2ej
2

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Ensayo Histórico Sobre los Posibles Sistemas Axiomáticos de la Geometría Plana que se Formularon Anteriores a la Obra de Euclides

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO
P R E S E N T A :

Alfonso Apodaca Conde

México, D. F.

1987

I N D I C E

INTRODUCCION

Los pueblos primitivos al pasar del estado nómada al estado sedentario buscaron lugares que ofrecieran condiciones de sobrevivencia y los encontraron en las orillas de los ríos y de los valles surcados por esos ríos. Así vemos que los pueblos egipcio, hindú y chino florecen en las márgenes de los ríos Nilo, Ganges y Hoangho respectivamente. Ahí encontraron condiciones propicias para el desarrollo de la agricultura y del comercio, actividades cuyo desenvolvimiento marcaba el grado de avance de los conocimientos "científicos".

Como veremos más adelante, el cúmulo de conocimientos matemáticos de esos pueblos consistía en un conjunto de reglas - para dar solución a problemas particulares, con un cierto grado de exactitud. Todo este conjunto de reglas no estaba sistematizado, esto es, no se tenía orden alguno. Los chinos, hindúes y egipcios eran poseedores de conocimientos matemáticos que no habían llegado a constituirse en un sistema fundado sobre principios y leyes generales. Es hasta Tales de Mileto que se introduce la noción de "demostración" basándose en axiomas. Esta noción de "demostración" evolucionó hasta llegar a la presentación de la geometría proporcionada por Euclides en sus Elementos.

Debido a que las obras de los matemáticos griegos de antes de Euclides están perdidas y que sólo conocemos de ellas referencias a través de filósofos, historiadores y matemáticos pareciera que el trabajo de Euclides es el primer trabajo en que se da a la geometría la presentación en forma de sistema axiomático.

Sin embargo ésto no es así; entre Tales y Euclides hubo matemáticos que elaboraron Elementos aunque, tal vez, no en la forma tan fina lograda por Euclides.

Las referencias que tenemos de los trabajos de aquellos matemáticos nos permiten saber que Euclides, en sus Elementos, incorpora parte del trabajo de esos pensadores.

Este ensayo es un intento por analizar los trabajos de aquellos matemáticos que se esforzaron por darle a la geometría el carácter sistemático logrado por Euclides y establecer qué es lo que toma Euclides de ellos para ser incluído en sus Elementos.

En el primer capítulo se analiza lo que los griegos pudieron haber aprendido de los egipcios en geometría. La razón es la siguiente: Está aceptado que existen tres ramas totalmente independientes del nacimiento de la geometría, nacida una en Egipto, otra en Babilonia y la última en China. Dos de ellas, las primeras, convergen en Tales de Mileto, y prosiguen, ya fundidas, en los Elementos de Euclides. La tercera, la proveniente de China, se encuentra influenciando el desarrollo de la matemática, con el tronco proveniente de Euclides, hasta el siglo XVII. He atacado solamente las dos primeras ramas y de manera especial la egipcia, por considerar mayor su influencia, por razones geopolíticas, en la obra del Alejandrino.

En el segundo capítulo analizo las versiones modernas de las causas que llevaron a la geometría, de ser un conjunto de reglas mediante las cuales se resolvían problemas particulares, a una ciencia deductiva basada en primeros principios.

En el capítulo tercero expongo lo que los griegos entendían por "primeros principios", "elementos" y "Elementos".

En el cuarto capítulo están los trabajos en geometría de los presumibles poseedores de Elementos anteriores a Euclides, y se dan los motivos de porqué son ellos los que hacen arreglos de Elementos. También se analizan las posibles causas de la pérdida de las obras en geometría anteriores al trabajo de Euclides.

Aprovecho para hacer patente mi agradecimiento a los profesores Alejandro R. Garciadiego y Fermín Olvera Mejía, por la ayuda prestada para llevar a feliz término este ensayo.

I. NACIMIENTO DE LA GEOMETRIA

CAPITULO I.

En la actualidad existen fuentes de evidencia para establecer la antigüedad que tiene la labor geométrica en los pueblos antiguos. Unas tabletas babilónicas descifradas por O. Neugebauer, W. Struve y otros en 1928-29 de las cuales se estableció que provenían del 2000 A.C.; varios papiros egipcios de 1700 A.C.; el Tcheou-Pei de China con material atribuido a 1100 A.C.; el Āpastamba-śulba-Sūtra de 400 A.C. a 500 A.C. y el Bāudhāyana Ś-S que se supone más antiguo que el Āpastamba; inscripciones en un templo a Horus en Edfu de alrededor de 100 A.C.

Es en base a estos documentos que los historiadores han afirmado que fue en Egipto y en Babilonia donde surgió la geometría.

Filósofos, historiadores y científicos griegos coinciden de la misma manera en establecer a Egipto como la cuna de la geometría y que de ahí pasó a Grecia. Tal vez una de las versiones más populares sea la referida por Herodoto:

> Cortado así el Egipto por los motivos antes expresados, el mismo Sesostris, a lo que decían, hizo la repartición de los campos, dando a cada egipcio su suerte cuadrada y medida igual de terreno; providencia sabia por cuyo medio, imponiendo en los campos cierta contribución, logró fijar y arreglar las rentas anuas de la corona. Con este orden de cosas, si sucedía que el río destruyese parte alguna de dichas suertes, debía su dueño dar cuenta de lo sucedido al rey, el cual, informado del caso, reconocía de nuevo por medio de sus peritos y medía la propiedad, para que en vista de lo que había desmerecido, contribuyese menos al Erario en adelante, a proporción del terreno que le restaba.
> Nacida de tales principios en Egipto, la geometría, creo pasaría después a Grecia, conjetura que no es extraña, pues los griegos aprendieron de los babilonios el reloj, el gnomon y el repartimiento civil de las doce horas del día. (1)

(1) Herodoto. Los nueve libros de la Historia. México. Editorial Porrúa. "Sepan Cuántos..." Núm. 176.

También es bien conocida la versión de Platón:

> Fedro- ¡Donosa cuestión!, refiéreme, pues, esa antigua tradición.
>
> Sócrates- Me contaron que cerca de Naucratis, hubo un dios, uno de los más antiguos del país, el mismo al que está consagrado el pájaro que los egipcios llaman Ibis. Este dios se llama- Teut. Se dice que inventó los números, el cálculo, la geometría, la astronomía, así como los juegos del ajedrez y de los dados, y, en fin, la escritura. (2)

Y Aristóteles afirma que:

> "todas las artes de que hablamos estaban inventadas - cuando se descubrieron estas ciencias que no se aplican ni a los placeres ni a las necesidades de la vida. Nacieron primero en aquellos puntos donde los hombres gozaban de reposo. Las matemáticas nacieron en Egipto, porque en este país se dejaba un gran solaz a la casta de los sacerdotes". (3)

De las citas anteriores podriamos concluir lo siguiente:

a) Todas coinciden en que la geometría nace en Egipto.
b) Herodoto afirma que la causa que dió lugar al nacimiento de la geometría fue la necesidad de resolver un problema concreto: la medición de áreas.
c) Platón dice que la geometría fue dada a los egipcios por los dioses.
d) Aristóteles asegura que el proceso de formación del conocimiento yace en tener condiciones sociales que garantizen una vida cómoda.

Nosotros no conocemos motivo alguno para pensar que la geometría no naciera en Egipto y que de ahí pasara a Grecia, ya que en aquellos tiempos Egipto era centro cultural cuya influencia traspasaba sus fronteras. Tomemos en cuenta también que la mayor parte de los sabios griegos viajaron a Egipto

(2) Platón. Diálogos. (Fedro o del amor). México. Editorial Porrúa,S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13 1970. Pág. 657-658.

(3) Aristóteles. Metafísica. Madrid. Espasa Calpe,S.A. Colección Austral, séptima edición. 1972. Pág. 13-14.

buscando el "conocimiento nuevo". En todo caso podemos diferir con la causa o motivos originales tal y como lo hace Morris Kline (4), cuando afirma que también los babilonios hicieron mucho en geometría sin tal necesidad.

Partiendo del hecho de que la geometría pasó de Egipto a Grecia, examinemos, en base a los papiros egipcios y las inscripciones en el templo a Horus en Edfu, lo que los griegos pudieron haber aprendido de los egipcios.

Se puede decir que el Imperio Egipcio data de alrededor del año 4500 A.C. cuando ya no aparecen rupturas en la evolución social salvo el período Hikso (1730 - 1580 A.C.). Es a finales del cuarto milenio antes de Cristo o a principios del tercero cuando aparecen los primeros escritos; sin embargo, los textos llegados a nosotros son de alrededor del 2300 A.C. Divididos en el Alto y Bajo Egipto, en sus inicios, fueron unificados, según Manetón, por Menes. (5)

Con la III Dinastía empieza lo que es llamado el Antiguo Imperio. Esta época es tan importante para la "ciencia" egipcia que cuando estos querían dar autoridad a sus obras, afirmaban que los conocimientos anotados provenían de ese período. Esto obscurece, obviamente, el origen de nuestras fuentes. Así vemos que se dice que el Papiro Rhind "fue escrito probablemente alrededor de 1650 A.C., pero copiado de un original del tiempo de Amenemhet III de la XII Dinastía" (6), que está comprendida en el Antiguo Imperio.

Dada esa costumbre de los egipcios no puede tomarse con certeza absoluta el último dato; al menos queda lugar para la duda.

En el Antiguo Imperio fueron construidas las pirámides y la civilización egipcia alcanzó su apogeo. Su escritura, en un

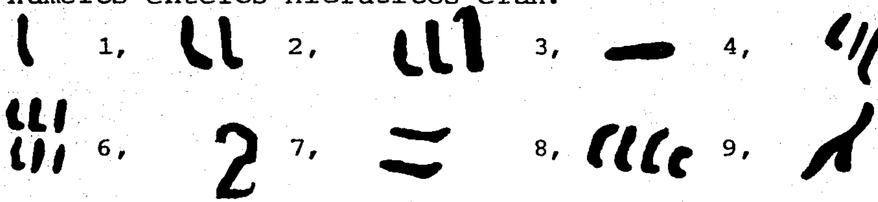
(4) Morris Kline. Mathematical thought from ancient to modern times. New York. Oxford University Press. 1972. Pág. 19.

(5) Manetón fue un sacerdote que hizo una Historia de Egipto; esta Historia fué destruída durante el incendio de la Biblioteca de Alejandría y es conocida por extractos que de ella se hicieron.

(6) Heath, T.L. A manual of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 76.

principio, fue a base de jeroglíficos (cada palabra era representada por símbolos o figuras) y posteriormente evolucionó a la escritura hierática (cada símbolo representa una sílaba); la jeroglífica se realizó en monumentos y la hierática en papiro. Los símbolos jeroglíficos para numerar fueron | para 1, ∩ para 10,  y  para 100,  para 1000,  para 10,000 y otros símbolos para números más -- grandes. La dirección de la escritura fué de derecha a izquierda; no era posicional a pesar de usar la base 10; por ejemplo, ||∩ representaba al 12.

Los números enteros hieráticos eran:



Un par de líneas hacia la derecha (o hacia la izquierda según el caso) denotaba la adición y uno hacia la izquierda la sustracción:  ,  . La división y la multiplicación -- fueron reducidas a procesos aditivos. Poe ejemplo, para calcular 12 por 12, hacían lo siguiente:

1 --- 12 En la primera línea al 1 le hacían corresponder
2 --- 24 el 12; enseguida se van duplicando las líneas --
4 --- 48 hasta llegar al número inmediato anterior. Los
8 --- 96 números de la izquierda cuya suma da 12 indicaban los números de la derecha que tenían que ser sumados para obtner el resultado del producto; así pues, ya que 4 y 8 suman 12, sumaban 48 y 96 para obtener 12 por 12.

La multiplicación por 10 se hacía reemplazando símbolos de unidad por el de 10 y el de 10 por el de 100.

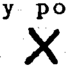
La división de enteros, por ejemplo 19 entre 8 fué hecha de la siguiente manera:

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

La idea es tomar el número de ochos y partes de ocho.

Partiendo del hecho de que un entero tiene ocho-octavos, en la primera línea al 1 le hacemos corresponder el 8, doblamos la línea y obtenemos - 16 octavos para 2 enteros; si duplicamos la segunda línea tendríamos 32 octavos para 4 enteros lo que supera la cifra de 19 que necesitamos por lo que el proceso de duplicación lo detenemos en la segunda línea y en lugar de duplicar sacamos mitad a los términos de la primera línea; el resultado lo ponemos en la tercera línea; se prosigue de esta manera hasta llegar a la línea en que aparece un octavo; de los números del lado derecho tomamos aquellos que suman 19, y la suma de los correspondientes en el lado izquierdo es el resultado de dividir 19 entre ocho: 2 + 1/4 + 1/8.

Para designar la fracción que era unitaria, utilizaban el signo  , llamado "ro" encima del entero; el signo "ro" denotó 1/320 de una fanega; en escritura hierática fue sustituido por un punto.

Por ejemplo en jeroglífico  = 1/3,  = 1/5,  = 1/15,  = 1/20. Algunas fracciones, muy pocas, tuvieron signos especiales  = 1/2,  = 2/3,  = 1/4.

Con excepción de algunas fracciones especiales, todas fueron descompuestas en fracciones unitarias, por ejemplo:

2/5 = 1/3 1/15 donde se entiende que el signo de más está ahí.

El papiro era hecho comprimiendo la médula de una planta; las hojas obtenidas se cortaban y se escribía sobre ellas. Dada su consistencia, muy pocos papiros con conceptos matemáticos han llegado a nosotros. De los que sobreviven los principales son el Rhind y el Moscú; entre ambos contienen 110 problemas y su solución (85 en el Rhind y 25 en el Moscú). Ambos son contemporáneos entre ellos (1700 A.C.).

El papiro Rhind fue copiado de un original de tiempos de Amenemhet III. El autor es conocido con el nombre de Ahmes e inicia el trabajo de la siguiente manera: "Direcciones -

para obtener el conocimiento de todas las cosas obscuras". Los 85 problemas del papiro eran probablemente para ser explicados por un maestro a sus alumnos. Inicia con una serie de ejercicios para reducir fracciones, que tienen a "2" como numerador, a submúltiplos; enseguida da 6 cálculos, que están mutilados, para enseñar a dividir 1, 3, 6, 7, 8 y 9 panes entre 10 personas. Luego da 17 ejemplos de cálculo de "seguem" (pasar fracciones por adición o multiplicación a números enteros o a otras fracciones). Procede después a la solución de "ecuaciones simples con una incógnita"; aquí la cantidad desconocida es llamada "hau" o "heap". Tres flechas horizontales se usaron para indicar "diferente" y "  " para "igual".

Se dan 11 ejemplos de estas ecuaciones. Pasa entonces a la geometría y termina discutiendo 20 problemas algebraicos.

Referente a la geometría las figuras son aceptables salvo en algunos casos donde figuras y soluciones son dadas sin conexión con los problemas a los que son remitidos.

Se calcula el contenido de graneros y otros receptáculos, de los cuales no sabemos la forma; calcula el área del cuadrado, el oblongo, el triángulo isósceles y de un trapecio paralelo isósceles, viendo a este último como un triángulo isósceles cortado por una línea paralela a la base. Para el triángulo isósceles y para el trapecio citado las áreas son incorrectas. Así por ejemplo en el problema No. 51, traza un triángulo isósceles del cual los lados miden 10 ruths y la base mide 4 ruths. Multiplica el lado por la mitad de la base y encuentra el área en 20 ruths cuadrados; pero el resultado correcto es 19.6 ruths cuadrados.

Análogamente, en el No. 52, el área del trapecio isósceles se da en 100 ruths cuadrados en lugar de 99.875 ruths cuadrados.

Si en un triángulo isósceles los lados iguales son a y la base b, el área es $[b/2]\sqrt{a^2 - [b^2/4]}$, y en un trapecio paralelo isósceles de base menor b_1 y base mayor b_2 y lados

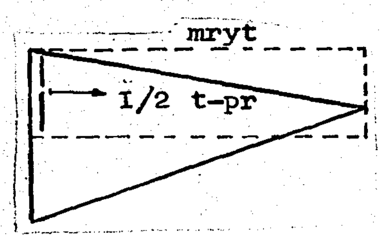
iguales a, el área es $[(b_1 + b_2)/2] \sqrt{a^2 - (b_2 - b_1)^2/4}$.
Ahmes hace las áreas $ab/2$ y $a(b_1 + b_2)/2$ respectivamente. Referente a estos dos problemas Heath hace el siguiente análisis.

I) Con respecto al triángulo.

Parece isósceles con base más pequeña en comparación con los otros dos lados. La base es perpendicular a la línea de escritura del manuscrito. El área está dada como la mitad del tp - r, que es la base multiplicada por lo que es el mryt. El problema es que no sabemos qué significa mryt.

Partiendo del trazo de las figuras, podría ser un "lado" del triángulo, diferente a la base. Pero en ese caso, a menos que los "lados" fueran iguales, la fórmula 1/2(tp-r)(mryt) daría dos resultados diferentes, de acuerdo al "lado" que se toma.

Battiscombe Gunn hizo una revisión, en 1926, a la edición del papiro del profesor T. Eric Peet (1923). De las consideraciones obtenidas de esa revisión, Battiscombe afirma que mryt significa lo que hoy llamamos "altura". El texto usa la expresión "darle (a los triángulos) su rectángulo" o "llevarlos a ser rectangulares". Esto sería hecho trazando perpendiculares a la base a) en su extremo superior, b) en su punto medio, y se completa el rectángulo trazando a través del vértice una paralela a la base.



Ahora mryt significa aparentemente un "muelle" y el rectángulo tendría el aspecto como se describe, ya que el lado inclinado tendría efecto hacia la horizontal.

II) Respecto al trapecio.

En este caso la figura parece haber sido entendida para ser isósceles, y la base y el lado opuesto, 6 y 4 respectivamente son relativamente pequeños con respecto al mryt, 20. Así que los ángulos de la base no están lejos de ser rectos. El área está dada como $[1/2](b_1 + b_2)a$. Pero como la fórmula sería inexacta si el mryt fuera uno de los lados no paralelos, hay la misma razón aquí, como en el caso del triángulo, para tomar mryt como la altura. (7)

Si el mryt significa lo que dice Heath, vía Battiscombe, lo que tenemos aquí es la ilustración de la solución del problema de construir un rectángulo con una área igual a la de un triángulo dado; pero esto quiere decir que los egipcios conocían una versión de Euclides 1-41.

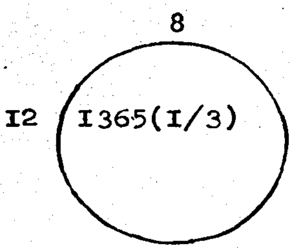
En el problema No. 50 calcula el área de un círculo restándole al diámetro d un noveno de su longitud y este resultado lo eleva al cuadrado $[(1 - 1/9)]^2 d$ lo que da para π un valor de 3.1604 que es una excelente aproximación. El uso de este valor está ilustrado en las mediciones de contenidos de graneros que son de hecho cilindros rectos. El contenido es puesto como el producto del área de la base por la altura del cilindro. Es decir, si d es el diámetro de la base y h la altura, el contenido es $(8/9\ d)^2\ h = [(1 - 1/9)d]^2 h$ este resultado es multiplicado por 3/2.

En la edición de Peet, nos dicen que cuando el resultado ha sido encontrado en cúbitos cúbicos, se multiplica por 3/2 expresado en términos de una medida de capacidad denominada khar, la cual era 2/3 de un cúbito cúbico. Por ejemplo, el problema No. 41 trata de un recipiente cilíndrico de diámetro 9 en la base y altura 10.

La fórmula de arriba da $(1-1/9)^2.10=640$ y el texto agrega "si la mitad es sumada, ahora, a ella, su contenido llega a ser 960 khars".

Este problema puede ser comparado con la medida de una masa de grano, cilíndrica, hallada en el papiro Kahun. La figura muestra a 1365(1/3) como el contenido del recipiente y con 8 y 12 escritos arriba y a la izquierda respectivamente. El

(7) Estos conceptos acerca del papiro Rhind, fueron tomados de J. Gow y T.L. Heath. (Bibliografía).

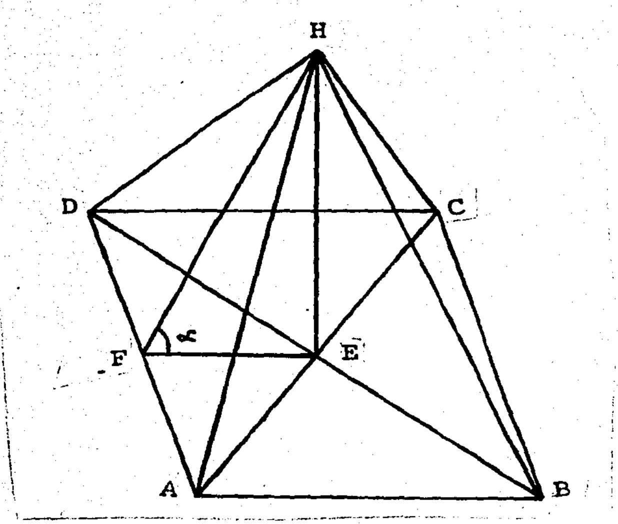


cálculo es así: se toma 12, luego 4/3 veces 12, lo que hace 16, este se eleva al cuadrado, lo que hace 256 y finalmente este se multiplica por 2/3 de 8 lo que da el 1365(1/3). Shack -- Shackenburg demostró que el problema es encontrar el contenido de un cilindro recto de diámetro 12 y altura 8 cúbitos (8). La fórmula que se usa es $\left[(4/3)d\right]^2 \cdot (2/3)h$ la cual, es la misma que la fórmula $\left[(8/9)d\right]^2 \cdot h(3/2)$ ya que ambas se reducen a $(32/27)\,d^2h$, es decir, el método del papiro Kahun da directamente el resultado en khars, en lugar de dar el volumen en cúbitos cúbicos y luego multiplicar por 3/2 para convertir a khars.

Los cálculos correspondientes a los ejemplos No. 56, No. 57, No. 58 y No. 59 tienen referencias a las proporciones de pirámides y parecen usar una trigonometría rudimentaria. En estos ejemplos el problema es encontrar el "ukha-thebt" y el "piremus". De estos dos valores se encontrará una relación llamada "seqt", que literalmente quiere decir "lo que hace la naturaleza" y es un número que determina la forma o las proporciones de la pirámide.

Los problemas propuestos por Ahmes son siempre de la forma "dados dos, cualesquiera, de "ukha-thebt", "piremus" y "seqt", encontrar el tercero", y la solución se obtiene siempre del hecho de que el "seqt" siempre es la mitad del "ukha-thebt" dividido por el "piremus", donde ukha-thebt es la línea de la base; ya que ésta es cuadrada, podemos tomar ukha-thebt=AB y piremus = altura de la pirámide = línea determinada por la sección = $\dfrac{(1/2)(\text{ukha-thebt})}{\text{piremus}}$ = seqt.

(8) Heath, T.L. A manual of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 79.



$$\text{seqt} = \frac{(1/2)(\text{ukha-thebt})}{\text{piremus}}$$

$$= \frac{(1/2)AB}{EH} = \frac{(1/2)2EF}{EH}$$

$$= \frac{EF}{EH}.$$

Por lo tanto:

$\text{seqt} = \frac{EF}{EH}$ quiere decir que seqt = cotangente del ángulo de inclinación α de las caras de las pirámides.

En el No. 56 se requiere encontrar el seqt S, de una pirámide en la cual el piremus P, es de 250 ells (según Lepsius -- 1 ell = 0.525 m. y 1 ell = 7 palmas) (9), y el ukha-thebt U, mide 360 ells; la respuesta es 180/250; reduciendo ells a palmas tenemos S = 5(1/25) palmas, es decir, hay 5(1/25) palmas en U/2 para todo ell en P.

En el No. 57, U= 140 ells, el seqt= 5(1/4) palmas= 3/4 ells. Se requiere encontrar P. La respuesta es 93(1/3) ells.

En el No. 58 las dimensiones de U y P son las mismas que en el No. 57 y se requiere encontrar S. En el No. 59 se dan dimensiones nuevas a U y a P pero S permanece en 5(1/4) palmas. Así, podemos ver que el concepto de seqt dado arriba concuerda perfectamente con los resultados obtenidos, ya que en el problema No. 56, seqt= 18/25 ells, implica que $\alpha = 54° \, 14' \, 46''$ que es el resultado aproximado obtenido por Flinders Petrie (10) del ángulo de inclinación de la mitad inferior de la pirámide meridional en Dashur de 55°, en promedio, para la parte más baja de las caras y 54° 31' para la parte más alta

(9) Gow, James. A short history of Greek Mathematics. New York. Hafner. 1968. Pág. 129.

(10) Heath, T.L. A manual of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 80.

de las caras. En los problemas No. 57, No. 58 y No. 59 el seqt es igual a 3/4 de ell que es la cotangente de un ángulo de 53° 7' 48" mientras que 53° 10' ± 4" es la medida dada Flinders Petrie para la inclinación de las caras de la segunda pirámide de Gizeh.

El problema No. 60 no se refiere a una pirámide. Podría ser un obelisco o un cono del cual la altura, quāi, es 30 ells; la línea de la base, senti, mide 15 ells; el seqt está dado en 1/4, que es la cotangente de un ángulo de 75° 57' 50", el cual está muy cerca del valor de 76° dado por Flinders Petrie del "ángulo característico" de una tumba mastaba tal como las de Sakara y Medum.

El Papiro Moscú tiene cuando menos dos cosas importantes:

1).- En el problema No. 14 se determina el volumen de una pirámide truncada con base cuadrada.

2).- En el problema No. 10 se calcula la superficie de una semiesfera.

Respecto al volumen de la pirámide truncada, aparentemente se usó la fórmula $V= h(1/3)(a^2 + ab + b^2)$ donde a y b son los lados de las caras cuadradas (base y tapa) y h la altura. Si la altura tomada en el papiro es la de la pirámide, la fórmula es correcta y debe ser considerada como un logro notable. La fórmula es relativamente complicada, y no como se esperaría que fuera para ser hallada empíricamente. Por otro lado, si ellos tenían una base teórica, es difícil -- ver cómo podrían haberla obtenido, excepto por deducción - del volumen de una pirámide con base cuadrada que es: $(1/3)ha^2$. Pero este es un caso particular del teorema, que de acuerdo a Arquímides, descubrió Demócrito, a saber: "el volumen de una pirámide es un tercio del prisma con igual base y altura". La prueba de esto está en dos partes; en la segunda se demuestra que cualquier prisma con base triangular puede ser dividido en tres pirámides de igual volumen; pero la prueba de esto depende sobre el hecho, probado en en la primera parte, de que las pirámides con base y altura iguales son iguales en contenido. Esta primera parte no puede ser probada teóricamente si no se usa el método de infinitesimales en alguna forma. Hay evidencia de que Demócrito era capaz de usar éste método, pero no hay cosa alguna en cualquiera de los documentos matemáticos egipcios que sugiera que los egipcios habían llegado a este grado de ideas en geometría. Aun suponiendo que hubieran obtenido empíricamente la fórmula $(1/3)ha^2$, sería un logro de su parte probar que la fórmula $h(1/3)(a^2 + ab + b^2)$ es el volumen de la pirámide frustrada, de altura h, la cual es la diferencia entre dos pirámides similares. Este problema ha sido discutido por Battiscombe Gunn y T. Eric Peet.

En el problema No. 10 se calcula la superficie de una semiesfera paso a paso y concuerda con la fórmula

$S= \left[2d - (1/9)2d - (1/9)(2d - (1/9)2d)\right] d$, con d= diámetro.

Esto da $S= (8/9)^2 2d^2= (1/2)(256/81)d^2= 2(256/81)r^2$, donde r es el radio. Tomando en cuenta que $\pi = 256/81= 3.1604$ para los egipcios, tenemos que la fórmula es correcta.

Si se tiene en cuenta que en la matemática griega no se encuentra indicio alguno de intentar la determinación de la superficie de una esfera sino hasta el tiempo de Arquímides, quien fue el primero en demostrar "matemáticamente" que la superficie de una esfera es igual a cuatro veces el área de un círculo mayor en ella, esta fórmula es la manifestación de un logro sorprendente para los egipcios, como quiera que hayan llegado a ella, empíricamente o bajo bases teóricas.

En las paredes de un templo a Horus en Edfu hay unas inscripciones que dan la lista de unos campos que fueron regalados al templo; dicha lista pertenece al reinado de Ptolomeo XI, Alejandro I (107 - 88 A.C.). Generalmente, los campos tienen cuatro lados los cuales denotaremos por a, b, c y d, donde a y b, c y d son pares de lados opuestos. De porciones de estas inscripciones se deduce que el área está dada como – $[(a + b)/2][(c + d)/2]$. Algunos de estos campos tienen forma triangular. En estos casos d se hace cero y el cálculo es cambiado a $[(a + b)/2](c/2)$. Algunos de los cuadriláteros son evidentemente trapecios, pero otros no lo son, aunque generalmente no son muy distintos de rectángulos o trapecios isósceles.

II. DE CONOCIMIENTO EMPIRICO A SISTEMA DEDUCTIVO.

CAPITULO II.

En los papiros y en las inscripciones egipcias no existen indicios de que éstos hayan utilizado términos como definición, postulado, demostración, esto es, aparentemente, no estaban interesados en los fundamentos de sus matemáticas. Sin embargo, T.L. Heath, en el análisis a los problemas No. 10 y No. 14 del Papiro Moscú discute si los egipcios habrían llegado a las fórmulas dadas mediante una base teórica o a través de intentos empíricos. Heath implícitamente, en el problema No. 10, acepta que no puede discernir si los egipcios llegaron a la fórmula de la superficie de la semiesfera por métodos teóricos o empíricos. De ello podemos deducir que Heath no acepta que los griegos fueron los primeros en trabajar con una base teórica.

En la actualidad se discute de qué manera pasó la geometría de ser un conjunto de reglas para resolver problemas particulares a ser una ciencia deductiva basada en primeros principios.

En 1959 Arpád Szabó avanzó una opinión basada en el surgimiento de los primeros principios en las diferentes corrientes filosóficas griegas; en particular del axioma "el todo es mayor que la parte", relacionado con el concepto de divisibilidad de los números. Ahí cita las tres conocidas explicaciones sobre las causas de que los griegos hayan sido los primeros en hacer uso de conceptos tales como definiciones y postulados; explicaciones dadas por Kolmogorov, Van Der Warden y K. V. Fritz.

Las tres explicaciones (1) son las siguientes:

(1) Estas consideraciones, así como la de A. Szabó están tomadas de su artículo que aparece en la bibliografía.

Para Kolmogorov fue el alto grado de desarrollo de las instituciones de los estados griegos, lo avanzado del desarrollo de la dialéctica, una filosofía independiente de la religión lo que dió lugar a la necesidad de explicar racionalmente los fenómenos, cosa que a su debido tiempo confrontó a la matemática con nuevas tareas. Van Der Warden asegura que los griegos tuvieron que decidir qué resultado era correcto entre los resultados diferentes de egipcios y babilonios. Por ejemplo, entre los babilonios el área del círculo era igual a $3r^2$ y entre los egipcios $(8/9)4r^2$. De esta manera se vieron empujados a la idea de demostración matemática. K. V. Fritz deduce el nacimiento de los primeros principios a partir del desarrollo de la lógica aristotélica, diciendo que la lógica de Aristóteles se desarrolla a partir del arte de dialogar cuando alguien trata de convencer a otro (o a su auditorio) de que está en lo correcto y su contrincante está equivocado; para convencer había que demostrar. La aplicación de esta técnica en las matemáticas habría sido inmediata. A. Szabó las critica diciendo que ninguna de ellas "puede ser levantada del nivel de la pura posibilidad al alto plano de la persuasiva probabilidad histórica".

Podemos hacer algunas observaciones:

1) La causa aducida por Fritz está englobada en la de Kolmogorov.
2) Las explicaciones de Kolmogorov y Van Der Warden parece-ser que no son excluyentes sino complementarias.
3) Las tres explicaciones dan por sentado el hecho de que los griegos fueron los primeros en darle a la geometría el caracter de ciencia deductiva. A Szabó también se le puede aplicar la tercera observación.

Yo aventuro una quinta posibilidad: que el conocimiento geométrico como ciencia deductiva no nació en Grecia sino que se desarrolló en Grecia, cosa que es muy diferente. Las razones para esta afirmación son las siguientes:

1).- <u>El Sumario Eudemiano</u> de Proclo en la parte que dice así: "Tales fue el primero en ir a Egipto y traer a Grecia este estudio; él mismo descubrió muchas proposiciones y descubrió los principios bajo los cuales yacen muchas otras a sus sucesores".

2).- Los problemas 10 y 14 del Papiro Moscú referentes a la superficie de una semiesfera y el volumen de una pirámide truncada respectivamente.

3).- La diferencia de organización política y cultural entre Egipto y Grecia en la época de Tales de Mileto.

Acerca del punto 1); cuando leemos: "fue el primero en ir a Egipto y traer a Grecia este estudio", se nos está diciendo claramente que en Egipto ya se encontraba la geometría como ciencia deductiva; esto puede concluirse si se tiene en cuenta que Eudemo fue posterior a Aristóteles y que por lo tanto pensaba con la herramienta lógica proporcionada por Aristóteles, esto es, está pensando de la geometría de Egipto, introducida en Grecia por Tales, como un sistema basado en primeros principios. De "él mismo descubrió muchas proposiciones" Eudemo nos está diciendo que ya antes de Tales había proposiciones que él trajo de Egipto -a menos que antes de Tales hayan existido otros matemáticos griegos de los cuales no tengamos noticias-, y que luego descubrió otras. De "descubrió los principios bajo los cuales yacen muchas otras a sus sucesores" puede entenderse no que las haya él encontrado sino que se las reveló a sus sucesores, y esto no necesariamente quiere decir que él las descubrió por esfuerzo propio.

Acerca del punto 2); para esto me baso en lo que afirma T. L. Heath sobre los problemas No. 10 y No. 14 del Papiro Moscú y que ya fué mencionado en el Capítulo I. Heath apunta que en el problema No. 14 se calcula el volumen de una pirámide truncada con base cuadrada. Y que para calcular dicho volumen se utiliza la fórmula $V= h(1/3)(a^2 + ab + b^2)$ con a y b lados de las caras cuadradas (base y tapa) y h la altura. Heath dice que la fórmula no es como esperar que fuera hallada empíricamente; bajo la suposición de que poseían una base teórica, hace, Heath, un análisis de cómo podrían haber llegado a la fórmula los egipcios; avanza la posibilidad de que pudieron haberlo hecho por medio de deducción para el volumen de una pirámide con base cuadrada, que es $(1/3)ha^2$. La prueba de esto último está dada en dos partes, pero la primera parte no puede ser probada sin hacer uso del método de infinitesimales en alguna manera. Heath agrega que hay evidencia de que Demócrito, quien según Arquímides fue el primero en descubrir el teorema que nos da el volumen de una pirámide, era capaz de usar este método, pero que no existe evidencia documental para afirmar que los egipcios habían llegado a este grado de ideas en geometría.

Heath, pues, a mi modo de ver, hace lo siguiente: o se llegó a la fórmula por medios empíricos o se tenía una base teórica; ve muy difícil que hayan utilizado la primera manera y, por lo tanto, se avoca a ver de qué manera utilizaron la segunda; su análisis lo lleva a concluir, sólo por que no existen documentos, que los egipcios no poseían una base teórica, sin siquiera discutir que los conocimientos matemáticos egipcios de la época del Papiro Moscú pudieron haber sido más avanzados que los conocimientos matemáticos de los griegos de la época de Demócrito.

En el problema No. 10, el cálculo de la superficie de una semiesfera es congruente paso a paso con la siguiente fórmula:

$S= \left[2d - (1/9)2d - 1/9(2d - (1/9)2d \right] d$ lo que da:

$S= 2(256/81)r^2$, con d igual al diámetro y r igual al radio. Ya que para los egipcios $\pi = 3.1604$, la fórmula es correcta. Aquí Heath se abre de capa y afirma que la fórmula es la manifestación de un logro sorprendente, "como quiera que hayan llegado a ella, empíricamente o bajo bases teóricas".

Acerca del punto 3); Egipto era un centro cultural reflejo de la magnitud del poder de su imperio. Los viajes a ese país de los "científicos" griegos así lo prueban, mientras que Grecia no era sino un conjunto de ciudades aisladas política y culturalmente en la época de Tales. Por mucho poder de penetración que le adjudique a la contemplación y a la meditación no puedo menos que preferir para el desarrollo de la ciencia, un alto grado de desarrollo social. Debido precisamente a ese alto grado de desarrollo social los problemas en Egipto eran mucho más complejos que en Grecia, y por lo tanto, los egipcios tenían que echar mano de conocimientos matemáticos más poderosos que los utilizados por los griegos. Es, pues, forzoso, que Tales estuviera en posesión de un sistema de principios y leyes generales, traído de Egipto; sistema, tal vez muy tosco e incipiente todavía, pero sistema al fin.

Y dado que él estuvo en Egipto, hecho respaldado por datos históricos concretos, podemos levantar esta afirmación "del nivel de la pura posibilidad al alto plano de la persuasiva posibilidad histórica".

Ya que no tenemos datos documentales para conocer lo que los egipcios conocían sobre algún sistema deductivo, y ya que es con los griegos que se desarrolla esto, paso a ver que es lo que los griegos entendían por primeros principios.

III. PRIMEROS PRINCIPIOS Y ELEMENTOS

CAPITULO III.

La información más valiosa con que contamos actualmente para conocer lo que los griegos, hasta antes de Euclides, entendían por primeros principios, está dada por Aristóteles en los Segundos Analíticos; ahí, Artistóteles define lo que entiende por "primeros principios", "proposición", "silogismo", "tesis", "hipótesis", "axioma", "definición", "postulado", etc., y da diferencias entre algunas de ellas. Para él, una proposición es un enunciado que afirma o niega algo de una cosa, y un silogismo es un enunciado en el cual una proposición es deducida de otras que se dan. En la estructura del silogismo hay una proposición que no puede ser demostrada y cuyo conocimiento no es necesario para conocer algo. Esta proposición es llamada tesis. Por el contrario, la proposición que necesariamente debe conocerse para conocer la cosa, cualesquiera que ella sea, es llamada axioma. Ahora bien, la tesis que afirma o niega la existencia del objeto, Aristóteles la llama hipótesis. Si la tesis no afirma ni niega la existencia del objeto, entonces es llamada definición. Tenemos pues, que la hipótesis y la definición son especies diferentes, de tesis.

Lo que Aristóteles entiende por postulado es muy poco claro, y el concepto está dado en función de lo que entiende por hipótesis. El texto completo es como sigue:

> "Jamás se puede considerar como hipótesis o postulado aquello que existe necesariamente por si mismo y aquello que ha de creerse. Y es que, en efecto, no es a la palabra exterior, y si a la palabra interior del alma, a la que se dirigen así la demostración como el silogismo. Contra la palabra exterior siempre pueden hacerse objeciones, pero no se pueden siempre hacer a la palabra interior. Por lo tanto, siempre que se discutan, sin habérselas demostrado uno a si mismo, cosas que po-

drían serlo, y se las admite con el asentimiento de aquel a quien se dirigen, es una hipótesis lo que se hace. Por otra parte, no es una hipótesis absoluta, es una hipótesis solo relativa a aquel con quien se habla. Si no teniendo el interlocutor idea alguna de la cosa, o teniendo una idea contraria de ella, se afirma, sin embargo, esta cosa, es un postulado el que se forma respecto de la misma cosa que antes daba lugar a una hipótesis. Y he aquí en lo que difieren la hipótesis y el postulado. El postulado es en parte contrario a la opinión del que aprende la cosa; o bien es lo que se asienta sin demostración, aun cuando pueda demostrarse, y de que nos servimos sin haberlo demostrado. Las definiciones no son hipótesis, porque no dicen que las cosas definidas existan o no existan. Por el contrario, las hipótesis están clasificadas entre las proposiciones. Las definiciones basta comprenderlas; pero no puede suceder lo mismo de una hipótesis, a no ser que se pretenda que una simple palabra, entender, por ejemplo, sea igualmente una hipótesis. Las hipótesis son precisamente todas aquellas cosas que por ser, y solo por el hecho de existir, producen la conclusión.

El geómetra no forma hipótesis de cosas falsas, como a veces se ha dicho. Se dice, en efecto, que si bien no debe emplear el geómetra cosas falsas, hace sin embargo uso de ellas, suponiendo que una línea no tiene un pie de largo le tiene realmente, y que una línea trazada es recta cuando realmente no lo es. Pero se puede responder a esto, que el geómetra no conluye nada de que la línea que ha trazado sea de tal o cual manera; y solo concluye las cosas de que aquellas no son más que representaciones. Se debe añadir además, que todo postulado, lo mismo que toda hipótesis, puede ser universal o particular, y que las definiciones no son ni lo uno ni lo otro". (1)

(1) Aristóteles. Tratados de Lógica. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 124. 1982. Pág. 168.

Por "principios" Aristóteles entiende a aquellos términos cuya existencia no puede demostrarse. Acerca de estos términos hace la siguiente división:

a) principios comunes; b) principios especiales; c) principios propios.

Por "principios comunes" entiende a aquellos "principios" que son comunes a toda ciencia demostrativa, dando como ejemplo la noción común de Euclides de que si a cosas iguales sustraemos cosas iguales, resultarán también cosas iguales. No hay duda, pues, que los "principios comunes" de Aristóteles, coinciden plenamente con las nociones comunes de Euclides. El problema surge al comparar "axioma" de Aristóteles con postulado y noción común de Euclides.

Para Heiberg, (2), "postulado" en Euclides es diferente de "postulado" en Aristóteles, basándose, tal vez, en que la diferencia entre "postulado" e "hipótesis" dada por éste último no es muy clara.

Sin embargo Heath afirma que si partimos de la definición de "postulado" dada por Aristóteles de que postulado es en parte contrario a la opinión del que aprende la cosa o aquello que aun cuando pueda demostrarse se acepta sin demostración, entonces los postulados de Euclides parecen encajar en esta definición. (3)

Pero en Euclides aun cuando un postulado es aceptado sin demostración, no es de manera alguna, contrario a la opinión del interlocutor, (el que aprende la cosa), sino que va de acuerdo a la opinión del interlocutor. Por lo tanto, parece ser que Heath lo que hace es forzar a que el concepto de postulado en Euclides caiga en la definición de postulado que da Aristóteles.

Aristóteles discute a que se refiere toda ciencia adquirida por demostración (4); y una de las cosas a las que se refie-

(2) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 119, 120.

(3) Ibidem. Pág. 120.

(4) Aristóteles. Tratados de lógica. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 70. 1982. Pág. 167.

re es a "aquellos principios comunes que llamamos axiomas, de donde salen primitivamente las demostraciones"; si recordamos que los "principios comunes" de Aristóteles los hemos identificado plenamente con las nociones comunes de Euclides tenemos, pues, que "axiomas" en Aristóteles es "nociones comunes" en Euclides.

Los "principios especiales" son aquellos que sirven solamente, en especial, a alguna ciencia y no son aplicables a cualesquier otra. Como ejemplo, da la definición de recta. Es claro, entonces, que las definiciones de Euclides corresponden perfectamente a lo que Aristóteles entiende por "definición".

Si tomamos en cuenta que para Euclides los postulados son proposiciones que no son comunes a todas las ciencias, sino que al contrario, como en el caso de la geometría, especiales a la geometría, y que los axiomas son "comunes", tenemos aquí, que "axioma" en Aristóteles no es "postulado" en Euclides. Sí se puede afirmar, en cambio que "postulado" en Euclides es "principio especial" en Aristóteles.

Por "principios propios" Aristóteles entiende a aquellos "principios" en los cuales su existencia es admitida sin demostración; o bien, aquellas cosas "en que la ciencia encuentra las propiedades esenciales que ella estudia" (5); refiriéndose a los términos del lenguaje que le son propios a la ciencia de que se trate, como por ejemplo, en el caso de la geometría, donde son admitidos sin demostración de su existencia, los términos "punto", "línea", "inconmensurable", "oblicua", "quebrada", etc.

(5) Aristóteles. Tratados de lógica. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 124. 1982. Pág. 167.

Proclo, que es posterior a Euclides, da la diferencia entre axioma y postulado de tres maneras:

a) Partiendo del hecho de que un teorema es algo que se sigue de premisas y que un problema es en lo cual decimos qué encontrar y hacer alguna cosa, Proclo establece una proporción: el postulado es diferente del axioma en la misma medida en que un problema es diferente de un teorema; los axiomas son verdades evidentes por si mismas y fácilmente comprensibles, mientras que en los postulados, las cosas que estos nos indican, son fáciles de encontrar y efectuar; no hay esfuerzo por parte de nuestro entendimiento para la suposición del postulado. Este punto de vista de Proclo, acerca de la diferencia entre axioma y postulado es debido a Gemino (6); dicho de otra manera, la diferencia entre postulado y axioma, puede darse en la siguiente forma: un axioma es referente a algo conocido y un postulado se refiere a algo que es construído o afirma que una construcción es posible.

Según esta descripción de axioma las cinco nociones comunes de Euclides coinciden perfectamente con este concepto de axioma; en cambio, mientras que los tres primeros postulados de Euclides si pueden ser encuadrados en el concepto de axioma de Proclo, el cuarto y el quinto no.

b) Proclo, al igual que la anterior manera de diferenciar axioma y postulado, sin especificar quienes, nos dice que hay algunos que piensan que los postulados corresponden al objeto de la geometría, mientras que en cambio los axiomas son comunes a investigaciones que tienen que ver con cantidad y magnitud; por ejemplo todos los que se dedican al estudio de la geometría saben que todos los ángulos rectos son iguales o que dado un punto y una distancia se puede trazar un círculo con centro en el punto dado y radio la distancia dada. Estos ejemplos corresponde-

(6) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 123.

rían a postulados. En cambio la afirmación de que cosas iguales a una tercera son iguales entre si, es usada por cualquier científico en la disciplina en que trabaja y, por lo tanto, este tipo de aseveraciones corresponden a axiomas.

Si se acepta esta diferencia, los cinco postulados de Euclides pueden ser incluidos en éste concepto de postulado de Proclo, y las nociones comunes serían los axiomas.

c) La tercera manera de exponer la diferencia entre axioma y postulado, dada por Proclo, está dada por Aristóteles y aparece en la página 27 . Ya vimos que bajo este criterio de Aristóteles las nociones comunes de Euclides corresponden a los axiomas de Aristóteles, pero que no podemos afirmar tal cosa en lo que se refiere a los postulados, ya que hay lugar para la duda.

Para ver lo que los griegos entendían por "elementos" son, de nuevo, Aristóteles y Proclo, las principales fuentes con que actualmente se cuenta; a través de ellos se asoman las inquietudes que tenían sus contemporáneos por tener claro lo que debería entenderse por "elementos". En la actualidad por la palabra "elementos" se entiende a un conjunto de cosas mediante las cuales construimos otras cosas; si siguiéramos esta definición de "elementos" para ser entendido como lo que los griegos entendían por "elementos", tal vez estuviéramos mintiendo. Aristóteles en los Tópicos (7) nos dice que una vez que se han dado las definiciones, los "primeros elementos" son fáciles de demostrar; esto quiere decir que para él los "elementos" son proposiciones que se demuestran por medio de "principios" y claramente vemos que esto ya no coincide con el significado actual de la palabra "elemento". Proclo en su afán de aclarar lo que debe entenderse por "elementos" llega hasta el punto de tratar de diferenciar los términos "elemento" y "elemental". Según él, en la geome

(7) Aristóteles. Tratados de lógica. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuantos..." Núm. 124. 1982. Pág. 322.

tría hay unos teoremas a través de los cuales se demuestran otros; teoremas que son llamados "guías" y que proporcionan pruebas de muchas propiedades. Tales teoremas son llamados "elementos". Este concepto de "elemento" concuerda perfectamente con el concepto que de ello tiene Aristóteles y que ya fue dado arriba. Proclo llega más allá, diciendo que los "elementos" son a la geometría como las letras del alfabeto son al lenguaje. El término "elemental" se aplica a cosas que "se extienden a una gran multiplicidad, y, pese a que poseen simplicidad y elegancia no tienen la misma gran dignidad que los "elementos", porque su investigación no es de uso general en la ciencia". (8)

Menaechmo, a quien cita Proclo (9), le da a la palabra "elemento" dos sentidos. En el primero, tenemos que "elemento" es el medio a través del cual obtenemos una cosa. Si observamos que la primera proposición de Euclides es utilizada para obtener la segunda, se puede decir que la primera es "elemento" de la segunda. Aquí hay concordancia con lo que define Proclo como "elemento" al hacer la diferencia entre "elemento" y "elemental". El otro sentido dado por Menaechmo se refiere a las partes de un compuesto; por ejemplo el oxígeno y el hidrógeno serían "elementos" del agua, o en geometría, las definiciones o los postulados son "elementos" de los teoremas. Según Menaechmo, los elementos encontrados en Euclides fueron compilados de acuerdo a éste significado de "elemento".

Proclo afirma que hubo muchos que intentaron hacer arreglos de elementos, pero que todos esos arreglos fueron inferiores en calidad al arreglo de elementos hecho por Euclides: "el sistema de los elementos de Euclides es superior a los sistemas de los demás; por su utilidad sirve para la investigación de las figuras primordiales, su claridad y perfección

(8) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 114.

(9) Ibidem.

orgánica están garantizados por la progresión de lo más simple a lo más complejo y por basar la investigación en nociones comunes, mientras que la generalidad de la demostración está garantizada por la progresión por medio de los teoremas que son primarios y de naturaleza de principios para las cosas seguidas" (10). En Proclo los Elementos de Euclides son ya un conjunto ordenado de proposiciones, de estructura deductiva, que nos sirven para la investigación de temas - geométricos, en particular, avocados a la investigación de los cinco sólidos regulares.

Esto nos indica que los griegos no buscaban hacer "elementos" como actividad principal, sino que, parodiando a Proclo, buscaban hablar mejor construyendo un alfabeto más perfecto.

A partir de este momento designaré con la palabra "elemento" a lo que entiende Menaechmo en el segundo sentido dado al término "elemento", mientras que con la palabra "Elemento" designaré al arreglo de elementos.

(10) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 115.

IV. LOS POSEEDORES DE ELEMENTOS ANTES DE EUCLIDES

CAPITULO IV.

En el libro "Comentarios al Libro I de Euclides" de Proclo hay una parte que es atribuida a una Historia de la Geometría hecha por Eudemo. Ese pasaje contiene una lista de geómetras que va desde Tales de Mileto hasta Euclides. Tenemos ahí la relación más importante de griegos que dedicaron su atención al estudio y desarrollo de la geometría; el pasaje es comunmente conocido como "Sumario Eudemiano" y aquí, también será denotado así.

Inicia con una disertación acerca de las causas que dieron lugar al nacimiento de la geometría en Egipto y de la manera en que pasó a Grecia. La lista completa de geómetras que aparece, en el orden del pasaje, es la siguiente:

Tales de Mileto, Ameristo, Pitágoras, Anaxágoras de Clazomenae, Oenópides de Quíos, Hipócrates de Quíos, Teodoro de Cirene, Platón, Leodamas de Thesos, Arquitas de Taras, Teetetos de Atenas, Neoclides, León, Eudoxio de Cnidos, Amiclas de Heraclea, Menaechmo, Dinostrato, Tedio de Magnesia, Atenaeo de Cizico, Hermotimo de Colofón, Filipo de Medma y Euclides de Alejandría. A estos veintidos nombres, en base a otros historiadores, podemos agregar otros doce: Anaximandro, Anaximenes, Zenón de Elea, Antifón, Brison, Hippias de Ellis, Filolao, Demócrito, Aristóteles, Autolico, Aristaeo y Eudemo. El Sumario Eudemiano termina con una apología a la obra de Euclides. Todos ellos son anteriores a Euclides (exceptuando a Euclides, claro está).

En esa lista de 33 matemáticos anteriores a Euclides, hay tres que son citados por Eudemo, para haber compilado Elementos: Hipócrates, León y Tédio, y de ellos tres, es Hipócrates quien aparece para ser el primero en haberlo hecho. Sin embargo, en algunos otros de la lista, a partir del pasaje de Eudemo, hay algunos, que de lo que se dice de ellos, puede deducirse que estuvieron en posesión de Elementos. Podemos citar a Tales, Pitágoras, Platón, Teetetos, Eudoxio, Amiclas, Menaechmo, Dinostrato y Hermotimo.

Lo que dice Eudemo de ellos respalda esta opinión. De Tales: "descubrió muchas proposiciones y los principios bajo los cuales yacen muchas otras a sus sucesores". (1)

De Pitágoras: "descubrió la teoría de las proporciones y la construcción de las figuras cósmicas".

De Eudoxio: "a las tres proporciones agregó otras dos e incrementó el número de los llamados teoremas generales".

De Hermotimo: "descubrió muchas proposiciones en los Elementos y compiló alguna teoría del Loci".

De Platón: "hizo que las otras ramas de las matemáticas, así como la geometría hicieran grandes avances".

De Teetetos: "hizo un avance hacia un sistema más científico".

De Amiclas, Menaechmo y Dinostrato: "hicieron a la geometría más perfecta".

La lista de los que compilan Elementos se extiende, pues, a Tales, Pitágoras, Hipócrates, Platón, Teetetos, León, Eudoxio, Amiclas, Menaechmo, Dinostrato, Tedio y Hermotimo.

Primero daremos un breve esbozo biográfico de cada uno de ellos y luego ennumeraremos sus logros en geometría.

Tales de Mileto.

Tales de Mileto es figura prominente en la Historia de la Cultura Griega. Gentes como Herodoto, Platón, Apolodoro, Jenófanes, Demetrio Falereo, Diógenes Laerto y otros lo ponen como un hombre que destacó en todos los campos del saber humano de su tiempo. Sobresalió en política, economía, astronomía y matemáticas. Hay duda acerca del lugar en que nació y también de la cantidad de años que vivió; según algunos era natural de Mileto pero de origen fenicio; alguien dice que vivió setenta y ocho años y otro dice que noventa. (2)

(1) Esta cita y las otras acerca de los matemáticos de esta lista están tomadas del Sumario Eudemiano. Ivor Thomas. (Bibliografía). Pág. 145.

(2) Laercio, Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1142.

Hay también una carta a Solón de la cual se deduce que ellos eran una especie de agitadores en los Estados Griegos, que huían de un lugar a otro a causa de sus ideas. Por el Sumario Eudemiano sabemos que de los geómetras griegos fue el primero en ir a Egipto.

De su trabajo en geometría tenemos lo siguiente:

1) El círculo es bisectado por su diámetro.
2) Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.
3) Si dos líneas se cortan una a otra, los ángulos opuestos son iguales.
4) Un triángulo queda determinado si su base y los ángulos de su base son dados.
5) Un triángulo que tiene como lado el díametro de un semicírculo y el otro vértice sobre el semicírculo, es un triángulo rectángulo.

Acerca de 1).

Proclo dice que los antiguos afirmaron que Tales fue el primero en demostrar que el círculo es dividido en dos partes iguales por el diámetro (3). Pero Euclides en el Libro I de los Elementos, establece lo que es un díametro y su propiedad de bisectar al círculo, (def. I-17). En vista de eso hay algunos, Heath, por ejemplo, que sugieren que la palabra "demostrar" no debe ser tomada literalmente. Han sido encontradas figuras de círculos divididos en sectores iguales, en monumentos egipcios y vasijas llevadas por reyes tributarios asiáticos a Egipto, y debido a que Tales visitó Egipto, puede ser que la intención sólo fuera trazar los diámetros.

De lo que nos dice Proclo, podemos afirmar que Tales estaba en posesión del postulado 3, que conocía las definiciones 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 14, 15, 16 y 17 del Libro I de Eucli-

(3) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 165.

des (4), y que tal vez conoció la noción común 4. Puede anotarse también que la propiedad de que el círculo es bisectado por su diámetro es demostrable a partir de III-31 y de -- III-24.

Acerca de 2).

Proclo afirma que Tales "fue el primero en haber conocido y enunciado (el teorema) de que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, pese a que describe, en la manera más arcaica, ángulos iguales como similares" (5). Según Heath, hay algunos que han sugerido que el uso de la palabra "similar", mediante la cual Tales define ángulos iguales, da a entender que Tales no tiene todavía el concepto de ángulo como magnitud sino como una figura que tiene una cierta forma, un punto de vista que guarda estrecha relación con el seqt egipcio, "lo que hace la naturaleza", en el sentido de determinar una inclinación similar, o la misma inclinación, en las caras de la pirámide.

Euclides, en su proposición I-5, extiende este resultado de Tales al decir que si se prolongan los lados iguales del - triángulo isósceles, los ángulos bajo la base también serán iguales.

Según el enunciado de Proclo, arriba citado, Tales conoció parte de la definición I-19, que se refiere a las figuras triláteras. Como conoció lo que es un triángulo isósceles, puede decirse que, aunque en forma diferente, conoció las definiciones I-20 y I-21.

En relación a 3).

Proclo dice que "este teorema, que cuando dos rectas se cortan una a otra los ángulos verticales y opuestos son iguales, fue primero descubierta, como Eudemo dice, por Tales, pese a que la demostración científica fue mejorada por el

(4) Los enunciados de las definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones que se citan, están dados en la página 109.

(5) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 165.

escritor de Los Elementos". Esta proposición corresponde a Euclides I-15.

En la traducción de Heath a Los Elementos de Euclides, Heath suprime "opuestos", dejando solamente "ángulos verticales". En una nota a la proposición aclara esto: "Proclo apunta la diferencia entre ángulos adyacentes y ángulos verticales. Angulos adyacentes describe a los ángulos hechos por dos líneas rectas cuando solamente una es dividida por la otra, esto es, cuando una recta corta a otra en un punto que no es extremo, pero no es prolongada más allá del punto del corte. Cuando la primera recta es prolongada de tal forma que las líneas se cortan en el punto, entonces ellas hacen dos pares de ángulos verticales y son llamados así por que su convergencia es de direcciones opuestas para un punto como vértice". (6)

De esto podemos entender que ángulos verticales son los ángulos opuestos por el vértice.

En torno al punto 4), Proclo en sus Comentarios nos dice "Eudemo en su Historia de la Geometría atribuye este teorema a Tales. Porque él dice que el método por el cual Tales demostró cómo encontrar la distancia de barcos en el mar necesariamente trae consigo este teorema". (7)

No hay información suficiente para determinar la manera en que Tales hallaría esa distancia, por lo que han surgido muchas conjeturas de cómo resolvió el problema.

Heath, en Los Elementos de Euclides (8), cita a Bretschneider, Moritz Cantor, Max C.P. Schmidt y a Tannery. Heath mismo da su versión acerca del asunto.

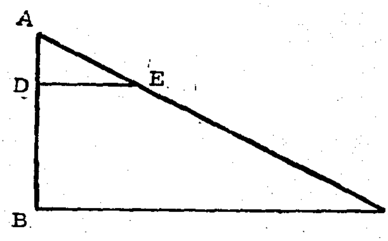
Bretschneider y Cantor parten de la suposición de que las observaciones necesarias fueron hechas desde lo alto de una

(6) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 278.

(7) Thomas, Ivor. Selecting ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 167.

(8) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 304.

torre o de alguna estructura de altura conocida, y que fue utilizado un triángulo rectángulo en el cual la base era la línea que unía el barco con el pie de la torre y esta era perpendicular a la base, como en la figura, donde C es el barco y AB la torre. Bretschneider dice que para el observador sólo era necesario conocer el ángulo CAB. Entonces el triángulo quedaría perfectamente determinado por medio de este ángulo y la medida de AB. Afirma que el resultado habría sido obtenido "en un momento" por este método, pero no queda claro en que sentido afirma que Tales habría determinado el ángulo CAB.



Cantor dice que el problema fue referido al de encontrar el seqt desde lados dados. En el Papiro Rhind se entiende por seqt la razón de una a otra de ciertas líneas en pirámides u obeliscos. Ahora es conocido que seqt es la razón de la mitad del lado de la pirámide a la altura de la pirámide, esto es, la cotangente del ángulo de inclinación. El cálculo del seqt implica pues, una clase de teoría de semejanza o aun de trigonometría. Cantor sugiere que el seqt en el problema de Tales sería encontrado por medio de un pequeño triángulo rectángulo ADE que tiene un ángulo en común con el triángulo ABC, como en la figura, y que este valor de seqt, con la medida de AB, determinarían BC. Esto requiere el uso de las propiedades de triángulos semejantes; la sugerencia de Bretschneider aparentemente llegaría a lo mismo, ya que si Tales midió el ángulo, tuvo que llegar a trabajar con proporciones, dado que carecía de una tabla de razones trigonométricas, Max Schmidt, similarmente, supone que Tales habría tenido un ángulo recto hecho de madera o de bronce con lados graduados y puesto en la posición ADE con A en la posición de su ojo, y luego leyó las medidas de AD y DE respectivamente. Enseguida encontró BC por una regla de tres. Sin embargo Eudemo habla del uso de Euclides I-26, la cual asegura igualdad de triángulos que tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales, y en estas tres sugerencias no se ve una aplicación de I -26.

Heath argumenta de la siguiente manera: suponiendo que Tales estaba en lo alto de una torre, él habría hecho uso de un instrumento que consistiría en una vara recta y una pieza cruzada pegada a la vara y siendo capaz de girar alrededor de lo que sostiene a la pieza cruzada a la vara (digamos un clavo), de tal manera que formaría cualquier ángulo con la vara y pudiera permanecer donde fuera puesto. Entonces lo natural sería fijar la vara en línea recta, por medio de una plomada, y dirigir la pieza cruzada hacia el barco. Enseguida, dejando la pieza cruzada en el ángulo encontrado, la vara sería girada, todavía permaneciendo vertical, hasta que la pieza cruzada apuntara a algún objeto visible en la costa. Anotando mentalmente este punto, solamente tenemos que medir la recta trazada al objeto en la costa desde la base de la torre, lo cual, por Euclides I-26, es igual a la distancia del barco al pie de la torre. (9)

Esta solución tiene la ventaja de corresponder a la más probable versión del método de Tales de medir la altura de las pirámides. Diógenes Laerto dice, basado en la autoridad de Jerónimo de Rodas, que esperó, para medir la pirámide, hasta el momento en que nuestras sombras son de la misma longitud que nuestras estaturas. De esta afirmación de Jerónimo de Rodas se concluye que Tales estaba familiarizado con Euclides VI-4, de que los lados de triángulos equiángulos son proporcionales. Y aquí no hay duda que se tiene el real importe

(9) Heath, T.L. A manual of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 85.

de los cálculos egipcios de seqt que introduce Ahmes como ejercicios de aritmética. Plutarco, por boca de Niloxeno, en el Convivio de los Siete Sabios, da una versión diferente del cálculo de altura de pirámide por Tales: "poniendo tu báculo en la extremidad de la sombra de la pirámide, por el impacto de los rayos solares, haces dos triángulos, y sombreados de tal forma, que la pirámide es el báculo como su sombra es a la del báculo". Hoy, que el libro de Ahmes es bien conocido, no hay razón para negar que Tales estaba bien familiarizado con el proceso atribuido aquí a él.
Todos estos intentos de hacer ver la manera en que Tales encuentra la distancia de la costa a un barco me parecen muy loables, sólo que en la cita que da lugar a estas conjeturas no se afirma que Tales estuviera tratando de encontrar tal distancia. Proclo claramente dice: "Tales enseñó cómo encontrar la distancia de barcos en el mar" (10), y por esto puede entenderse que Tales buscaba, por ejemplo, la distancia que separa a dos barcos en el mar.

Finalmente en relación con 5), Diógenes Laerto apunta que "Pámfila escribe que habiendo aprendido Tales geometría en Egipto, inventó el triángulo rectángulo en un semicírculo y que sacrificó un buey por el hallazgo. Otros lo atribuyen a Pitágoras, entre ellos Apolodoro Logístico". (11)
Pámfila fue una historiadora que vivió en tiempos de Nerón. De la cita de Diógenes se desprende la duda acerca de quien hizo el descubrimiento de esa proposición que corresponde a Euclides III-31. Euclides prueba III-31 por medio de I-32, de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es dos rectos. Eudemo atribuye a los Pitagóricos el descubrimiento de III-31, por lo que se puede afirmar que Tales no conocía este resultado. Sin embargo Heath demuestra que se

(10) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics . From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 167.

(11) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1143.

puede probar III-31 sin utilizar I-32, por lo que es probable que Pámfila podría haber preservado una tradición correcta.

Podemos dar una relación de lo que Tales sabía, con respecto a Euclides. En el recorrido de su trabajo se puede ver que, tal vez bajo otras palabras, Tales de Mileto estaba familiarizado con las primeras 22 (de las 23) definiciones de Euclides I, con los primeros cuatro postulados y con las cinco nociones comunes.

Se puede ver también que conocía varias de las proposiciones de Euclides I, como por ejemplo, I-5, 15, 26. Deducimos también que no desconocía III-31 y VI-4.

Pitágoras.

Pitágoras, figura semilegendaria y semireal es otro que se menciona como probable compilador de Elementos. Según algunos era tirreno y según otros era hijo de Mármaco quien era de Samos por lo que Pitágoras se llamó Samio. Sobre la fecha de su nacimiento se dice que nació alrededor de 572 A.C. Se afirma también que viajó ampliamente por Egipto (22 años) y que también visitó Babilonia. Primero fue alumno de Ferecides de Syros quien según Suidas fue el primer escritor en prosa. Fue amigo de Tales quien le aconsejó ir a Egipto, particularmente a Memfis o a Tebas. Posteriormente regresó a Samos donde intentó, sin éxito, fundar una escuela. Huyendo de Polícrates, tirano de Samos, se fue al sur de Italia e inició una sociedad en Crotona. De aquí, también por motivos políticos, emigró a Tarento y luego a Metaponto donde murió alrededor del 500 A.C. En la hermandad fundada por Pitágoras en Crotona, sus miembros fueron llamados Pitagóricos y es difícil discernir entre lo que se debe a Pitágoras y lo que se debe a sus discípulos; de hecho, las doctrinas pitagóricas son, por autores de otras escuelas, atribuidas a los Pitagóricos y no a Pitágoras.

Los detalles de la primera Filosofía Pitagórica son debidos, según Diógenes Laerto, a Filolao, contemporáneo de Platón: "antes de Filolao era imposible aprender un precepto pitagórico" (12). El trabajo de Filolao está perdido, salvo por unos pocos y breves fragmentos preservados por Stobaeo y otros compiladores similares. Por tal motivo, a pesar de que hay evidencias abundantes de que Pitágoras trabajó en geometría, muy pocas invenciones pueden ser atribuidas a él. Por ejemplo Diodoro cita a Calimaco (250 A.C.) que dijo que "Pitágoras descubrió algunos teoremas geométricos y fue el primero en introducir otros de Egipto a Grecia" (13). Y según Proclo "Pitágoras transformó el estudio de la geometría en una educación liberal, examinando los principios de la ciencia desde el inicio y probando los teoremas en una manera puramente intelectual" (14). Favorino nos dice que "usó definiciones con motivo de la naturaleza matemática del asunto" (15).

Sin embargo estas tres últimas citas nos son suficientes para concluir que Pitágoras estuvo en posesión de un sistema deductivo basado en primeros principios.

Así como Tales de Mileto es situado como el primer griego en haber trabajado de una manera "científica" a la geometría, se puede decir que Pitágoras fue el primer griego en hacer el intento con la aritmética. Pitágoras determinó por mucho tiempo el simbolismo y los límites del estudio de la aritmética. Para Pitágoras el número es cantidad y cantidad es forma y la forma es cualidad. Las definiciones de todos los términos abstractos y la explicación de todas las leyes naturales fueron consideradas bajo la aritmética; para los hechos geométricos trató siempre de encontrar fórmulas arit-

(12) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1316.

(13) Heath, T.L. A manual of Greek Mathematics. New York Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 92.
Esta cita refuerza mi convicción de que no fueron los griegos los primeros en trabajar con un sistema deductivo.

(14) Sumario Eudemiano, en los Comentarios a Euclides I de Proclo.

(15) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1322.

méticas y yendo más allá, consideró a los números como la base de la creación. Adjudicó virtudes a los números, por ejemplo, el 5 es la causa del calor, el 6 del frío, el 7 del pensamiento, de la salud y de la luz, el 8 del amor, la amistad y la invención.

Hay tendencia a tratar los descubrimientos de Pitágoras y los de sus seguidores como descubrimientos de los Pitágoricos sin diferenciar los que corresponden a Pitágoras y los que son de los miembros de su escuela; sin embargo, hay razones bien fundadas para sospechar que ciertos escritores, - Iamblicho por ejemplo, atribuyen ser Pitagóricos nombres de matemáticos griegos que no eran Pitagóricos. El citado Iamblicho da a Teodoro e Hipócrates como Pitagóricos y no lo eran. Si algún comentarista tiene motivos para magnificar las contribuciones de Pitágoras, es Proclo, y aún él encuentra poca causa para adscribirle trabajos. Sus comentarios sobre Pitágoras en el Sumario Eudemiano son citas de Iamblicho y su adscripción a él de una teoría de los "irracionales" es un patente anacronismo. Por lo tanto no discutiré resultados de los llamados Pitagóricos y de Pitágoras como logros de los Pitagóricos sino que pondré en este párrafo, dedicado a Pitágoras, solamente lo que es atribuible a Pitágoras.

Los hechos geométricos atribuidos a Pitágoras son los siguientes:

1) Proclo en sus comentarios en Sobre Euclides I dice que: "Ahí han sido dado ciertos métodos para el descubrimiento de tales triángulos, de los cuales uno es referido a Platón y otro a Pitágoras. El método Pitagórico parte de los números impares. Para ello fija el número impar dado como el menor de los lados alrededor del ángulo recto, toma su cuadrado y sustrae una unidad de ahí y fija la mitad del resultado como el lado mayor de los lados alrededor del ángulo recto. Sumando una unidad a este lado, hace el número resultante la hipotenusa. Por ejemplo, partien-

do de tres y cuadrándolo obtenemos nueve; se sustrae una unidad, haciendo ocho, y la mitad de ocho es tomada, haciendo cuatro; a este una unidad es agregada, dando cinco. Y en esta forma se encuentra un triángulo rectángulo teniendo como lados a tres, cuatro y cinco".
Así pues, si n es un número impar entonces los lados del triángulo dan n, $(n^2 - 1)/2$ y $(n^2 + 1)/2$. Debe notarse que este método de Pitágoras excluye grupos de números tales como 20, 21 y 29 ya que sólo pueden, bajo su método, encontrarse triángulos en los que la hipotenusa difiere de los lados en una o dos unidades.
No se sabe la manera en que Pitágoras llegó a este método y existen diversos intentos para explicar esto. Tal vez el más interesante es el dado por Heath basado en el punto aritmético. (16)

2) Iamblicho en <u>Sobre la Introducción a la Aritmética de Nicomaco de Gerasa</u> nos dice "en los días antiguos, en los tiempos de Pitágoras y los matemáticos de su escuela había solamente tres medias, la aritmética, la geométrica y una tercera llamada la subcontraria, pero que después, en el círculo de Arquitas e Hipaso fue llamada armónica, porque pareció proveer de armoniosas y afinadas proporciones". Porfirio en sus <u>Comentarios sobre las armónicas de Ptolomeo</u> cita a Arquitas dando la explicación de lo que Pitágoras podría haber entendido por estas tres medias: "hay tres medias en música: primero la aritmética, segundo la geométrica y tercero la subcontraria, también llamada armónica. La aritmética es en la cual tres términos están en proporción en virtud de alguna diferencia: el primero excede al segundo por lo mismo que el segundo excede al tercero. Y en esta proporción sucede que el intervalo entre los términos mayores es el menor mientras

(16) Heath, T.L. <u>The thirteen books of Euclid's Elements</u>. New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 358, 359, 360.

que entre los menores es el mayor. La media geométrica es aquella en la cual el primer término es al segundo como el segundo es al tercero. Aquí , los términos mayores hacen el mismo intervalo que los menores.

La media subcontraria, que llamamos armónica, es tal que cualquiera que sea la parte de ella, el primer término excede al segundo, el término medio excede el tercero en la misma parte del tercero. En esta proporción el intervalo entre los términos mayores es el mayor y el intervalo entre los menores es el menor." (17)

Lo que nos dice Arquitas es más o menos lo siguiente:

b es la media aritmética entre a y c si $a-b=b-c$ o lo que es lo mismo, si $b=(a+c)/2$.

La palabra "intervalo" Arquitas la está utilizando en el sentido musical; en matemáticas debe ser entendida como razón entre dos términos y no como su diferencia aritmética. Por lo tanto, lo que dice Arquitas es que $(a/b)<(b/c)$. b es la media geométrica entre a y c si $(a/b)=(b/c)$. b es la media armónica entre a y c si $((a-b)/a) = ((b-c)/c)$ la cual puede ser escrita como $((1/c)-(1/b)= ((1/b)-(1/a))$, por lo que $1/c$, $1/b$ y $1/a$ forman una progresión aritmética y Arquitas continúa para afirmar que $(a/b)>(b/c)$.

En el trabajo arriba citado Iamblicho dice que Pitágoras introdujo desde Babilonia una cuarta proporción, la musical, que está compuesta entre dos números y sus medias aritmética y armónica, esto es, $(a/((a+b)/2))= ((2ab/a+b)/b)$, por ejemplo $(6/9)= (8/12)$.

De la manera en que se llegó a estas medias también es motivo de especulación. A. E. Taylor en Un comentario sobre el Timeo de Platón expone una de las mejores explicaciones de como se obtuvieron esas medias.

3) Euclides I-47 por lo general es atribuida a Pitágoras y

(17) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 113.

siempre se le ha conocido como el Teorema de Pitágoras. De acuerdo a Proclo: "Si listamos a aquellos que refieren historias antiguas, encontramos que algunos de ellos atribuyen a Pitágoras este teorema y dicen que sacrificó un toro por el descubrimiento. Por mi parte, mientras que admiro a aquellos que llegaron primero a estar informados con la verdad de este teorema, me maravillo más en el escritor de Los Elementos no sólo por que lo estableció en una manera más lúcida, sino por que insistió en el teorema más general por los irrefutables argumentos de la ciencia en el Libro sexto." (18)

Proclo nos dice que la tradición asigna a Pitágoras el conocimiento del teorema pero en lo personal no le atribuye prueba alguna. Solamente sugiere que Pitágoras fue uno de los primeros que lo conoció.

La proposición a la cual se refiere Proclo del Libro VI de Euclides es la 31. La historia del toro, en relación con Euclides I-47 también es referida por Diógenes Laerto: "Apolodoro el computista dice que sacrificó una hecatombe habiendo hallado que en un triángulo rectángulo la potestad de la línea hipotenusa es igual a la potestad de las dos que la componen. De esto hay el siguiente epigrama: Pitágoras hallado aquella nobilísima figura, bueyes mató por ello en sacrificio". (19)

Una curiosa contradicción es evidente entre este sacrificio y el hecho de que también se dice que Pitágoras prohibía matar animales. El mismo Diógenes Laerto cae en ella ya que un poco más adelante dice: "Pitágoras estuvo tan lejos de permitir que se comiesen animales, como que prohibió el matarlos, juzgando que tienen el alma común a la nuestra". Una manera de evitar la contradicción es decir que Apolodoro

(18) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. 1956.

(19) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar.1962. Pág. 1315.

no se estaba refiriendo a Pitágoras o que Pitágoras no tenía esas creencias sobre los animales.

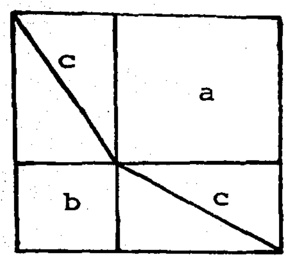
Heath dice que la evidencia de los documentos está lejos de demostrar que el descubrimiento del teorema debe ser atribuido a Pitágoras. Para ello se apoya en Plutarco que en "Vida Epicureana" dice: "Pitágoras, de acuerdo a Apolodoro, sacrificó un buey al completar la figura concerniente a que el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto o a la del problema acerca de aplicación de una área". Vemos que Plutarco tiene duda sobre a qué fue dedicado el sacrificio. Y un siglo antes que Plutarco, Vitrovio conecta el sacrificio con el descubrimiento de que el triángulo de lados 3, 4 y 5 es rectángulo, pero esta afirmación no necesariamente implica que Pitágoras haya descubierto Euclides I-47.

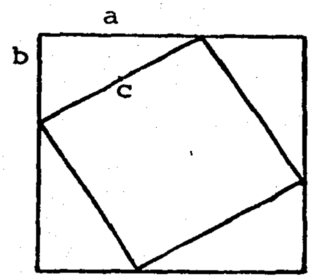
Heath menciona la cita de Proclo al respecto y en una postura que me parece inexplicable, después de ponernos en duda, dice que le es difícil ser más positivo que lo que es Proclo y, sin justificación alguna, agrega que él se siente inclinado a creer la comunmente aceptada tradición. (20)

Tomando en cuenta lo que refiere Proclo de que la prueba de Euclides I-47 pertenece a Euclides, encontramos algunos intentos de reconstrucción de la demostración. Bretschneider y Camerer proponen la siguiente. Si una recta es dividida en cualesquiera dos partes a y b, entonces el cuadrado sobre la línea entera es igual a $a^2 + b^2$ más los dos rectángulos complementarios ab. Se trazan las diagonales c de esos rectángulos, y los cuatro triángulos formados son dispuestos alrededor del cuadrado en la manera que se ilustra en la segunda figura.

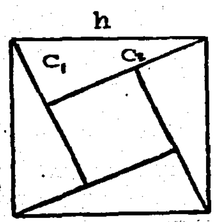
Existe en el medio del cuadrado una figura la cual es obviamente igual a $a^2 + b^2$.

(20) Heath, T.L. <u>A manual of Greek Mathematics.</u> New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 96.





Hankel hace notar que esta prueba tiene más de hindú que griego y parece no estar equivocado ya que el indio Bhaskara -(1114 D.C.) en su libro Vija-ganita (cálculo de raices) da la siguiente prueba. Sobre la hipotenusa del triángulo original se construye un cuadrado y el triángulo original, repetido cuatro veces es dispuesto como en la prueba Bretschneider.



Bhaskara solo traza la figura y agrega "¡miren!", sin pensar si es necesario agregar que $h^2 = (4(c_1 . c_2)/2) + (c_2 - c_1)^2$ y por lo tanto $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

Una prueba similar está dada por el árabe Abu l Wafa (940-998 D.C.) de quien Moritz Cantor dice que tradujo a Diofanto. Parece ser también que los chinos tenían una prueba similar. En el Tcheou-pei o "signos en un círculo" hay un pasaje sobre el cual esta afirmación está basada. La parte del libro donde está el pasaje tiene una antigüedad de poco más de -3000 años, lo cual sitúa al pasaje alrededor de 1100 A.C. Pero esto quiere decir que el teorema era conocido en China 600 años antes de Pitágoras. Quizás no sea tan antiguo, como se afirma, pero ciertamente existió y fue objeto de comentarios en el siglo II D.C. En el pasaje la figura trazada es, aparentemente, la misma que la figura de Bhaskara. Por otro lado, las tabletas matemáticas babilónicas recientemente descifradas por O. Neugebauer y W. Struve revelan que los babilonios hicieron uso del teorema ya en el año 2000 A.C. Aparte del libro de Bhaskara, entre los hindúes está también el Apastamba-Sulba-Sutra del cual se conoce que proviene del siglo V A.C. En este trabajo aparece la construcción de ángulos recto por medio de cuerdas anudadas en las razones de los lados de ciertos triángulos rectángulos en números racionales. Son usados siete de esos triángulos, los cuales se reducen ellos mismos a cuatro: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17 y 12, 35, 37. Uno de esos triángulos, el 5, 12, 13 era conocido en el siglo VIII A.C. mientras que el 7, 24, 25 aparece en el Baudhayana que se supone más antiguo que el Apastamba. En éste último se establece el equivalente a Euclides I-47 en términos generales, aunque sin prueba. Reconoce la verdad del teorema para un triángulo isósceles rectángulo y da una construcción para $\sqrt{2}$ o la longitud de la diagonal de un cuadro de lado la unidad.

4) Plutarco da dos citas referentes a aplicación de áreas; una de ellas ya fue dada en lo referente a Euclides I-47; la otra está dada en El Convivio de los Siete Sabios : "entre los teoremas geométricos o más bien problemas, está este: dadas dos figuras, "aplicar" una tercera igual a una y similar a la otra; fue en virtud de este descubrimiento que dicen que Pitágoras sacrificó. Este es, incuestionablemente, más sutil y elegante que el teorema que probó acerca de que el cuadrado de la hipotenusa es igual a los cuadrados sobre los lados del ángulo recto." (21) Los griegos carecían de un álgebra en el sentido que la conocemos actualmente y usaron a la geometría como un sustituto de operaciones algebraicas; el resultado fue que una gran parte de su geometría puede ser llamada "álgebra geométrica". En esta "álgebra geométrica" destacan dos métodos que son el de "aplicación de áreas" y el de "proporciones". Euclides I-44 y I-45 son los casos más

(21) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 25.

simples de "aplicación de áreas". Lo que debe ser entendido por este método está dado por Proclo en sus comentarios al Libro I de Euclides, basándose en Eudemo cuando comenta a Euclides I-44. Su nota es la siguiente: "estas cosas "aplicación de áreas", su "excedente" y su "faltante", dice Eudemo que fue descubrimiento de la musa de los Pitagóricos. Y fue de los Pitagóricos que los últimos geómetras tomaron los nombres, transfiriéndolos a las llamadas líneas cónicas, designando a una de ellas como parábola (aplicación), otra como hipérbola (excedente) y otra como elipse (faltante), mientras que aquellos hombres divinos vieron los significados de esos nombres en la construcción, en un plano, de áreas bajo una línea recta finita. Porque cuando usted tiene una línea recta y extiende el área dada exactamente a lo largo de una línea recta entera, entonces ellos dicen que usted "aplica" el área dada; cuando sin embargo usted hace la medida del área mayor que la recta dada se habla de "exceso", y cuando usted la hace menor se dice que "falta". Euclides también, en el sexto libro, habla en esta forma, de "excedente" y "faltante", pero en este lugar necesitó la "aplicación" simplemente, como él vislumbró para aplicar a una recta dada una área igual a un triángulo dado, para que tuviéramos en nuestro poder no solamente la construcción de un paralelogramo igual a un triángulo dado, sino también de él a una recta finita. Por ejemplo, dado un triángulo con una área de 12 pies y una recta cuya longitud es de 4 pies y encontramos de cuántos pies sería la anchura para que el paralelogramo sea igual al triángulo. En el caso particular, si encontramos una anchura de 3 pies y multiplicamos la medida por la anchura, suponiendo que el ángulo dado es recto, tendremos el área. Tal es entonces la "aplicación" dada desde tiempos antiguos por los Pitagóricos". (22)

(22) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. 1956. Volume I. Pág. 343.

Debido a la afirmación de Plutarco, en este caso podemos afirmar que tal concepto de "aplicación de áreas" era el que tenía Pitágoras. En el texto de Proclo cuando dice que "fue de los Pitagóricos que los posteriores geómetras tomaron los nombres" se está refiriendo a Apolonio quien fue el primero en utilizar los términos de parábola, hipérbola y elipse.

Heath en sus notas a Euclides I-44 (23), comenta lo que entiende por "aplicación", "excedente" y "faltante". Para él "aplicación" es lo que se tiene en I-44 y en I-45: la construcción de un paralelogramo de área igual al área de un triángulo dado, en el caso de I-44, y de una figura rectilínea cualesquiera, en el caso de I-45, teniendo a una recta dada como lado. En Euclides I-44 tenemos el método utilizado por los griegos, desde tiempos de Pitágoras, para encontrar el área de cualquier triángulo. El triángulo del cual desearan conocer su área era reducido a un paralelogramo, del cual es mucho más fácil obtener el área. Y en Euclides I-45 está dada la manera de encontrar el área de cualquier figura rectilínea dada; dicha figura era convertida en un paralelogramo.

Heath entiende por "excedente" a una especie de "aplicación" de un paralelogramo a una recta dada; la característica de este paralelogramo es que la recta dada formará parte del lado del paralelogramo; esto es, el lado será mayor que la recta dada; en caso de que la recta dada sea mayor que el lado del paralelogramo se tendrá el caso "faltante".

5) Proclo en el Sumario Eudemiano nos dice que Pitágoras construyó las figuras cósmicas. Aetio, basándose probablemente en Teofrasto, nos habla de la siguiente manera: "Pitágoras, viendo que hay cinco figuras sólidas, que también son llamadas figuras matemáticas, dice que la tierra

(23) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1956. Pág. 344.

surgió del cubo, el fuego de la pirámide, el aire del octaedro, el agua del icosaedro y la esfera del universo del dodecaedro." (24)

Un sólido regular es un sólido cuyas caras son polígonos iguales y todos sus ángulos sólidos son iguales. El término es comunmente restringido a los sólidos regulares que tienen el centro.

Hay cinco de esas figuras, la pirámide, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Todos ellos pueden ser inscritos en una esfera. Debido a que en el Timeo de Platón se hace uso de ellos para la construcción del universo, fueron llamadas figuras cósmicas o figuras platónicas. Aunque Proclo dice que fue Pitágoras el primero que las construyó, es Teeteto a quien le corresponde ser el primero en escribir sobre ellas, según Suidas. El Libro XIII de Euclides está dedicado a la construcción teórica de ellos, y ahí se da - también, el cálculo de las medidas de sus lados, en términos del radio de la esfera circunscrita. El conocimiento matemático de Euclides XIII no lo poseía Pitágoras, ni los Pitagóricos, pero no hay razón para pensar que no los hubieran podido construir prácticamente, poniendo juntos triángulos, cuadrados o pentágonos a la manera de Platón. Arquímides, de acuerdo a Papo, descubrió trece sólidos semiregulares, cuyas caras son polígonos regulares pero no de la misma especie.

Iamblicho en Sobre la vida Pitagórica narra una historia en la que se ven involucrados Pitágoras y los sólidos regulares: "se dice que Hipaso, quien era un Pitagórico, debido a que fue el primero en publicar y describir la esfera desde los doce pentágonos, pereció en el mar por su impiedad, pero recibió crédito por el descubrimiento, pese a que todo el perteneció a EL. (Porque en esta forma se refieren ellos a

(24) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 217.

Pitágoras y no lo llaman por su nombre). (25)
Iamblicho da la misma historia, casi palabra por palabra, en De Communi Mathematica Scientia; la diferencia está en que pone a un Pitagórico muerto por revelar la existencia de los irracionales. Puede ser que Iamblicho se esté refiriendo en los dos pasajes a la misma persona ya que los irracionales pueden ser deducidos rápidamente de un estudio de los sólidos regulares. Pero también puede ser que pase algo parecido con lo del sacrificio de los bueyes: Pitágoras pudo haber sacrificado a dos personas por "impiedad".
Podemos concluir, pues, que las contribuciones de Pitágoras en geometría son:

1) Un método para encontrar triángulos en los cuales el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados.
2) Una teoría de medias y proporciones.
3) Euclides I-47
4) Invención de problemas de aplicación de áreas,
5) Descubrimiento de la construcción de los sólidos regulares

Hipócrates de Quíos.
Antes de dedicarse a la geometría fue mercader, pero perdió sus riquezas cuando unos piratas asaltaron el barco en que transportaba sus pertenencias. Tal vez por este motivo Aristóteles dice que tenía talento para la ciencia pero que en otras cosas era lento y estúpido. Fabricio afirma que Teodoro e Hipócrates fueron expulsados de la escuela Pitagórica por haber cobrado por enseñar geometría. Los trabajos de Hipócrates están perdidos, pero por el Sumario Eudemiano de Proclo sabemos que fue el primero en haber compilado Elementos. Estos fueron conocidos por Aristóteles y ha llegado a nosotros un fragmento de la Historia de las Matemáticas de

(25) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 223.

Eudemo, copiado por Simplicio, donde hay referencia a la cuadratura de las lunas y que sin duda alguna tiene relación con el problema de la cuadratura del círculo. El fragmento preservado por Simplicio está asentado en Comentarios sobre la Física de Aristóteles .

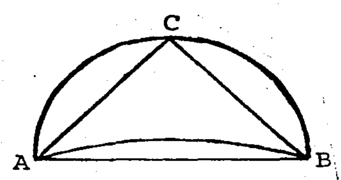
Según Eudemo, Hipócrates no demostró la cuadratura de la luna para el caso particular en que está sobre el lado de un cuadrado, sino que la demostró en general: cuando la circunferencia de la luna es menor, igual y mayor que un semicírculo. Hipócrates da también la cuadratura de una luna y un círculo juntos.

El punto de partida de Hipócrates es la proposición de que los cuadrados sobre los diámetros tienen las mismas razones que los círculos. Eudemo no da la manera en que Hipócrates demuestra esto. Usando este resultado, demuestra que segmentos similares de círculos tienen las mismas razones que las de los cuadrados sobre sus bases.

Para entender qué es lo que hace Hipócrates veamos primero lo que debe ser entendido por "segmento" y por "segmentos similares de círculo"; en el Libro III de Los Elementos de Euclides, las definiciones 6 y 11 nos dan información sobre estos conceptos; según la definición 6, segmento del círculo es la figura limitada por una recta y la periferia de la circunferencia, mientras que la 11 dice que segmentos similares de círculos son los segmentos de círculo que abarcan ángulos iguales o aquellos en que los ángulos son iguales, entendiéndose por ángulo del segmento aquel "que es limitado por una recta y por la periferia del círculo". Por una luna se entiende la figura que está comprendida entre dos arcos de círculos que se cortan.

El teorema de que los cuadrados sobre los diámetros tienen las mismas razones que los círculos, del cual, por desgracia en el pasaje, no trae demostración, es Euclides XII-2. Si es cierto lo que afirma Eudemo de que Hipócrates demostró este teorema, entonces Hipócrates debió utilizar el método de demostración por reducción al absurdo, que comunmente es atribuido a Platón, ya que no se ve otra manera de demostrarla. En relación con esto, Moritz Cantor nos dice que los egipcios habían adoptado desde hacía mucho tiempo una razón aritmética fija entre un círculo y el cuadrado de su diámetro. Hipócrates tal vez conoció esto a través de los Pitagóricos. La manera en que Euclides prueba XII-2 es por el método de exhaución y la demostración es atribuida a Eudoxo, ya que XII-7, el porismo y XII-10 son probadas en la misma forma y Arquímides se las atribuye a Eudoxo.

La primera luna que cuadra Hipócrates es aquella en la que la circunferencia exterior de la luna es un semicírculo: "hizo esto circunscribiendo a un triángulo rectángulo isósceles un semicírculo y alrededor de la base un segmento de un círculo similar a aquellos cortados por los lados. Desde que el segmento alrededor de la base es igual a la suma de los segmentos de los lados, se sigue que cuando la parte del triángulo arriba del segmento alrededor de la base es agregada a ambas, la luna será igual al triángulo. Por lo tanto, la luna, habiendo sido probada igual al triángulo, puede ser cuadrada. En esta forma, tomando un semicírculo como la circunferencia exterior de la luna, Hipócrates rápidamente cuadró la luna". (26)

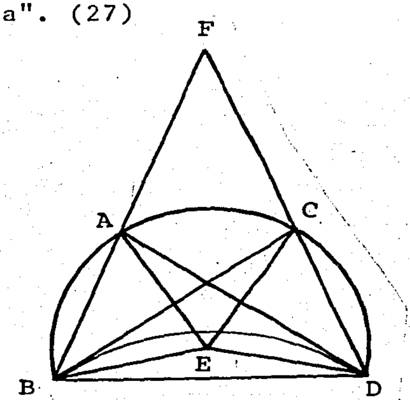


En esta cuadratura de luna debe notarse que para la construcción del segmento de círculo similar a los cortados por los lados alrededor de la base del triángulo, Hipócrates utili-

(26) Esta cuadratura de luna así como las otras tres están tomadas de; Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 239, 253.

zó Euclides III-33 y también el conocimiento de que segmentos circulares similares contienen ángulos iguales.

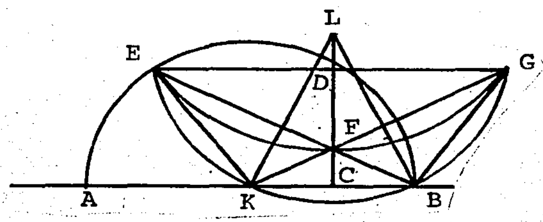
La segunda luna que cuadra tiene la circunferencia exterior mayor que un semicírculo. Pero este semicírculo tiene la particularidad de haber sido obtenido mediante la construcción de un trapecio que tiene tres lados iguales y el cuadrado sobre el lado paralelo mayor es igual a tres veces el cuadrado sobre cada uno de los otros lados. Hipócrates sólo demuestra que la circunferencia exterior de la luna es mayor que un semicírculo y no da la cuadratura. Heath la pone de la siguiente manera: ya que $BD^2 = 3BA^2$, tenemos que (segmento sobre BD)= 3(segmento sobre BA)= suma de segmentos sobre BA, AC y CD. Agregando a cada lado de la ecuación la porción del trapecio encerrada por los lados BA, AC, CD y la circunferencia del segmento sobre BD, obtenemos: trapecio ABDC= la luna acotada por las dos circunferencias; y así la luna "es cuadrada". (27)



Para la cuadratura de la luna en el caso en que la circunferencia exterior de la luna es menor que un semicírculo, también hace uso de una construcción para obtener dicha circunferencia: "sea un círculo con diámetro AB y centro en K. Sea CD que bisecta a BK en ángulos rectos; y sea la recta EF colocada entre CD y la circunferencia, tendiendo hacia B, tal

(27) Heath, T.L. A manual of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1963. Pág. 125, 126.

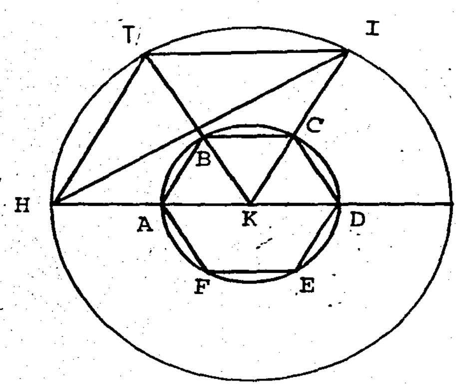
que el cuadrado sobre ella es una y media veces el cuadrado sobre uno de los radios. Trácese EG paralela a AB y desde K trácense rectas uniendo E y F. Prolónguese la recta KF hasta cortar a EG en G; y de nuevo trácense rectas desde B que unan F y G. Es manifiesto entonces que EF. prolongada, pasará por B -porque por hipótesis EF tiende hacia B- y BG será igual a EK. Siendo esto así, digo que el trapecio EKBG puede ser abarcado en un círculo". La circunferencia exterior de la luna a cuadrar es EKBG, y demuestra que es menor que un semicírculo haciendo notar que el ángulo EKG, en el segmento exterior, es obtuso: "ya que $EF^2 = (3/2)EK^2$ y que $KB^2 > 2BF^2$, es manifiesto que $EK^2 > 2KF^2$. Por lo tanto $EF^2 > EK^2 + KF^2$. El ángulo en K es, por lo tanto, obtuso; así que el segmento en el cual está es menor que un semicírculo."



La cuadratura está dada de la siguiente manera: "alrededor del triángulo EFG se circunscribe un segmento de círculo; entonces, claramente cada uno de los segmentos sobre EF y FG será similar a los segmentos sobre EK, KB y BG. Siendo esto así, la luna así formada, cuya circunferencia exterior es EKBG, será igual a la figura rectilínea compuesta por los tres triángulos BFG, BFK y EKF. Porque los segmentos cortados de la figura rectilínea, dentro de la luna, por las rectas EF y FG, juntas son igual a los segmentos fuera de la figura rectilínea cortada por EK, KB y BG. Porque cada uno de los segmentos interiores es una y media veces cada uno de los exteriores, ya que por hipótesis, el cuadrado sobre EF es una y media veces el cuadrado sobre los radios, esto es, el cuadrado sobre EK o KB o BG. Ya que la luna es hecha de los tres segmentos y de la figura rectilínea menos los dos segmentos, (la figura rectilínea incluyendo los dos segmentos pero no los tres) mientras que la suma de los dos segmentos es igual a la suma de los tres, se sigue que la luna es igual a la figura rectilínea."

La construcción dada por Hipócrates para esta tercera cuadratura fue conocida entre los griegos con el nombre de "inclinación" o "tendencia": "...y sea la recta EF colocada entre ED y la circunferencia, tendiendo hacia B, tal que el cuadrado sobre ella es una y media veces el cuadrado sobre uno de los radios". Hay algunos historiadores de la matemática que creen que Hipócrates usó métodos mecánicos. (28)

Para la cuadratura de una luna y un círculo juntos utilizó dos círculos concéntricos; en el interior construye un exágono regular; tres vértices consecutivos de este exágono son unidos al centro y las rectas formadas se prolongan por los vértices hasta tocar el círculo exterior. Se afirma que las rectas formadas uniendo estos puntos son lados de un exágono regular inscrito en el círculo exterior, tal como en la figura. Se une H con I, y alrededor de HI se circunscribe un segmento similar al cortado por HT. Ya que:

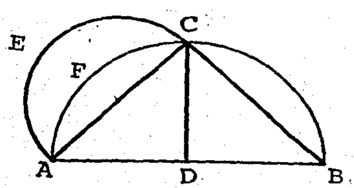


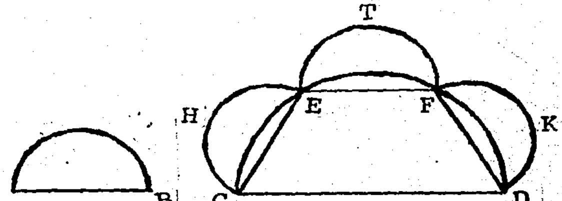
$HI^2= 3TH^2$ y $TH^2= 6AB^2$ se tiene que el segmento circunscrito - alrededor de HI es igual a los cortados del círculo exterior por HT y TI junto con los segmentos cortados del círculo interior por todos los lados del exágono. Esto se debe a que

(28) Heath, T.L. A history of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1981. Pág. 196.

$HI^2 = 3HT^2$ y $TI^2 = HT^2$, mientras que cada uno de TI^2 y HT^2 es igual a la suma de los cuadrados sobre los seis lados del exágono interior, debido a que por hipótesis, el diámetro del círculo exterior es seis veces el del interior. Por lo tanto la luna HTI es más chica que el triángulo HTI en los segmentos formados por el círculo interior y su exágono, por que la suma de los segmentos del exágono y los segmentos sobre HT y TI es igual al segmento sobre HI y si a ambas partes le agrego la parte del triángulo que está arriba del segmento sobre HI tendré, por un lado, el triángulo HTI y por el otro la luna más los segmentos tomados en el exágono. Debido a que las dos partes son iguales, se obtiene que la luna es más chica que el triángulo en los segmentos formados por el círculo interior y el exágono. Si a ambos lados agregamos el exágono tendremos que la suma del círculo y la luna será igual a la suma del exágono y el triángulo. Hipócrates concluye que la luna y el círculo, juntos han sido cuadrados.

Aparte de estas cuatro cuadraturas, Alejandro le asigna otras dos. (29) Estas con como sigue: en la primera, AB es el diámetro de un círculo, AC y CB son los lados de un cuadrado inscrito en el círculo y AEC es un semicírculo descrito sobre AC. Se demuestra que la luna AECF es igual al triángulo ACD. En la segunda, AB es el diámetro de un semicírculo. Sobre CD, igual al doble de AB se traza un semicírculo. CE, EF y FD son lados de un exágono regular y CHE, ETF y FKD son semicírculos descritos sobre CE, EF y FD respecti-





(29) Alejandro de Afrodicia. Escribió Comentarios a la <u>Metafísica</u> de Aristóteles.

vamente. Se demuestra que las lunas trazadas sobre los lados CE, EF y FD del trapecio, su suma, es igual al trapecio CEFD. Las pruebas no son muy complicadas. Sin embargo, Alejandro cae en un error al afirmar que si la figura rectilínea igual a las tres lunas es restada entonces el semicírculo puede ser cuadrado y por lo tanto también el círculo.

Aristóteles hace un comentario en el que afirma que hay falacia en Hipócrates. Esta opinión es analizada por Simplicio en sus Comentarios a la Física de Aristóteles. La cita que da lugar al análisis de Simplicio es la siguiente: "además, tampoco es natural y conveniente dar solución a todas las cosas, sino tan solo a aquellas que, el que demuestra partiendo de unos principios, deduce en virtud de ellos una conclusión falsa. Mientras que a las que no se concluyen en falso no hay porque darles solución. Por ejemplo, la refutación del problema de la cuadratura del círculo, lograda por medio de segmentos, es algo que corresponde al geómetra; pero no corresponde al geómetra dar solución al problema de antifón". (30)

Esta cita de Aritóteles también la analiza Temistio (31), con la ventaja de que extiende la explicación para entender de que está hablando Aristóteles. Su comentario es el siguiente: "porque esos argumentos falsos que preservan las hipótesis geométricas, son para ser refutadas por la geometría, pero los que entran en conflicto con ellas son para ser abandonadas. Se da el ejemplo de dos hombres que trataron de cuadrar el círculo, Hipócrates de Quíos y Antifón. El intento de Hipócrates es para ser refutado. Ya que mientras que preserva los principios, comete un paralogismo, porque incluyó en la prueba que cada luna puede ser cuadrada, al cuadrar la luna que es descrita alrededor del lado del

(30) Aristóteles. Obras Completas. Física. Madrid. Editorial Aguilar. 1962.

(31) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 311.

cuadrado inscrito en el círculo. Pero el geómetra no puede decir cosa alguna contra Antifón, quien inscribió un triángulo equilátero en el círculo, y sobre cada uno de sus lados colocó otro triángulo, un triángulo isósceles con su vértice en la circunferencia del círculo y continuó este proceso, pensando que en algún momento haría el lado del último triángulo, aunque una línea recta coincidiera con la circunferencia".

Las cuatro cuadraturas de lunas de Hipócrates dadas por Eudemo son correctas. Así que hay dos caminos para comprender porqué Aristóteles habla de falacia. Primero Aristóteles se basó en el trabajo de Alejandro donde la falacia es obvia y en el segundo Aristóteles no entendió lo que hizo Hipócrates. Este último camino se basaría en que utiliza la palabra "segmento" para denotar "luna". Esto lo hace en Refutaciones Sofísticas, en el capítulo XI. Además en De Caelo, II.8 utiliza "segmentos" para denotar "sector". Existe también la opinión de que Hipócrates supo que no había cuadrado el círculo (32), pero que utilizó un lenguaje que daba la impresión de que él lo había hecho.

También Ross (33) es de la opinión de que sólo probó sus cuadraturas de luna y la suma de una luna y un círculo y que no dudó en alcanzar la cuadratura del círculo, pero que no aseveró haber realizado tal hazaña.

Hipócrates también incursionó en el problema de la duplicación del cubo.Proclo y Eutocio en sus Comentarios, el primero sobre Euclides I y el segundo sobre la esfera y el cilindro de Aristóteles, nos dan información acerca de ello.

Según Proclo: "La reducción consiste en una transición que va de un teorema o problema a otro, cuya solución o construc

(32) Heath, T.L. A history of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1981. Pág. 197.

(33) Aristóteles. Obras Completas. Física. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 466.

ción pone de manifiesto la solución de lo que es propuesto, como cuando aquellos que buscaron duplicar el cubo transfirieron la investigación a otro problema, el descubrimiento de las dos medias, del cual el primero se sigue, y desde ese tiempo en adelante se inquirió cómo encontrar dos medias proporcionales entre dos rectas dadas. Ellos dicen que el primero en efectuar la reducción de las difíciles construcciones fue Hipócrates de Quíos, quien también cuadró una luna y descubrió muchas otras cosas en geometría, no teniendo rival para ser hábil en construcciones". (34)

Y Eutocio afirma que "Hipócrates fue el primero en concebir que si dos medias proporcionales pueden ser encontradas en proporción contínua entre dos rectas, de la cual la mayor fuera doble de la primera, el cubo podría ser doblado, así que el enigma fue tornado por él en otro no menor". (35)

Así pues, para Eutocio, Hipócrates fue el primero en tener en mente una solución mediante reducción y Proclo le asigna el descubrimiento de las dos medias.

En la terminología actual, Hipócrates descubrió que si $(a/x)= (x/y)= (y/b)$, esto es, si x, y son medias proporcionales entre a y b, tenemos que $y= (x^2/a)= (ab/x)$; de la última igualdad obtenemos $x = a^2b$. Así que si $b= 2a$ se tiene que $x^3= 2a^3$, lo que nos dice que un cubo de lado x es dos veces un cubo de lado a.

La propiedad $(a^3/x^3)= (a/b)$ está en Euclides V, definición 10 y puede ser deducida de $x^3= a^2b$. Si $b= 2a$ entonces $x^3= 2a^3b$, de donde $(x^3/a^3)= (a/b)$.

Los griegos no tenían dificultad en convertir rectángulos de lados a y b en un cuadrado. Esto requiere encontrar la media proporcional o geométrica entre a y b. Esto es, si $(a/x)= (x/b)$, los geómetras fácilmente construían la línea x.

(34) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 253.

(35) Ibidem. Pág. 259.

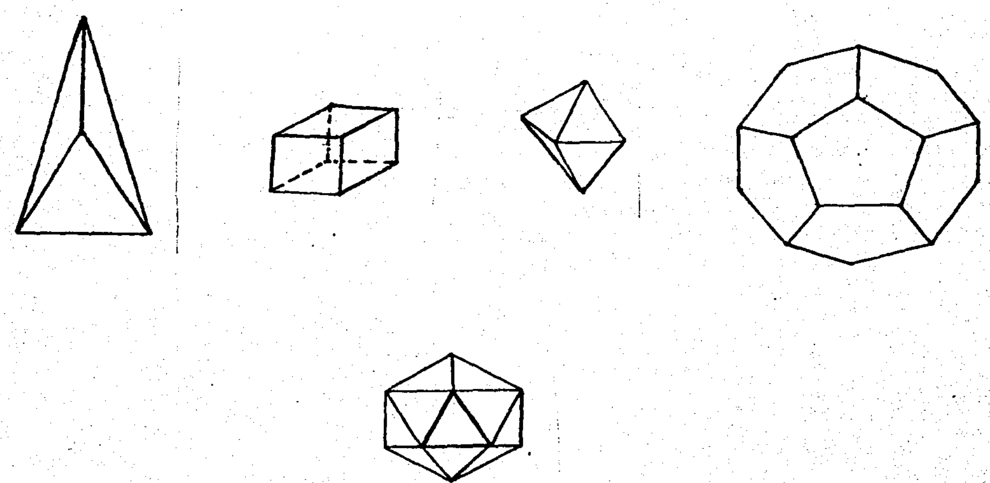
Esto pudo haber inspirado a Hipócrates para resolver el problema de duplicar el cubo, al tratar de generalizar el problema introduciendo dos medias proporcionales entre a y b.
A Hipócrates se le adjudica, con alguna duda, de haber sido el primero en usar letras en figuras geométricas. Es interesante notar que hizo avances en los dos primeros problemas especiales, pero no parece haber trabajado en el de la trisección del ángulo, problema que fue tratado más tarde por Hippias de Ellis.

Teeteto. (415-369 A.C. aproximadamente)
Suidas nos dice que era ateniense, astrónomo, alumno de Sócrates y que fue el primero en describir (posiblemente "construir") los cinco sólidos regulares. Que vivió después de las guerras Peloponesas y que su actividad científica la efectuó en Heraclea. Platón dice que era hijo de Eufronios de Sunio. (36)
Según Proclo, en el Sumario Eudemiano, "los teoremas los incrementó e hizo un avance hacia un grupo de teoremas más perfecto".
Por lo general, a Teeteto, se le adjudica cierta relación con cuando menos dos cosas en geometría: 1) La construcción de los cinco sólidos regulares y 2) los números irracionales.
Acerca de lo primero, en Euclides XIII, (37), se dice lo siguiente: "en este libro, esto es, el treceavo, están descritas las cinco figuras platónicas, que sin embargo no son de Platón; tres de las antes dichas cinco figuras son debidas a los Pitagóricos, a saber, el cubo, la pirámide y el dodecaedro, mientras que el octaedro y el icosaedro son debidos a Teeteto. Recibieron el nombre de Platónicos porque Platón discurre acerca de ellos en el Timeo".

(36) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Vol. I. Harvard University Press. 1957. Pág. 379.

(37) Ibidem.

Un sólido regular es un sólido cuyas caras son polígonos i-
guales y todos sus ángulos sólidos son iguales. Generalmente
el término está restringido a aquellos sólidos regulares en
los que el centro está "sencillamente encerrado". Hay cinco
y solamente cinco de esas figuras, la pirámide, el cubo, el
octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Todos pueden ser ins
critos en una esfera.



Debido a que Platón hace uso de ellos en el "Timeo" para la
construcción del universo, los griegos los llamaron figuras
Cósmicas o Platónicas. Proclo atribuye la construcción de -
estas figuras a Pitágoras, pero Suidas afirma que Teeteto
fue el primero en escribir acerca de ellas. La construcción
teórica y el cálculo de sus lados en términos del radio de
la esfera circunscrita está dada en Euclides XIII. El cono-
cimiento matemático que se encuentra en el libro no lo te-
nían los Pitagóricos, pero no hay razón para que no los ha-
yan construido prácticamente en la manera en que Platón lo
hace, esto es, poniendo juntos los triángulos, cuadrados o
pentágonos. Según Papo, Arquímides descubrió trece sólidos
semiregulares, cuyas caras son polígonos regulares, pero no
todos de la misma clase.

Acerca de la relación con los irracionales tenemos dos citas. La primera en Euclides X, (38): "Este teorema (Euclides X-9) es descubrimiento de Teeteto, y Platón lo dice en el "Teeteto", pero ahí surge en un caso particular y aquí es tratado generalmente".

La segunda cita está dada en un párrafo del Teeteto de Platón:

"Sócrates- ¿Qué cuestión, Teeteto?.

Teeteto- Teodoro nos enseñaba algún cálculo sobre las raíces de los números, demostrándonos que las de tres y de cinco no son conmensurables con la de uno, y enseguida continuó así hasta la diez y siete, en la que se detuvo. Juzgando pues, que las raíces eran infinitas en número, nos vino al pensamiento intentar comprenderlas bajo un solo nombre, que conviene a todas.

Sócrates- ¿Habéis hecho ese descubrimiento?.

Teeteto- Me parece que sí; juzga por ti mismo.

Sócrates- Veamos.

Teeteto- Dividimos todos los números en dos clases; los que pueden colocarse en filas iguales, de tal manera que el número de las filas sea igual al de las unidades de que cada una consta, los hemos llamado cuadrados y equiláteros, asimilándolos a las superficies cuadradas.

Sócrates- Bien.

Teeteto- En cuanto a los números intermedios, tales como el tres, el cinco y los demás, que no pueden dividirse en filas iguales de números iguales, según acabamos de decir, y que se componen de un número de filas menor o mayor que el de las unidades de cada una de ellas, de donde resulta que la superficie que la representa está siempre com-

(38) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume III. 1956.

prendida entre lados desiguales, a estos números los hemos llamado oblongos, asimilándolos a superficies oblongas.

Sócrates- Perfectamente. ¿Qué habéis hecho después de esto?

Teeteto- Hemos comprendido bajo el nombre de longitud (39) las líneas que cuadran el número plano y equilátero, y bajo el nombre de raíz (40), las que cuadran el número oblongo, que no son conmensurables por sí mismas con relación a las primeras, sino sólo por las superficies que producen. La misma operación he hecho respecto a los sólidos". (41)

Platón distingue dos teoremas, en el pasaje antes citado; uno asignado a Teodoro, en el cual, éste último afirma que las raíces cuadradas de 3, 5, ..., 17 son irracionales; y otro a Teeteto, que nos dice que la raíz cuadrada de cualquier número entero no cuadrado, es irracional. Emerge, a partir de aquí, un cuadro del desarrollo del estudio de la inconmensurabilidad: Teodoro extiende el trabajo Pitagórico acerca del lado y la diagonal del cuadrado y Teeteto, a su turno, generalizó y extendió el trabajo de Teodoro, y comenzó las detalladas clasificaciones de irracionales que se encuentran preservadas en Euclides X. Esta es la impresión que deja Platón en el Timeo ; y es reforzada en el Escolia a Euclides X-9, arriba citada, cuando dice que Euclides X-9 "es descubrimiento de Teeteto".

En algunos textos en lugar de "raíces" es utilizada la palabra "potencia". Alrededor del significado que da Platón y los significados que le dan otros autores como Hipócrates de Quíos, Diofanto, Euclides, etc., se han hecho muchas especulaciones para tratar de entender qué es lo que está ha-

(39) Longitud o raíz racional.

(40) Raíz o raíz irracional.

(41) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 299.

ciendo realmente Teeteto y efectuar exitosas reconstrucciones de los trabajos de Teodoro y Teeteto. Heath, por ejemplo aduce que el texto no tiene sentido si "potencia" tiene el significado de "cuadrado" en lugar de "raíz cuadrada" (42) Por su parte, Wilbor Richard Knorr aduce lo contrario: que "potencia" significa "cuadrado", basándose en un análisis del uso de esta palabra en el mismo Platón. (43) Existe también la interrogante de porqué Teodoro se detuvo en raíz de 17. Hay discrepancia acerca del significado de la frase: "en la que se detuvo". Para algunos paró en raíz de 17 porque no tenía caso seguir, mientras que según otros, basándose en análisis de las palabras griegas, Teeteto se detuvo porque Teodoro encontró alguna dificultad en raíz de 17.

Platón.

Platón era ateniense, hijo de Aristón y Potona. Era descendiente, por parte de la madre, de Solón. En su juventud fue aficionado a la pintura y compuso cantos y tragedias. A los veinte años de edad se hizo discípulo de Sócrates y cuando éste murió lo fue de Cratilo; luego pasó a la escuela de Hermógenes. A los veintiocho años pasó a la escuela de Euclides de Megara. Fue luego a Cirene donde fue discípulo de Teodoro.

Viajó posteriormente a Italia a aprender de los Pitagóricos Filolao y Eurito. Estuvo en Egipto. Al igual que Solón y Pitágoras tuvo problemas de tipo político. Hay algunos como Favorino, que dicen que fue el primero en escribir en forma de diálogos. Todas estas afirmaciones están dadas por Diógenes Laerto en su Libro III, dedicado a Platón, de Vidas de Filósofos Ilustres . Al igual que Aristóteles, Platón incursionó en casi todos los campos del saber de su tiempo.

(42) Heath, T.L. A history of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1981. Pág. 209.

(43) Richard Knorr, Wilbur. The evolution of the Euclidean Elements. USA. D. Reudel Publishing Company. 1975. Pág. 65.

A pesar de haber desmostrado un gran interés en las ciencias, sus contribuciones a las matemáticas fueron minimizadas. Eudemo mismo, en el "Sumario" no le asigna descubrimiento alguno y se refiere a Platón solamente como un gran impulsor, gracias al aprecio que tiene por ellas. Sin embargo, parece que no es así; hay trabajos matemáticos que pueden ser atribuidos a Platón; trabajos que pueden ser clasificados de la siguiente manera:

1) Los referentes a la filosofía de la matemática.
2) Los referentes a la geometría.
3) Los referentes a la aritmética.

En cuanto a los primeros, puede decirse que es en los Diálogos donde se encuentra el primer intento serio de construir una filosofía de la matemática. Es ilustrativo en este sentido, un pasaje en la carta número siete, dirigida a sus amigos de Dion: "Para cada cosa que existe hay tres cosas a través de las cuales el conocimiento acerca de ella llega; el conocimiento mismo es una cuarta; y como quinta podríamos poner el actual objeto mismo de conocimiento, que es la verdadera realidad. Tenemos, entonces: primero, un nombre; segundo, una descripción; tercero, una imagen, y cuarto, el conocimiento del objeto. Toma un caso particular, si quieres entender lo que digo; y aplica entonces la teoría a todos los objetos en la misma forma. Hay, por ejemplo, alguna cosa llamada círculo, cuyo nombre es justo la palabra que lo expresa. En segundo lugar hay una descripción de eso, hecha de nombres y verbos. La descripción del objeto cuyo nombre es redondez y circunferencia y círculo, sería: aquello que tiene en todas partes la misma distancia entre las extremidades y el centro. En tercer lugar está el objeto trazado y borrado y vuelto sobre el torno y destruido -proceso en el cual el círculo real, en relación al cual los otros círculos existen, no puede sufrir, ya que es diferente de ellos. En cuarto lugar, hay conocimiento, entendimiento y opinión

correcta acerca de ellos- todos los cuales serán colocados como una cosa más, puesto que como ellos es encontrado no en sólidos ni en las formas de cuerpos sino en almas, mientras que manifiestamente difieren ambos en naturaleza del círculo real y de los tres antes dichos. De ese entendimiento se aproxima más al quinto en afinidad y parecido, mientras que los otros están más distantes....
Cada círculo trazado o girado sobre un torno abunda en el opuesto al quinto -porque el en todas partes toca a la recta, mientras que el círculo real, mantenemos, no contiene en el mismo ni mucho ni poco de la naturaleza opuesta. El nombre, mantenemos, no es en caso alguno estable; no hay cosa alguna para impedir que las cosas ahora llamadas redondeces sean llamadas rectas, y las rectas redondeces; y las que trasponen a ellas y las usan en forma opuesta encontrarán a ellas no menos estables que lo que ellas son ahora."(44)
Platón observa que no hay cosa alguna que nos impida llamar al círculo con otro nombre; éste es meramente convencional. También, que hay dos clases de círculo, el que es trazado y la idea de círculo por la cual todos los demás círculos existen, y que no hay precisión en la definición de círculos ya que está hecha de nombres y verbos.
En esta carta aparece por vez primera la preocupación de dar definiciones correctas, en base al conocimiento de que mientras los primeros principios reflejen mejor a la realidad será más correcto el razonamiento que lleve a una demostración. Puede decirse, pues, que en Platón aparece por vez primera el rigor en matemáticas. La carta trasluce su insatisfacción por lo superficial de los primeros principios dados en su época. Por otro lado no sólo se queda ahí sino que también da una alternativa; en el <u>Menón</u> , por ejemplo, dice como debe de ser definida una figura. Sócrates primero hace

(44) Thomas, Ivor. <u>Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid.</u> Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 391, 395.

ver a Menón que la "redondez" es una especie de figura, ya que hay otras figuras diferentes a la "redondez". Lo cuestiona enseguida acerca de aquello que tienen en común las figuras, Menón no acierta y Sócrates se contesta él mismo diciendo que lo que tienen en común es el concepto de límite y finitud. Da entonces su definición de figura: "es lo que limita al sólido; y para resumir esta definición en dos palabras, llamo figura al límite del sólido".

Platón está discutiendo filosóficamente, pero sin duda alguna también está haciendo matemáticas y además brillantemente. Está dando aquí, no puede dudarse, bases más sólidas para la geometría, que las dadas por los griegos hasta entonces.

Aristóteles asegura que dió también definiciones para punto y recta; punto lo define como el inicio de una línea y recta como "aquello de lo cual el medio cubre los términos". Hay algunos como Heath, que dicen que Euclides procuró expresar tal cosa cuando define recta como "una línea que yace plenamente con los puntos sobre ella" (45).

Se sabe que expresó también una definición de esfera y existe una especie de noción común atribuida a él: "si iguales son sumados a desiguales, las sumas difieren por el mismo valor como las magnitudes originales lo hacen". (46)

Acerca del segundo punto, sobre el trabajo de Platón en geometría, hay en el Menón dos pasajes que nos pueden ilustrar. Un ejemplo de diorismo en el que se dan condiciones para la posibilidad de la solución de un problema: "cuando digo a manera de hipótesis, entiendo el método ordinario de los geómetras. Cuando se les interroga sobre un espacio, por ejemplo, y se les pregunta si es posible inscribir un trián-

(45) Heath, T.L. A history of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. Volume I. 1981. Pág. 293.

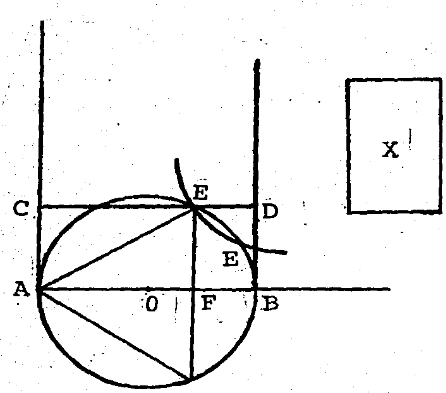
(46) Platón. Diálogos. Parménides o de las ideas. México. Editorial -- Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. Pág. 979. 1970.

gulo en un círculo, os responden: yo no sé si eso será posible, pero sentando la siguiente hipótesis, podrá servirnos para la solución del problema. Si esta figura es tal, que describiendo un círculo sobre sus líneas dadas, hay otro tanto espacio fuera del círculo como en la figura misma, resultará tal cosa, y otra cosa distinta, si esta condición no se llena, sentada esta hipótesis, consiento en decirte lo que sucederá con relación a la inscripción de la figura en el círculo, y si esta inscripción es posible o no". (47)

En el <u>Sumario Eudemiano</u> Proclo afirma que fue León, más joven que Platón, el que inventó los diorismos. Este pasaje del <u>Menón</u> nos indica que Proclo se equivocó.

La primera interpretación de lo que está refiriendo Platón en el pasaje fue dada por E.F. August en 1829. Independientemente la descubrió S.H. Butcher y es aceptada por Heath, de quien la he tomado (48). Es así:

"Si AB es el diámetro de un círculo con centro en O y E es un punto sobre la circunferencia, y son complementados los rectángulos ACEF y FBDE y son trazadas las cuerdas EFG y AG, entonces el rectángulo ACEF es "aplicado" a la línea recta AB y es "deficiente" en el rectángulo FBDE, el cual es similar al rectángulo "aplicado" porque (AF/FE)=(EF/FB). Aun más, AEG es un triángulo isósceles igual en área al rectángulo ACEF. Desde aquí, para inscribir en el círculo un triángulo isósceles igual a una área dada x, tenemos que

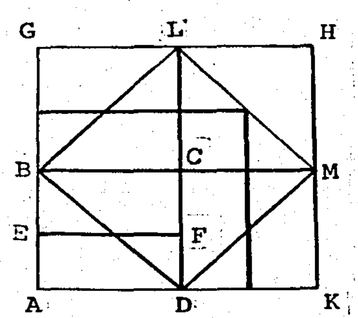


(47) Platón. <u>Diálogos.</u> El Menón. México. EDitorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 218.

(48) Heath, T.L. <u>A history of Greek Mathematics</u>. New York. Dover Publications, Inc. Vol. I. 1981. Pág. 301.

encontrar un punto E sobre la circunferencia del círculo tal que si EF es trazada perpendicular a AB, el rectángulo -- AF.FE= área dada x. Claramente E yace sobre una hipérbola rectangular de la cual AB y AC son asíntotas. Si b^2 es igual al área dada, la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas AB, AC como ejes de x, y es $xy= b^2$. Para la solución real es necesario que b^2 no sea mayor que el triángulo equilátero inscrito en el círculo, esto es, no mayor que - $(3\sqrt{3})(a^2/4)$ donde a es el radio del círculo. Si b^2 es igual que esta área, la hipérbola toca al círculo y existe una única solución. Si b^2 es mayor que esta área, la hipérbola no toca y no hay solución. Si b^2 es menor que esta área, la hipérbola corta al círculo en dos puntos E y E' dando dos soluciones." A estos hechos se refiere Platón en el Menón , en el párrafo dado.

En el otro pasaje del Menón , Sócrates afirma a Menón la imposibilidad de aprender y dice que todo lo que hace el hombre es recordar. Menón le pide que lo demuestre, y para tal cosa Sócrates le pide que llame a presencia de ellos a un esclavo. Se supone que el esclavo no sabe geometría. Sócrates lo interroga mediante una serie de preguntas cuidadosamente escogidas por él para hacerle reconocer que el doble del cuadrado sobre cualquier línea recta no es el cuadrado sobre el doble de la línea sino el cuadrado sobre la diagonal del cuadrado original, como se demuestra en la figura donde el cuadrado original es el cuadrado sobre AB, una línea de dos pies de longitud.



En *La República* en un pasaje al final del libro sexto ilustra como los geómetras parten del uso de hipótesis yendo a través del argumento hasta llegar a la conclusión que se desea demostrar. Al mismo tiempo enseña el papel que juegan las figuras al argüir acerca de ellas pero pensando solamente acerca de lo que representan y no acerca de las figuras mismas: "así es el cuadro mismo y el diámetro mismo los que son objeto de sus argumentos, no aquello que ellos trazan".(49)
Otro tema relacionado con Platón en geometría es el de los cinco sólidos regulares. Ya hemos visto que estas figuras son llamadas Platónicas porque Platón hace mención de ellas en el *Timeo* pero que los que trabajaron con ellas fueron Pitágoras y Teeteto. Sin embargo Arquímides es citado por Herón en su *Definiciones* diciendo que Platón "también conoció un sólido semiregular; la figura con catorce caras, de la cual hay dos clases, una hecha de ocho triángulos y seis cuadrados, de tierra y aire, ya conocida por los antiguos, y otra hecha de ocho cuadrados y seis triángulos, la cual parece más difícil". (50)
La primera clase de figuras de catorce caras se obtiene mediante un cubo al cual se le bisectan los lados de cada cara cuadrada, se unen los puntos medios de cada par de lados adyacentes y se obtiene en cada cara un cuadrado de la mitad del tamaño de la cara original del cubo; tres de los veinticuatro lados de todos esos cuadrados que están alrededor de un ángulo sólido del cubo forman un triángulo equilátero; hay ocho de esos triángulos equiláteros y si cortamos de las esquinas del cubo las ocho pirámides, que tienen a esos triángulos como base, tenemos el sólido semiregular descrito.

(49)Platón. *Diálogos*. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970.

(50)Heath, T.L. *A history of Greek Mathematics*. New York. Dover Publications, Inc. 1981.

Según Heath (51), la descripción del otro sólido semiregular es incorrecta. Hay otros dos sólidos semiregulares de catorce caras; en uno de ellos las catorce caras son ocho triángulos y seis octágonos, mientras que el otro tiene seis cuadrados y ocho exágonos.

La construcción de los cinco sólidos regulares la da Platón en el Timeo : "Empezaré por decirles que para todo el mundo es evidente que el fuego, la tierra, el agua y el aire son cuerpos. Todo lo que tiene la esencia del cuerpo tiene también la profundidad. Todo lo que contiene la profundidad contiene en si necesariamente la naturaleza de la superficie. Una base cuya superficie es perfectamente plana se compone de triángulos. Todos los triángulos toman su origen de dos triángulos que tiene cada uno un ángulo recto y los otros dos agudos. Uno de estos triángulos tiene en cada lado una parte igual de un ángulo recto formado por lados iguales; el otro, dos partes desiguales de un ángulo recto formado por lados desiguales....

De los dos triángulos de que hemos hablado, el isósceles no puede tener más que una sola forma, mientras que el alargado puede tener infinitas. Por esto debemos escoger el más bello entre esta multitud de triángulos si queremos empezar convenientemente. Si alguien puede enseñarnos uno más bello todavía que el que hemos escogido, nos sumaremos a su opinión como a la de un amigo y no de un enemigo. Declaramos, pues, que entre todos estos triángulos hay uno mucho más bello que los otros y es aquel del que se compone el triángulo equilátero, el tercero. ¿Porqué?. Sería demasiado largo de decir. Pero el que demuestre que estamos en un error, hallaría entre nosotros una favorable acogida. Quede pues establecido, que los triángulos de los cuales está formado el fuego y los otros cuerpos elementales son el isósceles y aquel en el -

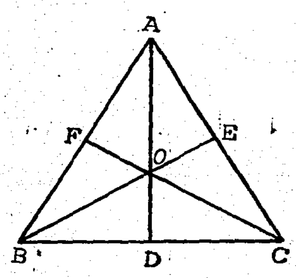
(51) Heath, T.L. A history of greek mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1981. Pág. 295.

cual el cuadrado del cateto mayor es triple del cuadrado del menor....

Para continuar nuestro discurso tenemos que explicar ahora cómo y por el concurso de que números está formado cada género. Empecemos por el primero cuya composición es la más sencilla y tiene por elemento el triángulo cuya hipotenusa es doble del cateto menor. Aproximad dos de estos triángulos siguiendo la diagonal, repetid tres veces esta operación de manera que todas las diagonales y todos los catetos menores concurran en un mismo punto que les sirva de centro común y tendreis un triángulo equilateral formado por seis triángulos particulares. Cuatro de estos triángulos equiláteros por la reunión de tres ángulos planos forman un ángulo sólido cuya magnitud aventaja a la del ángulo plano más obtuso, y cuatro de estos nuevos ángulos componen reunidos la primera especie de sólido que divide en partes iguales y semejantes a la esfera en que está inscrito. El segundo sólido se compone de los mismos triángulos reunidos en ocho triángulos equiláteros formando un ángulo sólido de cuatro ángulos planos; seis de estos ángulos constituyen este segundo cuerpo. El tercer sólido está formado de ciento veinte triángulos elementales, de doce ángulos sólidos rodeado cada uno de cinco triángulos equiláteros con veinte triángulos equiláteros por base. Este elemento no debe producir otros sólidos. Al triángulo isósceles es al que el pertenece el engendrar la cuarta especie de cuerpos. Cuatro de estos triángulos isósceles fueron juntados, los cuatro ángulos rectos unidos en un tetrágono regular; seis de estos tetrágonos equiláteros fueron aproximados de manera que formaron ocho ángulos sólidos compuestos de cada uno de tres ángulos planos rectos, y la figura obtenida por estas combinaciones fue el cubo, que tiene por bases seis cuadrados. Quedaba una quinta combinación de la que Dios se sirvió para trazar el plano del universo." (52)

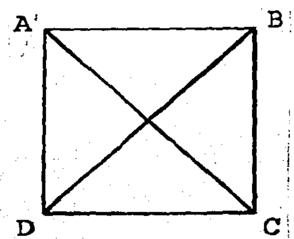
(52) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 689, 690, 691.

Platón pone en boca de Timeo de Locres este pasaje. Los dos triángulos a los que se refiere al inicio son el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo rectángulo escaleno respectivamente. El triángulo más bello entre todos los triángulos escalenos rectángulos al que se refiere Timeo es la mitad de un triángulo equilátero, cuyos lados están en la proporción 1, 3, 2. O dicho de otra forma, el triángulo que agregado a si mismo forma un tercer triángulo que sea equilátero. El primero sólido que Platón construye es el Tetraedro regular o pirámide que tiene cobase un triángulo equilátero. En la figura, junta los triángulos AOF y AOE por las diagonales que en este caso son las hipotenusas. Repite esta operación tres veces con los pares de triángulos BOF, BOD, COD y COE. Teniendo el punto O como vértice común, forma así, el triángulo equilátero ABC. Toma entonces cuatro de estos triángulos y forma el tetraedro; mediante la unión de tres vértices se forma el ángulo sólido constituido por los tres ángulos planos de



los vértices de los triángulos. La suma de los tres ángulos planos es de dos rectos ya que cada ángulo plano mide sesenta grados por ser equilátero el triángulo. "El ángulo más obtuso de los ángulos planos", sería pues, el ángulo que mide dos rectos. Debido a que cada triángulo equilátero ABC tiene seis triángulos escalenos elementales y hay cuatro triángulos equiláteros, tenemos que el tetraedro está compuesto por veinticuatro triángulos escalenos elementales.

El segundo sólido construido es el octaedro que queda constituido por cuarenta y ocho triángulos escalenos elementales, con ocho caras elementales, cada una de ellas un triángulo equilátero, y seis ángulos sólidos.
El tercer sólido es el icosaedro, con veinte caras, cada una de ellas un triángulo equilátero, y como Platón dice, ciento veinte triángulos escalenos elementales y doce ángulos sólidos formados por los vértices de cinco triángulos equiláteros.
El cuarto sólido construido es el cubo que es generado por el triángulo isósceles rectángulo. Siguiendo la figura, los triángulos isósceles rectángulos AOB, DOC, BOC y DOA son puestos de tal forma que tengan un vértice común, y formen un "tetrágono regular" (un cuadrado).



Se toman seis de estos cuadrados de tal forma que se obtienen ocho ángulos sólidos, cada uno con tres ángulos planos de medida un ángulo recto. Está pues, constituido por seis caras, cada una de ellas un cuadrado y por lo tanto construido por veinticuatro de los triángulos isósceles rectangulares.
Platón, más adelante, llama al tetraedro el elemento del fuego, al octaedro el elemento del aire, al icosaedro el elemento del agua y al cubo el elemento de la tierra.
El dodecaedro, quinto sólido, no es construido por Platón, pero hay evidencia de que los pitagóricos habrían conocido las propiedades del pentágono regular, elemento este, necesario para la construcción del dodecaedro. La evidencia está

dada en algunas figuras de forma dodecaedral que han llegado hasta nosotros desde antes de Pitágoras. Existe también el pasaje ya citado sobre Hipaso en el tema acerca de Pitágoras; ahí se nos dice que Hipaso "describe la esfera desde los doce pentágonos". La esfera sería el universo creado por Dios en la última cita del Timeo.

Acerca de los logros de Platón en aritmética también hay constancia en el Timeo. Por boca de Timeo: "Dios, al empezar a hacer el universo, comenzó por hacerlo de fuego y de tierra. Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera: es preciso que entre ellas haya un lazo que las una, y ninguna mejor que el que, con él mismo y con las cosas que une, hace un solo y mismo todo. Y la naturaleza de la proporción es tal, que logra perfectamente este objetivo, porque cuando de tres números o de tres masas o de tres fuerzas cualesquiera el primero es al del medio lo que este es al último y cuando, por otra parte, lo que el último es al medio es este al primero -el medio convirtiéndose en el primero y en último, y el primero y el último en medios-, todo permanece necesariamente como era, y como las partes están entre si en relaciones semejantes, constituyen como antes un solo uno. Si, por consiguiente, hubiera tenido que ser el cuerpo del universo una simple superficie y carecer de profundidad, un solo término medio habría sido suficiente para unir sus extremidades al unirse él mismo. Pero en el estado actual de las cosas, como convenía que el cuerpo del mundo fuera un sólido, y para unir sólidos son precisos no uno sino dos términos medios ..." (53)

En otras palabras, una media es suficiente para relacionar en proporción contínua dos números cuadrados, pero se requieren dos para relacionar números cúbicos. Las notas de Pláton son equivalentes a decir que $(a/ab)= (ab/b)$ y $(a/ab)= (ab/ab)= (ab/b)$ Las medias son medias geométricas y por "superficies" (planos) y "sólidos" Platón entiende, indudablemente, números cuadrados y cúbicos respectivamente. Los dos teoremas cita-

(53) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 672, 673.

dada en algunas figuras de forma dodecaedral que han llegado hasta nosotros desde antes de Pitágoras. Existe también el pasaje ya citado sobre Hipaso en el tema acerca de Pitágoras; ahí se nos dice que Hipaso "describe la esfera desde los doce pentágonos". La esfera sería el universo creado por Dios en la última cita del Timeo .

Acerca de los logros de Platón en aritmética también hay constancia en el Timeo . Por boca de Timeo: "Dios, al empezar a hacer el universo, comenzó por hacerlo de fuego y de tierra. Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera: es preciso que entre ellas haya un lazo que las una, y ninguna mejor que el que, con él mismo y con las cosas que une, hace un solo y mismo todo. Y la naturaleza de la proporción es tal, que logra perfectamente este objetivo, porque cuando de tres números o de tres masas o de tres fuerzas cualesquiera el primero es al del medio lo que este es al último y cuando, por otra parte, lo que el último es al medio es este al primero -el medio convirtiéndose en el primero y en último, y el primero y el último en medios-, todo permanece necesariamente como era, y como las partes están entre si en relaciones semejantes, constituyen como antes un solo uno. Si, por consiguiente, hubiera tenido que ser el cuerpo del universo una simple superficie y carecer de profundidad, un solo término medio habría sido suficiente para unir sus extremidades al unirse él mismo. Pero en el estado actual de las cosas, como convenía que el cuerpo del mundo fuera un sólido, y para unir sólidos son precisos no uno sino dos términos medios ..." (53)

En otras palabras, una media es suficiente para relacionar en proporción contínua dos números cuadrados, pero se requieren dos para relacionar números cúbicos. Las notas de Pláton son equivalentes a decir que $(a/ab)= (ab/b)$ y $(a/ab)= (ab/ab)= (ab/b)$ Las medias son medias geométricas y por "superficies" (planos) y "sólidos" Platón entiende, indudablemente, números cuadrados y cúbicos respectivamente. Los dos teoremas cita-

(53) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 672, 673.

dos están en VIII.11 y VIII.12 de Euclides: Entre dos cuadrados hay una media proporcional y entre dos cubos hay dos medias proporcionales respectivamente.

Nicomaco habla de estos teoremas diciendo que constituyen un teorema Platónico, pero tal vez lo diga, al igual que los sólidos regulares, porque aparecen en el Timeo .

Habíamos visto ya, en el tema referente a Pitágoras que a Platón se le asigna una fórmula para encontrar cualquier par de números cuadrados tales que su suma es un cuadrado, en lo que se refiere al Teorema de Pitágoras. La fórmula dada es: $(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2 + 1)^2$.

Hemos mencionado con anterioridad que Platón conoció los trabajos de Teodoro y de Teeteto cuando vemos que en el diálogo Teeteto Platón describe el teorema de Teodoro relativo a la inconmensurabilidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,...., $\sqrt{17}$ y da noticias de la generalización de esos inconmensurables por Teeteto. Sin embargo, parece que el conocimiento de Platón acerca de los inconmensurables no se reducía a estos dos hechos. En el diálogo Hippias Mayor Sócrates e Hippias discurren acerca de lo bello.

Hay dos preguntas de Sócrates a Hippias donde el primero afirma que la suma de irracionales es racional o irracional: ¿O bien acaso con lo bello sucede lo que con ciertas cosas, que tomadas conjuntamente son pares, y separadamente pueden ser pares o impares?, ¿o lo que con aquellas que separadamente no pueden enunciarse, y que, tomadas conjuntamente, tan pronto pueden enunciarse, tan pronto no; y así de otras mil semejantes que se me han presentado al espíritu?". (54)

Existen evidencias de que Platón está dando una aplicación de Euclides XIII-6, que se lee de la siguiente manera: "Si una línea recta racional es cortada en razón extrema y media cada uno de los segmentos es la línea recta irracional lla-

(54) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 246.

mada apotema".

Proclo afirma que Platón creó ciertos teoremas cuando consideraba la "sección"; no aclara cuál "sección", pero si es la "sección dorada" que es la división de una recta en "razón media y extrema", Platón habría conocido Euclides II-11 que es también Euclides VI-30 bajo otras palabras, y por lo tanto, Platón, en el diálogo con Hippias, habría tenido Euclides XIII-6 en mente ya que la inconmensurabilidad de los segmentos con la línea entera y con otra línea ya era conocida por los Pitagóricos.

En La República , Libro VIII, aparece un pasaje que tiene interés desde muy variados puntos de vista para la historia de las matemáticas griegas; hay lugar en el pasaje para el surgimiento de un número que se acostumbra llamar "número nupcial". El pasaje es el siguiente: "La raza divina tiene un ciclo comprendido por un número perfecto, pero el número del ciclo de las razas humanas es el primero en el cual la raíz y el cuadrado aumentan, formando tres intervalos y cuatro términos de elementos que hacen semejante y dessemejante y aumentar y disminuir, enseña todas las cosas convenidas y racionales hacia uno y otro. La base de esas cosas, el cuatro-tres unido con cinco, cuando tres veces aumentada provee dos armonías, la una un cuadrado, tantas veces un ciento, el otro un rectángulo, uno de sus lados es un ciento de los números de los diámetros racionales de cinco, cada uno disminuido por uno (o un ciento de los números de los diámetros irracionales de cinco, cada uno disminuido por dos), el otro lado es un ciento de los cubos de tres".

La interpretación de este pasaje es casi imposible. En los Diálogos de Platón de la editorial Porrúa (55), ni siquiera lo expresan argumentando que "aquí hay una frase sobre

(55) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 571.

este número geométrico, a la que parece imposible hallar sentido racional". Yo lo tomé de Ivor Thomas (56) y las notas siguientes vienen dadas ahí también, La parte del pasaje con interés matemático está en la parte más fácil de descifrar, la que habla acerca de las dos armonías. El "diámetro irracional de cinco" es la diagonal de un cuadrado de lado cinco, esto es, $\sqrt{50}$. El "diámetro racional de cinco" es el entero más cercano al "diámetro irracional", esto es, $\sqrt{50-1}$. El "número" desde el diámetro "racional" o "irracional" es el cuadrado. Un "ciento de los números del diámetro racional de cinco, cada uno disminuido por uno" es por lo tanto 100(49-1)= 4800; y el mismo número es expresado como un ciento de los números del radio irracional de cinco, cada uno disminuido en dos". Para este es 100(50-2)= 4800. Este número da un lado del oblongo y el otro es "un ciento de los cubos de tres", o (100)(27)= 2700. El rectángulo del cual esos son lados es por lo tanto (4800)(2700)= 12, 960, 000 y esto es $(3600)^2$ el cual es la otra "armonía". Esos diámetros "racional" e "irracional" son una clara referencia a los "números-lados" y "números-diámetros" de los Pitagóricos, los cuales son definidos por Teón de Smirna. Está plenamente convenido que el número geométrico es
12, 960, 000= $(3600)^2$= (4800)(2700) pero acerca del método por el cual este número es alcanzado existen profundas divergencias.

León.

Enseguida de Teeteto floreció León, quien fué discípulo de Neoclides.

No existe conocimiento, aparte de lo que dice Proclo de él en el "Sumario Eudemiano", de lo que hizo León en geometría. Además ya vimos que en el Menón hay un ejemplo de diorismo, lo que demuestra que Proclo se equivocó al asignar a León la invención de diorismos ya que Platón era más antiguo que León.

(56) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 399.

Eudoxo de Cnidos.

El siguiente en la lista es Eudoxo. Vivió alrededor de 408 a 355 A.C. Está considerado como uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos, aunque todos sus trabajos están perdidos. Diógenes Laerto describe una relación de los hechos más sobresalientes de su vida: "Eudoxo, hijo de Esquines, natural de Gnido, fue astrólogo, geómetra, médico y legislador. En la geometría fue discípulo de Arquitas y en la medicina, de Filistión como dice Calímaco en sus "Tablas". Soción en sus "Sucesiones" dice que también oyó a Platón. Que siendo de veintitres años de edad, y viéndose constituido en suma estrechez, movido de la celebridad del nombre socrático, partió a Atenas con Teomedonte, médico, el cual lo mantenía, y aun hay quien lo haga su bardaja. Desembarcó y se alojó en el Pireo, desde donde subía diariamente a la ciudad; y después de haber oído en ella a los sofistas, regresaba. Habiendo estado ahí dos meses, volvió a su casa, de donde, socorrido por sus amigos, se fue a Egipto con Crisipo, médico, llevando cartas de favor a Agesilao para Nectarabis, el cual lo recomendó a los sacerdotes. Que habiendo permanecido ahí un año y cuatro meses, se rayó la primera barba y las cejas, y escribió según algunos, un "Octaérides". Pasó de ahí a Czico y Propóntide a profesar la filosofía; de ahí se fue a visitar a Mausolo; y de allá regresó a Atenas acompañado de un gran número de discípulos, sólo para dar envidia a Platón, como quieren algunos, porque en sus principios lo había despedido. Algunos dicen que celebrando Platón un convite, como fuesen muchos los convidados, introdujo poner los tridenios en medio círculo. Nicomaco, el hijo de Aristóteles, dice que Eudoxo llamó bien al deleite. Fue recibido en su patria con sumo honor, como consta por el decreto que de él dió; ni fue menos celebrado entre los griegos. Escribió "Leyes" a sus conciudadanos, como dice Hermipo en su Libro IV de <u>Los Siete Sabios</u> ; "Tratados de Astro-

logía", "De Geometría" y algunas otras cosas excelentes. Tuvo tres hijas: Actis, Filtis y Delfis.
Eratóstenes, en sus libros a Batón, dice que Eudoxo compuso "Diálogos Cínicos". Otros sienten que los habían escrito los egipcios, y que él no hizo más que traducirlos al griego. Crisipo Cnidio, hijo de Erineo, oyó de él lo que escribió acerca de los dioses, del mundo y de los meteoros.
En la medicina fue discípulo de Filistión y dejó bellísimos comentarios. Fue hijo suyo Aristógaras, cuyo discípulo fue Crisipo, hijo de Aetilio, del cual quedan escritos médicos acerca de los ojos, compuestos accidentalmente mientras estaba meditando en cosas naturales. Según las "Crónicas" de Apolodoro floreció hacia la Olimpiada CIII y que inventó lo que pertenece a las líneas curvas. Murió a los cincuenta y tres años de edad. Cuando estaba en Egipto con Iconufi, Apis le lamió en derredor todo el palio; de lo cual agoraron los sacerdotes que sería un hombre sabio pero de vida corta. Así lo dice Favorino en sus "Comentarios". Por lo célebre de su fama y nombre fue llamado Endoxon que quiere decir célebre, famoso, glorioso. Escribió un libro que se llama "Circunferencia de la tierra" ". (57)
A esta biografía de Eudoxo por parte de Diógenes Laerto, algunas pocas cosas se pueden agregar. Strabo asegura que el viaje a Egipto fue hecho junto con Platón. Aristóteles dice que en astronomía realizó varios descubrimientos y que hizo una clase de "orreri" (58). Un poema de Arato está basado sobre un trabajo de astronomía.
El "Sumario Eudemiano" nos dice de él: "un poco más joven que León y un miembro de la escuela de Platón; fue el primero en incrementar el número de los llamados teoremas genera-

(57) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1329, 1330.

(58) Aparato que mide las posiciones relativas y movimientos de cuerpos en el sistema solar mediante bolas que son movidas por un mecanismo de ruedas.

les; a las tres proporciones agregó otras tres e incrementó el número de teoremas acerca de la sección, que tuvieron su origen en Platón, aplicando el método de análisis a ellos".(59) Acerca de cuáles son los teoremas generales sólo se puede hacer conjeturas. Por la "sección dorada" generalmente se entiende la división de una recta en razón extrema y media, como en Euclides II-11 y VI-30.

Hay algunos como Tannery que prefieren entender como la "sección" a la sección obtenida por planos en figuras sólidas, como por ejemplo en el caso de las secciones cónicas.

Aparte de lo que dice Proclo acerca de las proporciones existe también una scholia al Libro V de Euclides que nos dice que ahí está contenida toda la teoría general de la proporción, que se aplica a todas las ciencias matemáticas y que es debida totalmente a Eudoxo. (60)

En el prefacio al Libro I de Sobre la esfera y el cilindro de Arquímides, éste asegura que Eudoxo demostró los teoremas acerca del volumen del cono y de la pirámide; y del prefacio a "Cuadratura de la parábola", del mismo Arquímides, puede ser inferido que Eudoxo usó para la prueba un lema equivalente a Euclides X-1. A partir de esto puede ser asignado a Eudoxo el método de exhaución.

En los Comentarios de Simplicio al De Caelo de Aristóteles, se encuentra la relación más detallada del sistema de las esferas concéntricas. La potencia de la hipótesis de Eudoxo acerca de que el movimiento circular era suficiente para relacionar los movimientos de todos los cuerpos celestes marca un punto de vista que prevaleció hasta poco antes de Kepler. Simplicio toma la relación del sistema de Eudoxo de Sosígenes el Peripatético (Siglo II,D.C.) quien a su vez lo

(59) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 151, 152.

(60) Ibidem. Pág. 409.

toma de la Historia de la Astronomía de Eudemo.

Dos, pues, son los trabajos principales de Eudoxo en matemáticas:

a) La teoría de la proporción. Y,

b) El método de exhaución.

Como una muestra del genio de Eudoxo exponemos su trabajo sobre las esferas concéntricas.

La teoría de la proporción.

El descubrimiento de los irracionales hizo que la teoría de la proporción pitagórica, fuera insuficiente para la demostración de teoremas que involucraban proporciones. Esto paralizó por un tiempo el desarrollo de la matemática griega ya que la teoría pitagórica era solamente de caracter aritmético y servía nada más que para cantidades conmensurables. Las razones inconmensurables ocurrieron en argumentos geométricos, mientras que los números enteros y razones entre números enteros ocurrieron solamente en aritmética y en el estudio general de cantidad. El problema era pues, dar pruebas en geometría hechas para longitudes, áreas y volúmenes inconmensurables.

Eudoxo define primero una magnitud, luego una razón y enseguida una proporción de manera tal que abarcaba razones conmensurables e inconmensurables, pero no como números sino en relación con la geometría. La forma en que lo hace está asentada en las definiciones 3, 4 y 5 de Euclídes V, en las cuales define razones y proporciones. Lo que entiende por magnitud no era un número sino un concepto aplicable a segmento de línea, ángulos, áreas, volúmenes y tiempos, los cuales podrían variar de una manera, como se diría ahora continuamente. La definición 4 de Euclides V es en realidad el "principio de Arquímides": "dícese que dos magnitudes tienen razón entre si, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra". Y Arquímides mismo se la atribuyó a Eudoxo. Este concepto de razón excluye al cero y da cla ridad acerca de lo que debe entenderse por magnitudes de la misma clase. Por ejemplo, un segmento de línea no debe, ni puede, ser comparado, cuando se habla de razones, con una área o volumen. Ahora bien, dos magnitudes son inconmensurables cuando ellas no tienen una razón tal como un número entero la tiene a un número entero. El problema es comparar razones de magnitudes inconmensurables. Si Hipócrates probó que las áreas de círculos son una a otra como los cuadrados sobre sus diámetros, él habría tenido forma de trabajar la igualdad de razones. Parece que los griegos habían hecho uso de la idea de que cuatro cantidades están en la misma proporción $(a/b)= (c/d)$ si las dos razones a/b y c/d tienen la misma mutua sustracción. Esto es, el más pequeño en cada razón puede ser obtenido del grande el mismo número entero de veces, y el residuo en cada caso puede ser obtenido del más pequeño el mismo número entero de veces, y el nuevo residuo puede ser sacado del primer residuo el mismo número entero de veces, y así sucesivamente.

Eudoxo propone, en lugar de eso: "Dícese que la razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales, o al mismo tiempo son inferiores que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas". (61)

En la terminología actual $(a/b)= (c/d)$ si y solo si dados enteros m y n se cumple que: si $ma > nb$ entonces $mc > nd$, o si $ma= nb$ entonces $mc= nd$, o si $ma < nb$ entonces $mc < nd$.

La definición de Eudoxo no es diferente del proceso de multiplicación en cruz que es usado hoy par fracciones: $(a/b)= (c/d)$ si y solo si $ad= bc$. Un proceso equivalente a una reducción a un denominador común. Para demostrar que $(3/6)= (4/8)$, por ejemplo, multiplicamos 3 y 6 para obtener 12 y 24; y multiplicamos 4 y 8 por 3 obteniendo el mismo par de números 12 y 24. Se pueden usar 7 y 13 como multiplicado-

(61) Heath, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements. Libro V. Definición 5. New York. Dover Publications, Inc. 1956.

res obteniendo el par 21 y 42 en el primer caso y 52 y 104 en el segundo; y así como $21 < 52$ así lo es 42 a 104. (Se ha intercambiado el segundo y el tercer término en la definición de Eudoxo para conformarla a las operaciones comunes como hoy se usan, pero relaciones similares se usan en uno u otro caso).

Este ejemplo numérico no hace justicia a la eficacia del pensamiento de Eudoxo porque la aplicación aquí parece ser trivial. Para una mejor apreciación de su definición se puede reemplazar a, b, c y d por segmentos, o sean a y b esferas y, c y d cubos sobre los radios de las esferas. Aquí, una multiplicación en cruz tiene poco significado, y la aplicabilidad de la definición no es tan obvia.

La definición separa la clase de los números racionales m/n en dos categorías, de acuerdo a que $ma \leq nb$ o $ma > nb$. Debido a que hay una cantidad infinita de racionales, los griegos se vieron llevados al concepto de conjunto infinito, concepto que deseaba evitar; pero al menos fue posible dar pruebas satisfactorias de teoremas que involucraban proporciones. La definición de razones iguales dada por Eudoxo corresponde exactamente a la teoría de los irracionales de Dedekind y es palabra por palabra la definición de números iguales que da Weierstrass.

El método de exhaución.

Con respecto al método de exhaución de Eudoxo, los libros de Arquímides son ricos en citas que nos dan una idea del trabajo realizado por gran matemático de Cnido. Algunas de ellas son las siguientes:

En <u>Sobre la esfera y el cilindro</u> en el prefacio al Libro I, vemos lo siguiente: "por esta razón no puedo sentir duda en establecer esos teoremas lado por lado ambos con las investigaciones de otros geómetras y con aquellos de los teoremas de Eudoxo sobre sólidos, los cuales parecen apuntar preminentemente, a saber, que cualquier pirámide es una tercera parte del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura y que cualquier cono es una tercera parte del cilindro que tiene la misma base del cilindro e igual altura; porque aunque esas propiedades estaban inherentes naturalmente en esas figuras todavía fueron desconocidas a los muchos competentes geómetras que vivieron antes de Eudoxo y no habían sido notadas por nadie".

Respecto a esos teoremas, en su prefacio al Método, Arquímides dice: "no poco crédito debe ser dado a Demócrito, - quien fue el primero en hacer la afirmación con respecto a las figuras dichas, pese a que sin prueba".

En el prefacio a la Cuadratura de la parábola nos dice la forma en que estos teoremas fueron demostrados: "Si dos espacios son desiguales es posible agregar su diferencia a él mismo tan seguido que cada espacio finito puede ser sobrepasado. Geómetras antiguos han usado este lema; porque por medio de él probaron que círculos tienen uno a otro la razón duplicada de sus diámetros; aún más, que cualquier pirámide es la tercera parte de un prisma el cual tiene la misma base y altura que la pirámide y que cualquier cono es la tercera parte de un cilindro de la misma base y altura del cono".

Anaxágoras y Demócrito sostuvieron que las magnitudes matemáticas son divisibles hasta el infinito. Zenón, con cuatro paradojas, impugna tal afirmación. Antifón acertó cuando pensó exhaustar el área del círculo doblando continuamente el número de lados en series de polígonos regulares inscritos en el círculo, pero no dió una respuesta suficiente a los argumentos de Zenón. Demócrito mismo se enfrentó a la dificultad encerrada en la suposición de infinitesimales. La respuesta la dió Eudoxo. Veamos en que consistía el problema.

La Dicotomía y el Aquiles de Zenón niegan la posibilidad de movimiento si se utiliza la hipótesis de la divisibilidad de magnitudes hasta el infinito.

En la Dicotomía, Zenón arguye que no hay movimiento ya que lo que se mueve cualquier distancia debe llegar primero a la mitad de su curso antes de llegar al punto final; pero antes tuvo que llegar a la mitad de la primera mitad antes y así hasta el infinito; por lo tanto el movimiento no puede comenzar.

El Aquiles nos dice que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga ya que debe alcanzar antes el punto en el cual estaba antes la tortuga; cuando él hizo eso, la tortuga ya está un poco más adelante, y el mismo argumento se aplica hasta el infinito.

Las otras dos, la flecha y el estadio están bajo la hipótesis opuesta de que el espacio y el tiempo no son infinitamente divisibles sino que están compuestos de elementos indivisibles.

La flecha en movimiento, en algún instante indivisible estará en reposo o en movimiento. La flecha no puede moverse en el instante, supuestamente indivisible, porque si cambiara de posición, el instante quedaría dividido. Si no está en movimiento en el instante, ella estaría en reposo, y como el tiempo está hecho de tales instantes, permanecería siempre en reposo.

El estadio es más complicado, pero viene a ser la misma cosa; bajo la hipótesis de movimiento relativo, se prueba que un instante, supuesto para ser indivisible, estaría actualmente dividido.

Los cuatro argumentos juntos constituyen un dilema completo. Arquímides nos dice que la respuesta la dio Eudoxo, resolviendo la crisis de la geometría en la que fue sumida por las paradojas de Zenón. Vimos ya que Demócrito conoció los teoremas acerca del volumen de la pirámide y del cono pero que no dió prueba y que la demostración es atribuida a Eudoxo. En base a Arquímides, Eudoxo argumenta que no es necesario suponer la existencia de lo infinitamente pequeño, sino que para los propósitos matemáticos era suficiente suponer que por división contínua de una magnitud se puede llegar a una magnitud tan pequeña como se desee. Tal afirmación está dada por el lema proporcionado en el prefacio a la Cuadratura de la parábola . Este lema, actualmente es conocido como el "axioma de Arquímides" y es equivalente a Euclides V, definición 4, ya citada. De todo esto se puede concluir que Eudoxo inventó el método de exhaución que es usado por Euclides para probar proposiciones referidas a áreas de círculos y volúmenes de esferas, pirámides y conos. El axioma de Arquímides, es usado por Euclides para probar, por reducción al absurdo, la proposición X-1, que fue la base del método griego de exhaución.

No sabemos de que manera Eudoxo llegó al método, que no era conocido por ese nombre en la antigüedad; el nombre le fue dado actualmente; y hay muchas especulaciones acerca de ello.

Ya vimos que Arquímides atribuye a Eudoxo la demostración del volumen de la pirámide y del cono, que son Euclides - XII-7, corolario I, y Euclides XII-10 respectivamente. Es entonces muy probable que Eudoxo haya demostrado Euclides XII-2, que es el primer teorema dedicado a la magnitud de figuras curvilíneas, y exhibe una utilización del método en su demostración. Euclides XII-2 marca a Eudoxo como el aparente originador del cálculo integral.

En la última cita, Arquímides nos dice que "geómetras griegos han usado este lema; porque por medio de él probaron qué círculos tienen uno a otro la razón duplicada de sus diámetros". Sin embargo ya dijimos antes, que Eudemo atribuye a Hipócrates de Quíos la demostración de tal cosa. No hay duda que Eudemo en este punto se equivocó. Hipócrates en alguna forma se quedó corto ante el pleno método de exhaución. Tal vez procedió bajo la línea del intento de cuadraturas de Antifón,"exhaustando "gradualmente los círculos, y entonces "tomó el límite" sin asegurar bien la prueba por reducción al absurdo.

Hipótesis de las esferas concéntricas.
Séneca nos dice que Eudoxo llevó los conocimientos del movimiento de los planetas desde Egipto a Grecia. Tal cosa es probable ya que efectivamente sabemos, por Diógenes Laerto, que Eudoxo estudió en Egipto, que en ese tiempo, era una potencia en astronomía. Simplicio, basándose en Eudemo, nos dice que Platón puso a los astrónomos el problema de encontrar cuáles son los movimientos uniformes y ordenados que "salvarán el fenómeno" de los movimientos planetarios; Eudoxo creyó que el movimiento del sol, de la luna y de las estrellas podía ser relacionado por medio de una combinación de movimientos circulares. Este punto de vista fue el dominante hasta antes de Kepler y fue el primer intento de dar una explicación científica de las aparentes irregularidades de los movimientos de los planetas. En sus comentarios a _De Caelo_ de Aristóteles, Simplicio nos expone el trabajo de Eudoxo: "La tercera esfera, la cual tiene sus polos sobre el gran círculo de la segunda esfera pasando a través del medio de los signos del zodíaco, y la cual turna de sur a norte y de norte a sur, llevará alrededor con ella la cuarta esfera, la cual tiene el planeta asignado, y será más aún la causa del movimiento latitudinal del planeta. Pero no la tercera esfera solamente; porque tan lejos como ella fuera sobre esta esfera solamente, el planeta alcanzaría los polos del círculo zodiacal y podría tener trazado cerca a los polos del universo; pero como la cuestión es, la cuarta esfera la cual gira alrededor de los polos del círculo inclinado que lleva el planeta y rota en sentido opuesto al tercero, esto es, de este a oeste, pero en el mismo período, prevendrá alguna desviación excesiva (del planeta) desde el círculo a través de la mitad de los signos del zodíaco y constreñirá al planeta a describir alrededor del mismo círculo zodiacal la curva llamada por Eudoxo "hippopede" ("caballo-traba") tal que la anchura de esta curva mide el aparente-

movimiento latitudinal del planeta, un punto de vista por el cual Eudoxo fue atacado".

T.L. Heath, en Aristarco de Samos expone la siguiente idea acerca de este trabajo: "Para el sol y la luna, las hipótesis de Eudoxo bastan para explicar suficiente y adecuadamente los fenómenos principales, excepto las irregularidades debidas a las excentricidades, las cuales fueron desconocidas o descuidadas por Eudoxo. Para Júpiter y Saturno, y en algún grado para Mercurio, también el sistema era capaz de dar explicación satisfactoria de su movimiento en longitud, sus puntos estacionarios y sus movimientos de retroceso; para Venus no era satisfactorio y fallaba así mismo en el caso de Marte. Los límites de movimientos en latitud representados por las varias hippopedes estaban en concordancia tolerable con hechos observados, pese a que los períodos de sus desviaciones y sus lugares en el cielo eran bastante equivocados. Pero no obstante las imperfecciones del sistema, no podemos sino reconocer en ella, una actividad especulativa que era digna de la gran reputación de Eudoxo".

A los lectores interesados en este tema se les recomienda el libro de Schiaparelli, "Le sfere ornocentriche di Eudosso, di Callipo e di Aristotele" (Milán 1875), y los trabajos de Heath (A history Greek mathematics, Volumen I).

La curva de Eudoxo utilizada en su hipótesis tiene la forma de un ocho acostado. Proclo la llamó "espiral" y tiene varias citas interesantes sobre su origen. No es sabido que Eudoxo le haya dado otro uso que el que le dio en la descripción de movimientos planetarios.

Amiclas de Heraclea.

Poco se sabe de Amiclas (62), salvo lo que nos informa el "Sumario Eudemiano" y lo que nos dice de él Diógenes Laerto.

(62) Ivor Thomas, sin referir cuál es su fuente, dice que el nombre correcto es Amintas.

En base al "Sumario" tenemos que fue amigo de Platón y que junto con Menaechmo y Dinostrato "hicieron a la geometría más perfecta". Diógenes Laerto, citando a Aristojeno, habla de un "Pitagórico de nombre Amiclas que impidió que Platón quemara escritos de Demócrito aduciendo que no tenía caso porque esos escritos andaban ya en manos de muchos". (63)

Tedio de Magnesia y Hermotimo de Colofón.
No se sabe cosa alguna de ellos, excepto lo que dice el "Sumario Eudemiano". (64)

Menaechmo.
Fue originario de Suidas y discípulo de Eudoxo, y según el gramático Sereno fue maestro de Alejandro el Grande. De Menaechmo se cuenta una anécdota acerca de qué camino es más corto en geometría que el de los "Elementos". Menaechmo contesta que no hay camino real. Esta anécdota también es referida en relación con Euclides y Ptolomeo I.
De su trabajo en geometría, Proclo, en <u>Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides</u> y en <u>Comentarios al Timeo de Platón</u>, nos proporciona algunos datos referentes a lo que hizo.

a) En el "Sumario Eudemiano" lo cita, junto con Amiclas y Dinostrato diciendo que hicieron más perfecta a la geometría. (65)
b) Discutió los dos diferentes significados de la palabra "elemento".
c) Discutió la división de las proposiciones matemáticas en teoremas y problemas.

(63) Laerto , Diógenes. <u>Biógrafos Griegos</u>. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1339.
(64) Ver Capítulo III.
(65) Ver Capítulo III.

En base al "Sumario" tenemos que fue amigo de Platón y que junto con Menaechmo y Dinostrato "hicieron a la geometría más perfecta". Diógenes Laerto, citando a Aristojeno, habla de un "Pitagórico de nombre Amiclas que impidió que Platón quemara escritos de Demócrito aduciendo que no tenía caso porque esos escritos andaban ya en manos de muchos". (63)

Tedio de Magnesia y Hermotimo de Colofón.
No se sabe cosa alguna de ellos, excepto lo que dice el "Sumario Eudemiano". (64)

Menaechmo.
Fué originario de Suidas y discípulo de Eudoxo, y según el gramático Sereno fue maestro de Alejandro el Grande. De Menaechmo se cuenta una anécdota acerca de qué camino es más corto en geometría que el de los "Elementos". Menaechmo contesta que no hay camino real. Esta anécdota también es referida en relación con Euclides y Ptolomeo I.
De su trabajo en geometría, Proclo, en Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides y en Comentarios al Timeo de Platón, nos proporciona algunos datos referentes a lo que hizo.

a) En el "Sumario Eudemiano" lo cita, junto con Amiclas y Dinostrato diciendo que hicieron más perfecta a la geometría. (65)
b) Discutió los dos diferentes significados de la palabra "elemento".
c) Discutió la división de las proposiciones matemáticas en teoremas y problemas.

(63) Laerto, Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1339.
(64) Ver Capítulo III.
(65) Ver Capítulo III.

d) Le asigna el descubrimiento de las secciones cónicas. (66).
e) Proclo dice que Menaechmo resolvió el problema de la duplicación del cubo. Eutocio en sus Comentarios a la esfera y el cilindro de Arquímides, respalda la afirmación de Proclo.
   De otras fuentes sabemos que intentó la cuadratura del círculo por medio de la cuadrática de Hippias. (67)

Acerca de c). Proclo dice que las deducciones hechas a partir de los primeros principios se dividen en teoremas y en problemas, y comenta que entre los antiguos no había un criterio unificado respecto a estos dos términos. Cita dos puntos de vista, uno dado por Speussipo y Amfinomo, y el otro por Menaechmo y los matemáticos de su escuela.
Speussipo y Amfinomo aseguraban que todas las deducciones hechas a partir de los primeros principios debían llamarse teoremas; en cambio Menaechmo y sus seguidores a todas esas deducciones les llaman problemas y los clasifican en dos tipos. 1) Los que proveen la cosa buscada y, 2) los que toman un objeto determinado y ven de qué naturaleza es o qué propiedades tiene o en qué relación el objeto apunta a alguna cosa.
Proclo no da un nombre a cada uno de estos dos tipos en que Menaechmo divide a los problemas, pero a la luz de las proposiciones en los "Elementos" de Euclides, donde un problema se refiere a una construcción y un teorema a algo que hay que probar, podemos ver que para Menaechmo 1) es referido a un problema y 2) a un teorema.

(66) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 155.

(67) Ibidem. Pág. 157, 158.

Por otro lado Proclo comenta la clasificación que da Gémino de las líneas; estas son divididas en "compuestas" e "incompuestas".

Las "compuestas" son las quebradas y las que forman un ángulo; estas son divididas en las que forman una figura y las que son producidas hasta el infinito; entre las que forman una figura están el círculo, la elipse y la cisoide, entre las segundas están la sección del cono rectángulo (parábola), la sección del cono obtusángulo (hipérbola), la conchoide, la recta, etc.

Las líneas "incompuestas" son divididas en "simples" y "mixtas".

Las "simples" forman una figura, como la circular, y otras no, son "indefinidas", como la recta. Las "mixtas" se dividen en las que están en planos y en las que están en sólidos; a su vez, de las que están en planos, unas se cortan a si mismas, como la cisoide y otras se producen hasta el infinito. Las "mixtas" que están en sólidos unas son obtenidas a partir de secciones de sólidos y las otras son trazadas alrededor del sólido; como ejemplo de esta última está la hélice, mientras que las secciones cónicas y la espiral se obtienen de secciones de cónicas. Gémino agrega que "las cónicas fueron concebidas por Menaechmo, mientras que las espirales las concibió Perseo" (68). Gémino termina diciendo que las tres secciones del cono son la parábola, la hipérbola y la elipse, mientras que hay tres clases de espirales: una parecida a la hippopede (69), entrelazada, otra dilatada en el medio y estrecha en las extremidades y la última estrecha

(68) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin. University Press Series. 1889. Pág. 156.

(69) Ver el tema Eudoxo, Pág. 91.

en el medio y dilatada en los extremos.

Vemos pues, que las cónicas fueron inventadas por Menaechmo. Hay noticias de que Demócrito cortó un cono mediante un plano paralelo a la base (70), pero fue Menaechmo el primero que tomó las tres clases de conos rectos dados por Gémino arriba (71) y que los cortó por planos con uno de sus lados. Los nombres de las secciones cónicas no fueron inicialmente, con Menaechmo, parábola, hipérbola y elipse sino que las denominó sección-ángulo recto, sección-ángulo obtuso y sección ángulo agudo respectivamente. Aquellos nombres fueron dados por Apolonio de Perga, un siglo más tarde (72). Hay evidencia, sin embargo, de que para considerar esas curvas, no siempre usó el cono sino que también utilizó aparatos mecánicos para trazarlas. Esto puede ser deducido de lo siguiente: En relación con el problema de la duplicación del cubo, del cual ya hemos hablado con anterioridad (73), existe una carta de Eratóstenes dirigida a Ptolomeo III en la que le informa que Arquitas de Tarento y Eudoxo resolvieron el problema dando demostración satisfactoria pero que sus métodos fueron imposibles de aplicar en la práctica, mientras que la solución de Menaechmo, salvo por algunos detalles y con dificultad, si era posible aplicar en la práctica. (74)

Esto es, pues, Menaechmo dio solución al problema de la duplicación del cubo; de esto también proporciona una nota Proclo en sus Comentarios sobre el Timeo de Platón. (75)

Tenemos noticias de que aparte de la solución sugerida por Eratóstenes y Proclo, Menaechmo presentó otra solución. Ambas soluciones son atribuidas a éste último por Eutocio (76).

(70) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 81.

(71) Arriba hace falta el cono acutángulo que genera a la elipse.

(72) Gow, James. A short history of Greek Mathematics. New York. Hafner. 1968. Pág. 186.

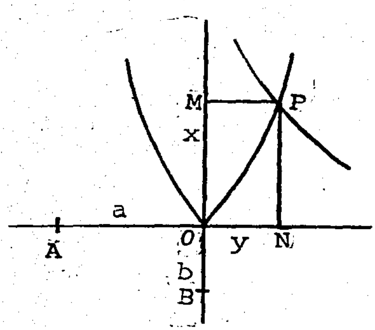
(73) Páginas 61, 62, 63.

(74) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 158.

(75) Ibidem.

(76) Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of greek mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957. Pág. 279.

Pero Plutarco afirma (77) que Platón censuró a Arquitas, Eudoxo y a Menaechmo por "intentar reducir la duplicación del cubo a dispositivos instrumentales y mecánicos". Y la primera aparición de las secciones cónicas y sus propiedades está dada en las soluciones de Menaechmo. Por lo tanto se puede concluir que no siempre usó el cono para el trazado de las curvas, sino que también utilizó medios mecánicos.
Las soluciones atribuidas por Eutocio a Menaechmo están asentadas en el libro de Eutocio <u>Comentarios sobre la esfera y el cilindro de Arquímides</u> .
Ya habíamos visto que el problema de duplicar el cubo fue reducido al problema de encontrar dos medias proporcionales x, y entre dos segmentos a y b; esto es, encontrar números x, y, que con respecto a a y b cumplan $(a/x)=(x/y)=(y/b)$.
Menaechmo supone resuelto el problema.
Solución I. Sea a= longitud de AO, b= longitud de BO. Sea AO mayor que BO. Coloquémoslas formando ángulo recto. Prolonguemos AO y BO por O. Sean OM, medida a lo largo de BO, y ON, medida a lo largo de AO, dos medias proporcionales, con x= longitud de OM, y= longitud de ON. Completemos el rectángulo ONPM. Entonces obtenemos que



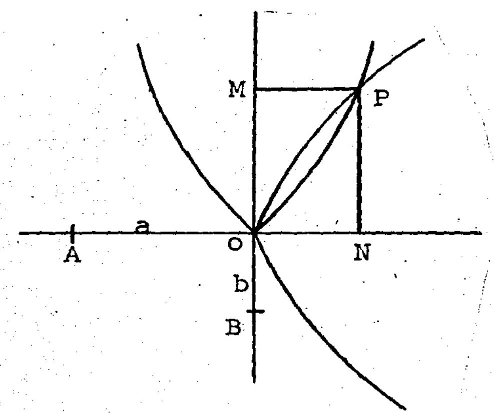
(AO/OM)= (OM/ON)= (ON/BO) implica a 1) $BO.OM=ON^2=PM^2$. Esto es $ab=y^2$. Por lo tanto P yace en una parábola con O como vértice, OM por eje y OB por lado recto.
y 2) AO.BO= OM.ON= PM.PN, esto es, ab=xy. Por lo tanto P yace sobre una hipérbola con centro en O y asíntotas OM y ON. Tal

(77) Allman, George Johnston. <u>Greek Geometry from Thales to Euclid</u>. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 159.

hipérbola tiene la particularidad de que el rectángulo determinado por las rectas PM y PN, trazadas desde cualquier punto P de la curva paralela a una asíntota y cortando a la otra, será igual a AO.OB. Si luego trazamos las dos curvas, de acuerdo con los datos, determinaremos el punto P en la intersección de ellas. Entonces se verá cumplido que
$(AO/PN)= (PN/PM)= (PM/OB)$, esto es, $(a/x)= (x/y)= (y/b)$; por lo que el problema ha sido resuelto.

Solución 2). Tomamos la parábola de la solución anterior, esto es, la parábola que tiene vértice en O, eje OM y BO como lado recto.

Trazamos otra parábola con O como vértice, eje ON y AO como lado recto. Estas dos parábolas determinan el punto P como su intersección. El punto P cumple con: 1) $AO.ON= OM^2= PN^2$ y 2) $OB.OM= ON^2= PM^2$, por estar en las dos parábolas. Por lo tanto $(AO/OM)= (OM/ON)= (ON/OB)$ lo que quiere decir que OM y ON son las medias proporcionales entre AO y BO que se buscaban.



Las dos soluciones indican que Menaechmo tenía en su poder un conocimiento considerable acerca de las cónicas; por lo tanto no es sorprendente que, un poco más tarde, Aristaeo, escribiera unos <u>Elementos de las secciones cónicas</u> en cinco libros, de los cuales, según Papo, se sirvió Euclides para escribir un tratado sobre secciones cónicas. (78)

(78) Según Papo el tratado fue llamado "Cónicas", dividido en 4 libros.

Parece ser que la razón por la que los libros de Aristaeo y El Tratado de Euclides, desaparecieron es la misma por la que desaparecieron los Elementos anteriores a Los Elementos de Euclides: fueron rápidamente sustituidos por las "Cónicas" de Apolonio.

Dinostrato.

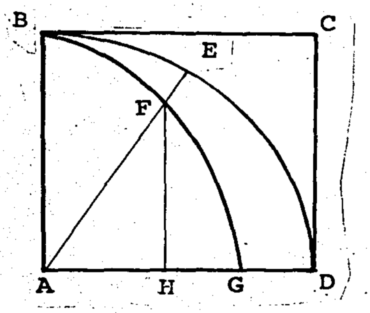
Sólo un dato de la vida de Dinostrato ha llegado hasta nosotros y es dado por Proclo en el "Sumario Eudemiano": "Amiclas de Heraclea, uno de los amigos de Platón y Menaechmo, discípulo de Eudoxo, quien era asociado de Platón y su hermano Dinostrato hicieron a la geometría más perfecta".

Acerca de su trabajo, Papo, en su Colección (79) nos informa: "Para cuadrar el círculo Dinostrato, Nicomedes y otros geómetras más recientes usaron una cierta línea curva, la cual toma su nombre de su propiedad especial; es llamada por ellos la cuadrática, y es generada en esta forma". Papo proporciona la manera en que es generada la cuadrática, la propiedad de la que recibió su nombre y la demostración de que tiene esa propiedad. Sin embargo Papo no menciona a Hippias de Ellis, de quien se ha demostrado que fue el inventor de la curva. (80)

La manera en que es generada la curva es la siguiente: Se da un cuadrado ABCD. Con centro en a y radio AB describimos el arco BED. Se va bajando BC, siempre paralelo a AD, al mismo tiempo AB va girando, con B sobre el arco BED y A fijo, desde la posición AB hasta la posición AD. BC y AB coincidirán a la vez con la recta AD. El punto donde se cortan BC y AB irá describiendo una curva BFG; esta curva es la cuadrática de Hippias.

(79) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 180.

(80) Heath, T.L. A history of Greek Mathematics. Volume I. New York. Dover Publications, Inc. 1981. Pág. 225, 226.

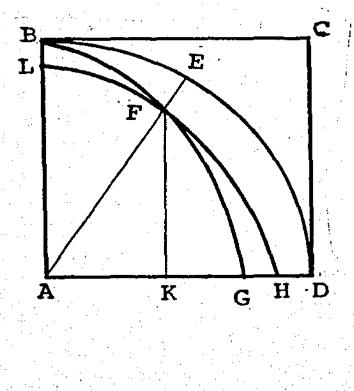


Si trazamos una recta cualquiera desde A al arco BED, por ejemplo AFE, encontramos que la razón del arco BED al arco ED será igual a la razón de la recta BA a la recta FH, esto es,
(BED/ED)= (BA/FH).
Papo agrega: "Porque esto es claro desde la manera en que la línea fue generada".

Esta curva, la cuadrática, tiene la propiedad de que el arco BED es a la recta AB como la recta AB es a la recta AG, esto es, (BED/AB) =(AB/AG).

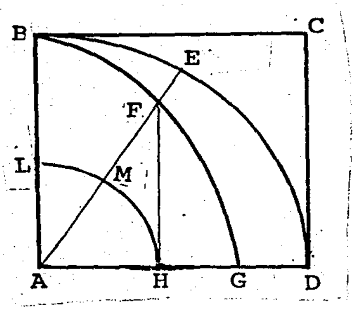
Esta propiedad, así como su demostración, están dadas por Papo; la prueba es por reducción al absurdo. Supone que si (BED/AB)≠(AB/AG) entonces (BED/AB)=(AB/AH) donde AH es mayor o menor que AG.

1) Supongamos que AH es mayor que AG. Con centro en A y radio AH trazemos el cuadrante LFH que corte a la cuadrática en F y a AB en L; prolonguemos AF por F hasta E, punto del arco BED. Ya que el cuadrante BED es a la recta AB, así lo es AB, que es AD, a la recta AH, y como AD es a AH así el arco BED es al cuadrante LFH, (circunferencias de círculos son una a otra como sus diámetros), es evidente que el cuadrante LFH es igual a AB, y des-



de aquí, de acuerdo con la propiedad de la curva, se tiene que (BED/ED) = (AB/FH) y por lo tanto (LFH/FH)= (AB/FK). Pero ha sido probado que LFH= AB; por lo tanto FH= FK. Pero esto es una contradicción.

2) Supongamos que AH es menor que AG. Con centro en A y radio AH trazemos el cuadrante LMH y sea HF perpendicular a AD cortando a la cuadrática en F; unamos A con F y proprolonguemos AF por F hasta E, punto sobre el arco BED. De la misma manera que en 1) se prueba que el cuadrante LMH es igual a la recta AB y que (BED/ED)= (AB/FH), esto es, (BED/ED)= (LMH/MH). De lo cual es evidente que MH= FH, lo que constituye una contradicción.



Por lo tanto AH no es mayor ni menor que AG. Por lo tanto es igual que AG.

Papo agrega: "También es evidente que si tomamos una tercera proporcional a las rectas AG y AB, esta tercera proporcional será igual al cuadrante BED; y cuatro veces esta línea será igual a la circunferencia del círculo entero. Pero de la línea recta que es igual a la circunferencia de un círculo, siendo encontrada, evidente que puede ser construido un cuadrado igual al círculo; porque el rectángulo bajo el perímetro de un círculo y su radio es doble del círculo, como Arquímides probó".

Sporo, que era anterior a Papo, encuentra dos objeciones a la curva:

1) "Da por sentado la misma cosa para la cual la cuadrática es empleada; porque no es posible mover un punto desde B hasta A a lo largo de la recta BA al mismo tiempo que otro punto se mueve a lo largo del cuadrante BED, a menos que la razón de la recta al cuadrante sea primero conoci-

da, puesto que es necesario que las razones de los movimientos estén uno a otro en la misma razón" y:

2) "La extremidad de la curva que es empleada para la cuadratura del círculo -esto es, el punto en el cual la cuadrática corta a la recta AD- no es encontrado; porque cuando las rectas AB y BC, siendo movidas, son llevadas simultáneamente al fin de su movimiento ellas coinciden con la recta AD y no se cortan una a otra -porque el corte cesa antes de la coincidencia con la línea AD- intersección que es tomada como extremidad de la curva en la cual ella corta a la recta AD; a menos, por ejemplo, que alguien dijera que la curva sería considerada como producida; así como suponemos que las rectas son prolongadas, tan lejos como AD; pero esto no significa que se siga de los principios de abajo: sino que en orden a que este punto G sería supuesto, la razón del cuadrante a la recta sería supuesta". (81)

En la demostración son utilizados los siguientes teoremas:

1).- Las circunferencias de círculos son una a otra como los cuadrados subtendidos por sus diámetros son uno a otro.

2).- Los arcos de dos círculos concéntricos, subtendidos por un mismo ángulo y con centro común, son uno a otro, como los cuadrantes de esos círculos.

3).- En círculos iguales los ángulos en el centro tienen la misma razón uno a otro como los arcos que subtienden. (Consecuencia inmediata de Euclides VI-33).

4).- Un arco de círculo menor que un cuadrante es mayor que la perpendicular trazada desde uno de sus extremos al radio trazado a través del otro.

5).- Y es menor que la tangente trazada en una extremidad del arco para cortar el radio producido a través del otro.

(81) Sporo vivió hacia el final del siglo III A.C. compiló un trabajo donde hay extractos de la cuadrática del círculo y de la duplicación del cubo. Tannery piensa que fue maestro de Papo y que en la obra habría — también una recopilación en relación a la <u>Meteorológica</u> de Aristóteles.

Ya habíamos hecho notar que la demostración de la propiedad de la cuadrática, de la cual recibe la curva su nombre, es por reducción al absurdo. Aunque Eudoxo estaba familiarizado con este método de demostración, es la primera prueba que se encuentra de esta naturaleza. Observamos también que el trabajo de Dinostrato es complementación del trabajo de Eudoxo ya que la cuadratura del círculo surge de una manera natural del teorema de que "círculos son uno a otro como los cuadrados determinados por sus diámetros", teorema que según Arquímides fue demostrado por Eudoxo. Vemos también que la cuadratura del círculo se sigue del problema resuelto por medio de la cuadrática: la rectificación del cuadrante.

Hemos visto que antes de los Elementos de Euclides existieron otros compiladores de Elementos. En el Sumario Eudemiano hay tres citados: Hipócrates, León y Tedio. A esta lista he agregado nueve nombres en base a lo dicho por Proclo y otros comentadores.

Excepto el trabajo de Platón, la obra de los demás está perdida. A los trabajos de Tales, Pitágoras, Teeteto, León, Eudoxo, Amiclas, Menaechmo, Dinostrato, Hipócrates, etc. no se tiene acceso salvo por extractos y comentarios de algunos historiadores de la matemática griega. Generalmente se dice que las obras de estos hombres pasaron al olvido a causa de que los Elementos de Euclides los sustituyeron por ser mejor y más completa la obra del Alejandrino; sin embargo hay algunos datos que permiten opinar de otra manera sin excluir parte de la causa arriba expresada.

Considero que Platón tuvo mucha culpa en que la obra de algunos geómetras anteriores o contemporáneos a él haya sido perdida. Daré algunas razones del porqué pienso de esta manera.

Sabemos, por Diógenes Laerto (82) y otros que Platón estuvo en Egipto, lugar que visitó para estudiar el conocimiento

(82) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1193, 1199.

de los sacerdotes; entre éstos aprendió una división entre el trabajo manual y el trabajo intelectual con una preponderancia del primero sobre el segundo (83). Platón llegó a estudiar con los escribas y sacerdotes quienes eran los representantes del conocimiento intelectual. Por otra parte Platón era rico y estuvo siempre del lado de los poderosos aunque haya tenido pugnas con algunos de éllos. Es pues, natural en él, el desprecio a las artes manuales y el impulso a la labor intelectual.

Con Platón el mundo de las ideas alcanza un alto desarrollo y coloca a la matemática en un lugar distintivo. El caracter abstracto que Platón le atribuye a la matemática queda plasmado en la República: "La virtud que posee para llevar al alma, como acabamos de decir, obligándola a razonar sobre los números tales cuales son en sí mismos, sin tolerar jamás que sus cálculos versen sobre números visibles y palpables"(84). Para Platón, en la cita anterior, el alma debe llevarse hacia "la pura inteligencia y la contemplación de lo que es" (85). Sin embargo, más adelante exhibe una contradicción al mismo tiempo que define de parte de quién está colocado: "no para hacer que esta ciencia sirva, como hacen los mercaderes y negociantes, sino para aplicarla a las necesidades de la guerra". (86)

Proclo, en el Sumario Eudemiano, atribuye a Platón el inculcar el amor hacia las matemáticas, pero no dice a quién; en la República, Sócrates y Glaucón dialogan sobre lo más conveniente para la formación de los que tendrían las funciones más altas del Estado, claramente, los mercaderes y los negociantes, no son esos ciudadanos.

(83) Bernal, John D. La Ciencia en la Historia. UNAM. Editorial Nueva Imágen. 1981. Pág. 149, 150.

(84) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 559.

(85) Ibidem. Pág. 557.

(86) Ibidem. Pág. 559.

La discusión de Sócrates y Glaucón recae sobre el caracter y la utilidad de la geometría:
"Tiene por objeto el conocimiento de lo que es siempre, y no de lo que nace y perece". (87)
Pero aquí también cae en la misma contradicción de antes: "Dispondremos, pues, expresamente, que los ciudadanos de nuestro Estado no descuiden el estudio de la geometría; tanto más, cuanto que aparte de esta ventaja principal tiene otras que no son de desdeñar -¿cuáles?- ante todo, aquellas de que hablaste tú, y que atañen a la guerra". (88)
Para Platón, así como los negociantes y los mercaderes, hay en la geometría algunos que no están haciendo geometría de la manera en que él entiende que debe hacerse: "hablan de cuadrar, de prolongar, de añadir, y así sucesivamente, como si realmente operasen, como si todas sus demostraciones tendiesen a la práctica, cuando toda esta esencia no tiene otro objeto que el conocimiento". (89)
A través de estas citas vemos que en tiempos de Platón hay una disputa acerca de cómo trabajar en matemática y cuál es el uso que debe hacerse de ella. También emerge de forma nítida que Platón es el instrumento mediante el cual se vierten los conceptos ideológicos de una parte de la sociedad y que estos elementos chocan con los de otros grupos. Como miembros de los grupos antagónicos al de Platón pueden ser puestos: Hipócrates, Eudoxo y Menaechmo. Las razones que sustentan esta afirmación son las siguientes:
Según Plutarco "Platón censuró a Eudoxo, Arquitas y Menaechmo, y su escuela, por intentar reducir la duplicación del cubo a dispositivos instrumentales y mecánicos; porque en esta forma (dice él) la geometría es destruida y pervertida

(87) Platón. <u>Diálogos</u>. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 560.
(88) Ibidem. Pág. 560.
(89) Ibidem. Pág. 560.

ya que recae en las cosas de los sentidos y no se remonta y purifica para alcanzar las imágenes eternas e incorpo--reas". (90)

Esta censura de Platón pudo haber ayudado a la "muerte física" de la obra de estos hombres, ya que a través de esta cita hay una cadena a la validez de su trabajo. La labor de los tres censurados, era muy opuesta a los lineamientos dados por Platón acerca de cómo "trabajar" la geometría.

En algunas ocasiones Platón no se queda en la simple censura. Pasa a la acción. Vemos que Demócrito era enemigo, en alguna forma, de Platón. Este "quiso quemar los escritos de Demócrito que había podido recoger... consta también de que haciendo Platón memoria de casi todos los antiguos, en ningún lugar la hace de Demócrito, ni aun en donde contravenía en alguna cosa". (91)

Por otro lado Hipócrates era amigo de Demócrito y es muy probable que haya tenido problemas con Platón ya que Hipócrates recordemos, fue expulsado de la escuela Pitagórica por cobrar al enseñar geometría, (92), y aunque algunos lo dudan, es factible, ya que antes de dedicarse a la geometría fue comerciante con problemas económicos. Estos hechos, me llevan a concluir que la obra de Hipócrates también fue censurada por Platón y por lo tanto condenada al olvido.

Referente a Euclides, no aparece el trabajo de Hipócrates sobre la utilización de las lunas para la cuadratura del círculo en los Elementos de Euclides, a pesar de su importancia. Independientemente de que tal vez el trabajo de Hipócrates no encajara en la finalidad de la obra de Euclides, no puede negarse que el sostén ideológico de los Elementos de Euclides son los Diálogos de Platón, aunque ya ha sido

(90) Platón. Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13. 1970. Pág. 560.

(91) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 158, 159.

(92) Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones, sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962. Pág. 1338.

demostrado claramente (93), que las matemáticas de Euclides no son platonistas en cuando menos los fundamentos de la aritmética por tomar sus ideas de Aristóteles. Esta influencia de Platón pudo haber llevado a Euclides a no incluir el trabajo de Hipócrates.

Todas estas consideraciones me llevan a pensar que en la pérdida de gran parte de la obra de Eudoxo, Hipócrates y Menaechmo hubo una causa diferente a la de que era mejor la de Euclides. No estaban en la línea trazada por Platón.

(93) Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889. Pág. 58.

LISTA DE LOS PRINCIPALES MATEMATICOS GRIEGOS HASTA EUCLIDES

(Fechas aproximadas)

Tales ------------	600 A.C.
Anaximandro ------	560 A.C.
Anaxímenes -------	530 A.C.
Pitágoras --------	530 A.C.
Anaxágoras -------	460 A.C.
Oenópides --------	460 A.C.
Zenón ------------	450 A.C.
Antifón ----------	430 A.C.
Brison -----------	430 A.C.
Hippias ----------	430 A.C.
Hipócrates -------	430 A.C.
Filolao ----------	430 A.C.
Teodoro ----------	420 A.C.
Demócrito --------	410 A.C.
Arquitas ---------	400 A.C.
Platón -----------	380 A.C.
Teeteto ----------	380 A.C.
Eudoxo -----------	360 A.C.
Aristóteles ------	340 A.C.
Autolico ---------	340 A.C.
Menaechmo --------	340 A.C.
Aristeo ----------	320 A.C.
Dinostrato -------	320 A.C.
Eudemo -----------	320 A.C.
Filipo -----------	320 A.C.
Tedio ------------	320 A.C.
Euclides ---------	300 A.C.

RELACION DE DEFINICIONES, POSTULADOS, NOCIONES COMUNES Y PROPOSICIONES DE "LOS ELEMENTOS" DE EUCLIDES USADAS EN LA TESIS.

Libro I.

Definiciones.

1).- Un punto es lo que no tiene parte.
2).- Una línea es longitud sin anchura.
3).- Los extremos de una línea son puntos.
4).- Una línea recta es una línea la cual yace completamente con los puntos sobre ella misma.
5).- Una superficie es lo que tiene longitud y anchura solamente.
6).- Las extremidades de una superficie son líneas.
7).- Una superficie plana es una superficie la cual yace completamente con las líneas rectas sobre ella misma.
8).- Un ángulo plano es la inclinación de dos líneas, una a otra, que se cortan una a otra en un plano y no yacen en una línea recta.
9).- Y cuando las líneas conteniendo el ángulo son rectas, el ángulo es llamado rectilíneo.
10).-Cuando una línea recta cae sobre una línea recta haciendo los ángulos adyacentes iguales uno a otro, cada uno de los ángulos iguales es recto, y la línea recta que cae sobre la otra es llamada una perpendicular a esa sobre la cual cae.
11).-Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.
12).-Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.
13).-Una frontera es lo que es extremo de alguna cosa.
14).-Una figura es lo que es contenido por una frontera o fronteras.
15).-Un círculo es una figura plana contenida por una línea tal que todas las líneas rectas cayendo a ella desde un punto entre aquellos yaciendo dentro de la figura,

son iguales una a otra;

16).-Y el punto es llamado el centro del círculo.

17).-Un diámetro del círculo es una línea recta cualquiera trazada a través del centro y terminada en ambas direcciones por la circunferencia del círculo, y una línea recta tal también bisecta al círculo.

18).-Un semicírculo es la figura contenida por el diámetro y la circunferencia cortada por él. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

19).-Figuras rectilíneas son aquellas que son contenidas por líneas rectas; triláteras, las figuras contenidas por tres, cuadriláteras las contenidas por cuatro, y multiláteras las contenidas por más de cuatro líneas.

20).-De las figuras triláteras, un triángulo equilátero es la que tiene sus tres lados iguales, un triángulo isósceles la que tiene dos lados iguales, y un triángulo escaleno la que tiene sus tres lados desiguales.

21).-Aún más, de las figuras triláteras, un triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, un triángulo obtusángulo es la que tiene un ángulo obtuso, y un -- triángulo acutángulo la que tiene sus tres ángulos agudos.

22).-De las figuras cuadriláteras, un cuadrado en una figura que a la vez es equilátera y rectángula; un oblongo es la que es rectángula pero no equilátera; un rombo aquella que es equilátera pero no rectángula; y un romboide aquella que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales uno a otro pero no es equilátero ni rectángula. Y los - otros cuadriláteros serán llamados trapecios.

23).-Líneas rectas paralelas son líneas rectas las cuales estando en el mismo plano y siendo producidas indefinidamente en ambas direcciones, no se cortan una a otra en una u otra dirección.

Postulados.

1).- Trazar una línea recta desde cualquier punto hasta cual quier punto.

2).- Producir una línea recta finita continuamente en una línea recta.

3).- Describir un círculo con cualquier centro y distancia.

4).- Todos los ángulos rectos son iguales uno a otro.

5).- Que si una línea recta cayendo sobre dos líneas rectas hace los ángulos interiores sobre el mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se producen indefinidamente, se cortarán sobre el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Nociones comunes.

1).- Cosas que son iguales a la misma cosa son también iguales una a otra.

2).- Si iguales son sumados a iguales, los enteros serán iguales.

3).- Si iguales son sustraidos a iguales, los residuos son iguales.

4).- Cosas que coinciden una a otra son iguales una a otra.

5).- El todo es mayor que la parte.

Proposiciones.

No. 5 - En los triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales uno a otro, y, si las líneas rectas iguales son producidas, los ángulos bajo la base serán iguales uno a otro.

No.15 - Si dos líneas rectas se cortan una a otra, harán los ángulos verticales iguales uno a otro.

No.26 - Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente, y un lado igual a un lado, a saber, o el lado contiguo a los ángulos iguales, o el que subtiende uno de los ángulos iguales, los restantes lados, también serán iguales a los restantes lados y el ángulo restante será igual al ángulo restante.

No. 32 - En cualquier triángulo, si uno de los lados es producido, el ángulo exterior es igual a los dos ángulos opuestos e interiores, y los tres ángulos del triángulo, su suma, es igual a dos ángulos rectos.

No. 41 - Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es doble del triángulo.

No. 44 - Aplicar a una línea recta dada, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

No. 45 - Construir, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada.

No. 47 - En triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado subtendiendo el ángulo recto es igual a los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto.

Libro II.

Proposiciones.

No. 5 - Si una línea recta es cortada en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del todo junto con el cuadrado sobre la línea recta entre los puntos de sección es igual al cuadrado sobre la mitad.

No. 6 - Si una línea recta es bisectada y una línea recta es agregada a ella en una línea recta, el rectángulo contenido por la entera con la línea recta agregada y la línea recta agregada junto con el cuadrado sobre la mitad es igual al cuadrado sobre la línea recta hecha bajo de la mitad y la línea recta agregada.

No. 11 - Cortar una línea recta dada de tal manera que el rectángulo contenido por la entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado sobre el segmento restante.

Libro III.

Definiciones.

6).- Segmento del círculo es la figura limitada por una recta y la periferia del círculo.

7).- Angulo del segmento es el limitado por una recta y la periferia del círculo.

8).- Angulo en el segmento es el limitado por las rectas trazadas desde un punto de la periferia del segmento a los extremos de la recta que es base del segmento.

11).-Segmentos circulares semejantes son los que abarcan ángulos iguales o aquellos en que los ángulos son iguales.

Proposiciones.

No.24 - Los segmentos circulares puestos sobre rectas iguales son iguales entre sí.

No.31 - En un círculo el ángulo puesto en el semicírculo es recto, el que está en el segmento mayor es menor que el recto, el que está en el segmento menor es mayor --- que el recto, y además, el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto, el del segmento menor, menor que el recto.

No.33 - Sobre una recta dada construir un segmento de círculo que comprenda un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Libro V.

Definiciones.

3).- Razón es cualquier relación entre dos magnitudes del mismo género según su cantidad.

4).- Dícese que dos magnitudes tienen razón entre sí, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra.

5).- Dícese que la razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales o al mismo tiempo son inferiores que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas.

10).-Si cuatro magnitudes son (continuamente) proporcionales se dice que la primera tiene a la cuarta una razón triplicada de la que tiene a la segunda, y siempre del - mismo modo en adelante, cualquiera que sea la proporción.

Libro VI.

Proposiciones.

No. 4 - En triángulos con ángulos iguales respectivamente equiángulos los lados alrededor de los ángulos iguales son proporcionales, y los lados correspondientes subtienden ángulos iguales.

No.30 - A una línea recta finita dada, cortarla en razón extrema y media.

No.31 - En triángulos rectángulos la figura sobre el lado subteniendo el ángulo recto es igual a las figuras similares y similarmente descritas sobre los lados que contienen el ángulo recto.

No.33 - En círculos iguales los ángulos tienen la misma razón como las circunferencias sobre las que están colocados, siempre que ellos estén colocados en los centros o en las circunferencias.

Libro VIII.

Proposiciones.

No.11 - Entre dos números cuadrados hay un número media proporcional, y el cuadrado tiene al cuadrado la razón duplicada de ese al cual el lado tiene al lado.

No.12 - Entre dos números cúbicos hay dos números media proporcional, y el cubo tiene al cubo la razón triplicada de ese al cual el lado tiene al lado.

Libro X.

Proposiciones.

No. 1 - Sean dadas dos magnitudes desiguales. Si de la mayor es sustraida una magnitud mayor que su mitad y de la de la izquierda es sustraida una magnitud mayor que su mitad, y si este proceso es repetido continuamente, habrá a la izquierda alguna magnitud la cual será menor que la magnitud menor dada.

Libro XII.

Proposiciones.

No. 2 - Círculos son uno a otro como los cuadrados sobre sus diámetros.

No. 7 - Cualesquier prisma con base triangular puede ser dividido en tres pirámides iguales una a otra las cuales tienen bases triangulares.

Porismo. Desde esto es manifiesto que cualquier pirámide es una tercera parte del prisma el cual tiene la misma base y altura.

No.10 - Cualquier cono es una tercera parte del cilindro que tiene la misma base y altura.

Libro XIII.

Proposiciones.

No. 6 - Si una línea recta racional es cortada en razón extrema y media, cada uno de los segmentos es la línea recta irracional llamada apotema.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

1.- Allman, George Johnston. Greek Geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press Series. 1889.

2.- Aristóteles. a) Etica Nicomaquea.Política. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 70. 1982.

b) Tratados de Lógica. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 124. 1982.

c) Metafísica. Madrid. Espasa Calpe, S.A. Colección Austral, séptima edición. 1972.

d) Obras Completas. Madrid. Editorial Aguilar. 1962.

3.- Bernal, John D. La Ciencia en la Historia. UNAM. Editorial Nueva Imágen. 1981.

4.- B. Boyer, Carl. A History of Mathematics. John Wiley and Sons. 1968.

5.- Euclides. Obras Completas. Elementos de Geometría III, IV, V. UNAM. 1956.

6.- Filloy Yague, Eugenio. Historia de la Geometría Euclideana (Fase de Captación). CIEA-IPN Sección de Matemática Educativa. 1979.

7.- Gow, James. A short history of Greek Mathematics. New York. Hafner. 1968.

8.- Heath, T.L. a) A history of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. Volume I, II. 1981.

b) The thirteen books of Euclid's Elements. New York. Dover Publications, Inc. Volume I, II, III. 1956.

c) A manual of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, Inc. 1963.

9.- Herodoto. Los Nueve Libros de la Historia. México. Editorial Porrúa "Sepan Cuántos" Núm. 176.

10.- Laerto , Diógenes. Biógrafos Griegos. Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres. Madrid. Editorial Aguilar. 1962.

11.- Morris Kline. Mathematical thought from Ancient to Modern times. New York. Oxford University Press. 1972.

12.- Platón. a) Diálogos. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 13 1970.

b) Las leyes Epinomis. El Político. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 139. 1979.

c) Obras Madrid. Editorial Aguilar. 1962.

13.- Plutarco. Vidas paralelas. México. Editorial Porrúa, S.A. "Sepan Cuántos..." Núm. 26. 1982.

14.- Richard Knorr, Wilbur. The evolution of the Euclidean Elements. USA. D. Reudel Publishing Company. 1975.

15.- Sabetai Unguru. a) History of Ancient Mathematics. USA. Isis,70. No. 254. 1979. Pág. 555 y 565.

b) On the need to rewrite the History of Greek Mathematics. USA. Archive -- History of exact sciences 15. 1975. Pág. 67, 114.

16.- Szabó. The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. Scripta Mathematica. Volume XXVII. No. 1, 2. Junio 27, 1960.

17.- Thomas, Ivor. Selections ilustrating the history of Greek Mathematics. From Thales to Euclid. Volume I. Harvard University Press. 1957.

18.- V. Jones, Charles. a) _Anthyphairesis and the goal of Euclid's Elements._ Universidad de Toronto.

b) _Aristótle's influence on the foundations of Euclid's Elements._ UNAM. Diciembre 1985.

c) _On the concept of one as a number._ Institute for the Historyan Philosophy of Science and technology. 1978.