UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

TEORIA Y ANALISIS DE LA TOMA DE DECISIONES CON APLICACIONES A LA INDUSTRIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
P R E S E N T A N

JUAN AGUILAR PASCUAL
GREGORIO COLIN SOLIS
LAURO GARCIA CASTRO
JOSE RUBEN GONZALEZ SERVIN
JESUS PEDRAZA TELLEZ
AMADO RODRIGUEZ HERNANDEZ

MEXICO, D. F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

" INDICE GENERAL "

CAPITULO III

CAPITULO I

TEORIA DE DECISIONES

1.1 INTRODUCCION

Decidir, podría decirse es propio del hombre, pues la decisión implica la selección conciente entre varias soluciones posibles. Cotidianamente las decisiones de la vida personal y profesional pueden tomarse sin mayores complicaciones, tal vez, porque la mejor alternativa aparece a primera vista lo suficientemente clara, que no requiere de mucho análisis, o quizá porque la decisión no es suficientemente importante como para justificar la dedicación de mucha atención y tiempo, ésto es, muchas decisiones se harán basadas exclusivamente en la experiencia y el sentido común, sin embargo, el creciente auge industrial y económico del País, establece la responsabilidad para quienes están involucrados en la ardua tarea de acelerar el desarrollo económico de utilizar los conocimientos científicos que coadyuven a la toma de decisiones para aprovechar, en la mejor forma posible, los escasos recursos disponibles y optimizar así la función administrativa.

De una manera formal la toma de decisiones se puede definir como; " La selección basada en Criterios Científicos de conducta alternativa derivada de dos o más posibilidades". Los campos y objetivos de esta disciplina científica son muy variados y es por ello que resulta atractivo para los administradores agrícolas, industriales y gubernamentales, quienes tienen que tomar importantes decisiones que les permitan alcanzar objetivos vitales para su empresa y cuyos resultados lógicamente tendrán que afectar o influenciar la vida de los demás ciudadanos, por lo que estas decisiones deberán evaluarse con más análisis y criterio científico y no basarse exclusivamente en suposiciones empíricas.

La toma de decisiones no es una actividad aislada sino que está relacionada con un problema, dificultad o conflicto, y proporciona una respuesta al problema o la solución del conflicto, para lo cual es necesario que haya un criterio para la elección de la solución entre varias posibilidades o alternativas y que dispongamos de información del material predictivo. Al decidirnos por una alternativa en particular, debemos considerar que ésta tiene sus restricciones inherentes como por ejemplo, el costo de la misma, la capacidad de las personas que llevarán a cabo estas tareas, la influencia tecnológica, etc. Toda decisión es tomada con algún criterio en mente y por lo tanto la elección de la mejor alternativa estará influenciada por el criterio que se emplee, pues éste, nos permite formular una comparación de valores y de relaciones entre las alternativas involucradas. A mayor complejidad e incertidumbre, mayor será la necesidad de criterio científico, tal como lo muestra la fig.1.1 del espectro de las decisiones:

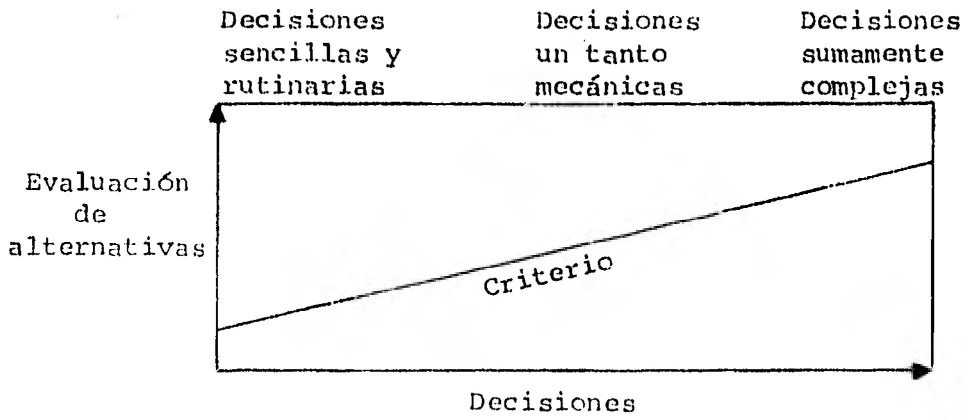


FIG.1.1 ESPECTRO DE LAS DECISIONES

1.2 ANTECEDENTES HISTORICOS DE LA TEORIA DE DECISIONES

Durante las últimas décadas del siglo actual se ha desarrollado la Teoría de Decisiones que permite evaluar la eficiencia de una decisión, al medir en que grado los resultados satisfacen el objetivo u objetivos formulados de antemano por la persona o grupo de ellas que tomarán la decisión.

La teoría de Decisiones se originó de tres corrientes principales que son:

1.- Teoría de las Preferencias y de la Utilidad

2.- Teoría de las Probabilidades

3.- Teoría de la Inferencia Estadística

En el siglo XIX se utilizaron los conceptos de Valor, Utilidad, Preferencias, Curvas de Indiferencias; ideas atri buibles a Adam Smith. Jevons en su libro "The Theory of -- Political Economy" (1871) explicó claramente el uso del concepto de las Escalas de Preferencias o Utilidad Cardinales. Marshall (1901) en su libro titulado "Principles of Economics", elaboró el concepto de Utilidad Ordinal, es decir órdenes de preferencias por medio del análisis de curvas de - indiferencia.

Posteriormente la Teoría de las Probabilidades alcanzó avances notables sin que se integrara con la Teoría de la - Utilidad que paralelamente también se desarrollaba. Es hasta 1944 en que Von Neumann y Morgenstein, publican "The - - Theory of Games and Economic Bahaviour", libro, donde se -- combinan los conceptos y las técnicas del cálculo de las -- probabilidades con la Teoría Económica. El factor de la Incertidumbre se incorporó a la Teoría de la Utilidad a través de la identificación de la utilidad con la recompensa - en un juego de azar, de ésta forma fué posible un tratamiento estadístico aceptable de la competencia bajo condiciones de incertidumbre.

Combinadas la Teoría de la Utilidad y la Teoría de las probabilidades el paso siguiente fué unir la Teoría de la - Utilidad con la Inferencia Estadística que tiene por objeto examinar y procesar los datos disponibles para predecir resultados posteriores. En 1950, Abraham Wald, en su libro -

titulado "Statistical Decition Fuctions", presentó un análisis muy bién desarrollado sobre éste tema, con lo que gradualmente volvió a surgir un interés por el enfoque Bayesiano, que culminó con las obras de Raiffa y Schlaifer.

La posibilidad de que la Teoría Estadística de las Decisiones se convierta en unas buenas matemáticas aplicadas- ó no, depende de su capacidad de ser utilizadas como una colección de instrumentos que proporcionen una clara percepción para la solución de problemas reales. La humanidad -- siempre afronta problemas en condiciones de incertidumbre; la Teoría de las Decisiones ya más refinada y madura ha desempeñado un papel importante para resolver éste tipo de -- problemas.

1.3 TIPOS DE PROBLEMAS EN LA TEORIA DE DECISIONES

Los problemas que afronta la Teoría de Decisiones se - pueden clasificar en tres grandes grupos inicialmente.

1.- EN CONDICIONES DE CERTIDUMBRE.- Esto ocurre si cada curso de acción posible (alternativa) conduce - invariablemente a un resultado específico.

2.- EN CONDICIONES DE RIESGO.- Sucede cuando cada alternativa posible conduce hacia una gama conocida-de resultados específicos con probabilidades conocidas.

3.- EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE.- Nos hallamos en este caso cuando las probabilidades de los varios resultados específicos son totalmente desconocidos o carecen de sentido.

En el presente trabajo, para cada uno de los tipos de problemas de la Teoría de Decisiones, se desarrollan las Técnicas o Criterios aplicables para seleccionar las mejores alternativas; se analizan los alcances y limitaciones de los diferentes criterios, incluyendo también las herramientas necesarias de la Teoría de Probabilidades y del Análisis Bayesiano, desarrolladas en las páginas siguientes.

Cabe aclarar que la Investigación de Operaciones y la Ingeniería Económica, analizan, evaluan y resuelven una buena parte de estos problemas con sus propias técnicas en forma muy eficiente, y que en el presente estudio no se abordan, porque resultaría sumamente extenso.

1.4 ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISIONES

En cualquier problema de decisiones encontraremos los siguientes componentes:

1.- Existe una persona o personas encargadas de tomar la decisión, con objetivos especificados de antemano, a los que se les nombra DECISOR o DECISORES.

2.- Existe un conjunto de ESTADOS DE LA NATURALEZA que pueden ocurrir y que normalmente se encuentran fuera del control del individuo que decide; se representan por θ_i, $i=1,2,3,\ldots n$

3.- Hay un conjunto de diversos cursos de acción factibles, de los cuales el decisor escogerá la más adecuada, a éstas se les llama ALTERNATIVAS O ACCIONES y normalmente se les representa como a_j, $j=1,2,3, \ldots m$

4.- Las consecuencias (ganancias, pérdidas, utilidades) que resultan de la combinación ESTADO DE LA NATURALEZA-ALTERNATIVA. ; $U(\theta_i, a_j)$

5.- Existe un grado de INCERTIDUMBRE para cada Estado de la Naturaleza.

6.- Existe un conjunto de ESTRATEGIAS derivadas de una estimación probabilística que muestra la dependencia con los Estados de la Naturaleza anteriores.

7.- Los Resultados o consecuencias de cada estrategia para cada Estado de la Naturaleza.

8.- La preferencia y existencia de un Criterio con el cual el decisor elige la mejor alternativa, por ejemplo el criterio puede ser de máxima utilidad esperada, el Minimax, etc.

Con los puntos 2, 3, y 4 podemos construir la matriz general de decisiones (ver tabla 1.1)

Estados de la naturaleza	Cursos de acción o alternativas		
	a_1	a_2	a_3
θ_1	$U(\theta_1,\ a_1)$	$U(\theta_1,\ a_2)$	$U(\theta_1,\ a_3)$
θ_2	$U(\theta_2,\ a_1)$	$U(\theta_2,\ a_2)$	$U(\theta_2,\ a_3)$
θ_3	$U(\theta_3,\ a_1)$	$U(\theta_3,\ a_2)$	$U(\theta_3,\ a_3)$

TABLA 1.1.- MATRIZ DE DECISIONES

Nótese que la utilidad $U(\theta_1,\ a_2)$ corresponde a la combinación del estado de la naturaleza uno (θ_1) con la alternativa dos (a_2).

En los capítulos posteriores se resolverán ejemplos completos que permitan aclarar cualquier duda en el planteamiento e identificación de los elementos en los problemas de decisiones.

CAPITULO II

TEORIA DE LA UTILIDAD
TEORIA DE LA PROBABILIDAD
INFERENCIA ESTADISTICA

2.1 TEORIA DE LA UTILIDAD

2.1.1 INTRODUCCION

El análisis de la utilidad se remonta a la década de 1870 cuando el economista británico William Stanley Jevons, entre otros, introdujo esta Teoría para analizar por que los consumidores compran lo que compran.

La utilidad es una expresión de los gustos y preferencias de un consumidor, la cual es mensurable y atribuida a todas las unidades de bienes y servicios de que dispone o que puede adquirir un individuo. La gente no asigna en la práctica beneficios, pero la teoría predice que las personas actúan como si hubieran calculado esquemas de beneficios en sus mentes. La utilidad es de naturaleza subjetiva. El número de beneficios atribuidos a una unidad de un bien o servicio por una persona no tiene significación, lo que es significativo es como éste se relaciona con el número de unidades del mismo bien o servicio. Por ejemplo, si una persona asigna dos unidades al primer aguacate en su alimentación, una unidad al segundo y diez unidades a un filete en la misma comida, podemos determinar que a él le gusta el primer aguacate dos veces más que el segundo, y que él estima al filete cinco veces más que el primer aguacate.

2.1.2 ANALISIS DE INDIFERENCIA

El análisis de indiferencia es una teoría del comportamiento del consumidor que expresa en curvas sus preferencias entre varias combinaciones de objetivos o bienes.

La curva de indiferencia esta formada por un número infinito de puntos, cada punto representa alguna combinación diferente de bienes que una persona puede desear consumir. Incluye todas las combinaciones que satisfacen a la persona en la misma medida.

Consideremos a un consumidor que sólo compra dos productos, ropa y comida, a precios cotizados y definidos. El consumidor, puede preferir una combinación de esos dos productos ó si le son indiferentes cualquiera de dos combinaciones de dichos productos. A continuación enlistamos las combinaciones de esos productos que igualmente serán indiferentes a nuestro consumidor:

SITUACION	UNIDADES DE COMIDA	UNIDADES DE ROPA
A	1	6
B	2	3
C	3	2
D	4	1.5

Representemos las combinaciones anteriores en una -- gráfica, obtenemos la siguiente curva de indiferencia:

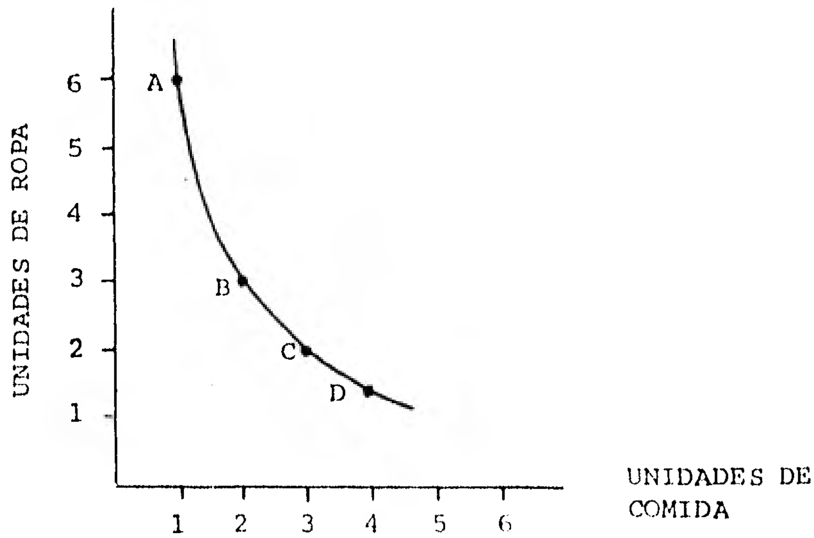


FIG. 2.1 CURVA DE INDIFERENCIA

Si nuestro consumidor pudiera escoger cualquiera de- los puntos dibujados sobre dicha curva, no sabría cual es- coger, porque le es indiferente cualquiera de las combina ciones obtenidas.

Notemos que la curva de indiferencia es convexa des- de abajo, a medida que bajamos hacia la derecha a lo largo de la curva, la pendiente de la misma se aplana cada vez - más, ésto ilustra la ley de la sustitución que afirma que- cuanto más escasea un producto, más grande será su valor - de sustitución relativa; su utilidad marginal se eleva con relación a la utilidad marginal del producto que abunda. El término utilidad marginal es la utilidad derivada de cada - unidad adicional de un bien o servicio. Por ejemplo, el consumidor en la posición A, puede sacrificar 3 unidades de ropa con tal de adquirir una segunda unidad de comida, sin embargo, si baja a la posición B sólo sacrificará una unidad- de lo que le queda de sus existencias de ropa con tal de obtener una tercera unidad de comida.

La pendiente de la curva de indiferencia es la medida de los términos con los cuales el consumidor aceptará cam-- biar una parte de las existencias de uno de sus productos - con tal de obtener un poco más de otro producto.

Si agregamos otras curvas de indiferencia a nuestro - diagrama anterior; estas nuevas curvas muestran combinaciones de los productos considerados a niveles más altos que - el anterior y obtenemos un mapa de curvas de indiferencia - como el siguiente:

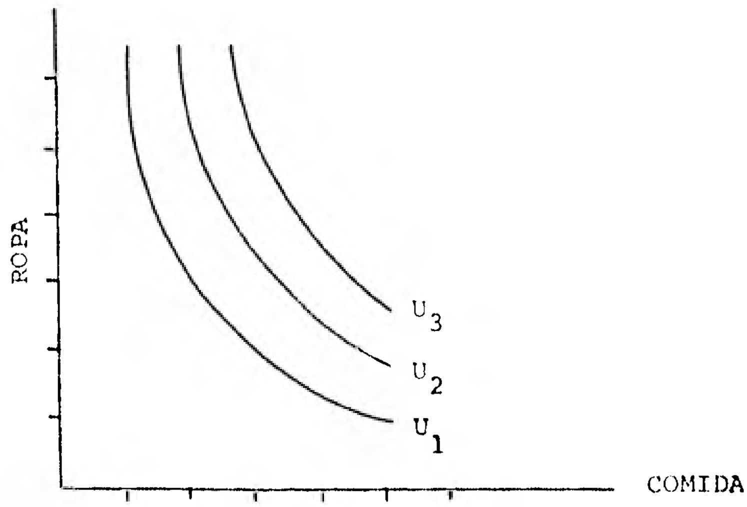


FIG. 2.2 MAPA DE CURVAS DE INDIFERENCIAS

Notemos que, si incrementamos ambos productos y nos - movemos en dirección noreste dentro de ése mapa, vamos cruzando distintas curvas de indiferencia y alcanzamos niveles cada vez más elevados de satisfacción. En consecuencia, U_2 representa un nivel de satisfacción más alto que el de U_1.

Por lo tanto, mediante las curvas de indiferencia podemos expresar la relación entre dos objetivos cualesquiera mediante intercambios y proporciones de cambio entre los objetivos analizados. Cuando existen objetivos múltiples especificados para un sistema en particular, es muy frecuente - que se pueda singularizar el objetivo más importante a fin de llegar a una situación óptima mediante el establecimien-

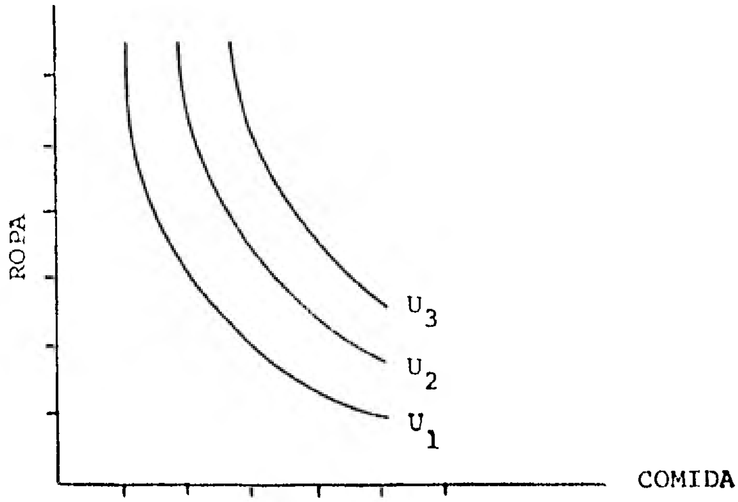


FIG. 2.2 MAPA DE CURVAS DE INDIFERENCIAS

Notemos que, si incrementamos ambos productos y nos - movemos en dirección noreste dentro de ése mapa, vamos cruzando distintas curvas de indiferencia y alcanzamos niveles cada vez más elevados de satisfacción. En consecuencia, U_2 representa un nivel de satisfacción más alto que el de U_1.

Por lo tanto, mediante las curvas de indiferencia podemos expresar la relación entre dos objetivos cualesquiera mediante intercambios y proporciones de cambio entre los objetivos analizados. Cuando existen objetivos múltiples especificados para un sistema en particular, es muy frecuente - que se pueda singularizar el objetivo más importante a fin- de llegar a una situación óptima mediante el establecimiento de una escala de órdenes de preferencia que indicará el comportamiento del decisor.

2.1.3 LA EVALUACION SUBJETIVA DE LAS CONSECUENCIAS MONETARIAS.

Reconocemos que las consecuencias monetarias pueden tener una utilidad diferente según el decisor y la situación concreta de lo que se trate.

Los resultados monetarios obtenidos al escoger una estrategia particular, tal vez dependan del prestigio personal del decisor, el patrimonio financiero del decisor, de la posibilidad de una bancarrota, de la preferencia o aversión hacia el riesgo, de la contribución potencial del empresario a la comunidad, etc.

Por consecuencia, necesitamos un modelo más general de toma de decisiones, que además de los monetarios, incluya la influencia de otros factores importantes en la situación de decisiones bajo riesgo.

La Teoría moderna de la Utilidad nos proporciona ése modelo. Esta teoría nos dice:

"Si el decisor actúa con el propósito de satisfacer una serie de supuestos razonables, que son los axiomas del-comportamiento racional, existe una función de utilidad del decisor, que elige como estrategia más apropiada a-la que maximice la utilidad esperada".

La función de utilidad toma en cuenta todos los aspectos de la actitud del decisor con respecto a las consecuencias posibles, monetarias y no monetarias, de determinada situación de decisiones. Por lo tanto, la función de utilidad tiene-que ser algo muy subjetivo y suficientemente flexible para-adecuarse a las características personales de cada decisor. Se analizará el desarrollo de curvas de utilidad para cantidades monetarias, el mismo método se puede emplear para cualquier otro bien. Es posible elaborar funciones de utilidad para grupos de bienes más que para un sólo bien.

Proporcionaremos la Teoría y la exposición razonada del uso del valor esperado de la utilidad como un criterio general de la selección en la toma de decisiones.

De lo expuesto anteriormente, referente a la utilidad,-veremos a continuación un ejemplo para mostrar que algunas-veces el criterio del valor monetario esperado no da una -solución satisfactoria y es entonces cuando hay necesidad -

de utilizar otros criterios más completos tales como la Teoría de Utilidad.

Sea el ejemplo siguiente:

ESTADOS	ACCIONES		$P(\theta)$
	a_1	a_2	
	PESOS		
θ_1	0	10,000	1/2
θ_2	0	-10,000	1/2
VME	0	0	

TABLA 2.1

Donde el VME es el valor monetario esperado, el cual es igual a: $VME(a_j) = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i, a_j)\, P(\theta_i)$, por lo cual para las acciones tenemos:

$$VME(a_1) = 0\ (1/2) + 0\ (1/2) = 0$$

$$VME(a_2) = 10,000(1/2) - 10,000(1/2) = 0$$

Cuando el VME es usado como un criterio de decisión, la selección sería indiferente entre a_1 y a_2 ya que en las dos acciones es cero como puede observarse en el último renglón.

Nuestro propósito es mostrar como es posible deducir una función que relacione valores monetarios a otra escala que mida el valor subjetivo, y así poder resolver problemas como éste y otros más complejos.

2.1.4 OBTENCION DE UNA FUNCION DE UTILIDAD Y SU APLICACION

En esta sección se muestra la técnica para obtener una función de utilidad la cual permitirá resolver problemas -- más complejos ya que con el criterio del VME no se podría- resolver eficazmente para grandes cantidades de dinero.

Mediante el siguiente ejemplo se analizará la técnica a seguir para obtener la función haciendo uso de los conceptos de la teoría de utilidad.

Pedro López, dueño de Empacadora al Vacío, S. A. está- tratando de tomar una decisión. Hace años su compañía desarrolló un nuevo método para conservar la comida más fresca- empaquetándola en nitrógeno puro en lugar de aire, lo que - hace que el período de conservación sea mayor. La compañía- ha estado creciendo muy lento debido a que el método representa un cambio radical en empacar y se han tenido un mínimo de compañías que hayan estado dispuestas a utilizar di-- cha innovación.

Actualmente la idea se empieza apreciar y Pedro estima que el futuro de la compañía es brillante. En el pasado la- compañía ha tratado de desarrollar contenedores para los productos empacados en nitrógeno puro y Pedro siente que se deberá efectuar una expansión en la compañía. Existen dos alternativas con las cuales puede lograrse. Se ha comprado a otras compañías la producción del nitrógeno que se requiere el cual es más puro de lo necesario y piensa crear un departamento que se ocupe del diseño de plantas de nitrógeno dondequiera que se necesiten, lo cual reducirá el coste en 2/3 partes del que se tiene actualmente, con lo cual se podrán satisfacer las necesidades de compañías más grandes.

La otra opción que tiene Pedro consiste en diseñar las empacadoras para la compañía ya que en el pasado se ha tenido que ir con cada compañía particular que requería los servicios de nitrógeno puro y modificar las máquinas empacadoras normales para que puedan insertar nitrógeno en el paquete.

El estima que si tuviera un grupo de desarrollo de máquinas empacadoras en la compañía, esta sería capaz de crecer mucho más rápido.

Las acciones que tiene Pedro disponibles son:

a_1) No hacer nada

a_2) Desarrollar un grupo de nitrógeno solamente

a_3) Desarrollar un grupo para efectuar los estudios de máquinas empacadoras exclusivamente,

a_4) Tener un grupo de desarrollo tanto de nitrógeno como de empacadora.

Los pagos que se acumularán de cada acción dependen en gran parte de la economía de los 5 próximos años y de la tasa de crecimiento de la idea de usar nitrógeno puro en la industria alimenticia. Si Pedro invierte en el desarrollo de cualquiera de estos grupos y el crecimiento de la compañía no se materializa, ésta podrá estar en serias dificultades financieras. Después de un estudio cree que la combinación de las condiciones, crecimiento económico y de la compañía pueden catalogarse en 3 estados diferentes que son: Bueno, indiferente y malo. Los pagos resultantes para cada estado-acción se dan en la Tabla 2.2, en donde las cantidades están en miles de pesos.

ACCIONES / ESTADOS	a_1	a_2	a_3	a_4
θ_1 (Bueno)	300	1000	1500	3000
θ_2 (Indif)	20	200	0	300
θ_3 (Malo)	-100	-500	-800	-1500
V.M.E.	68	230	210	570

Tabla 2.2

Pedro determina que las probabilidades de ocurrencia de los estados son $P(\theta_1)=0.3$, $P(\theta_2)= 0.4$ y $P(\theta_3) = 0.3$. Conoce también que los pagos en la tabla anterior representan -

cantidades significantes de dinero para su compañía y ha decidido que un enfoque de valor esperado no es una forma --- apropiada para resolver su problema, si usara el criterio - del VME escogería la acción a_4 ya que es la que dá el VME - más alto de todas las acciones como se puede observar en la tabla 2.2.

El problema de Pedro se puede resolver usando la Teoría de la Utilidad.

A fin de analizar el problema se debe reemplazar cada pago por un boleto de lotería, el boleto para cada pago se- seleccionará de tal manera que su importancia para Pedro será exactamente igual al valor del pago. Cada boleto de lotería tendrá dos contribuciones:

B = consecuencias buenas; M = consecuencias malas. -- Una probabilidad π de ganar y $1-\pi$ de perder.

Suponga que estamos ofreciendo a Pedro un rango com-- pleto de boletos de lotería, cada uno de ellos con B igual- a \$ 3 000 000 y M igual a -\$ 1 500 000 con el propósito de- utilizar la Teoría de Utilidad, Pedro, debe estar dispuesto- a usar un boleto de lotería equivalente a cada pago y así- tenemos las dos alternativas siguientes:

Alternativa A;	Un boleto de lotería	probabilidad π de ganar -- \$3 000 000 probabilidad $1-\pi$ de perder \$1 500 000
Alternativa B;	Una cantidad dada de dinero seguro	

Pedro indica su preferencia entre las alternativa A y B para una serie de valores diferentes de π y niveles de - dinero seguro.

Este proceso puede ser presentado considerando la tabla 2.3. La alternativa B está listada en el lado izquierdo de la tabla (dinero seguro). La alternativa A provee una de \$3 000 000 con una probabilidad π de ganar y otra con $1-\pi$ de perder \$1 500 000 que se encuentra listada horizontalmente en la parte superior de la tabla. Pedro indica en cada - celda, cual prefiere de A ó B ó es indiferente. Por ejemplo iniciando en la parte final de la primera columna. Preferiría usted \$3 250 000 de dinero seguro (B) ó un boleto de lotería (A) equivalente con probabilidad $\pi = 1$ de ganar los -- \$3 000 000 y una probabilidad de cero de perder \$1 500 000?, él prefiere obviamente la alternativa B, moviéndonos hacia-arriba a la siguiente celda, hacemos una pregunta similar:- ¿preferiría usted \$3 000 000 de dinero seguro (B) ó un boleto de lotería (A) equivalente con probabilidad $\pi = 1$ de ganar \$3 000 000 y una probabilidad cero de perder \$1 500 000?

TABLA 2.3

TABLA DE SELECCION PARA LA BUSQUEDA DE PUNTO DE INDIFERENCIA ENTRE DINERO SEGURO Y LOTERIAS EQUIVALENTES

DINERO SEGURO (ALTERNATIVA B) EN MILES.	LOTERIA EQUIVALENTE CON PROBABILIDAD π (ALTERNATIVA A)					
	π=1.0	π=0.8	π=0.6	π=0.4	π=0.2	π=0
- 1 750	A	A	A	A	A	A
- 1 500	.	.	.	.	.	Indif.
- 1 250	.	.	.	.	A	B
- 1 000	.	.	.	.	Indif.	.
- 750	.	.	.	.	B	.
- 500	.	.	.	A	.	.
- 250	.	.	.	Indif.	.	.
0	.	.	.	B	.	.
250	.	.	A	.	.	.
500	.	.	Indif.	.	.	.
750	.	.	B	.	.	.
1 000	.	.	.	.	.	.
1 250	.	A	.	.	.	.
1 500	.	Indif.	.	.	.	.
1 750	.	B	.	.	.	.
2 000	.	.	.	.	.	.
2 250	.	.	.	.	.	.
2 500	.	.	.	.	.	.
2 750	A	.		.	.	.
3 000	Indif.	.	.	.	.	.
3 250	B	B	B	B	B	B

estas alternativas son obviamente idénticas y escribimos -- indiferente. Moviéndonos hacia arriba a la próxima celda y- haciendo una pregunta similar, hallamos que A es claramente preferida e igualmente para todas las demás celdas en el -- resto de la primera columna. La tabla es acabada de llenar- en forma similar.

Los puntos de indiferencia obtenidos en la tabla 2.3- son ahora colocados en la fig. 2.3 y se traza una línea que pase por los seis puntos, desde luego la curva puede ser -- construída para más puntos (variando π en intervalos de -- 0.1 en lugar de intervalos de 0.2) y tener la seguridad de- que el tomador de decisiones está satisfecho con los valo-- res mostrados. Esta curva mostrada en la fig. 2.3, es la -- función de utilidad de Pedro y con ella pueden obtenerse -- los valores de π equivalentes a los pagos.

Por ejemplo, el valor π que corresponde a un pago de \$ 300 000 es 0.55. Utilizando esta misma técnica para los- otros pagos, se obtienen los números de la tabla 2.4.

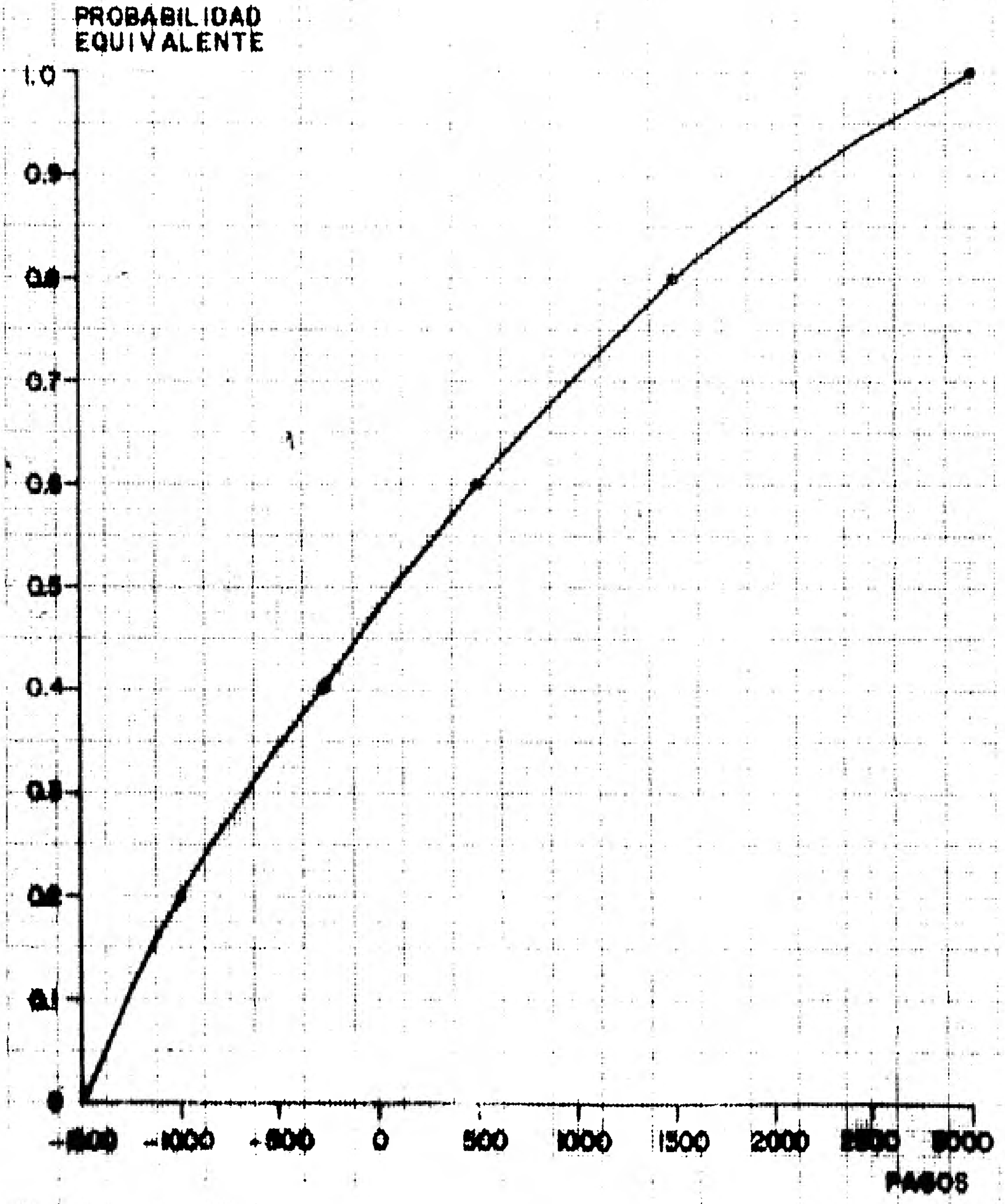


FIG. 2.3 CURVA DE UTILIDAD

TABLA 2.4

Probabilidades equivalentes para los pagos del problema de Pedro

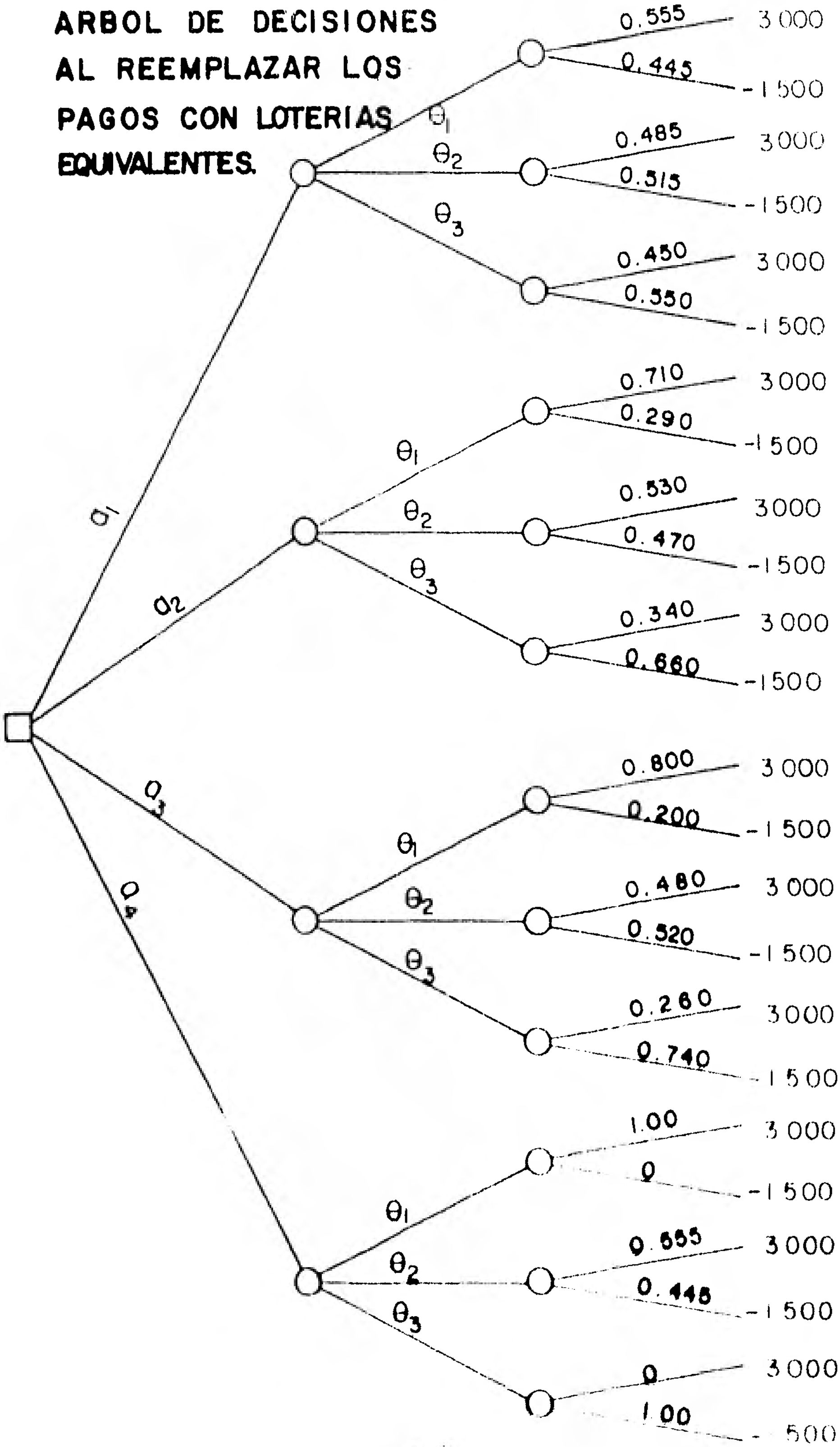
PAGOS**	-1500	-800	-500	-100	0	20	200	300	1000	1500	3000
PROB.EQUIV. π	0	0.26	0.34	0.45	0.48	0.485	0.53	0.555	0.71	0.80	1.00

**en miles

Ya que Pedro tiene seleccionado cada boleto de lotería como equivalente a un pago, deberá ser indiferente entre su problema original y un problema similar con boletos de lotería equivalentes en lugar de los pagos, lo cual se puede dibujar mediante un diagrama de árbol como se muestra en la fig. 2.4, en donde para la acción a_1 y el estado θ_1 se tiene que el pago de \$300 000 es equivalente al boleto de lotería con probabilidad $\pi = 0.555$ de ganar \$3,000,000 y con probabilidad $1-\pi$ de perder \$1 500 000. De la misma manera se procede para las otras acciones.

La meta de este análisis es desarrollar un nudo de incertidumbre con dos ramas cuyos pagos sean \$3 000 000 y \$1 500 000, además que las probabilidades representen las posibilidades de lograr cada uno de estos resultados si representamos a G como el evento de ganar \$3 000 000 y S el perder \$1 500 000, entonces de acuerdo con la fórmula de partición tenemos que:

FIG. 2.4
ARBOL DE DECISIONES AL REEMPLAZAR LOS PAGOS CON LOTERIAS EQUIVALENTES.



$P(G) = P(G \text{ y } \theta_1) + P(G \text{ y } \theta_2) + P(G \text{ y } \theta_3)$ y cada uno de los-términos del lado derecho de esta ecuación puede descompo--nerse en el producto de una probabilidad condicional por --una incondicional por ejemplo:

$$P(G \text{ y } \theta_1) = P(G/\theta_1) \; P(\theta_1)$$

y de igual manera para los otros dos términos que al substi tuirlos se tiene.

$$P(G)=P(G/\theta_1)\; P(\theta_1) + P(G/\theta_2)\; P(\theta_2)+P(G/\theta_3)\; P(\theta_3)$$

y para el caso de perder tenemos:

$$P(S) = 1 - P(G)$$

De estas fórmulas se pueden encontrar las cantidades del lado derecho de la expresión. Por ejemplo para la acción a_1 se tiene lo siguiente:

$$P(G) =(0.555)\;(0.3)+(0.485)(0.4)+(0.45)(0.3) = 0.495$$

y para $P(S)=1-P(G)=1-0.495=0.505$

el cálculo para las otras 2 acciones puede efectuarse de --forma similar. El árbol resultante se muestra en la fig.2.5

Este árbol reducido puede ser utilizado por Pedro para-tomar una decisión, nótese que cada nudo de incertidumbre -tiene el mismo conjunto de pagos. Por consiguiente la mejor acción es aquella que tenga la mayor probabilidad de ocurrir

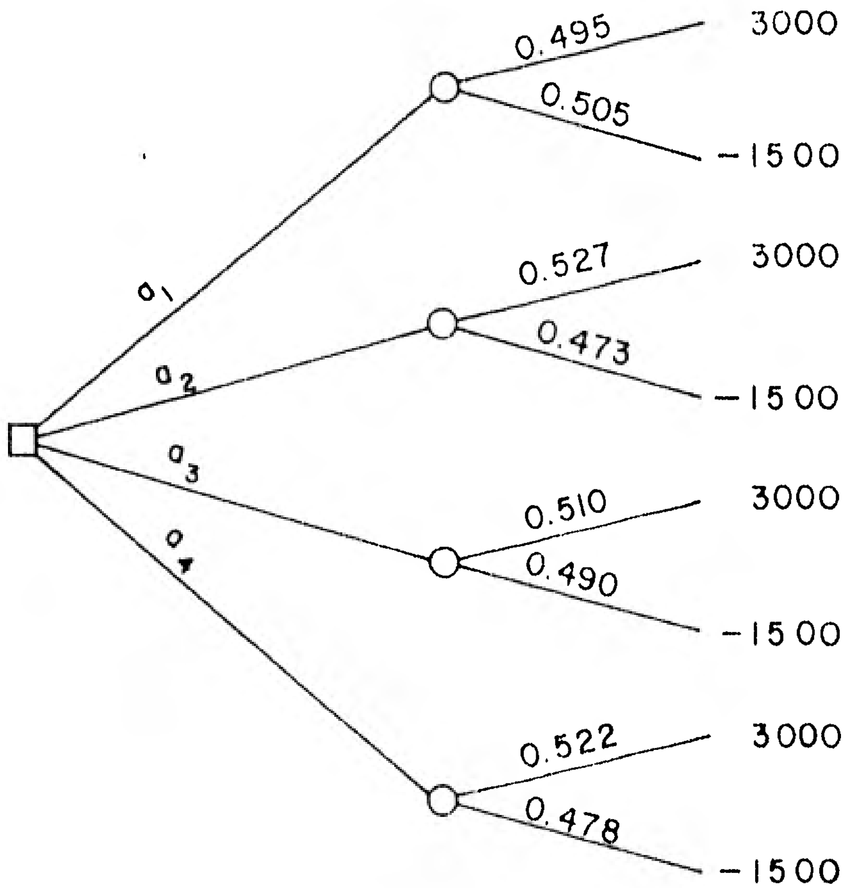


FIG. 2.5 EL ARBOL DE DECISION REDUCIDO.

cia. Pedro escoge la acción a_2 que es la mejor, le siguen- a_4, a_3 y a_1 que es la peor.

Esta reducción del problema original a un problema equivalente con dos resultados es siempre posible, haciendo caso omiso del número de resultados en el problema original.

Está claro que la acción a_2 es preferida en lugar de la acción a_4 que fué la acción escogida cuando el problema fué analizado mediante el criterio del VME lo cual puede verse- en la tabla 2.2. Esta inversión de la acción a_4 a la acción a_2 es el resultado de permitir el tacto subjetivo de Pedro- acerca de la situación de riesgo.

Existe una simplificación adicional que puede ser aprovechada en éste análisis, consiste en reemplazar los pagos- originales con la probabilidad de ganar la lotería, por ejemplo para la acción a_1 se tiene.

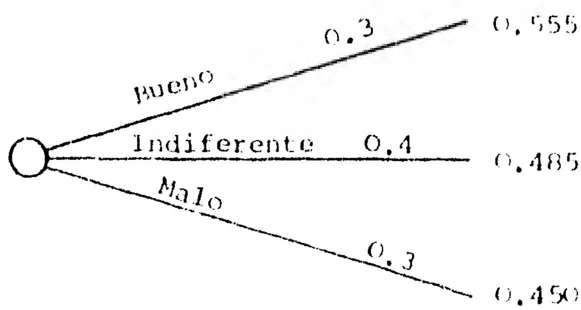


Fig. 2.6

De igual manera se procede para las otras acciones, ahora se calculan los valores esperados de cada acción. Para la acción a_1 se tiene $0.3 \times 0.555 + 0.4 \times 0.485 + 0.3 \times 0.450 = 0.495$ De igual manera para las demás acciones como se muestra en el árbol siguiente:

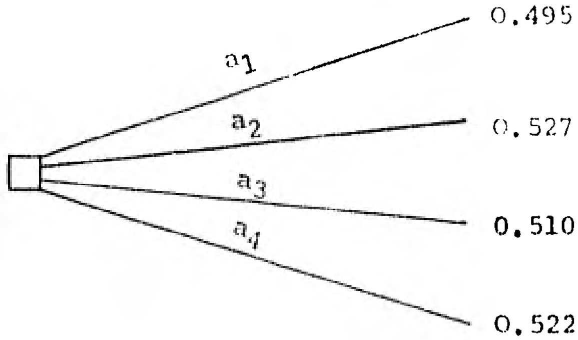


Fig. 2.7

Se puede notar a igual que el otro método que a_2 es la mejor acción.

Esta técnica siempre proporcionará la mejor acción y el mismo ordenamiento de las acciones como la técnica más complicada que se estudió anteriormente, en lugar de reemplazar los pagos de cualquier problema con alguna lotería solo se reemplazan con un valor. Por lo mismo es posible usar el criterio del valor esperado excepto por la necesidad de establecer la función de utilidad y transformar los pagos en probabilidades equivalentes. Note que los valores esperados de la fig. 2.7 son los mismos que las posibilidades de ganar las loterías en la fig. 2.5 Por lo cual es siempre -

más fácil usar ésta última técnica de reemplazar los pagos originales con probabilidades equivalentes de ganar una lotería.

2.1.5 LA CURVA DE UTILIDAD DEL DINERO

La curva de la fig. 2.3 puede ser reemplazada por --- otras curvas equivalentes, cualquiera de estas curvas equivalentes es una transformación lineal de la curva original- la cual nos dará la curva de utilidad del dinero y es ésta- la que se utiliza para reemplazar los pagos en cualquier -- problema de Teoría de Decisiones.

Las nuevas curvas equivalentes a la curva de la fig.- 2.3 son derivadas haciendo una transformación lineal positiva de dicha curva. El valor esperado de la lotería de Pedro es:

E(lotería) = 3000 P(ganar) - 1500 P(perder), dado en- miles, pero P(perder) = 1 - P(ganar)

Substituyendo queda:

$$E(\text{lotería}) = 3000\ P(\text{ganar}) - 1500\ \left[1 - P(\text{ganar})\right]$$

$$= 3000\ P(\text{ganar}) - 1500 + 1500\ P(\text{ganar})$$

$$E(\text{lotería}) = 4500\ P(\text{ganar}) - 1500$$

Esta expresión es una transformación lineal positiva de P(ganar). La razón por lo cual E(lotería) trabaja bien como P(ganar) es que E(lotería) puede expresarse como una función lineal positiva de P(ganar), cualquier transformación lineal positiva de P(ganar) nos dará el mismo resultado en el ordenamiento de las acciones.

Suponga por ejemplo que la variable U sea una transformación lineal positiva de P(ganar). Partimos de la última expresión en donde para la generación de los coeficientes de la transformación lineal asociada con U es que la curva del dinero pasará por el origen (cero pesos = cero utilidad) y por lo cual la pendiente de este punto es uno. Tendremos la siguiente ecuación:

$$U = K_1 \text{ P(ganar)} - K_2$$

Sabemos que $U(0) = 0$

$$U(0) = K_1 \text{ P(ganar)} - K_2$$

La probabilidad de ganar cero pesos es 0.48 (ver tabla 2.4) por lo tanto tenemos: $0 = 0.48 \, K_1 - K_2$

de donde: $K_2 = 0.48 \, K_1$

Para pagos pequeños las utilidades van a ser las mismas que los pagos, por lo cual para poder encontrar el valor de los coeficientes K_1 y K_2 tendremos que calcular la-utilidad para otro pago.

Por ejemplo sea:

$$U(200) = 200$$

Sustituyendo en nuestra ecuación original.

$$200 = K_1 \; P(ganar) - 0.48 \; K_1$$

La probabilidad de ganar 200 es 0.53 (ver tabla 2.4)

$$200 = 0.53 \; K_1 - 0.48 \; K_1$$

$$200 = (0.53 - 0.48) \; K_1$$

$$200 = 0.05 \; K_1$$

$K_1 = 4000$, por lo que K_2 es igual a:

$$K_2 = 0.48 \; K_1 = 0.48 \; (4000)$$

$$K_2 = 1920$$

Substituyendo el valor de estos coeficientes en la -- ecuación original tenemos:

$$U = 4000 \; P(ganar) - 1920$$

La cual utilizaremos para calcular los valores de U y utilizarlos en lugar de los pagos. Ya se calculó anterior-- mente los valores de P(ganar) de cada uno de los pagos y -- utilizaremos estos valores en la ecuación anterior para encontrar los valores de U. Con una serie de valores de U calculados elaboraremos una nueva gráfica que relacione los va lores de los pagos con los valores de U. Por lo tanto, para un pago de 1500, la P(ganar) es 0.80 (ver tabla 2.4) y el correspondiente valor de U es:

$$U = 4000(0.8) - 1920 = 1280$$

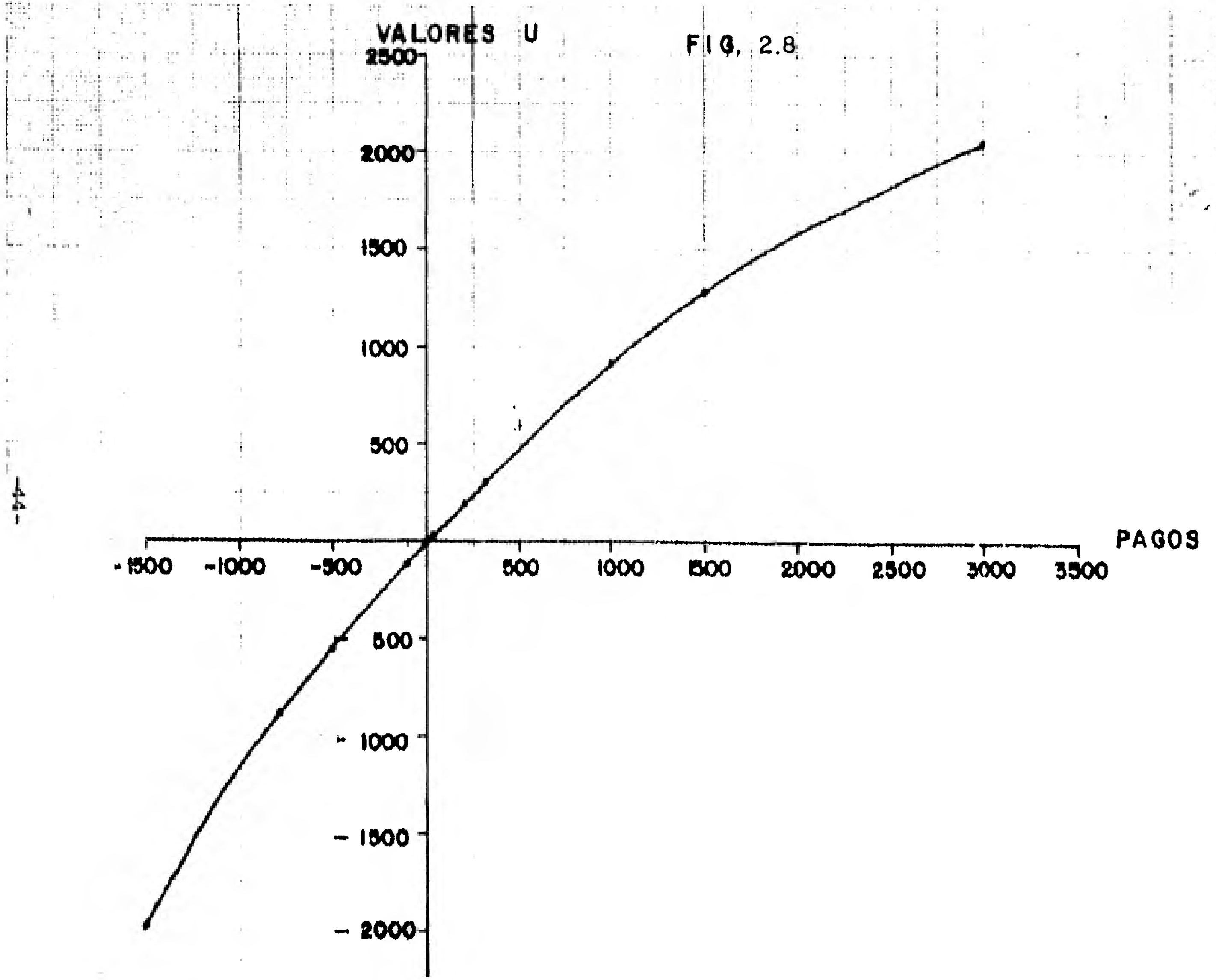
De la misma manera se pueden calcular los otros valores de U correspondiente a cada uno de los pagos, estos valores se encuentran en la tabla 2.5.

TABLA 2.5
PAGOS Y VALORES DE U EQUIVALENTES PARA EL PROBLEMA DE PEDRO

PAGOS	-1500	-800	-500	-100	C	20	200	300	1000	1500	3000
VALORES U	-1920	-880	-560	-120	0	20	200	300	920	1280	2080

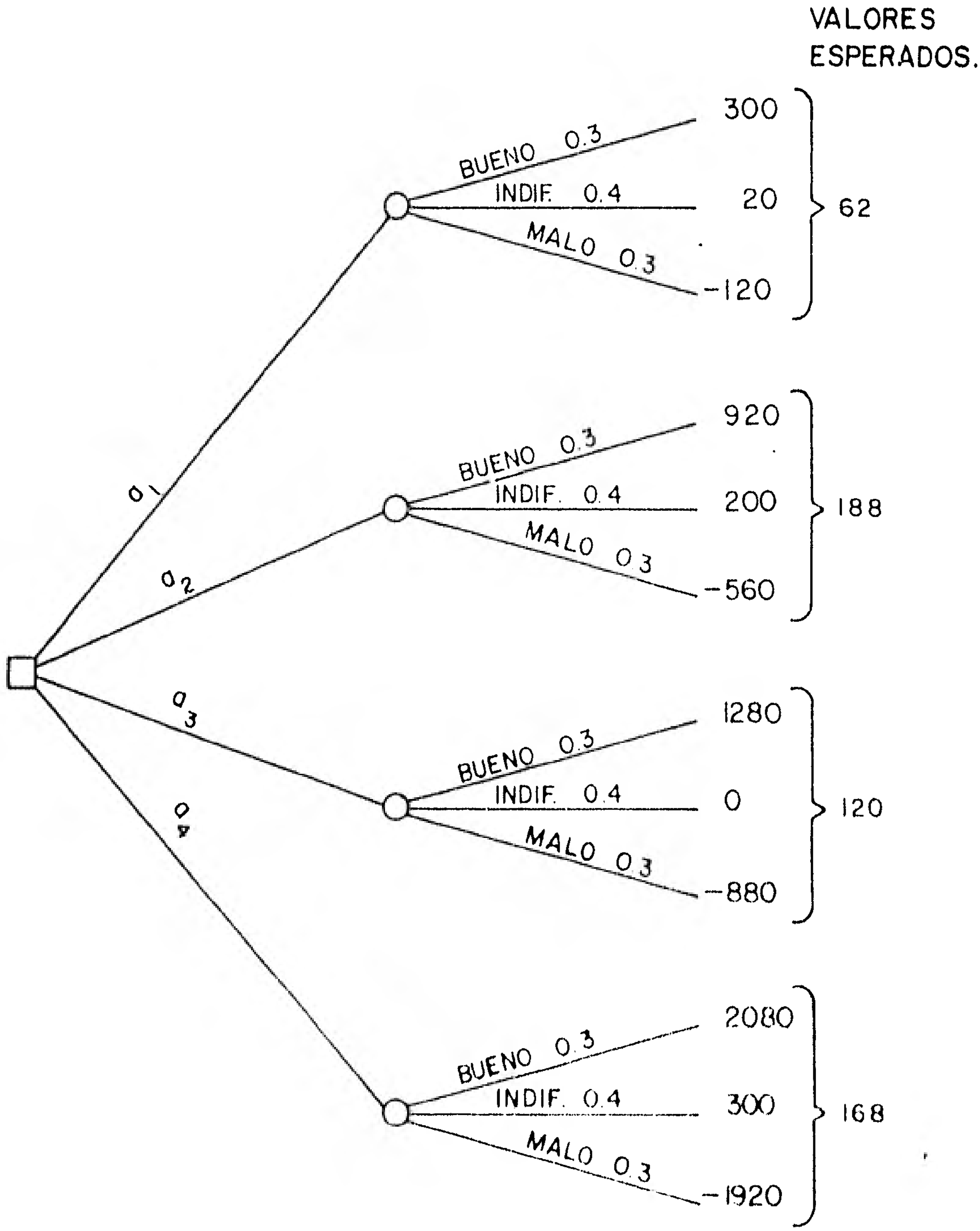
Ahora podemos dibujar una gráfica relacionando los valores U directamente a los pagos como aparece en la figura 2.8.

Con los valores U obtenidos se puede hacer un árbol de decisión del problema original con U reemplazando los pagos como se muestra en la figura 2.9.


VALORES U
PAGOS
2500
2000
1500
1000
500
-500
-1000
-1500
-2000
-1500
-1000
-500
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
FIG. 2.8

- 44 -

FIG. 2.9



VALORES
ESPERADOS.
a_1
a_2
a_3
a_4
BUENO 0.3
INDIF. 0.4
MALO 0.3
300
20
-120
62
920
200
-560
188
1280
0
-880
120
2080
300
-1920
168

Se calculan los valores esperados en cada nudo de incertidumbre (ver fig. 2.9) y se puede observar que el ordenamiento de las acciones es el mismo que los métodos anteriores en donde a_2 es la mejor acción.

Las ventajas de usar la curva de utilidad del dinero es que todos los pagos negativos tienen utilidades negativas y todos los pagos positivos tienen positivas, la utilidad de cero pesos es cero. Además permite de que la opción de no hacer nada permanezca implícitamente en lugar de explícitamente como se tendría en otros cálculos, con lo cual permite clasificar fácilmente cualquier acción.

Para pagos cuyas consecuencias no sean grandes es lógico que las utilidades deban ser identicas a los pagos. Es razonable que sea así, ya que los pagos representan consecuencias serias y debido a esto fué que se usó el concepto de utilidad, en caso de no tener consecuencias serias se hubiera preferido usar el VME como criterio de decisión.

2.1.6 TIPOS DE FUNCIONES DE UTILIDAD

Existen muchos tipos de funciones de utilidad, ya que cada persona tiene su función de utilidad, las cuales pue-- den tomar a grandes rasgos alguna de las tres formas que a- continuación se exponen:

Dado un rango de resultados cualquier función puede - tomar cualquiera de las formas mostradas en la fig. 2.10.

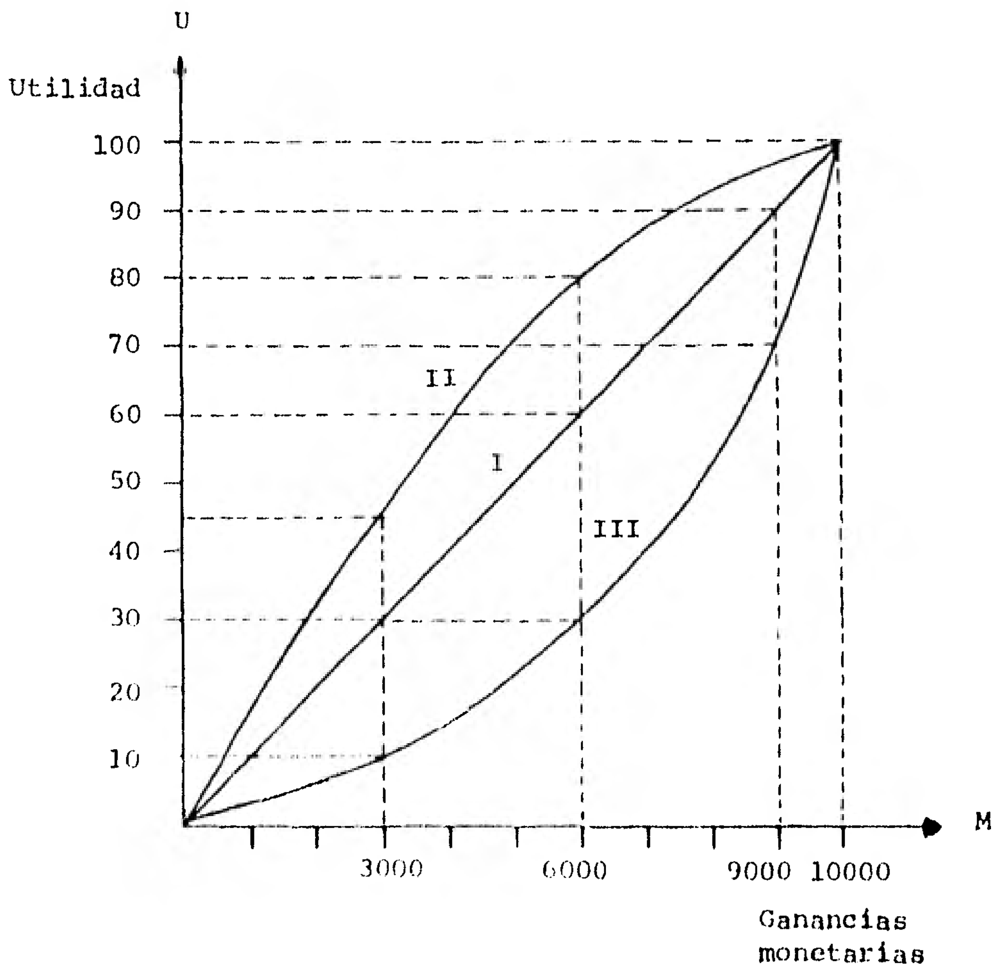


FIG. 2. 10 TRES POSIBLES FORMAS DE FUNCIONES DE UTILIDAD

Las tres funciones mostradas en la fig. 2.10 se incre mentan monótonamente por todas partes. Por ejemplo $dU/dM > 0$ mostrando que los tres individuos prefieren más que menos - dinero. Sin embargo la utilidad marginal de un peso adicional de ganancia varia entre los tres casos, el término marginal se refiere a la última unidad que ha sido agregada. - El individuo I tiene una utilidad marginal constante de dinero ya que $d^2U/d^2M = 0$, indicando que él valúa altamente - una cantidad adicional de ingreso sin importar si es el primer peso de ganancia o es el 10 000 avo. El individuo II su utilidad marginal es decreciente, por ejemplo $d^2U/d^2M < 0$, él valúa subjetivamente un peso de ganancia muy poco. Contrariamente el individuo III valúa subjetivamente cada peso de ganancia altamente, por ejemplo $d^2U/d^2M > 0$; él es una -- persona quien algunas veces toma una apuesta injusta en el- sentido que escogerá una acción para la cuál el valor monetario esperado del resultado es negativo.

Para ilustrar más claramente los efectos de las formas alternativas de las funciones de utilidad consideremos- el problema dado en la siguiente tabla 2.6.

PROBLEMA INICIAL				PROBLEMA CON TRES DIFERENTES TIPOS DE UTILIDAD MARGINAL (UM)					
				UM CONSTANTE (INDIVIDUO I)		UM DECRECIENTE (INDIVIDUO II)		UM CRECIENTE (INDIVIDUO III)	
$p(\theta)$	Estados.	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
1/3	θ_1	6000	3000	60	30	80	45	30	10
1/3	θ_2	6000	6000	60	60	80	80	30	30
1/3	θ_3	6000	9000	60	90	80	95	30	70
VME		6000	6000	UE 60	60	UE 80	73	UE 30	36

TABLA 2.6 PRESENTACION DE UN PROBLEMA DE DECISION CON TRES CLASES DE FUNCIONES DE UTILIDAD MOSTRADAS EN LA FIG. 2.10

En el lado izquierdo de la tabla, el resultado está en términos de dinero, mostrando ambas acciones el mismo valor-monetario esperado. Cuando el mismo problema es resuelto con una función de utilidad lineal, individuo I (fig. 2.10) en--contramos igual utilidad esperada (UE) para las dos acciones. Así cuando la función de utilidad es lineal, maximizar el valor esperado también se hará con la utilidad esperada. Si resolvemos ahora el mismo problema de la tabla 2.6, con una -- función de utilidad marginal decreciente (individuo II), encontramos que la acción a_1 proporciona alta utilidad esperada de acuerdo con nuestra intuición; la curva II representa- a un individuo que es conservador en el sentido de que en --

una situación riesgosa preferirá la acción con la más baja - variabilidad, aún cuando ambas tengan el mismo valor monetario esperado. La curva III representa a un individuo que prefiere el riesgo, es un jugador en el sentido que escogerá la acción con mayor variabilidad aún cuando ambas tengan el mismo valor esperado. Esta función de utilidad da el valor monetario muy alto cuando hay una oportunidad pequeña para grandes ganancias.

Vemos que no hay nada de irracional en el comportamiento de cualquiera de estos individuos. Por ejemplo si al individuo III le ofrecen dos acciones las cuales tengan el mismo resultado monetario seleccionará la que tenga la probabilidad más alta para el resultado más favorable, por lo general este individuo prefiere menos a más riesgo aún cuando -- tengan el mismo resultado monetario.

2.1.7 PROPIEDADES DE LA FUNCION DE UTILIDAD

Supongamos que arbitrariamente seleccionamos dos números cualesquiera que nos representen la utilidad de $10,000 y -$10,000 en el problema de la sección 2.1.3. Por ejemplo sean:

$$U(-\$10{,}000) = 0$$

$$U(\ \$10{,}000) = 100$$

Por lo tanto, tenemos arbitrariamente seleccionados un origen y una escala para la medición de utilidades. Una función de utilidad así deducida es una función cardinal - (mas bien que ordinal) en un sentido muy restringido. Específicamente una transformación lineal monótona de la función de utilidad original, cuando es aplicada a problemas de selección en particular, resulta la misma decisión como la función original. No podemos, sin embargo, decir que si la utilidad de A es 10 ($U_A = 10$) y la de B es 60 ($U_B = 60$) el tomador de decisiones prefiere B seis veces más -- que A. A causa de que la escala es arbitraria, podemos tomar otra escala de elección tal que por ejemplo $U_A = 10$ y $U_B = 600$. Sin embargo, las magnitudes relativas de las diferencias entre los números de utilidad son significantes en que éstos no cambian para una transformación lineal. -- Por ejemplo supongamos que $U_A - U_B > U_C - U_D$. Escojamos -- una transformación lineal $U = aU^* + b$, $a > 0$. Sustituyendo esta transformación en la desigualdad anterior tenemos:

$$(aU_A^* + b) - (aU_B^* + b) > (aU_C^* + b) - (aU_D^* + b)$$

$$U_A^* - U_B^* > U_C^* - U_D^*$$

Por lo tanto, las diferencias en la utilidad relativa son invariantes bajo una transformación lineal. A causa de esta característica, la forma general de la función de utilidad no es dependiente del origen y de la escala seleccionada. Es decir, la segunda derivada de la función de utilidad es invariante bajo una transformación lineal.

Ahora podemos hacer el intento de resumir más formalmente las propiedades de la función de utilidad. Una función es una regla que asocia los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. En el caso de una función de utilidad, estamos buscando una regla (función) que asociará o asignará números, U(M) del conjunto de todos los números, al conjunto de los resultados monetarios (M), o como los llamaremos aquí, ingresos esperados.

A cada ingreso esperado M, le corresponde un número U(M), al cual le llamamos la utilidad del ingreso. Esta función tiene las siguientes propiedades:

1.- $U(M_1) > U(M_2)$, si el individuo prefiere M_1 a M_2

2.- Si M es la esperanza con probabilidad P, el individuo elije $U(M) = P\,U(M_1) + (1-P)\,U(M_2)$ ó $U(M) = E\,U(M)$, donde M es una variable aleatoria

ria

3.- La función de utilidad está acotada, es decir, $U(M) \neq +\infty$

La existencia de una función de utilidad con las propiedades mencionadas implica que el tomador de decisiones satisface las siguientes cuatro suposiciones concernientes a sus preferencias:

1.- (Ordenación de alternativas). En todo caso, -- $M_1 > M_2$ (que se lee como: M_1 es preferida a --- M_2), $M_1 = M_2$ ó $M_2 > M_1$.

2.- (Transitividad). Si $M_1 \geq M_2$ y $M_2 \geq M_3$, enton-- ces $M_1 \geq M_3$.

3.- (Continuidad). Si $M_1 > M_2 > M_3$, entonces ahí - existen probabilidades P para las cuales $\{M_1, M_3; P, (1-P)\} > M_2$ ó $M_2 > \{M_1, M_3; P, (1-P)\}$.

4.- (Independencia de alternativas irrelevantes). Si $M_1 > M_2$, y M_3 es otro ingreso, entonces $\{M_1, M_3; P, (1-P)\} > \{M_2, M_3; P, (1-P)\}$.

Aunque las reglas mencionadas constituyen una técnica para asignar números de utilidad a resultados monetarios, ellas no prueban la existencia de una función de utilidad. Sin embargo, asumiremos que dicha función existe y puede ser especificada para decisiones individuales.

Como puede haber malentendidos en el concepto de uti_
lidad, enumeraremos algunas falsedades que frecuentemente suscitan discusiones sobre la utilidad.

Falsedad I

$\{M_1, M_3; P, (1-P)\} > M_2$ porque la utilidad de la primera es más grande que la segunda. Esto es falso porque las preferencias entre las esperanzas son lógicamente a priori a la función de utilidad.

Falsedad II

Si $M_1 > M_2 > M_3 > M_4$, y las utilidades son: $U(M_1) + U(M_4) = U(M_2) + U(M_3)$, entonces $\{M_2, M_3; 1/2, 1/2\} > \{M_1, M_4; 1/2, 1/2\}$ dado que la variancia del primero es menor que la del segundo. Esta declaración es otra vez falsa porque nie_
ga qué preferencia viene primero, esto es, los números de utilidad esperada tienen consideradas variancias en las -- preferencias originales.

Falsedad III

Si $M_1 > M_2 > M_3 > M_4$ y la función muestra que ---- $U(M_1) - U(M_2)$ es más grande que $U(M_3) - U(M_4)$, entonces un cambio de M_2 a M_1 es preferido que uno de M_4 a M_3. Esto -- también es falso, ya que las funciones de utilidad son --- construidas de preferencia entre pares.

Un ejemplo simple ayudará en la interpretación de es_ ta falsedad. Supongamos que un tomador de decisiones dice que él es indiferente entre la Opción 1 Y la Opción 2 para las siguientes tablas de ganancias:

TABLA 2.7

PROBABILIDAD	ESTADO	OPCION 1 (DINERO SEGURO)	OPCION 2 (LOTERIA EQUIVALENTE)
1/2	θ_1	\$ 1,600	\$ 0
1/2	θ_2	\$ 1,600	\$ 3,000

TABLA 2.8

PROBABILIDAD	ESTADO	OPCION 1 (DINERO SEGURO)	OPCION 2 (LOTERIA EQUIVALENTE)
1/2	θ_1	\$ 1,400	\$ 0
1/2	θ_2	\$ 1,400	\$ 1,600

Haciendo las asignaciones $U(\$0)=0$ y $U(\$3,000)=1$, entonces del primer conjunto de preferencias tenemos:

$$U(\$1,600) = (1/2)\ (0) + (1/2)\ U(\$3,000)$$
$$= 1/2$$

y del segundo conjunto:

$$U(\$1,400) = (1/2)\ (0) + (1/2)\ U(\$1,600)$$

$= 1/4$

Como ejemplo de una decisión que implica un cambio - en la posición contra las ganancias actuales, consideremos ahora el siguiente problema de decisión y las elecciones - implicadas por los puntos de utilidad deducidos anterior-- mente.

TABLA 2.9

PROBABILIDAD	a_1	a_2
1/2	θ_1 no cambia	cambia de \$1,600 a \$3,000
1/2	θ_2 cambia de \$0 a \$1,400	no cambia

Si cada acción fuera evaluada usando los puntos de u tilidad deducidos, uno podría suponer (incorrectamente) -- que:

$$U(a_1) = \frac{1}{2}\,U(\$0) + \frac{1}{2}\,(U(\$1,400)-U(\$0)) = \frac{1}{8}$$

$$U(a_2) = \frac{1}{2}\,(U(\$3,000)-U(\$1,600)) + \frac{1}{2}\,U(\$0) = \frac{1}{4}$$

lo cual implica que a_2 sería elegida sobre a_1. Sin embar-- go, en términos de la actual ganancia involucrada, el toma dor de decisiones tiene la siguiente elección:

TABLA 2.10

PROBABILIDAD		a_1	a_2
1/2	θ_1	\$ 0	\$ 1,400
1/2	θ_2	\$ 1,400	\$ 0

Pero claramente, en este caso, el tomador de decisiones sería indiferente entre a_1 y a_2. La falsedad está en asumir que la diferencia en la utilidad entre el par de pares (\$0 a \$1,400) y (\$1,600 a \$3,000), está dada por la -- función de utilidad que fué deducida usando sólo preferencias entre dos opciones (un par). Por supuesto, una función de utilidad podría ser deducida utilizando dos opciones que involucren cambios entre dos posiciones. Pero una función de utilidad obtenida por la teoría dada en esta -- sección no es en cierto modo una función. Por lo tanto, la función de utilidad permite la comparación entre dos posiciones a lo largo de la curva, pero no permite la comparación entre las diferencias de dos pares de posiciones.

FALSEDAD IV

Comparaciones interpersonales de utilidad son posibles. La siguiente discusión ilustra que esto es otra falsedad.

El índice sugerido anteriormente para la medición de la utilidad no dice nada acerca de la cantidad de "satis-- facción" que experimenta un individuo como resultado de haber obtenido dinero. Debemos ser cuidadosos para distin--- guir entre la "actual" medida de utilidad y el "sustituto" de la medida de utilidad, lo cual sólo implica que unica-- mente cantidades medibles pueden ser asociadas con la utilidad. Sin embargo, esta distinción parece ser totalmente innecesaria si uno considera que la mayoría de las cantidades medidas que pueden ser concebidas o encontradas en o-- tros trabajos científicos o de aplicación, son medidas --- "sustitutas".

Consecuentemente, la "utilidad" que hemos medido representa un concepto que será utilizado en la toma de decisiones individuales.

2.2. TEORIA DE LA PROBABILIDAD

El estudio de la Teoría de la Probabilidad es una --- herramienta muy valiosa para analizar problemas de toma de - decisiones, aunque también resulta muy útil para otros cam-- pos de la ciencia; en este trabajo solo nos dedicaremos a ex poner los principios y conceptos que más aplicación tengan.

La Teoría de la Probabilidad es esencialmente de natu- raleza deductiva, es decir, en base a hechos conocidos de un experimento se deducen las probabilidades de que ocurran --- ciertos eventos de interés particular. En cambio la Estadís- tica es de naturaleza más inductiva y también las probabili- dades se usan para comparar los diferentes métodos de infe-- rencia.

2.2.1 ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

A la totalidad de los resultados que se tienen al ha-- cer un experimento recibe el nombre de espacio de muestras.

Se llama probabilidad (clásica) de un suceso A, la re- lación del número de resultados que son favorables a este su ceso y el número total de resultados posibles del experimen- to. Se determina por la fórmula: $P(A) = M/N$, donde M es el- número de resultados favorables al suceso A; N es el número- de eventos favorables al experimento.

Una variable aleatoria X es discreta si su rango R_X es un subconjunto discreto de números reales y se llama continua si su rango R_X es un intervalo o unión de intervalos sobre la línea de los reales.

2.2.2 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Si A y B son dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral S, la probabilidad condicional de que ocurra A, dado que haya ocurrido B, se denota como:

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) \qquad \ldots(2.1)$$

Los eventos A y B son independientes sí y solo sí:

$$P(A/B) = P(A) \qquad \ldots(2.2)$$

lo que significa que el valor de la probabilidad de que ocurra A no es influída por la ocurrencia previa de B. Sustituyendo (2.2) en (2.1), se obtiene:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \qquad \ldots(2.3)$$

expresión que se conoce como ley de multiplicación de probabilidades de eventos independientes.

2.2.3 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria, para evaluar la probabilidad relacionada con X, se puede usar la función de probabilidad para variables aleatorias discretas ó la función de densidad de probabilidad (pdf) que determina la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua; ambas denotadas por p(X). Para representar la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x_i, puede utilizarse la notación $p(x_i)$.

Para variables aleatorias discretas se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$0 \leq p(x_i) \leq 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_{\forall x} p(x\ ) = 1$$

Sea X una variable aleatoria continua en el intervalo $a \leq X \leq b$, la función p(X) debe cumplir con las condiciones siguientes:

$$p(X) \geq 0$$

$$\int_a^b p(X)dX = 1$$

También se tiene la función de distribución, la cual tiene la ventaja que se puede emplear tanto para variables-aleatorias discretas como para continuas. La función de distribución para una variable aleatoria X, se define como:

$$P(X_t) = P(X \leq X_t)$$

El valor de esta función es la probabilidad del evento en - donde la variable aleatoria toma cualquier valor igual o menor a X_t.

Si la variable aleatoria es discreta, la función de - distribución, definida en el intervalo $a \leq X \leq b$ es:

$$P(X_t) = P(X \leq X_t) = \sum_{x_i = a}^{x_t} p(x_i) \qquad \ldots(2.4)$$

Si la variable aleatoria es continua, definida en el- intervalo $a \leq X \leq b$, la función $P(X_t)$ es:

$$P(X_t) = P(X \leq X_t) = \int_a^{X_t} p(X)dX \qquad \ldots(2.5)$$

Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de- probabilidad es $p(X)$, y $h(X)$ una función cualquiera de la - variable aleatoria. La esperanza matemática de $h(X)$ se define como:

$$E\left[h(X) \right] = \sum_{\forall x} h(X)\, p(X) \qquad \ldots(2.6)$$

La esperanza matemática de h(X), cuando X es una variable aleatoria continua y su pdf es p(X), se define como:

$$E\left[h(X)\right] = \int_a^b h(X)\ p(X)\ dX \quad , \qquad a \leq X \leq b \qquad \ldots(2.7)$$

2.2.4 MEDIA Y VARIANCIA DE UNA FUNCION DE PROBABILIDAD

A continuación analizaremos dos de las medidas más importantes que son la media y la variancia, las cuales determinan la localización y la variación de una distribución de probabilidad.

Se llama momento de orden n con respecto al origen de la variable aleatoria X, a la esperanza matemática de la función $h(X) = X^n$. Si $n = 1$, se tiene el primer momento con respecto al origen. Este momento se llama la media de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X y se representa por μ .Para el caso discreto se tiene:

$$\mu = E(X) = \sum_{\forall x} X\ p(X) \qquad \ldots(2.8)$$

y en el continuo

$$\mu = \int_a^b X\ p(X)\ dX \qquad \ldots(2.9)$$

Se llama momento de orden n con respecto a la media - de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, a la esperanza matemática de la función $h(X) = (X - \mu)^n$. Si $n = 2$, se tiene el segundo momento con respecto a la media, a este momento se le conoce por variancia y se identifica como σ^2. Para el caso discreto la variancia es:

$$\sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2 \right] = \sum_{\forall x} (X - \mu)^2 \; p(X) \qquad \ldots(2.10)$$

y para el continuo

$$\sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2 \right] = \int_a^b (X - \mu)^2 p(X) \, dX \qquad \ldots(2.11)$$

La raíz cuadrada de la variancia define el concepto de desviación estándar de la variable aleatoria X y se representa por σ. Entonces:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

la desviación estándar explica la dispersión promedio de -- los valores posibles de la variable aleatoria con respecto- a su media.

2.2.5 COVARIANZA Y CORRELACION

La esperanza matemática de productos de variables --- aleatorias es de gran interés en la Teoría Estadística. La-covarianza mide la relación que existe entre dichas variables aleatorias.

Sean X y Y variables aleatorias de un espacio muestral S, con los respectivos conjuntos:

$$X(S) = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$Y(S) = y_1, y_2, \ldots, y_m$$

formamos el conjunto producto.

$$X(S)\ Y(S) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_m)$$

definiendo la probabilidad de $(x\ , y\ )$ como $p(X=x\ , Y=y\ )$ que escribimos $h(x\ , y\ )$, en donde la función h se llama distribución conjunta o función de probabilidad conjunta de (X,Y) la cual por lo general se muestra en forma de tabla.

TABLA 2.

X	y_1	y_2	...	y_m	SUMA
x_1	$h(x_1, y_1)$	$h(x_1, y_2)$	...	$h(x_1, y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$h(x_2, y_1)$	$h(x_2, y_2)$	...	$h(x_2, y_m)$	$f(x_2)$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_n	$h(x_n, y_1)$	$h(x_n, y_2)$	...	$h(x_n, y_m)$	$f(x_n)$
SUMA	$g(y_1)$	$g(y_2)$	...	$g(y_m)$	

En donde se define a $f(x_i)$ como la suma de los elementos de la fila i-ésima y $g(y_j)$ la suma de los elementos de la columna j-ésima, que son las distribuciones individuales de X y Y respectivamente.

La distribución conjunta h satisface las condiciones:

$$h(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) = 1$$

Si X y Y tienen la distribución conjunta anterior (y las respectivas medias μ_x y μ_y), entonces la covarianza de X y Y denotada por Cov(X,Y) se define por:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y)\, h(x_i, y_j) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right]$$

ó equivalentemente:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_x\, \mu_y = E(XY) - \mu_x\, \mu_y \qquad \ldots(2.12)$$

La correlación se define por:

$$\rho\,(X,Y) = \mathrm{Cov}\,(X,Y)/\sigma_x \cdot \sigma_y \qquad -1 \leq \rho \leq 1 \qquad \ldots(2.13)$$

La covarianza puede ser positiva, negativa o igual a cero, dependiendo del caso que se trate.

2.2.6 DISTRIBUCION BINOMIAL

Esta distribución de probabilidad es aplicable para eventos discretos y sucede cuando: hay solamente dos posibles resultados, llamados favorables y desfavorables; existen n pruebas independientes, siendo n una constante dada; la probabilidad de un caso favorable es constante para todas las pruebas y se denota como p, por lo que q = 1 - p es la probabilidad del caso desfavorable.

Sea X los casos favorables ó éxitos, entonces la probabilidad de X casos específicos favorables en n pruebas es

$$p^{x} \, (1-p)^{n-x}$$

es de interés conocer la probabilidad de que cualquier combinación de casos favorables se presente. El número total de maneras en que pueden presentarse los X éxitos es igual al de las combinaciones de n objetos, es decir:

$${}_nC_x = n!/x!\,(n-x)!$$

por lo que la probabilidad de cualquier caso favorable al realizar n veces un experimento de Bernoulli, esta dado por

$$p(X) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\, q^{n-x} \quad , \text{ donde } X=0,1,2,\ldots,n \qquad \ldots(2.14)$$

la función de probabilidad definida por esta ecuación se llama binomial con sus parámetros n y p.

La media de la variable aleatoria X con distribución binomial vale: $\mu = np$ y variancia igual a: $\sigma^2 = npq$ de donde se obtiene que la desviación estándar vale $\sigma = \sqrt{npq}$.

2.2.7 DISTRIBUCION DE POISSON

Esta distribución es aplicable para eventos discretos siendo muy similar a la distribución binomial al considerar que el número de veces que se repite el experimento de Bernoulli tiende a infinito, mientras que la probabilidad p de obtener un éxito tienda a cero. Por lo que su expresión esta dada por:

$$p(X) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} \quad , \text{ donde } \lambda = np \quad \ldots(2.15)$$

Empíricamente puede obtenerse que cuando $n \geq 50$ y $np \leq 5$, los resultados obtenidos con la distribución de Poisson se aproximan a los dados por la distribución binomial.

La media de la variable aleatoria X con distribución de Poisson de parámetro λ es: $\mu = \lambda$ y variancia $\sigma^2 = \lambda$, Este tipo de distribución se usa en los campos de la - investigación de operaciones y en la administración científica. Se presenta por ejemplo al estudiar las demandas de - servicios y la rapidez con que se ofrecen estos servicios;- el uso de las pistas de aterrizaje de un aeropuerto, etc.

2.2.8 DISTRIBUCION UNIFORME

Esta distribución es constante por lo cual es la más- sencilla de las distribuciones continuas. Sea X la variable aleatoria con distribución uniforme p(X), en el intervalo - $a < X < b$, en donde a y b son números reales. La función de - densidad de probabilidad esta dada por:

$$p(X) = \frac{1}{b - a} \qquad \ldots(2.16)$$

La función de distribución para una variable aleato-- ria uniforme es:

$$F(X_t) = \int_{-\infty}^{t} p(X)\, dX \qquad \ldots(2.17)$$

se deduce que su media es $\mu = \frac{a + b}{2}$ y variancia $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ de donde se obtiene la desviación estándar $\sigma = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}$.

La distribución uniforme raramente es una descripción-apropiada del comportamiento de fenómenos físicos, biológicos o sociales. Su importancia estriba en que cualquier distribución de probabilidad continua puede transformarse fácilmente primero en una distribución uniforme y luego en una distribución continua dada.

2.2.9 DISTRIBUCION NORMAL

Con toda seguridad la función de densidad de probabilidad normal es la más usada en la Teoría de la Probabilidad, debido a que los problemas prácticos suceden con este tipo de variables aleatorias continuas distribuidas normalmente y su aproximación es excelente para un gran número de casos.

La pdf de la variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación estándar σ es:

$$p(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \ldots(2.18)$$

La gráfica correspondiente para una variable aleatoria normal es una curva simétrica en forma de campana, tal como aparece en la fig. 2.11 , en donde el parámetro σ controla el grado relativo del aplanado de la campana, si σ disminuye hace que la función tenga un pico más marcado, lo que da mayores probabilidades de que X se acerque más a μ.

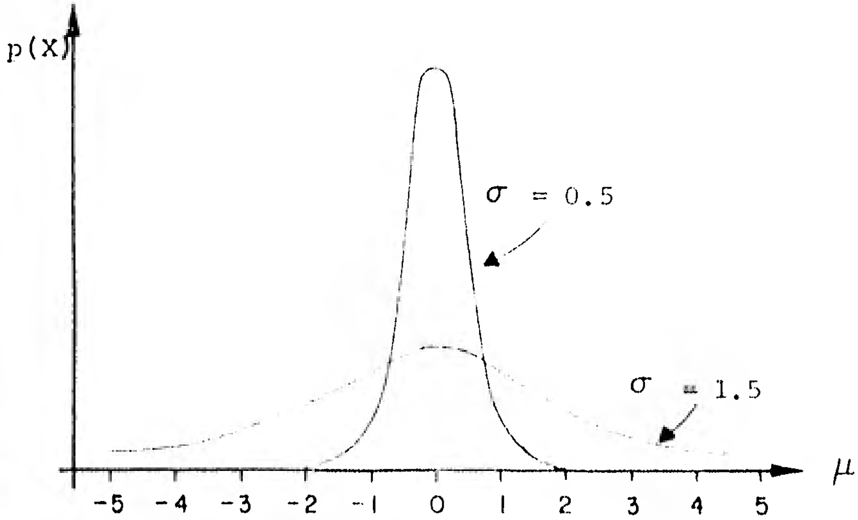


FIG. 2.11 DISTRIBUCION NORMAL

La probabilidad de que X adquiera valor en el intervalo de $a \leq X \leq b$ es:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}\, dX \qquad \ldots(2.19)$$

Llamando Z a la variable normal estándarizada, donde-Z tiene $\mu=0$ y $\sigma=1$. Su función de densidad de probabilidad es:

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-Z^2/2} \qquad \ldots(2.20)$$

por lo que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, con función de distribución normal - estándar dada por:

$$p(Z_t) = \int_{-\infty}^{Z_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-Z^2/2}\, dZ \qquad \ldots(2.21)$$

teniendo la tabla de distribución normal estándar de Z, se podrá valuar la función de distribución para cualquier media y variancia.

2.2.10 DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Otra variable aleatoria que se presenta con mucha frecuencia es la exponencial, que sirve para procesos estocásticos, los cuales están generalmente en función del tiempo. La pdf esta dada por:

$$p(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \qquad \begin{matrix} \lambda > 0 \\ t > 0 \end{matrix} \qquad \ldots(2.22)$$

Esta distribución desempeña un papel importante en la descripción de gran variedad de fenómenos, especialmente en el área de la confiabilidad; en problemas de líneas de espera, en donde la distribución exponencial de parámetro λ se utiliza para determinar el tiempo que transcurre hasta que llega a la estación de servicio la primera unidad, las cuales llegan a la estación según un proceso de Poisson.

2.2.11 DISTRIBUCION GAMMA

La distribución gamma es muy importante no sólo en la teoría de la probabilidad, sino en muchas áreas de las matemáticas. Se usa para determinar el tiempo que transcurre hasta que llegue a la estación de servicio la k-ésima unidad, las cuales llegan a la estación según un proceso de Poisson.

Sea la función gamma dada por:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} \; e^{-t} \; dt \qquad \ldots(2.23)$$

donde la cantidad que puede variar es n; en consecuencia la función gamma depende de n.

Nótese que si se reemplaza n con m+1 y luego se hace la variable t de integración igual a θX se tiene:

$$1 = \Gamma(m+1) = \int_0^{\infty} \theta^{m+1} \; X^m \; e^{-\theta X} \; dX \qquad \ldots(2.24)$$

por lo que la función de distribución es:

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\theta^{m+1} \; X^m}{\Gamma(m+1)} \; e^{-\theta X} \; dX \qquad \ldots(2.25)$$

X es una variable aleatoria gamma con parámetros m, θ si su pdf es:

$$p(X) = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \; \theta^{m+1} \; X^m \; e^{-\theta X} \quad \text{para } X > 0,\; m > -1,\; \theta > 0 \qquad \ldots(2.26)$$

con media $\mu = (m+1)/\theta$ y variancia $\sigma^2 = (m+1)/\theta^2$. El máximo valor para la densidad gamma ocurre con $X = m/\theta$. Si $m = 0$ la densidad gamma es identica a la de una variable aleatoria exponencial con parámetro θ.

2.2.12 DISTRIBUCION BETA

La distribución beta con parámetros a y b es muy flexible para describir datos empíricos. En la programación de proyectos (ruta crítica con duraciones aleatorias) se utiliza para estimar el tiempo requerido para realizar cada una de sus actividades. Su pdf es:

$$p(X) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} X^{a-1} (1-X)^{b-1}, \quad \begin{array}{l} 0 < X < 1 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{array} \quad \ldots(2.27)$$

al evaluar las integrales incluidas se encuentra que: la media es $\mu = a/(a+b)$ y variancia $\sigma^2 = ab/(a+b)^2(a+b+1)$.
El valor máximo de la densidad ocurre en $X = (a-1)/(a+b-2)$. Si se cambian los parámetros a y b en forma apropiada, la densidad beta puede tomar una gran cantidad de formas distintas en el intervalo (0,1). Un caso particular de la distribución beta es la uniforme que se obtiene haciendo $a=b=1$,

2.3 INFERENCIA ESTADISTICA

Frecuentemente y de hecho casi siempre la Teoría de -las decisiones se enfrenta a situaciones que se refieren al futuro (que estado de la naturaleza sucederá), en donde las predicciones son muy importantes para calcular el grado de-confianza de las alternativas que se estudian. Como una ---gran mayoría las situaciones futuras son estocásticas (probabilísticas) y que ningún método o técnica por eficiente -que sea, puede garantizar que la alternativa electa sea la-más conveniente, por esto, la Inferencia Estadística se le considera como pilar de la Teoría de las Decisiones.

En la presente sección se desarrollan los principios-fundamentales en los que se basa la Inferencia Estadística, enfocándose al aspecto económico, ya que las alternativas -generalmente se evalúan por su valor económico. Empezaremos por mencionar brevemente los tipos de inferencia lógica de-los que Aristóteles hace la siguiente clasificación: Deductiva, Inductiva y Reductiva.

La Inferencia Deductiva se obtiene deduciéndola de --otras declaraciones llamadas premisas; si las premisas son-verdaderas, la conclusión debe ser cierta también; sin em--bargo, esta inferencia, por sí sola es inadecuada para servir como base a la Inferencia Estadística, sobre todo por - que no siempre la regla deductiva conduce a un resultado -- cierto, pues existe la posibilidad de la excepción.

Cuando hacemos inferencias de experiencias pasadas, - para predecir experiencias futuras, logrando una generaliza ción, hemos llegado a ló que se conoce como Inferencia In-- ductiva.

La Inferencia Reductiva, resulta ser más completa, -- pues en ella se incluye el estudio de hechos o sucesos con- sus respectivas teorías que explican su comportamiento.

En el lenguaje común se usa la probabilidad en un sen tido subjetivo. Por ejemplo tenemos suposiciones tales como quizá llueva mañana o mi equipo favorito tiene 3 probabili- dades en 4 de ganar, etc. En cada uno de estos casos, el in dividuo que hace la suposición usa su propia experiencia co mo base para el enunciado y no se refiere a ningun experi-- mento que pueda repetirse. Estos son ejemplos de los usos - de las probabilidades subjetivas, las que basan su validez- estrictamente en la creencia de los individuos que las enun cian.

Las técnicas bayesianas usan las probabilidades subje tivas que miden los grados de creencia con relación al valor del parámetro desconocido. Estas probabilidades subjetivas se usan para definir lo que se llama la distribución a-priori del parámetro. En consecuencia cuando se usan los métodos bayesianos se actúa como si un parámetro desconocido fuera una variable aleatoria y tiene una distribución a priori conocida. Si se tiene una certeza relativa respecto al valor del parámetro, entonces se escoge una a priori con variancia pequeña, si se tiene menor certidumbre se escoge una a priori con variancia mayor. Con la a priori y los valores de la muestra se usan para calcular lo que se conoce como la distribución a posteriori del parámetro. Luego se usa la distribución a posteriori para formar un estimador del parámetro desconocido.

El grado de confianza que tengamos en una proposición dependerá del estado de nuestra información inicial, en muchas situaciones existe información adicional con relación al parámetro θ desconocido; si se puede usar esta información adicional para formar una distribución a priori del parámetro θ, entonces se pueden aplicar los métodos bayesianos.

Esquemáticamente el proceso de revisión de probabilidades, dado un conjunto de datos nuevos, se ilustra en la - figura 2.12.

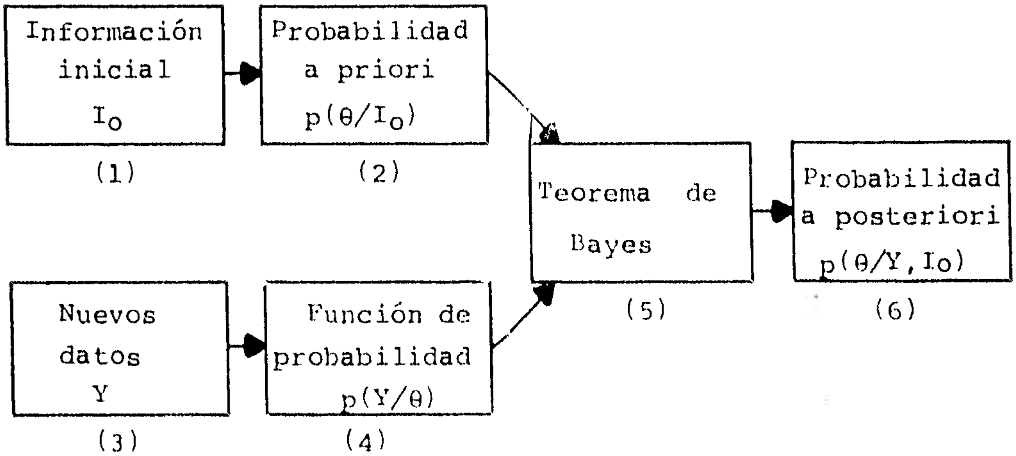


FIG. 2.12 PROCESO DE REVISION DE PROBABILIDADES, DADO DATOS NUEVOS.

Los cuadros superiores (1) y (2) indican que la probabilidad inicial ó a priori para la proposición θ, $p(\theta/I_o)$,- está basada en la información inicial I_o (datos, estudios - previos, consideraciones teóricas, observaciones casuales,- etc.). Los cuadros de abajo (3) y (4) muestran la función - de probabilidad $p(Y/\theta)$ para la nueva observación Y, dada la proposición θ. Combinando la probabilidad a priori $p(\theta/I_o)$, con la función de probabilidad $p(Y/\theta)$, podemos obtener por- medio del teorema de Bayes la función de densidad de probabilidad (pdf) a posteriori $p(\theta/Y,I_o)$, que dependerá tanto - de la información inicial I_o, como de los nuevos datos de -

la muestra Y.

El proceso de revisión de probabilidades representa los grados de confianza en proporción a la nueva información incorporada que debe ser operacional y cuantitativa. Las técnicas bayesianas son de mucha aplicación en diferentes campos de la ciencia, pero solo nos dedicaremos a la aplicación en Teoría de Decisiones.

2.3.1 TEOREMA DE BAYES

Un elemento esencial en Teoría de Decisiones es el teorema de Bayes, conocido también como el principio de la probabilidad inversa que a continuación se describe.

Sea $p(Y,\theta)$ la densidad conjunta para las observaciones aleatorias del vector Y' de n observaciones con distribución de probabilidad $p(Y/\theta)$ la cual depende de los valores del parámetro θ. Donde θ tiene una distribución de probabilidad $p(\theta)$, entonces:

$$p(\theta/Y)\, p(Y) = p(Y,\theta) = p(Y/\theta)\, p(\theta)$$

dado los datos observados Y, la distribución condicional de θ dado Y es:

$$p(\theta/Y) = \frac{p(Y/\theta)\ p(\theta)}{p(Y)} \qquad \ldots(1)$$

$$\text{donde:}\quad p(Y) = c^{-1} = \begin{cases} \int p(Y/\theta)\ p(\theta)\ d\theta, & \theta \text{ continua} \\ \sum p(Y/\theta)\ p(\theta) & \theta \text{ discreta} \end{cases}$$

Así podemos escribir la ecuación (1) como:

$$p(\theta/Y) = c\ p(y/\theta)\ p(\theta) \qquad \ldots(2)$$

la ecuación (1) es equivalente a la (2) y es el teorema de- Bayes. En esta expresión $p(\theta)$, es la distribución de θ --- a priori. Similarmente $p(\theta/Y)$ es la distribución a posterio ri de θ dado Y. La cantidad c es tomada como una constante- necesaria para tener la seguridad de que la integral ó la - sumatoria de la distribución a posteriori dará uno.

Ahora,dados los datos Y en la ecuación (2), la $p(Y/\theta)$- se puede representar como una función no de Y pero si de θ, cuando así sucede, es llamada la función de probabilidad de θ dado Y, la cual denotaremos como $\ell(\theta/Y)$. Entonces escri- biremos la fórmula de Bayes como:

$$p(\theta/Y) = \ell(\theta/Y)\ p(\theta) \qquad \ldots(3)$$

$$\text{ó}\quad p(\theta/Y) \propto p(\theta)\ p(Y/\theta)$$

El teorema de Bayes dice que la distribución de probabilidad a posteriori para el parámetro θ, $p(\theta/Y)$, dada la información de la muestra Y es proporcional al producto de la distribución a priori para θ, $p(\theta)$, y la pdf $p(Y/\theta)$ que vista como una función de θ es la función de probabilidad para θ dado Y. La función de probabilidad $\ell(\theta/Y)$ juega un papel importante, ya que es la función a través de la cual los datos Y modifican el conocimiento a priori de θ. La pdf a posteriori es empleada para hacer las inferencias acerca del comportamiento del parámetro θ. En las secciones posteriores se analizará el teorema de Bayes para el caso continuo.

Ejemplo 2.3.1 Supongamos que tenemos n observaciones independientes $Y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ obtenidas de una población normal con media μ desconocida y variancia conocida σ^2. Deseamos obtener la pdf a posteriori para μ.

Aplicando la ecuación (3) tenemos:

$$p(\mu/Y,\sigma^2) \propto p(\mu)\, p(Y/\mu,\sigma^2) \qquad \ldots(4)$$

donde: $p(\mu/Y,\sigma^2)$ es la pdf a posteriori, para el parámetro μ, dada la información muestral Y, y suponiendo conocido el valor σ^2, $p(\mu)$ es la pdf a priori para μ. La --

función de probabilidad, $p(Y/\mu, \sigma^2)$. del parámetro desconocido μ, dada por: $\prod_{i=1}^{n} p(y_i/\mu, \sigma^2)$ ó

$$p(Y/\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2\right]$$

$$(5)\ldots \qquad = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu S^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2\right]\right\}$$

donde : $\nu = n-1$; $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} y_i$ es la media muestral; y variancia muestral dada por la expresión $S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu})^2$.

Como necesitamos una pdf a priori para μ ,supondremos-- que ésta es normal e invariante:

$$p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu - \mu_0)^2\right] \qquad \ldots(6)$$

donde μ_0 y σ_0^2 son la media y la variancia a priori. Ahora -- combinando las ecuaciones (5) y (6) obtendremos la pdf a posteriori para μ. $\quad p(\mu/Y) \propto p(\mu)\, p(Y/\mu)$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}(\mu - \hat{\mu})^2\right]\right\}$$

$$(7)\ldots \qquad \propto \exp\left[-\left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}{2\,\sigma_0^2\,\sigma^2/n}\right)\left(\mu - \frac{\hat{\mu}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}\right)^2\right]$$

donde μ a posteriori esta normalmente distribuida con media

$$E_{\mu} = \frac{\hat{\mu}\,\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} = \frac{\hat{\mu}\,(\sigma^2/n)^{-1} + \mu_0(\sigma_0^2)^{-1}}{(\sigma^2/n)^{-1} + (\sigma_0^2)^{-1}} \qquad \ldots(8)$$

$$\text{y } Var(\mu) = \frac{\sigma_0^2\,\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} = \frac{1}{(\sigma^2/n)^{-1} + (\sigma_0^2)^{-1}} \qquad \ldots(9)$$

Nótese que la media a posteriori es un promedio ponderado de la media muestral $\hat{\mu}$ y la media a priori μ_a . Si hacemos $h_o = \left(\sigma^2/n\right)^{-1}$ y $h_a = (\sigma_a^2)^{-1}$, entonces :
$E_{\mu} = (\hat{\mu} h_o + \mu_a h_a)/(h_o + h_a)$, donde las h's son considera-das como parámetros de precisión. También tenemos que:
$\text{Var}(\mu) = 1/(h_o + h_a)$ y así el parámetro de precisión asociado es $\left[\text{Var}(\mu)\right]^{-1} = h_o + h_a$.

Para proporcionar resultados numéricos, supongamos que en este ejemplo las observaciones y_i son:

Observación #	Valor de y_i
1	0.699
2	0.320
3	-0.799
4	-0.927
5	0.373
6	-0.648
7	1.572
8	-0.319
9	2.049
10	-3.077

Media muestral: $\hat{\mu} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = -0.0757$

Donde las y_i son observaciones independientes de una población normal con media μ desconocida y variancia conocida $\sigma^2 = 1.0$. Suponiendo que nuestra información a priori está representada por una pdf normal con media $\mu_a = -0.02$ y variancia $\sigma_a^2 = 2.0$; podemos ahora combinar por medio del teore ma de Bayes estos datos utilizando las ecuaciones (8) y (9), donde:

$$E_{\mu} = \frac{-0.0757/0.100 - 0.02/2.0}{1/0.1 + 1/2.0} = -0.073$$

$$\mathrm{Var}(\mu) = \frac{1}{1/0.1 + 1/2.0} = 0.0952$$

Graficando la pdf a priori y la a posteriori (ver fig. 2.13), podemos apreciar que con la información a priori y la ayuda de las 10 observaciones independientes, obtenemos por medio del teorema de Bayes una reducción considerable en la incertidumbre del parámetro μ, esto es, la variancia a priori es mayor que la a posteriori. La media a posteriori $E_{\mu} = -0.0730$, la cual no es muy diferente de la media muestral $\hat{\mu} = -0.0757$, no obstante es bastante grande en valor absoluto con respecto a la media a priori $\mu_0 = -0.02$. Esto confirma que en ocasiones la información a priori es vaga en relación con la información de la muestra. La técnica de Bayes generalmente depende de la a priori específica que se supone, de manera que no se debe hacer la suposición a la ligera.

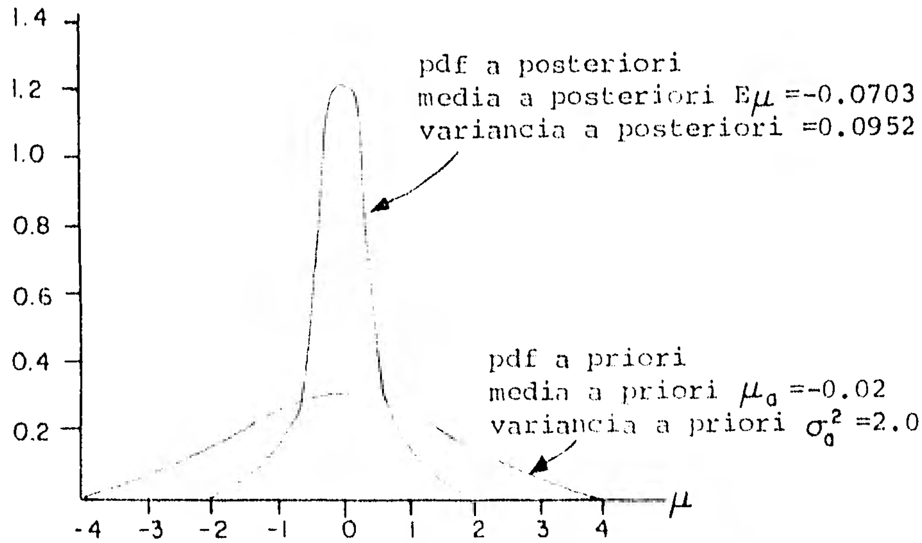


FIG. 2.13 DISTRIBUCION A PRIORI Y A POSTERIORI DE μ

2.3.2 TEOREMA DE BAYES CON INFORMACION ADICIONAL

Si nuestra pdf a priori inicial para un parámetro θ es $p(\theta)$ y además se tiene un grupo de datos Y_1 con pdf $p(Y_1/\theta)$, entonces la pdf a posteriori es:

$$p(\theta/Y_1) \propto p(\theta)\, p(Y_1/\theta) \qquad \ldots(10)$$

ahora obtenemos un grupo de datos Y_2, generados independientemente del primer grupo, con pdf $p(Y_2/\theta)$, podemos formar la pdf a posteriori para θ, usando la pdf a posteriori inicial como la pdf a priori para el análisis de los nuevos datos estimados Y_2, quedando entonces:

$$p(\theta/Y_1, Y_2) \propto p(\theta/Y_1)\, p(Y_2/\theta) \qquad \ldots(11)$$

donde $p(\theta/Y_1,Y_2)$ es la pdf a posteriori basada en la información $p(\theta)$ y en las muestras de datos Y_1, Y_2. Las ecuaciones (10) y (11) se pueden escribir como:

$$p(\theta/Y_1,Y_2) \;\propto\; p(\theta)\; p(Y_1/\theta)\; p(Y_2/\theta) \qquad \ldots(12)$$

En la ecuación (12) $p(Y_1/\theta)\; p(Y_2/\theta)$ es la función de probabilidad para θ basada en la combinación de las muestras Y_1 y Y_2. Obsérvese que este procedimiento puede aplicarse cuando se tengan muestras sucesivas de datos independientes.

2.3.3 FUNCIONES DE PROBABILIDAD DE DENSIDAD A PRIORI

La función de densidad a priori, descrita en la ecuación (3) como $p(\theta)$, representa la información a priori del parámetro θ. Esto es, en el enfoque bayesiano la información a priori de los parámetros del modelo, se representan generalmente por una función de densidad seleccionada adecuadamente. En el ejemplo 2.3.1 se representó la información a priori para la media μ mediante una distribución normal. Si nuestra información a priori relacionada con los parámetros de un modelo es vaga o difusa, emplearemos una pdf difusa en el análisis de los datos. Para ilustrar el uso de la pdf difusa consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2 Se tienen n observaciones independien--

tes $Y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tomadas de una población normal -- con media μ desconocida y desviación estandar conocida σ, - suponiendo que la información a priori de la media es vaga o difusa, para determinar el valor de μ consideremos:

$$p(\mu) \propto \text{constante} \qquad -\infty < \mu < \infty \qquad \ldots(13)$$

la cual es la pdf a priori, entonces la pdf a posteriori estará dada por:

$$p(\mu/Y,\sigma) \propto p(\mu)\, \ell(\mu/Y,\sigma) \qquad -\infty < \mu < \infty$$

$$\propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \hat{\mu})^2\right] \ldots(14)$$

donde $\ell(\mu/Y,\sigma)$ es la función de probabilidad. Vemos que la pdf a posteriori es normal con media μ y variancia σ^2/n. Para incorporar al análisis del problema información no basada en datos, se tendrá que elegir una pdf a priori que represente adecuadamente dicha información; si deseamos más precisión cuidaremos que las operaciones puedan ser convenientemente ejecutadas, tal como sucedió en el ejemplo 2.3.1 en -- donde la información a priori se representó por una pdf normal, ecuación (6), la cual es un ejemplo de una pdf a priori de una conjugada natural, las cuales son frecuentemente usadas para representar nuestra información a priori. Tanto la densidad gamma como la beta, son conjugadas naturales, o sea las que vienen de la misma familia general que la distribución muestreada. Por lo general, las conjugadas naturales facilitan el cálculo de la pdf a posteriori, la cual tiene la misma forma funcional que la a priori.

Del ejemplo 2.3.2 se puede obtener una conjugada natural para la pdf a priori. Supongamos que $\sigma = 1$, tenemos:

$$p(Y/\mu, n) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 \right]$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[(n-1)S^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 \right] \right\}$$

esta expresión también la podemos escribir como:

$$p(Y/\mu, n) = p_1(\hat{\mu}/\mu, n)\; p_2(Y), \text{ con}$$

$$p_1(\hat{\mu}/\mu, n) = \exp\left[-(n/2)\; (\mu - \hat{\mu})^2 \right], \text{ y}$$

$$p_2(Y) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\left(\frac{n-1}{2}\right) S^2 \right]$$

El uso de esta pdf a priori para un decisor mostrará que representa adecuadamente su información a priori y además le proporcionará valores para el parámetro μ.

2.3.4 DISTRIBUCION MARGINAL DE LA MUESTRA

Dada una pdf a priori para θ y la pdf condicional $p(Y/\theta)$, de los elementos de una muestra, la densidad margi--

nal de los valores de la muestra, que es independiente de θ, está dada por la integral de la densidad conjunta $p(Y,\theta)$ en la región de θ, por lo tanto tenemos:

$$p(Y) = \int_{R_\theta} p(Y,\theta)d\theta$$

$$= \int_{R_\theta} p(\theta)\ p(Y/\theta)d\theta \qquad \ldots(15)$$

La ecuación (15) es la pdf marginal de la muestra, la cual - es un producto de la pdf a priori $p(\theta)$ con la pdf condicio-- nal $p(Y/\theta)$.

Ejemplo 2.3.3.- Sea y_1 una observación de distribución normal con media μ desconocida y desviación estandar conoci da σ entonces la pdf condicional para la muestra es:

$$p(y_1/\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1-\mu)^2\right]$$

y si la pdf a priori para μ es:

$$p(\mu) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma_0)^{-1} \exp\left[-(2\sigma_0^2)^{-1}(\mu-\mu_0)^2\right] \quad -\infty<\mu<\infty$$

La pdf marginal para y_1 será:

$$p(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1/\mu,\sigma)\ p(\mu)\ d\mu$$

$$= (2\pi\sigma\sigma_0)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right]\right\} d\mu$$

completando el cuadrado para μ en el exponente y ejecutando la integración, el resultado es:

$$p(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + \sigma^2)}} \exp -\left[\frac{(y_1 - \mu_0)}{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}\right]$$

De este modo la pdf marginal para y_1 es normal con media μ_0 y variancia $\sigma_0^2+\sigma^2$. Entonces siendo conocidos μ_0, --- σ_0^2 y σ^2, es posible usar $p(y_1)$ para hacer el resumen probabilístico acerca de y_1 antes de que la observación y_1 sea observada.

2.3.5 DISTRIBUCIONES MARGINALES Y CONDICIONALES A POSTERIORI PARA LOS PARAMETROS.

Con las pdf's marginales y condicionales podemos obtener la pdf a posteriori, por ejemplo si tenemos $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ y deseamos obtener una pdf marginal para θ_1, esta pdf a posteriori marginal $p(\theta_1/Y)$, se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} p(\theta_1/Y) &= \int_{R_{\theta_2}} p(\theta_1, \theta_2/Y)\, d\theta_2 \\ &= \int_{R_{\theta_2}} p(\theta_1/\theta_2, Y)\, p(\theta_2/Y)\, d\theta_2 \qquad \ldots(1[illegible]) \end{aligned}$$

donde $p(\theta_1/\theta_2, Y)$ [illegible] la pdf a posteriori [illegible] para θ_1 dado θ_2 y la muestra [illegible] a posteriori condicionales con la función esperada dada la - pdf marginal a posteriori para θ_2, $p(\theta_2/Y)$.

Ejemplo 2.3.4.- Suponga que tenemos n observaciones independientes $Y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de una población normal con-media μ desconocida y desviación estandar σ también desconocida. Si la información a priori acerca de los valores de-la μ y de σ son vagos o difusos, podemos representar este-estado de nuestra información inicial para tener nuestra pdf a priori como:

$$(17)\ldots \qquad p(\mu, \sigma)\, d\mu\, d\sigma \quad \propto \quad \frac{1}{\sigma}\, d\mu\, d\sigma \qquad \begin{array}{c} -\infty < \mu < \infty \\ 0 < \sigma < \infty \end{array}$$

En la ecuación (17) asumimos que μ y σ tienen una distribución independiente, una apriori, con media μ y $\log \sigma$ distribuidos uniformemente. Entonces la pdf a posteriori para μ y σ es:

$$p(\mu, \sigma/Y) \quad \propto \quad p(\mu, \sigma) \quad \ell(\mu, \sigma/Y) \qquad \begin{array}{c} -\infty < \mu < \infty \\ 0 < \sigma < \infty \end{array}$$

$$\propto \sigma^{-(n+1)} \quad \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu s^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2\right]\right\} \ldots (18)$$

donde: $\ell(\mu, \sigma/Y) \quad \propto \quad \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2\right]$, es - la función de probabilidad.

Es claro que la pdf a posteriori condicional $p(\mu/\sigma, Y)$ es de la forma normal con media y variancia a posteriori condicional.

$$E(\mu/\sigma, Y) = \hat{\mu} \qquad y \qquad Var(\mu/\sigma, Y) = \sigma^2/n$$

La pdf para μ dado σ y Y depende críticamente de σ cuyos valores son desconocidos, si nos interesamos en μ, en la ecuación (16) proporciona un medio para la eliminación de parámetros de poco interés, en este caso σ. Así tendremos:

$$p(\mu/Y) = \int_0^\infty p(\mu, \sigma/Y)\, d\sigma$$

$$(19)\ldots \quad \propto \int_0^\infty \sigma^{-(n+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu s^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2\right]\right\} d\sigma$$

$$\propto \left[\nu s^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2\right]^{-(\nu+1)/2}$$

De la ecuación (19) vemos que la pdf a posteriori marginal para μ es de la forma t de student con media $\hat{\mu}$.

$$t = \frac{\mu - \hat{\mu}}{s/\sqrt{n}} \quad \text{con } \nu = n-1 \text{ grados de libertad}$$

Ahora si el parámetro σ es el que nos interesa, podemos integrar con respecto a μ y obtener una pdf marginal a posteriori para σ.

$$p(\sigma/Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu, \sigma/Y)\, d\mu \qquad \ldots(20)$$

$$\propto \sigma^{-(\nu+1)} \exp -\left(\frac{\nu S^2}{2\sigma^2}\right) , \quad 0<\sigma<\infty$$

Esta pdf a posteriori para σ tiene la forma de una distribución gamma invertida y será convergente para $\nu>0$. Apoyándose en la ecuación (20) tenemos:

$$E(\sigma/Y) = \frac{\sqrt{\frac{\nu}{2}}\ \Gamma\left[(\nu-1)/2\right]\ S}{\Gamma(\nu/2)} \quad , \text{ para } \nu>1$$

$$\text{y} \quad Var(\sigma/Y) = \frac{\nu S^2}{\nu-2} - \left[E(\sigma/Y)\right]^2 \quad , \text{ para } \nu>2$$

2.3.6 ESTIMADORES PARA PARAMETROS

De la sección 2.3.3 se vió que el acercamiento bayesiano produce la pdf a posteriori para el parámetro θ, Si lo deseamos podemos caracterizar esta distribución en términos de medidas de tendencia central y de dispersión, que nos sirven como puntos de estimación para parámetros.

La distribución a posteriori de un parámetro θ, mide el grado de creencia del valor verdadero de θ ; combina el -

conocimiento a priori de θ con la información de la muestra-relacionada con θ por medio del teorema de Bayes. En consecuencia para poder dar un solo punto como la mejor estimación del valor de θ, se puede escoger lógicamente la media de la distribución a posteriori.

Se llama estimada de Bayes para θ, a la media de la distribución de θ, denotada por $\check{\theta}$. Si la pdf a posteriori para θ no es simétrica, se puede usar igualmente otras medidas para la mitad de la a posteriori como la estimada puntual de θ. Usando la moda de la a posteriori, el valor que maximiza la densidad a posteriori parece bastante lógico, o bien se puede preferir usar la mediana de la a posteriori como la estimada puntual de θ. El siguiente ejemplo ilustra el uso de una densidad conjugada beta para un parámetro desconocido.

Ejemplo 2.3.5.- En una línea de producción se fabrican determinados artículos, cada uno de los cuales está o no defectuoso. Suponga que θ es la probabilidad de que ocurra un defecto y que los defectos ocurren en forma independiente. Se puede suponer una a priori uniforme para θ de $(0,1)$. Se tiene una muestra de n artículos y se representa con Y el número total de defectos en la muestra. Entonces Y es binomial con parámetros n y θ, se tiene;

$$p(Y/\theta) = \binom{n}{y} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y} \qquad , \qquad y = 0,1,\ldots,n$$

$$p(\theta) = 1 \qquad 0<\theta<1$$

la pdf conjunta de Y y θ es:

$$p(Y,\theta) = \binom{n}{y} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y} \ ; \qquad 0<\theta<1, \qquad y = 0,1,2,\ldots,n$$

la pdf marginal para Y es:

$$p(Y) = \int_0^1 \binom{n}{y} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y}\, d\theta = \binom{n}{y} \frac{y!\,(n-y)!}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto, los valores de Y tienen la misma verosimilitud al promediar en todos los valores de θ. Entonces la a posteriori para θ es:

$$p(\theta/Y) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(y+1)\ \Gamma(n-y+1)} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y} \ , \quad 0<\theta<1 \qquad \ldots(21)$$

Una densidad beta con parámetros a=y+1 y b=n-y+1. La media de la a posteriori en la ecuación (21) es la estimada de Bayes de θ, dado que ocurren Y defectos en la muestra de n será:

$$\overset{y}{\mu} = (y+1)/(n+2)$$

2.3.7 ESTIMACION DE INTERVALOS BAYESIANOS

Usar los métodos bayesianos es una forma fácil de obtener estimadas en intervalos de parámetros. Si se dispone de la distribución del parámetro, entonces se puede construir un intervalo, generalmente centrado en la media a posteriori que contiene el 100(1 - α)% de la probabilidad a posteriori. Dado que la pdf a posteriori $p(\theta/Y)$ ha sido obtenida es posible calcular la probabilidad de que el parámetro θ este situado en una subregión particular $\bar{R}$, entonces tenemos:

$$Pr(\theta \in \bar{R} /Y) = \int_{\bar{R}} p(\theta/Y)d\theta \qquad ...(22)$$

La probabilidad en la ecuación (22) mide el grado de confianza que $\theta \in \bar{R}$ dada la muestra y la información a priori.

Ejemplo 2.3.6.- Suponga que los pesos de las truchas de un año de edad están distribuidos normalmente con media μ desconocida y $\sigma = 0.2$ (libras); se sabe que la desviación estándar no cambia dependiendo del medio, aunque sí lo hace el peso medio μ. Se pobló hace un año un lago artificial con truchas recién incubadas y ahora se tiene interés en la estimada en un intervalo de Bayes del 90% para μ. Con base en la experiencia con estos peces, se supone una a priori normal con media $\mu_0 = 7$ (libras) y $\sigma_0 = 1/3$ libra. Se selec--

ciona al azar una muestra de 30 peces, y luego se calcula la pdf a posteriori para μ y se usa para obtener su estimada en el intervalo para μ. En la línea 1 de la tabla 2.8 se ve- que la a posteriori para μ es normal con media:

$$\check{\mu} = \frac{750\bar{Y} + 63}{759} \qquad \text{y Variancia } \check{\sigma}^2 = 1/759$$

entonces un intervalo de Bayes del 90% para μ varía desde:

$$\frac{750\bar{Y} + 63}{759} - \frac{1.64}{\sqrt{759}} \quad \text{hasta} \quad \frac{750\bar{Y} + 63}{759} + \frac{1.64}{\sqrt{759}}$$

2.3.8 FUNCIONES DE DENSIDAD PREDICTIVA

Dada nuestra información muestral Y nos interesamos en hacer inferencias de otras observaciones $\tilde{Y}$ que aun no han sido observadas. En el enfoque bayesiano se podrá obtener una pdf a la que llamaremos predictiva, sea:

$$p(\tilde{Y}, \theta/Y) = p(\tilde{Y}/\theta, Y)\; p(\theta/Y) \qquad \ldots(23)$$

donde $p(\tilde{Y}/\theta, Y)$ es la pdf condicional para $\tilde{Y}$ dado θ y Y, puesto que $p(\theta/Y)$ es la pdf condicional para θ dado Y, ésto es, la pdf a posteriori para θ. Para obtener la pdf predictiva $p(\tilde{Y}/Y)$ integramos la ecuación (23), con respecto a θ.

$$p(\tilde{Y}/Y) = \int_{R_\theta} p(\tilde{Y}, \theta/Y)d\theta = \int_{R_\theta} p(\tilde{Y}/\theta, Y)\; p(\theta/Y)d\theta \qquad \ldots(24)$$

TABLA 2.12

A PRIORI Y A POSTERIORI, DADA UNA MUESTRA DE TAMAÑO n

Línea	Densidad de la muestra (dado el valor de parámetro desconocido)	Densidad *a priori* para parámetro desconocido	Densidad posterior para parámetro desconocido
1	$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_X^2}\right)^{n/2} e^{-\Sigma(y_i-\mu)^2/2\sigma^2}$ (σ^2 conocida)	$\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\mu-\mu_0)^2/2\sigma_0^2}$	$\frac{a^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a}{2}\left[\mu-\frac{1}{a}\left(\frac{n\hat{\mu}}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\right]^2\right\}$, $a=\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}$
2	$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\Sigma(y_i-\mu)^2/2\sigma^2}$ (σ_X^2 conocida)	$\frac{1}{b-a}$	$\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\left[N_Z\left(\frac{b-\hat{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-N_Z\left(\frac{a-\hat{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]^{-1} \times e^{-n(\mu-\hat{\mu})^2/2\sigma^2}$
3	$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\Sigma(y_i-\mu)^2/2\sigma^2}$ (μ conocida)	$\frac{1}{m!}[m\sigma_0^2]^{m+1}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{m+2} e^{-m\sigma_0^2/\sigma^2}$	$\frac{1}{\left(m+\frac{n}{2}\right)!} b^{n/2+m+1}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2+m+2} e^{-b/\sigma^2}$, $b=m\sigma_0^2+\frac{1}{2}\Sigma(y_i-\mu)^2$
4	$\lambda^n e^{-\lambda\Sigma y_i}$	$\frac{1}{m!}\left(\frac{m+1}{\lambda_0}\right)^{m+1}\lambda^m e^{-(m+1)\lambda/\lambda_0}$	$\frac{\{n\hat{\mu}+[(m+1)/\lambda_0]\}^{n+m+1}}{\Gamma(n+m+1)}\lambda^{n+m} \times e^{-\lambda(n\hat{\mu}+(m+1)/\lambda_0)}$
5	$\frac{\lambda^{\Sigma y_i}}{\Pi\, y_i!} e^{-n\lambda}$	$\frac{1}{m!}\left(\frac{m+1}{\lambda_0}\right)^{m+1}\lambda^m e^{-(m+1)\lambda/\lambda_0}$	$\frac{[n+(m+1)/\lambda_0]^{c+1}}{c!}\lambda^c e^{-(n+(m+1)/\lambda_0)\lambda}$, $c=m+\Sigma y_i$
6	$p^{\Sigma y_i}(1-p)^{n-\Sigma y_i}$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}$	$\frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+\Sigma y_i)\Gamma(b+n-\Sigma y_i)}p^{a+\Sigma y_i-1} \times (1-p)^{b+n-\Sigma y_i-1}$
7	$p^n(1-p)^{\Sigma y_i-n}$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}$	$\frac{\Gamma(a+b+\Sigma y_i)}{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\Sigma y_i-n)}p^{a+n-1} \times (1-p)^{b+\Sigma y_i-n-1}$

Esta última ecuación indica que la pdf predictiva es - un promedio de las pdf's condicionales $p(\tilde{Y}/\theta, Y)$ y con pdf a-posteriori para θ, $p(\theta/Y)$.

Ejemplo 2.3.7.- Del ejemplo 2.3.2 tenemos n observaciones independientes $Y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de una población -- normal con media μ desconocida y desviación estándar conocida σ . Con información a priori difusa para μ. La pdf a posteriori calculada es normal con media $\hat{\mu}$ y variancia σ^2/n. - Ahora deseamos obtener la pdf predictiva para una nueva ob-- servación $\tilde{y}_{n+1}$ que todavía no se realiza, la cual se logra - integrando la ecuación (24).

$$p(\tilde{y}_{n+1} / \mu, \sigma, Y) \propto \exp\left[- \frac{1}{2\sigma^2} (\tilde{y}_{n+1} - \mu)^2 \right]$$

y de la ecuación (14) tenemos:

$$p(\mu/\sigma, Y) \propto \exp\left[- \frac{n}{2\sigma^2} (\mu - \hat{\mu})^2 \right] \qquad -\infty < \mu < \infty$$

entonces de la ecuación (24),

$$p(\tilde{y}_{n+1} / Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tilde{y}_{n+1} / \mu, \sigma, Y) \; p(\mu/\sigma, Y) \, d\mu$$

$$(25)\ldots \qquad \propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[- \frac{1}{2\sigma^2} \left[(\tilde{y}_{n+1} - \mu)^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 \right] \right] d\mu$$

completando los cuadrados en μ, e integrando con respecto a μ, la pdf predictiva para $\tilde{y}_{n+1}$ será:

$$p(\tilde{y}_{n+1} / Y) \quad \propto \quad \exp\left[- \frac{n}{2(n+1)\sigma^2} (\tilde{y}_{n+1} - \hat{\mu})^2 \right] \qquad \ldots(26)$$

Se observa que $\tilde{y}_{n+1}$ tiene una distribución normal con- media $\hat{\mu}$ muestral y variancia igual a $\sigma^2(n+1)/n$. La ecuación (26) puede ser empleada para hacer enunciados de probabili-- dad referente a $\tilde{y}_{n+1}$ dado Y.

2.3.9 PUNTOS E INTERVALOS PREDECIBLES

La pdf predictiva, $p(\tilde{Y}/Y)$, puede ser usada para obte-- ner un punto de predicción. Por ejemplo, podemos usar una me dida de tendencia central, valuando la media o la moda como- punto de predicción. En el ejemplo 2.3.7, la media de la pdf predictiva es la media muestral $\hat{\mu}$, y ésta es un punto ópti- mo de predicción para $\tilde{y}_{n+1}$.

Dado que tenemos la pdf predictiva, $p(\tilde{Y}/Y)$, podemos -- ahora evaluar para una región o intervalo la ecuación si---- guiente:

$$\Pr(\tilde{Y} \subset \bar{R}/Y) = \int_{\bar{R}} p(\tilde{Y}/Y)\, d\tilde{Y} \qquad \ldots(27)$$

donde $\bar{R}$ es un subespacio de $R_{\tilde{y}}$. En esta misma ecuación existe la probabilidad de que la futura observación de $\tilde{Y}$ caiga en la región $\bar{R}$. La región puede ser única para las pdf's unimodales si requerimos que sea una región de máxima densidad predictiva, es decir una región con su probabilidad dada, tal que las pdf's predecibles valuadas sobre la región $\bar{R}$ no son menores que aquellas relacionadas con alguna otra región con el mismo contenido de probabilidad.

Ejemplo 2.3.8.- En el ejemplo 2.3.7 la pdf predictiva para $\tilde{y}_{n+1}$ es normal con media $\hat{\mu}$ y variancia $\sigma^2(n+1)/n$. Entonces si hacemos $Z = (\tilde{y}_{n+1} - \hat{\mu})/\bar{\sigma}$, con $\bar{\sigma} = \sigma\sqrt{(n+1)/n}$, tendremos una pdf normal estándarizada con media cero y variancia unitaria. Podemos encontrar la $Pr(a < Z < b)$, donde a y b son constantes dadas, la expresión $a < Z < b$ es equivalente a $\hat{\mu} - a\bar{\sigma} < \tilde{y}_{n+1} < \hat{\mu} + b\bar{\sigma}$, entonces la probabilidad para $\tilde{y}_{n+1}$ satisfacerá estas desigualdades. Si requerimos encontrar a y b tal que $Pr(a < Z < b) = \beta$, donde β es dado, es claro que hay muchos valores posibles para a y b tal que $Pr(a < Z < b) = \beta$. Para que el intervalo sea el más alto, nos lleva a una sola a y b, donde $a = -Z_\beta$ y $b = Z_\beta$, donde el área sobre el intervalo $-Z_\beta$ a Z_β es precisamente β.

2.3.10 APLICACION DE LOS PRINCIPIOS AL ANALISIS DE LA DISTRIBUCION DE PARETTO.

Consideremos n observaciones $Y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, cada una con distribución de Paretto dada por:

$$p(y_i/A,\alpha) = \frac{\alpha A^{\alpha}}{y_i^{\alpha+1}} \qquad \begin{array}{l} 0<\alpha<\infty \\ 0<A<y_i<\infty \end{array} \qquad \ldots(28)$$

Suponiendo que A es conocida, α es un parámetro desconocido, para hallar su a posteriori procederemos de la siguiente manera:

$$\ell(\alpha/Y,A) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i/A,\alpha) \quad ó$$

$$= \frac{\alpha^n A^{n\alpha}}{(y_1 y_2 \ldots y_n)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha^n A^{n\alpha}}{G^{n(\alpha+1)}} \qquad \ldots(29)$$

donde $G = (y_1 y_2 \ldots y_n)^{1/n}$ es la media geométrica de las observaciones, Suponemos que nuestra información acerca del parámetro α es vaga o difusa y representa nuestra información a priori, Considerando que $\log \alpha$ está distribuido uniformemente, lo cual implica que:

$$p(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha} \;, \qquad 0<\alpha<\infty \qquad \ldots(30)$$

combinando esta pdf a priori con la ecuación (29), la a posteriori para α es: $$p(\alpha/A,Y) \propto \frac{\alpha^{n-1} A^{n\alpha}}{G^{n\alpha}}$$

$$\propto \alpha^{n-1} e^{-an\alpha} \qquad \ldots(31)$$

donde $a = \text{Ln}\ G/A$. Ahora podemos observar que esta a posterio ri es de la forma Gamma y en su forma normalizada será:

$$p(\alpha/A,Y) = \frac{(an)^n}{\Gamma(n)} \alpha^{n-1} e^{-an\alpha} \qquad \begin{matrix} 0 < \alpha < \infty \\ n > 0 \end{matrix} \qquad \ldots(32)$$

Ahora si deseamos calcular esta pdf a posteriori en el intervalo $C_1 < \alpha < C_2$ donde C_1 y C_2 son números dados, el momento a posteriori de α ésta dado por:

$E\left[\alpha^r\right] = (an)^{-r}\,\Gamma(n+r)/\,\Gamma(n), \quad r = 1,2,\ldots$ tenemos:

$$E\left[\alpha\right] = \frac{1}{a} = \frac{1}{\text{Ln}(G/A)} \qquad \ldots(33)$$

el cual es un punto óptimo estimado para α.

Si tenemos una nueva muestra de q observaciones independientes cada una con una pdf de la forma de Paretto, podremos usar la pdf a posteriori de la ecuación (32) como una pdf a priori en el análisis de la nueva muestra. Esto es, la función de probabilidad para la nueva muestra denotada por Y_* será:

$$\ell(\alpha/A,Y_*) \propto \frac{\alpha^q A^{q\alpha}}{G_*^{q(\alpha+1)}} \qquad \ldots(34)$$

donde G_* es la media geométrica de las nuevas observaciones de q. Combinando la ecuación (31) con (34), la pdf a posteriori basada en ambas muestras será:

$$p(\alpha/A,Y,Y_*) \;\propto\; \frac{\alpha^{n+q-1}\;A^{(n+q)\alpha}}{(G^n\;G_*^q\;)^{\alpha+1}} \;\propto\; \frac{\alpha^{n+q-1}\;A^{(n+q)\alpha}}{(G_2)^{(n+q)\alpha}}$$

$$\propto\;\alpha^{n+q-1}\;e^{-a_2(n+q)\alpha} \qquad \ldots(35)$$

donde G_2 es la media geométrica de n+q observaciones de ambas muestras y $a_2 = \mathrm{Ln}(G_2/A)$. Además se observa que la ecuación (35) es de la misma forma Gamma que (31), por lo que su análisis será el mismo.

Muchas veces en el análisis de la distribución de Paretto los datos útiles no son las observaciones individuales - $y_1, y_2, \ldots, y_n$; solamente son en la forma de frecuencias, n_o, - $n_1, \ldots, n_t$; donde n_t es el número de valores individuales de- Y, es decir en un intervalo particular de X_t a X_{t+1} , donde- $X_{t+1} > X_t$, $X_o = A$, $X_{T+1} = \infty$, y $t = 0,1,\ldots,T-1,T$. Para la -- pdf de Paretto en la ecuación (28) la probabilidad de que un evento elegido aleatoriamente tenga un valor Y, tal que --- $X_t < Y < X_{t+1}$ es:

$$\Pr(X_t < Y < X_{t+1}) = \int_{X_t}^{X_{t+1}} \frac{\alpha\;A^{\alpha}}{y^{\alpha+1}}\,dy \;=\; A^{\alpha}\left(\frac{1}{x_t^{\alpha}} - \frac{1}{x_{t+1}^{\alpha}}\right)$$

para $T = 0,1,\ldots,T-1$

Para el intervalo $X_T \leq y < \infty$ la $Pr(X_T \leq y < \infty) = A^{\alpha} / X_T^{\alpha}$. - Entonces dado N eventos seleccionados aleatoriamente la probabilidad que n_t eventos tengan Y valores en X_t a X_{t+1} para- $t = 0,1,\ldots,T-1$; y n_T tenga Y valores en el intervalo X_T a - ∞ es:

$$\frac{N!}{\prod_{t=0}^{T} n_t!} \frac{A^{\alpha n_T}}{X_T^{\alpha n_T}} \prod_{t=0}^{T-1} A^{\alpha n_t} \left(\frac{1}{X_t^{\alpha}} - \frac{1}{X_{t+1}^{\alpha}} \right)^{n_t}$$

donde $N = \sum_{t=0}^{T} n_t$. Esta es una pdf para las n_t's aleatorias, -- las cuales son una función del parámetro desconocido α y -- puede ser expresado en forma más completa como sigue:

$$\ell(\alpha / A, n, N) \propto \frac{A^{\alpha N}}{\left(\prod_{t=0}^{T} X_t^{n_t} \right)^{\alpha}} \prod_{t=0}^{T-1} \left[1 - \left(\frac{X_t}{X_{t+1}} \right)^{\alpha} \right]^{n_t}$$

$$(36)\ldots \qquad \propto e^{-a N \alpha} \prod_{t=0}^{T-1} \left[1 - \left(\frac{X_t}{X_{t+1}} \right)^{\alpha} \right]^{n_t}$$

donde $a = \ln G/A$ con $G = \left(\prod_{t=0}^{T} X_t^{n_t} \right)^{1/N}$, y $n' = (n_0, n_1, \ldots, n_T)$

Ahora combinando la pdf a priori $p(\alpha)$ con la ecuación (36)- obtendremos la siguiente pdf a posteriori.

$$p(\alpha / A, n, N) \propto p(\alpha)\, e^{-aN\alpha} \prod_{t=0}^{T-1} \left[1 - \left(\frac{X_t}{X_{t+1}} \right)^{\alpha} \right]^{n_t} \qquad \ldots(37)$$

Si disponemos de una escasa información a priori, la pdf se obtendrá como se muestra en la ecuación (30); por el contrario, si existe una mayor información para el parámetro α, se adoptará una pdf que mejor represente dicha información. En ambos casos la pdf a posteriori (37) podrá ser analizada y normalizada usando técnicas de integración numérica

Ejemplo 2.3.9.- Consideremos los datos agrupados de la siguiente tabla que representa N = 1004 familias con ingresos A = \$10,000 ó más dolares por año.

TABLA 2.13

DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS DE LOS INGRESOS FAMILIARES MAYORES A \$10,000.00 DOLARES POR AÑO.

INTERVALO EN DOLARES	FREC. RELATIVA n_t/N	FREC. ABSOLUTA n_t	t	X_t (10^4)
10,000 - 14,999	0.170319	171	0	1
15,000 - 24,999	0.221116	222	1	1.5
25,000 - 49,999	0.159363	160	2	2.5
50,000 - 99,999	0.219124	220	3	5.0
100,000 - 149,999	0.04[illegible]088	46	4	10.0
150,000 - 499,999	0.137450	138	5	15.0
500,000 -	0.0448207	45	6	50.0
Totales	1.000	N = 1004		

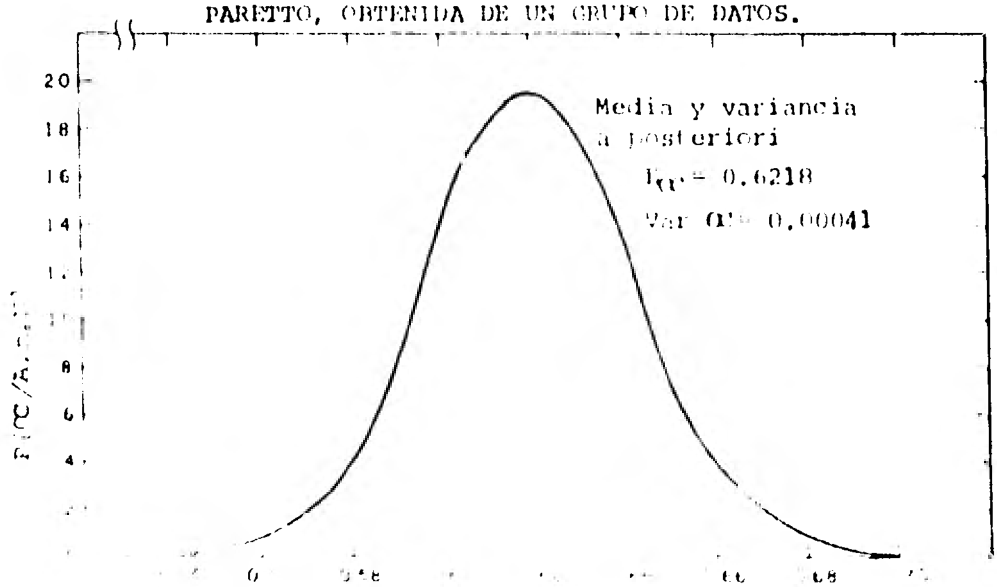
Como la información a priori es poca para α; dada la ecuación (37) supondremos que $\log \alpha$ está uniformemente distribuido, lo cual implica que $p(\alpha) \propto 1/\alpha$ con $0 < \alpha < \infty$. - Con esta pdf a priori sustituida en la ecuación (37) y usando los procedimientos de integración numérica tendremos:

$$p(\alpha/\Lambda, n, N) = K\, \alpha^{-1} \; e^{-aN\alpha} \prod_{t=0}^{T-1} \left[1 - \left(\frac{x_t}{x_{t+1}} \right)^{\alpha} \right]^{n_t}$$

donde K = constante normalizada.

La figura 2.14 muestra la distribución de la pdf a -- posteriori con media y variancia $E_{\alpha} = 0.6218$ y $\mathrm{Var}\ \alpha =$ -- 0.00041.

FIG. 2.14 DISTRIBUCION A POSTERIORI PARA UN PARAMETRO DE PARETTO, OBTENIDA DE UN GRUPO DE DATOS.



el punto óptimo estimado es la media a posteriori. En el caso en el cual el tamaño de la muestra es algo grande, la forma de la pdf a posteriori se asemeja a una pdf normal.

2.3.11 APLICACION DE LOS PRINCIPIOS BAYESIANOS AL ANALISIS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL.

Consideremos los resultados (A y B) de n evéntos independientes y mutuamente excluyentes generados por el lanzamiento de una moneda no cargada, con probabilidades de ocurrencia θ para A (cara) y 1-θ para B (cruz). Observamos que los éxitos n_1 del suceso A y $n-n_1$ de B están debidamente representados por una pdf binomial discreta, de la forma:

$$p(n_1/\theta,n) = \binom{n}{n_1}\theta^{n_1}(1-\theta)^{n-n_1} \quad , \qquad ...(38)$$

La ecuación (38) viene siendo la función de peso del parámetro desconocido θ. Supongamos que tenemos alguna información a priori de θ y que la podemos representar por, la siguiente distribución beta.

$$p(\theta) = K\,\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \quad , \qquad \begin{matrix} a,b > 0 \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{matrix} \qquad ...(39)$$

donde $K = \Gamma(a+b)/\Gamma(a)\,\Gamma(b)$ es una constante normalizada, a y b son los valores paramétricos que representan la información a priori de θ. Nótese que para la pdf beta, $E\ \theta = a/(a+b)$ y $Var\ \theta = ab/(a+b)^2(a+b+1)$. Asignando valores para a y b en la ecuación (39) obtendremos la pdf a priori para θ, que combinandola con la ecuación (38) obtendremos la pdf a posteriori para θ de la siguiente manera:

$$p(\theta/n_1, n) \propto \theta^{n_1+a-1} (1-\theta)^{n-n_1+b-1} \qquad \ldots (40)$$

que es de la misma forma beta de la ecuación (39), con parámetros $a' = n_1+a$ y $b' = n-n_1+b$, y constante normalizada dada por $\Gamma(a'+b')/\Gamma(a')\Gamma(b')$; con media a posteriori $a'/(a'+b')$. Otras probabilidades a posteriori, por ejemplo $Pr(c < \theta < d)$, siendo c y d números dados, podrán ser obtenidos por el método de integración numérica.

Cuando la información a priori de θ es vaga o difusa, hay que hacer una selección adecuada de la pdf a priori que represente el comportamiento de θ. Representaremos mediante una pdf impropia el conocimiento vago del valor de θ.

$$p(\theta) \propto \frac{1}{\theta(1-\theta)} \qquad 0 \leq \theta \leq 1 \qquad \ldots (41)$$

esto, marca una limitante en la probabilidad a priori de la ecuación (39), con valores para a y b muy cercanos a cero; al respecto se señala que existen puntos exteriores $n=\theta/(1-\theta)$

con rangos de 0 a ∞. Lo cual implica que la ecuación (41) - es la probabilidad a priori para θ. Combinando las ecuaciones (41) y (38) obtendremos la pdf a posteriori dada por:

$$p(\theta/n_1, n) \quad \propto \quad \theta^{n_1-1} \quad (1-\theta)^{n-n_1-1} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1 \qquad \ldots(42)$$

esta ecuación resulta ser de la forma beta, con parámetros - n_1 y $n-n_1$. La pdf a posteriori estará condicionada por $n_1 > 0$ y $n-n_1 > 0$, tal que, nuestra información muestral incluya una-menor ocurrencia de los eventos A y B. Satisfecha ésta condición, tenemos que la media a posteriori de θ es n_1/n ó sea - la proporción muestral y variancia $n_1(n-n_1)/n^2(n+1)$. Además- se puede calcular la probabilidad a posteriori de que θ se - encuentre en un intervalo dado.

2.3.12 REPORTE DE LOS RESULTADOS DEL ANALISIS BAYESIANO

El reporte de los resultados bayesianos, involucra la-estimación de parámetros, por lo que será importante suministrar al menos:

a) Detalles de la discusión del modelo estocástico supuesto-al generar las observaciones y que servirá para justificar el modelo.

b) Una discusión de las suposiciones a priori para la valuación de los parámetros.

c) La información de la muestra, describir de donde se obtuvo, en donde se aplicará.

d) Información acerca de las pdf's a posteriori para los parámetros de interés, indicando las medidas de tendencia central ó de dispersión así como los intervalos ó regiones donde se aplicarán.

Por lo anterior, se puede concluir que no todos los investigadores o decisores llegarán al mismo resultado final, pues éste está influenciado por una serie de suposiciones subjetivas que a su vez dependen del conocimiento y experiencia de cada persona.

CAPITULO III

TIPOS DE PROBLEMAS DE DECISION

3.1 TIPOS DE PROBLEMAS DE DECISION

El objeto fundamental de éste capítulo es el de analizar los tipos de problemas de Decisiones que con más frecuencia enfrenta el decisor. Estos se clasifican de acuerdo a la cantidad de información de que se dispone en el momento de analizarlos. Veremos cómo la Teoría Estadística es de vital importancia para su solución, además examinaremos los diferentes métodos existentes para resolverlos.

Básicamente existen tres grandes tipos y son los siguientes:

1.- NO HAY DISTRIBUCION A PRIORI

2.- HAY DISTRIBUCION A PRIORI

3.- HAY DISTRIBUCION A POSTERIORI

Una vez que se ha dado la clasificación, empezaremos a analizar el primer tipo, mostrando cada uno de los criterios mediante un ejemplo.

3.2 NO HAY DISTRIBUCION APRIORI

Este tipo de problemas también se conocen como de incertidumbre completa ya que no hay distribución de probabi lidad, es decir, no se conoce $p(\theta)$ y solamente hay (A,θ,U), -donde:

A.- Representa el conjunto de acciones

θ.- Representa el conjunto de estados de la naturaleza

U.- La utilidad asociada con cualquier combinación de-la alternativa A y del estado θ.

Mientras que las situaciones de éste tipo se encuentran menos frecuentemente en la práctica, es de interés por las -técnicas que se usarán y que son base para otros tipos de --problemas. Presentaremos cuatro criterios de decisión, que -pueden ayudar al decisor a tomar mejores decisiones.

3.2.1 CRITERIO MAXIMIN

Este criterio de selección se establece muy fácil: examínese la ganancia mínima asociada a cada acción y selecciónese la acción que maximiza la ganancia mínima.

Supóngase el siguiente ejemplo: Es viernes y Juan está tratando de decidir como gastar sus fondos para la recrea---ción del sábado. El puede ir al cine, al campo o a navegar. Cada actividad costaría lo mismo y utilizaría todos sus fondos limitados; la cantidad de recreación que obtendrá de éstas actividades dependerá del clima del sábado próximo. Si el tiempo es soleado y con calma (no hay viento) gozará yendo al campo, pero si es soleado y con brisa lo mejor será ir a navegar. Juan siente que ésta distracción puede medirse por el número de horas que él pasará en la actividad. El cine dura cuatro horas; ir al campo seis, si está con sol y calma, y cuatro si está con sol y aire; navegar cinco si está soleado y con calma, y trece si está soleado con brisa. Si él selecciona navegar, tendrá que dedicar tres horas para limpiar su bote y restará ése número de horas de la cantidad de distracción que tenga el sábado. Finalmente, Juan no tiene acceso a los reportes del tiempo para el sábado y debe tomar su decisión a fin de poder dedicarse a planear la actividad que decida.

La información dada en este problema de Juan, permite establecer una tabla que dará las horas netas de diversión para cada acción.

Los valores en la tabla se obtienen del enunciado del problema, por ejemplo, ir al cine le proporciona cuatro horas de placer, sin importar cuál sea el tiempo que se tenga. Por otra parte si selecciona ir a navegar y ocurre mal tiempo, él no habrá ganado ninguna hora de placer y sí perdió tres horas en limpiar su bote, luego la ganancia neta-es -3. De igual manera se obtienen los demás valores de la tabla 3.1. Cuando se aplica este enfoque (maximin) a la tabla de pagos, se encuentra que la mejor decisión se logra - si va al cine. La peor consecuencia posible para cada acción es el mínimo de los valores en cada columna.

Una vez que se encuentran estos mínimos, se selecciona el máximo de ellos.

Estos números para el problema de Juan se ilustran en la tabla siguiente:

TABLA 3.1

ACCIONES / ESTADOS	a_1	a_2	a_3
θ_1	10	4	4
θ_2	2	6	4
θ_3	- 3	0	4
MINIMO EN LA COLUMNA	- 3	0	4*

* Es el valor Maximin, que corresponde ir al cine.

Donde:

a_1 = navegar

a_2 = ir al campo

a_3 = ir al cine

θ_1 = Soleado con brisa

θ_2 = Soleado con calma en el viento.

θ_3 = mal tiempo

A continuación veremos una propiedad del criterio maximin.

Supongamos que se tuvo un error en el cálculo de las ganancias para θ_3 y corrigiendo el cálculo encontramos una ganancia adicional de 4 unidades de utilidad en cada alternativa de θ_3. La tabla 3.1 estará alterada en la forma mostrada por la tabla 3.2.

TABLA 3.2

ACCIONES / ESTADOS	a_1	a_2	a_3
θ_1	10	4	4
θ_2	2	6	4
θ_3	1	4	8
MINIMO EN LA COLUMNA	1	4**	4**

** Son los valores maximin; de esta simple ilustración se dice que el criterio maximin no tiene la propiedad de linealidad, ya que él está indiferente entre ir al campo o ir al cine.

3.2.2 CRITERIO MINIMAX

Existe otro punto de vista para analizar los tipos de problemas de decisión bajo incertidumbre completa. Esto involucra la utilización de técnicas similares para resolver un problema, pero teniendo desarrollada una matríz de pagos diferentes. Suponga que es el domingo siguiente al sábado y que Juan estuvo navegando, reflexiona que ese día fué soleado y con calma. Observa que con el conocimiento de cual evento ocurrió puede evaluar las tres acciones respecto a la mejor de ellas. Por consiguiente para un día con sol y calma (θ_2), la mejor acción sería a_2; al seleccionar a_1 en su lugar sacrificó 4 horas de diversión (6-2). Si hubiera preferido en su lugar a_3, habría sacrificado 2 horas de diversión. Si hubiera elegido a_2 no habría renunciado a ninguna hora (6 - 6).

Se puede aplicar la misma técnica a los otros renglones de la matriz de pago de la Tabla 3.1, por ejemplo si

θ_1 hubiera ocurrido, la mejor acción sería a_1.

El número que resulta de comparar cualquier pago con el mejor para ese evento se le nombra pérdida de oportunidad y la matriz de todos esos valores se conoce como matriz de pérdida de oportunidad, como la mostrada en la tabla 3.3. Aunque la técnica para calcular pérdidas de oportunidad parece directa, se deben tener presentes aquellas situaciones donde los números en la matriz de pagos representan costos, consecuentemente el objetivo es minimizar en lugar de maximizar.

Una vez que se ha desarrollado la matriz de pérdidas de oportunidad, se puede hacer un análisis aplicando un enfoque similar al de maximin. El enfoque apropiado para ésta situación es: "seleccionar la acción cuyo peor resultado posible es el menos malo".

Este enfoque se conoce como pérdida minimax, porque selecciona el mínimo de un conjunto de pérdidas de oportunidad máximas. Para el ejemplo de Juan tanto a_2 y a_3 tienen pérdidas de oportunidad máximas de [illegible], y este valor es menor que la pérdida de oportunidad máxima para a_1. A Juan le es indiferente entre a_2 y a_3 como la mejor acción.

TABLA 3.3 MATRIZ DE PERDIDA DE OPORTUNIDAD

ESTADOS \ ACCIONES	a_1	a_2	a_3
θ_1	0	6	6
θ_2	4	0	2
θ_3	7	4	0
MAXIMO EN LA COLUMNA	7	6	6

3.2.3 CRITERIO DE HURWICZ

El criterio de Hurwicz asigna determinados valores relativos a los resultados máximos y mínimos posibles de cada estrategia factible. Pondera los valores extremos en forma tal que reflejan la importancia que les concede el decisor.

El criterio de decisión de Hurwicz se determina calculando el coeficiente de optimismo C de la siguiente manera:

$$C = \alpha \text{ (mínimo) } + (1 - \alpha) \text{ (máximo)}$$

donde: α es el índice de pesimismo relativo
$1-\alpha$ es el índice de optimismo relativo

Máximo y mínimo son las consecuencias referentes a -

cada curso de acción.

Para determinar el valor de α, partimos de la siguiente -- matríz de resultados.

ESTADOS	CURSOS DE ACCION	
	a_1	a_2
θ_1	0	X
θ_2	1	X

¿Que valor de X hace que el decisor sea indiferente entre- a_1 y a_2 ?

Al aplicar el criterio de Hurwicz, se llega a una indiferen cia representada por: $\alpha(0)+(1-\alpha)1 = \alpha(X)+(1-\alpha)(X)$

$$X = 1-\alpha$$

Mediante la asignación de cierto valor a X, se puede co nocer el valor que tendrá α, ya que $\alpha = 1-X$

Continuando con el ejemplo de Juan suponga que escoge - un valor de X=.50, por lo que α=.50.

Seleccionamos la consecuencia con los valores máximo y- mínimo de cada acción y hacemos los cálculos necesarios. Presentamos los resultados en la tabla siguiente:

TABLA 3.4

ACCION	RESULTADO MINIMO	RESULTADO MAXIMO	COEFICIENTE DE HURWICZ
a_1	- 3	10	.50(-3)+.50(10)=3.5
a_2	0	6	.50(0)+.50(6)= 3.0
a_3	4	4	.50(4)+.50(4)= 4.0

por lo tanto, Juan escoge la acción a_3, ya que le corresponde el mayor coeficiente de Hurwicz.

El criterio de Hurwicz demuestra cómo es posible hacer el intento de incluir más de un resultado sin utilizar todos los resultados al tratar de evaluar las acciones factibles. Además nos dá una alternativa para obtener cuantificaciones de utilidades y consideraciones subjetivas.

Una observación a el criterio de Hurwicz es de que no posee la propiedad de linealidad y de convexidad (cuando una nueva acción, que es una combinación aleatoria de dos o más acciones óptimas, es no óptima entonces la propiedad de convexidad es violada).

3.2.4 EL CRITERIO DE LAPLACE

Si estamos completamente inseguros de cual es el estado que puede ocurrir, entonces procederemos como si los estados fueran de igual ocurrencia, esto es, asignar a cada estado la misma probabilidad, calculando el VME para cada acción y escogemos la que tenga el mayor VME.

El supuesto de probabilidades iguales implica el llamado principio de la razón de insuficiencia (sin ninguna causa específica, no sucederá ningún evento específico). Puesto que no conocemos motivo alguno para que se produzca un estado natural en lugar de otro, damos por supuesto que es probable que ocurra tanto uno como otro.

Ahora aplicamos el criterio de Laplace al problema de Juan. Asignamos una probabilidad de 1/3 a cada uno de los estados. Calculamos el VME de cada acción y obtenemos los resultados siguientes:

$$a_1: \quad 10(1/3)+2(1/3)-3(1/3) = 3$$

$$a_2: \quad 4(1/3)+6(1/3)+0(1/3) = 3.33$$

$$a_3: \quad 4(1/3)+4(1/3)+4(1/3) = 4$$

Por lo que Juan escogerá la acción a_3, la cual tiene un

VME mayor. El criterio de Laplace posee la propiedad de linealidad y de convexidad.

Son cuatro criterios de decisión en condiciones de incertidumbre completa de alguna distribución de probabilidad -- sobre los estados de la naturaleza. Se ha visto que cada - criterio tiene ciertas características, las cuales pueden - ser una dificultad si se adoptará un criterio y el uso fuera indistinto. El estudio y la comparación de varios criterios de decisión ayudarán a distinguir los rasgos indeseables que contienen cada criterio.

3.3 HAY DISTRIBUCION A PRIORI

A este tipo de problemas también se les conoce como -- problemas bajo riesgo, ya que existe distribución de probabilidad a priori $p(\theta)$; se representa por (A, θ, U, p), donde A, θ, U, representan lo mismo en los problemas del primer tipo y p es la distribución de probabilidad mencionada.

Los problemas tratados anteriormente bajo el criterio de Hurwicz y el de Laplace tienen una distribución de probabilidad, admitiendo ésta como una probabilidad subjetiva.

En este segundo tipo de problemas trataremos otras formas de la distribución de probabilidad. Aunque el método de solución es el mismo independientemente del tipo de probabilidad de que se trate, queremos colocar en perspectiva los diferentes tipos de situaciones de toma de decisiones.

Los problemas con distribución de probabilidad a priori son caracterizados por el tomador de decisiones como --- aquellos en que tiene parcial o completo conocimiento de la distribución de probabilidad sobre los estados de la naturaleza. Si el tomador de decisiones tiene poco conocimiento de la distribución de probabilidad, llamaremos a este caso la situación de conocimiento de riesgo subjetivo. Si el tomador de decisiones tiene suficiente conocimiento para derivar una distribución de frecuencias de probabilidad, diremos que él está en una situación con conocimiento de riesgo. Por supuesto es difícil decir justamente donde el caso de riesgo subjetivo empieza y donde termina.

Muchas veces en problemas de toma de decisiones es posible obtener algunas observaciones de un experimento antes de tomar una decisión, otras veces esto no es posible ó resulta muy costoso. En el capítulo II se analizó la teoría de la utilidad y ahora se verá el valor monetario esperado.

3.3.1 VALOR MONETARIO ESPERADO

En la mayoría de los problemas de decisiones el valor - asignable a un curso de acción determinado puede representarse adecuadamente en términos monetarios. Presentaremos una - situación de toma de decisiones caracterizada por la existencia de varios estados de la naturaleza, donde se asignan probabilidades de ocurrencia a cada estado natural basándose en datos disponibles.

La Compañía Alfa, S. A., renta automoviles a razón de - $700.00 pesos por día, a su vez esta Compañía alquila los -- carros a una empresa mayorista Rentamex. El gerente de Alfa- debe especificar a Rentamex el número de vehículos que pre-- tende alquilar con una semana de anticipación, pagandole --- $475.00 pesos por cada automovil alquilado. Si la demanda es menor que el número de vehículos disponibles, Alfa pierde el alquiler de $475.00 por cada automovil que alquiló y no rentó. Si la demanda es mayor que el número de vehículos disponibles, Alfa se privará de una ganancia de $225.00 pesos por unidad que no tuvo disponible.

El gerente dispone de datos pasados que reflejan la demanda aleatoria, tomando como base un período de observación de cien días. El número de solicitudes de vehículos de parte del público se considera como una variable aleatoria, la cual toma los valores de la tabla 3.5.

TABLA 3.5 DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Número de solicitudes (X_i)	Número de días	Frecuencia relativa $p(X_i)$
20	8	.08
21	10	.10
22	12	.12
23	13	.13
24	17	.17
25	14	.14
26	11	.11
27	9	.09
28	6	.06
Totales:	100	1.00

Se tiene una distribución de probabilidades para la variable considerada, se estima que no habrá cambios futuros en el comportamiento observado de la demanda. El gerente de Alfa usará el valor monetario esperado (VME), para maximizar el beneficio neto de acuerdo a las siguientes reglas:

a).- Calcúlese el beneficio condicional de cada curso de acción factible.

b).- Calcúlese el beneficio neto esperado de cada curso de acción, tal como el promedio ponderado de los beneficios netos de todas las acciones consideradas (pondérese cada beneficio condicional con su respectiva probabilidad de ocurrencia).

c).- Selecciónese el curso de acción que proporcionará el beneficio neto esperado mayor.

Por lo tanto el conjunto de alternativas factibles es:

a_1: Alquílense 20 unidades
a_2: Alquílense 21 unidades
a_3: Alquílense 22 unidades
a_4: Alquílense 23 unidades
a_5: Alquílense 24 unidades
a_6: Alquílense 25 unidades
a_7: Alquílense 26 unidades
a_8: Alquílense 27 unidades
a_9: Alquílense 28 unidades

con estas acciones se obtiene la tabla 3.6.

TABLA 3.6 MATRIZ DE GANANCIAS CONDICIONALES

Estados	CURSOS DE ACCION								
Demanda	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
20	4500	4025	3550	3075	2600	2125	1650	1175	700
21	4500	4725	4250	3775	3300	2825	2350	1875	1400
22	4500	4725	4950	4475	4000	3525	3050	2575	2100
23	4500	4725	4950	5175	4700	4225	3750	3275	2800
24	4500	4725	4950	5175	5400	4925	4450	2975	3500
25	4500	4725	4950	5175	5400	5625	5150	4675	4200
26	4500	4725	4950	5175	5400	5625	5850	5375	4900
27	4500	4725	4950	5175	5400	5625	5850	6075	6075
28	4500	4725	4950	5175	5400	5625	5850	6075	6300

Los cálculos se hacen de la siguiente manera: si el gerente alquilará 21 unidades y sólo tuviera 20 clientes, el -

beneficio neto condicional sería:

$$(20 \times 700) - (22 \times 475) = 3550$$

Nótese que la matriz muestra que los diferentes cursos de acción varían mucho en relación a los riesgos que ofrecer. La acción a_1 garantizá un beneficio neto de $4 500.00 pesos, es la estrategia que presenta menos riesgo, pero también menos ganacia; por el contrario la acción a_9 es la alternativa más arriesgada ya que el beneficio neto puede variar desde -$700.00 pesos hasta una ganancia neta de $6300.00 pesos.

De acuerdo con lo anterior, el beneficio neto esperado viene dado por la fórmula siguiente:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$$

Por ejemplo para la acción a_4 tenemos:

$$\begin{aligned} E(X) = {} & 3075(0.08) + 3775(0.10) + 4475(0.12) + 5175(0.13) \\ & +5175(0.17) + 5175(0.14) + 5175(0.11) + 5175(0.09) \\ & +5175(0.06) = 4783 \end{aligned}$$

por lo tanto $E(X) = 4783$ pesos para la acción a_4. Los beneficios netos esperados asociados con las otras acciones se calculan de la misma manera y se presentan en la tabla 3.7. De acuerdo con el VME el gerente de Alfa debe alquilar 23 unidades, porque es la acción que le proporciona el beneficio esperado más alto de $4783.00 pesos.

TABLA 3.7 BENEFICIOS ESPERADOS

Acciones	Beneficios esperados
a_1	4500.00
a_2	4669.00
a_3	4768.00
a_4	4783.00
a_5	4707.00
a_6	4512.00
a_7	4219.00
a_8	3849.00
a_9	3416.00

El VME debe utilizarse si el decisor lo usa como su norma para seleccionar un curso de acción que proporcione con certeza una cantidad determinada de dinero, o para seleccionar un curso de acción con la mejor o la peor de todas las consecuencias posibles asociadas con un conjunto de acciones. Además de cualquiera que sea el criterio de decisión que se utilice también hay que usar el sentido común y el juicio crítico.

3.4 HAY DISTRIBUCION A POSTERIORI

Este tipo de problemas es caracterizado por la posibilidad de obtener información adicional o datos antes de que la decisión sea tomada. Se le representa por (A, θ, U, p, Y), don de A, θ, U y p, tienen el mismo significado que los casos anteriores, y Y nos representa el experimento o algún dispositivo para obtener evidencia acerca de la probabilidad de los diversos estados de la naturaleza. Muchas decisiones en la agricultura, negocios y en nuestra vida diaria son hechas después de que consideramos o investigamos alguna información adicional acerca de la probabilidad de los estados de la naturaleza. Frecuentemente la información obtenida no es vista como perfecta para predecir cuál estado de la naturaleza ocurrira, así la característica importante de la información, es ver que tanto se ajustan a una distribución de probabilidad conocida.

Las probabilidades condicionales $p(Y/\theta)$ en este tipo de problemas jugarán un papel muy importante ya que mediante éstas y el teorema de Bayes podremos revisar las probabilidades a priori, $p(\theta)$, para obtener una distribución de probabilidad a posteriori, $p(\theta/Y)$.

Este tipo de problemas se entenderá mejor mediante un caso que se presentó en una compañía.

Una empresa manufacturera planeaba introducir un nuevo producto en el mercado y estaba indecisa si manufacturaba ella misma el producto o lo mandaba a maquilar. La compañíaconsideró un período de cinco años para la comparación de -- los beneficios de su producto. De acuerdo con un análisis y considerando que las ventas son altas, la empresa prevé un - beneficio de 14 millones de pesos durante los próximos cinco años; si las ventas son regulares, esperá ganar 3.5 millones de pesos; y si las ventas son bajas se perderán $900 000 pesos. Si manda maquilar su producto y las ventas son altas, - puede obtenerse un beneficio de 7 millones de pesos; si las- ventas son regulares prevé que sólo ganará $1 500 000 pesos; y si las ventas son bajas, ganará $200 000 pesos. Con base a experiencias pasadas con respecto a productos similares y a- entrevistas con expertos, la compañía asigna las siguientes- probabilidades subjetivas a los eventos de interés:

θ_1 : ventas altas $p(\theta_1) = 0.18$

θ_2 : ventas medias $p(\theta_2) = 0.55$

θ_3 : ventas bajas $p(\theta_3) = 0.27$

Con la información anterior construimos la tabla 3.8.

TABLA 3.8 MATRIZ DE DECISIONES

Acciones / Estados	a_1	a_2
θ_1	14 000 000	7 000 000
θ_2	3 500 000	1 500 000
θ_3	- 900 000	200 000

donde: a_1 ; manufacturar ella misma el producto.

a_2 ; mandar a maquilar el producto.

Las ganancias esperadas se calculan por medio de las -- probabilidades a priori, a partir de información adicional;- dicha información se obtuvo mediante un método de muestreo - estadístico, para lo cual hizo que una organización de investigación de mercados averiguará el número de clientes potenciales de su producto. La encuesta ofreció tres tipos de resultados muestrales.

y_1: los resultados indican un nivel de ventas alto.

y_2: los resultados indican un nivel de ventas medio.

y_3: los resultados indican un nivel de ventas bajo.

Basándose en encuestas previas similares, la empresa de investigación de mercados determina el grado de confiabilidad con los resultados muestrales de la siguiente manera: En el pasado, cuando el nivel de ventas era alto el 15% de las- encuestas indicaban erróneamente que la demanda futura sería a un nivel mediano; en el pasado, cuando el nivel actual de- las ventas era medio, en el 83% de las veces los resultados- indicaban adecuadamente el nivel futuro de la demanda; y --- cuando el nivel actual de las ventas era bajo, el 2% de las encuestas daban una indicación de un nivel medio de ventas - futuras.

Esta información, puede resumirse en la tabla 3.9:

TABLA 3.9 PROBABILIDADES CONDICIONALES

$p(y_2/\theta_1)=0.15$; en donde θ_1: nivel futuro alto de ventas
$p(y_2/\theta_2)=0.83$; en donde θ_2: nivel futuro medio de ventas
$p(y_2/\theta_3)=0.22$; en donde θ_3: nivel futuro bajo de ventas

Nótese que no se proporciona $p(y_1/\theta_i)$ y $p(y_3/\theta_i)$, porque en la encuesta únicamente se observó el resultado muestral de y_2.

Utilizando la tabla 3.9, la empresa procedió a revisar sus probabilidades a priori asociadas con los diversos estados de la naturaleza para obtener las probabilidades a posteriori. Los resultados aparecen en la tabla 3.10 como se muestra:

TABLA 3.10 CALCULO DE LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI

Estado θ_i	probabilidad a priori $p(\theta_i)$	probabilidad condicional $p(y_2/\theta_i)$	probabilidad conjunta $p(\theta_i)p(y_2/\theta_i)$	probabilidad a posteriori $p(\theta_i/y_2)$
θ_1	0.18	0.15	0.0270	0.0497
θ_2	0.55	0.83	0.4[illegible]	0.8408
θ_3	0.27	0.22	0.0594	0.1094
Total:	1.00	----	0.5429	0.9999

Las probabilidades a posteriori se calculan usando el teorema de Bayes, dado por la siguiente expresión:

$$p(\theta_i/y_2) = \frac{p(\theta_i) \quad p(y_2/\theta_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(\theta_i) \quad p(y_2/\theta_i)}$$

para θ_1 tenemos:

$$p(\theta_1/y_2) = \frac{(0.18)(0.15)}{(0.18)(0.15)+(0.55)(0.83)+(0.27)(0.22)} = 0.0497$$

de igual manera se calculan, $p(\theta_2/y_2)$, $p(\theta_3/y_2)$.

El cálculo del beneficio esperado bajo condiciones de incertidumbre parcial será:

para a_1: $14,000,000(0.0497) + 3,500,000(0.8408)$
$- 900,000(0.1094) = 3,540,140$

para a_2: $7,000,000(0.0497) + 1,500,000(0.8408)$
$+ 200,000(0.1094) = 1,210,580$

De este análisis a posteriori se observá que la mejor acción es a_1, con un beneficio esperado de $3,540,140 pesos.

La empresa de investigación de mercados no puede ofrecerle a la compañía una información perfecta y por eso la compañía no tiene aún una guía clara acerca del valor de la información adicional obtenida por medio de ese tipo de en--

cuesta. El cálculo del beneficio esperado con ayuda de la información perfecta se basa en las ganancias esperadas si la compañía tiene acceso a un pronosticador perfecto, el cual predice con exactitud que estado natural ocurrirá, por lo que la compañía seleccionará el curso de acción que le promete la ganancia óptima.

Para determinar el valor esperado de la información perfecta (VEIP), se calcula el beneficio esperado cuando se tiene información perfecta y luego se sustrae el beneficio esperado que se tiene en condiciones de incertidumbre. Entonces, el beneficio esperado con base en información perfecta se calcula ponderando las ganancias óptimas con sus respectivas probabilidades a posteriori de obtenerlas y totalizando estos productos. Ese cálculo se efectúa de la manera siguiente:

EVENTOS PRONOSTICADOS	GANANCIAS CONDICIONALES	PROBABILIDADES A POSTERIORI	GANANCIAS ESPERADAS
θ_1	14 000 000	0.0497	695 800
θ_2	3 500 000	0.8408	2 942 800
θ_3	200 000	0.1094	21 880
TOTALES		0.9999	3 660 480

TABLA 3.11

La cifra de \$ 3 660 480 pesos, son las ganancias esperadas con base en la información perfecta, restamos la cantidad de \$3 540 140 que son las ganancias esperadas a posteriori calculadas en condiciones de incertidumbre.

$$\$3\ 660\ 480 - \$3\ 540\ 140 = \$120\ 340 \text{ pesos}$$

Así pues, la cifra anterior de \$120 340 pesos es el valor esperado de la información perfecta.

Otro término equivalente que se emplea con frecuencia para designar el VEIP es el costo de la incertidumbre, el cual es el costo relacionado con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. Por lo tanto la cantidad de \$120 340 es la que se le puede pagar a la organización de investigación de mercados por realizar el estudio.

3.5 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS CRITERIOS DE DECISION

En esta sección veremos el concepto de la distribución a posteriori para la formulación de un eficiente procedimiento de decisión el cual se basa en gráficas. Se analizará un problema con datos y más adelante emplearemos el mismo problema para los criterios: minimax, maximin, Hurwicz, Laplace y Bayes.

Considere que tenemos dos estados de la naturaleza y ocho estrategias con utilidades promedio como se muestran en la tabla 3.12.

TABLA 3.12 UTILIDADES PROMEDIO PARA OCHO ESTRATEGIAS

Estados	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
θ_1	3	4	3	3.4	4.8	1	2	1.4
θ_2	1	0.6	4	2	2	5	4	3

Nótese que s_1, s_2 y s_4 son dominadas por s_5, s_7 y s_8 dominadas por s_3. Denotemos por $G_1=G(\theta_1,s)$ a la utilidad para θ_1 y alguna estrategia; la utilidad promedio para θ_2 y cualquier estrategia por $G_2=G(\theta_2, s)$. Se dice que s domina a s^* si $G(\theta_1,s) \geq G(\theta_1,s^*)$ y $G(\theta_2,s) \geq G(\theta_2,s^*)$. Una estrategia es admisible si no es dominada por otra, de aqui las estrategias s_3, s_5 y s_6 son admisibles. Mostraremos que toda estrategia admisible es una estrategia bayesiana.

Las utilidades G_1 y G_2 pueden verse como coordenadas de un punto en una gráfica, con $G(\theta_1, s)$ trazada en eje horizontal y $g(\theta_2, s)$ en el eje vertical. En la fig. 3.1 cada estrategia es representada por un punto, en donde s_3, s_5 y s_6 estan ubicados a la derecha y arriba de los otros puntos.

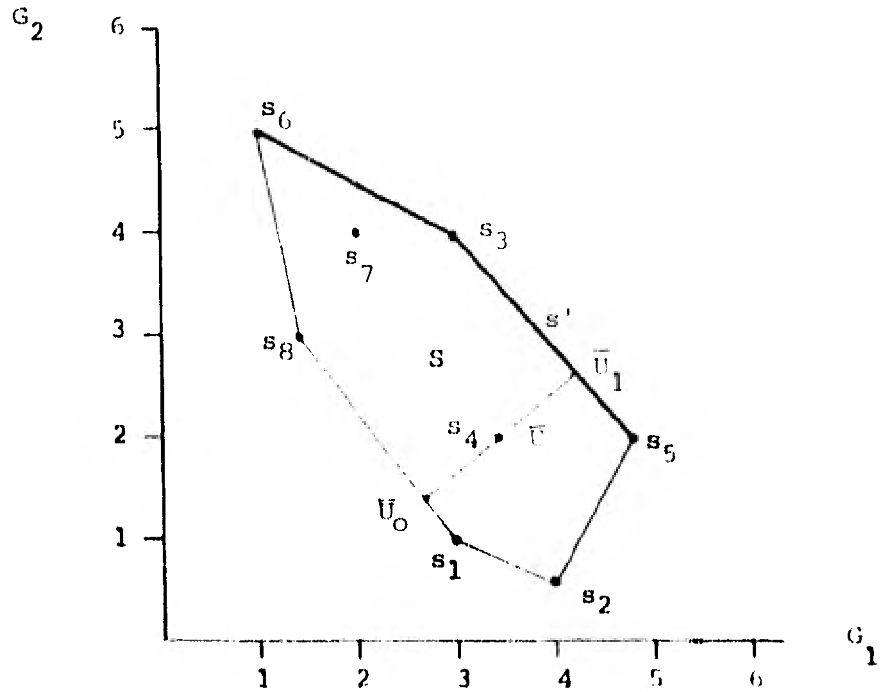


FIG. 3.1 CONJUNTO S DE ESTRATEGIAS PARA UN PROBLEMA DE TOMA DE DECISIONES.

Se llama estrategia mixta a los puntos situados sobre la línea recta que conecta dos estrategias admisibles, digamos s_3 y s_5. Sea s' la estrategia mixta, donde (1-W) y W son las probabilidades generadas mediante un método aleatorio pa ra s_3 y s_5 respectivamente. Entonces la utilidad esperada para s' es:

$$G(\theta_1,s') = (1-W)G(\theta_1,s_3) + WG(\theta_1,s_5) = (1-W)(3) + W(4.8)$$
$$G(\theta_2,s') = (1-W)G(\theta_2,s_3) + WG(\theta_2,s_5) = (1-W)(4) + W(2)$$

Si $W = 1/2$ entonces $G(\theta_1,s') = 3.9$ y $G(\theta_2,s') = 3.0$. De hecho para cualquier probabilidad de $0 \leq W \leq 1$, la estrategia mixta caerá sobre la recta entre s_3 y s_5 .

La recta entre dos puntos puede representarse como el conjunto:

$$\left[\overline{U} : \overline{U} = (1-W)\overline{U}_o + W\,\overline{U}_1 \right]$$

donde $\overline{U}_o$, $\overline{U}_1$, y $\overline{U}$ representan los puntos $\left[G(\theta_1,s_3),G(\theta_2,s_3)\right]$, $\left[G(\theta_1,s_5),\ G(\theta_2,s_5)\right]$ y $\left[G(\theta_1,s'),\ G(\theta_2,s')\right]$ respectivamente.

Consideremos otros puntos correspondientes para alguna otra estrategia mixta. Por ejemplo, s_4 es un elemento de un conjunto donde $\overline{U}_o$ está en la recta entre s_1 y s_8; $\overline{U}_1$ está entre s_3 y s_5.

Un conjunto es convexo, si cuando $\overline{U}_o$ y $\overline{U}_1$ están contenidos en S, entonces $\left[(1-W)\overline{U}_o + W\,\overline{U}_1\right]$ está contenido en S para toda W. El conjunto convexo S, mostrado en la figura 3.1 es el conjunto convexo más pequeño que corresponde a los puntos de las estrategias s_1, s_2, s_3, s_5, s_6 y s_8. Es claro que este conjunto contiene todas las estrategias del problema.

La clase de las estrategias admisibles corresponden a - la porción de la frontera del conjunto convexo. Esto es, las estrategias admisibles son s_3, s_5 y s_6. Además las estrate-- gias mixtas que unen ésos puntos constituyen la parte admisible de la frontera, mostrada con la línea gruesa en la figura 3.1. Es claro que necesitamos considerar únicamente las - estrategias de la frontera, de esta manera tendremos reducido el número de estrategias consideradas.

3.5.1 CRITERIO MAXIMIN

El criterio maximin especifica que se encuentra la mínima utilidad para toda estrategia y se determina el máximo de esos mínimos. Del ejemplo anterior, todos los mínimos con -- respecto a θ_1 se representan por una recta vertical y todos- los mínimos con respecto a θ_2 por una recta horizontal. Cuando se consideran los dos estados de la naturaleza, las dos- rectas se intersectarán en un valor mínimo común. Varias de- dichas rectas son trazadas en la gráfica de la figura 3.2. - El nivel c_1 representa los mínimos valores (C,C) para θ_1 y - θ_2. Se puede imaginar a las rectas que se intersectan como- una curva de indiferencia que forman un ángulo recto, es decir alguna estrategia que proporciona una ganancia de c cuan do ocurre θ_1 es indiferente de otra que proporciona una ganancia de c cuando ocurre θ_2 . Todos los puntos de c_2 son igualmente deseables y preferidos a los puntos de c_1. Para localizar el máximo de estos mínimos, debemos hallar un punto en el conjunto S que toque la curva de indiferencia más alta. Por lo tanto, la estrategia mixta s* es óptima utilizando el criterio maximin, porque nos permite llegar a la curva de indiferencia más alta c_o.

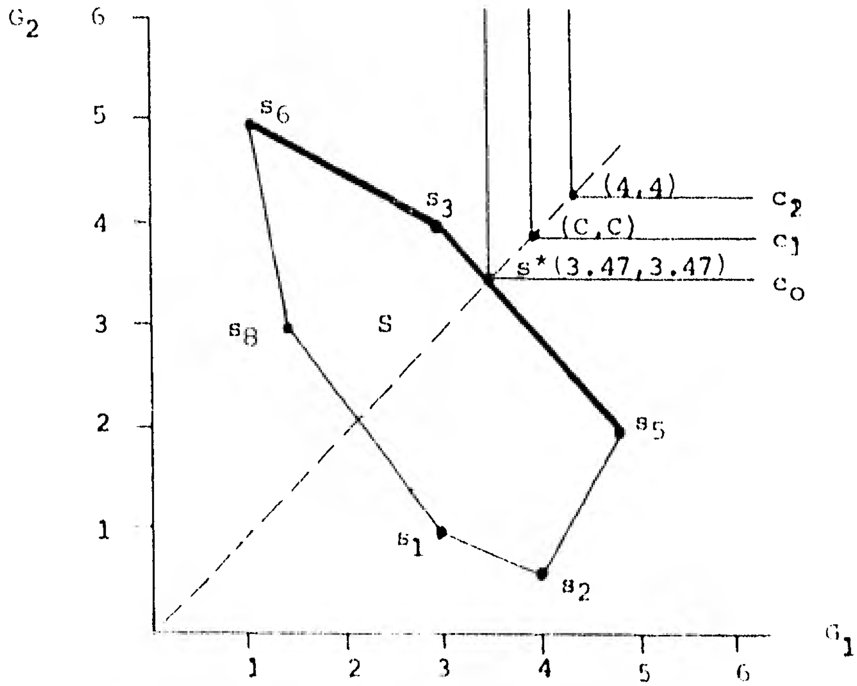


FIG. 3.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL CRITERIO MAXIMIN

El conjunto de puntos (G_1, G_2) para los cuales la menor de las coordenadas es cuatro, está designado por:

$$\left[(G_1, G_2) : \min (G_1, G_2) = 4 \right]$$

y es el conjunto de puntos en la intersección de las dos semirectas. Una es recta horizontal para la cual $G_2=4$ y $G_1 \geq 4$. La otra es una recta vertical para la cual $G_1=4$ y $G_2 \geq 4$. La gráfica de las dos semirectas se muestra como la curva de indiferencia c_2. Cuando decrece la curva de indiferencia, las líneas de intersección se mueven hacia abajo y a la izquierda a lo largo de una recta a 45° que pasa por el origen. El punto de intersección de las rectas que tocan la parte admisible de la frontera S, es el punto correspondiente a la estrategia con máxima utilidad esperada.

La ecuación de la recta entre s_3 y s_5 es $2G_1+1.8G_2=13.2$; la ecuación de la recta al origen es $G_2 = G_1$. Por lo tanto, resolviendo las ecuaciones simultaneas, el máximo punto en la frontera admisible es (3.47, 3.47). Ahora de la ecuación de la utilidad esperada tenemos:

$$G(\theta_1,s^*) = (1-W)\ G(\theta_1,s_3) + W\,G(\theta_1,s_5)$$

$$3.47 = 3(1-W) + 4.8W$$

$$W = 0.26$$

$$1-W = 0.74$$

El punto corresponde a una estrategia mixta de s_3 y s_5, con probabilidades de 0.74 y 0.26 respectivamente.

3.5.2 CRITERIO MINIMAX

Veamos como convirtiendo las utilidades a pérdidas cambia la posición del conjunto convexo S. Para convertir las utilidades a pérdidas restamos de la utilidad más alta para cada estado, todos los valores del mismo renglón. De la tabla 3.12 se obtienen las pérdidas esperadas de la tabla 3.13.

TABLA 3.13 PERDIDAS ESPERADAS PARA OCHO ESTRATEGIAS

Estados	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
θ_1	1.8	.8	1.8	1.4	0	3.8	2.8	3.4
θ_2	4	4.4	1	3	3	0	1	2

Se representan estos puntos en la figura 3.3.

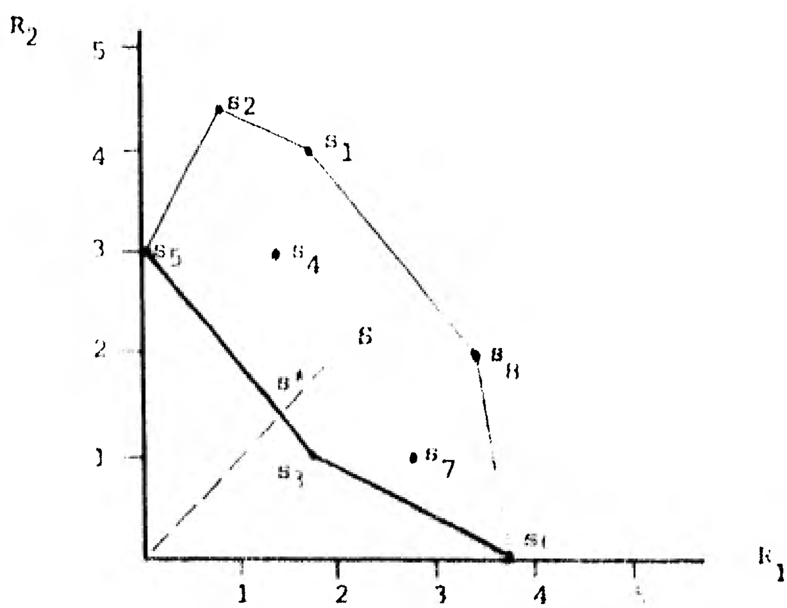


FIG. 3.3 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL CRITERIO MINIMAX

Se puede notar que el conjunto convexo S es el mismo -- que se tuvo en la figura 3.1, excepto que la parte admisible de la frontera está ahora más cerca del origen y el conjunto toca los ejes. La mínima pérdida esperada aparecerá a lo largo de la parte admisible de la frontera (línea más gruesa). Para hallar el máximo de éstos, se traza una recta a partir del origen a 45^{o} que localiza a la estrategia minimax. En este caso a la estrategia mixta le corresponde el punto (1.42, 1.42). La estrategia mixta s* es una mezcla de s_3 y s_5 con - probabilidades aproximadas de 0.82 y 0.18 respectivamente.

3.5.3 CRITERIO DE HURWICZ

El criterio del índice α de Hurwicz también puede mostrarse geométricamente en dos dimensiones. Este criterio dice que se tome la estrategia que maximice $\alpha m_t + (1-\alpha) M_t$, donde m_t es la utilidad más pequeña y M_t es la utilidad más grande para toda estrategia s_t. La ecuación anterior es una recta con pendiente de $-\alpha/(1-\alpha)$ por arriba de la recta y - $-(1-\alpha)/\alpha$ bajo la recta. Las estrategias para las cuales G_2 es la más grande y G_1 es la más pequeña son aquellas que están por encima de una recta a 45^{o} , como se muestra en la figura 3.4.

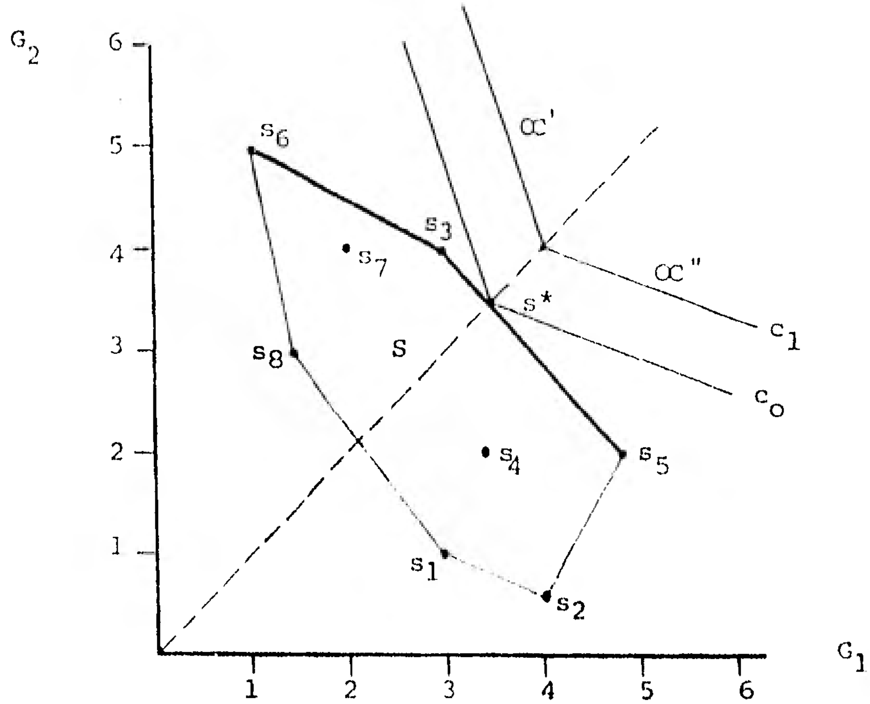


FIG. 3.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL CRITERIO DE HURWICZ

Podemos trazar una cuña en la gráfica, tal como la recta c_1 , que represente el índice α. La cuña que representa $\alpha=3/4$ está dibujada arriba del conjunto convexo. Los puntos tales como α' y α'' en la recta representan combinaciones de G_1 y G_2 . Moviendo la cuña hacia abajo y a la izquierda como la recta c_o, que toca el conjunto convexo S localiza la estrategia admisible s^* que maximiza el valor del índice α cuando $\alpha=3/4$. En este caso el índice α es un máximo para una estrategia mixta que es idéntica a la estrategia maximin.

3.5.4 CRITERIO DE LAPLACE

En este criterio se asignan probabilidades iguales a cada estado y hallamos la estrategia que tenga el máximo valor esperado. El valor esperado para el caso que estamos considerando está dado por:

$$E(U) = G_1/2 + G_2/2$$

esta es la ecuación de una recta con pendiente -1 que puede dibujarse en una gráfica como la figura 3.5, por encima del conjunto convexo S. Moviendo la recta hacia abajo hasta que toque el conjunto convexo S, localiza la estrategia del valor máximo esperado de acuerdo al criterio de Laplace.

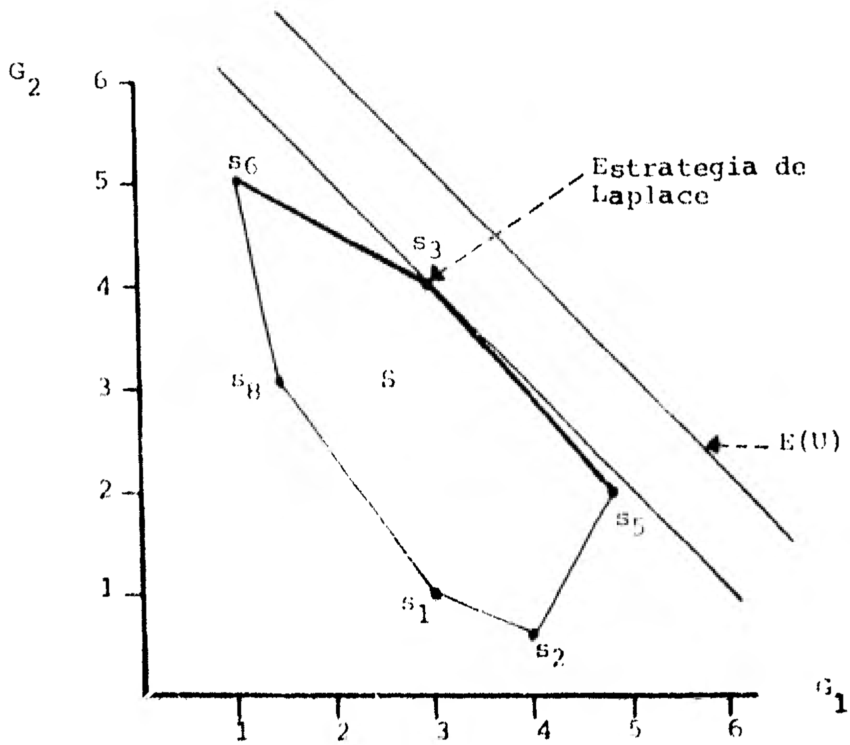


FIG. 3.5 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL CRITERIO DE LAPLACE

En este caso, s_3 es la estrategia que maximiza el valor esperado. Para cualquier otra recta más baja y a la izquierda proporcionará una utilidad esperada más pequeña. Por ejemplo, en s_3, $E(U)=3/2+4/2=3.5$ y en s_5, $E(U)=4.8/2+2/2 = 3.4$.

3.5.5 ESTRATEGIA BAYESIANA

Una estrategia bayesiana para dos estados de la naturaleza es aquella que maximiza $G(s) = (1-W)G_1 + W G_2$. Para localizar una estrategia bayesiana en una gráfica trazamos una recta con pendiente de $-(1-W)/W$ arriba del conjunto convexo-S, entonces moviendo la recta paralelamente hasta tocar S, - encontraremos la estrategia bayesiana para cualquier probabilidad a priori. Por ejemplo, si $W=1/3$ y $1-W=2/3$. La recta -- con pendiente de -2 toca a S en s_5 como se muestra en la figura 3.6 la cual da el valor esperado máximo para las probabilidades a priori de 2/3 para θ_1 y 1/3 para θ_2. Las probabilidades a priori de alguna manera son conocidas antes de - la observación del resultado del experimento. Nótese que el criterio de Laplace es un caso especial de la estrategia bayesiana con igual probabilidad para cada estado de la naturaleza. Las estrategias bayesianas correspondientes a todo conjunto de probabilidades a priori contienen todas las estrate gias admisibles. Este hecho es una ventaja ya que se puede - considerar solamente la estrategia bayesiana para una estrategia óptima. Una segunda ventaja es que representan únicamente a una estrategia (no mixta). Hemos mostrado que toda - estrategia admisible son estrategias bayesianas para un problema con dos estados de la naturaleza, el mismo resultado - puede obtenerse para n estados. Una tercera ventaja de las - estrategias bayesianas es que se pueden computar facilmente.

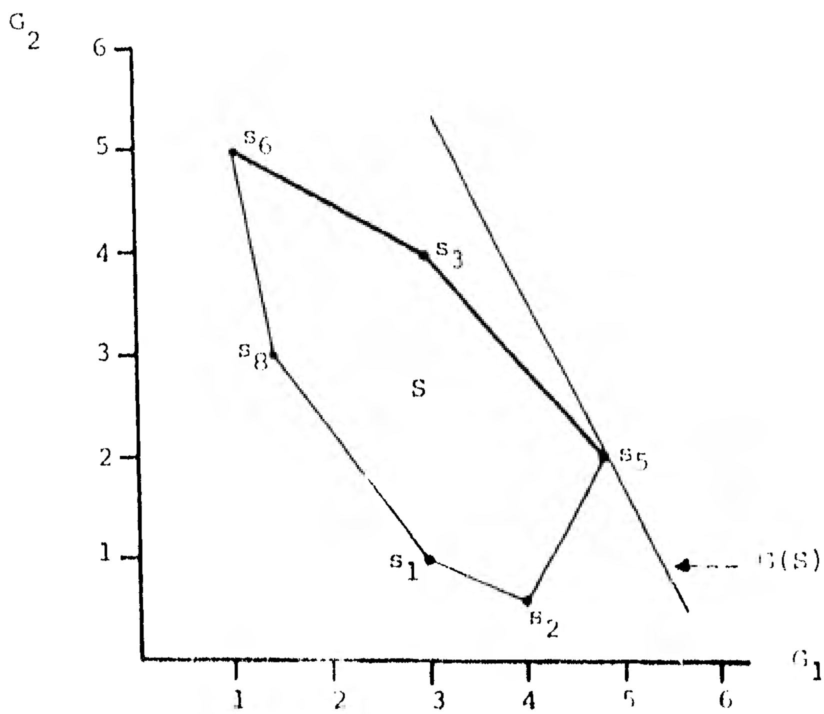


FIG. 3.6 ESTRATEGIA BAYESIANA PARA PROBABILIDADES A PRIORI

CAPITULO IV

CASO PRACTICO

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo presentaremos el resultado de un estudio sobre la rotación de cultivos empleando los principios de toma de decisiones. Este estudio sirve como aplicación concreta de- los conceptos teóricos desarrollados anteriormente como: las -- acciones y estados de la naturaleza, la programación cuadrática y el uso de la función de utilidad.

El estudio consiste en seleccionar un sistema de cultivos- y la cantidad que se deben cultivar de cada uno de ellos. Se - seleccionó una importante área de la región lagunera, la cual - tiene suelo y condiciones climáticas adaptadas a un amplio rango de cultivos con operaciones altamente mecanizadas. La mayor parte de la tierra está cultivada con algodón, jitomate, sandía, melón, vid, maíz, etc. Estos cultivos cambian mucho con respecto al ingreso bruto, estos cambios radican en la variación de - la producción del cultivo, en efectos y factores de los precios. El problema de decisión implica seleccionar la combinación de- cultivos, los cuales tienen restricciones tecnológicas y que -- sean económicamente factibles para que proporcionen el mayor beneficio posible al agricultor.

La razón principal de haber escogido la región lagunera --

es que se encontró mayor cantidad de información disponible para la realización de este estudio. Las fuentes de información fuerón: La Secretaría de Recursos Hidráulicos, El Instituto Nacional de Investigaciones Agrícolas (INIA) y el Banco de México (BM). Con la información obtenida se formarón tablas que involucran los diferentes cultivos, los cuales están en términos de \$/ton, ton/ha, y al combinarse nos proporcionan una tercera en términos de \$/ha. Esta última es ampliamente utilizada y se encuentra representada en la tabla 4.1, la cual proporciona el ingreso en miles de pesos/ha, pero tiene el inconveniente de que las cantidades no son comparables entre si, porque no dicen que cultivo proporciona mayor beneficio en ese año. Para suprimir este inconveniente se tomó en cuenta el porcentaje de inflación de cada uno de los años involucrados, se seleccionó arbitrariamente a 1970 como el año base y se obtuvieron los numeros índice de la tabla 4.2. Así al año 1970 le corresponde el número índice 100; el número índice correspondiente a 1971, donde [illegible] el porcentaje de inflación de 1970 es:

[illegible]

[illegible] años siguientes [illegible]

[illegible]

obteniendose de forma análoga los de años anteriores.

Al aplicar estos numeros a la tabla 4.1 se obtiene otra - que proporciona cantidades comparables entre sí. Así por ejemplo, al algodón en el ciclo 1969-1970 le corresponde la cantidad:

$$\frac{\text{Ingreso por hectárea en el ciclo}}{\text{número índice del año}} \times 100 = \frac{6.038}{97} \times 100 = 6.255$$

Realizando operaciones semejantes a la anterior, para todos los productos en cada ciclo, se obtiene la tabla 4.3. Esta tabla, desde luego, será utilizada en los cálculos subsecuentes.

Nótese que el haber escogido como año base 1970, implica necesariamente que el ciclo base sea 1970-71.

TABLA 4.1

ESTADISTICA SOBRE INGRESO MEDIO [illegible]
REGION LAGUNERA (COAH. Y DGO.)

	ALGODON	VID	MAIZ	JITOMATE	SANDIA	MELON
	MILES DE PESOS / HECTAREA					
1945-46	[illegible]	6.971	0.467	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1946-47	1.746	5.[illegible]	0.598	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1947-48	2.405	2.113	0.832	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1948-49	2.500	2.228	0.8[illegible]	2.617	[illegible]	[illegible]
1949-50	1.097	3.678	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1950-51	2.675	2.826	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1951-52	2.663	4.269	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1952-53	2.412	7.169	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1953-54	4.314	5.077	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1954-55	4.197	5.[illegible]	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1955-56	3.772	7.263	1.[illegible]	[illegible]	7.[illegible]	[illegible]
1956-57	4.[illegible]	3.411	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1957-58	3.[illegible]	8.000	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1958-59	4.[illegible]	8.000	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1959-60	4.[illegible]	9.91[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1960-61	4.[illegible]	10.00[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1961-62	5.[illegible]	[illegible]	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1962-63	7.[illegible]	[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1963-64	[illegible]	11.17[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1964-65	4.[illegible]	6.[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1965-66	5.397	6.1[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1966-67	6.[illegible]	6.[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1967-68	5.[illegible]	4.[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1968-69	5.[illegible]	4.[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1969-70	[illegible]	10.[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1970-71	[illegible]	5.[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1971-72	6.[illegible]	13.11[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1972-73	10.[illegible]	14.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1973-74	11.[illegible]	22.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1974-75	13.[illegible]	24.1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1975-76	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

TABLA 4.2 PORCENTAJE DE INFLACION Y NUMERO INDICE

AÑO	PORCENTAJE DE INFLACION	NUMERO INDICE
1945	8.8	35
1946	15.2	38
1947	16.0	44
1948	24.0	51
1949	9.3	63
1950	9.3	69
1951	19.7	75
1952	- 2.2	90
1953	- 1.9	70
1954	9.4	57
1955	9.4	62
1956	4.7	68
1957	4.3	71
1958	4.4	74
1959	1.7	77
1960	5.0	78
1961	0.9	82
1962	1.8	83
1963	[illegible]	84
1964	4.2	85
1965	[illegible]	[illegible]
1966	1.3	91
1967	2.9	92
1968	1.9	95
1969	[illegible]	97
1970	[illegible]	100
1971	[illegible]	106
1972	4.9	112
1973	25.2	118
1974	13.3	148
1975	15.4	168

TABLA 4.3

ESTADISTICA SOBRE INGRESO MEDIO NETO RELATIVO

REGION LAGUNERA COAH. Y DGO.

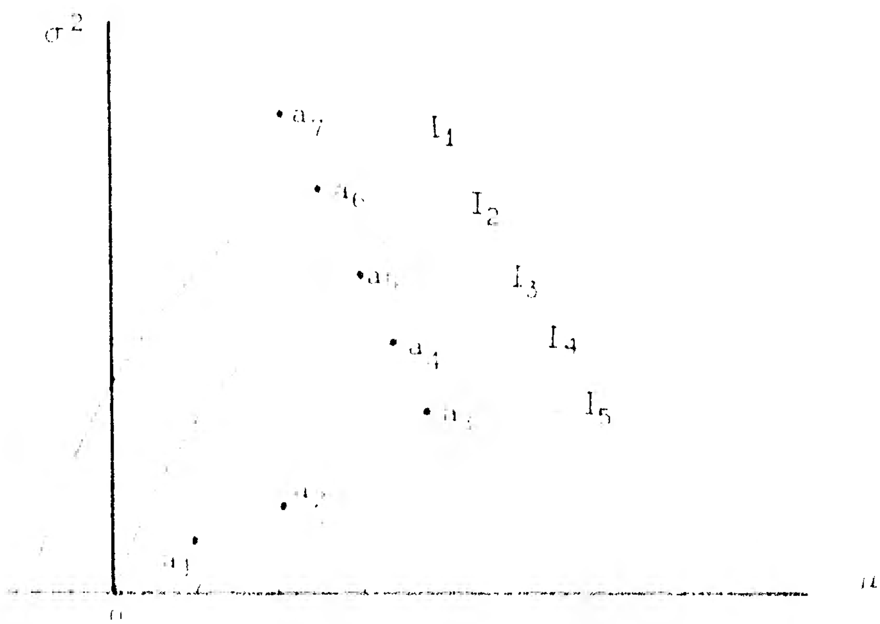
CICLO BASE = 1970-71

	ALGODON	VID	MAIZ	CACAHUATE	SANDIA	MELON
	MILES DE PESOS / HECTAREA					
1945-46	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1946-47	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1947-48	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1948-49	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1949-50	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1950-51	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1951-52	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1952-53	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1953-54	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1954-55	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1955-56	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1956-57	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1957-58	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1958-59	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1959-60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1960-61	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1961-62	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1962-63	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1963-64	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1964-65	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1965-66	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1966-67	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1967-68	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1968-69	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1969-70	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1970-71	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1971-72	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1972-73	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1973-74	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1974-75	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1975-76	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1976-77	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

4.2 OBTENCION DE UNA FRONTERA E-V

Las relaciones entre la utilidad esperada y los momentos de una distribución pueden mostrarse en un diagrama bidimensional, el cual hace notar que la distribución de probabilidad es descrita por dos momentos, la media y la varianza, como en la figura 4.1. Un nivel de utilidad se muestra con una curva de indiferencia, la que relaciona las combinaciones de [illegible] ^{2}, a las que el tomador de decisiones es indiferente. Se observa que $I_1 < I_2 < I_3 < I_4 < I_5$. Cualquier acción puede también representarse en el diagrama por medio de un punto que ilustre la media y la varianza de los resultados monetarios de dicha acción. De esta manera cada uno de los puntos a_j con $j = 1,2,...7$, marcados en la figura 4.1 representan acciones con riesgo, donde a_3 sería seleccionada por el tomador de decisiones, ya que está en la curva de indiferencia más alta y proporciona la máxima utilidad esperada. La caracterización del problema de decisión en esta gráfica es conocida como el análisis E-V. Esta representación [illegible] de los [illegible] frontera efi[illegible] están [illegible] de la frontera. [illegible] esperanza --

del ingreso con menor variancia; mayor esperanza del ingreso con la misma variancia ó mayor esperanza del ingreso con menor variancia. Por lo tanto, la obtención de la frontera eficaz simplifica la alternativa final del problema, por restringir el rango de acciones admisibles a las que estén situadas en la frontera. Esta simplificación supone desde luego, que la distribución de los ingresos para cualquier acción puede ser descrita por su media y variancia.



[illegible]

Supongamos que hay n alternativas de cultivos, donde q_i representa a la proporción de tierra dedicada al i-ésimo cultivo $\left(\sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \right)$, σ_i^2 a la variancia del ingreso neto del i-ésimo cultivo y r_{ij} a la correlación entre los ingresos de los cultivos i, j. La esperanza de los ingresos para cualquier sistema de cultivos es entonces el valor promedio de las esperanzas de los ingresos de cada cultivo incluido en el sistema. Si se supone una distribución normal de los ingresos para cada cultivo, la esperanza de los ingresos (I), expresada en miles de pesos por hectárea, está especificada por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} q_i \, I_i \quad \ldots (4.1)$$

y la variancia por:

$$\sigma_I^2 = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 \, \sigma_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n} q_i \, q_j \, r_{ij} \, \sigma_i \, \sigma_j \quad \ldots (4.2)$$

donde la interacción entre cultivos está representada por la covariancia de los términos $(r_{ij} \, \sigma_i \, \sigma_j)$.

La tabla 4.4 proporciona las estimaciones de las medias y las desviaciones estándar de los ingresos por hectárea para los cultivos de la región en estudio, así como la matriz de correlación de los ingresos. [illegible] de incertidumbre en la producción y los precios, está [illegible] tenden-

TABLA 4.4

MATRIZ DE CORRELACION, MEDIAS Y DESVIACIONES ESTANDAR PARA LOS INGRESOS RELATIVOS DE LOS CULTIVOS

	ALGODON	VID	MAIZ	JITOMATE	SANDIA	MELON
	COEFICIENTES DE CORRELACION					
ALGODON	1.00000000					
VID	0.42323371	1.00000000				
MAIZ	0.[illegible]2338276	0.[illegible]7612805	1.00000000			
JITOMATE	0.52118009	0.[illegible]901[illegible]354	0.5[illegible]	1.00000000		
SANDIA	0.449[illegible]7884	0.[illegible]01[illegible]1675	0.53[illegible]	0.[illegible]112[illegible]	1.00000000	
MELON	0.[illegible]5[illegible]14055	0.[illegible]10[illegible]651	0.5[illegible]73167	0.[illegible]	0.5[illegible]971	1.00000000
	MILES DE PESOS / HECTAREA					
MEDIA DE LOS INGRESOS ($\bar{I}$)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7.[illegible]	[illegible]
DESVIACION ESTANDAR DE LOS INGRESOS (S)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

cias sistemáticas, la producción tiende a elevarse con el --- tiempo debido a cambios tecnológicos, la producción y los precios generalmente aumentan o siguen movimientos cíclicos a -- largo plazo. Las medias de los ingresos en la tabla 4.4 son -- los promedios de los cinco años más recientes de la serie de- tiempo usada, ya que es la mejor estimación del futuro valor- esperado del ingreso para cada cultivo, mientras que el mejor estimador de la variancia futura es la serie de tiempo completa.

Dadas las estimaciones de la tabla 4.4, la variancia (o desviación estándar) y la media para cualquier combinación de cultivos deseada, puede calcularse directamente de las ecuaciones (4.1) y (4.2). En la práctica no todas las combinaciones de cultivos son factibles debido a ciertas restricciones- institucionales o tecnológicas, dentro de estas restricciones la media y la desviación estándar del ingreso pueden ser deducidas usando las anteriores ecuaciones. En la figura 4.2, están representadas combinaciones selectas de cultivos y se [illegible] les [illegible] media, (a_4) [illegible] [illegible].7% [illegible] de algodón, [illegible], 1,0[illegible] de jitomate, 14.11 [illegible] y [illegible].21 de melón.

La media de esta rotación de cultivos es:

$$
\begin{aligned}
I = {} & (0.0875)(12.233) + (0.070)(16.097) + (0.6293)(2.686) + \\
& (0.0100)(15.791) + (0.1411)(7.772) + (0.0621)(13.813)
\end{aligned}
$$

$$= 6.00 \qquad \text{(en miles de pesos por hectárea)}$$

y la variancia es:

$$
\begin{aligned}
\sigma_I^2 = {} & (0.0875)^2(3.481)^2 + (0.070)^2(5.133)^2 + (0.6293)^2(0.758)^2 + \\
& (0.0106)^2(4.629)^2 + (0.1411)^2(2.43)^2 + (0.0621)^2(4.253)^2 + \\
& 2(0.0875)(3.481)\,[(0.070)(0.4222)(5.133) + (0.6293)(0.6234) \\
& (0.758) + (0.01)(0.5212)(4.629) + (0.1411)(0.4494)(2.430) \\
& + (0.0621)(0.5961)(4.253)] + 2(0.070)(5.133)[(0.6293)(0.758) \\
& (0.3761) + (0.01)(0.3902)(4.629) + (0.1411)(0.0616)(2.430) \\
& + (0.0621)(0.2167)(4.253)] + 2(0.6293)(0.758)[(0.01)(.5814) \\
& (4.629) + (0.1411)(0.\text{[illegible]})(2.43) + (0.0621)(.5607)(4.253)] \\
& + 2(0.01)(4.629)\,[(0.1411)(0.211\text{[illegible]})(2.43) + (0.0621)(0.6832) \\
& (4.253)] + 2(0.1411)(0.0621)(0.\text{[illegible]})(2.430)(4.253)
\end{aligned}
$$

$$\sigma_I^2 = 1.788$$

De la misma forma se pudo calcular un número suficiente mente grande [illegible] en una forma [illegible], la [illegible] cuadrática [illegible] ir [illegible] en [illegible].

$$\text{Maximizar: } F(q) = q'L - q'B\,q$$

$$\text{sujeta a: } q_1 + q_2 + \dots + q_6 \le 1$$

$$q_2 \le 0.07$$

$$q_4 \le 0.01$$

$$q'L = E$$

$$q_i \ge 0$$

donde: q, es un vector columna de tamaño 6x1 del porcentaje de tierra cultivada para cada producto.

L, es un vector columna de tamaño 6x1 de la esperanza del ingreso para los seis cultivos.

B, es una matriz de varianza-covarianza de tamaño 6x6 para los seis cultivos, representada por la tabla 4.5.

E, es una constante que varía paramétricamente, desde cero hasta un valor máximo posible.

La función objetivo representa la esperanza menos la varianza de los ingresos, sujeta a restricciones del total de la tierra y de los cultivos mencionados. Hablando un poco más acerca de [illegible] restricciones, diremos que $q_2 \le 0.07$ y $q_4 \le 0.01$ [illegible]

TABLA 4.5

MATRIZ DE VARIANZA - COVARIANZA PARA LOS INGRESOS RELATIVOS DE LOS CULTIVOS

	ALGODON	VID	MAIZ	JITOMATE	SANDIA	MELON
ALGODON	12.118					
VID	7.563	26.357				
MAIZ	1.646	1.474	0.528			
JITOMATE	0.398	9.223	2.004	21.429		
SANDIA	[illegible]	0.275	0.593	2.377	[illegible]	
MELON	0.576	4.559	1.589	13.450	6.102	15.085

La solución procede paramétricamente (ver programa en el apéndice), con una k inicial igual a cero. De este modo la solución muestra la máxima diferencia entre la esperanza y la variancia de los ingresos. Esto es equivalente a encontrar la mínima variancia para cada nivel de ingreso esperado, lo cual es por definición la frontera E-V. La solución paramétrica paso por paso esta mostrada en la tabla 4.6, con los puntos de esta tabla se forma la frontera E-V de la figura 4.2. Cada punto de esta gráfica representa una combinación de las proporciones que se deben sembrar de cada uno de los cultivos y se consideran como una acción (a_j).

Observando la tabla 4.6, la solución óptima es la acción a_9, la cual proporciona la mayor esperanza con un valor de 10.508 y con una variancia de 0.047. La cantidad que se debe sembrar de cada cultivo es: 29.5 de algodón, 7.0[illegible] de vid, 8.88 de maíz, 1.0 de jitomate, [illegible]3.01 de sandía y 2[illegible].01 de melón.

TABLA 4.6 SOLUCION PARAMETRICA AL PROBLEMA DE PROGRAMACION CUADRATICA

Paso de la solución	Esperanza del ingreso	Varianza	Valor q_i para las actividades en la solución: Algodón	Vid	Maíz	Jitomate	Sandía	Melón	$\sum q_i$
	Miles de pesos/hectárea								
1	0	0	-	-	-	-	-	-	-
2	4.000	0.762	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0413	0.8347
3	5.000	1.212	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0561	0.7080
4	6.000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1411	0.0621	1.0000
5	7.000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0967	1.0000
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.2310	0.1219	1.0000
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.0000
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.0000
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.0000

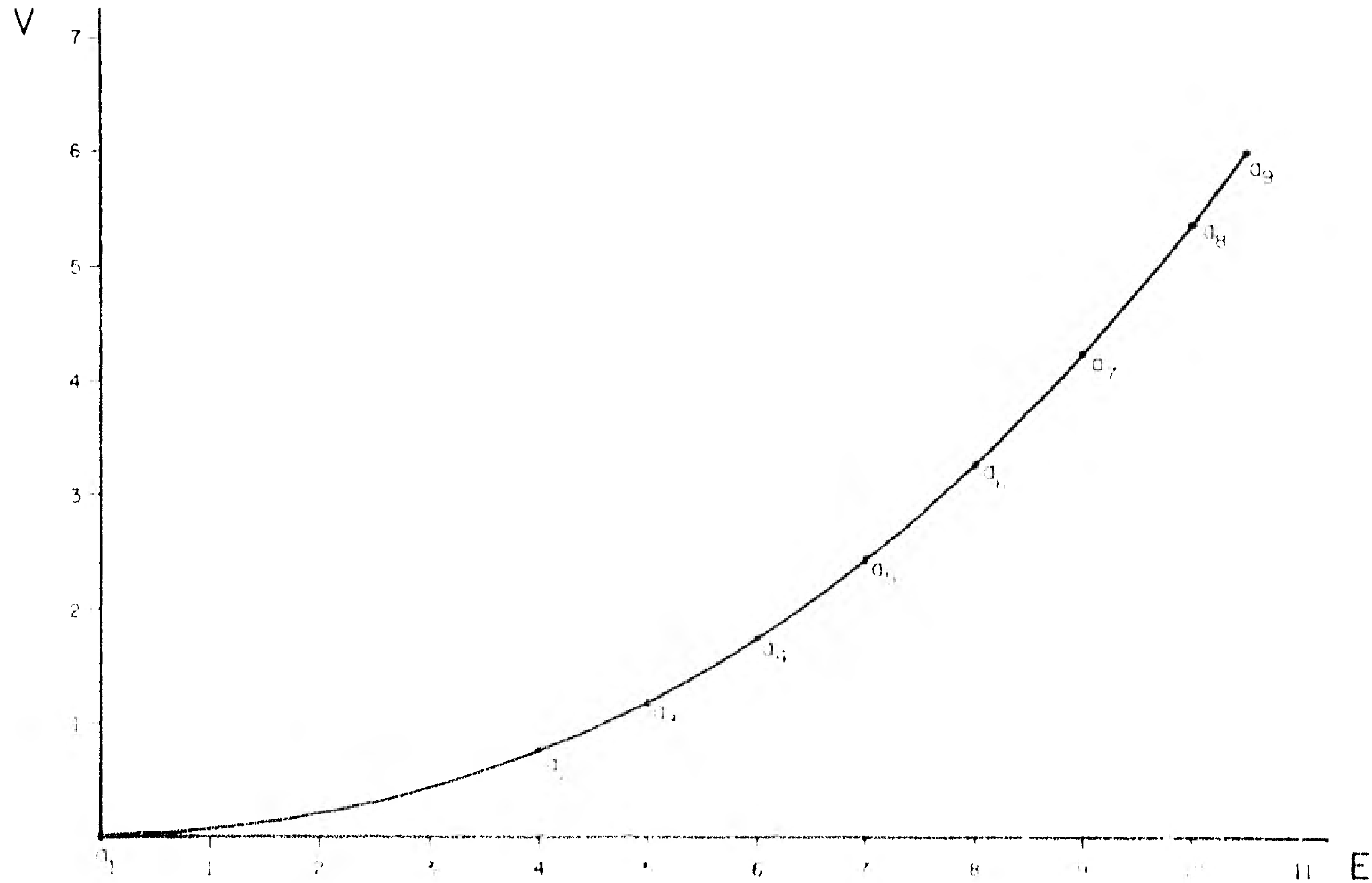


FIG. 4.2 FRONTERA MEDIA - VARIANCIA (E-V)

4.3 SOLUCION DEL PROBLEMA USANDO UNA FUNCION DE UTILIDAD CUADRATICA

Veremos a continuación cual es el método de solución para un problema como éste, usando la función de utilidad del decisor.

En el capítulo III vimos como encontrar valores esperados cuando hay un número de estados discretos de la naturaleza. El criterio de decisión en un caso de probabilidad a priori conocida consiste en maximizar el valor esperado de las acciones disponibles. En muchos problemas de decisiones, los estados discretos y el valor esperado de una acción tienen que ser encontrados para una variable continua (o grupo de variables). Así cuando θ es una variable aleatoria continua, una acción transforma a esta variable en otra variable aleatoria X, la cual representa los resultados continuos de la acción. Denotemos a U(X) como la utilidad de cualquier acción "a" y veamos como obtener la utilidad esperada de ésta.

La función U(X) puede expresarse como una serie de potencias de (X-c) donde X es una variable aleatoria y c es una constante. En particular la expansión en serie de Taylor de U(X) es:

$$U(X) = U(C) + (X-C)\,\frac{dU(C)}{dX} + \frac{1}{2!}(X-C)^2\,\frac{d^2U(C)}{dX^2} + \frac{1}{3!}(X-C)^3\,\frac{d^3U(C)}{dX^3}$$

$$+ \frac{1}{4!}(X-C)^4\,\frac{d^4U(C)}{dX^4} + \ldots$$

Haciendo $C = E(X)$, la ganancia esperada para cualquier acción, obtenemos:

$$U(X) = U\left[E(X)\right] + \left[X-E(X)\right]\frac{dU\left[E(X)\right]}{dX} + \frac{1}{2!}\left[X-E(X)\right]^2\frac{d^2U\left[E(X)\right]}{dX^2} +$$

$$\frac{1}{3!}\left[X-E(X)\right]^3\frac{d^3U\left[E(X)\right]}{dX^3} + \frac{1}{4!}\left[X-E(X)\right]^4\frac{d^4U\left[E(X)\right]}{dX^4} + \ldots$$

tomando la esperanza de cada lado de esta ecuación obtenemos la utilidad esperada de la acción a :

$$U(a) = E\,U(X) = U\left[E(X)\right] + \frac{1}{2!}\,\sigma^2\,\frac{d^2U\left[E(X)\right]}{dX^2} + \frac{1}{3!}\,\gamma_1\,\frac{d^3U\left[E(X)\right]}{dX^3} +$$

$$\frac{1}{4!}\,\gamma_2\,\frac{d^4U\left[E(X)\right]}{dX^4} + \ldots \qquad \ldots(4.3)$$

donde: La esperanza de una constante es la constante $E(X)=E(X)$

La esperanza de $X-E(X) = 0$

La esperanza de $\left[X-E(X)\right]^2 = \sigma^2$, que es la varianza de la distribución de X.

La esperanza de $\left[X-E(X)\right]^3 = \gamma_1$, que es el sesgo de la distribución de X.

La esperanza de $\left[X-E(X)\right]^4 = \gamma_2$, que es la curtosis de la distribución de X.

La ecuación para U(a) proporciona la utilidad esperada para cualquier distribución de probabilidad, en términos de los momentos (la media, la variancia, sesgo y curtosis) y las primeras cuatro derivadas de la función de utilidad. Así el número de términos que son usados en el cálculo de la utilidad esperada para cualquier acción, depende del número de momentos que describen la distribución y el número de derivadas que pueden ser tomadas de la función de utilidad. Para nuestro problema se [illegible] una distribución normal, la cual tiene 2 momentos, la media y la variancia, así [illegible] resultados en la distribución [illegible] y [illegible] los dos primeros términos [illegible] la utilidad esperada sin importar cuantas derivadas [illegible] la función de utilidad. Si la función de utilidad [illegible] cuadrática, [illegible] derivada [illegible]:

$$U(a) = [illegible] \qquad \ldots(4.4)$$

[illegible]

$$[illegible] \qquad \ldots(4.5)$$

donde: U, es la utilidad

M, es el ingreso en términos monetarios

a y b, son los coeficientes a determinar

Calculando la primera y segunda derivada de la ecuación - (4.5) tenemos:

$$\frac{dU}{dM} = b + 2\ a\ M$$

$$\frac{d^2U}{dM^2} = 2\ a$$

ahora, escogiendo dos puntos arbitrarios de la tabla 4.6, y -- asignando una utilidad de [illegible] al extremo inferior y al extremo superior una utilidad de 10, sustituyendo estos valores en las ecuaciones (4.4) y (4.[illegible]) tenemos:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Por lo tanto nuestra función de utilidad es:

$$U\left[E(M)\right] = -0.66\,M + 0.16\,M^2 \qquad \ldots(4.7)$$

cuya gráfica se encuentra dibujada en la figura 4.3. Esta gráfica nos ayuda a obtener la utilidad del decisor para una cantidad de dinero dada, por ejemplo, si M = 7 tenemos:

$$U = -0.66(7) + 0.16(7)^2 = 3.22$$

lo que significa que una cantidad monetaria de $7.00, le representa al decisor una utilidad de 3.22.

Para calcular la utilidad esperada de cualquier acción, en donde esta involucrada la cantidad que se debe sembrar de cada uno de los seis cultivos, se utiliza la ecuación (4.2) y la tabla 4.6, donde:

$$\frac{dU}{dM} = -0.66 + 0.32\,M$$

$$\frac{d^2U}{dM^2} = 0.32$$

sustituyendo [illegible] (4.8) [illegible]:

[illegible]

por ejemplo, para la acción a_4 [illegible]

$U(a_4)$ [illegible]

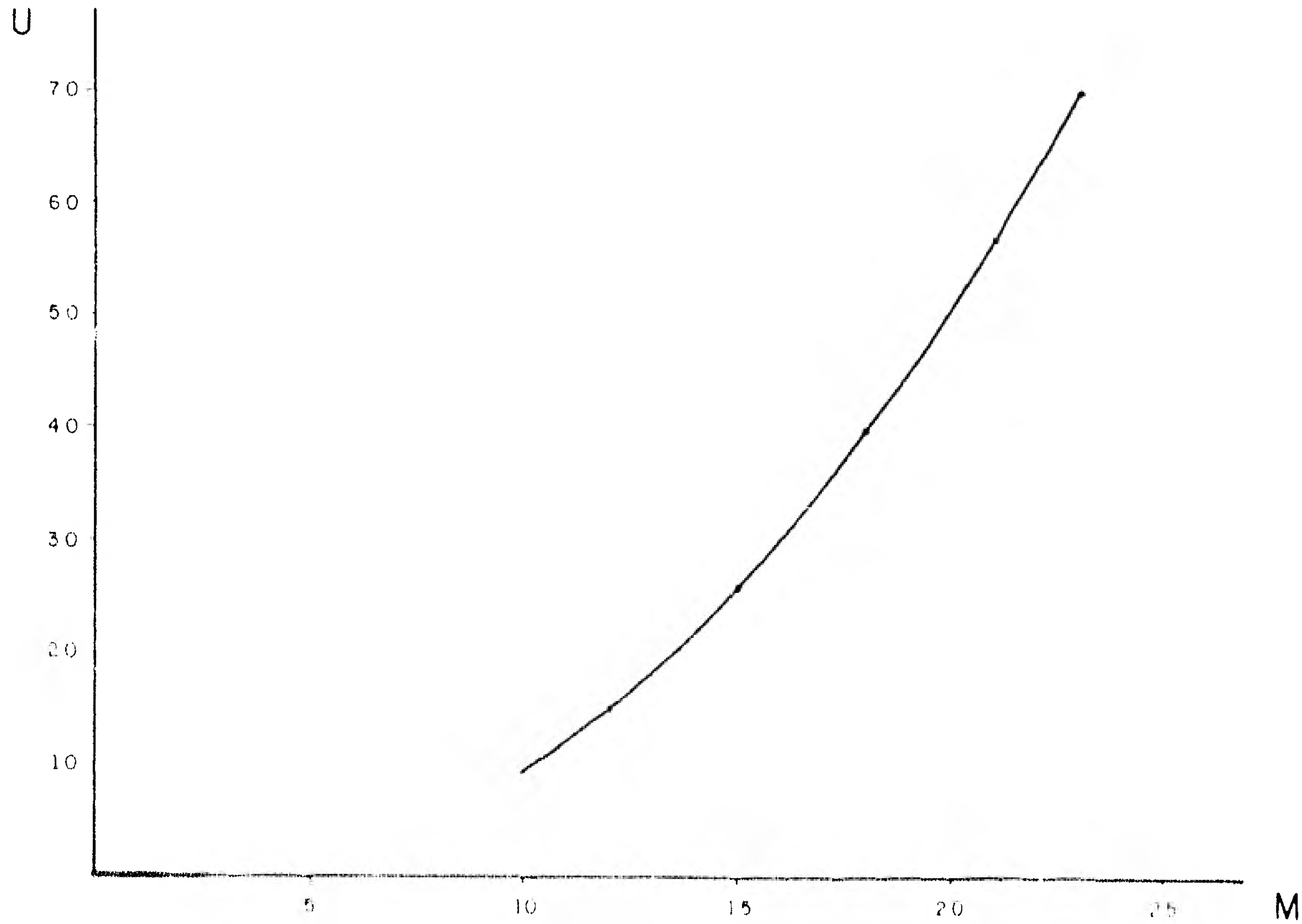


FIG. 4.3 GRAFICA DE LA FUNCION DE UTILIDAD

La utilidad esperada de las demás acciones se calculan - de igual manera y el resultado de las mismas se muestra en la tabla 4.7.

TABLA 4.7 UTILIDAD ESPERADA PARA LAS ACCIONES a_j

ACCION	ESPERANZA DEL MARGEN BRUTO	ESPERANZA DEL INGRESO
1	0	0
2	4.000	0.042
3	5.000	0.894
4	6.000	2.086
5	7.000	3.614
6	8.000	5.487
7	9.000	7.704
8	10.[illegible]	10.266
9	10.[illegible]	11.699

La acción óptima es la que proporciona mayor utilidad, y en este caso la acción a_9 con una utilidad esperada de 11.699.

Nótese que la solución encontrada, usando la programación cuadrática, es la misma que obtenida por medio de la función de utilidad ([illegible] inclusión).

4.4 INTERPRETACION DEL RESULTADO OBTENIDO CON RESPECTO A LAS DECISIONES ANTERIORES.

En la tabla 4.8 se muestran los porcentajes de tierra cultivada de los productos involucrados en el estudio, desde el ciclo 1945-46 hasta el 1975-76. Para cada ciclo se calcula la media y la varianza de la misma manera que en la sección 4.2 y los resultados se encuentran representados por la tabla 4.9. Cada pareja de datos se localizan en la figura 4.4, en donde se observa que todos los puntos están por arriba de la frontera E-V, lo que quiere decir que el agricultor toma sus decisiones basándose únicamente en aquellos cultivos que tienen un ingreso esperado alto en relación con los demás y sin tomar en cuenta que pueden tener grandes variaciones en los precios. Para la solución propuesta en este estudio, se tiene un ingreso esperado alto con relativamente baja varianza.

De esta manera [illegible] que el agricultor [illegible] de decisiones, [illegible]

TABLA 4.8

PORCENTAJE DE SUPERFICIE CULTIVADA

REGION LAGUNERA COAH. Y DGO.

	ALGODON	VID	MAIZ	JITOMATE	SANDIA	MELON
1945-46	.5793	.0234	.3790	.0153	.0020	.0010
1946-47	.8924	.0144	.0748	.0116	.0030	.0038
1947-48	.8546	.0189	.1032	.0169	.0027	.0038
1948-49	.8485	.0188	.1118	.0148	.0032	.0029
1949-50	.9083	.0117	.0677	.0085	.0025	.0013
1950-51	.9221	.0103	.0557	.0084	.0018	.0016
1951-52	.9652	.0116	.0126	.0070	.0021	.0014
1952-53	.9601	.0126	.0139	.0105	.0011	.0017
1953-54	.9552	.0110	.0205	.0060	.0038	.0034
1954-55	.9698	.0084	.0165	.0032	.0009	.0011
1955-56	.9726	.0092	.0078	.0068	.0022	.0014
1956-57	.9733	.0040	.0169	.0026	.0021	.0011
1957-58	.8232	.0183	.1404	.0072	.0072	.0037
1958-59	.8392	.0160	.1341	.0060	.0031	.0008
1959-60	.9345	.0496	.0008	.0072	.0056	.0021
1960-61	.8816	.0345	.0091	.0075	.0053	.0021
1961-62	.9340	.0469	.0076	.0045	.0047	.0022
1962-63	.6815	.1002	.1862	.0084	.0149	.0085
1963-64	.8808	.0438	.0076	.0036	.0036	.0006
1964-65	.8763	.0429	.0747	[illegible]	.0007	.0007
1965-66	.8111	.0441	[illegible]	.0044	.0038	.0008
1966-67	.7766	.0456	.1013	.0083	.0062	.0027
1967-68	.8217	.0666	.1066	.0049	.0036	.0011
1968-69	.8042	.0582	.0617	.0056	.0054	.0049
1969-70	.8137	.0649	.0912	.0133	.0042	.0057
1970-71	[illegible]	.0671	.1224	.0056	.0067	.0073
1971-72	[illegible]	.0644	[illegible]	.0027	.0034	.0029
1972-73	.8245	.0671	.0501	.0109	.0068	.0078
1973-74	.8471	.0724	.0739	[illegible]	.0052	.0070
1974-75	[illegible]	.0727	[illegible]	[illegible]	.0071	.0163
1975-76	[illegible]	[illegible]	.1711	.0110	.0104	[illegible]

TABLA 4.9

MEDIA Y VARIANCIA DE LOS INGRESOS

PARA CADA CICLO

CICLO	MEDIA	VARIANCIA
	MILES DE PESOS/HECTAREA	
1945-46	8.752	5.322
1946-47	11.608	10.343
1947-48	11.376	9.747
1948-49	11.281	9.598
1949-50	11.653	10.543
1950-51	11.764	10.798
1951-52	12.174	11.655
1952-53	12.207	11.662
1953-54	12.088	11.472
1954-55	12.116	11.655
1955-56	12.211	11.779
1956-57	12.089	11.669
1957-58	10.963	9.060
1958-59	11.620	9.260
1959-60	12.420	11.546
1960-61	11.714	10.608
1961-62	12.[illegible]	11.46[illegible]
1962-63	[illegible]	7.75[illegible]
1963-64	11.[illegible]	10.33[illegible]
1964-65	11.797	10.24[illegible]
1965-66	11.[illegible]	9.[illegible]
1966-67	[illegible]	[illegible].382
1967-68	11.[illegible]	[illegible]
1968-69	11.[illegible]	10.2[illegible]
1969-70	[illegible]	[illegible]
1970-71	12.[illegible]	[illegible]
1971-72	11.[illegible]	[illegible]
1972-73	11.[illegible]	[illegible]
1973-74	[illegible]	[illegible]
1974-75	[illegible]	[illegible]
1975-76	[illegible]	[illegible]

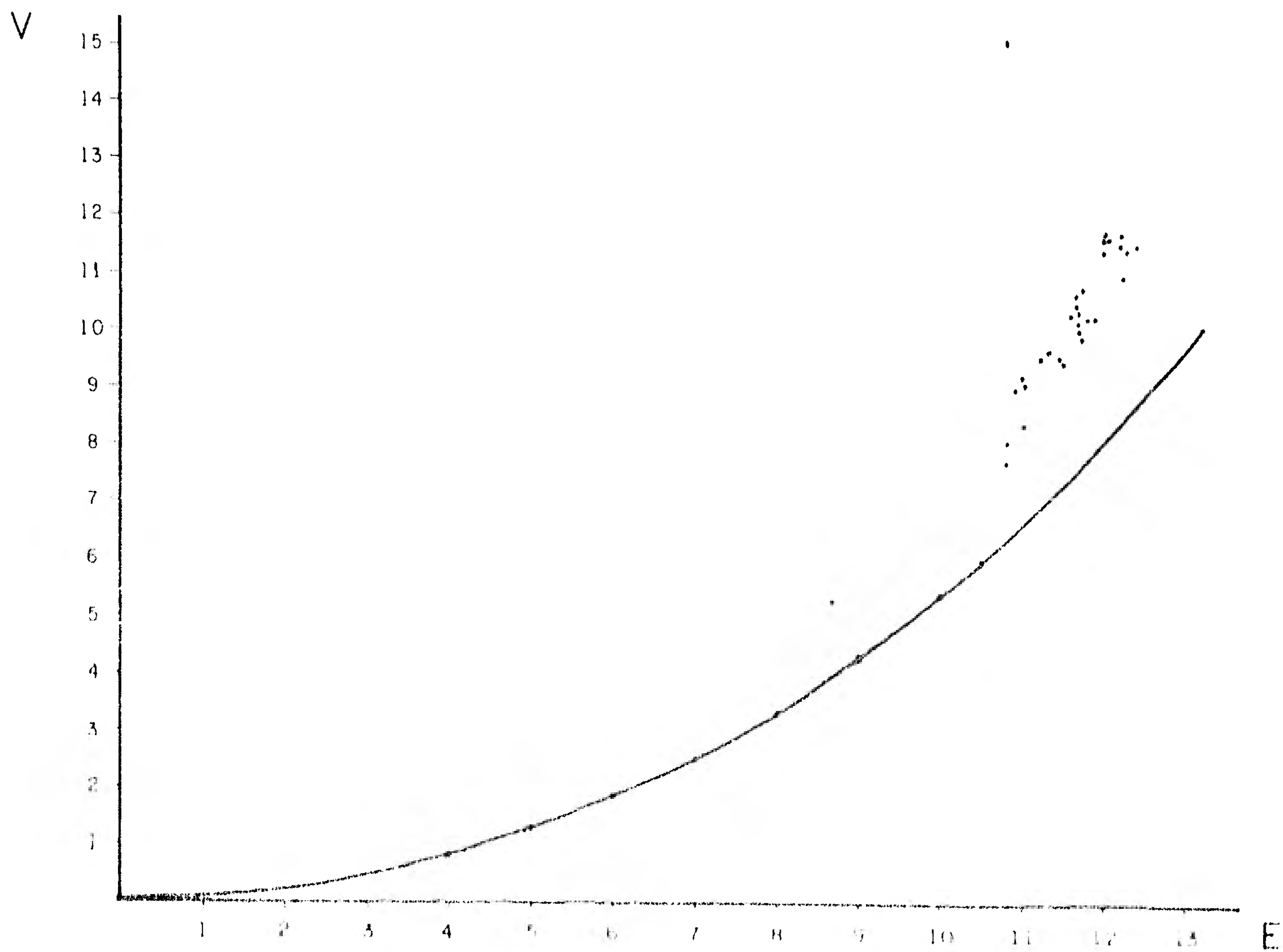


FIG 4.4 COMPARACION DE PUNTOS REALES CON LA FRONTERA E-V

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Por medio de esta tesis hemos expuesto la aplicación de las tecnicas de la teoría de decisiones a ciertas clase de problemas prácticos. En el capítulo I se describieron los elementos importantes del proceso racional de la toma de decisiones, la informacion disponible y las decisiones que debían tomarse. En el capítulo II se reconoció que en ciertas situaciones las cantidades simples, [illegible] no podrían ser usadas directamente, de tal manera que se desarrolló un método para transformar estas cantidades en utilidades. Estas utilidades fueron usadas en lugar de los valores originales en el cálculo del valor esperado. Posteriormente se analizaron los conceptos de la teoría de la probabilidad la cual intervienen [illegible] un papel muy importante en la [illegible] entre [illegible] en la [illegible]

En el capítulo III se presentó una tipología de las situaciones de decisiones, y caracterizamos cada una de esas situaciones con ejemplos simplificados con el fin de ilustrar, lo mejor que sea posible, los principios generales de interés.

En el capítulo IV se aplicaron los conocimientos anteriores a un caso práctico, el cual consiste en la optimización de las utilidades del ingreso basado en la porción de tierra disponible y la rotación de cultivos en la región laguenera.

La sociedad moderna con su creciente velocidad en las comunicaciones y sus adelantos en el campo de los conocimientos científicos, exige un tipo de investigación interdisciplinaria para plantear y resolver los problemas reales de decisiones. Es reconocido que los problemas de decisiones bajo condiciones de incertidumbre se pueden resolver con mayor satisfacción, siempre y cuando varias investigaciones [illegible] y cooperen estrechamente.

[illegible]

el sistema general económico.

La tarea del contador público ya no es la de equilibrar - y llevar libros de cuentas, hoy día se hace hincapié en las -- técnicas de muestreo estadístico, los análisis de costos según los centros de responsabilidad determinada, la administración- adecuada de los recursos financieros, etc. Esas herramientas - modernas se utilizan para recolectar y organizar la informa -- ción necesaria para estimar los costos y los beneficios de los procedimientos operacionales de la toma de decisiones.

Muchos psicologos han mostrado un gran interes por la teo ria de decisiones a la que consideran como una base para el es tudio del comportamiento humano individual o en grupo, su estu dio e interpretacion del comportamiento de un pequeño grupo de individuos es muy importante para comprender mejor los proce-- sos de toma de decisiones en grupo.

Si un problema de decisiones está relacionado con un pro- ceso particular [illegible], el experto en ese [illegible] campo tiene [illegible], direc- [illegible] pecto a las cualidades del producto terminado.

Por lo general, el privilegio de toma de decisiones en -- las organizaciones comerciales corresponde a los individuos que se dedican a la administración. Ese privilegio supone la res - ponsabilidad de cerciorarse de que se recabe la información -- adecuada a partir de todos los componentes importantes de la - organización.

El enfoque de la teoría estadística de las decisiones es- un método de las matemáticas aplicadas, pues emplea un modelo- matemático para representar una situación real de interés. El- decisor debe percatarse de lo bien fundada que esté cualquier- distribución de probabilidades a priori, con el fin de juzgar- cuán significativo puede ser un análisis bayesiano, para ayu - darle a resolver su problema de decisiones. Además los deciso- res tienen que utilizar su propio juicio al interpretar el re- sultado de un modelo y que, antes de actuar, deben pensar cla- ramente en estas creencias subjetivas e intangibles en los pre [illegible] que el modelo no incluye. No importa cual sea el- enfoque que se emplee, hay una [illegible] básica, la de ayu - dar a los administradores a la toma de decisiones óptimas.

Hay [illegible] en los que el impacto del [illegible] [illegible] dentro [illegible] za que en la Ingeniería y la dirección industrial. En efecto, es difícil sobreestimar las contribuciones de la Estadística a los problemas de producción, al uso eficiente de materiales y mano de obra, a la investigación básica y al desarrollo de nuevos productos. Lo mismo que en otras ciencias, la Estadística se ha convertido en una herramienta vital para el Ingeniero, y por consiguiente, se han hecho necesarios ciertos conocimientos de Estadística sin los que el Ingeniero no podría apreciar, entender o aplicar gran parte del trabajo desarrollado en su campo.

Existe una ventaja clara de las situaciones reales que se tratan en esta tesis, es la presencia de una distribución de muestreo de forma conocida. En el caso donde se está tratando de determinar una probabilidad, la distribución de muestreo es, bajo ciertas hipótesis generalmente satisfechas, binomial. Cuando se está tratando de determinar el valor de una media, la distribución es normal. Si alguna otra característica de la población, [illegible], [illegible] la cantidad de interés [illegible], [illegible] existe distribución de muestreo [illegible].

[illegible] problemas de [illegible] problemas donde la cantidad desconocida no es alguna probabilidad o la media - de una distribución, sino otra característica, por ejemplo la-variancia. Además de la media y la probabilidad, ninguna otra-característica tiene una distribución de muestreo. La segunda-dimensión para incrementar la dificultad a los problemas de -- teoría de decisiones es tomar como desconocida mas de una ca - racterística de la distribución de la población, ya que se des conocen tanto la media como la variancia. La introducción de - un nuevo evento en un problema lo hace mucho más difícil para-resolver.

En todos los problemas tratados en esta tesis se ha hecho la hipótesis que un solo individuo tenia la responsabilidad to tal para la toma de decisiones. Cuando un grupo tenga la res - ponsabilidad de llegar a una decisión la situación será mucho-más confusa, ya que puede tener muchos aspectos subjetivos.

La dinámica actual del mundo de los negocios, pero mas - aún la del futuro, está obligando a las compañías a concentrar se en el proceso de planeación, especialmente en la planeación del [illegible] do abreviado y cambiante de los procesos de manufactura),el gobierno y la sociedad (las restricciones legales y sociales impuestas a la empresa que estan cambiando continuamente), haran que la empresa haga cuidadosos planes de corto, mediano y gran alcance. Además, la llegada de computadoras mas refinadas, capaces de manejar increibles cantidades de datos, la tendencia hacia el crecimiento mediante fusiones y adquisiciones, los problemas crecientes con los sindicatos de trabajadores, aumentarán la necesidad de una planeacion eficaz. Solo con el empleo de planes óptimos que consideren los factores pertinentes, se lograra cualquier cambio que beneficie a la empresa. Por lo tanto, la función de planeacion es un candidato lógico para los estudios cuantitativos, porque la teoría de decisiones emplea actualmente un enfoque planeado, algunos de los cuales se han indicado en esta tesis.

Los grandes problemas sociales, económicos y políticos necesitan la planeación. Por ejemplo, las naciones estan llenas de problemas de [illegible], de inestabilidad [illegible] puede [illegible] con los científicos, sociales y del comportamiento. Las técnicas futuras de la teoría de decisiones deben extenderse mas allá de la empresa misma, para llegar a la planeación local, estatal y nacional, por ejemplo, en vez de que el gobierno maneje un gran número de programas para ayudar a un segmento de la economía, podría simularse programas alternativos básicos para determinar un programa óptimo de bajo costo.

En el futuro la dinámica de los negocios producira cambios a nivel de la gerencia superior. Habra que emplear un numeroso personal de especialistas para aconsejar a la gerencia sobre algunos aspectos especiales de su trabajo. La mayor parte de esos especialistas tendran acceso directo a las computadoras mediante un mecanismo de entrada, que les permita emplear algún modelo matematico para resolver problemas administrativos. Los ejecutivos de mercadotecnia pueden tener un personal de manufactura, finanzas, ingenieria, investigacion y desarrollo de personal, contaran con los servicios de un personal de especialistas, a fin de emplear [illegible] derivados de [illegible] problemas de [illegible]

[illegible]

se analicen con más profundidad los procedimientos de toma de-decisiones, con el propósito de mejorar la capacidad de deci - dir de los administradores. Es posible que las futuras computa doras, tengan el equipo necesario para simular las operaciones de una vasta y complicada empresa, así como los modelos de relaciones de proveedores, fabricantes, distribuidores, etc. Los modelos cuatitativos en gran escala, no se limitan a la empresa, sino que se aplican a todas las fases de las actividades - economicas.

En la mayoria de los casos, el gerente tiene que atender-a tantas cosas que necesita la ayuda de los métodos cuatitativos de que pueda disponer, para enfrentarse a las complijidades de su puesto. Cuando el problema ya se ha programado, no - es necesario que el gerente dedique mucho tiempo y raciocinio-a las decisiones de los problemas de la empresa. En vez de encargarse de las decisiones de rutina de su departamento, puede delegarlas a un sistema de computadoras de información administrativa. [illegible] de que el gerente [illegible] la respons[illegible] [illegible]

[illegible]

administración, respaldado por la utilización de las computadoras, se acepta actualmente como una meta decisiva en la forma tradicional de considerar las funciones administrativas de la empresa. Esa revolución ha dado a la administracion en todos sus niveles una información mejorada para la toma de decisiones. Las respuestas que dan los métodos, modelos matemáticos, han ayudado a liberar a la administracion, de modo que pueda dedicarse a tomar decisiones importantes y hacer planes para el crecimiento de la empresa. Han hecho posible el control centralizado mas eficaz de las grandes y complejas empresas. La informacion que proporcionan los metodos cuantitativos de la toma de decisiones, ha ayudado a la administración a buscar el sentido de los innumerables [illegible] que ocurren en el mundo real y seguirá haciendolo. Actualmente, la administración puede clasificar [illegible] el [illegible] de [illegible] de accion, probar sus potenciales [illegible] de [illegible] y [illegible] los riesgos [illegible]

[illegible] area [illegible] Ademas, [illegible] to, tendrán disponibles estos programas en paquetes. Este desarrollo colocará a la teoría de decisiones a la vista de los decisores y la hará una herramienta ampliamente usada.

APENDICE DE PROGRAMACION CUADRATICA

APENDICE DE PROGRAMACION CUADRATICA

1.- INTRODUCCION

Es importante el papel que desempeña la programación lineal en la toma de decisiones, en donde la función objetivo y todas las restricciones siempre son expresadas como funciones algebraicas lineales de las variables de decisión. Trataremos el problema de maximizar o minimizar una función objetivo cuadrática sujeta a restricciones lineales.

Como la programación cuadrática es un caso particular de la programación no lineal, tocaremos brevemente este punto, así como la forma de saber cuando una solución es óptima.

Un problema de programación cuadrática es diferente de otro de programación lineal sólamente en que la función objetivo puede incluir productos y expresiones cuadráticas de las variables de decisión, es decir, en la función objetivo se permiten términos como x_j^2, $x_j x_k$ $(j \neq k)$.

Varios métodos de solución han sido propuestos para el caso especial de un problema de programación cuadrática, en el cual la función objetivo es una función cóncava. En este apéndice sólo presentaremos el método desarrollado por Philip Wolfe.

2.- PROGRAMACION NO LINEAL

En una forma general el problema de programación no lineal es hallar un vector $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a fin de maximizar $f(\overline{x})$, sujeto a:

$$g_i(\overline{x}) \leq b_i \qquad \text{para } i=1,2,\ldots,n$$

$$\overline{x} \geq 0$$

donde $f(\overline{x})$ y $g_i(\overline{x})$ son funciones conocidas de las n variables de decisión. Ningún algoritmo es eficaz para resolver todo tipo de problemas que se adecúe a este formato. Se han hecho progresos sustanciales para algunos casos importantes de este problema y las investigaciones continuan. Esta es una área muy amplia y no es nuestro caso examinarla completamente. Sin embargo presentaremos algunos resultados fundamentales en la próxima sección y posteriormente describiremos un importante algoritmo para el caso de programación cuadrática.

3.- CONDICIONES DE KUHN - TUCKER

Antes de considerar algún algoritmo es necesario reconocer la solución óptima a un problema de programación no lineal, en esta sección damos las condiciones de Kuhn-Tucker [illegible] tales [illegible] óptimas.

[illegible] y la [illegible] objetivo [illegible] contiene una sóla variable, es conocido que $x_1 = x_1^*$ puede maximizar $f(x_1)$ sólamente si $df/dx_1 = 0$, en donde $f(x_1)$ es una función cóncava. Similarmente, si la función tiene varias variables, entonces $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ puede maximizar $f(\overline{x})$ si $\partial f/\partial x_j = 0$ en $x_j = x_j^*$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Estas pasan a ser condición suficiente si $f(\overline{x})$ es una función cóncava. Ahora supongamos que se introducen las restricciones de no negatividad $x_j \geq 0$. La única revisión que debe hacerse en el planteamiento anterior es que si $x_j^* = 0$, entonces la condición $\partial f/\partial x = 0$ es reemplazada por la condición $\partial f/\partial x_j \leq 0$ en $x_j = x_j^*$.

Es más difícil caracterizar una solución óptima si también se introducen las otras restricciones que involucran las funciones $g_i(\overline{x})$. La dificultad es que incrementar x_j puede requerir cambiar otras variables para evitar violar las restricciones. Sin embargo, Kuhn y Tucker dedujeron los resultados para este caso. Sus resultados básicos están englobados en el siguiente teorema:

Supongamos que $f(\overline{x})$, [illegible] son funciones diferenciables [illegible] de regularidad, [illegible] $, \ldots ,$ [illegible] solución óptima al problema [illegible] si existen m números $u_1, u_2, \ldots, u_m$ tales que todas las siguientes condiciones son satisfechas:

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \qquad \text{en } x_j = x_j^* \text{, para } j=1,2,\ldots,n$$

2) $$x_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \text{en } x_j = x_j^*$$

3) $$g_i(\overline{x}^*) - b_i \leq 0 \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,m$$

4) $$u_i(g_i(\overline{x}^*) - b_i) = 0 \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,m$$

5) $$x_j^* \geq 0 \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,m$$

6) $$u_i \geq 0 \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,m$$

Las u_i son algo análogas a las variables duales de la programación lineal. Las condiciones (3) y (5) hacen que se asegure la posibilidad de la solución. Las otras condiciones eliminan el mayor número de soluciones como posibles candidatos para la solución óptima. La satisfacción de estas condiciones no garantiza que la solución es óptima, estas condiciones son necesarias pero no suficientes para optimalidad. [illegible] ciertas suposiciones adicionales [illegible] se satisfa[illegible] la garantía de [illegible] Teorema [illegible]

Supongamos que $f(\overline{x})$ es una función cóncava y que $g_1(\overline{x})$, $g_2(\overline{x}),\ldots,g_m(\overline{x})$ son funciones convexas que satisfacen condiciones de regularidad. Entonces $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ es una solución óptima si y sólo si se satisfacen todas las condiciones del teorema.

4.- PROGRAMACION CUADRATICA

El término programación cuadrática se refiere en la actualidad al problema de maximizar (o minimizar) una función-objetivo cuadrática sujeta a restricciones lineales. Por lo-tanto, el problema de la programación cuadrática difiere de-la programación lineal en que la función objetivo incluye -- términos x_j^2 y $x_j x_k\ (j \neq k)$. En resumen el problema es hallar- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que:

$$\text{Maximizar} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k \right\}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{para } i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j=1,2,\ldots,n$$

donde las q_{jk} son constantes conocidas tales que $q_{jk} = q_{kj}$.

Distintos algoritmos han sido desarrollados para el caso especial de la programación cuadrática donde la función - objetivo es una función cóncava. Describiremos un algoritmo- que ha sido bastante aceptado porque sólamente requiere usar el método símplex con una ligera modificación.

El primer paso de este algoritmo es la formulación de - las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema. Una forma - conveniente de expresarlas para este caso es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk}\, x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_{n+i} - y_j = c_j \quad ;\text{para } j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,n+m$$

$$y_j \geq 0 \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,n+m$$

$$x_j y_j = 0 \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,n+m$$

donde las y_{n+i} son las u_i de la sección anterior , las y_j -- $(j=1,2,\ldots,n)$ y las x_j $(j=n+1,n+2,\ldots,n+m)$ son variables artificiales. Por lo tanto $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es óptima si y solo- si existen valores de $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}, y_1,y_2,\ldots,y_{n+m}$ tales que $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+m},y_1,y_2,\ldots,y_{n+m})$ satisfacen todas las condiciones anteriores. Con lo cual el problema se reduce a- encontrar una solución factible a estas condiciones.

Con excepción de la última restricción ($x_j y_j = 0$), las condiciones de Kuhn-Tucker son nada más que las restricciones de la programación lineal involucrando $2(n+m)$ variables. Por lo tanto el problema se reduce a hallar una solución inicial básica factible a un problema de programación lineal teniendo estas restricciones. Las variables iniciales básicas para el segundo grupo de ecuaciones serán las x_{n+i}.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

sin embargo, como normalmente la mayor parte de las c_j son positivas, no es obvio que las variables iniciales básicas deben ser para las otras ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk} \quad x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; y_{n+i} - y_j = c_j \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

la técnica de la programación lineal cuando ésta no es una solución inicial básica factible es introducir variables artificiales que eventualmente son forzadas a igualarse a cero. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ estas variables artificiales, cuando la única restricción (inicial) sobre ellas es [illegible] ($j=1,2,\ldots,n$) estas [illegible]:

$$\sum_{k=1}^{n} q \; [illegible]$$

esta técnica [illegible] una solución inicial básica factible artificial, o sea, $z_j = 1$ (para $j = 1,2,\ldots,n$), $x_{n+i}=b_i$ (para $i = 1,2,\ldots,m$), $x_j = 0$ (para $j=1,2,\ldots,n$), $y_j = 0$ (para $j = 1,2,\ldots,n+m$). Sin embargo, una solución factible a este problema artificial es factible para el problema real si y sólo si $z_j = 0$. Por lo tanto $\sum_{j=1}^{n} z_j$ debe decrecer a cero para obtener la solución factible deseada. Para hacer esto, iniciamos con la solución inicial básica factible artificial dada anteriormente y aplicar una modificación del método simplex al siguiente problema:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^{n} z_j$$

sujeto a:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk} \; x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; y_{n+i} - y_j + c_j \; z_j = c_j \qquad ;j=1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n+m$$

$$y_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n+m$$

$$z_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n.$$

La modificación es que a y_j no se le permite convertirse en una variable básica siempre que x_j sea ya una variable básica, y viceversa, para $j = 1,2,\ldots,n+m$. Esto asegura que $x_j y_j = 0$ para cada valor de j. Cuando se obtiene la solución óptima $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+m}^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_{n+m}^*, z_1=0, z_2=0, \ldots, z_n=0)$

para este problema, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ es la solución óptima deseada al problema original de programación cuadrática.

Ejemplo.- Ahora lo ilustraremos, al problema:

$$\text{Maximizar} \left\{ 5x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)^2 \right\}$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \geq 0$$

ya que $(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2)$, obtenemos que $q_{11}=2$, $q_{12}=-2$, $q_{21}=-2$ y $q_{22}=2$. De este modo el problema a resolver con la modificación del método simplex es:

$$\text{Minimizar} \left\{ z_1 + z_2 \right\}$$

sujeto a:

$$2x_1 - 2x_2 + y_3 - y_1 + 5z_1 = 5$$

$$-2x_1 + 2x_2 + y_3 - y_2 + z_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_j \geq 0, \ y_j \geq 0 \ , \ z_j \geq 0$$

la solución resultante es $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$, $y_3 = 3$, y las demás variables iguales a cero, por lo tanto la solución óptima al problema original es $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$.

5.- PROGRAMA DE COMPUTADORA

A.- OBJETIVO.

Este programa halla el mínimo de una función objetivo -- cuadrática multivariable de la forma:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{j=1}^{N} C_j \; X_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} Q_{jk} \; X_j \; X_k$$

sujeto a las restricciones lineales

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \quad X_j \leq B_i \qquad i = 1, 2, \ldots, M$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

B.- METODO

El procedimiento, una modificación del método simplex -- fué desarrollado por Philip Wolfe y programado por H.T. Bates. El algoritmo procede como sigue:

1).- Se encuentra una solución básica factible al conjunto de restricciones, de tal manera que los valores que resulten de- la variable de estado sean todos no negativos.

2).- La función objetivo es separada en sus términos lineales y cuadráticos.

$$Z = \sum_{j=1}^{N} C_j \; X_j + H\left[X_i, \; X_j\right]$$

3).- La función cuadrática H es descompuesta en una matriz de

N x N por inspección o por derivadas parciales.

$$H\left[X_i, X_j\right] = X_j\, Q_{ij}\, X_i$$

donde X_j y X_i son vectores renglón y columna de N elementos respectivamente, y $Q_{ij} = \frac{1}{2}\partial H/\partial(X_{ij})$

4).- Un algoritmo simplex es introducido en el programa y encuentra los mínimos en la tabla aumentada.

C.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA

1).- Uso: consiste únicamente de un programa principal. Los tamaños de todos los arreglos y vectores son especificados en proposiciones DIMENSION, que pueden ser cambiadas para el problema en particular. El programa está diseñado por minimización. La maximización puede obtenerse cambiando el signo de cada término en la función objetivo. El valor final de la función objetivo impreso por el programa tendrá el signo cambiado. Los valores de las variables de decisión tendrán el signo correcto.

2).- Requerimientos [illegible]

3).- Descripción de parámetros:

1. [illegible] de variables [illegible]

M	Número de restricciones
ITMAX	Número máximo de iteraciones permitidas
MTR	Código para el tipo de trazo deseado:
	0 solamente imprime el resultado final
	1 imprime cada tabla de iteración
	2 imprime cada tabla de iteración y presenta el dato - pivote
A	Arreglo de M x N términos para los coeficientes de las restricciones
B	Vector de tamaño M para los límites de las restriccio nes (todas deben ser no negativas)
C	Arreglo de N x N términos para los coeficientes cuadrá ticos de la función objetivo
P	Vector de tamaño N para los coeficientes de los térmi- nos lineales de la función objetivo
TIT	80 caracteres alfanuméricos para la descripción del -- programa
T	Arreglo simplex de tamaño (M + N) x (2M + 3N + 1)
NIMP	Número de código para la impresora
NLECT	Número de código para la lectora

1[illegible]. Requerimientos de DIMENSION: Las [illegible] DIMENSION en el programa principal deben ser lo suficientemente grandes para [illegible] los requerimientos de [illegible] en con [illegible] los parámetros [illegible] correspon dan [illegible] respectivamente;

[illegible] , [illegible] , [illegible] , [illegible] +1), [illegible](20),

COST(2M+3N+1), DIFF(2M+3N+1), TT(2M+3N+1), RATID(M+N), IB(M+N)

III(2M+3N), OPP(M+N). PRFIT(2M+3N+1).

5).- Formatos de entrada:

Tipo de tarjeta	Formato	Contenido
1	(20A4)	Título del problema
2	(4I10)	N, M, ITMAX, MTR
3	(8F10.3)	((A(I,J), J = 1,N), I = 1,M) (Si N > 8, se requieren tarjetas adicionales del tipo 3 para cada restricción)
4	(8F10.3)	(B(J), J = 1,M) (Si M > 8, se requieren tarjetas adicionales tipo 4)
5	(8F10.3)	((C(I,J), J = 1,N), I = 1,N) (Si N > 8, se requieren tarjetas adicionales tipo 5 en cada conjunto)
6	(8F10.3)	(P(I), I = 1,N) (Si N > 8, se requieren tarjetas adicionales tipo 6)
7		Tarjeta blanca como limitador del programa.

Arreglo del problema:

Min Z = P(J) * X(J) + X(I) * C(I,J) * X(J)

sujeto a: A(I,J) * X(J) ≤ B(I)

6).- Salida:

El programa imprime a la salida [illegible] n los rótulos adecuados, el valor de la función objetivo, los valores diferentes de cero de las variables reales y artificiales.

7).- Resumen de requisitos para el usuario:

a) Si el problema es de maximización, cambiar todos los signos de los términos de la función objetivo.

b) Convertir el problema a uno que tenga una solución inicial básica factible. Esto requiere que todas las restricciones sean de la forma:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ij} X_i \geq B_i \qquad j = 1, 2, \ldots, M$$
$$B_i \geq 0$$

c) Determinar los coeficientes del arreglo C de la parte cuadrática de la función objetivo:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & X_1 & X_2 & \cdots & X_N \\
\hline
X_1 & C_{11} & \frac{1}{2}C_{12} & \cdots & \frac{1}{2}C_{1N} \\
X_2 & \frac{1}{2}C_{21} & C_{22} & \cdots & \frac{1}{2}C_{2N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
X_N & \frac{1}{2}C_{N1} & \frac{1}{2}C_{N2} & \cdots & C_{NN}
\end{array}$$

d) [illegible] N, M, ITMAX y [illegible].

e) Ajustar las proposiciones DIMENSION a la amplitud del problema. Especificar NLECT y NIMP en el programa principal.

f) Ajustar las proposiciones FORMAT si se requiere.

D.- PROBLEMA DE PRUEBA

Los datos del problema, así como el listado y salida del programa se encuentran a continuación:

```
          B6700   F O R T R A N   C O M P I L A T I O N   M A R K   3.0.:

                                                 C U A D R A T I C
                                                 = = = = = = = = =
FILE  5=LLECT/UNIT=READER

FILE  6=LINE/UNIT=PRINTER
C
C       PROGRAMACION CUADRATICA POR EL METODO DE WOLFE
C       FUNCION OBJETIVO MINIMIZAR (Z)
C       Z = P(J) * X(J) + X(I) * C(I,J) * X(J)
C       Z = P(J) * X(J) + X(I) * C(I,J) * X(J)
C       LAS RESTRICCIONES SON
C       A(I,J)*X(J).LE.B(I)
C       TODA X(J).GE.0


        DIMENSION A(10,10),B(10),C(10,10),P(10),I(20,50),COST(50)
        DIMENSION [illegible]
        DIMENSION [illegible]
        DATA BLANK/4H    /
        NLECT = 5
        NIMP = 6
  999   READ (NLECT,100) (TIT(II), II = 1,20)
        IF (TIT(1).EQ.BLANK) GO TO 30
        WRITE(NIMP,1000)(TIT(II),II=1,20)
        READ(NLECT,[illegible]) N,M,ITMAX,[illegible]
        READ(NLECT,[illegible])(P(I),I=1,N)
        DO 220 I = 1,N
        READ (NLECT,129) (C(I,J), J=1,N)
  220   CONTINUE
        READ (NLECT,101) (B(J), J = 1,M)
        DO 215 I = 1,M
        READ (NLECT,101) (A(I,J), J = 1,N)
  215   CONTINUE
        IF (MT(K))350,350,351
  351   WRITE(NIMP,103)
  123   FORMAT([illegible]
        WRITE(NIMP,[illegible]
        WRITE(NIMP,127)
  127   FORMAT([illegible]
        WRITE(NIMP,[illegible]
        WRITE(NIMP,1[illegible]
  100   FORMAT([illegible]
[illegible]
```

```
      NP2=N+2
      MN = M + N
      MNM1=MN-1
      MNP1=MN+1
      MNP2=MN+2
      NV=MN+N
      NVP1=NV+1
      NVP2=NV+2
      NY = NV + N
      NYP1=NY+1
      NYP2=NY+2
      NZ=NY+N
      NC=NZ+1
      NZP2=NZ+2
      DO 180 I=1,MN
      DO 180 J=1,NC
180   T(I,J)=0.0
      DO 182 I=1,M
182   T(I,1)=B(I)
      DO 183 I=MP1,MN
      J=I-M
183   T(I,1)=-P(J)
      DO 184 I=1,M
      DO 184 J=1,N
      JP1=J+1
184   T(I,JP1)=A(I,J)
      DO 185 I=1,N
      DO 185 J=1,N
      IPM=I+M
      JP1 = J + 1
185   T(IPM,JP1)=2.*C(I,J)
      DO 186 I=MP1,MN
      IMM=I-M
      DO 186 J=NP2,MNP1
      JMN=J-N-1
186   T(I,J) = A(JMN,IMM)
      DO 187 I=1,MN
      IJ=I+NVP1
      DO 187 J = NYP2, NC
      IF(J-IJ)187,179,187
179   T(I,J)=1.
187   CONTINUE
      DO 188 I = MP1, MN
      IJ = I - M + MNP1
      DO 188 J = MNP2, NC
      IF(J-IJ)188,178,188
178   T(I,J)=-1.
188   CONTINUE
      DO 208 I=1,MN
      CMI(I) = T(I,1)
208   CONTINUE
      DO 340 J=1,NZ
340   COST(J)=0.0
      DO 189 I=1,M
      J=NP1+I
189   COST(J)=T(I,1)
      DO 190 J=NYP2,NC
190   COST(J)=9999.
      NN=NZ-N
      DO 25 KK=1,NZ
25    III(KK)=KK
```

```
      DO 1 I = 1, MN
    1 IB(I)=NN+1
      K=0
C
C     INICIO DE LA ITERACION
C
   19 K=K+1
      DO 2 J=1,NC
    2 PROFIT(J)=0.
      DO 3 J=1,NC
      SUM=0.
      DO 4 I =1,MN
      JJ=IB(I)+1
    4 SUM=SUM+COST(JJ)*T(I,J)
      PROFIT(J)=SUM
    3 DIFF(J)=COST(J)-PROFIT(J)
      IF(MTR)555,656,555
  555 WRITE(NIMP,111)K
C
C     IMPRIME LA TABLA SI SE DESEA
C
      WRITE(NIMP,103)(COST(J), J=2,NC)
      WRITE(NIMP,103)(TITL(KK),KK=1,N2)
      DO 26 I=1,MN
      JJ=IB(I)+1
   26 WRITE(NIMP,104)COST(JJ),(T(I,J),J=1,NC)
      WRITE(NIMP,105)(PROFIT(J),J=1,NC)
      WRITE(NIMP,106)(DIFF(J),J=2,NC)
C
C     ENCUENTRA EL ELEMENTO PIVOTE --- T(IPR,IPC)
C
  656 IPC=0
      TEST=0.
C
C     ENCUENTRA LA VARIABLE CON EL BENEFICIO MAS GRANDE
C
      DO 5 I=2,NC
  235 IF (DIFF(I) - TEST) 6, 5, 5
    6 TEST=DIFF(I)
      IPC=I
    5 CONTINUE
      IF(IPC)99,99,7
    7 KCK=0
      DO 8 I=1,MN
      IF(T(I,IPC))32,32,20
   20 RATIO(I) = T(I,1) / T(I,IPC)
      GO TO 8
   32 KCK=KCK+1
      IF(KCK-MN)21,11,21
   21 RATIO(I)=1.E20
    8 CONTINUE
C
C     EXAMINA EL LIMITE DE LA VARIABLE
C
      DO 9 I=1,MN
      IF(RATIO(I))9,10,10
   10 IF(RATIO(I)GE.10000.)RATIO(I)=1.000.
      IPR=RATIO(I)
      IPR=I
      GO TO 11
    9 CONTINUE
```

```
11    DO 12 I=1,MN
      IF(TEST-RATIO(I))12,12,13
13    TEST=RATIO(I)
      IPR=I
12    CONTINUE
C
C     INICIO PIVOTEANDO E INTRODUCIENDO NUEVA VARIABLE EN LA SOLUCION
      PIVOT=T(IPR,IPC)
      DO 15 J=1,NC
15    T(IPR,J)=T(IPR,J)/PIVOT
      DO 171 I=1,MN
      IF(I-IPR)17,171,17
17    DO 18 J=1,NC
18    TT(J)=T(IPR,J)*T(I,IPC)/T(IPR,IPC)
      DO 172 J=1,NC
172   T(I,J)=T(I,J)-TT(J)
171   CONTINUE
      COST(IPR)=COST(IPC)
      IS(IPR)=IPC
C
C     TRAZO DE SALIDA SI SE DESEA
      IF(NTR-1)205,205,86
86    WRITE(NIMP,114)
      DO 87 I=1,MR
87    WRITE(NIMP,300)I,IB(I)
      WRITE(NIMP,119)
      WRITE(NIMP,121)IPR,IPC,KSK
      WRITE(NIMP,120)
      WRITE(NIMP,100)TEST,PIVOT,DIFF(IPC)
      WRITE(NIMP,117)
      DO 88 I=1,MR
88    WRITE(NIMP,302)I,RATIO(I)
C
C     RECALCULA LOS COSTOS
C
205   DO 176 J=1,NVP
176   COST(J)=0.
      DO 197 I=1,MR
      IF(IB(I)-M)192,192,19
192   J=IB(I)+MP
      GO TO 198
19    IF(IB(I)-NV)196,196,197
196   J=IB(I)-MP
      GO TO 198
198   COST(J)=[illegible]
197   CONTINUE
[illegible]
```

```
      JN=IB(J)
      IF(JN.GT.N)GO TO 202
      SUM=SUM+C(IN,JN)*T(I,1)*T(J,1)
  202 CONTINUE
      SCND=SUM
      CUJ=FRST+SCND
      WRITE(NIMP,107)CUJ
      WRITE(NIMP,118)N,NE1,NN
      WRITE(NIMP,122)NP1,NY,NE1,NZ
      WRITE(NIMP,108)
      WRITE(NIMP,120)
      DO 28 I=1,NN
      IF(T(I,1))27,28,27
   27 WRITE(NIMP,110)IB(I),T(I,1)
   28 CONTINUE
      WRITE(NIMP,109)
      WRITE(NIMP,115)
      DO 53 I=1,NN
      IF(UPP(I))52,53,52
   52 WRITE(NIMP,113)I,UPP(I)
   53 CONTINUE
      WRITE(NIMP,116)
      GO TO 999
   31 WRITE(NIMP,112)
      GO TO 999
  830 WRITE(NIMP,831)
  831 FORMAT(1X,31HLIMITE DE ITERACIONES EXCEDIDO.)
  129 FORMAT (8F10.3)
  130 FORMAT (1X,F10.3)
  131 FORMAT (8F10.3)
  102 FORMAT [illegible]
     1 [illegible]
  103 FORMAT [illegible]
     1 [illegible]
  104 FORMAT [illegible]
  105 FORMAT [illegible]
  106 FORMAT [illegible]
  107 FORMAT [illegible]
  108 FORMAT [illegible]
  109 FORMAT [illegible]
  120 FORMAT [illegible]
  110 FORMAT [illegible]
  111 FORMAT [illegible]
  112 FORMAT [illegible]
  113 FORMAT [illegible]
  114 FORMAT [illegible]
  115 FORMAT [illegible]
  116 FORMAT [illegible]
  118 FORMAT [illegible]
     1 [illegible]
[illegible]
```

SELECCION DE UN SISTEMA DE CULTIVOS

N, M, LIMITE DE ITERACIONES, ORDEN DE TRAZO
6 4 100 2

VECTOR P (COEF. DE COSTO)

-12.233	-10.097	-2.686	-15.791	-7.772	-13.813

MATRIZ C (FUNC. OBJ.)

12.118	-3.782	0.823	4.199	1.901	4.413
-3.782	20.352	0.732	4.636	0.384	2.300
0.823	0.732	0.575	1.020	0.456	0.504
4.199	4.636	1.020	21.425	1.185	6.725
1.901	0.384	0.456	1.185	6.567	3.082
4.413	2.300	0.504	6.725	3.082	18.085

MATRIZ A

1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
12.233	10.097	2.686	15.791	7.772	13.813

VECTOR B (RESTRICCIONES)

1.000	0.070	0.010	7.000

1

0.00

0.00

0.00

0.00

9999.00

9999.00

9999.00

9999.00

9999.00

9999.00

```
 1C          26
 IER         IPC          KCK
  3           5            1
 PRCLDA      PIVCTF       DIFF(IPC)
  C.010           1.000   .783701.214
RATIC(I)
 1                1.C00000
 2 ************  ********
 3                0.C10000
 4                0.443250
 5                1.456656
 6                1.736C97
 7                1.326667
 8                0.34A518
 9                3.271044
 1C               1.C26989
```

TABLA 2

C(I)	T(I)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

T(I)
[illegible]

```
    10          26
    IER         IPC          KCK
     6           3           1
   PROERA      MIVCIR       CIEE(IPC)
     0.070          1.050   -243443.2?
RATIO(I)
  1             0.590000
  2             0.070000
  3.*************.*******
  4             0.425058
  5             1.006183
  6             0.303463
  7             1.880725
  8             1.856870
  9            10.008854
 10             2.973587
```

TABLA 3

C(I)	T(I)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C(J)		[illegible]	0.000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
		0.00	9999.0[illegible]	9999.00	9999.0[illegible]	9999.0[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Z(J)		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
C-Z		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

IS(I)

1	[illegible]
2	[illegible]
3	[illegible]
4	[illegible]
5	[illegible]
6	[illegible]
7	[illegible]
8	[illegible]
9	[illegible]

```
  10              6
  IER             IPC            KCK
  10              7               2
 PRUEBA         NIVEIT         EIFF(IPC)
    0.369          30.128      .710160.57?
RATIO(I)
  1               0.520000
  2***********************
  3***********************
  4               0.413742
  5               1.3[illegible]6513
  6               2.5[illegible]71[illegible]
  7               1.417255
  8               1.553939
  9               1.24A7?3
 10               0.309188
```

TABLA 4

C(I) T(I)

0.00

0.00

0.00

0.00

9999.00

9999.00

9999.00

9999.00

9999.00

0.00

Z(J)

0.00

C-Z

0.00

IJ(I)

```
  IER          IPG          KCM
   6            11           4
 FRCEDA        MI,[illegible]  (IER(IPG)
   LAMAC         1.....1    +.912696.139
RATIO(I)
 1           1000000.000000
 2 .......................
 3 .......................
 4 .......................
 5                0.[illegible]
 6                0.[illegible]
 7                0.[illegible]
 8                0.[illegible]
 9                1.[illegible]
 10               0.[illegible]
```

TABELA 5

C(I)	T(I)										
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.75		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.50		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9999.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.00		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Z(J) [illegible]

C(J) [illegible]

[illegible]

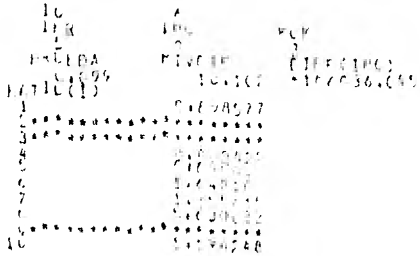


TABLA 6

C(I)	T(I)	[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]
0.70		[illegible]
0.00		[illegible]
3.40		[illegible]
9999.00		[illegible]
9999.00		[illegible]
9999.00		[illegible]
0.00		[illegible]

[illegible]

10277.33 [illegible]

IJ(I)

[illegible]

```
 10                    A
 ITER                  IPC                 KCK
 5                     6                   3
 FMEDIA                PIVOTE              [illegible]
 0.132                 0.747               [illegible]
KATIE(I)
 1                     1.[illegible]
 2 ...........................................
 3 ...........................................
 4                     0.[illegible]
 5                     0.779[illegible]
 6 ...........................................
 7                     0.[illegible]
 8                     [illegible]
 9                     0.[illegible]
 10                    0.[illegible]
```

TABLE 7

```
  10
  ITR              6
   7              IPC            ICP
  PRCLHA           4              2
   1.1349         PIVCIF         EIFE(IPC)
                     0.867        -13068.213
RATIC(I)
 1                  0.C0482S
 2*************************
 3*************************
 4                  1.3752E7
 5                  1.7C7855
 6                  9.220722
 7                  0.348638
 8                  1.191S7
 9                  6.420053
 10                 4.E210C1
```

C(I)	T(I)	[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]
[illegible]		[illegible]
0.00		[illegible]
9999.00		[illegible]
0.00		[illegible]
0.00		[illegible]

```
  ITR         IPC        NCR
   L           10          S
 MAXLDA       PIVLIF      CIFF(IPC)
   1.665         1.000      -.999.000
FIT(I)
 1              10000.000000
 2....................
 3....................
 4....................
 5....................
 6....................
 7....................
 8                   1.000300
 9....................
10....................
```

TABLA 9

```
  1C              6
  ITR             IPC             KCF
   1              1A               1
 FALLLA           PIVCIF          DIFF(IPC)
   C.292              1.251           -1.274
FATIC(I)
 1                0.291522
 2..............  ........
 3..............  ........
 4                0.690155
 5                2.591464
 6                7.671171
 7..............  ........
 8                1.260644
 9                3.273259
10                1.678522
```

TAB-A 10

[illegible]

```
    10             4
    ITEM           IPC            ECY
     1             6              (
   FALLDA          FIVCIF         DIFF(IPC)
      1.555              6.1E?          -0.7:1
RATIO(I)
  1                1.'994(1
  2.........................
  3.........................
  4                2.(42815
  5.........................
  6                8.537725
  7                7.75683
  8.........................
  9.........................
 10.........................
```

TABLE 11

```
IG           4
IER          IPG          ICK
4            8            7
PRUEBA       PIVOTE       DIFF(IPC)
0.105            2.965          -1.709
RATIO(I)
1          10000.000000
2*******************
3*******************
4              0.105075
5*******************
6              1.260257
7              4.510674
8*******************
9*******************
10******************
```

TABLA 12

C(I)	T(I)
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
0.00	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
9999.00	[illegible]

```
EL VALOR MINIMO DE Z ES=          -5.341

NUMEROS  1 HASTA  6 SON VARIABLES ORDINARIAS, NUMEROS  7 HASTA 10 SON LAGRANGIANOS.
NUMEROS 11 HASTA 20 SON VAR ARTIFICIALES,     NUMEROS 21 HASTA 26 SON GRADIENTES.

LOS PUNTOS OPTIMOS ESTAN IMPRESOS ABAJO

I            X(I)

 8              2.0833
 2              0.0700
 4              0.0100
 7              0.1051
 1              0.1327
10              0.4857
 3              0.5063
 9              3.1190
 5              0.1903
 6              0.0907

EL RESTO DE LAS VARIABLES ES IGUAL A CERO

LOS COSTOS DE OPORTUNIDAD SON
C-Z( 1 )=   .10000000E+01
C-Z( 2 )=   .70000000E-01
C-Z( 3 )=   .10000000E-01
C-Z( 4 )=   .70000000E+01
C-Z( 5 )=   .12253000E+02
C-Z( 6 )=   .16057000E+02
C-Z( 7 )=   .26860000E+01
C-Z( 8 )=   .15791000E+02
C-Z( 9 )=   .77720000E+01
C-Z(10 )=   .13813000E+02

EL RESTO DE LOS COSTOS DE OPORTUNIDAD SON CERO
```

BIBLIOGRAFIA

1.- ECONOMIC CONSIDERATIONS IN RESPONSE RESEARCH

J. R. Anderson and John L. Dillon

American Journal of Agricultural Economics

2.- INFORMES ANUALES (1945 A 1976)

Banco de México

3.- COMPUTER CODE FOR WOLFE ALGORITHM

Bates, H.

Kansas State University

4.- ELEMENTARY DECISION THEORY

Herman Chernoff and Lincon E. Moses

5.- INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

W. Feller

6.- ESTIMATION IN THE LINEAR DECISION MODEL

Walter D. Fisher

7.- OPERATIONS RESEARCH

Frederick S. Hiller and Gerald J. Lieberman

8.- RATIONAL DECISION MAKING AND RISK IN FARM PLANNING - AN APPLICATION OF QUADRATIC PROGRAMMING IN BRITISH ARABLE FARMING
Journal of Agricultural Economics vol. 14

9.- TEORIA DE LA PROBABILIDAD
Ivan Obregón Sanin

10.- APPLIED STATISTICAL DECISION THEORY
H. Raiffa and R. Schlaifer

11.- DECISION MAKING UNDER RISK: A BRIEF EXAMINATION OF THE BAYESIAN APPROACH AND AN EMPIRICAL STUDY OF UTILITY ANALYSIS IN AGRICULTURE
Reported in F.F. Office

12.- ESTADISTICAS AGRICOLAS DE LOS CICLOS 1945-46 AL 1975-76
Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos

13.- ANALISIS DE [illegible] EXPERIMENTAL
R. [illegible]

14.- [illegible]
W. [illegible]

15.- THE SIMPLEX METHOD FOR CUADRATIC PROGRAMMING

Wolfe P.

Econometrica, 27, 382-398, 1959