del prisma y el cilindro, respectivamente, aunque sin dar una demostración geométrica, lo cual será más tarde mérito de Eudoxio. Sin embargo, Demócrito tiene el mérito de haber sido el primero en introducir el principio infinitesimal en la geometría sólida [5] Pág. 366.

El método ideado por Demócrito nos es descrito por Plutarco de la siguiente manera: "Si se trunca un cono mediante planos paralelos a la base en muchos peldaños a manera de escalera:- ¿Qué pensar de las superficies de las secciones, resultan iguales o desiguales? Si fuesen desiguales se harían irregular al cono, que tendría en sí muchos peldaños a manera de escalera; si fuesen iguales, serían iguales también las secciones sucesivas y el cono aparecería dotado de la propiedad del cilindro o sea, de constar de círculos iguales y no desiguales; lo cual constituiría el máximo absurdo" [9], Pág. 187.

Como una solución al problema anterior, Demócrito propone tomar a las secciones diferentes pero de tal forma que la diferencia sea imperceptible. Entonces la totalidad del cono la podemos dar como suma de laminillas de grosor infinitesimal.

Demócrito con esta idea, llega a calcular el volumen del cono en 1/3 del volumen del cilindro y el de la pirámide en 1/3 del volumen del prisma, descomponiendo el volumen del cilindro y del prisma, respectivamente, en el volumen de conos y pirámides equivalentes entre sí [6], Pág. 179 y ss.

Sin embargo, la demostración rigurosa de las proposiciones sólo surge hasta la aparición de Eudoxio, que permite la fundamentación rigurosa del principio de lo infinitesimal.

Ahora bien, para llegar a Eudoxio, es necesario hacer mención de dos filósofos sofistas: Antifonte y Brisón, que tratan de resolver el problema de la cuadratura del círculo.

Aristóteles nos dice que Antifonte pensó que inscribiendo progresivamente en un círculo polígono de 4, 8, 16, 32, etc. lados, podríamos llegar a un polígono que agotara el círculo [1], Pág. 572.

El mismo Aristóteles nos explica que el procedimiento - adoptado por Brisón es en el fondo el mismo que el de Antifonte,- ya que la única diferencia consiste en tomar a la vez la serie de los polígonos inscritos y los circunscritos, concluyendo que tiene que llegar a obtener una serie par, en la que la diferencia entre el circunscrito (siempre mayor que el círculo) y el inscrito- (siempre menor que el círculo), sea mínima, de tal forma que un - polígono de área media entre los dos, sea el mismo círculo [1], - Pág. 363.

Vemos pues un progreso en relación a Antifonte, ya que- parece vislumbrarse la idea de que el círculo es el límite de ambas series. La importancia del paso dado por Brisón, lo resalta- Heath, al señalar que el uso constante de las dos series (de polígonos inscritos y circunscritos), y el hecho de tomar ambas como- tendientes a un límite común, son las características del método- exhaustivo. Sin embargo, debido a la concepción atomista de Brisón, éste no puede alcanzar el concepto de infinita persecusión - del límite.

Para superar este concepto se tuvo que pasar del atomismo materialista de Demócrito, al atomismo idealista de los pitagóricos (concepto de mónada) y de ahí, al atomismo geométrico, in-- troducido por Teetetos al descomponer los sólidos geométricos en- superficies, líneas y puntos, siendo estos últimos las unidades - indivisibles. Este último concepto de atomismo es superado por - el mismo Teetetos, al descubrir la universalidad de lo irracional, convirtiendo en regla general lo que se había considerado como -- excepción.

Este descubrimiento ya no permite ninguna clase de atomismo, ya que cualquier clase de unidad que gozara de posición, - implicaría la conmensurabilidad con dicha unidad, lo cual Teete-- tos ha dejado excluido.

Surge entonces la necesidad de superar el obstáculo de-la inconmensurabilidad, lo cual hace Eudoxio, al resaltar la si--guiente propiedad de las magnitudes homogéneas "que guardan entre sí una relación tal, que cualquiera de ellas dos, multiplicada, -puede superar a la otra". [5], Pág. 114.

Como consecuencia de lo anterior, surge la siguiente --proposición: "Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se-resta una magnitud mayor que su mitad, del residuo se resta una -magnitud mayor que su respectiva mitad y, así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor señalada" [5], Pág. 14.

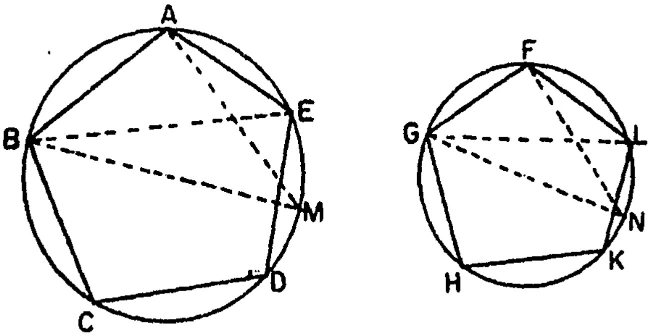
De esta manera podemos deducir que no hay magnitud mínima alguna; esto es, regresaremos al concepto de infinitesimal dado por Anaxágoras, regreso que supera al atomismo geométrico y --que deja el campo abierto a la aplicación del concepto de infinitesimal.

Dicha aplicación la encontramos contenida en el método-de exhaución empleado por Eudoxio en las demostraciones de algunas proposiciones contenidas en el libro XII de Euclides, el cual recogió los desarrollos alcanzados hasta entonces en el campo de-lo infinitesimal.

A continuación expondremos algunas proposiciones contenidas en el libro XII de Euclides, que nos permiten analizar las-principales características del método de exhaución, dichas proposiciones son la segunda y séptima, incluye también la primera, --por estar íntimamente ligada a la segunda.

PROPOSICION I: [5], Vol 3, Págs. 369 y 370.

Dos polígonos semejantes son uno a otro, como los cuadrados sobre sus diámetros:



Sean ABC y FGH dos circunferencias y ABCDE, FGHKL polígonos semejantes inscritos en ellas, tracemos los diámetros respectivos BM y GN y también las líneas BE y AM, GL y FN.

Tenemos nosotros que:

$\measuredangle BAE = \measuredangle GFL$ y que

$\overline{BA} : \overline{AE} = \overline{GF} : \overline{FL}$ (por definición de semejanza).

Entonces tenemos que $\triangle BAE$ es equiángulo con $\triangle GFL$, --- por lo tanto $\measuredangle AEG = \measuredangle FLG$ y también tenemos que:

$\measuredangle AEB = \measuredangle AMB$ y $\measuredangle FLG = \measuredangle FNG$ por lo tanto $\measuredangle AMB = \measuredangle FNG$ pero el ángulo recto $\measuredangle BAM = \measuredangle GFN$ de donde:

$\measuredangle MBA = \measuredangle NGF$ y

$\triangle ABM$ es equiángulo con $\triangle FGN$.

Por lo que: $\overline{BM} : \overline{GN} :: \overline{BA} : \overline{GF}$

Pero la razón del cuadrado sobre BM a el cuadrado sobre GN es el cuadrado de la razón de BM a GN.

Y la razón del polígono ABCDE al polígono FGHKL es el cuadrado de la razón de BA a GF. (VI-20).

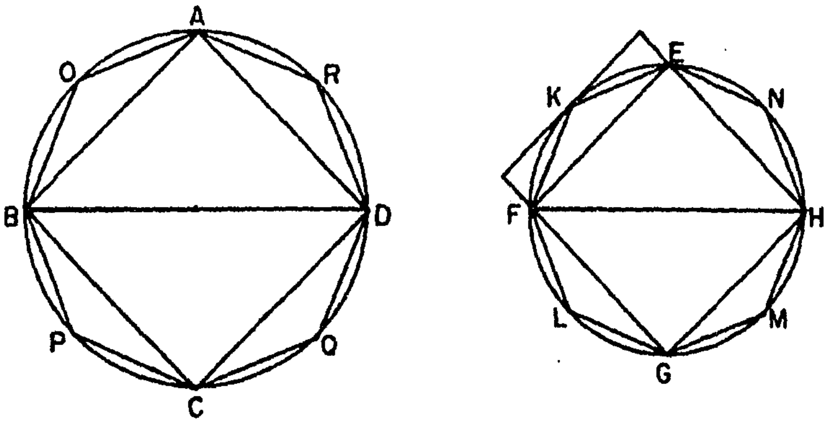
Por lo que $BM^2 : GN^2 ::$ polígono ABCDE : polígono FGHKL

Por lo tanto, polígonos semejantes, inscritos sobre circulos, son uno a otro, como los cuadrados sobre sus diámetros --- l.q.d.

PROPOSICION II: [5] Vol. 3, Págs. 371 y s.s.

Círculos son uno a otro, como los cuadrados sobre sus diámetros.

Sean ABCD, EFGH, círculos y BD, FH sus respectivos diámetros; por demostrar que $ABCD : AEFG = BD^2 : FH^2$.



Supongamos que la igualdad anterior no se cumple, entonces.

$$ABCD : S = BD^2 : FH^2 \text{ con } S > EFGH \text{ ó } S < EFGH.$$

Y sea el cuadrado EFGH inscrito en el círculo EFGH, dicho cuadrado es mayor que la mitad del área del círculo, ya que es igual a la mitad del cuadrado circunscrito en el círculo y el círculo es menor que el cuadrado circunscrito.

Sean los arcos con cuerdas EF, FG, GH, HE, bisecados en los puntos K, L, M, N, tracemos EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE.

Cada uno de los triángulos EKF, FLG, GMH, HNE, es mayor que la mitad de la porción del círculo que lo contiene, puesto --

que si sobre K, L, M, N, trazamos tangentes al círculo y completamos los paralelogramos, los triángulos EKF, FLG, GMH, HNE, serán la mitad de dichos paralelogramos y éstos son mayores que los segmentos de círculo respectivo.

Esto es, bisecando continuamente los residuos de circunferencia y juntando las líneas rectas, podremos obtener algunas porciones del círculo que sean menores que el exceso por el cual el círculo supera al área S.

Así podremos obtener un polígono cuya área supera al área S.

Inscribamos tambien en el círculo ABCD el polígono AOBPCQDR, semejante al polígono EKFLGMHN, por lo que:

$BD^2 : FH^2$ = AOBPCQDR : EKFLGMHN (XII-I)

pero $BD^2 : FH^2$ = círculo ABCD : área S

Entonces también círculo ABCD : área S = AOBPCQDR : EKFLGMHN (V-II), por lo que alternadamente. El círculo ABCD es al polígono inscrito en él, como el área S es al polígono EKFLGMHN (V-16).

Pero el círculo ABCD es mayor que el polígono inscrito en él, por lo que el área S es también mayor que el polígono EKFLGMHN.

Ahora bien, ya vimos que es también menor ¡ por lo que como el cuadrado sobre BD es al cuadrado sobre FH, el círculo ABCD no es a ningún área, menor que el círculo EFGH.

Similarmente, podemos probar que tampoco el círculo

EFGH es a ningún área menor que el círculo ABCD, como el cuadrado sobre FH es al cuadrado sobre BD.

En seguida tenemos que tampoco el círculo ABCD es a ningún área mayor que el círculo EFGH, como el cuadrado sobre BD es a el cuadrado sobre FH.

Ya que así es, estará en razón a una mayor área S, por lo que inversamente, como el cuadrado sobre FH es al cuadrado sobre BD, así el área S es al círculo ABCD. Pero como el área S es al círculo ABCD, así el círculo EFGH, es a algún área menor que el círculo ABCD.

Por lo que también como el cuadrado sobre FH es al cuadrado sobre BD, así el círculo EFGH es a algún área, menor que el círculo ABCD (V-II), lo que se probó era imposible.

Por lo que el cuadrado sobre BD es al cuadrado sobre FH, así no es el círculo ABCD a ningún área mayor que el círculo EFGH. Y ya que está probado que tampoco está en razón a ningun área menor que el círculo EFGH, tendremos que el cuadrado sobre BD, es al cuadrado sobre FH, como el círculo ABCD, es al círculo EFGH l.q.d.

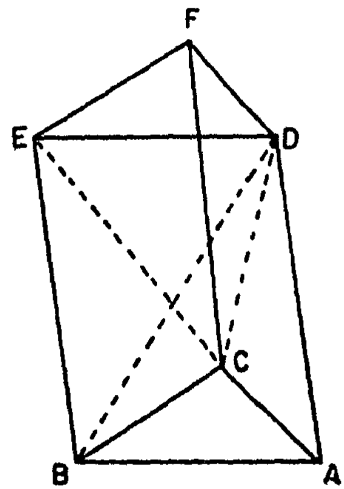
PROPOSICION VII:

Cualquier prisma que tenga una base triangular puede ser dividido en tres pirámides iguales una a la otra, que tengan bases triangulares:

Sea un prisma cuya base triangular es ABC y DEF opuesta a ella.

Por demostrar que el prisma ABCDEF puede dividirse en tres pirámides iguales una a la otra, que tienen bases triangulares.

Tracemos BD, EC, CD.



Ya que ABED es un paralelogramo y BD es su diagonal, tenemos que $\triangle ABD = \triangle BED$ (I,34). Por lo que también la pirámide de la cual el triángulo ABD es la base y el punto C el vértice es igual a la pirámide de la que el triángulo BED es la base y el punto C el vértice (XII, 5).

Pero la pirámide en la que el triángulo BED es la base y el punto C el vértice es la misma que la pirámide en la que el triángulo EBC es la base y el punto D el vértice.

Asimismo, ya que FCBE es un paralelogramo y EC su diagonal, tenemos que las pirámides en las que $\triangle$ EBC es la base y D el vértice y aquélla en la que $\triangle$ ECF es la base y D el vértice, son iguales, ya que $\triangle$EBC es igual a $\triangle$ECF.

Pero la pirámide de la que el triángulo EBC es la base y el punto D es vértice, es igual a la pirámide de la que el triángulo ABD es la base y el punto C el vértice, por lo que también la pirámide de la cual el triángulo ECF es la base y el punto D el vértice, es igual a la pirámide de la que el triángulo ABD es la base y el punto C el vértice.

Por lo que prisma ABCDEF ha sido dividido en tres pirámides iguales unas a otras, que tienen bases triangulares.

Y ya que la pirámide de la que el triángulo ABD es la base y el punto C el vértice, es la misma con la pirámide de la que el triángulo CAB es la base y el punto D el vértice por estar contenidos por los mismos planos.

Mientras que la pirámide de la que el triángulo ABD es la base y el punto C el vértice se ha probado es un tercio del prisma en el que el triángulo ABC es la base y DEF su cara opuesta, por lo que también la pirámide de la que el triángulo ABC es la base y el punto D es vértice es un tercio del prisma que tiene la misma base, el triángulo ABC y DEF como cara opuesta. l.q.d.

Como un corolario importante de la demostración anterior, tenemos el siguiente resultado: cualquier pirámide es una tercera parte del prisma que tiene la misma base e igual altura. [5], Págs. 394 y 395.

Al analizar las demostraciones anteriores, podemos ver que como respuesta a la dificultad de los infinitesimales, la escuela platónica, representada por Eudoxio, simplemente los ignora, resolviendo los problemas en que se pueda llegar a los infinitesimales de una manera puramente lógica.

Esto lo podemos ver en la demostración de la proposición II: en dicha demostración vemos que la idea principal consiste en agotar el círculo en el sentido de la proposición I del Libro X, al inscribir sucesivamente polígonos de 4, 8, 16.... lados en el círculo, obtenido de esta manera, en algun momento, porciones que son menores que cualquier área dada, sin importar la magnitud de ésta.

Otra característica de este método es que recurre a la demostración por absurdo, demostrando que al suponer, en el caso de la proposición X que el volumen del cono es mayor o menor que un tercio del volumen del cilindro, con igual base y altura, llegamos necesariamente a una contradicción.

El uso de este método de demostración fue generalizado tanto entre los griegos como durante el renacimiento, para resolver problemas en el cálculo de áreas y volúmenes, método bastante riguroso y que en este sentido cumple con las exigencias de las matemáticas modernas, en especial del cálculo integral, teniendo sin embargo, el inconveniente de ser demasiado tedioso.

A continuación compararemos este método con el surgido en Inglaterra a finales del siglo XVII, con la obra de Isaac Newton, considerado junto con Leibniz, como el inventor del cálculo infinitesimal.

CAPITULO V

EL METODO DE EXHAUCION DE EUDOXIO Y LOS PRINCIPIOS DEL CALCULO INFINITESIMAL CON ISAAC NEWTON

Isaac Newton fue una de las inteligencias más grandes que han existido a través de toda la historia de la humanidad, inteligencia que abarcó, de hecho, todos los campos del conocimiento humano: matemáticas, física, astronomía, historia, filosofía, derecho, teología, química, etc.

Newton revolucionó la ciencia principalmente por sus aportes en matemáticas y mecánica. Esta revolución mereció el siguiente comentario de parte de Herbert Butterfield: "Eclipsa todos los acontecimientos producidos desde el nacimiento de la cristiandad y reduce el renacimiento y la reforma al rango de meros episodios..." [2], Pág. 59.

Ahora bien, si Newton revolucionó al mundo científico, esto se debió a la influencia que sobre él ejercieron otros grandes pensadores, desde Pitágoras hasta los científicos del renacimiento italiano; él mismo lo reconoce al decir: "Si pude ver más lejos es porque gigantes me elevaron sobre sus espaldas". [2], Pág. 59.

En efecto, las enormes aportaciones a la ciencia de parte de Copérnico, Galileo y Kepler, dejaron el ambiente propicio para que el genio de Newton determinara un nuevo camino en el desarrollo científico.

En síntesis, aunque las aportaciones científicas de Newton marcan un hito para la humanidad, no son el resultado de -

un chispazo divino, sino el fruto de deducciones lógicas y de la transformación de ideas preexistentes, característica de la ciencia, que deseo resaltar en este trabajo. Esto es, que cualquier innovación, por sencilla o importante que surja, es el resultado de la transformación, gracias a los elementos propicios de la época, de ideas ya existentes.

LAS MATEMATICAS EN NEWTON.

Entre las obras que Newton leyó en su época de estudiante en el Trinity College y que seguramente influyó grandemente en sus trabajos matemáticos, se encuentran: La Optica, de Kepler; Los Elementos, de Euclides; La Principia Philosophiae y la Geometría, de Descartes y la Aritmética Infinitorum, de Wallis, entre otros.

Las aportaciones que este genio hace en el campo matemático abarcan todas las ramas de esta ciencia; el álgebra, la teoría de los números, la geometría analítica y clásica, la teoría de la probabilidad y, principalmente, su trabajo fundamental en el cálculo, el cual compararemos en parte, con el Método de Exhaución de Eudoxio.

Para poder comparar parte de las aportaciones de Newton al Cálculo Diferencial con la Teoría de Exhaución de Eudoxio, será necesario presentar algunas de las ideas que aparecen en los Principia, obra cumbre del hijo predilecto del Trinity College. Esta obra constituye una síntesis matemática de hechos ya conocidos y organizados, por ejemplo Las Leyes de Kepler.

La sección I del Libro I, es un conjunto de once lemas, en los que Newton expone su teoría de los límites; esta teoría se fundamenta en el concepto de límite que nos presenta en el lema I:

LEMA I:

"Las cantidades y los cocientes de cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad y, antes del final de ese tiempo se aproximan cada vez más que cualquier diferencia dada, se hacen al final iguales" [10], Pag. 29.

Demostración: Si negamos ésto, supongamos entonces que al final son diferentes, y sea D su última diferencia. Por lo tanto, no podemos aproximar más intimamente que por la diferencia dada D, lo cual es contrario a la suposición.

Después del lema I, Newton demuestra tres lemas relacionados con el área de figuras curvas, la cual calcula por medios de series de rectángulos inscritos y circunscritos a la figura. Este método nos recuerda el método de Exhaución de Eudoxio, aunque tiene también diferencias profundas, como veremos más adelante.

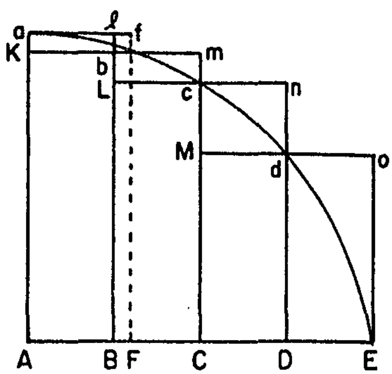
LEMA II.

"Si en una figura AacE, determinada por las rectas Aa, AE y la curva acE, se inscriben cualquier número de paralelogramos Ab, Bc, Cd, etc., comprendidos sobre bases iguales AB, BC, CD, etc., y los lados Bb, Cc, Dd, etc., paralelos al lado Aa, de la figura y los paralelogramos aKal, bLcm, cMdn, etc. son completados, entonces si el ancho de dichos paralelogramos es disminuido y el número de ellos es aumentado infinitamente, yo digo que las últimas razones entre la figura inscrita AKbLcMdD, la figura circunscrita AalbmcndoE y la figura curvilínea AabcdE son razones de igualdad". [10], Págs. 29 y 30.

Demostración: La diferencia de las figuras inscritas y circunscritas es la suma de los paralelogramos Kl, Lm, Mn, Do; ésto es (por la igualdad de todas sus bases), igual al rectángulo sobre una de sus bases Kb y con altura igual a la suma de las altitudes Aa, ésto es, el rectángulo Abla; pero este rectángulo, porque su anchura AB se supone disminuye infinitamente, se convierte en menor que cualquier espacio dado. Y de donde (por el lema I), las figuras inscritas y circunscritas resultarán al último iguales unas a otras; y también la figura curvilínea intermedia, será finalmente igual a ellas.

LEMA III:

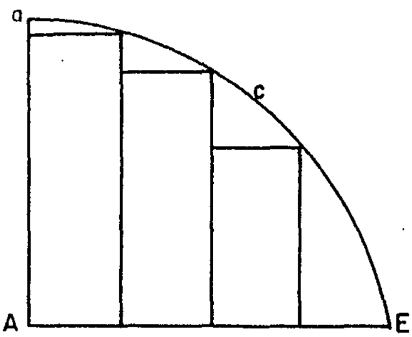
"Las mismas últimas razones serán también razones de igualdad, cuando los anchos AB, Bc, Cd, etc. de los paralelogramos sean diferentes y todos ellos disminuidos infinitamente". -- [10], Pag. 30.

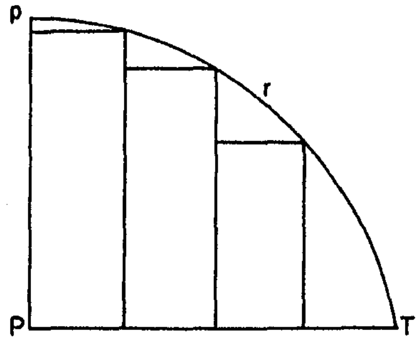


Demostración: supongamos a AF igual a la mayor anchura y completemos el paralelogramo FAaf. Este paralelogramo será mayor que la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas: pero porque la anchura AF es disminuida infinitamente, resultará menor que cualquier rectángulo l.q.d.

LEMA IV

Si en dos figuras AacE, PprT, son inscritas dos series-de paralelogramos con igual número en cada serie y sus anchuras -son disminuidas al infinito, si las últimas razones de los paralelogramos en una figura son respectivamente las mismas a la de la-otra. Yo digo que estas dos figuras AacE, PprT, están una a otra en la misma razón. [10], Pág. 31.





Demostración: Porque los paralelogramos en una figura -son los mismos que los paralelogramos en la otra y, así, por composición, la suma de todos en una figura es a la suma de todos en la otra, por lo tanto una figura será a la otra, (por el Lema) --III, porque tanto la primera figura como la primera suma están --con la segunda figura y la segunda suma en razón de igualdad. ---l.q.d.

Enseguida trataremos de encontrar las coincidencias, y-diferencias entre el contenido del libro XII de Euclides y los lemas anteriores pertenecientes al libro uno de los PRINCIPIA.

NEWTON Y EUDOXIO:

Si bien es cierto que el estilo utilizado por Newton en LOS PRINCIPIA se apega al utilizado por los antiguos griegos, tal como nos lo señala Bertrand Russell, al decirnos "Fue Euclides -- quien sirvió de modelo a Los Principia de Newton" [13], Pág. 801.

Al analizar más detenidamente podemos ver que bajo la - apariencia Euclidiana se encuentra un nuevo enfoque hacia ese tipo de problemas, enfoque considerado por muchos historiadores dela ciencia, como el primer tratado de Cálculo Diferencial, que -- permitió un avance gigantesco, a partir de entonces, a las matemáticas así como, su aplicación en diferentes ramas de la física.

Podemos ver, por lo tanto, que mientras los Elementos - de Euclides son matemáticas puras en el sentido moderno, ya que - no existe el menor indicio de que la geometría pudiera tener alguna aplicación práctica, los PRINCIPIA tienen como finalidad la exposición de la Dinámica Celeste, para lo cual utiliza como herramienta, la nueva matemática.

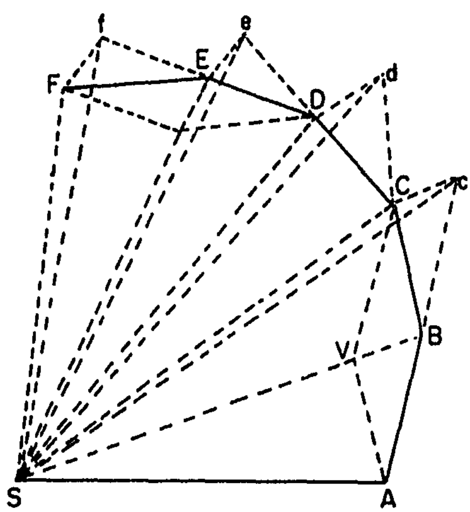
Esta aplicación de las matemáticas a la dinámica, podemos verla como un claro ejemplo, en el primer Teorema de la obra, el cual aparece en la segunda sección del Libro I. En dicho Teorema, Newton desarrolla la importancia dinámica de la Ley de lasáreas de Kepler, al probar que el movimiento curvilíneo descritopor esta Ley, es consecuencia del carácter centrípeto de la Fuerza.

TEOREMA I:

"Las áreas que describen cuerpos rotatorios por el movimiento del radio a un centro de fuerza inamovible, están en los mismos planes inamovibles y son proporcionales al tiempo en que son descritas". [10] , Pág. 40.

Demostración: Supongamos que el tiempo está dividido en partes iguales y en la primera parte del tiempo, el cuerpo, por su fuerza innata, describe una línea recta AB.

En la segunda parte del tiempo el mismo cuerpo, si no hubiera obstrucción, pasaría directamente a c, sobre la línea Bc, igual a AB, y en la misma dirección, por lo tanto ya que los triángulos ASB, BSc tienen bases iguales y una altura común, tendrán también la misma área.



Pero cuando el cuerpo llega a B, se supone que una fuerza centrípeta actúa sobre él con un gran impulso, modificando su movimiento sobre Bc, forzándolo en adelante a continuar su movimiento a lo largo de la recta BC.

Trácese cC paralelo a BS, uniendo Bc y C y al fin de la segunda parte del tiempo, el cuerpo, por corolario I de las leyes, se encontrará en C, en el mismo plano con el triángulo ASB.

Uniendo SC y porque SB y Cc son paralelos, el triángulo SBC será igual en área al triángulo SBc y, por lo tanto también igual al triángulo SAB.

Por un razonamiento semejante, si la fuerza centrípeta actúa sucesivamente en C, D, E, etc. y obliga al cuerpo en cada momento a describir las líneas rectas CD, DE, EF, etc., que estarán en el mismo plano y el triángulo SCD será igual al triángulo SBC Y SDE a SCD y SEF a SDE y del mismo modo, áreas iguales serán descritas en un plano inamovible y por composición, cualesquiera sumas SADS, SAFS, de sus áreas, son una a otra como los tiempos en los cuales han sido descritas.

Ahora sea el número de los triángulos aumentado y su anchura disminuida al infinito y, por el corolario IV del lema III, su último perímetro ADF, será una línea curva y, por lo tanto, la fuerza centrípeta, por medio de la cual el cuerpo es arrastrado continuamente a la inversa de la tangente de esta curva, actuando continuamente y cualesquiera áreas descritas SADS, SAFS, que son siempre proporcionales a los tiempos de descripción, serán también, en este caso, proporcionales a estos tiempos. l.q.d.

En el escolio concluyente de la primera sección del Libro I, el mismo Newton nos presenta otra diferencia entre su método y el de Euclides, al decir: "Estos lemas están dispuestos para evitar el tedio de deducir demostraciones complicadas ad absurdum, de acuerdo con el método de los viejos geómetras" [10], Pág. 38.

En efecto, Newton desecha los métodos lógicos característicos de los griegos y sustituye las demostraciones por reducción al absurdo, con el uso del concepto de límite; de esta manera identifica una curva como la suma de rectas infinitamente pequeñas y su área como la suma de rectángulos infinitamente pequeños y numerosos, que tienden a un límite determinado.

Al leer cuidadosamente cualquier lema y demostración del Libro I, nos damos cuenta del carácter infinitesimal de dichas proposiciones y de la importancia que en sus demostraciones tiene el uso de límites.

Isaac Newton sabía que la crítica a su método podría surgir en donde lo infinitesimal hacía su aparición, esto es, donde intervenía el concepto de cociente último de cantidades evanescentes, porque antes de que las cantidades desaparezcan, su cociente será nada.

Newton afirma, sin embargo, que "existe un límite en todas las cantidades y cocientes que empiezan y dejan de ser y, tales límites son ciertos y definidos; el determinar los mismos es un problema geométrico, pero todo lo que es geométrico, podremos usarlo en determinar y demostrar cualquier cosa que sea geométrica" [10], Pág. 39.

De esta manera se simplifica enormemente este tipo de demostraciones y se amplía el campo de aplicación a todos los terrenos de la física.

Por último, otra diferencia fundamental entre Newton y los antiguos griegos es que él fue capaz de superar la influencia que en su forma de pensar pudiera ejercer la filosofía dominante en su época. Así, cuando acepta la existencia de una fuerza mate mática de atracción, supera la filosofía tradicionalista de su época, que chocaba con tal concepto, pudiendo de esta manera, fundamentar una teoría que explica y predice los fenómenos de la naturaleza.

En síntesis, la influencia de Euclides en Newton fue muy grande, como podemos verlo en la importancia que éste da a la geometría y el estilo euclidiano de su obra, sin embargo, las diferencias entre una obra y la otra, son enormes, surgiendo principalmente por motivos prácticos. Estas diferencias son el uso del límite en las demostraciones, desechando de esta forma las demostraciones al absurdo; la aplicación práctica de las matemáticas y el aspecto revolucionario en lo filosófico.

CAPITULO VI

RECAPITULACION

A lo largo de este trabajo hemos tratado de presentar la evolución que durante más de dos mil años han tenido algunos aspectos de la idea de infinito. Para hacer esto hemos relacionado la obra de algunos matemáticos y filósofos griegos con las aportaciones que la obra de Richard Dedekind e Isaac Newton dan a las matemáticas modernas.

A manera de recapitulación y resumen presentamos algunas conclusiones a las que hemos llegado y que son las siguientes:

1.- Tanto los pitagóricos como los atomistas consideraron al espacio formado por un número infinito de elementos discontinuos a pesar de que el descubrimiento de los números irracionales por los primeros hacia inaceptable la discontinuidad de las magnitudes.

2.- Corresponde a Parménides, fundador de la escuela eleatense, proponer la existencia de un todo continuo, resultando como consecuencia de esto, la infinita divisibilidad de las magnitudes, lo cual venía a contraponerse a la concepción de pitagóricos y atomistas.

3.- Zenón, discípulo de Parménides, es el encargado de iniciar a través de sus célebres aporias, la polémica que ha durado más de dos mil años acerca de las nociones del tiempo y espacio, unidad del ser y movimiento.

4.- El pensamiento de Zenón nos llega a través de la crítica de Aristóteles y Platón, principalmente, siendo la mayor o menor influencia de estos pensadores la que ha determinado los diferentes cauces que tomaron los Filósofos y Científicos para explicar las interrogantes surgidas alrededor del concepto de infinito.

5.- Como consecuencia del estudio del infinito en el espacio y el tiempo surgen la teoria de la proporción y el método de exhaución de Eudoxio considerados, respectivamente, como los primeros antecedentes de la teoría de los números de Richard-Dedekind y del cálculo diferencial de Isaac Newton.

6.- Tanto Dedekind como Newton, al igual que todas aquellas mentes que han revolucionado la ciencia, tuvieron un profundo conocimiento de las principales corrientes del pensamiento griego, conocimiento que influyó positivamente en la creación de su propia obra.

7.- Como resultado de todo lo anterior, podemos afirmar que la aportación de los grandes matemáticos que han sentado las bases de la matemática moderna no surgen de una manera espontánea y aislada, sino que son el resultado de la evolución de ideas surgidas en la antigua Grecia, adaptándolas para que pudieran satisfacer necesidades tanto teóricas como prácticas de cada época.

8.- Por lo tanto consideramos conveniente para todo estudiante de matemáticas un curso de historia crítica de dicha materia, curso que le permitirá una visión más amplia del mundo de las matemáticas, la cual redundará en un mayor éxito en el esfuerzo hecho para estudiar esta hermosa ciencia.

B I B L I O G R A F I A

[1].- Aristóteles, Obras. Editorial Aguilar, Segunda edición, 1975.

[2].- Cohen, Newton. CONACYT, Primera edición, 1982.

[3].- Dedekind, Essays on the Theory of Numbers. Dover Publications, Inc. 1963.

[4].- Escuela de Elea, (Fragmentos), Editorial Aguilar, Segunda edición, 1975.

[5].- Euclides, The Thirteen Books of the Elements. Dover — Publications, Inc. Second Edition, 1956.

[6].- Heath, History of Greek Mathematics. Cambridge, 1912.

[7].- Heródoto, Historias de Heródoto, UNAM, Primera edición,- 1982.

[8].- Koyré, Estudios de Historia del Pensamiento Científico. Editorial Siglo XXI, Cuarta Edición, 1982.

[9].- Mondolfo, Rodolfo, El Infinito en el Pensamiento de la - Antigüedad Clasica, Editorial Eudeba, 1972.

[10].- Newton, Isaac, Mathematical Principles. University of - California Press, 1962.

[11].- Platón, Parménides, Editorial Aguilar, Primera edición - 1963.

[12] .- Platón, Dialogos, Editorial Porrúa, Decima edición, --- 1971.

[13] .- Russell Bertrand, Historia de la Filosofía, Editorial - Aguilar, Primera edición, 1973.

[14] .- Russell Bertrand, Ciencia y Filosofía, Editorial Agui-- lar, Primera edición, 1973.

[15] .- Struik, A Concise History of Mathematics, Dover Publi-- cations, Inc., Third Edition, 1967.

[16] .- Zafirópulo, L'ecole eléate, Societed édition, 1950.

[17] .- Zubieta Francisco, La moderna Enseñanza Dinámica de las Matemáticas, Editorial Trillas, Segunda edición, 1956.