

2ej 16

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**Facultad de Ingeniería**



**FUNDAMENTOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS  
PETROLEROS**

**TESIS PROFESIONAL**

**Que Para Obtener el Título de  
INGENIERO PETROLERO**

**P r e s e n t a :  
MIGUEL ANGEL HERNANDEZ GARCIA**

**México, D. F.,**

**Mayo de 1984**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	PAG.
PROLOGO. ....	6
LISTA DE FIGURAS. ....	10
1. INTRODUCCION. ....	13
1.1 Antecedentes. ....	14
1.2 Breve historia de la Simulación. ....	16
1.3 Aspectos Generales. ....	18
1.4 Etapas para desarrollar un modelo. ....	24
1.5 Como trabaja un modelo. ....	26
Referencias. ....	29
2. INFORMACION REQUERIDA PARA UTILIZAR UN SIMULADOR. .	31
2.1 Introducción. ....	32
2.2 Descripción física del yacimiento. ....	33
2.3 Mecanismos de desplazamiento. ....	34
2.4 Propiedades petrofísicas. ....	35
2.5 Propiedades PVT de los fluidos. ....	36
2.6 Otros datos. ....	36
2.7 Permeabilidades relativas. ....	43
2.8 Introducción de los datos al simulador. ....	45
Referencias. ....	50
3. CLASIFICACION DE SIMULADORES. ....	51
3.1 Introducción. ....	52
3.2 Tipo de yacimiento. ....	54

	PAG.	
5.3	Proceso de discretización. Diferencias finitas. ....	140
5.4	Polinomio de Taylor generado por una función. ....	142
5.5	Aplicación del polinomio de Taylor en la evaluación de derivadas para intervalos iguales. ....	145
5.6	Esquemas de solución de las ecuaciones de flujo. ....	153
5.7	Conceptos relacionados con el modelo numérico. ....	170
5.8	Sistema de cuadrícula de la malla. ....	174
	Referencias. ....	176
6.	SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS. ..	177
6.1	Introducción. ....	178
6.2	Métodos directos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. ....	180
6.3	Métodos iterativos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. ....	200
6.4	Algoritmo de Thomas para la solución de un sistema de ecuaciones tridiagonales. ....	214
	Referencias. ....	220
7.	MODELOS MATEMATICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS. .	221
7.1	Introducción. ....	222
7.2	La ecuación de Darcy. ....	222
7.3	Ecuación para fluidos incompresibles en una sola fase. ....	230
7.4	Ecuación para fluidos ligeramente compresibles en una sola fase. ....	231

	PAG.
9.6 Información que proporciona el programa. . . .	309
9.7 Ejemplo de aplicación. . . . .	311
Referencias. . . . .	332
10. CONCLUSIONES. . . . .	333
APENDICE A. CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE EL MANEJO DE - MATRICES. . . . .	339
APENDICE B. UNIDADES. . . . .	349
NOMENCLATURA. . . . .	358

## PROLOGO

La simulación numérica de yacimientos es una disciplina relativamente moderna en la ingeniería de yacimientos petroleros. Su potencial es enorme como herramienta de trabajo, para predecir el comportamiento de yacimientos bajo diferentes esquemas de explotación, siempre y cuando se entiendan las bases sobre las que está desarrollada. Este trabajo tiene como objetivo presentar los fundamentos de la simulación de yacimientos petroleros, como un primer curso sobre el tema. No se pretende abarcar todo lo que se conoce sobre simulación, sino más bien dar los conceptos fundamentales para que se puedan entender cursos más avanzados, así como iniciar a las personas interesadas en yacimientos, en lo que es probablemente una de las áreas de estudio más nuevas en la ingeniería petrolera.

En este trabajo, se presenta primordialmente el problema del flujo de fluidos en un yacimiento cuando se trata de una sola fase. Sin embargo, se dan las bases para estudiar el caso de flujo multifásico, tanto en dos como en tres fases. Se puso especial énfasis en la información que requiere un modelo para ser utilizado, ya que ésto es probablemente uno de los aspectos fundamentales de simulación. En ocasiones son necesarios datos que no se tienen disponibles, lo que hace que un estudio de simulación de

Se presenta un capítulo en unidades prácticas, con los modelos matemáticos que se tendrían cuando se considera una, dos y tres fases. El objetivo de este capítulo no es presentar la solución a cada uno de ellos, sino mostrar el tipo de modelo que se manejaría en cada caso.

Algo a lo que se le dedicó espacio en este trabajo, fué la presentación de un capítulo de aspectos prácticos de la simulación de yacimientos. En él se discuten algunas dificultades, con las que se enfrenta el usuario de un simulador, identificando las fuentes potenciales de error, así como algunos aspectos que son importantes de considerar al utilizar un modelo. En este mismo capítulo, se incluyen once problemas resueltos, para ser utilizados como material autodidáctico por aquellos estudiantes y profesionistas que se estén iniciando en el tema. El grado de dificultad de estos problemas es variable, desde los muy sencillos hasta algunos que requieren de más tiempo para ser resueltos.

El último capítulo de estos apuntes ha sido dedicado a la presentación del simulador conocido como BOAST, el cual es un modelo trifásico tridimensional, que está disponible para ser usado por estudiantes en el Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (CECAFI). Este simulador es un programa que fué desarrollado para el Departamento de Energía de los Estados Unidos por Frenchi y Bujnowski en 1982 y se ha dado a conocer al público a través de una publicación especializada. El objeto de incluir es-

# LISTA DE FIGURAS

FIG.		PAG.
1.1	Etapas para desarrollar un modelo.	25
1.2	Como trabaja un modelo.	28
2.1	Obtención de los gastos de producción de gas y de agua con una información incompleta.	38
2.2	Acoplamiento del flujo de fluidos en el yacimiento con el flujo de fluidos en la tubería vertical en un solo simulador.	40
2.3	Propiedades PVT de los fluidos.	46
2.4	Datos de factores de volumen del aceite en forma de tabla.	48
2.5	Presión capilar v.s. saturación de agua.	48
3.1	Selección de un simulador.	53
3.2	Modelo de cero dimensiones.	66
3.3	Balance de materia.	66
3.4	Balance de materia para dos bloques.	68
3.5	Modelos de una dimensión.	70
3.6	Modelos de dos dimensiones.	72
3.7	Modelos de tres dimensiones.	76
4.1	Relación entre la presión y el volumen obtenida en el laboratorio.	86
4.2	Isopotenciales y líneas de flujo.	88
4.3	Columna de líquido.	92
4.4	Relación entre la presión y la profundidad para los fluidos de un yacimiento.	92
		10

FIG.		PAG.
8.1	Orientación de la malla.	253
8.2	Esquema en diferencias con nueve y con cinco puntos.	255
9.1	Procedimiento de cálculo de BOAST.	300

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION.

## 1.1 Antecedentes.

La simulación, como tal, no es nueva. Siendo el objetivo principal de la ingeniería de yacimientos el optimizar la recuperación de los hidrocarburos y el ingeniero de yacimientos el encargado de lograr que ese objetivo se cumpla; éste siempre ha buscado la manera de tratar de reproducir lo que ocurre en los mismos. Para ello se ha valido de técnicas y ecuaciones que con el tiempo y gracias a los adelantos de la ciencia han ido evolucionando, pero que en esencia, son las técnicas y ecuaciones que se siguen utilizando en nuestros días.

Así entonces, antes para calcular por ejemplo la recuperación, se utilizaban métodos de balance de materia<sup>1,2\*</sup> como los de Tarner, Muskat o Tracy, en los cuales se considera al yacimiento como un tanque con propiedades promedio, tanto de presión como de propiedades petrofísicas y PVT de los fluidos. Sin embargo esta suposición de homogeneidad a lo largo de todo el yacimiento, aunque se ha demostrado que puede ser válida, no existe, por lo cual se pensó en dividir al yacimiento en una serie de bloques o celdas, asignándole a cada una de ellas propiedades promedio y aplicar la ecuación de balance de materia para cada bloque, acoplada a la ecuación de Darcy que es una ecuación de

---

\* Referencias al final de cada capítulo.

## 1.2 Breve historia de la simulación<sup>3</sup>.

Prácticamente la simulación de yacimientos se ha venido empleando desde los inicios de la ingeniería petrolera, ésto es, allá por los años 1930's. Antes de 1960 los cálculos utilizados para predecir el comportamiento del yacimiento (pronosticar la recuperación o comparar alternativas económicas entre diversos métodos de recuperación), consistían en gran parte, de métodos analíticos como eran, el método de balance de materia o simulador de cero dimensiones y el método de Buckley-Leverett o modelo de una dimensión.

El término "simulación" se hace común a principios de los años 1960's, refiriéndose con él a métodos de predicción desarrollados en programas de computadoras relativamente sofisticados. Dichos programas representaban un mayor adelanto debido a que permitían la solución de un conjunto de ecuaciones expresadas en diferencias finitas que describían flujo multifásico a través de un medio poroso heterogéneo en dos y tres dimensiones. Este adelanto se hizo posible gracias a la evolución tan rápida que tuvieron las computadoras y el desarrollo de métodos numéricos capaces de resolver grandes sistemas de ecuaciones en diferencias finitas.

Durante los años 1960's, los esfuerzos de la simulación fueron dedicados en gran medida a los problemas en dos fases (gas y agua) y, en tres, así como a modelos de aceite negro. La simulación de métodos de recuperación se limitaba esencialmente a

Las investigaciones realizadas durante este tiempo, dieron como resultado un avance significativo en la formulación de modelos de simulación y de métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones. Estos avances permitieron simular procesos de recuperación de lo más complejo y/o reducir el costo de tiempo de computadora.

En la actualidad el enfoque de la simulación es el de afinar los avances que se han obtenido y volver a tender hacia un simulador general aplicable a todos o a la mayoría de los procesos de recuperación que interesen. El éxito de ello depende en gran parte, de la obtención de ecuaciones de estado que representen el comportamiento PVT de los componentes de un sistema de fluidos en tres fases bajo un rango de presiones y temperaturas bastante amplio.

### 1.3 Aspectos Generales.

#### 1.3.1. Definición y objetivo.

La simulación de yacimientos es un proceso mediante el cual el ingeniero con la ayuda de un modelo matemático, integra un conjunto de factores para describir con cierta precisión el comportamiento de procesos físicos que ocurren en un yacimiento.

Básicamente un modelo matemático de simulación de yacimientos consiste en un número determinado de ecuaciones que ex-

dir cuándo es preciso utilizar un modelo y qué tipo de modelo es el más conveniente en cada caso, así como evaluar de una manera apropiada tanto los datos que se van a utilizar en la simulación como los resultados que se obtengan de ella. La selección del modelo a utilizar, además del aspecto económico, está en función de lo que se desea simular y de la información con que se cuenta para realizar la simulación, pero una regla general es utilizar el modelo más simple capaz de resolver el problema planteado<sup>8</sup>.

### 1.3.2. Utilidad de la simulación.

Cuando un modelo matemático de simulación ha sido probado y calibrado adecuadamente, representa la herramienta más poderosa con que cuenta un ingeniero. Mientras que físicamente el yacimiento puede producirse una sola vez y lo más probable es que no sea en la forma más adecuada, dado que un error cometido en el proceso afectará cualquier cambio subsecuente, el modelo permite "producir" un yacimiento varias veces y en muy diferentes maneras, con lo cual se pueden analizar varias alternativas y seleccionar una de ellas.

El observar el comportamiento del modelo bajo diferentes condiciones de operación, ayuda a seleccionar un conjunto de condiciones de producción óptimas para el yacimiento. Más específicamente, con ayuda de la simulación, se puede hacer lo siguiente:

- k) Realizar estudios individuales de pozos.
- l) Conocer la cantidad de gas almacenado.
- m) Hacer un programa de producción.

### 1.3.3. Ajuste del simulador con la historia del yacimiento.

Si la información con que se cuenta para llevar a cabo una simulación es amplia y de calidad, el objetivo de la simulación tenderá a satisfacerse y la predicción del comportamiento será mejor. Si por el contrario, la información es incompleta o no muy confiable, los simuladores solo podrán utilizarse para comparar semicuantitativamente los resultados al explotar el yacimiento de diferentes maneras. De cualquier forma, la aproximación que proporciona el simulador puede mejorarse mediante el ajuste de éste a medida que se vaya teniendo mayor información del yacimiento.

Lo primero que se hace para ajustar el simulador con la historia del yacimiento, es calcular el comportamiento de éste usando la mejor información disponible. De esta manera los resultados obtenidos de la simulación se comparan con aquéllos obtenidos del campo, ésto es con los valores reales. Si los resultados al compararlos no coinciden en una manera satisfactoria, se hacen modificaciones en los datos utilizados y se efectúan otras corridas del simulador hasta que se alcanza la aproximación deseada en los resultados. Cuando ésto ocurre, el modelo ya puede ser utilizado para

2ej. 16

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**Facultad de Ingeniería**



**FUNDAMENTOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS  
PETROLEROS**

**TESIS PROFESIONAL**

**Que Para Obtener el Título de  
INGENIERO PETROLERO**

**P r e s e n t a :  
MIGUEL ANGEL HERNANDEZ GARCIA**

**México, D. F.,**

**Mayo de 1984**

# I N D I C E

	PAG.
PROLOGO. ....	6
LISTA DE FIGURAS. ....	10
1. INTRODUCCION. ....	13
1.1 Antecedentes. ....	14
1.2 Breve historia de la Simulación. ....	16
1.3 Aspectos Generales. ....	18
1.4 Etapas para desarrollar un modelo. ....	24
1.5 Como trabaja un modelo. ....	26
Referencias. ....	29
2. INFORMACION REQUERIDA PARA UTILIZAR UN SIMULADOR. .	31
2.1 Introducción. ....	32
2.2 Descripción física del yacimiento. ....	33
2.3 Mecanismos de desplazamiento. ....	34
2.4 Propiedades petrofísicas. ....	35
2.5 Propiedades PVT de los fluidos. ....	36
2.6 Otros datos. ....	36
2.7 Permeabilidades relativas. ....	43
2.8 Introducción de los datos al simulador. ....	45
Referencias. ....	50
3. CLASIFICACION DE SIMULADORES. ....	51
3.1 Introducción. ....	52
3.2 Tipo de yacimiento. ....	54

	PAG.
3.3 Nivel de simulación. ....	55
3.4 Simulador. ....	56
3.5 Tipo de flujo en el yacimiento. ....	61
3.6 Número de dimensiones. ....	64
3.7 Geometría. ....	75
3.8 Uso de la clasificación. ....	77
4. PRINCIPIOS BASICOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES. ..	80
4.1 Introducción. ....	81
4.2 Tipos de energía en el flujo de fluidos en medios porosos. ....	82
4.3 Potencial de flujo. ....	85
4.4 Ley de Darcy. ....	96
4.5 Ecuación de continuidad. ....	104
4.6 Ecuación de difusividad. ....	108
4.7 Clasificación de los fluidos según su compresibilidad. ....	109
4.8 Ecuaciones de estado. ....	110
4.9 Ecuación de difusividad para los diferentes tipos de fluidos. ....	116
4.10 Condiciones iniciales y de frontera. ....	125
Referencias. ....	134
5. MODELO NUMERICO UTILIZANDO DIFERENCIAS FINITAS. ..	135
5.1 Introducción. ....	136
5.2 Clasificación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. ....	136

	PAG.
5.3 Proceso de discretización. Diferencias finitas. ....	140
5.4 Polinomio de Taylor generado por una función. ....	142
5.5 Aplicación del polinomio de Taylor en la evaluación de derivadas para intervalos iguales. ....	145
5.6 Esquemas de solución de las ecuaciones de flujo. ....	153
5.7 Conceptos relacionados con el modelo numérico. ....	170
5.8 Sistema de cuadrícula de la malla. ....	174
Referencias. ....	176
6. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS. ..	177
6.1 Introducción. ....	178
<del>6.2</del> Métodos directos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. ....	180
6.3 Métodos iterativos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. ....	<del>200</del>
6.4 Algoritmo de Thomas para la solución de un sistema de ecuaciones tridiagonales. ....	214
Referencias. ....	220
7. MODELOS MATEMATICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS. .	221
<del>7.1</del> Introducción. ....	222
<del>7.2</del> La ecuación de Darcy. ....	222
7.3 Ecuación para fluidos incompresibles en una sola fase. ....	230
7.4 Ecuación para fluidos ligeramente compresibles en una sola fase. ....	<del>231</del>

7.5 Ecuación para fluidos compresibles en una sola fase. ....	233
7.6 Ecuaciones de flujo para dos fases. ....	234
7.7 Ecuaciones de flujo para tres fases. ....	237
Referencias. ....	242
8. ASPECTOS PRACTICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS. .	243
8.1 Introducción. ....	244
8.2 Fuentes de error en los resultados obtenidos de un simulador. ....	245
8.3 Error por el método de balance de materia. ..	248
8.4 Medida y número de las celdas. ....	250
8.5 Orientación de la malla. ....	252
8.6 Consideraciones de cálculo. ....	254
8.7 Uso de las pseudofunciones. ....	258
8.8 Abuso en la aplicación de los simuladores. ..	260
8.9 Aplicación de los conceptos fundamentales de simulación. (Problemas). ....	261
Referencias. ....	292
9. "BOAST". SIMULADOR DE ACEITE NEGRO MULTIFASICO, TRIDIMENSIONAL. ....	293
9.1 Introducción. ....	294
9.2 Aspectos Generales. ....	295
9.3 <del>Forma de</del> estructura del programa. ....	297
9.4 Subrutinas que maneja el programa. ....	299
9.5 Forma de introducir los datos al simulador. . .	304

	PAG.
9.6 Información que proporciona el programa. ...	309
9.7 Ejemplo de aplicación. ....	<del>311</del>
Referencias. ....	332
10. CONCLUSIONES. ....	333
APENDICE A. CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE EL MANEJO DE - MATRICES. ....	339
APENDICE B. UNIDADES. ....	349
NOMENCLATURA. ....	358

## PROLÓGO

La simulación numérica de yacimientos es una disciplina relativamente moderna en la ingeniería de yacimientos petroleros. Su potencial es enorme como herramienta de trabajo, para predecir el comportamiento de yacimientos bajo diferentes esquemas de explotación, siempre y cuando se entiendan las bases sobre las que está desarrollada. Este trabajo tiene como objetivo presentar los fundamentos de la simulación de yacimientos petroleros, como un primer curso sobre el tema. No se pretende abarcar todo lo que se conoce sobre simulación, sino más bien dar los conceptos fundamentales para que se puedan entender cursos más avanzados, así como iniciar a las personas interesadas en yacimientos, en lo que es probablemente una de las áreas de estudio más nuevas en la ingeniería petrolera.

En este trabajo, se presenta primordialmente el problema del flujo de fluidos en un yacimiento cuando se trata de una sola fase. Sin embargo, se estudian también algunos casos para estudiar el caso de flujo multifásico, tanto en dos como en tres fases. Se puso especial énfasis en la información que requiere un modelo para ser utilizado, ya que ésto es probablemente uno de los aspectos fundamentales de simulación. En ocasiones son necesarios datos que no se tienen disponibles, lo que requiere que un estudio de simulación de

yacimientos sea criticado por dar resultados basados en información supuesta, ya sea de correlaciones empíricas o de datos tomados de otros campos.

Se incluyó un capítulo dedicado a estudiar la forma en que pueden ser clasificados los simuladores, dependiendo de sus características. Esto es importante, ya que un simulador puede ser caracterizado de muy diferentes maneras, lo cual permite seleccionar el modelo necesario para resolver un problema específico.

Se dedica un espacio importante en estas notas a los principios básicos y ecuaciones fundamentales de la simulación, así como al manejo de unidades y a conceptos fundamentales de matrices, muy necesarios para poder resolver los sistemas de ecuaciones que se van a generar.

Con relación a los modelos matemáticos que se van a resolver numéricamente, se dan las bases del método de diferencias finitas, el cual se trata extensamente en un capítulo. También se presentan algunos de los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. En este tema, no se pretendió cubrir todo lo que existe relacionado con métodos de solución, ya que éso sería por sí solo, material para escribir un libro completo. Sin embargo, se presentan los métodos más sencillos, así como algunos de los más utilizados.

Se presenta un capítulo en unidades prácticas, con los modelos matemáticos que se tendrían cuando se considera una, dos y tres fases. El objetivo de este capítulo no es presentar la solución a cada uno de ellos, sino mostrar el tipo de modelo que se manejaría en cada caso.

Algo a lo que se le dedicó espacio en este trabajo, fué la presentación de un capítulo de aspectos prácticos de la simulación de yacimientos. En él se discuten algunas dificultades, con las que se enfrenta el usuario de un simulador, identificando las fuentes potenciales de error, así como algunos aspectos que son importantes de considerar al utilizar un modelo. En este mismo capítulo, se incluyen once problemas resueltos, para ser utilizados como material autodidáctico por aquellos estudiantes y profesionistas que se estén iniciando en el tema. El grado de dificultad de estos problemas es variable, desde los muy sencillos hasta algunos que requieren de más tiempo para ser resueltos.

El último capítulo de estos apuntes ha sido dedicado a la presentación del simulador conocido como BOAST, el cual es un modelo trifásico tridimensional, que está disponible para ser usado por estudiantes en el Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (CECAFI). Este simulador es un programa que fué desarrollado para el Departamento de Energía de los Estados Unidos por Frenchi y Bujnowski en 1982 y se ha dado a conocer al público a través de una publicación especializada. El objeto de incluir es-

te capítulo y un ejemplo corrido en este simulador, es familiarizar a los estudiantes con un modelo del tipo de los que más se utilizan actualmente.

Finalmente, se incluye un capítulo de conclusiones y comentarios generales acerca de la simulación de yacimientos petroleros, mencionando sus ventajas y desventajas.

Es importante señalar para terminar este prólogo, que este trabajo está inspirado en los apuntes "Simulación Numérica de Yacimientos", escritos en 1982 por los ingenieros José R. Serrano Lozano y Luis A. Ayala Gómez. Sin embargo, esta nueva versión difiere sustancialmente de la antes mencionada, por lo que de hecho se pueden considerar como otros apuntes, dándole el crédito que le corresponda a los ingenieros Serrano y Ayala, por las partes de este trabajo que fueron tomadas de sus apuntes.

Por último, conviene mencionar que gran parte del material presentado ha sido estudiado en la materia "Simulación Matemática de Yacimientos", que se ofrece regularmente en el plan de estudios de la carrera de Ingeniero Petrolero en la Facultad de Ingeniería, la cual ha sido impartida por el Dr. Guillermo C. Domínguez Vargas en los últimos dos años.

predecir con cierto grado de precisión, el comportamiento del yacimiento. Es importante hacer notar que dicho comportamiento está influenciado por muchos factores, como lo son: las permeabilidades, la distribución de saturaciones, los espesores de las capas, las porosidades, las permeabilidades relativas, etc., que nunca se conocen con exactitud a lo largo de todo el yacimiento. De esta manera, a lo que en realidad llega el ingeniero es a una combinación de estas variables (que da como resultado un ajuste), la cual no es única, por lo que dicha combinación no puede representar de una manera precisa las condiciones del yacimiento. Por ésto se debe tener en cuenta que al utilizar un simulador, después de haberlo ajustado a la historia del yacimiento, no se puede asegurar que la predicción que proporcione será exactamente el comportamiento real que se tenga en dicho yacimiento. Sin embargo, a medida de que el período que se ha ajustado sea mayor, la predicción que se haga será más confiable, lo que implica que el ingeniero deba estar continuamente comparando la predicción hecha por el simulador con el comportamiento presente y actualizar de ser necesario, las combinaciones de datos que maneja el modelo<sup>10</sup>.

#### 1.3.4. Resultados de una simulación.

Los resultados típicos que se obtienen de una simulación consisten, en la distribución de presiones y de saturaciones en cada una de las celdas en que ha sido dividido el

# LISTA DE FIGURAS

FIG.		PAG.
1.1	Etapas para desarrollar un modelo.	25
1.2	Como trabaja un modelo.	28
2.1	Obtención de los gastos de producción de gas y de agua con una información incompleta.	38
2.2	Acoplamiento del flujo de fluidos en el yacimiento con el flujo de fluidos en la tubería vertical en un solo simulador.	40
2.3	Propiedades PVT de los fluidos.	46
2.4	Datos de factores de volumen del aceite en forma de tabla.	48
2.5	Presión capilar v.s. saturación de agua.	48
3.1	Selección de un simulador.	53
3.2	Modelo de cero dimensiones.	66
3.3	Balance de materia.	66
3.4	Balance de materia para dos bloques.	68
3.5	Modelos de una dimensión.	70
3.6	Modelos de dos dimensiones.	72
3.7	Modelos de tres dimensiones.	76
4.1	Relación entre la presión y el volumen obtenida en el laboratorio.	86
4.2	Isopotenciales y líneas de flujo.	88
4.3	Columna de líquido.	92
4.4	Relación entre la presión y la profundidad para los fluidos de un yacimiento.	92
		10

FIG.		PAG.
4.5	Experimento de Darcy.	97
4.6	Dirección de flujo en la ecuación de Darcy.	100
4.7	Deducción de la ecuación de continuidad a partir de un balance de masa.	105
4.8	Tipos de fluidos en función de su compresibilidad.	111
4.9	Sistema.	128
4.10	Condiciones de frontera.	128
4.11	Partícula en movimiento a través del medio poroso.	131
4.12	Sistema radial.	131
4.13	Perfil de presiones en flujo radial.	131
5.1	Discretización en espacio.	141
5.2	Discretización en tiempo.	141
5.3	Distribución de la temperatura en una barra.	154
5.4	Esquema explícito en una dimensión.	154
5.5	Arreglo de las celdas en una malla de dos dimensiones.	157
5.6	Esquema implícito en una dimensión.	159
5.7	Esquema de Crank-Nicholson en una dimensión.	166
5.8	Error lineal y exponencial.	173
5.9	Soluciones estable e inestable.	173
6.1	Método directo.	181
6.2	Método iterativo.	201
6.3	Convergencia de un método iterativo.	201

FIG.		PAG.
4.5	Experimento de Darcy.	97
4.6	Dirección de flujo en la ecuación de Darcy.	100
4.7	Deducción de la ecuación de continuidad a partir de un balance de masa.	105
4.8	Tipos de fluidos en función de su compresibilidad.	111
4.9	Sistema.	128
4.10	Condiciones de frontera.	128
4.11	Partícula en movimiento a través del medio poroso.	131
4.12	Sistema radial.	131
4.13	Perfil de presiones en flujo radial.	131
5.1	Discretización en espacio.	141
5.2	Discretización en tiempo.	141
5.3	Distribución de la temperatura en una barra.	154
5.4	Esquema explícito en una dimensión.	154
5.5	Arreglo de las celdas en una malla de dos dimensiones.	157
5.6	Esquema implícito en una dimensión.	159
5.7	Esquema de Crank-Nicholson en una dimensión.	166
5.8	Error lineal y exponencial.	173
5.9	Soluciones estable e inestable.	173
6.1	Método directo.	181
6.2	Método iterativo.	201
6.3	Convergencia de un método iterativo.	201

2ej. 16

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**Facultad de Ingeniería**



**FUNDAMENTOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS  
PETROLEROS**

**TESIS PROFESIONAL**

**Que Para Obtener el Título de  
INGENIERO PETROLERO**

**P r e s e n t a :  
MIGUEL ANGEL HERNANDEZ GARCIA**

**México, D. F.,**

**Mayo de 1984**

# I N D I C E

	PAG.
PROLOGO. ....	6
LISTA DE FIGURAS. ....	10
1. INTRODUCCION. ....	13
1.1 Antecedentes. ....	14
1.2 Breve historia de la Simulación. ....	16
1.3 Aspectos Generales. ....	18
1.4 Etapas para desarrollar un modelo. ....	24
1.5 Como trabaja un modelo. ....	26
Referencias. ....	29
2. INFORMACION REQUERIDA PARA UTILIZAR UN SIMULADOR. .	31
2.1 Introducción. ....	32
2.2 Descripción física del yacimiento. ....	33
2.3 Mecanismos de desplazamiento. ....	34
2.4 Propiedades petrofísicas. ....	35
2.5 Propiedades PVT de los fluidos. ....	36
2.6 Otros datos. ....	36
2.7 Permeabilidades relativas. ....	43
2.8 Introducción de los datos al simulador. ....	45
Referencias. ....	50
3. CLASIFICACION DE SIMULADORES. ....	51
3.1 Introducción. ....	52
3.2 Tipo de yacimiento. ....	54

	PAG.
3.3 Nivel de simulación. ....	55
3.4 Simulador. ....	56
3.5 Tipo de flujo en el yacimiento. ....	61
3.6 Número de dimensiones. ....	64
3.7 Geometría. ....	75
3.8 Uso de la clasificación. ....	77
4. PRINCIPIOS BASICOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES. ..	80
4.1 Introducción. ....	81
4.2 Tipos de energía en el flujo de fluidos en medios porosos. ....	82
4.3 Potencial de flujo. ....	85
4.4 Ley de Darcy. ....	96
4.5 Ecuación de continuidad. ....	104
4.6 Ecuación de difusividad. ....	108
4.7 Clasificación de los fluidos según su compresibilidad. ....	109
4.8 Ecuaciones de estado. ....	110
4.9 Ecuación de difusividad para los diferentes tipos de fluidos. ....	116
4.10 Condiciones iniciales y de frontera. ....	125
Referencias. ....	134
5. MODELO NUMERICO UTILIZANDO DIFERENCIAS FINITAS. ..	135
5.1 Introducción. ....	136
5.2 Clasificación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. ....	136

	PAG.	
5.3	Proceso de discretización. Diferencias finitas. ....	140
5.4	Polinomio de Taylor generado por una función. ....	142
5.5	Aplicación del polinomio de Taylor en la evaluación de derivadas para intervalos iguales. ....	145
5.6	Esquemas de solución de las ecuaciones de flujo. ....	153
5.7	Conceptos relacionados con el modelo numérico. ....	170
5.8	Sistema de cuadrícula de la malla. ....	174
	Referencias. ....	176
6.	SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS. ..	177
6.1	Introducción. ....	178
6.2	Métodos directos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. ....	180
6.3	Métodos iterativos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. ....	200
6.4	Algoritmo de Thomas para la solución de un sistema de ecuaciones tridiagonales. ....	214
	Referencias. ....	220
7.	MODELOS MATEMATICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS. .	221
7.1	Introducción. ....	222
7.2	La ecuación de Darcy. ....	222
7.3	Ecuación para fluidos incompresibles en una sola fase. ....	230
7.4	Ecuación para fluidos ligeramente compresibles en una sola fase. ....	231

	PAG.
7.5 Ecuación para fluidos compresibles en una sola fase. ....	233
7.6 Ecuaciones de flujo para dos fases. ....	234
7.7 Ecuaciones de flujo para tres fases. ....	237
Referencias. ....	242
8. ASPECTOS PRACTICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS. .	243
8.1 Introducción. ....	244
8.2 Fuentes de error en los resultados obtenidos - de un simulador. ....	245
8.3 Error por el método de balance de materia. ..	248
8.4 Medida y número de las celdas. ....	250
8.5 Orientación de la malla. ....	252
8.6 Consideraciones de cálculo. ....	254
8.7 Uso de las pseudofunciones. ....	258
8.8 Abuso en la aplicación de los simuladores. ..	260
8.9 Aplicación de los conceptos fundamentales de - simulación. (Problemas). ....	261
Referencias. ....	292
9. "BOAST". SIMULADOR DE ACEITE NEGRO MULTIFASICO, - TRIDIMENSIONAL. ....	293
9.1 Introducción. ....	294
9.2 Aspectos Generales. ....	295
9.3 Estructura del programa. ....	297
9.4 Subrutinas que maneja el programa. ....	299
9.5 Forma de introducir los datos al simulador. .	304

	PAG.
9.6 Información que proporciona el programa. ...	309
9.7 Ejemplo de aplicación. ....	311
Referencias. ....	332
10. CONCLUSIONES. ....	333
APENDICE A. CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE EL MANEJO DE - MATRICES. ....	339
APENDICE B. UNIDADES. ....	349
NOMENCLATURA. ....	358

## P R O L O G O

La simulación numérica de yacimientos es una disciplina relativamente moderna en la ingeniería de yacimientos petroleros. Su potencial es enorme como herramienta de trabajo, para predecir el comportamiento de yacimientos bajo diferentes esquemas de explotación, siempre y cuando se entiendan las bases sobre las que está desarrollada. Este trabajo tiene como objetivo presentar los fundamentos de la simulación de yacimientos petroleros, como un primer curso sobre el tema. No se pretende abarcar todo lo que se conoce sobre simulación, sino más bien dar los conceptos fundamentales para que se puedan entender cursos más avanzados, así como iniciar a las personas interesadas en yacimientos, en lo que es probablemente una de las áreas de estudio más nuevas en la ingeniería petrolera.

En este trabajo, se presenta primordialmente el problema del flujo de fluidos en un yacimiento cuando se trata de una sola fase. Sin embargo, se dan las bases para estudiar el caso de flujo multifásico, tanto en dos como en tres fases. Se puso especial énfasis en la información que requiere un modelo para ser utilizado, ya que éste es probablemente uno de los aspectos fundamentales de simulación. En ocasiones son necesarios datos que no se tienen disponibles, lo que hace que un estudio de simulación de

yacimientos sea criticado por dar resultados basados en información supuesta, ya sea de correlaciones empíricas o de datos tomados de otros campos.

Se incluyó un capítulo dedicado a estudiar la forma en que pueden ser clasificados los simuladores, dependiendo de sus características. Esto es importante, ya que un simulador puede ser caracterizado de muy diferentes maneras, lo cual permite seleccionar el modelo necesario para resolver un problema específico.

Se dedica un espacio importante en estas notas a los principios básicos y ecuaciones fundamentales de la simulación, así como al manejo de unidades y a conceptos fundamentales de matrices, muy necesarios para poder resolver los sistemas de ecuaciones que se van a generar.

Con relación a los modelos matemáticos que se van a resolver numéricamente, se dan las bases del método de diferencias finitas, el cual se trata extensamente en un capítulo. También se presentan algunos de los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. En este tema, no se pretendió cubrir todo lo que existe relacionado con métodos de solución, ya que éso sería por sí solo, material para escribir un libro completo. Sin embargo, se presentan los métodos más sencillos, así como algunos de los más utilizados.

Se presenta un capítulo en unidades prácticas, con los modelos matemáticos que se tendrían cuando se considera una, dos y tres fases. El objetivo de este capítulo no es presentar la solución a cada uno de ellos, sino mostrar el tipo de modelo que se manejaría en cada caso.

Algo a lo que se le dedicó espacio en este trabajo, fué la presentación de un capítulo de aspectos prácticos de la simulación de yacimientos. En él se discuten algunas dificultades, con las que se enfrenta el usuario de un simulador, identificando las fuentes potenciales de error, así como algunos aspectos que son importantes de considerar al utilizar un modelo. En este mismo capítulo, se incluyen once problemas resueltos, para ser utilizados como material autodidáctico por aquellos estudiantes y profesionistas que se estén iniciando en el tema. El grado de dificultad de estos problemas es variable, desde los muy sencillos hasta algunos que requieren de más tiempo para ser resueltos.

El último capítulo de estos apuntes ha sido dedicado a la presentación del simulador conocido como BOAST, el cual es un modelo trifásico tridimensional, que está disponible para ser usado por estudiantes en el Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (CECAFI). Este simulador es un programa que fué desarrollado para el Departamento de Energía de los Estados Unidos por Frenchi y Bujnowski en 1982 y se ha dado a conocer al público a través de una publicación especializada. El objeto de incluir es-

te capítulo y un ejemplo corrido en este simulador, es familiarizar a los estudiantes con un modelo del tipo de los que más se utilizan actualmente.

Finalmente, se incluye un capítulo de conclusiones y comentarios generales acerca de la simulación de yacimientos petroleros, mencionando sus ventajas y desventajas.

Es importante señalar para terminar este prólogo, que este trabajo está inspirado en los apuntes "Simulación Numérica de Yacimientos", escritos en 1982 por los ingenieros José R. Serrano Lozano y Luis A. Ayala Gómez. Sin embargo, esta nueva versión difiere sustancialmente de la antes mencionada, por lo que de hecho se pueden considerar como otros apuntes, dándole el crédito que le corresponda a los ingenieros Serrano y Ayala, por las partes de este trabajo que fueron tomadas de sus apuntes.

Por último, conviene mencionar que gran parte del material presentado ha sido estudiado en la materia "Simulación Matemática de Yacimientos", que se ofrece regularmente en el plan de estudios de la carrera de Ingeniero Petrolero en la Facultad de Ingeniería, la cual ha sido impartida por el Dr. Guillermo C. Domínguez Vargas en los últimos dos años.

# LISTA DE FIGURAS

FIG.		PAG.
1.1	Etapas para desarrollar un modelo.	25
1.2	Como trabaja un modelo.	28
2.1	Obtención de los gastos de producción de gas y de agua con una información incompleta.	38
2.2	Acoplamiento del flujo de fluidos en el yacimiento con el flujo de fluidos en la tubería vertical en un solo simulador.	40
2.3	Propiedades PVT de los fluidos.	46
2.4	Datos de factores de volumen del aceite en forma de tabla.	48
2.5	Presión capilar v.s. saturación de agua.	48
3.1	Selección de un simulador.	53
3.2	Modelo de cero dimensiones.	66
3.3	Balance de materia.	66
3.4	Balance de materia para dos bloques.	68
3.5	Modelos de una dimensión.	70
3.6	Modelos de dos dimensiones.	72
3.7	Modelos de tres dimensiones.	76
4.1	Relación entre la presión y el volumen obtenida - en el laboratorio.	86
4.2	Isopotenciales y líneas de flujo.	88
4.3	Columna de líquido.	92
4.4	Relación entre la presión y la profundidad para - los fluidos de un yacimiento.	92
		10

FIG.		PAG.
4.5	Experimento de Darcy.	97
4.6	Dirección de flujo en la ecuación de Darcy.	100
4.7	Deducción de la ecuación de continuidad a partir de un balance de masa.	105
4.8	Tipos de fluidos en función de su compresibilidad.	111
4.9	Sistema.	128
4.10	Condiciones de frontera.	128
4.11	Partícula en movimiento a través del medio poroso.	131
4.12	Sistema radial.	131
4.13	Perfil de presiones en flujo radial.	131
5.1	Discretización en espacio.	141
5.2	Discretización en tiempo.	141
5.3	Distribución de la temperatura en una barra.	154
5.4	Esquema explícito en una dimensión.	154
5.5	Arreglo de las celdas en una malla de dos dimensiones.	157
5.6	Esquema implícito en una dimensión.	159
5.7	Esquema de Crank-Nicholson en una dimensión.	166
5.8	Error lineal y exponencial.	173
5.9	Soluciones estable e inestable.	173
6.1	Método directo.	181
6.2	Método iterativo.	201
6.3	Convergencia de un método iterativo.	201

FIG.		PAG.
8.1	Orientación de la malla.	253
8.2	Esquema en diferencias con nueve y con cinco puntos.	255
9.1	Procedimiento de cálculo de BOAST.	300

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION.

## 1.1 Antecedentes.

La simulación, como tal, no es nueva. Siendo el objetivo principal de la ingeniería de yacimientos el optimizar la recuperación de los hidrocarburos y el ingeniero de yacimientos el encargado de lograr que ese objetivo se cumpla; éste siempre ha buscado la manera de tratar de reproducir lo que ocurre en los mismos. Para ello se ha valido de técnicas y ecuaciones que con el tiempo y gracias a los adelantos de la ciencia han ido evolucionando, pero que en esencia, son las técnicas y ecuaciones que se siguen utilizando en nuestros días.

Así entonces, antes para calcular por ejemplo la recuperación, se utilizaban métodos de balance de materia<sup>1,2\*</sup> como los de Tarner, Muskat o Tracy, en los cuales se considera al yacimiento como un tanque con propiedades promedio, tanto de presión como de propiedades petrofísicas y PVT de los fluidos. Sin embargo esta suposición de homogeneidad a lo largo de todo el yacimiento, aunque se ha demostrado que puede ser válida, no existe, por lo cual se pensó en dividir al yacimiento en una serie de bloques o celdas, asignándole a cada una de ellas propiedades promedio y aplicar la ecuación de balance de materia para cada bloque, acoplada a la ecuación de Darcy que es una ecuación de

---

\* Referencias al final de cada capítulo.

flujo que permite determinar la interacción entre los bloques. A esto, o sea el dividir al yacimiento en una serie de bloques para su estudio es a lo que se le conoce en forma general como simulación y los aspectos nuevos que presenta es que, como puede fácilmente suponerse, se requiere de una gran cantidad de cálculos (hay que utilizar balance de materia para cada bloque) por lo que se hace indispensable el auxilio de una computadora para llevarlos a cabo.

Lógicamente el primer problema que surge es el obtener la información necesaria para cada bloque, sin embargo suponiendo que se pueda conseguir dicha información, sin lugar a dudas ésta es la mejor manera de llevar a cabo el estudio de un yacimiento cuando éste no es homogéneo. Con ello no se quiere decir que esto sea lo mejor o deba de aplicarse indistintamente a cualquier problema, pues la experiencia ha demostrado que el método de balance de materia simplificado, bien aplicado, en determinados casos puede proporcionar mejores resultados.

Pero la tendencia sigue, nuevos descubrimientos e innovaciones se realizan día con día y es necesario que todo aquél que piense dedicarse al área de yacimientos tenga un cierto conocimiento acerca de lo que es la simulación. El objetivo de este trabajo es precisamente ése, proporcionar a quien lo lea un conocimiento básico sobre la simulación y despertar interés hacia este cada vez más amplio campo de la ingeniería de yacimientos.

## 1.2 Breve historia de la simulación<sup>3</sup>.

Prácticamente la simulación de yacimientos se ha venido empleando desde los inicios de la ingeniería petrolera, ésto es, allá por los años 1930's. Antes de 1960 los cálculos utilizados para predecir el comportamiento del yacimiento (pronosticar la recuperación o comparar alternativas económicas entre diversos métodos de recuperación), consistían en gran parte, de métodos analíticos como eran, el método de balance de materia o simulador de cero dimensiones y el método de Buckley-Leverett o modelo de una dimensión.

El término "simulación" se hace común a principios de los años 1960's, refiriéndose con él a métodos de predicción desarrollados en programas de computadoras relativamente sofisticados. Dichos programas representaban un mayor adelanto debido a que permitían la solución de un conjunto de ecuaciones expresadas en diferencias finitas que describían flujo multifásico a través de un medio poroso heterogéneo en dos y tres dimensiones. Este adelanto se hizo posible gracias a la evolución tan rápida que tuvieron las computadoras y el desarrollo de métodos numéricos capaces de resolver grandes sistemas de ecuaciones en diferencias finitas.

Durante los años 1960's, los esfuerzos de la simulación fueron dedicados en gran medida a los problemas en dos fases (gas y agua) y, en tres, así como a modelos de aceite negro. La simulación de métodos de recuperación se limitaba esencialmente a

los problemas de agotamiento natural y de mantenimiento de presión. Con ésto era posible el desarrollo de un modelo de simulación único, capaz de dirigirse a la mayoría de los problemas de yacimientos que se tenían. Este concepto de un modelo general siempre ha sido atractivo debido a que significa reducción en el costo de su preparación y de su uso y, potencialmente, en el costo del desarrollo del modelo y de su mantenimiento.

Sin embargo, durante los años 1970's el panorama cambió en forma radical. El aspecto económico motivó a que se buscara la manera de obtener una recuperación mayor, llevándose a efecto proyectos de pruebas en el campo, también llamadas pruebas piloto, encaminadas al estudio de procesos de recuperación mejorada. Esto condujo a la simulación de nuevos procesos que iban más allá del depresionamiento convencional y del mantenimiento de presión, tales como la inyección de miscibles, la inyección de vapor, la inyección de productos químicos y la combustión *in-situ*. Con ésto, al relativamente cómodo manejo de dos componentes hidrocarburos (gas y aceite) en simple flujo entre no miscibles había que agregarle entonces la influencia de la temperatura, agentes químicos y los efectos del complejo comportamiento del equilibrio entre fases.

La proliferación que tuvieron estos métodos de recuperación en los 1970's motivó la orientación del concepto de modelo único o general hacia modelos individuales desarrollados para representar cada una de estas nuevas técnicas.

Las investigaciones realizadas durante este tiempo, dieron como resultado un avance significativo en la formulación de modelos de simulación y de métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones. Estos avances permitieron simular procesos de recuperación de lo más complejo y/o reducir el costo de tiempo de computadora.

En la actualidad el enfoque de la simulación es el de afinar los avances que se han obtenido y volver a tender hacia un simulador general aplicable a todos o a la mayoría de los procesos de recuperación que interesen. El éxito de ello depende en gran parte, de la obtención de ecuaciones de estado que representen el comportamiento PVT de los componentes de un sistema de fluidos en tres fases bajo un rango de presiones y temperaturas bastante amplio.

### 1.3 Aspectos Generales.

#### 1.3.1. Definición y objetivo.

La simulación de yacimientos es un proceso mediante el cual el ingeniero con la ayuda de un modelo matemático, integra un conjunto de factores para describir con cierta precisión el comportamiento de procesos físicos que ocurren en un yacimiento.

Básicamente un modelo matemático de simulación de yacimientos consiste en un número determinado de ecuaciones que ex-

presan el principio de conservación de masa y/o energía, acopladas con ecuaciones representativas de flujo de fluidos, temperatura y/o la concentración de estos fluidos a través de medios porosos. Dichas ecuaciones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales "no lineales" y su solución es posible únicamente en forma numérica y de manera discreta, es decir, en un número de puntos preseleccionados en tiempo y en espacio y no de una manera continua. Esta no linealidad de las ecuaciones obedece a lo siguiente:

- a) La heterogeneidad en el yacimiento.
- b) Que la relación que tiene la saturación con la permeabilidad relativa y con la presión capilar es de tipo no lineal.
- c) Que las propiedades PVT de los fluidos como función de la presión, composición y temperatura no son lineales.

Los modelos matemáticos requieren el uso de un programa de cómputo debido a la cantidad de cálculos tan grande que se realizan al efectuar una simulación.

El objetivo primordial al hacer uso de la simulación es predecir el comportamiento de un determinado yacimiento y con base en los resultados obtenidos, optimizar ciertas condiciones para aumentar la recuperación. Para ello se requiere de la experiencia y buen juicio del ingeniero para deci-

dir cuándo es preciso utilizar un modelo y qué tipo de modelo es el más conveniente en cada caso, así como evaluar de una manera apropiada tanto los datos que se van a utilizar en la simulación como los resultados que se obtengan de ella. La selección del modelo a utilizar, además del aspecto económico, está en función de lo que se desea simular y de la información con que se cuenta para realizar la simulación, pero una regla general es utilizar el modelo más simple capaz de resolver el problema planteado<sup>8</sup>.

### 1.3.2. Utilidad de la simulación.

Cuando un modelo matemático de simulación ha sido probado y calibrado adecuadamente, representa la herramienta más poderosa con que cuenta un ingeniero. Mientras que físicamente el yacimiento puede producirse una sola vez y lo más probable es que no sea en la forma más adecuada, dado que un error cometido en el proceso afectará cualquier cambio subsiguiente, el modelo permite "producir" un yacimiento varias veces y en muy diferentes maneras, con lo cual se pueden analizar varias alternativas y seleccionar una de ellas.

El observar el comportamiento del modelo bajo diferentes condiciones de operación, ayuda a seleccionar un conjunto de condiciones de producción óptimas para el yacimiento. Más específicamente, con ayuda de la simulación, se puede hacer lo siguiente:

- a) Conocer el volumen original de aceite.
- b) Tener una buena idea del movimiento de los fluidos dentro del yacimiento.
- c) Determinar el comportamiento de un campo de aceite bajo diversos mecanismos de desplazamiento, como pueden ser: la inyección de agua, la inyección de gas, el depresionamiento natural o el uso de algún método de recuperación mejorada.
- d) Determinar la conveniencia de inyectar agua a un yacimiento de aceite por los flancos en lugar de utilizar un patrón determinado de pozos inyectores o viceversa.
- e) Optimizar los sistemas de recolección.
- f) Determinar los efectos de la localización de los pozos y su espaciamiento. De esta manera desarrollar un campo con base en una información limitada, pudiéndose determinar dónde perforar nuevos pozos.
- g) Estimar los efectos que tiene el gasto de producción sobre la recuperación.
- h) Calcular la cantidad de gas que se obtiene de un número determinado de pozos localizados en puntos específicos.
- i) Definir valores de parámetros en el yacimiento, para llevar a cabo estudios económicos.
- j) Obtener la sensibilidad de los resultados a variaciones en las propiedades petrofísicas del yacimiento o las propiedades PVT de sus fluidos cuando no son bien conocidas.

- k) Realizar estudios individuales de pozos.
- l) Conocer la cantidad de gas almacenado.
- m) Hacer un programa de producción.

### 1.3.3. Ajuste del simulador con la historia del yacimiento.

Si la información con que se cuenta para llevar a cabo una simulación es amplia y de calidad, el objetivo de la simulación tenderá a satisfacerse y la predicción del comportamiento será mejor. Si por el contrario, la información es incompleta o no muy confiable, los simuladores solo podrán utilizarse para comparar semicuantitativamente los resultados al explotar el yacimiento de diferentes maneras. De cualquier forma, la aproximación que proporciona el simulador puede mejorarse mediante el ajuste de éste a medida que se vaya teniendo mayor información del yacimiento.

Lo primero que se hace para ajustar el simulador con la historia del yacimiento, es calcular el comportamiento de éste usando la mejor información disponible. De esta manera los resultados obtenidos de la simulación se comparan con aquéllos obtenidos del campo, ésto es con los valores reales. Si los resultados al compararlos no coinciden en una manera satisfactoria, se hacen modificaciones en los datos utilizados y se efectúan otras corridas del simulador hasta que se alcanza la aproximación deseada en los resultados. Cuando ésto ocurre, el modelo ya puede ser utilizado para

predecir con cierto grado de precisión, el comportamiento - del yacimiento. Es importante hacer notar que dicho comportamiento está influenciado por muchos factores, como lo son: las permeabilidades, la distribución de saturaciones, los espesores de las capas, las porosidades, las permeabilidades relativas, etc., que nunca se conocen con exactitud a lo largo de todo el yacimiento. De esta manera, a lo que en realidad llega el ingeniero es a una combinación de estas variables (que da como resultado un ajuste), la cual no es única, por lo que dicha combinación no puede representar de una manera precisa las condiciones del yacimiento. Por ésto se debe tener en cuenta que al utilizar un simulador, después de haberlo ajustado a la historia del yacimiento, no se puede asegurar que la predicción que proporcione será exactamente el comportamiento real que se tenga en dicho yacimiento. Sin embargo, a medida de que el período que se ha ajustado sea mayor, la predicción que se haga será más - confiable, lo que implica que el ingeniero deba estar continuamente comparando la predicción hecha por el simulador - con el comportamiento presente y actualizar de ser necesario, las combinaciones de datos que maneja el modelo <sup>10</sup>.

#### 1.3.4. Resultados de una simulación.

Los resultados típicos que se obtienen de una simulación - consisten, en la distribución de presiones y de saturaciones en cada una de las celdas en que ha sido dividido el -

yacimiento, así como los volúmenes producidos y las relaciones agua-aceite y gas-aceite para los pozos productores. Si hay inyección de fluidos se obtiene, o el ritmo de inyección de los pozos o las presiones necesarias para inyectar los volúmenes establecidos.

#### 1.4 Etapas para desarrollar un modelo<sup>5</sup>.

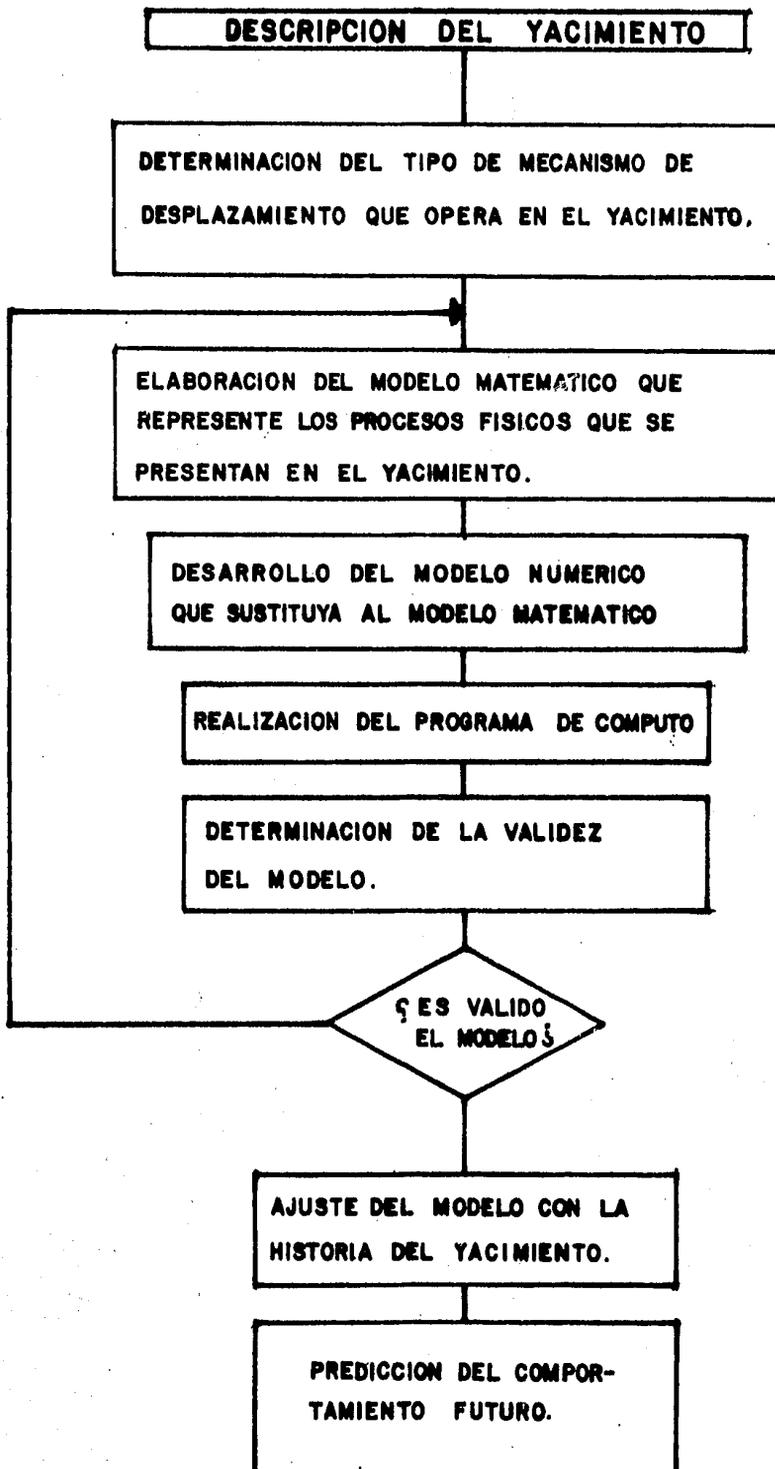
El desarrollar un modelo es un proceso iterativo que consiste de las siguientes etapas:

- 1) Descripción del yacimiento.
- 2) Determinar el tipo de mecanismo de desplazamiento.
- 3) Escribir el modelo matemático.
- 4) Desarrollar el modelo numérico.
- 5) Desarrollar el programa de cómputo.
- 6) Determinar la validez del modelo.
- 7) Ajustar el modelo con la historia del yacimiento.
- 8) Predecir el comportamiento futuro.

El proceso iterativo mencionado se puede observar en la Fig. (1.1), ya que al ir avanzando en las diferentes etapas, es necesario regresar a modificar algo de las anteriores, como pueden ser las suposiciones en las que se basó el modelo.

Las razones de considerar varias suposiciones al desarrollar un modelo, son las siguientes:

- a) No obstante de haberse hecho todo lo posible por caracteri-



**FIG. I.1 ETAPAS PARA DESARROLLAR UN MODELO.**

zar al yacimiento de la mejor manera, nunca podrá hacerse -  
ésto sino solo en una forma aproximada.

- b) Hacer el problema manejable.
- c) Reducir el costo de la simulación.

Obviamente la necesidad de utilizar suposiciones se hace cada -  
vez menor, debido a los adelantos e innovaciones que la ciencia  
va proporcionando día con día.

### 1.5 Como trabaja un modelo<sup>6</sup>.

El procedimiento de cálculo en forma simplificada que utiliza -  
un modelo, está dado por los siguientes pasos:

- a) Se empieza con las celdas en las que se conoce su presión y saturación inicial.
- b) Se selecciona un incremento de tiempo al cual el modelo va a hacer los cálculos (los incrementos de tiempo iniciales - son generalmente, períodos de tiempo corto alrededor de uno o varios días, pero en los intervalos sucesivos los incrementos de tiempo pueden ir aumentando hasta llegar a cubrir algunos meses).
- c) Calcular o asignar el volumen producido o inyectado, si es el caso, en cada pozo para el intervalo de tiempo seleccionado.
- d) Calcular el flujo que hay entre las celdas durante el intervalo de tiempo utilizado y los nuevos valores de saturación para cada celda.

e) Seleccionar un nuevo intervalo de tiempo y repetir el proceso hasta que el modelo haya hecho los cálculos para el tiempo total deseado.

De esta manera el simulador calculará la distribución de presiones y de saturaciones a lo largo del yacimiento en función del tiempo. En la Fig. (1.2) se puede observar un diagrama de flujo que da idea de como trabaja un modelo. En los capítulos siguientes se estudiará con más detalle cada una de las etapas de cálculo, de manera que se vaya familiarizando al estudiante con lo que realmente es la simulación de yacimientos, para que tenga la capacidad de escribir modelos sencillos y pueda resolver problemas en una y dos fases, así como en una y dos dimensiones.

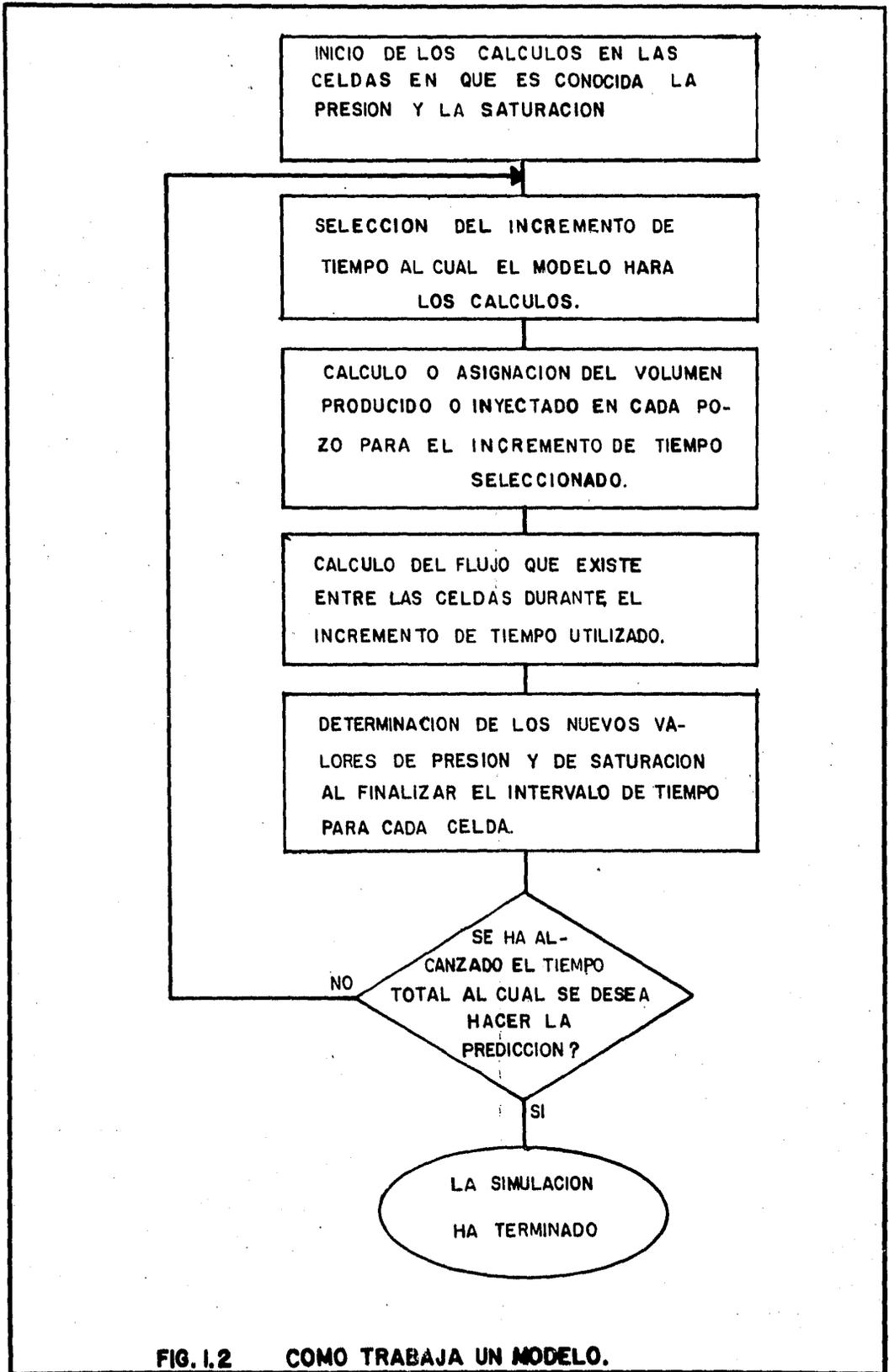


FIG. 1.2 COMO TRABAJA UN MODELO.

## REFERENCIAS

- 1.- Craft, B. C. and Hawkins, M. F., Jr.: "Applied Petroleum - Reservoir Engineering", Prentice - Hall Inc., Englewood - Cliffs, N. J. (1959).
- 2.- Garaicochea, F. P.: "Comportamiento Primario de Yacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM.
- 3.- Coats, K. H.: "Reservoir Simulation: State of the Art", J. P. T., August 1969, p 1633.
- 4.- Odeh, A. S.: "Reservoir Simulation ... What is it?" J. P. T. November 1969, p 108.
- 5.- Aziz, K.: "Computer Modelling of EOR Processes", Proceedings of the 3er. European Symposium on EOR, at Bournemouth U. K. Sept. 21-23, 1981.
- 6.- Staggs, H. M. and Herbeck, E. F.: "Reservoir Simulation Models - An Engineering Overview" J. P. T., December 1971, p 1429.
- 7.- Aziz, K. and Settari A.: "Petroleum Reservoir Simulation", Applied Science Publishers LTD London, 1979.
- 8.- Coats, K. H.: "Use and Misuse of Reservoir Simulation Models", J. P. T. November 1969, p 183.
- 9.- Domínguez, G. V.: "Notas del Curso Simulación Matemática de

yacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM.

- 10.- Crichlow, B. H.: "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach", Prentice - Hall, Inc., p 148.

## CAPITULO 2

INFORMACION REQUERIDA PARA UTILIZAR UN SIMULADOR.

## 2.1 Introducción.

Como en todo trabajo de ingeniería de yacimientos, para que tenga éxito, se debe contar con una buena información que represente las condiciones que prevalecen en el yacimiento. Así pues la simulación sin ser la excepción, requiere de una amplia descripción física del mismo y de los tipos de mecanismos por medio de los cuales va a producir. Los resultados que se obtengan de la simulación serán tan buenos como los datos que se hayan empleado para realizarla y, el tiempo que se pueda perder en preparar esta información es un tiempo bien empleado<sup>1</sup>.

Hay que hacer notar que la información que debe tratarse de obtener con mayor precisión es aquélla que al variarla, al realizar diferentes corridas de simulación, provoque un cambio significativo en los resultados obtenidos. Así por ejemplo, si se sabe que una propiedad determinada varía en un rango específico y al efectuar dos o tres corridas de simulación se varía dicha propiedad dentro de este rango y se obtienen resultados parecidos, se puede tomar como buena una de las predicciones, o bien, relegar a segundo término esfuerzos adicionales para medir con precisión dicha propiedad. Si por el contrario, variando esa propiedad se alteran los resultados considerablemente, es necesario redoblar esfuerzos para obtener con mayor aproximación

dicha propiedad.

La información que se requiere para efectuar una simulación es:

- a) Descripción física del yacimiento.
- b) Mecanismo o mecanismos de desplazamiento que operan en el yacimiento.
- c) Propiedades petrofísicas de las capas de interés.
- d) Propiedades PVT de los fluidos.
- e) Otros datos.

## 2.2 Descripción física del yacimiento.

Para obtener una descripción física del yacimiento es necesario llevar a cabo un estudio geológico de detalle que proporcione un conocimiento estratigráfico, estructural y petrográfico, que permita de esta manera caracterizar al yacimiento perfectamente. Dicho estudio geológico se complementa con métodos geofísicos. La información de este tipo que interesa a la simulación es:

- a) Límites del yacimiento.
- b) Características de la formación productora.
- c) Características del acuífero.
- d) Fallas.
- e) Discontinuidad en las capas.

### 2.3 Mecanismos de desplazamiento.

Los cuatro mecanismos básicos que operan para recuperar los hidrocarburos del yacimiento son<sup>2</sup>:

- a) Expansión del sistema roca-fluidos.
- b) Desplazamiento.
- c) Segregación gravitacional.
- d) Imbibición.

La expansión del sistema roca-fluidos se provoca al haber un abatimiento de presión, dando como resultado el movimiento de los fluidos a través del medio poroso del punto de mayor presión al punto de menor presión.

El desplazamiento se da con gas o con agua. Con gas puede ser empuje de gas disuelto liberado o empuje de algún casquete de gas, ya sea natural o inyectado. Con agua puede ser agua de inyección o bien entrada natural por la presencia de algún acuífero considerable.

La segregación gravitacional se presenta en yacimientos de espesor considerable (o en capas de echado muy pronunciado) que tenga valores de permeabilidad altos en el sentido vertical y consiste en el acomodo que tienen los fluidos de acuerdo con sus densidades.

La imbibición capilar se da generalmente en el sentido normal (perpendicular) al flujo y puede ser muy importante al inyectar

agua en forma lateral en capas heterogéneas con variaciones con siderables en las permeabilidades verticales.

#### 2.4 Propiedades petrofísicas.

Las propiedades petrofísicas se determinan en el laboratorio con la ayuda de pequeños núcleos obtenidos del yacimiento y que se procura sean representativos. Para asegurar una mayor precisión en estos datos se puede obtener información complementaria de estas propiedades. Dicha información la proporcionan los registros eléctricos y los análisis de pruebas de presión. Además, existen correlaciones publicadas para la obtención de estas propiedades y que pueden ser de utilidad en determinado momento.

Los datos petrofísicos que se necesitan para efectuar una simulación son:

- a) Porosidades ( $\phi$ ).
- b) Permeabilidades (K).
- c) Saturaciones de agua, aceite y gas ( $S_w$ ,  $S_o$ ,  $S_g$ ).
- d) Presión capilar entre diferentes interfases ( $P_{c_{\omega-o}}$ ,  $P_{c_{o-g}}$ ,  $P_{c_{g-\omega}}$ ).
- e) Permeabilidades relativas al agua, al aceite y al gas ( $K_{r_{\omega}}$ ,  $K_{r_o}$ ,  $K_{r_g}$ ).
- f) Compresibilidad de la formación.

## 2.5 Propiedades PVT de los fluidos.

Las propiedades de los fluidos son obtenidas también en el laboratorio por medio de muestras sacadas de los pozos. Para que los valores que se obtengan sean aceptables (lo mismo ocurre con las propiedades petrofísicas), se requiere que las mediciones se hagan lo más cuidadosamente posible y tratando de acercarse al máximo las condiciones del laboratorio a las condiciones existentes en el yacimiento. Estas propiedades de los fluidos que se requieren en un trabajo de simulación son:

- a) Factores de volumen del agua, del aceite y del gas ( $B_w$ ,  $B_o$  y  $B_g$ ).
- b) Relación de solubilidad en el aceite ( $R_s$ ).
- c) Relación de solubilidad en el agua ( $R_{sw}$ ).
- d) Viscosidades del agua, del aceite y del gas ( $\mu_w$ ,  $\mu_o$  y  $\mu_g$ ).
- e) Compresibilidades del agua, del aceite y del gas ( $C_w$ ,  $C_o$  y  $C_g$ ).
- f) Comportamiento de fases.
- g) Presión de saturación.

## 2.6 Otros Datos.

Además de la información fundamental que se menciona con anterioridad, existen otros datos con los que es importante contar cuando se realiza una simulación. Dicha información corresponde casi en su totalidad como se verá a continuación, a características de los pozos.

### 2.6.1. Datos de producción y de relación de flujo.

Cuando se trata de hacer un ajuste del modelo con la historia del yacimiento, se requieren conocer los ritmos de producción y la declinación de la presión. Estos datos de producción que se necesitan para cada pozo, se pueden desglosar en los siguientes puntos:

- a) Gasto de aceite v.s. tiempo.
- b) Gasto de gas v.s. tiempo.
- c) Gasto de agua v.s. tiempo.
- d) Cualquier presión medida v.s. tiempo.

Además es preciso contar con los índices de productividad y si es el caso, con los índices de inyectividad de los pozos que integran el yacimiento.

En la práctica generalmente se cuenta con un registro completo del gasto de producción de aceite de cada pozo, pero no pasa lo mismo con los gastos de producción de gas y de agua, cuya información la mayoría de las veces, es limitada. Por ello se necesita que con los datos disponibles se elabore una gráfica como la que se presenta en la Fig. (2.1) que permita interpolando, obtener una información más completa.

### 2.6.2. Estado mecánico de los pozos.

Al parecer por lo visto hasta el momento, para llevar a ca-

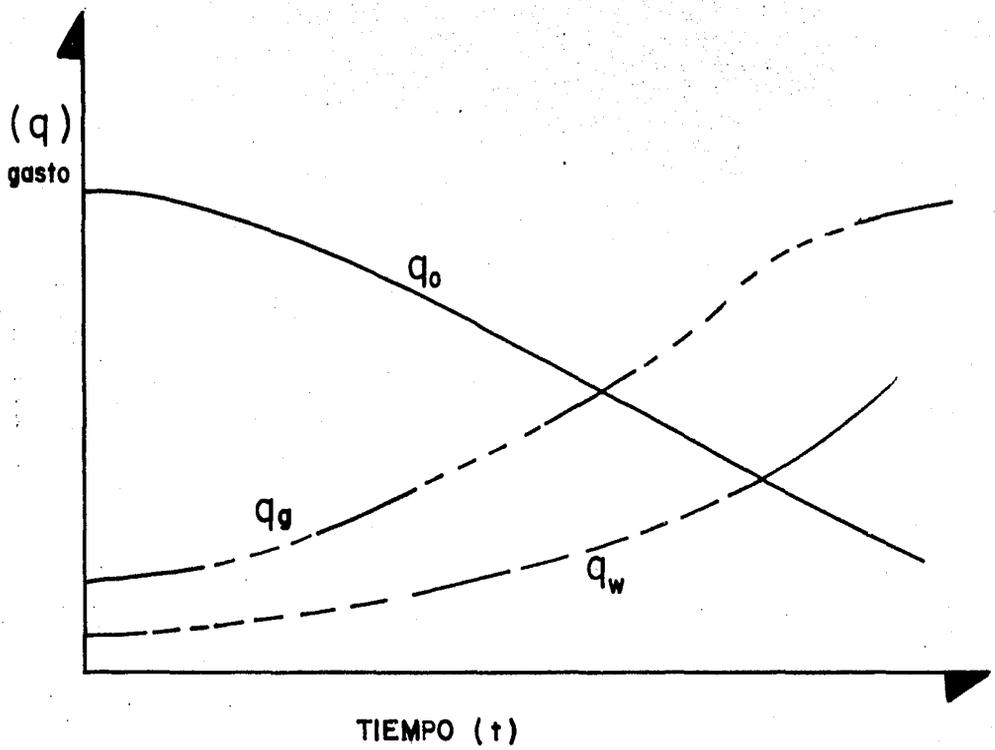


FIG. 2.1 OBTENCION DE LOS GASTOS DE PRODUCCION DE GAS Y DE AGUA CON UNA INFORMACION INCOMPLETA.

bo una simulación, cualquier información sobre el estado mecánico de los pozos que integran el yacimiento carecería de interés, pues aunque los pozos forman parte integral del sistema, la influencia que puedan tener en él parece haber sido considerada ya en los datos de producción. Además, si la simulación es un estudio a nivel de yacimiento ¿para qué sirve entonces la información sobre el estado mecánico de los pozos?

Un avance muy significativo en simulación es acoplar el comportamiento que tienen los fluidos dentro del yacimiento al que presentan a lo largo de las tuberías de producción en su camino hacia la superficie. Para ello se requiere contar con un método de flujo multifásico que entre como subrutina en el simulador. Lógico es suponer que un trabajo de esta naturaleza requiere de las características mecánicas de los pozos.

Existen una gran cantidad de correlaciones que tratan sobre el comportamiento de los fluidos en las tuberías de producción<sup>7</sup>. El uso de dichas correlaciones, al igual que los estudios de simulación, está sujeto a ciertas consideraciones importantes.

El estado mecánico de los pozos lo comprende la información siguiente:

- a) Profundidad máxima del pozo, indicando si es vertical,

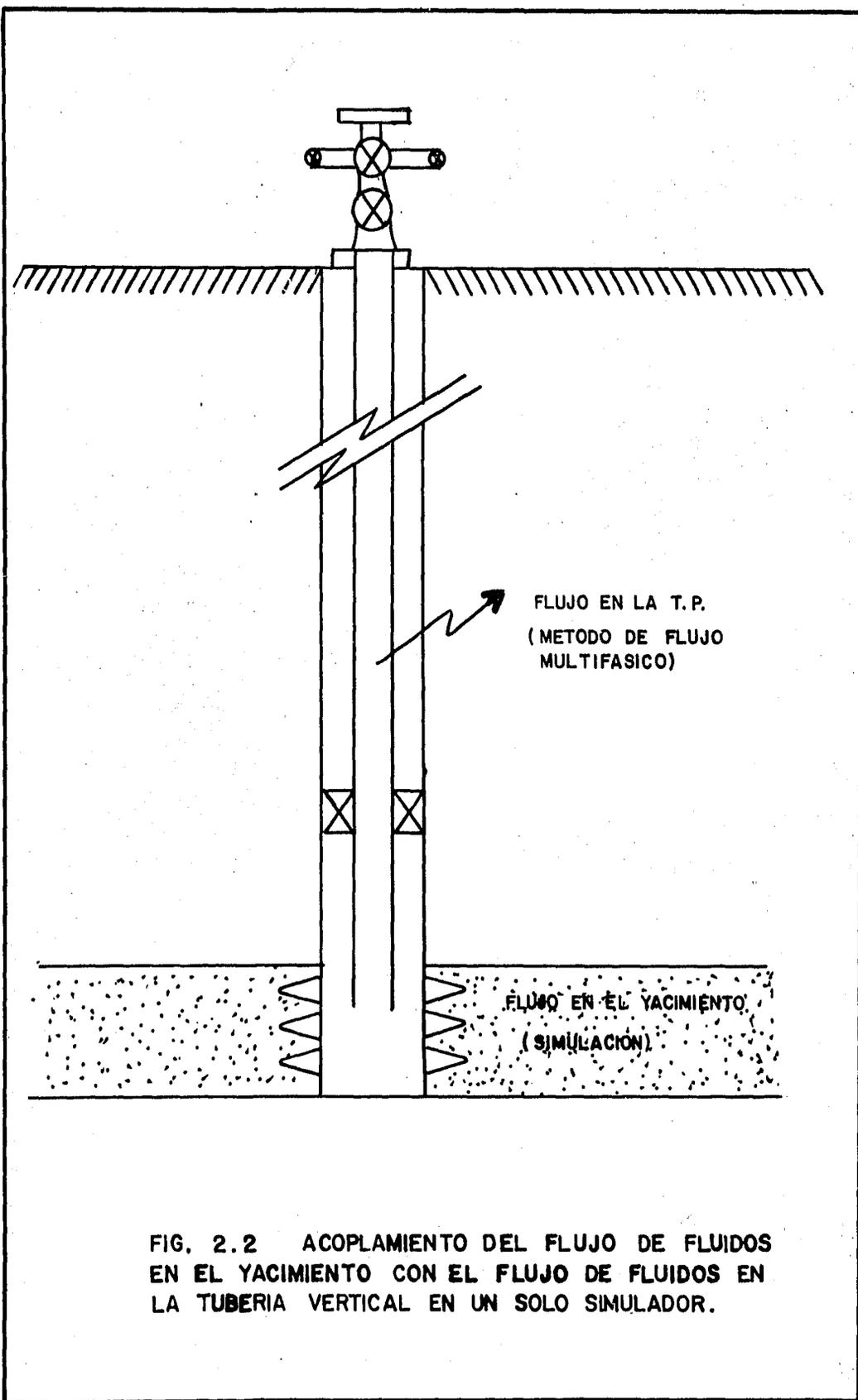


FIG. 2.2 ACOPLAMIENTO DEL FLUJO DE FLUIDOS EN EL YACIMIENTO CON EL FLUJO DE FLUIDOS EN LA TUBERIA VERTICAL EN UN SOLO SIMULADOR.

direccional o desviado.

- b) Diámetro interior del pozo.
- c) Características de las tuberías de revestimiento. Diámetro, profundidad, peso y grado.
- d) Características del aparejo de producción. Tipo de terminación. Diámetro, grado y peso de las tuberías de producción. Equipo para métodos artificiales de producción.

### 2.6.3. Aspecto Económico.

En todo trabajo de ingeniería debe ser considerado como un punto primordial el aspecto económico. En simulación de yacimientos la información de este tipo que se debe tomar en cuenta es la siguiente:

- a) Precio del barril de aceite.
- b) Costo del pozo.
- c) Límite económico.
- d) Máximas relaciones agua-aceite y gas-aceite con que se piensa trabajar.
- e) Mínima presión de fondo fluyendo.
- f) Precio del gas.
- g) Gastos de operación.

### 2.6.4. Mapas.

Al preparar la información que se necesita para realizar

una simulación, se elaboran los siguientes mapas:

- a) Mapa estructural.
- b) Mapa de isopacas.
- c) Mapa de isoporosidades.
- d) Mapa de isopermeabilidades.

Los mapas estructurales sirven para determinar a través de las curvas de nivel, las profundidades de los pozos, efectos geológicos del subsuelo como fallas, así como la vista de planta del yacimiento, límites del mismo, contactos agua-aceite, gas-aceite y/o gas-agua.

Al mapa de isopacas lo componen líneas que unen puntos en el yacimiento de igual espesor. Entre otras cosas sirve para cuantificar volumétricamente el volumen original de aceite y/o el volumen original de gas.

Se comentó al tratar sobre la información petrofísica requerida la importancia que tenía ésta y la forma de obtenerse. Así pues, las porosidades y las permeabilidades se conocen en localizaciones discretas del yacimiento y el simulador requiere un conocimiento de estas propiedades en todos y cada uno de los puntos del mismo. Con este fin se construyen los mapas de isoporosidades e isopermeabilidades.

En ocasiones se elaboran mapas en los cuales se encuentra la distribución de combinaciones o productos de propiedades

como por ejemplo:

- porosidad-espesor ( $\phi h$ ) y
- porosidad-saturación-espesor ( $\phi S_{oh}$ ).

## 2.7 Permeabilidades relativas.

Se ha comentado a lo largo de este capítulo la gran importancia que tiene el contar con una buena información, haciéndose ver que la clave para obtener buenos resultados son buenos datos. Pues bien, sin lugar a duda que la información crítica que se emplea dentro de toda la información que se requiere al efectuar una simulación, son las permeabilidades relativas, dado que una relación determinada de ellas define los resultados que entrega el modelo.

Si en el transcurso de un estudio de simulación el yacimiento cambia de un mecanismo de desplazamiento a otro, el ingeniero debe determinar si este cambio afectará el desplazamiento de los fluidos o la recuperación dentro de las celdas en que ha sido dividido el yacimiento y, de ser así, lo que es casi seguro si los datos de permeabilidades relativas deben ser modificados para reflejar dicho cambio.

Sin embargo, cambiar el juego de permeabilidades relativas dependiendo del mecanismo de desplazamiento que opera en el yacimiento por un tiempo determinado no es nada sencillo, si se considera que la información más difícil de obtener son precisamen

te estas curvas de permeabilidades relativas, por la dificultad que existe de llevar a cabo pruebas de desplazamiento en el laboratorio bajo las mismas condiciones en que se encuentra el sistema roca-fluidos en el yacimiento. Esto es cierto incluso para permeabilidades relativas en dos fases<sup>4</sup>.

Con lo anterior no se trata de decir que éste sea un problema particular de la simulación, sino que se trata de un problema que se presenta en todo trabajo que se realiza sobre ingeniería de yacimientos y por el cual es común tener errores considerables en los resultados obtenidos.

#### 2.7.1. Obtención de las permeabilidades relativas.

Las permeabilidades relativas pueden obtenerse por medio de las siguientes maneras:

- a) Pruebas de desplazamiento en el laboratorio.
- b) Cálculos por medio de datos de presión capilar.
- c) Ajuste con los datos del campo.
- d) Correlaciones.

Crichlow en su libro "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach" da una explicación de estos métodos de obtención de permeabilidades relativas para una y dos fases e incluso, proporciona la correlación de Stone que es un modelo que combina la teoría de flujo en el medio poroso con conceptos de probabilidad para obtener la permeabilidad re-

lativa para tres fluidos.

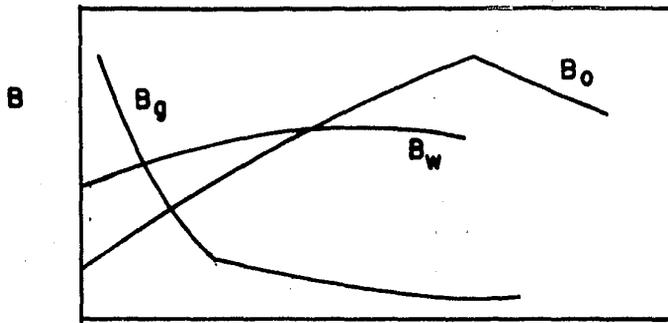
## 2.8 Introducción de los datos al simulador.

Una vez que se ha logrado reunir toda la información que se necesita para llevar a cabo una simulación, el problema que se presenta es la manera de introducir esos valores al modelo. Sin lugar a duda que la información que constituye la mayor parte de los datos que manejará el simulador corresponde a las propiedades PVT de los fluidos y a las propiedades petrofísicas de la roca, puesto que se requieren en todos y cada uno de los bloques en que se ha dividido el yacimiento. Por ello es necesario tratar de compactar esta información de tal manera que sea manejable.

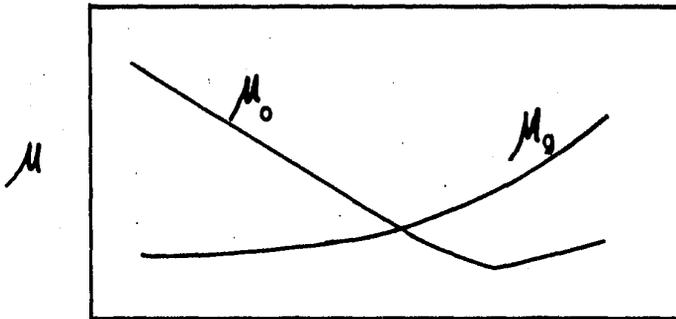
### 2.8.1. Representación Polinomial.

Supóngase que en el laboratorio se ha llevado a cabo un análisis de los fluidos del yacimiento y se le han determinado las propiedades necesarias para un estudio de simulación. Con los resultados se han construido gráficas como las que se muestran en la Fig. (2.3).

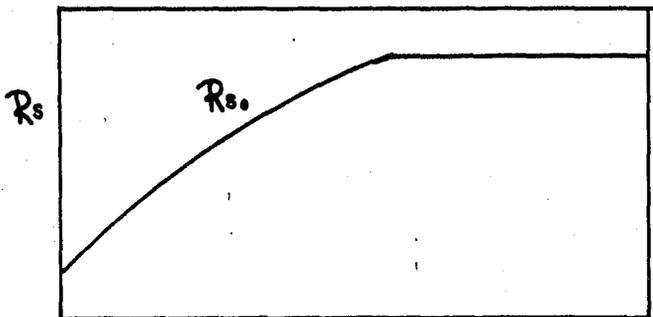
Es posible ajustar una ecuación a cada curva e introducir dichas ecuaciones al simulador para que evalúe las propiedades cuando sea necesario.



$P \rightarrow$



$P \rightarrow$



$P \rightarrow$

FIG. 2.3 PROPIEDADES PVT DE LOS FLUIDOS.

### 2.8.2. Tablas de valores.

Algunos datos PVT no pueden ser representados tan fácilmente por medio de una expresión polinomial, ya sea porque la función no sea continua o porque el orden del polinomio sea tan alto que no resulte práctico programarlo. En este caso la solución consiste en elaborar una tabla con pares de valores ordenados que son almacenados en la computadora, utilizándose cuando se requieran. Cuando los valores que se desean obtener no existen en la tabla, se hace una interpolación, Fig. (2.4). Para ello el modelo deberá contar con una subrutina que se encargue de realizarla.

Es preciso que para construir este tipo de tablas, lo mismo que para ajustar ecuaciones a las gráficas, se tomen la cantidad de puntos necesarios para que el ajuste o la interpolación proporcione valores confiables. Por ejemplo, consídese la Fig. (2.5). Para representar la región A con cinco puntos es suficiente. En la región B se tienen cambios grandes en los valores de  $S_w$  a pesar de tener pequeños cambios en P, por lo que es preciso utilizar una mayor cantidad de puntos. La región C puede ser representada perfectamente con solo dos puntos, puesto que se trata de una línea recta.

Dos tipos de interpolación que pueden utilizarse son:

$B_o$	P
1.26	2000
1.27	2050
1.28	2100
$B_o \rightarrow$ 1.30	2150
1.35	2200 ← 2176
1.40	2250
1.36	2300
1.35	2350

FIG. 2.4 DATOS DE FACTORES DE VOLUMEN DEL ACEITE EN FORMA DE TABLA.

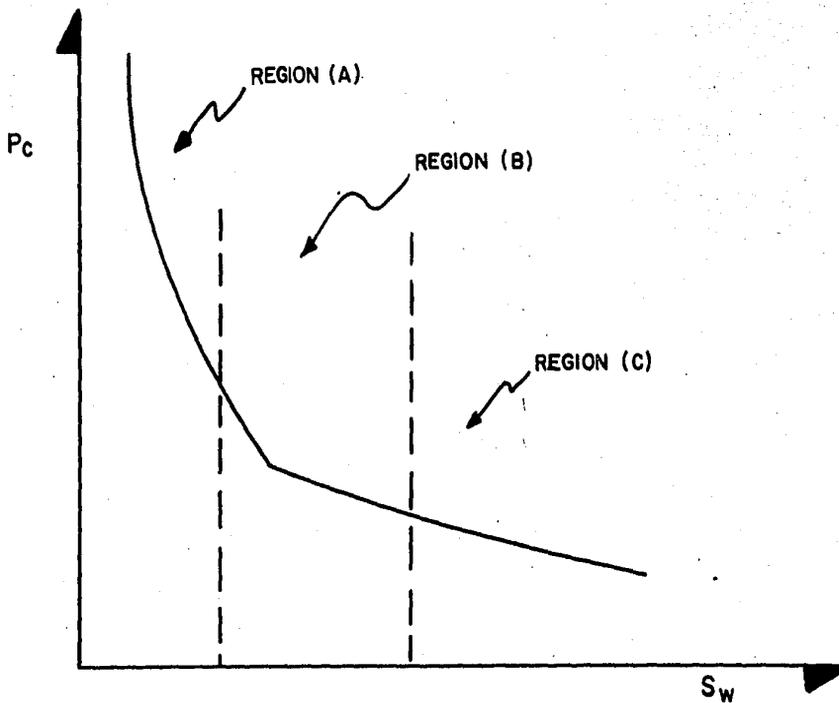


FIG. 2.5 PRESION CAPILAR VS SATURACION DE AGUA.

- Interpolación lineal:

$$y^* = y_1 + \frac{x^* - x_1}{x_2 - x_1} (y_2 - y_1)$$

- Interpolación Lagrangian:

$$y^* = \left[ \frac{x^* - x_2}{x_1 - x_2} \right] \left[ \frac{x^* - x_3}{x_1 - x_3} \right] y_1 + \left[ \frac{x^* - x_1}{x_2 - x_1} \right] \left[ \frac{x^* - x_3}{x_2 - x_3} \right] y_2 + \left[ \frac{x^* - x_2}{x_3 - x_2} \right] \left[ \frac{x^* - x_1}{x_3 - x_1} \right] y_3$$

Por otro lado, los datos de porosidad, espesores, permeabilidad, etc., así como los datos de producción, también entran en forma de tabla. La lectura de toda esta información la hará el modelo como si se tratara de matrices.

## REFERENCIAS

- 1.- Odeh, A. S., "Reservoir Simulation ... What is it?", J. P. T., November, 1969, p 108.
- 2.- Coats, K. H., "Reservoir Simulation: State of the Art", J. P. T., August, 1982, p 1634.
- 3.- Staggs, H. M., "Reservoir Simulation Models - An Engineering Overview", J. P. T., December, 1971, p 1431.
- 4.- Nieto R. R., "Apuntes del Curso Principios de Mecánica de Vacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM.
- 5.- Loreto, E. M., "Apuntes del Curso Recuperación Secundaria", Facultad de Ingeniería UNAM.
- 6.- Garaicochea, F. P., "Comportamiento Primario de Vacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM.
- 7.- Garaicochea, F. P., "Transporte de Hidrocarburos", Facultad de Ingeniería UNAM.
- 8.- Crichlow, B. H., "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach", Prentice - Hall, Inc.

## CAPITULO 3

### CLASIFICACION DE SIMULADORES.

### 3.1 Introducción.

A través del tiempo, producto de las crecientes necesidades que ha tenido la industria del petróleo, lo que originó como se comentó en el capítulo 1 el advenimiento de procesos de recuperación más complejos, se han desarrollado una gran cantidad de simuladores, los cuales pueden clasificarse en función de las características que presenta el yacimiento que se piensa estudiar o bien el proceso físico que se quiere reproducir.

Así entonces, cuando se desea predecir el comportamiento de un yacimiento sujeto a un determinado proceso de recuperación, es preciso seleccionar el modelo que cumpla con ciertas características de diseño que le permitan realizar el trabajo de manera adecuada.

En la Fig. (3.1) se presenta una clasificación general de simuladores y fue construida de manera que en ella aparezcan todos los posibles trabajos de simulación que se pueden efectuar.

Con el objeto de explicar las características de los diferentes tipos de modelos que existen y los trabajos de simulación que pueden realizarse con ellos, se definen en la figura los siguientes seis "parámetros de selección":

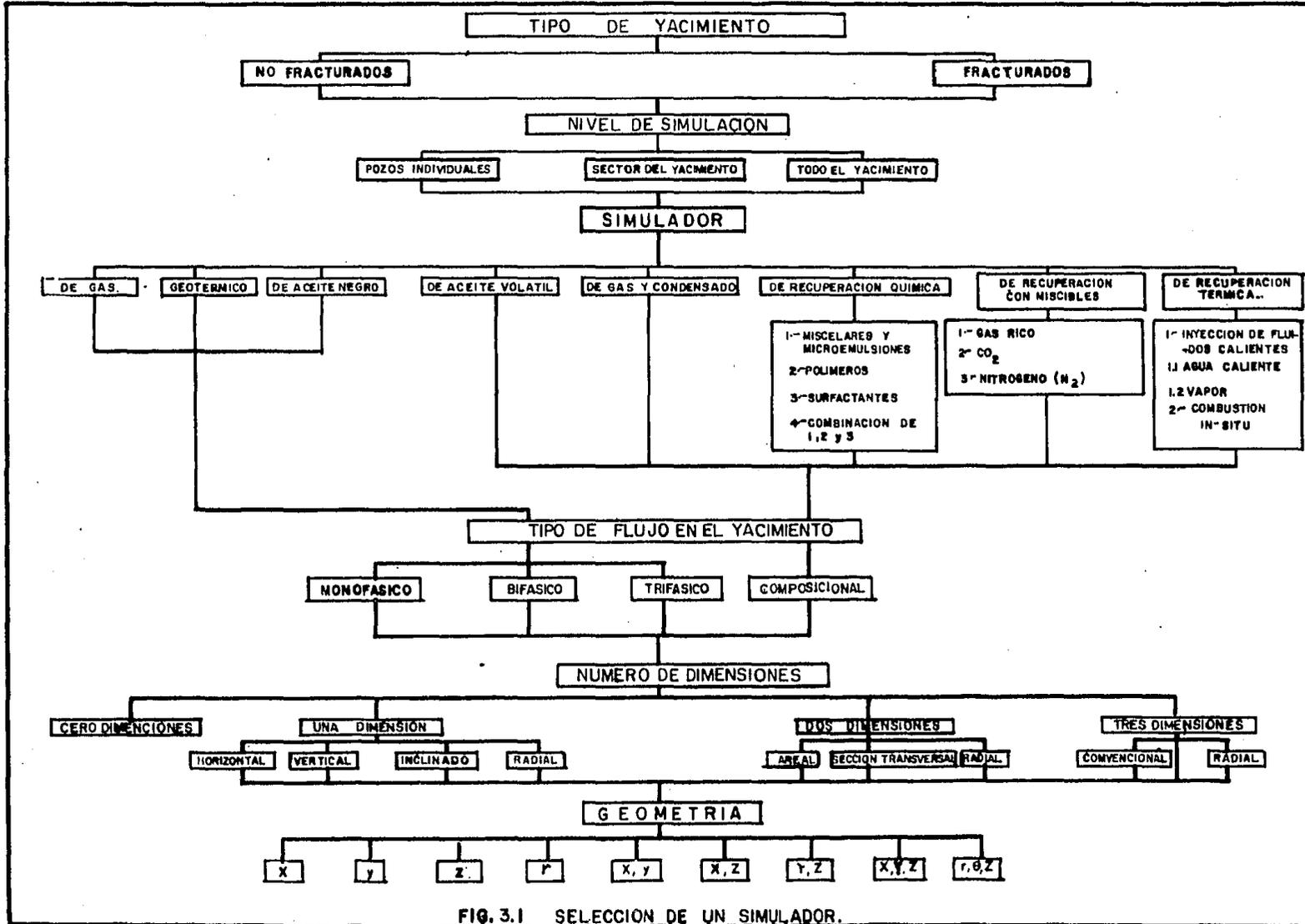


FIG. 3.1 SELECCION DE UN SIMULADOR.

- a) Tipo de yacimiento.
- b) Nivel de simulación.
- c) Simulador.
- d) Tipo de flujo en el yacimiento.
- e) Número de dimensiones.
- f) Geometría.

Como podrá observarse cada uno de estos parámetros tiene diferentes alternativas a utilizar; así por ejemplo, las posibles a emplear para número de dimensiones son: cero, una, dos o tres dimensiones; en nivel de simulación se tienen dos opciones para seleccionar: no fracturados y fracturados; etc.

Hay que hacer notar que el grado de complejidad de las alternativas que aparecen en la figura para cada parámetro de selección va de izquierda a derecha. Así por ejemplo, para tipo de yacimiento es más difícil realizar un estudio de simulación para uno fracturado que para uno no fracturado, para tipo de flujo en el yacimiento lo más complejo es un modelo composicional, etc.

A continuación se explican de manera más detallada, los tipos de simuladores que existen y en que casos se utilizan; al mismo tiempo que se va haciendo referencia a los "parámetros de selección" de la Fig. (3.1).

### 3.2 Tipo de yacimiento.

En forma muy general, dependiendo de características físicas

producto de la mecánica de las rocas de los yacimientos, éstos pueden dividirse en dos grandes grupos: yacimientos no fracturados y yacimientos fracturados, siendo los estudios de simulación en estos últimos, los que presentan mayor grado de dificultad debido a que las fracturas representan verdaderos canales de flujo que modifican el comportamiento de los fluidos a través del medio poroso.

### 3.3 Nivel de simulación.

Los estudios de simulación pueden realizarse a los siguientes niveles:

- a) Pozos individuales.
- b) Sector del yacimiento.
- c) Todo el yacimiento.

Al parecer, según se comentó antes con relación a la Fig. (3.1), los estudios de simulación en pozos individuales serían más sencillos que los estudios de simulación en un determinado sector del yacimiento y más aún que los realizados a lo largo de todo el yacimiento; sin embargo, se debe comentar que existen estudios de simulación para un solo pozo con un grado de dificultad muy elevado. Más adelante se verá la finalidad que se persigue al utilizar cada uno de estos niveles de simulación.

### 3.4 Simulador.

A partir de aquí se entra a lo que es propiamente dicho, la selección del modelo. Antes se ha determinado ya el nivel de la simulación y el tipo de yacimiento en el cual se efectuará ésta. Ahora la pregunta es ¿qué es lo que se desea simular?

Si se analiza la figura en este punto, se observará que los diferentes tipos de simuladores pueden dividirse en dos grupos:

- 1° Los que se definen según el tipo de hidrocarburos que contiene el yacimiento.
- 2° Los que se utilizan en procesos de recuperación mejorada.

En el primer grupo caen:

- los simuladores de gas,
- los simuladores geotérmicos,
- los simuladores de aceite negro,
- los simuladores de aceite volátil y,
- los simuladores de gas y condensado.

En el segundo grupo se tienen:

- los simuladores de recuperación química,
- los simuladores de recuperación con miscibles y,
- los simuladores de recuperación térmica.

Una vez que se ha determinado qué es lo que se desea simular, es posible hacer la selección del modelo capaz de realizar el trabajo.

#### 3.4.1. Simulador de gas.

Como su nombre lo indica, este tipo de simuladores se utilizan para llevar a cabo las predicciones del comportamiento de un yacimiento de gas. Sin lugar a duda, los estudios para este tipo de yacimientos son de los más sencillos si se considera la presencia de una sola fase (gas). Los parámetros que pueden definirse con este tipo de simulador son entre otros:

- a) Volumen de gas inicial.
- b) Gasto de producción.
- c) Distribución de presiones.

#### 3.4.2. Simulador geotérmico.

Existen yacimientos geotérmicos cuya energía calorífica se emplea para la generación de energía eléctrica. Aunque esto no tiene al parecer ninguna conexión con la industria del petróleo, un modelo que se utilice en este tipo de estudios no puede quedar al margen de una clasificación general de simuladores, de ahí la razón por lo que se menciona.

#### 3.4.3. Simulador de aceite negro.

Este es el modelo más simple que puede utilizarse para estudios de agotamiento primario o recuperación secundaria por medio de inyección de gas o de agua. Cuenta con los cua-

tro mecanismos de desplazamiento básicos para la recuperación de aceite que se explican en el capítulo 2. Los modelos de este tipo se han utilizado durante más de veinte años<sup>9</sup> y se basan en la suposición de que los fluidos del yacimiento pueden representarse por medio de solo tres pseudo componentes (aceite, gas y agua). Esta suposición funciona bien siempre y cuando el sistema durante el proceso de recuperación, quede lejos del punto crítico y de la región de condensación retrógrada y además, si los fluidos que se inyectan (si es el caso), consisten de los mismos componentes que los fluidos que se encuentran en el yacimiento.

Los modelos de aceite negro frecuentemente se utilizan para estimar los siguientes efectos durante la recuperación del aceite:

- a) Espaciamiento y arreglo de pozos.
- b) Intervalos disparados.
- c) Conificación del gas y/o del agua como función del gasto de producción.
- d) Gasto de producción.
- e) Mejorar el mecanismo de entrada de agua mediante inyección de la misma y ver la conveniencia de inyectar por los flancos del yacimiento a inyectar con un arreglo de pozos determinado.
- f) Pozos de relleno.

#### 3.4.4. Simulador de recuperación química.

Como se comentó en el capítulo 1, en los últimos años se han desarrollado nuevos procesos para recuperar una mayor cantidad de aceite de los yacimientos, lo cual ha originado la necesidad de contar con simuladores capaces de reproducir el comportamiento de los yacimientos cuando se someten a este tipo de procesos, tal es el caso de los simuladores de recuperación química. Dentro de este tipo de métodos de recuperación mejorada, se pueden citar como los más importantes los siguientes:

- a) Desplazamiento de aceite con soluciones miscelares y microemulsiones.
- b) Desplazamiento de aceite con polímeros.
- c) Desplazamiento de aceite con surfactantes.
- d) Desplazamiento de aceite por combinación de los tres anteriores.

Como es de suponerse, los modelos que se utilizan en este tipo de estudios, presentan un mayor grado de complejidad pues deben de considerar tanto la interacción que existe entre los propios fluidos químicos, como la que hay entre dichos fluidos y el medio poroso.

#### 3.4.5. Simulador de recuperación con miscibles.

Miscibilidad es el fenómeno físico que consiste en la mez-

cla de dos fluidos en todas proporciones, sin que se forme entre ellos una interfase<sup>1</sup>. Existen diferentes fluidos - que se inyectan al yacimiento bajo esta condición y el estudio del efecto que produce cada uno de ellos en la recuperación del aceite se hace con la ayuda de un simulador. Entre los fluidos que se utilizan en este tipo de procesos, - se pueden citar:

- a) El gas enriquecido.
- b) El Bióxido de Carbono (CO<sub>2</sub>).
- c) El Nitrógeno (N<sub>2</sub>).

#### 3.4.6. Simulador de recuperación térmica.

Este tipo de modelos se utilizan para simular el comportamiento de los yacimientos sujetos a algún proceso de recuperación mejorada, por medio de métodos térmicos cuyo objetivo principal es el de proporcionar energía calorífica al aceite con el fin de disminuir su viscosidad y de esta forma, facilitar su flujo hacia los pozos productores<sup>1</sup>. Este tipo de métodos pueden clasificarse en dos grupos diferentes:

- a) Inyección de fluidos calientes, que puede ser agua caliente o vapor.
- b) Combustión in-situ.

Los simuladores que se emplean para el estudio de este tipo de procesos (y para todos los procesos de recuperación mejo

rada), son como ya se comentó muy complejos, pues requieren el uso de correlaciones que describan las propiedades PVT - de los fluidos para N-componentes como función de la presión, de la temperatura y de la composición (se trata de modelos composicionales cuya explicación se da más adelante).

Los problemas de procesos térmicos a los cuales se dirige este tipo de simuladores son, entre otros:

- a) Recuperación esperada de aceite.
- b) Volumen necesario de vapor.
- c) Evaluar la posibilidad de incluir otros fluidos en la inyección del vapor.
- d) Determinar los efectos gravitacionales en el proceso de recuperación de aceite.
- e) Determinar parámetros críticos.

### 3.5 Tipo de flujo en el yacimiento.

En el yacimiento pueden presentarse varios tipos de flujo como función del número de fluidos en movimiento y éstos son:

- Flujo monofásico (un fluido).
- Flujo bifásico (dos fluidos).
- Flujo trifásico (tres fluidos).

Si se observa la Fig. (3.1) en este punto existe otra posible alternativa a la que se le ha llamado "flujo composicional",

que nació de una necesidad como se verá más adelante. De esta manera, según el tipo de flujo que se presenta en el yacimiento, puede existir una determinada clasificación de simuladores.

### 3.5.1. Simulador monofásico.

El flujo monofásico está dado por el flujo de un solo fluido en particular, por ejemplo: en los acuíferos, agua; en los yacimientos bajosaturados, aceite y, en un yacimiento de gas volumétrico el gas. Cualquier modelo que tome en cuenta esta consideración, será un simulador monofásico.

### 3.5.2. Simulador bifásico.

Un simulador de este tipo es aquél que considera la existencia de flujo bifásico en el yacimiento. Este tipo de flujo se presenta cuando dos fluidos diferentes fluyen al mismo tiempo. Las combinaciones que se pueden tener son:

- a) Gas y aceite. En un yacimiento que produce por empuje de gas disuelto liberado o en un yacimiento de aceite con casquete de gas.
- b) Agua y aceite. En un yacimiento bajosaturado con entrada de agua, cuya presión se mantiene arriba de la presión de burbujeo.
- c) Agua y gas. En un yacimiento de gas con entrada de agua o cuya saturación de agua congénita es mayor que la

saturación de agua crítica.

### 3.5.3. Simulador trifásico.

El flujo trifásico se presenta cuando los tres fluidos que contiene un yacimiento (agua, aceite y gas) fluyen a la vez, por lo que todo aquel modelo que haga esta consideración de flujo será un simulador trifásico. Este caso se contempla en yacimientos que producen por empuje combinado, en los que la entrada de agua, el empuje de gas disuelto y/o el empuje de un casquete original o secundario, tienen influencia en la producción.

### 3.5.4. Simulador composicional.

Los modelos composicionales se utilizan para simular los procesos de recuperación para los cuales no sean válidas las suposiciones hechas en el modelo de aceite negro<sup>7</sup>. En esta categoría se incluyen los yacimientos de gas y condensado con condensación retrógrada y los yacimientos de aceite volátil, cuya composición varía continuamente al existir pequeños cambios de presión y/o temperatura. Este tipo de simuladores supone en cambio, que los fluidos contenidos en el yacimiento son una mezcla formada por N-componentes. Las propiedades de la fase gas-aceite y su equilibrio se calculan por medio de correlaciones que están en función de la presión y de la composición y más recientemente por me-

dio de ecuaciones de estado.

Algunos ejemplos de procesos en los cuales son utilizados - estos modelos son los siguientes:

- a) Agotamiento de un yacimiento de aceite volátil o de gas y condensado donde la composición de fase y sus propiedades varían en una manera significativa, con presiones por debajo de la presión de burbujeo.
- b) Inyección de gas (seco o enriquecido) a un yacimiento de aceite negro para lograr su miscibilidad, ya sea total o parcial.
- c) Inyección de  $\text{CO}_2$  a un yacimiento de aceite.

### 3.6 Número de dimensiones.

Al llegar a este lugar de la Fig. (3.1), seguramente ya se ha determinado el nivel de simulación que se va a emplear, así como el proceso de recuperación que se piensa simular y como consecuencia, el tipo de flujo que se tendrá en el yacimiento. Esta información junto con características físicas del yacimiento, permitirá hacer la selección del modelo a utilizar en cuanto al número de dimensiones.

A continuación se da la clasificación de los simuladores en función del número de dimensiones y una explicación de las características que presentan cada uno de ellos.

### 3.6.1. Simulador de cero dimensiones.

A este modelo se le conoce también como modelo tanque o de balance de materia. Se dice que es de cero dimensiones debido a que las propiedades petrofísicas, las propiedades de los fluidos y los valores de presión no varían de punto a punto; en cambio, se consideran valores promedio de estos parámetros a lo largo de todo el yacimiento<sup>3</sup>.

Se le llama también de balance de materia debido a que al realizar los cálculos lo que se hace es precisamente esto, un balance entre los fluidos que entran y los fluidos que salen del yacimiento.

Supóngase un yacimiento al que se le inyecta por un lado una determinada cantidad de agua y se obtiene una cantidad también de agua, gas o aceite (o una combinación de los tres) por el otro lado, como se muestra en la Fig. (3.3). Al hacer el balance se tendrá la siguiente expresión:

$$\begin{array}{rclcl} \text{Volumen de flui} & & & & \text{Volumen de flui} \\ \text{dos en el yaci} & & \text{Volumen de} & \text{Volumen de} & \text{dos que permane} \\ \text{miento antes de} & + & \text{fluido in-} & - & \text{ce en el yaci} \\ \text{la inyección.} & & \text{yectado.} & \text{fluidos ex} & \text{miento.} \\ & & & \text{traídos.} & \\ & & & = & \end{array}$$

Este modelo de cero dimensiones es la base de todos los modelos existentes y tiene la particularidad de que en él no pueden definirse pozos, como se verá que puede hacerse en -

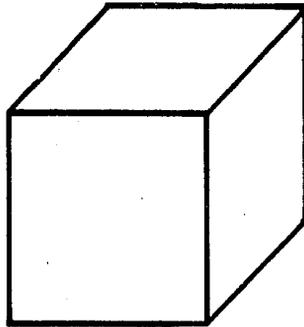


FIG. 3.2 MODELO DE CERO DIMENSIONES.

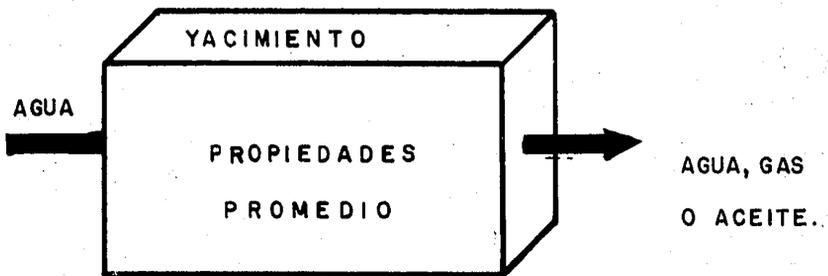


FIG. 3.3 BALANCE DE MATERIA.

los simuladores de más dimensiones.

El uso que generalmente se le da a este modelo es:

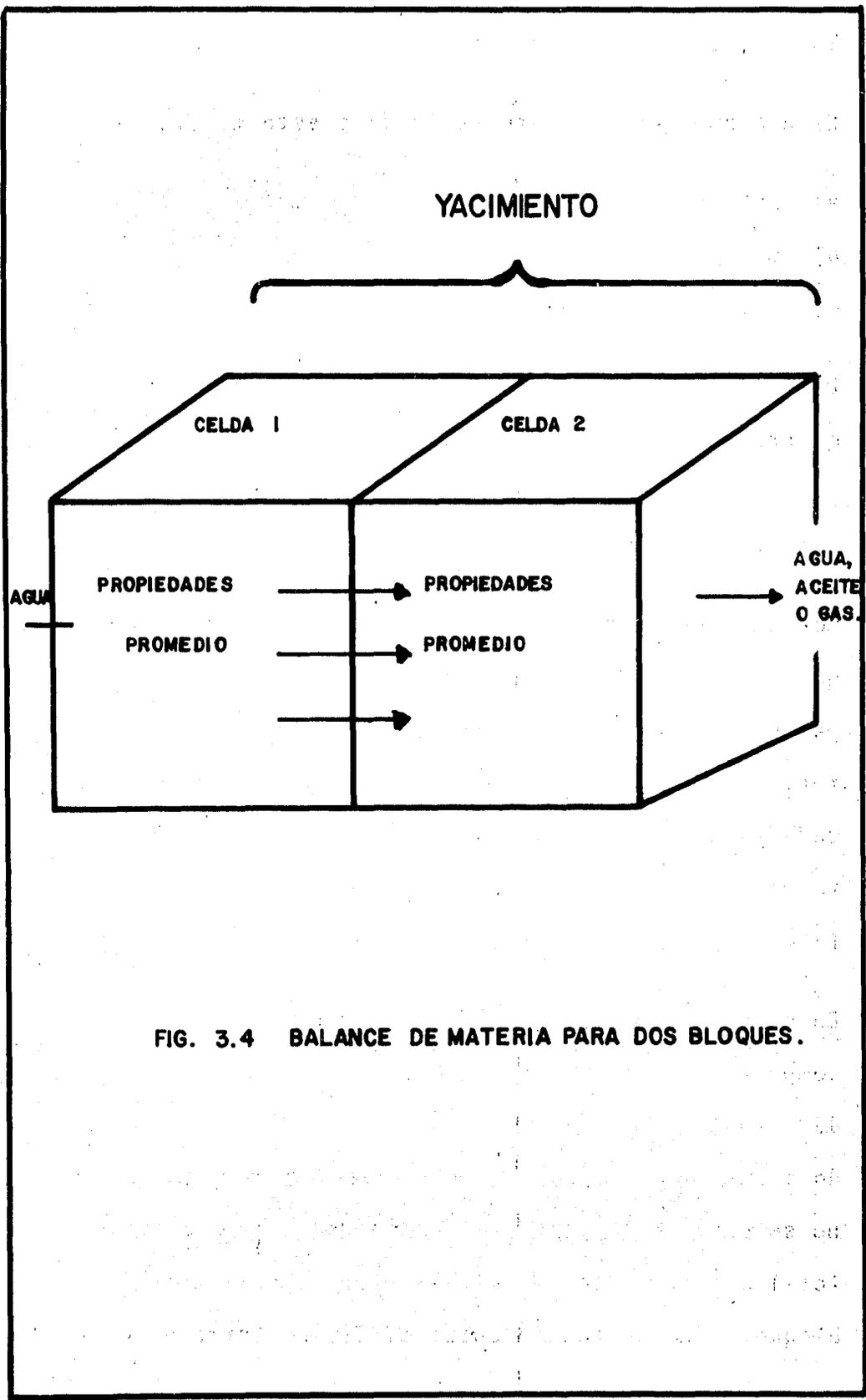
- a) Estimar el volumen original de aceite en el yacimiento.
- b) Calcular la entrada de agua.
- c) Calcular la presión del yacimiento.

Para el cálculo de cualquiera de los tres parámetros se requiere conocer los otros dos.

### 3.6.2. Simulador de una dimensión.

Considérese ahora un yacimiento que varía en litología y que de acuerdo con esta variación puede dividirse en dos partes. En este caso el yacimiento como un todo no puede representarse mediante propiedades promedio, sin embargo, cada parte si puede. De esta manera el yacimiento consiste de dos bloques o celdas como también se les llama, Fig. (3.4).

En este caso, la ecuación de balance de materia describe el comportamiento del fluido en cada celda como en el modelo de cero dimensiones, sin embargo, la cosa se complica debido a que al haber migración de fluidos de una celda a otra, no se sabe exactamente qué cantidad de fluido del volumen total que permanece en el yacimiento, corresponde a cada bloque. Esta transferencia de fluido entre ambas celdas



**FIG. 3.4 BALANCE DE MATERIA PARA DOS BLOQUES.**

(transmisibilidad), se evalúa con la ecuación de Darcy, la cual se trata en el capítulo 4. De esta manera, la ecuación de balance de materia junto con la ecuación de Darcy, describen el comportamiento de cada celda. Este modelo ya no es de cero dimensiones como el anterior, debido a que las propiedades aunque son promedio para cada bloque, varían de una celda con respecto a la otra, en cambio es un modelo de una dimensión, debido a que consiste de más de una celda en una dirección y de solo una celda en las otras dos direcciones. El modelo en una dimensión puede ser horizontal, vertical, inclinado o radial, como se muestra en la Fig. (3.5).

Este tipo de modelo fué generado por Buckley-Leverett para dar una solución analítica al comportamiento de las yacimientos sujetos a recuperación secundaria.

En la simulación de yacimientos dicho modelo se puede aplicar si se tiene un yacimiento en el que el flujo en una dirección es predominante, por ejemplo, en los casos de inyección de gas en la cresta de un yacimiento o en la inyección o entrada natural de agua por el flanco de otro yacimiento.

El modelo de una dimensión en forma radial es útil para pruebas de formación y pruebas de incremento y decremento de presión, ya que los efectos que provoca en el flujo de fluidos la caída de presión en el pozo a lo largo de todo

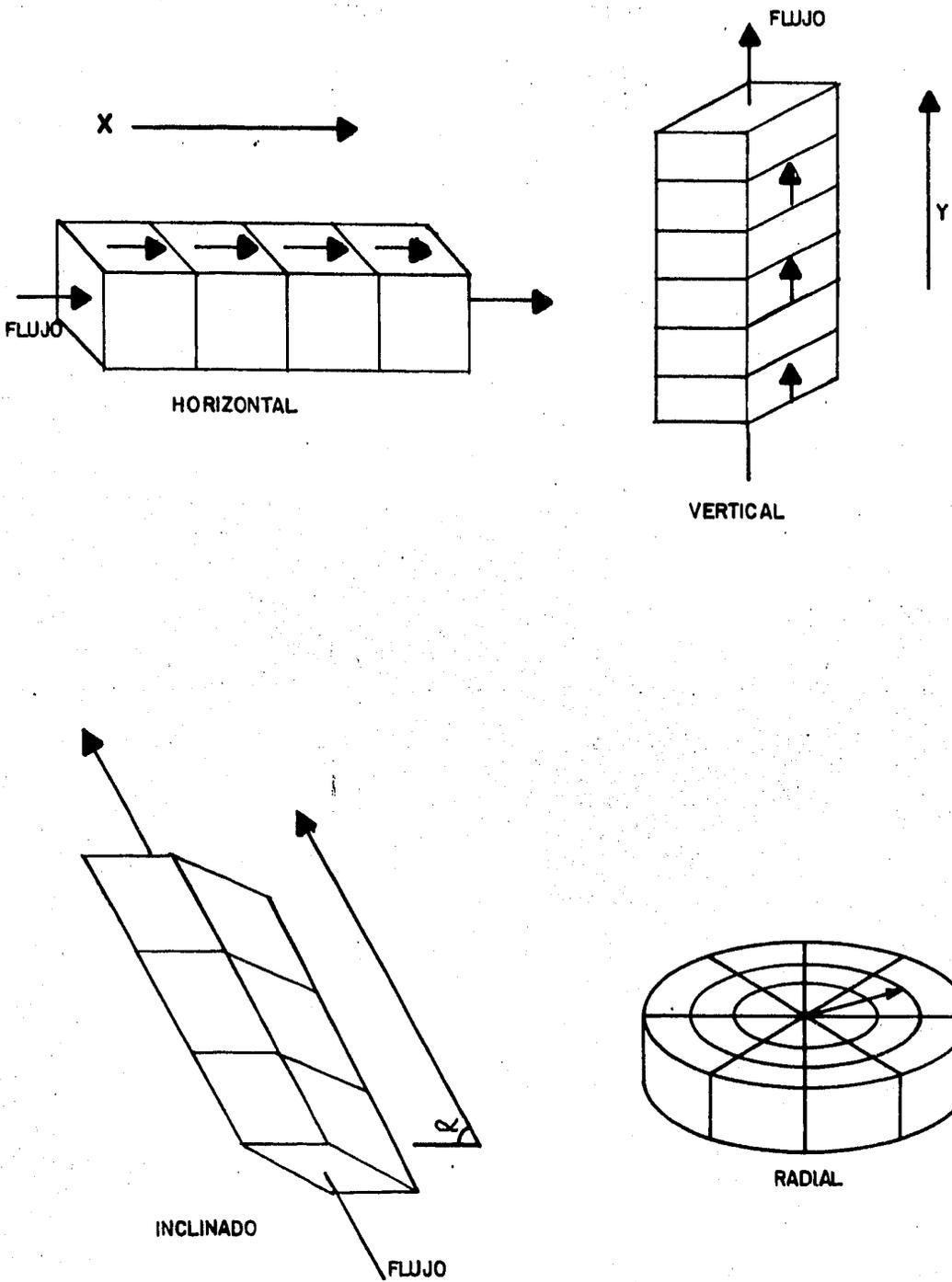


FIG. 3.5 MODELOS DE UNA DIMENSION.

el yacimiento, no puede simularse directamente con los otros modelos de una dimensión debido a que la unidad más pequeña del yacimiento, una celda, es generalmente muy grande comparada con el volumen del yacimiento que es realmente afectado por las presiones en el pozo.

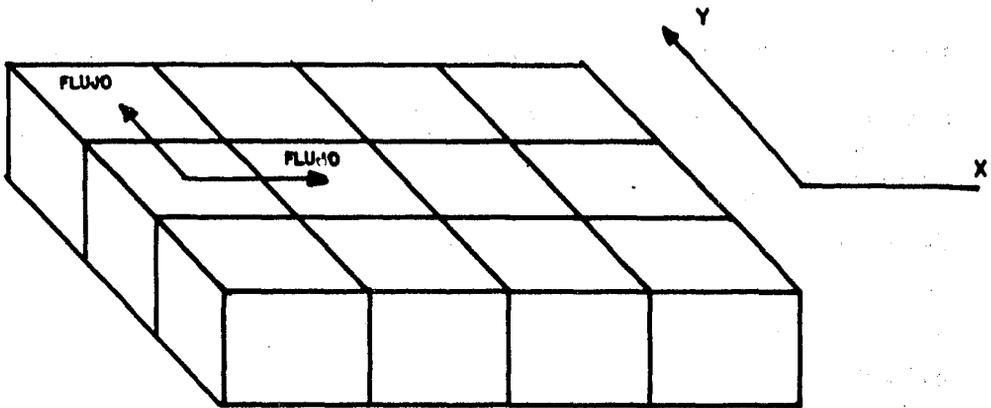
### 3.6.3. Simulador de dos dimensiones.

El mismo análisis que se utilizó para explicar el modelo en una dimensión, puede extenderse para modelos en dos y tres dimensiones, ésto es, la ecuación de balance de materia describe el comportamiento en cada celda y la ecuación de Darcy el flujo entre los bloques, con la única diferencia en que la interacción de flujo en las celdas será en dos o en tres dimensiones. Así pues, el modelo de dos dimensiones consiste en más de una celda en dos dimensiones y de solo una celda en la tercera dimensión.

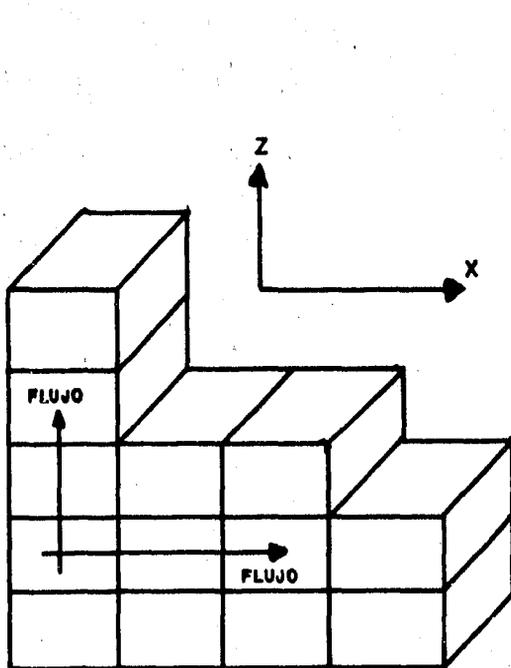
Como se puede apreciar en la Fig. (3.6), el simulador en dos dimensiones puede ser areal, de sección transversal o de forma radial.

#### 3.6.3.1. Simulador areal.

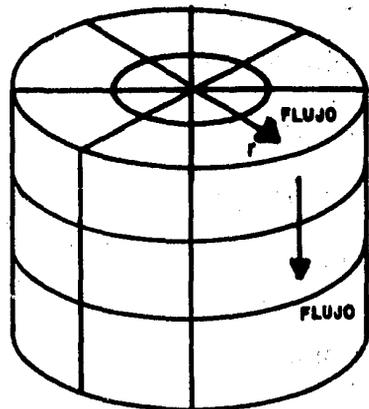
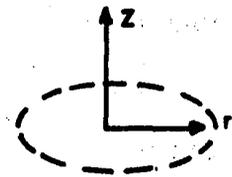
Sin lugar a dudas, dentro de la clasificación de simuladores en función del número de dimensiones, el modelo areal es el que se utiliza con mayor frecuencia<sup>5</sup>. En



AREAL



DE SECCION TRANSVERSAL



RADIAL

FIG. 3.6 MODELOS DE DOS DIMENSIONES.

él se tienen variaciones de las propiedades en dos direcciones (x, y), pudiéndose considerar además los efectos gravitacionales al asignar diferentes profundidades a las celdas del modelo, el cual puede ser representado por una malla como se puede observar en la Fig. (3.6). Este tipo de simulador se aplica a yacimientos donde generalmente los espesores son pequeños con respecto a su área y no existe efecto muy marcado de estratificación o se ha generado un conjunto adecuado de pseudopermeabilidades relativas. Algunas de las aplicaciones que se le dan son las siguientes:

- a) Simular los efectos de barrido al inyectar gas o agua.
- b) Determinar la localización de pozos en yacimientos donde se tengan variaciones de las propiedades de la roca y de esta manera, lograr una recuperación máxima.
- c) Determinar la entrada de agua en problemas de yacimientos que no tengan solución analítica.

#### 3.6.3.2. Simulador de sección transversal.

Otro tipo de modelo de dos dimensiones se tiene en la representación de secciones transversales en donde las propiedades de las capas varían, Fig. (3.6). La utilidad de este simulador estriba en la versatilidad que

tiene para describir la distribución vertical de saturaciones en el avance de un frente (gas y/o agua), además de ser el instrumento para la obtención de las ya mencionadas curvas de pseudopermeabilidades relativas y cuya utilidad se explica en el capítulo 8. Con este tipo de modelo se puede simular la conificación de agua o de gas y los efectos gravitacionales.

#### 3.6.3.3. Simulador de dos dimensiones en forma radial.

Al igual que el simulador de sección transversal, este modelo es útil para simular la conificación de agua o de gas. Además tiene la ventaja de poder analizar con mayor detalle los cambios bruscos de presión y de saturación que ocurren en la cercanía del pozo. En la Fig. (3.6) se representa esquemáticamente a este tipo de modelo.

#### 3.6.4. Modelo de tres dimensiones.

Este tipo de simulador, dentro de la clasificación de modelos por el número de dimensiones, es el más completo ya que cuenta con la mayoría de las fuerzas que se presentan en el yacimiento, ésto es, considera además de los efectos de barrido areal los efectos de barrido vertical. Su uso va para todos aquellos yacimientos que presentan una geología muy compleja, que puede dar como resultado el movimiento de

fluidos a través del medio poroso en varias direcciones.

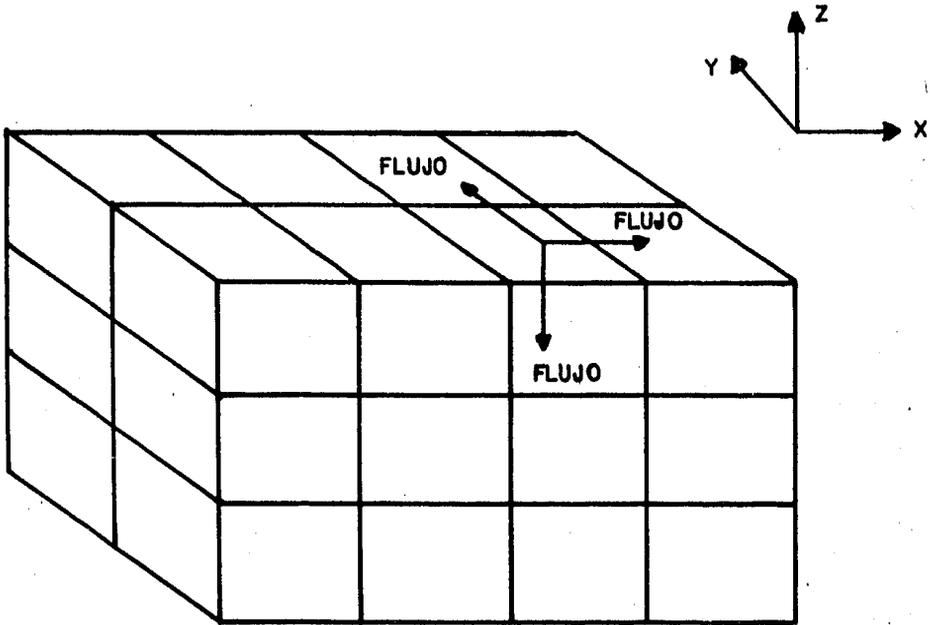
El término "convencional" que aparece en la Fig. (3.1), se utiliza para diferenciar al modelo de tres dimensiones en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  del modelo de tres dimensiones en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  o modelo radial de tres dimensiones. En la Fig. (3.7) se muestra este tipo de simulador.

### 3.7 Geometría.

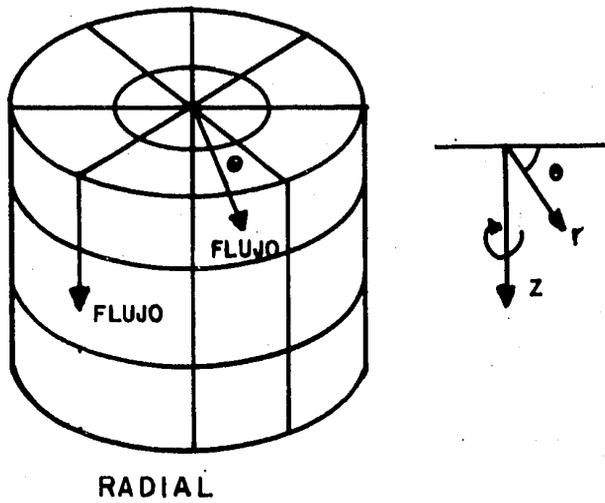
Con ésto se llega al último "parámetro de clasificación" de la Fig. (3.1). A decir verdad, no existe una clasificación de los simuladores en función de la geometría que presentan, como parece indicarse en la figura, ésto es, no puede decirse que haya un modelo  $(x)$  o un modelo  $(r, \theta, z)$ , sino más bien la geometría es una consecuencia del número de dimensiones que tenga el simulador. De esta manera es claro que un modelo en dos dimensiones, solo podrá tener las siguientes geometrías:

- $(x, y)$  si es areal,
- $(x, z)$  si es de sección transversal, o bien
- $(r, z)$  si se trata de un simulador radial.

De la misma manera, si al hablar de nivel de simulación se hace referencia al estudio de pozos individuales, es lógico pensar que las únicas geometrías de las que se ven en la Fig. (3.1) que puede utilizar el modelo son:



CONVENCIONAL



RADIAL

FIG. 3. 7 MODELOS DE TRES DIMENSIONES.

- (r) si es un simulador de una dimensión,
- (r, z) si es un modelo de dos dimensiones, o bien
- (r,  $\theta$ , z) si se trata de un simulador de tres dimensiones.

Por último, como se podrá fácilmente comprender, carece de sentido hablar de geometría cuando se hace referencia al modelo de cero dimensiones.

### 3.8 Uso de la clasificación.

Como se comentó al principio de este capítulo, la Figura (3.1) se hizo con el fin de presentar en ella todos los posibles trabajos de simulación que puedan existir.

Como ejemplo, supóngase que requiere simular un proceso de recuperación por inyección de polímeros en dos dimensiones (x - y) en determinado sector de un yacimiento no fracturado. Por lo ya explicado anteriormente, el simulador a emplearse deberá ser un modelo composicional.

Así pues, el problema anterior queda perfectamente definido en la Fig. (3.1). Para ello las alternativas a escoger en cada "parámetro de selección" son las siguientes:

- a) Tipo de yacimiento: no fracturado.
- b) Nivel de simulación: sector del yacimiento.
- c) Simulador: de recuperación química (polímeros).
- d) Tipo de flujo en el yacimiento: composicional.

e) Número de dimensiones: dos dimensiones (areal).

f) Geometría:  $x - y$ .

Cabe advertir que se puede dar el caso en que una combinación determinada de "parámetros de selección" dé como resultado un problema para el cual no exista un simulador en el mercado, e incluso que no se haya reportado nada sobre él en la literatura; un ejemplo podría ser un modelo composicional para simular la inyección de vapor (recuperación térmica) en tres dimensiones  $(r, \theta, z)$  en un solo pozo de un yacimiento fracturado. En el caso de plantearse un problema con tales características, habría la necesidad de desarrollar el modelo que sea capaz de proporcionar la solución que se busca.

## REFERENCIAS

- 1.- Abreu T. M.; Muñoz, F. A, y Silva, R. J.: "Apuntes de Recuperación Secundaria". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 2.- Rosas, J. L.: "Notas del Curso Geología Física II". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 3.- Odeh, S. A.: "Reservoir Simulation ... What is it? J.P.T. November, 1969.
- 4.- Domínguez, G. D.: "Notas del Curso Simulación Matemática de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 5.- Staggs, M. H. and Herbeck, M. H.: "Reservoir Simulation - Models - An Engineering Overview". J.P.T. December, 1971.
- 6.- Odeh, S. A.: "An Overview of Mathematical Modeling of the Behavior of Hydrocarbon Reservoirs".
- 7.- Coats, H. K.: "Reservoir Simulation: State of the Art". - J.P.T., August, 1982.
- 8.- Allen, O. T. and Roberts, P. A.: "Production Operations". Oil and Gas Consultants International, Inc. Tulsa, Tomo I.
- 9.- Aziz, K.: "Computer Modelling of flow Processes".

## CAPITULO 4

PRINCIPIOS BASICOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES.

#### 4.1 Introducción.

Se ha dicho que la simulación ayuda a describir, con cierta precisión, el comportamiento de procesos físicos que ocurren en los yacimientos. Para ello el ingeniero debe identificar dichos procesos y formular las ecuaciones matemáticas que los gobiernan. Sin embargo, esta tarea no es nada fácil ya que el flujo de fluidos en medios porosos es un fenómeno muy complejo y para representarlo se deben considerar ecuaciones que describan el flujo de los fluidos en una, dos o tres fases, a través de "canales de flujo" que presentan variaciones de uno o varios órdenes de magnitud en donde los fluidos pueden ser tratados como incompresibles, ligeramente compresibles o compresibles. Además para representar el sistema de flujo pueden considerarse una, dos e incluso tres dimensiones, incluyendo si se desea, heterogeneidad en las propiedades petrofísicas, efectos gravitacionales, efectos capilares y transferencia de masa entre las fases.

Con lo anterior es fácil suponer que la habilidad para predecir el comportamiento de un yacimiento estará en función, primero, de la habilidad que tenga el ingeniero para identificar el proceso físico que se presenta en el yacimiento y después, para representar dicho proceso en forma matemática.

Las ecuaciones que se emplean en la simulación de yacimientos - se obtienen de la combinación de varios principios físicos como son:

- a) La ley de la conservación de masa.
- b) La ley de la conservación de momento.
- c) La ley de la conservación de energía (1a. ley de la termodinámica).
- d) Ecuaciones de flujo (Ley de Darcy).
- e) Ecuaciones de estado.

Este capítulo está dedicado al estudio de las ecuaciones básicas que se utilizan para desarrollar un modelo de simulación.

#### 4.2 Tipos de energía en el flujo de fluidos en medios porosos.

El flujo de fluidos a través de medios porosos está relacionado con tres tipos de potencial de energía o fuerzas que son:

- 1) Energía gravitacional.
- 2) Energía de presión y
- 3) Energía cinética (la cual se desprecia debido a la velocidad del fluido en el medio poroso).

##### 4.2.1. Energía gravitacional.

La fuerza gravitacional que actúa en un cuerpo de masa "m" es:

$$F_g = mg \quad (4.2.1.1)$$

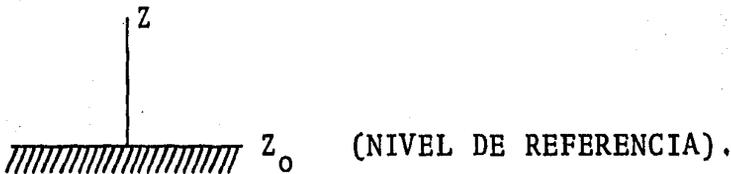
La dirección de esta fuerza es vertical (coordenada Z). Si la masa "m" se mueve bajo la acción de la fuerza  $F_g$ , el cambio en energía gravitacional (trabajo) está dado por:

$$dE_g = F_g dz = mg dz \quad (4.2.1.2)$$

Integrando la Ec. (4.2.1.2) para tener el cambio total en energía gravitacional:

$$E_g \int_{E_0}^{E_g} dE_g = mg \int_{Z_0}^Z dz \quad (4.2.1.3)$$

$$E_g - E_0 = mg (Z - Z_0) \quad (4.2.1.4)$$



En el nivel de referencia,  $Z_0$ , la energía gravitacional ( $E_0$ ) toma el valor de cero. Entonces la Ec. (4.2.1.4), se escribe de la siguiente manera:

$$E_g = mg Z \quad (4.2.1.5)$$

Hay que hacer notar que  $mg$  es el "peso" o fuerza necesaria para levantar un cuerpo, una distancia  $Z$  arriba del nivel de referencia; el trabajo hecho proporciona un almacenamiento de energía.

#### 4.2.2. Energía de presión.

En general, para procesos de desplazamiento de fluidos la expresión para el trabajo es:

$$W = (\text{Fuerza}) (\text{distancia}) = (\text{Area}) (\text{Presión}) (\text{distancia}) \quad (4.2.2.1)$$

pero

$$(\text{distancia}) (\text{Area}) = (\text{Volumen})$$

Por lo que la expresión (4.2.2.1) se puede escribir como:

$$W = pV \quad (4.2.2.2)$$

6:

$$dW = Vdp \quad (4.2.2.3)$$

Como la energía disponible en un fluido a presión es equivalente al trabajo realizado para comprimir dicho fluido, la Ec. (4.2.2.3) toma la forma:

$$dE_p = Vdp \quad (4.2.2.4)$$

Integrando:

$$E_o \int^{E_p} dE_p = P_o \int^P Vdp \quad (4.2.2.5)$$

$$E_p - E_o = P_o \int^P Vdp \quad (4.2.2.6)$$

El lado derecho de la ecuación anterior se evalúa de la relación  $p$  v.s.  $V$  que es medida en el laboratorio como se ilustra en la Fig. (4.1).

Alternativamente estos cambios de energía pueden ser expresados en términos de la densidad del fluido  $\rho$  como se muestra a continuación:

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (4.2.2.7)$$

Sustituyendo la Ec. anterior en la Ec. (4.2.2.6).

$$E_p - E_o = m \int_{p_o}^p \frac{dp}{\rho} \quad (4.2.2.8)$$

Tomando como referencia la presión atmosférica, a la cual  $E_o = 0$ , la Ec. (4.2.2.8) se transforma a:

$$E_p = m \int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{\rho} \quad (4.2.2.9)$$

### 4.3. Potencial de flujo ( $\Phi$ ).

Un principio fundamental de la mecánica de los fluidos a través del medio poroso es que los vectores de la velocidad del fluido son siempre normales a las superficies equipotenciales y que la magnitud de dichos vectores son proporcionales al gradiente de estos potenciales; ésto es, la distribución de potencial den-

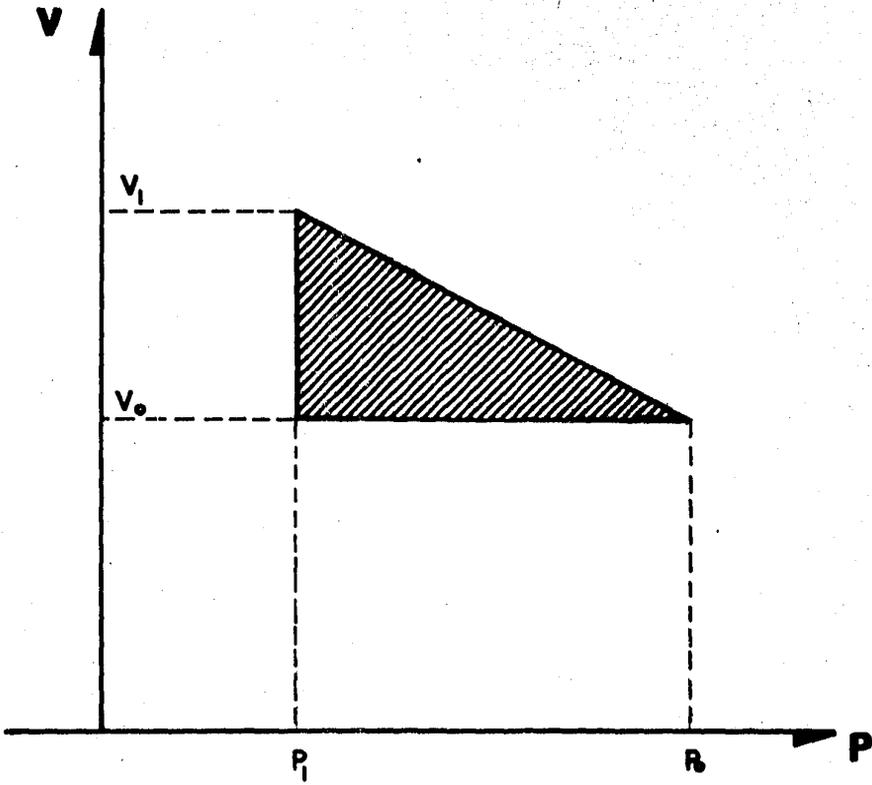


FIG. 4.1 RELACION ENTRE LA PRESION Y EL VOLUMEN OBTENIDA EN EL LABORATORIO.

tro de un fluido determina su movimiento y la velocidad de dicho movimiento, Fig. (4.2). Hubbert<sup>1</sup> define al potencial  $\phi$  como "energía mecánica por unidad de masa de fluido en cualquier localización". Según esto, el potencial gravitacional y el potencial de presión se pueden obtener de las Ecs. (4.2.1.5) y (4.2.2.9) respectivamente:

$$\phi_g = \frac{E_g}{m} = gz \quad (4.3.1)$$

$$\phi_p = \frac{E_p}{m} = \int_{P_{atm}}^P \frac{dp}{\rho} \quad (4.3.2)$$

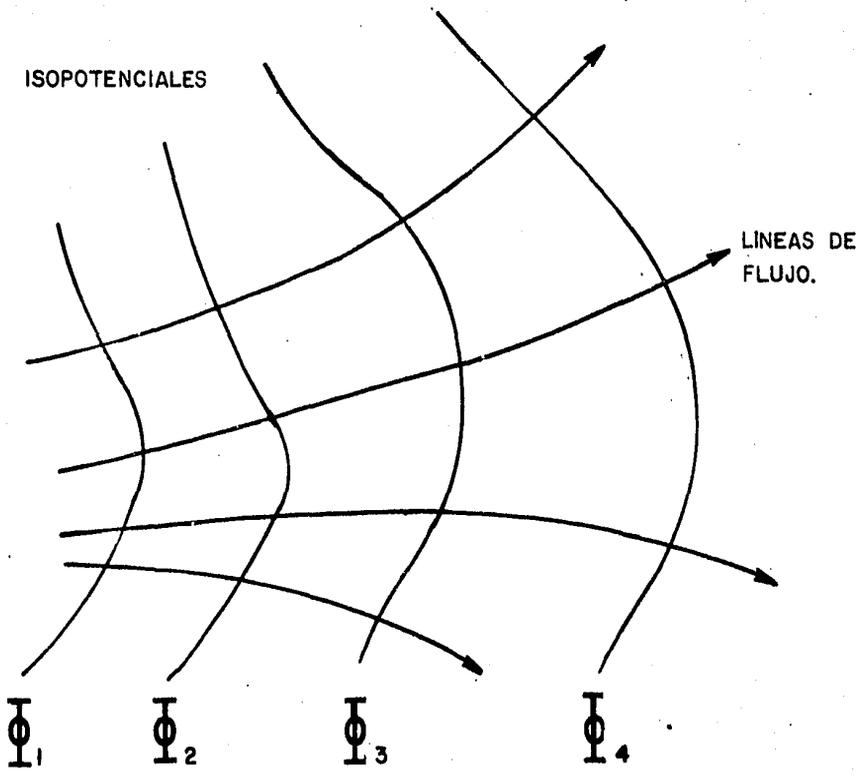
Para llevar un fluido a una localización determinada deben realizarse algunas clases de trabajo en dicho fluido. La suma total del trabajo hecho en el fluido refleja la energía mecánica dentro del mismo. De esta manera, si se considera una partícula de fluido en un punto en el que se sabe que el potencial es cero ( $\phi_0 = 0$ ), entonces el potencial asociado con este fluido en movimiento hacia una nueva localización es  $\phi$ ;  $\phi$  se calcula tomando en cuenta todo el trabajo realizado sobre el fluido, o sea:

$$\phi = \phi_p + \phi_g \quad (4.3.3)$$

o bien utilizando las Ecs. (4.3.2) y (4.3.1)

$$\phi = \int_{P_0}^P \frac{dp}{\rho} + gz \quad (4.3.4)$$

ISOPOTENCIALES



LINEAS DE FLUJO.

FIG. 4.2 ISOPOTENCIALES Y LINEAS DE FLUJO.

La Ec. (4.3.4) es la expresión general de potencial de flujo en donde  $P_0$  es la presión en el punto inicial que en la Ec. (4.3.2) era considerada como la presión atmosférica.

#### 4.3.1. Potencial de flujo para líquidos y para gases.

Si se trata de un líquido (como se verá más adelante), la variación de la densidad con respecto a la presión se considera constante (fluido ligeramente compresible). Así pues, la compresibilidad del fluido está dada por:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \text{constante.} \quad (4.3.1.1)$$

Despejando "dp" de la Ec. (4.3.1.1) se tiene:

$$dp = \frac{1}{c\rho} d\rho \quad (4.3.1.2)$$

Sustituyendo (4.3.1.2) en (4.3.2)

$$\phi_p = \frac{1}{c} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (4.3.1.3)$$

En términos de presión la ecuación anterior se expresa como:

$$\phi_p = \frac{1}{c\rho_0} \left[ 1 - e^{-c(p - p_0)} \right] \quad (4.3.1.4)$$

Si la diferencia de presión  $(p - p_0)$  es pequeña, el exponente puede aproximarse a  $\left[ 1 - c(p - p_0) \right]$ , por lo que:

$$\phi_p = \frac{p - p_0}{\rho_0} \quad (4.3.1.5)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la Ec. (4.3.4) se obtiene la expresión del potencial del flujo para líquidos, - Ec. (4.3.1.6).

$$\phi = \frac{(p - p_0)}{\rho_0} + gZ \quad (4.3.1.6)$$

Donde los términos  $p_0$  y  $\rho_0$  se refieren a la presión y a la densidad del fluido en el punto inicial.

Para obtener la expresión que proporcione el potencial de flujo para gases, se procede de la siguiente manera:

Partiendo de la ecuación de los gases reales se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{m} = \frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} \quad (4.3.1.7)$$

donde:

$\rho$  = densidad a la presión  $p$ .

$\rho_{atm}$  = densidad a la presión  $p_{atm}$ .

Sustituyendo (4.3.1.7) en (4.3.2)

$$\phi_p = \frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} \int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} \quad (4.3.1.8)$$

Finalmente

$$\phi_p = \frac{P_{atm}}{\rho_{atm}} \ln \frac{p}{P_{atm}} \quad (4.3.1.9)$$

Sustituyendo (4.3.1.9) en la Ec. (4.3.4)

$$\phi = \frac{P_{atm}}{\rho_{atm}} \ln \frac{p}{P_{atm}} + gZ \quad (4.3.1.10)$$

Que es la ecuación que expresa el potencial de flujo para gases.

#### 4.3.2. El potencial para columnas de líquidos y de gases.

El potencial para columnas de fluidos estáticos es constante.

De esta manera, de la Ec. (4.3.1.6) se tiene:

$$\phi = \frac{p - p_0}{\rho} + gZ = \text{constante.}$$

Considérese como la presión de referencia  $P_0$  a la presión atmosférica ( $P_{atm}$ ) en la parte superior de la columna de líquido. En la superficie el potencial es cero, Fig. (4.3).

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad Z = 0$$

Para cualquier otro punto de la columna, considerando que  $\phi = 0 = \text{cte.}$  y utilizando la ecuación (4.3.1.6)

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} + gZ = 0 \quad (4.3.2.1)$$

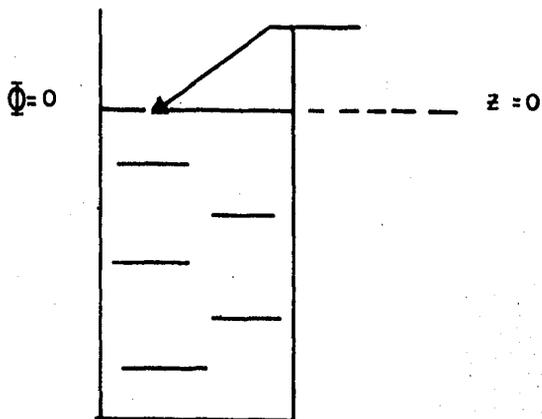


FIG. 4.3 COLUMNA DE LIQUIDO.

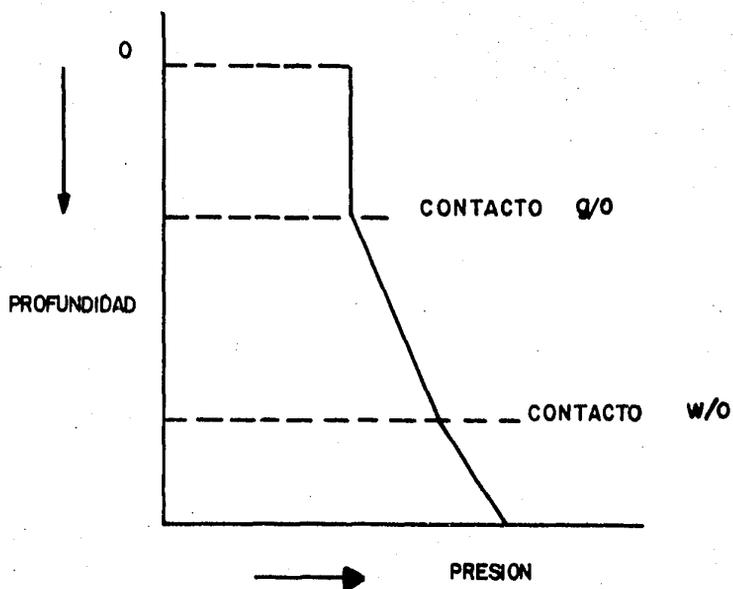


FIG. 4.4 RELACION ENTRE LA PRESION Y LA PROFUNDIDAD PARA LOS FLUIDOS DE UN YACIMIENTO.

Despejando "P" en la ecuación anterior:

$$p = Patm - g\rho Z \quad (4.3.2.2)$$

La coordenada Z es negativa por lo que  $p > Patm$ . Generalmente, esta relación presión-distancia se escribe en función de la profundidad "D" con respecto al nivel de referencia ( $D = -Z$ ). Así la Ec. (4.3.2.2) se escribe como:

$$p = Patm + g\rho D \quad (4.3.2.3)$$

Lo que indica que la presión es una función lineal de la profundidad.

Hasta este momento en las ecuaciones que se han desarrollado, se han manejado indistintamente las dimensiones masa y las dimensiones fuerza, prueba de ello es la Ec. (4.3.2.3). Para no crear posibles confusiones se explica a continuación la necesidad de introducir la constante gravitacional  $g_c$  en estas ecuaciones. Si se analizan unas posibles unidades de los términos de la Ec. (4.3.2.3) se tiene:

$$p \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] = Patm \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] + g \left[ \frac{pie}{seg} \right] \rho \left[ \frac{lb_m}{pie^3} \right] D \left[ pie \right]$$

$$p \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] = Patm \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] + g\rho D \left[ \frac{lb_m}{seg^2 pie} \right] \quad (4.3.2.4)$$

Las unidades del segundo miembro del lado derecho de la igualdad en la Ec. (4.3.2.4) no son consistentes, ésto es:

$$\left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] \neq \left[ \frac{lb_m}{seg^2 pie} \right]$$

Multiplicando la Ec. (4.3.2.4) por  $\frac{1}{g_c}$

$$p \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] = Patm \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] + g \rho D \left[ \frac{lb_m}{seg^2 pie} \right] \frac{1}{g_c} \left[ \frac{lb_f seg^2}{lb_m pie} \right]$$

$$p \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] = Patm \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] + \frac{g}{g_c} \rho D \left[ \frac{lb_f}{pie^2} \right] \quad (4.3.2.5)$$

Tomando en cuenta lo anterior, la Ec. (4.3.2.3) se expresa como sigue:

$$p = Patm + \frac{g}{g_c} \rho D \quad (4.3.2.6)$$

Donde:

$$g = \text{aceleración de la gravedad } (32.174 \frac{pie}{seg^2})$$

$$g_c = \text{cte gravitacional } (32.174 \frac{lb_m - pie}{lb_f - seg^2})$$

Lo anterior debe ser considerado para las ecuaciones que se han desarrollado con anterioridad, ésto es: Ecs. (4.3.1) y (4.3.1.6).

Supóngase ahora una columna de gas. Igualando la Ec.

(4.3.1.10) con cero se tiene:

$$\frac{P_{atm}}{\rho_{atm}} \ln \frac{p}{P_{atm}} + gZ = 0 \quad (4.3.2.7)$$

Si se toma como presión de referencia a la presión en la cabeza del pozo ( $p_t$ ) en vez de la presión atmosférica ( $P_{atm}$ ), la Ec. (4.3.2.7) se escribe:

$$\frac{p_t}{\rho_t} \ln \frac{p}{p_t} + gZ = 0 \quad (4.3.2.8)$$

Donde:

$\rho_t$  es la densidad del gas a  $p_t$ .

Despejando " $\ln \frac{p}{p_t}$ " de la Ec. (4.3.2.8):

$$\ln \frac{p}{p_t} = - \frac{g\rho_t Z}{p_t} \quad (4.3.2.9)$$

ó

$$\ln p - \ln p_t = - \frac{g\rho_t}{p_t} Z \quad (4.3.2.10)$$

Si la ecuación anterior se hace  $(-Z) = D$  y se considera un gas ideal donde

$$\frac{p_t}{\rho_t} = \frac{P_{atm}}{\rho_{atm}} \quad (4.3.2.11)$$

Pudiéndose escribir finalmente:

$$\ln p = \ln p_t + \frac{g}{g_c} \frac{\rho_t}{P_t} D \quad (4.3.2.12)$$

ó:

$$\ln p = \ln p_t + \frac{g}{g_c} \frac{\rho_{atm}}{P_{atm}} D \quad (4.3.2.13)$$

Que representan las ecuaciones para columnas de gas.

#### 4.4 Ley de Darcy.

En 1856, como resultado de estudios experimentales de flujo de agua a través de filtros de arena no consolidada, el francés - Henry Darcy dedujo la fórmula que lleva su nombre. La ley se ha extendido, con ciertas limitaciones, al movimiento de otros fluidos incluyendo dos o más fluidos no miscibles en rocas consolidadas y otros medios porosos.

Darcy descubrió que el gasto que pasaba a través de un filtro de arena, Fig. (4.5) era proporcional al gradiente de presión - aplicado al area transversal al flujo e inversamente proporcional a la longitud del empacamiento<sup>2</sup>.

Matemáticamente:

$$Q = CA \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (4.4.1)$$

donde:

Q = gasto de agua, hacia abajo a través del empacamiento de arena.

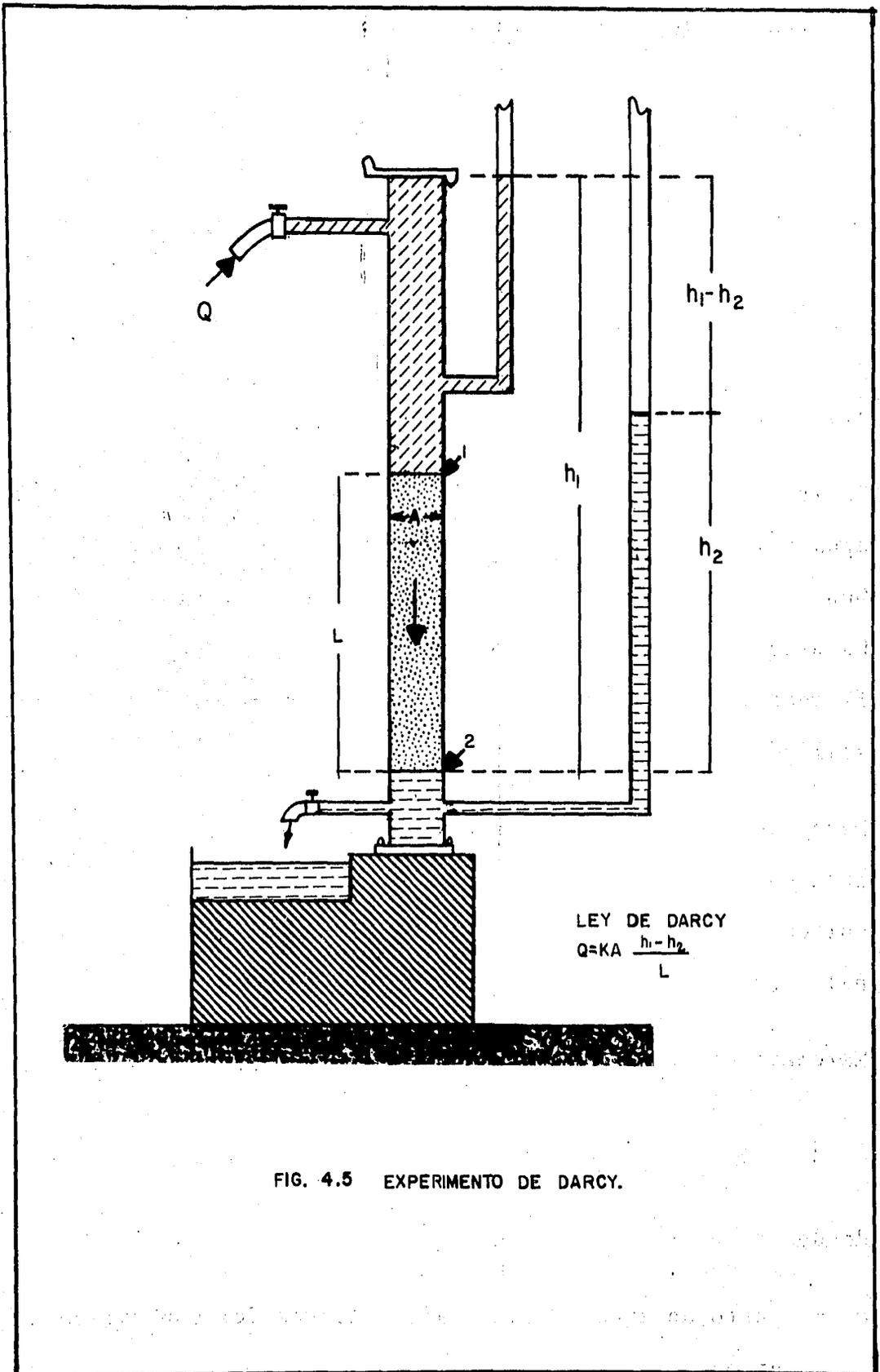


FIG. 4.5 EXPERIMENTO DE DARCY.

A = área transversal del empacamiento.

L = longitud del empacamiento.

$h_1$  y

$h_2$  = alturas de nivel de agua en los manómetros colocados a la entrada y a la salida del empacamiento respecto al nivel de referencia.

c = constante de proporcionalidad, característica del empacamiento.

Al aplicarse la ley a otros fluidos se encontró que la constante c podía ser considerada como  $K/\mu$ , donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido y K una propiedad (permeabilidad) exclusiva de la roca.

La forma general de la ley de Darcy para el flujo de fluidos a través de un medio poroso es:

$$V_s = - \frac{K}{\mu} \left[ \frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds} \right] \quad (4.4.2)$$

Donde:

s = distancia a lo largo de la dirección de flujo.

$V_s$  = ritmo de flujo a través de una área unitaria del medio poroso en la unidad de tiempo. ( $V_s = Q/A$ ).

z = coordenada vertical dirigida hacia abajo.

$\rho$  = densidad del fluido.

g = aceleración de la gravedad.

$\frac{dp}{ds}$  = gradiente de presión a lo largo de s en el punto al que

se refiere  $V_s$ .

$\frac{dz}{ds} = \text{sen } \theta$  (ver Fig. 4.6).

$\mu$  = viscosidad del fluido.

$K$  = permeabilidad del medio poroso.

$\theta$  = ángulo que forma la dirección del flujo con la horizontal.

Si  $\theta = 0^\circ$  el flujo es horizontal y la Ec. (4.4.2) queda:

$$q = - \frac{KA}{\mu} \frac{dp}{ds} \quad (4.4.3)$$

Donde:

$$q \left[ \text{cm}^3/\text{seg} \right]; \mu \left[ \text{cp} \right]; s \left[ \text{cm} \right]; A \left[ \text{cm}^2 \right]; P \left[ \text{atmósfera} \right]; K \left[ \text{Darcys} \right]$$

A las que se le dá el nombre de unidades de Darcy. Lo anterior se puede expresar con palabras de la siguiente manera:

" Un medio poroso tiene una permeabilidad de un darcy si al hacer pasar un fluido a través de él, de viscosidad de un centipoise, con una área transversal al flujo de  $1 \text{ cm}^2$ , una longitud de medio poroso de  $1 \text{ cm}$ , con un gasto de  $1 \text{ cm}^3/\text{seg}$ , ocurre una caída de presión de una atmósfera "3.

Como la caída de presión aumenta en la dirección al flujo, el signo negativo de la Ec. (4.4.3) se requiere para contrarrestar el signo negativo del gradiente.

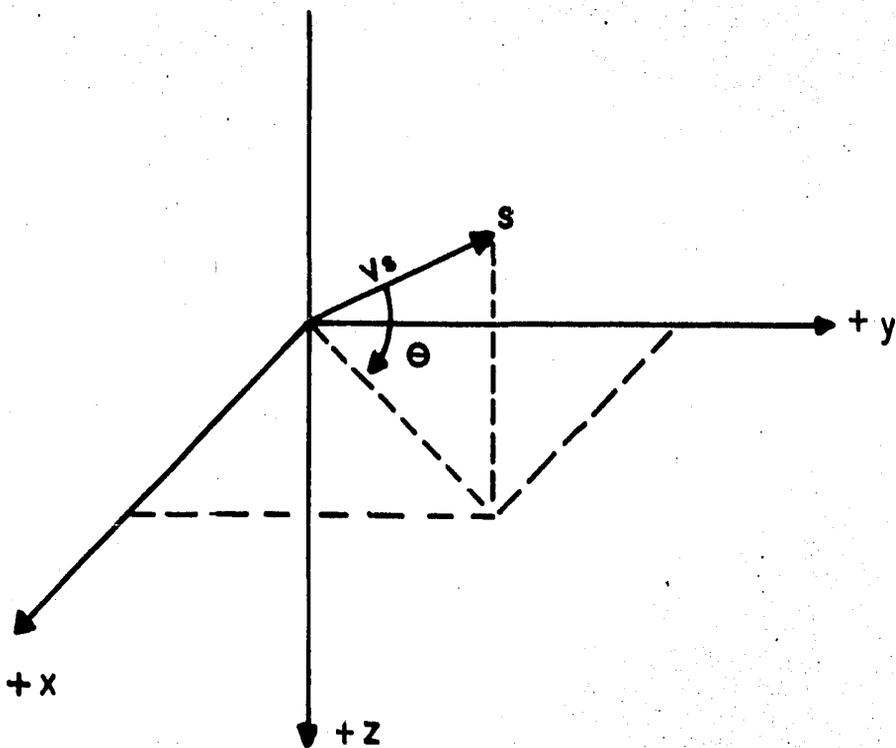


FIG. 4.6 DIRECCION DE FLUJO EN LA EC. DE Darcy.

La validez de dicha ecuación presupone las consideraciones siguientes:

- a) Fluido homogéneo (una sola fase).
- b) No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso.
- c) La permeabilidad es independiente del fluido, de la temperatura, de la presión y de la localización.
- d) Régimen laminar.
- e) No existe efecto de Klinkenberg.
- f) Flujo permanente e incompresible.
- g) El fluido satura 100% al medio poroso.

Hay que hacer notar que la velocidad a la que se refiere la ecuación de Darcy es la velocidad aparente, por lo que si se desea evaluar la velocidad real habrá que dividir la velocidad aparente entre la porosidad efectiva del medio, ésto es:

$$v_{\text{med.}} = \frac{\mu}{\phi_e}$$

Donde:

$v_{\text{med.}}$  = velocidad real o media.

$\mu$  = velocidad aparente.

$\phi_e$  = porosidad efectiva.

La ecuación de Darcy en forma vectorial se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{\vec{\mu}}{\phi} = - \frac{\vec{k}}{\mu \phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (4.4.4)$$

Donde:

$\frac{\partial \phi}{\partial s}$  = gradiente del potencial total (gravitacional y de presión).

#### 4.4.1. Dimensiones de la permeabilidad.

Un análisis de las dimensiones de cada una de las variables de la Ec. de Darcy proporciona las dimensiones de la permeabilidad. Esto es:

Dejando K de la Ec. (4.4.3)

$$K = - \frac{q \mu}{A} \frac{ds}{dp} \quad (4.4.1.1)$$

Donde:

$$q = \left[ \frac{L^3}{T} \right]; \quad \mu = \left[ \frac{M}{TL} \right]; \quad A = \left[ L^2 \right]; \quad ds = \left[ L \right];$$

$$dp = \left[ \frac{M}{T^2 L} \right]$$

Sustituyendo estas dimensiones en la Ec. (4.4.1.1):

$$K = \frac{\left[ \frac{L^3}{T} \right] \left[ \frac{M}{TL} \right] \left[ L \right]}{\left[ L^2 \right] \left[ \frac{M}{T^2 L} \right]} = \left[ L^2 \right]$$

Lo que indica que la permeabilidad tiene dimensiones de longitud al cuadrado.

De manera análoga se puede obtener la relación que hay entre un darcy y cualquier unidad de longitud al cuadrado. A continuación se muestra como ejemplo, la manera de obtener la equivalencia de 1 darcy a  $\text{cm}^2$ .

Con la Ec. (4.4.1.1)

$$K = - \frac{q\mu}{A} \frac{ds}{dp}$$

Y utilizando las unidades de Darcy:

$$K [1 \text{ darcy}] = \frac{\left[ \frac{1 \text{ cm}^3}{\text{seg}} \right] [1 \text{ cp}] [1 \text{ cm}]}{\left[ 1 \text{ cm}^2 \right] [1 \text{ atmósfera}]}$$

Como:

$$1 \text{ cp} = 0.01 \frac{\text{dina} \cdot \text{seg}}{\text{cm}^2}$$

$$1 \text{ atmósfera} = 1.033 \text{ Kg}_f/\text{cm}^2$$

$$1 \text{ Kg}_f = 980600 \text{ dinas.}$$

Haciendo las sustituciones necesarias:

$$K [1 \text{ darcy}] = \frac{\left[ \frac{1 \text{ cm}^3}{\text{seg}} \right] \left[ 0.01 \frac{\text{dina} \cdot \text{seg}}{\text{cm}^2} \right] [1 \text{ cm}]}{\left[ 1 \text{ cm}^2 \right] \left[ 1.033 \times 980600 \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \right]}$$

$$1 \text{ darcy} = 9.872 \times 10^{-9} \text{ cm}^2.$$

#### 4.5. Ecuación de continuidad.

La descripción matemática del flujo de fluidos en medios porosos está basada en la ley de la conservación de la masa, la cual establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo, es decir,  $dm/dt = 0$ . La ecuación de continuidad, que es una consecuencia de la aplicación de dicha ley, determina, para un cierto elemento de medio poroso, que la rapidez de crecimiento de la masa dentro del elemento es exactamente igual al flujo neto de masa hacia el mismo elemento.

Considérese un pequeño paralelepípedo de un medio poroso cuyas dimensiones son  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ; a través del cual existe flujo en todas las caras como lo muestra la Fig. (4.7).

Haciéndose un balance de materia durante un intervalo pequeño de tiempo  $\Delta t$ , se puede considerar que el flujo de masa por unidad de superficie es igual a la velocidad multiplicada por la densidad ( $v\rho$ ).

Dimensionalmente:

$$\frac{L}{T} \frac{M}{L^3} = \frac{M}{TL^2}$$

Ahora bien, si el flujo de masa se multiplica por el área transversal al flujo se obtiene como resultado el flujo másico.

$$v\rho A = \rho q \quad (4.5.1)$$

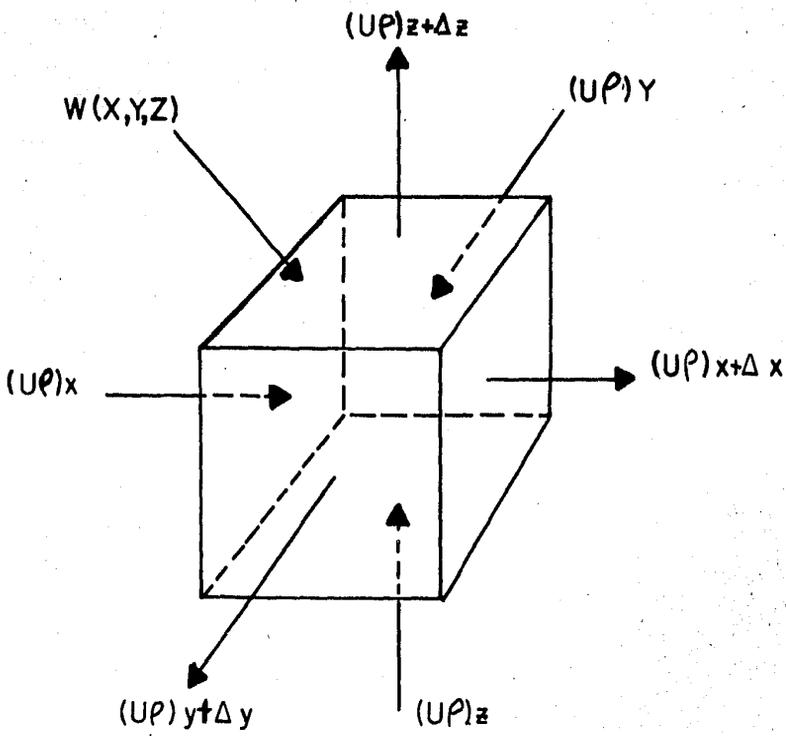
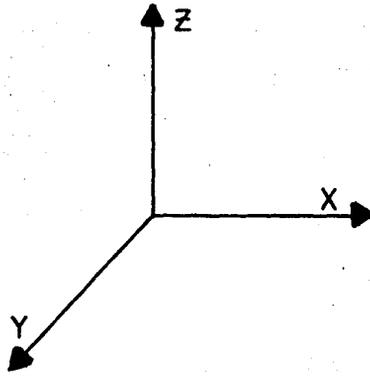


FIG. 4.7 DEDUCCION DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD A PARTIR DE UN BALANCE DE MASA.

Dimensionalmente:

$$\frac{L M L^2}{T L^3} = \frac{M L^3}{L^3 T} = \frac{M}{T}$$

Por otra parte se puede considerar que la entrada de masa al elemento considerado es positiva (inyección), mientras que la salida de masa en dicho elemento se considera negativa (producción). El término fuente o sumidero se representa por  $W(x, y, z)$ , el cual tiene unidades de masa por unidad de volumen de roca.

$$W(x, y, z) \left[ \frac{\text{masa}}{\text{unidad de volumen de roca}} \right]$$

$W(x, y, z)$  (+) Inyección.

$W(x, y, z)$  (-) Producción.

Ahora bien, la masa de fluido en el elemento es:

En el tiempo  $t$  (inicial)

$$\Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_t \tag{4.5.2}$$

En el tiempo  $t + \Delta t$  (final)

$$\Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_{t + \Delta t} \tag{4.5.3}$$

Del principio de conservación de masa:

$$\begin{aligned} & (\text{Masa que entra}) - (\text{Masa que sale}) \pm \text{Término fuente} \\ & \text{o sumidero} = \text{Nueva acumulación de masa.} \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

$$\text{Acumulación} = (\text{masa final}) - (\text{masa inicial}) \quad (4.5.5)$$

La cara  $\Delta y, \Delta z$  es perpendicular al flujo en la dirección "x", - por lo cual la cantidad de masa neta que entra en la dirección - x se expresa como:

$$\Delta t \left[ (\rho v)_x - (\rho v)_{x + \Delta x} \right] \Delta y \Delta z \quad (4.5.6)$$

Análogamente para las direcciones "y" y "z" se obtienen expresiones similares:

$$\Delta t \left[ (\rho v)_y - (\rho v)_{y + \Delta y} \right] \Delta x \Delta z \quad (4.5.7)$$

$$\Delta t \left[ (\rho v)_z - (\rho v)_{z + \Delta z} \right] \Delta y \Delta x \quad (4.5.8)$$

Ahora la acumulación puede escribirse, según las expresiones - (4.5.2) y (4.5.3), de la manera siguiente:

$$\text{Acumulación} = \Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_{t + \Delta t} - \Delta x \Delta y \Delta z (\phi \rho)_t \quad (4.5.9)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (4.5.6), (4.5.7), (4.5.8) y sus tituyendo en la expresión (4.5.4):

$$\begin{aligned} & \Delta t \left[ (\rho v)_x - (\rho v)_{x + \Delta x} \right] \Delta y \Delta z + \Delta t \left[ (\rho v)_y - (\rho v)_{y + \Delta y} \right] \Delta x \Delta z \\ & + \Delta t \left[ (\rho v)_z - (\rho v)_{z + \Delta z} \right] \Delta y \Delta x \pm W(x, y, z) = \Delta x \Delta y \Delta z \\ & \left[ (\phi \rho)_{t + \Delta t} - (\phi \rho)_t \right] \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Dividiendo entre  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$  la Ec. (4.5.10)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(\rho v)_{x+\Delta x} - (\rho v)_x}{\Delta x} - \frac{(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y}{\Delta y} - \frac{(\rho v)_{z+\Delta z} - (\rho v)_z}{\Delta z} \\
 & \pm \frac{W(x, y, z)}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} = \frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

Tomando límites cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  y recordando la definición de derivada de una función que dice:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \tag{4.5.12}$$

Se tiene que:

$$- \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \pm W(x, y, z) = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \tag{4.5.13}$$

La expresión (4.5.13) es la forma general de la ecuación de continuidad en un medio poroso.

#### 4.6. Ecuación de difusividad.

Sustituyendo los componentes de la velocidad de la ley de Darcy en la ecuación de continuidad se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho K_x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho K_y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho K_z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \pm W(x, y, z) \\
 & = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

La expresión anterior es la ecuación general de difusividad que representa el flujo de un solo fluido a través de un medio poroso.

Para el flujo de varios fluidos es necesario considerar que el medio poroso estará sujeto a variaciones en la saturación por lo que después de proceder en forma similar a la anterior, la ecuación de difusividad para flujo multifásico en donde  $K_f$  representa la permeabilidad efectiva al fluido en cuestión, está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho K_f x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho K_f y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho K_f z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \pm W(x, y, z) = \frac{\partial (Sf\phi\rho)}{\partial t} \quad (4.6.2)$$

Para la solución de esta ecuación es necesario utilizar una ecuación de estado que relaciona la densidad con la presión. Dichas ecuaciones se tratan un poco más adelante en este mismo capítulo.

#### 4.7. Clasificación de los fluidos según su compresibilidad.

Dependiendo de su compresibilidad los fluidos de un yacimiento se clasifican en tres grupos que son:

- a) Fluidos incompresibles.
- b) Fluidos ligeramente compresibles.
- c) Fluidos compresibles.

En un fluido incompresible, la densidad de los fluidos se considera constante.

Un fluido se denomina ligeramente compresible si su densidad se

puede considerar como una función lineal de presión, ésto es, la compresibilidad del fluido es constante.

Finalmente un fluido compresible es aquél que presenta un cambio significativo en su densidad con la presión. La Fig. (4.8) - muestra gráficamente esta clasificación de los fluidos.

#### 4.8. Ecuaciones de estado.

Cualquier ecuación de estado puede representarse analíticamente por una función:

$$F(\text{PRESION, DENSIDAD, TEMPERATURA}) = 0 \quad (4.8.1)$$

Existen varias ecuaciones de estado dependiendo del tipo de fluido que se esté manejando. A continuación se desarrollan cada una de estas ecuaciones.

##### 4.8.1. Ecuación de estado para fluido incompresible.

La ecuación de estado para fluidos incompresibles es muy simple, pues basta considerar que la densidad permanece constante. Así pues:

$$\rho = \text{constante} \quad (4.8.1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.8.1.2)$$

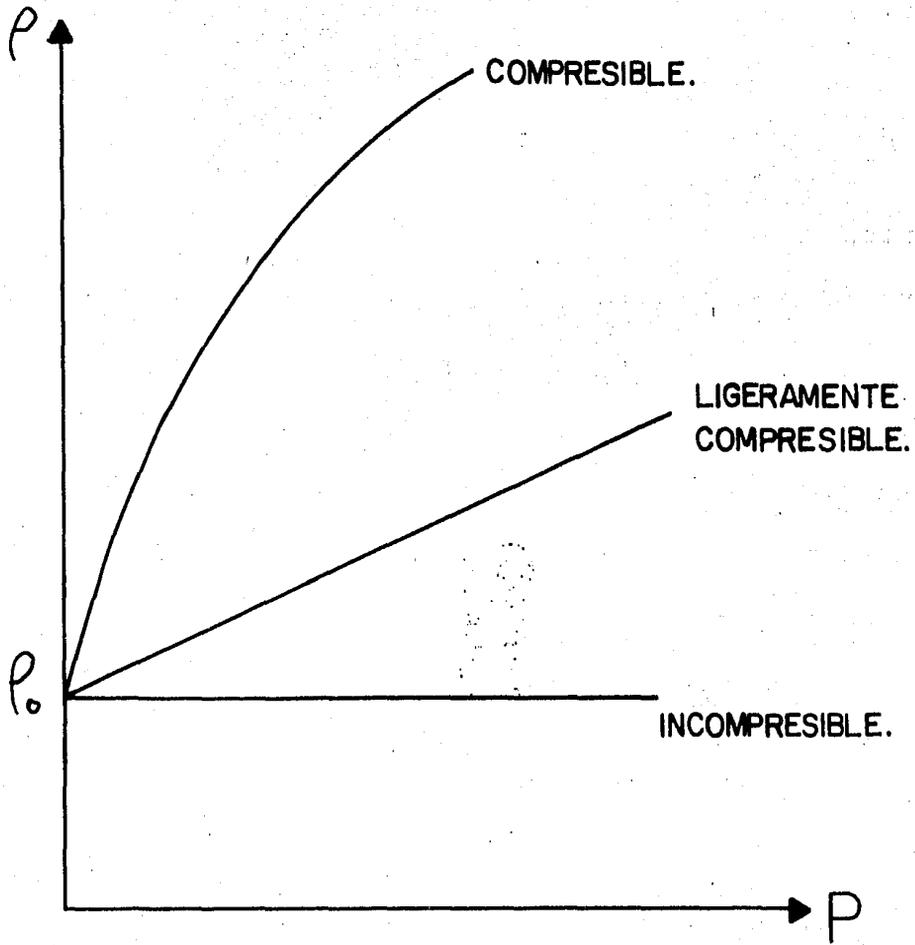


FIG.4.8 TIPOS DE FLUIDOS EN FUNCION DE SU COMPRESIBILIDAD.

4.8.2. Ecuación de estado para fluido ligeramente compresible.

Por definición de compresibilidad:

$$C = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (4.8.2.1)$$

Como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4.8.2.2)$$

Despejando "V" de la Ec. anterior:

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (4.8.2.3)$$

Derivando la ecuación (4.8.6) con respecto a la presión, se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\rho \frac{\partial m}{\partial P} - m \frac{\partial \rho}{\partial P}}{\rho^2} \quad (4.8.2.4)$$

Sustituyendo (4.8.2.4) y (4.8.2.3) en la Ec. (4.8.2.1):

$$C = - \frac{1}{\frac{m}{\rho}} \left( - \frac{m \frac{\partial \rho}{\partial P}}{\rho^2} \right) \quad (4.2.8.5)$$

Simplificando:

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (4.8.2.6)$$

Como:

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad (4.8.2.7)$$

Despejando "CdP" de la Ec. (4.8.2.7) se tiene:

$$CdP = \frac{1}{\rho} d\rho \quad (4.8.2.8)$$

Integrando de  $P_0$  a  $P$

$$\int_{P_0}^P CdP = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.8.2.9)$$

Se obtiene:

$$C(P - P_0) = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (4.8.2.10)$$

Despejando " $\rho$ " de la Ec. anterior:

$$\rho = \rho_0 e^{C(P - P_0)} \quad (4.8.2.11)$$

Donde:

$\rho_0$  = Densidad inicial del fluido evaluada a la presión inicial ( $P_0$ )

$P$  = Presión medida a cualquier tiempo.

Recordando la fórmula de expansión de una función "f(z)", en las cercanías del valor conocido de la función por medio de la serie de Taylor, siendo "a" el punto conocido:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)(z-a)}{1!} + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a)(z-a)^n}{n!} \quad (4.8.2.12)$$

Por lo que la función  $f(x) = e^x$  se puede expandir alrededor del punto  $x = 0$ , entonces:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (4.8.2.13)$$

Por lo tanto:

$$e^{CP} = 1 + \frac{CP}{1!} + \frac{C^2P^2}{2!} + \frac{C^3P^3}{3!} + \dots + \frac{C^nP^n}{n!} \quad (4.8.2.14)$$

En la mayoría de los casos para líquidos, se cumple que:

$$CP < 0.01$$

$$C^2P^2 < 0.0001$$

Por lo que la expresión (4.8.2.14) se puede simplificar a:

$$e^{CP} = 1 + CP \quad (4.8.2.15)$$

Sustituyendo esta última expresión en la Ec. (4.8.2.11):

$$\rho = \rho_0 (1 + CP) \quad (4.8.2.16)$$

La expresión (4.8.2.16) es la ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible.

### 4.8.3. Ecuaciones de estado, para fluidos compresibles.

a) Para un gas ideal.

Recordando la ecuación general de los gases ideales:

$$PV = nRT \quad (4.8.3.1)$$

Donde:

$$n = \frac{\text{masa}}{\text{peso molecular}} \quad (\text{número de moles})$$

$$n = \frac{m}{M} \quad (4.8.3.2)$$

Sustituyendo la Ec. (4.8.3.2) en la Ec. (4.8.3.1) se tiene:

$$PV = \frac{m}{M} RT \quad (4.8.3.3)$$

Recordando la Ec. (4.8.2.2):

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Sustituyendo esta última expresión en la Ec. (4.8.3.3) y despejando " $\rho$ " se tiene:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \quad (4.8.3.4)$$

que es la ecuación de estado para un gas ideal.

b) Para un gas real.

Si se procede de manera análoga introduciendo el factor de compresibilidad en la Ec. (4.8.3.1) se llega a la expresión que representa la ecuación de estado para los gases reales. Dicha expresión es:

$$\rho = \frac{PM}{ZRT} \quad (4.8.3.5)$$

4.9 Ecuación de difusividad para los diferentes tipos de fluidos.

4.9.1. Ecuación de difusividad para fluido incompresible.

Recordando la ecuación general de difusividad dada por la expresión (4.6.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{K_x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{K_y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{K_z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \pm W(x, y, z) = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}$$

Definiendo:

$$q = \text{Ritmo de Inyección} \left[ \frac{\text{vol. fluido inyectado a c.s/día}}{\text{vol. de roca}} \right] \quad (4.9.1)$$

Además:

$W(x, y, z) =$  Ritmo de inyección de masa por unidad de volumen.

$$W(x, y, z) = qB\rho \quad (4.9.2)$$

$$W(x, y, z) = \left[ \frac{\text{Vol. a c.s}}{\text{día-Vol.roca}} \right] \left[ \frac{\text{Vol. a c.y}}{\text{Vol. a c.s}} \right] \left[ \frac{\text{masa}}{\text{Vol. a c.y}} \right]$$

Donde:

$B =$  Factor de volumen del fluido inyectado.

Sustituyendo las Ecs. (4.9.2) y (4.8.1.2) en la ecuación de difusividad:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{K_x}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{K_y}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{K_z}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + q B \rho = 0 \quad (4.9.3)$$

Multiplicando la Ec. (4.9.3) por  $\frac{\mu}{\rho} = \text{constante}$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \mu q B = 0 \quad (4.9.4)$$

Si el medio es isotrópico y homogéneo, esto es:

$$K_x = K_y = K_z = K$$

Dividiendo la Ec. (4.9.4) entre K:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{\mu q B}{K} = 0 \quad (4.9.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\mu q B}{K} = 0 \quad (4.9.6)$$

La expresión (4.9.6) es la Ec. de difusividad para un fluido incompresible, la cual puede escribirse de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\mu q B}{K} = 0 \quad (4.9.7)$$

A la Ec. (4.9.7) se le conoce como Ecuación de Poisson.

Si no existe inyección la Ec. (4.9.7) se simplifica a:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.9.8)$$

A esta última expresión se le conoce como Ecuación de Laplace.

#### 4.9.2. Ecuación de difusividad para fluido ligeramente compresible.

La compresibilidad para un fluido ligeramente compresible está dada por la Ec. (4.8.2.6):

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$$

Para obtener la variación de la presión en las direcciones "x, y, z", bastará con despejar "dP" de la Ec. (4.8.2.6) y derivar respecto a cada una de las direcciones correspondientes.

Despejando "dP"

$$dP = \frac{1}{C\rho} \frac{d\rho}{1} \quad (4.9.2.1)$$

Derivando con respecto a "x, y, z"

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{C\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (4.9.2.2)$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{C\rho} \frac{d\rho}{dy} \quad (4.9.2.3)$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{C\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (4.9.2.4)$$

Si el espesor del yacimiento es pequeño y de bajo relieve estructural, es decir para flujo horizontal, se puede hacer la

consideración de que el potencial de flujo es aproximadamente igual a la presión:

$$\phi = P \quad (4.9.2.5)$$

Ahora bien, si no se tiene inyección en ningún pozo, la Ec. (4.9.2) se iguala a cero, ésto es:

$$W(x, y, z) = 0.$$

Tomando en cuenta estas consideraciones y sustituyendo las Ecs. (4.9.2.2), (4.9.2.3), (4.9.2.4) y (4.9.2.5) en la Ecuación de difusividad dada por la expresión (4.6.1) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho K_x}{\mu} \frac{1}{C\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho K_y}{\mu} \frac{1}{C\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho K_z}{\mu} \frac{1}{C\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\ & = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.9.2.6)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x}{\mu} \frac{1}{C} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y}{\mu} \frac{1}{C} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z}{\mu} \frac{1}{C} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (4.9.2.7)$$

Considerando un medio isotrópico ( $K_x = K_y = K_z = K$ ), viscosidad constante y multiplicando la Ec. (4.9.2.7) por  $\frac{\mu C}{K}$ , se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.9.2.8)$$

Debido a que la Ec. (4.9.2.8) no es muy práctica para su aplica-

ción en la forma obtenida por la dificultad que presenta la evaluación de las densidades, conviene expresarla en función de la presión. Para ello se procede como sigue:

Recordando la Ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible dada por la expresión (4.8.2.16):

$$\rho = \rho_0 (1 + CP)$$

Y sustituyendo en la Ec. (4.9.2.8) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial [\rho_0 (1 + CP)]}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial [\rho_0 (1 + CP)]}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial [\rho_0 (1 + CP)]}{\partial z} \right] \\ & = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial [\rho_0 (1 + CP)]}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.9.2.9)$$

Siendo " $\rho_0$ " la densidad inicial del fluido (constante), entonces:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \quad (4.9.2.10)$$

Por lo que en las direcciones "x, y, z" se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0 + C \rho_0 \frac{\partial P}{\partial x}) \quad (4.9.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (0 + C \rho_0 \frac{\partial P}{\partial y}) \quad (4.9.2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (0 + C \rho_0 \frac{\partial P}{\partial z}) \quad (4.9.2.13)$$

Sustituyendo las expresiones (4.9.2.11), (4.9.2.12) y (4.9.2.13) en la Ec. (4.9.2.9) y factorizando se tiene:

$$C \rho_0 \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = \frac{\phi \mu C^2}{K} \rho_0 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.2.14)$$

Dividiendo entre " $C\rho_0$ ":

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.2.15)$$

Haciendo

$$\alpha = \frac{K}{\phi \mu C} \quad (4.9.2.16)$$

Al término  $\alpha$  se le dá el nombre de constante de difusividad.

Sustituyendo (4.9.2.16) en la Ec. (4.9.2.15) se tiene finalmente:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.2.17)$$

La expresión (4.9.2.17) es la ecuación de difusividad para un fluido ligeramente compresible habiendo hecho las siguientes consideraciones:

- a) Medio isotrópico y homogéneo.
- b) Viscosidad constante.
- c) Compresibilidad constante.
- d) No existe el término fuente, ésto es, no hay pozos inyectoros.

La importancia que tiene esta ecuación es trascendente, debido a su múltiple utilidad. Entre otras aplicaciones, se tienen las siguientes:

- a) Pruebas de presión (incremento, decremento, interferencia, etc.).
- b) Pruebas de límite de yacimiento.
- c) Simulación de yacimientos.

#### 4.9.3. Ecuación de difusividad para un gas real.

Recordando la ecuación de estado para un gas real, dada por la expresión (4.8.2.3)

$$\rho = \frac{PM}{ZRT}$$

Y substituyéndola en la ecuación general de difusividad dada por la expresión (4.6.1.). Además suponiendo que no existe inyección, ésto es  $W(x, y, z) = 0$  y que la porosidad es constante, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{PM}{ZRT} \frac{Kx}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{PM}{ZRT} \frac{Ky}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{PM}{ZRT} \frac{Kz}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ & = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{PM}{ZRT} \right) \end{aligned} \quad (4.9.3.1)$$

Definiendo el potencial de un gas real como:

$$m(P) = \int_{P_0}^P \frac{2\xi}{\mu(\xi)Z(\xi)} d\xi \quad (4.9.3.2)$$

Derivando con respecto a "P" y con respecto a "t":

$$\frac{\partial m(P)}{\partial P} = \frac{2P}{\mu(P)Z(P)} \quad (4.9.3.3)$$

$$\frac{\partial m(P)}{\partial t} = \frac{2P}{\mu(P)Z(P)} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.3.4)$$

Pero además:

$$\frac{\partial m(P)}{\partial x} = \frac{\partial m(P)}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2P}{\mu(P)Z(P)} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.9.3.5)$$

$$\frac{\partial m(P)}{\partial y} = \frac{\partial m(P)}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2P}{\mu(P)Z(P)} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.9.3.6)$$

$$\frac{\partial m(P)}{\partial z} = \frac{\partial m(P)}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2P}{\mu(P)Z(P)} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.9.3.7)$$

Multiplicando por  $\frac{2RT}{M}$  la Ec. (4.9.3.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2P}{\mu z} K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2P}{\mu z} K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2P}{\mu z} K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 2\phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) \quad (4.9.3.8)$$

Sustituyendo las Ecs. (4.9.3.5), (4.9.3.6) y (4.9.3.7) en esta última expresión se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial m(P)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial m(P)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial m(P)}{\partial z} \right) = 2\phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) \quad (4.9.3.9)$$

Derivando el lado derecho de esta última ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) = \frac{Z \frac{\partial P}{\partial t} - P \frac{\partial Z}{\partial t}}{Z^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{P}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{P}{Z} \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.3.10)$$

Como la compresibilidad del gas está dada por:

$$C_g = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial P} \quad (4.9.3.11)$$

La Ec. (4.9.3.10) se puede escribir sustituyendo la Ec. (4.9.3.11) como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) = \frac{P}{Z} \frac{C_g}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.3.12)$$

Multiplicando el lado derecho de esta última expresión por  $\frac{2\mu}{2\mu}$ , lo que no altera la Ecuación, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) = \frac{2P}{\mu Z} \frac{\mu C_g}{2} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.3.13)$$

Recordando la Ec. (4.9.3.4) que expresa:

$$\frac{\partial m(P)}{\partial t} = \frac{2P}{\mu(P)Z(P)} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Y sustituyéndola en la Ec. (4.9.3.13)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) = \frac{\mu C_g}{2} \frac{\partial m(P)}{\partial t} \quad (4.9.3.14)$$

Suponiendo un medio isotrópico homogéneo donde  $K_x=K_y=K_z = K$ , sustituyendo la Ec. (4.9.3.14) en la Ec. (4.9.3.9) y dividiendo entre  $K$  se tiene:

$$\frac{\partial^2 m(P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m(P)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m(P)}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu C_g}{K} \frac{\partial m(P)}{\partial t} \quad (4.9.3.15)$$

Que se puede escribir como:

$$\nabla^2 m(P) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial m(P)}{\partial t} \quad (4.9.3.16)$$

Esta expresión es la Ecuación de difusividad para un gas real en el cual no existe término fuente y donde  $\alpha$  es la constante de difusividad que ha sido definida con anterioridad -Ec. (4.9.2.16)-.

En la mayor parte de los problemas de simulación de yacimientos, así como en las ecuaciones presentadas anteriormente, se usan coordenadas cartesianas. Sin embargo, se ha comentado que existen estudios de simulación a nivel de pozos individuales para los cuales se puede representar mejor el sistema de flujo mediante el uso de otro tipo de coordenadas. La siguiente es la ecuación de difusividad en coordenadas cilíndricas sin variación vertical de la presión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.9.3.17)$$

Su desarrollo y su solución que puede encontrarse en la literatura<sup>7</sup>, están fuera del objetivo de este trabajo.

#### 4.10. Condiciones iniciales y condiciones de frontera.

Una vez que han sido definidas las ecuaciones que servirán para describir el proceso físico que ocurre en el yacimiento, es necesario establecer ciertas condiciones en el sistema que permitan la solución de dichas ecuaciones.

Cuando una de las variables independientes en una ecuación diferencial parcial es el tiempo, (como ocurre en las ecuaciones que se han desarrollado) es necesario conocer, entre otras cosas, la variable dependiente a un tiempo inicial ( $t_0$ ) para poder obtener la solución de la ecuación a otros tiempos.

Todo sistema en equilibrio en un tiempo cero permanecería así, a menos que ocurra alguna perturbación. En un yacimiento petrolero, éste permanece en "equilibrio" hasta que se perfora el primer pozo, momento en el que se provoca un disturbio en el sistema (un abatimiento de presión local) con el cual el yacimiento empieza a reaccionar reajustando su presión y su flujo a través del mismo.

En la simulación la variable dependiente es con frecuencia la presión y para calcular su distribución en un yacimiento a cualquier tiempo se debe tener la condición inicial, o condiciones iniciales como se les denomina comúnmente, las cuales toman la siguiente forma general:

$$P(x, y, z) = \lambda$$

Donde  $\lambda$  es alguna constante o una función que describe la distribución de un parámetro (presión o saturación) dentro del sistema al tiempo cero.

Supóngase ahora el sistema representado por la Fig. (4.9), el cual consiste en una porción del universo que está separada del resto por una frontera finita. El sistema existe en espacio -

(x, y, z) y en tiempo (t), ésto es se trata de un sistema finito. Es claro que puede hacerse la siguiente observación con respecto al mismo: cualquier cosa que entre o salga del sistema debe atravesar la frontera.

Considérese algún parámetro independiente P del sistema mostrado ahora en la Fig. (4.10). Entre A y C se observa que no existe flujo que cruce la frontera, lo que implica un gradiente igual a cero en esa región. Entre A y B se tiene flujo que atraviesa la frontera, el cual puede ser representado por un determinado valor K. De C a B la frontera está definida por medio de valores fijos del parámetro independiente. Con estas condiciones específicas  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  se ha completado la descripción del contacto que hace el sistema con el resto del universo.

Refiriendo ésto a las ecuaciones que se han desarrollado, si se conoce la presión y/o las primeras derivadas espaciales de la misma en determinadas regiones de un yacimiento para todo valor del tiempo, se dice entonces que se tienen las condiciones de frontera que se requieren para resolver las ecuaciones planteadas.

Así pues, el modelo matemático completo es una combinación de:

- a) Ecuaciones que gobiernan el comportamiento de flujo en el yacimiento.
- b) Condiciones iniciales. Que proporcionan los valores de la variable dependiente a un tiempo inicial ( $t_0$ ).

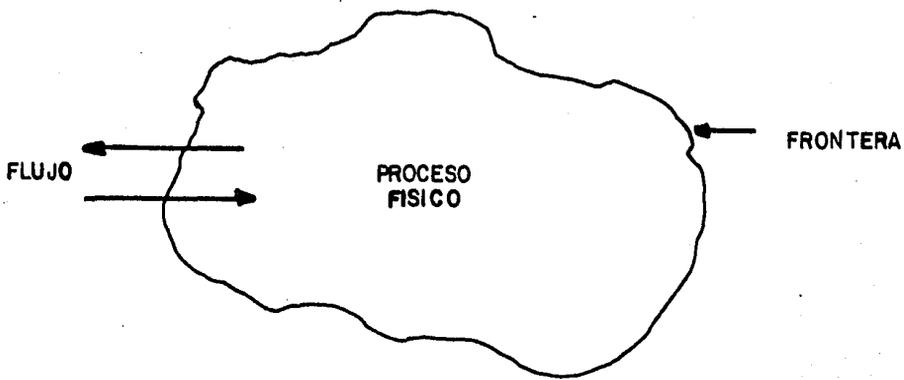


FIG. 4.9 SISTEMA

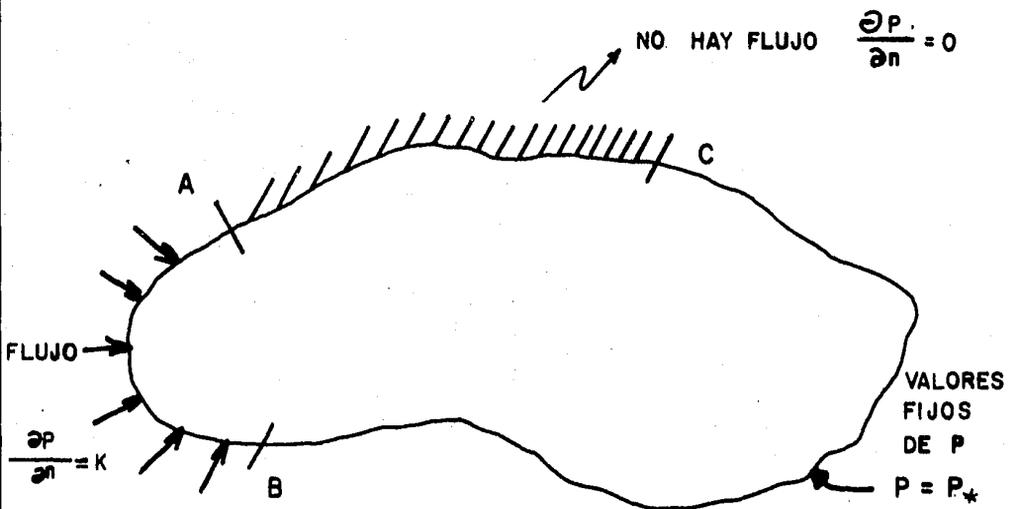


FIG. 4.10 CONDICIONES DE FRONTERA.

c) Condiciones de frontera. Que proporcionan los valores de la variable dependiente en determinadas regiones del yacimiento (fronteras) para cualquier tiempo.

#### 4.10.1. Conceptos de flujo estacionario y no estacionario y su relación con las condiciones de frontera.

Supóngase a una partícula de fluido en movimiento a través del espacio poroso a una velocidad  $v_s$  (Fig. 4.11). La aceleración de la partícula puede obtenerse mediante la determinación de la razón de cambio en su velocidad. Esto es, ya que la velocidad es función de dos variables, distancia (s) y tiempo (t) se tiene:

$$v = f(s, t)$$

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_s dt + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_t ds \quad (4.10.1.1)$$

La ecuación para la aceleración total puede obtenerse derivando la Ec. anterior con respecto al tiempo:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_s \frac{dt}{dt} + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_t \frac{ds}{dt} \quad (4.10.1.2)$$

Dado que  $ds/dt$  es la velocidad, la Ec. (4.10.1.2) puede escribirse como:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_s + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_t v \quad (4.10.1.3)$$

El primer término del lado derecho de la igualdad en la ecuación anterior es la aceleración en un punto, mientras que el segundo término es la aceleración convencional. Analizando ambos términos que corresponden a la aceleración total en la Ec. (4.10.1.3), se puede predecir cuando el flujo es estacionario y cuando el flujo no es estacionario.

Si:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_s = 0 \quad (4.10.1.4)$$

Entonces el flujo es estacionario.

Si:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_s \neq 0 \quad (4.10.1.5)$$

Entonces el flujo no es estacionario.

En términos de presión las Ecs. (4.10.1.4) y (4.10.1.5), se pueden escribir como sigue:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_s = 0 \quad (4.10.1.6)$$

Para flujo estacionario.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_s \neq 0 \quad (4.10.1.7)$$

Para flujo no estacionario.

Supóngase un yacimiento representado en forma cilíndrica con un pozo en su interior como lo muestra la Fig. (4.12). El

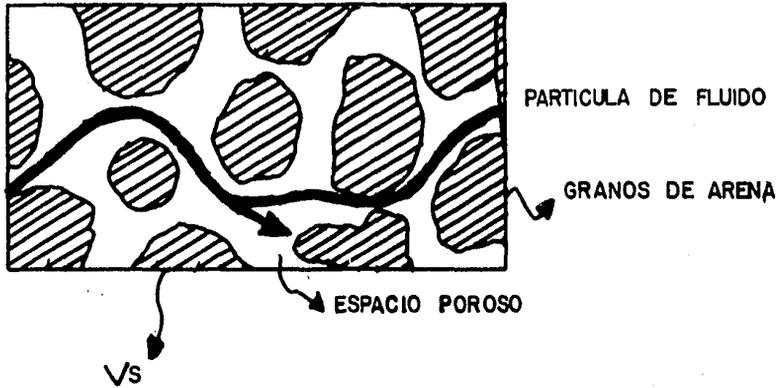


FIG. 4.11 PARTICULA EN MOVIMIENTO A TRAVES DEL MEDIO POROSO.

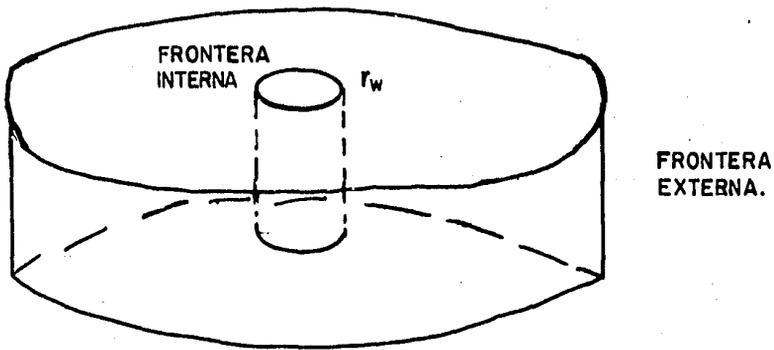


FIG. 4.12 SISTEMA RADIAL.

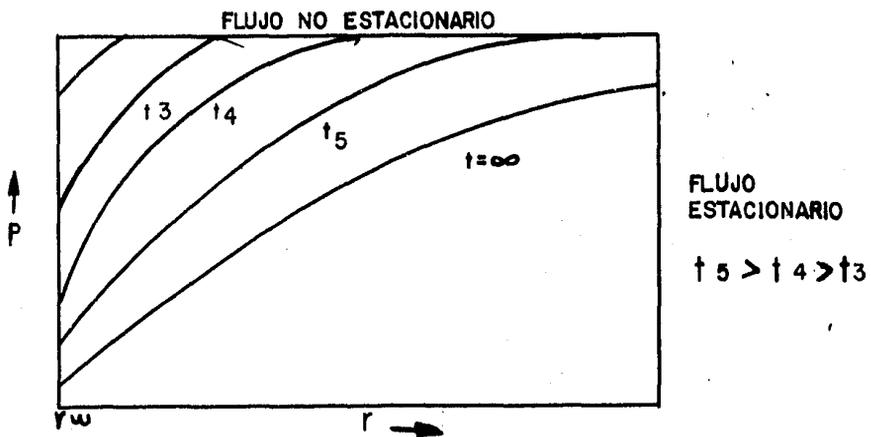


FIG. 4.13 PERFIL DE PRESIONES EN FLUJO RADIAL.

yacimiento permanecerá en equilibrio a menos que exista algún transtorno en alguna de las fronteras. Dependiendo de la naturaleza del transtorno se puede o no tener flujo estacionario. Las condiciones posibles son:

a) En la frontera interna

1.- Presión del pozo constante:

$$P(r_w, t) = \text{Constante}$$

2.- Gasto constante:

$$r \frac{\partial P(r_w, t)}{\partial r} = \text{Constante}$$

3.- Presión del pozo variable:

$$P(r_w, t) = f_1(t)$$

4.- Gasto variable:

$$r \frac{\partial P(r_w, t)}{\partial t} = g_1(t)$$

5.- Pozo cerrado:

$$r \frac{\partial P(r_w, t)}{\partial t} = 0$$

b) En la frontera externa

6.- Presión constante:

$$P(r_e, t) = \text{Constante}$$

7.- Flujo constante a través de la frontera:

$$\frac{\partial P(r_e, t)}{\partial r} = \text{Constante}$$

8.- Flujo variable a través de la frontera:

$$\frac{\partial P(r_e, t)}{\partial r} = f_2(t)$$

9.- No existe flujo a través de la frontera (frontera cerrada):

$$\frac{\partial P(r_e, t)}{\partial t} = 0$$

10.- Yacimiento infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t) = P_i$$

Al producir el pozo la presión a su alrededor (frontera interna) empieza a caer y la onda de abatimiento de presión se mueve hacia los límites del yacimiento. El perfil de presiones como función del tiempo se muestra en la Fig. (4.13).

Algunas combinaciones de frontera interna y externa pueden producir un patrón de flujo estacionario y otras determinadas combinaciones originar el patrón de flujo no estacionario. Un ejemplo de condición que provoca flujo no estacionario es el de frontera externa cerrada, ya que al no existir masa alguna que cruce la frontera, el yacimiento continuará depresionándose todo el tiempo. Para lograr un régimen de flujo estacionario debe de haber algún sostén al sistema en términos de flujo o de presión. Esto se logra en la práctica mediante la presencia de un acuífero adyacente al yacimiento.

## REFERENCIAS

- 1.- Crichlow, B. H.- "Modern Reservoir Engineering - A simulation Approach". Prentice - Hall Inc.
- 2.- Domínguez, G. V.- "Apuntes del Curso Simulación Matemática de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 3.- Rodríguez, R. N. y de la Fuente, G. I.- "Curso Introducción de Simulación Numérica de Yacimientos". Subdirección de Explotación, I.M.P.
- 4.- Ranauld, G. V.- "Mecánica de los fluidos e hidráulica". - Serie de compendios Schaum.
- 5.- Villamar, J.- "Apuntes del Curso Laboratorio de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 6.- Cinco, H. L.- "Apuntes del Curso Evaluación de la Producción". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 7.- Rodríguez, R. N.- "Apuntes del Curso Principios de Mecánica de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.

## CAPITULO 5

MODELO NUMERICO UTILIZANDO DIFERENCIAS FINITAS.

## 5.1 Introducción.

Una vez que ha sido establecido el modelo matemático capaz de describir el proceso físico que se presenta en el yacimiento, se hace necesario obtener su solución. Sin embargo, las ecuaciones que representan el flujo de los fluidos en medios porosos son en general, como ya se ha visto, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales que relacionan los cambios de presión y de saturación a través del medio con respecto al tiempo y para las cuales es casi imposible obtener una solución analítica. De ahí que surja la necesidad de transformar el modelo matemático a un modelo numérico, siendo éste el único camino por medio del cual se puede llegar a una solución que sea aplicable.

En este capítulo se proporcionan las bases para desarrollar el modelo numérico; además, se dan a conocer los tres tipos de esquemas que pueden emplearse en la solución de las ecuaciones de flujo, destacando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

## 5.2 Clasificación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Se ha comentado que las ecuaciones obtenidas al desarrollar tra

bajos de simulación de yacimientos son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por lo que, antes de entrar a explicar las bases para desarrollar el modelo numérico que sustituya a estas ecuaciones, se cree conveniente proporcionar una clasificación general de las mismas.

Se dice que toda igualdad que relaciona a una función desconocida con sus variables independientes y con sus derivadas parciales, es una ecuación diferencial en derivadas parciales. Asimismo, una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden es una ecuación que contiene derivadas hasta de segundo orden y más de una variable independiente. Cabe mencionar que el orden de una ecuación diferencial en derivadas parciales es el de la derivada de mayor orden. Así entonces, la forma más general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes es:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy})$$

(5.2.1)

En donde "x" y "y" son las variables independientes y "u" es la variable dependiente. Normalmente "x" y "y" se refieren a posición, pero en problemas en los que una de las variables sea el tiempo, "y" puede referirse entonces a tiempo. Si los coeficientes A, B y C son funciones únicamente de las variables independientes, son constantes o son cero, la ecuación es lineal. En consecuencia lógica, la ecuación es no lineal si cualquiera A, B ó C, es función de la variable dependiente.

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales pueden clasificarse como elípticas, parabólicas o hiperbólicas, dependiendo del valor del discriminante  $B^2-4AC$ , para un punto dado  $(x, y)$

Así entonces:

Si  $B^2-4AC < 0$  la ecuación es elíptica.

Si  $B^2-4AC = 0$  la ecuación es parabólica.

Si  $B^2-4AC > 0$  la ecuación es hiperbólica.

Como ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elíptico se pueden citar a la ecuación de Laplace - Ec. (5.2.2) y a la ecuación de Poisson Ec. (5.2.3).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \quad (5.2.3)$$

Un ejemplo de ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo parabólico lo proporciona la expresión (5.2.4) que representa el problema clásico de transmisión del calor en una dirección

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \quad (4.2.4)$$

Donde el flujo de calor es en la dirección  $X$ , siendo  $t$  el tiempo y  $K$  una constante que depende de la conductividad térmica, densidad y calor específico del material.

Por último, la ecuación que representa el movimiento de una

cuerda vibrando Ec. (5.2.5) es el ejemplo clásico de una ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo hiperbólico.

$$K^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (t, x) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (t, x) \quad (5.2.5)$$

En donde la función  $y(t, x)$  proporciona la distancia perpendicular a la cuerda en el instante  $t$  en la posición  $x$ .

Existe la posibilidad de tener una ecuación como la Ec. (5.2.6) a la cual puede llamársele ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo mixto, ya que al analizar su discriminante se puede observar lo siguiente:

$$(1 - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.2.6)$$

Cuyo discriminante es:

$$D = (2x)^2 - 4(1 - y)(1 + y)$$

$$D = 4x^2 - 4(1 - y^2)$$

$$D = 4x^2 - 4 + 4y^2$$

$$D = x^2 - y^2 + 1$$

Es elíptica dentro del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  (discriminante negativo), hiperbólica fuera del círculo (discriminante positivo) y parabólica en la frontera (discriminante igual a cero).

Los problemas en los que el signo del discriminante depende de

la solución, pueden presentar dificultades especiales ya que el tipo de ecuación gobierna el número y la naturaleza de las condiciones iniciales y/o de frontera. Es decir, un problema complejo puede tener en un cierto rango, una solución única y bien determinada, mientras que en otro rango, las soluciones pueden ser múltiples y no determinadas o aún no existir. Sin embargo hay que hacer notar que las ecuaciones netamente elípticas, parabólicas o hiperbólicas, se mantienen como tales, independientemente de las dimensiones y del sistema de coordenadas que se considere.

### 5.3 Proceso de discretización. Diferencias finitas.

Quando alguien habla de dar una solución numérica a una ecuación, se está refiriendo a proporcionar resultados en puntos discretos dentro del sistema. El decir que las ecuaciones que se emplean en la simulación serán resueltas en forma numérica implica que se determinarán los parámetros dependientes (presiones y saturaciones) en puntos discretos en espacio y en tiempo.

La discretización del espacio se hace al dividir el yacimiento en un número determinado de celdas, las cuales son generalmente rectangulares como puede apreciarse en la Fig. (5.1). La discretización del tiempo se realiza al tomar intervalos del mismo para cada uno de los cuales el problema es resuelto. La medida de estos intervalos de tiempo depende del problema en particular que se esté manejando, aunque hay que hacer notar que mien-

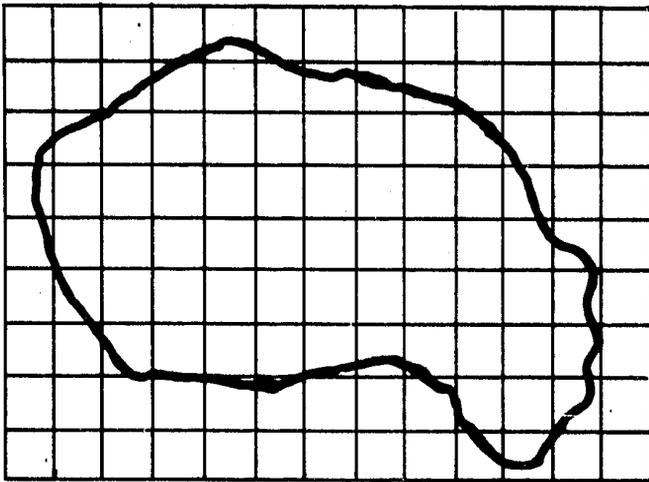


FIG. 5.1 DISCRETIZACION EN ESPACIO.

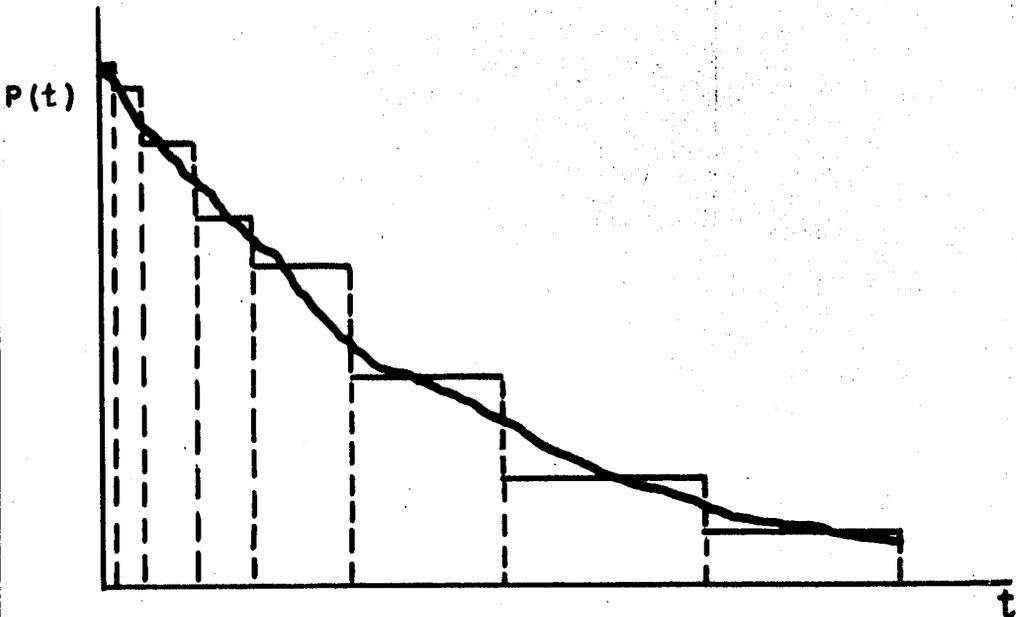


FIG. 5.2 DISCRETIZACION EN TIEMPO.

tras menor sea el intervalo de tiempo utilizado, la solución - que se obtenga será más aproximada, Fig. (5.2). Así entonces, los valores de la variable dependiente al resolver las ecuaciones numéricas se obtienen para cada uno de los bloques que componen la malla y para valores específicos de tiempo.

La transformación de una ecuación diferencial continua a una - forma discreta se hace generalmente utilizando el método de diferencias finitas, que consiste en sustituir las derivadas de - la ecuación diferencial por fórmulas de derivación. Así pues, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son reempla- zadas por su equivalente en diferencias finitas las cuales pue- den obtenerse al expandir el polinomio de Taylor generado por - una función en un punto dado y después resolver para la deriva- da que se requiere.

#### 5.4 Polinomio de Taylor generado por una función.

Si una función  $f(x)$  posee derivadas continuas hasta de orden  $n$  en el punto  $x = 0$ , siendo  $n \geq 1$ , se tratará de obtener un poli- nomio  $P(x)$  que coincida con  $f(x)$  y con sus  $n$  primeras derivadas en  $x = 0$ , ésto es:

$$\begin{aligned} P(0) &= f(0) \\ P'(0) &= f'(0) \\ P''(0) &= f''(0) \\ &\vdots \\ P^n(0) &= f^n(0) \end{aligned}$$

El polinomio buscado deberá de ser de n-ésimo grado para que pueda contar con n derivadas. Dicho polinomio se expresa de la siguiente manera:

$$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n \quad (5.4.1)$$

El problema ahora es determinar los n + 1 coeficientes  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Para obtenerlos se procede de la manera siguiente:

Sustituyendo  $x = 0$  en el polinomio dado por la expresión (5.4.1) se tiene:

$$P(0) = A_0 ; \therefore A_0 = f(0)$$

Derivando la Ec. (5.4.1)

$$P'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + nA_n x^{n-1} \quad (5.4.2)$$

Evaluando para  $x = 0$  la expresión anterior:

$$P'(0) = A_1 ; \therefore A_1 = f'(0)$$

Derivando nuevamente:

$$P''(x) = 2A_2 + (3)(2) A_3 x + \dots + (n)(n-1) A_n x^{n-2} \quad (5.4.3)$$

Evaluando para  $x = 0$  la Ec. (5.4.3)

$$P''(0) = 2A_2 ; \therefore A_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

Volviendo a derivar:

$$P'''(x) = (3)(2) A_3 + \dots + (n)(n-1)(n-2) A_n x^{n-3} \quad (5.4.4)$$

Evaluando para  $x = 0$  la Ec. (5.4.4):

$$P'''(x) = (3)(2)A_3; \quad \therefore A_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

En general:

$$P^K(0) = K! A_K \quad (5.4.5)$$

Despejando " $A_K$ " de la última expresión:

$$A_K = \frac{f^K(0)}{K!} \quad (5.4.6)$$

Donde:

$$K = 1, 2, 3, 4, \dots, n.$$

Sustituyendo los valores que se obtengan para cada una de las derivadas de la Ec. (5.4.6) se tiene:

$$P(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} x^n \quad (5.4.7)$$

Si se desea que el polinomio  $P(x)$  satisfaga a la función  $f(x)$  y a sus  $n$  primeras derivadas pero ahora en el punto  $x = A$ , ésto es:

$$P(A) = f(A)$$

$$P'(A) = f'(A)$$

$$P''(A) = f''(A)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$P^n(A) = f^n(A)$$

Para lograrlo se trasladará el origen "A" unidades en el sentido positivo del eje de las abscisas, el argumento del polinomio expresado en la Ec. (5.4.1) será  $(x - A)$  y la expresión (5.4.7) quedará como sigue:

$$P(x) = f(A) + f'(A)(x - A) + \frac{f''(A)}{2!} (x - A)^2 + \frac{f'''(A)}{3!} (x - A)^3 + \dots + \frac{f^n(A)}{n!} (x - A)^n \quad (5.4.8)$$

A la Ec. (5.4.8) se le conoce con el nombre de polinomio de Taylor de grado  $n$  generado por  $f(x)$  en el punto  $A$ , el cual como ya se comentó, es el principio básico utilizado en la derivación de las fórmulas de aproximación en diferencias finitas.

### 5.5 Aplicación del polinomio de Taylor en la evaluación de derivadas para intervalos iguales.

Considérese el intervalo  $0, 1$  dividido en  $R$  subintervalos de longitud  $\Delta x$ .

$$\Delta x = \frac{1}{R}$$

En un punto cualquiera del intervalo  $x_i$  se tiene:

$$x_i = i\Delta x$$

Y obviamente:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

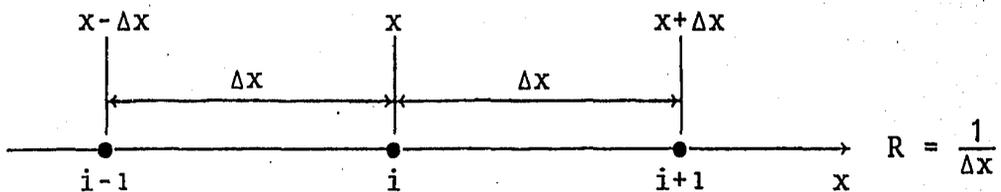
$$x_{i-1} = x_i - \Delta x$$

La distancia entre dos puntos consecutivos es la "diferencia finita  $\Delta x$ ".

En el método de diferencias finitas la evaluación de las funciones y sus derivadas se efectúa solamente en los puntos  $x_i$ .

Donde:

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, R$$



En la figura anterior puede verse claramente que:

$$x - \Delta x = i - 1$$

$$x + \Delta x = i + 1$$

### 5.5.1. Polinomio de Taylor en una dimensión.

Utilizando la notación anterior en el polinomio de Taylor - desarrollado para una función  $f(x)$  en los puntos  $x_{i+1}$  y  $x_{i-1}$  se obtienen las Ecs. (5.5.1) y (5.5.2). Esto es:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \quad (5.5.1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \quad (5.5.2)$$

#### 5.5.1.1. Primera derivada.

La expresión para la primera derivada se puede obtener al despejar ésta de la Ec. (5.5.1), quedando de la manera siguiente:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots - \frac{(\Delta x)^{n-1}}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \quad (5.5.3)$$

En donde el término del lado derecho de esta ecuación es una aproximación en diferencias finitas a la primera derivada de la función. La precisión de dicha aproximación depende, como podrá suponerse fácilmente, del número de términos que se tomen para obtener su valor. Así pues, el utilizar una mayor cantidad de términos, proporciona una mejor aproximación al valor real de la primera derivada. Los términos no utilizados (truncados) constituyen el error de truncamiento. En general como cada término sucesivo es menor al anterior, el error de truncamiento se determina por el orden o exponente de la diferencia finita  $\Delta x$  del primer término truncado.

La Ec. (5.5.3), considerando un error de truncamiento de primer orden ( $\theta(\Delta x)$ ) se escribe como sigue:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \theta(\Delta x) \quad (5.5.4)$$

De igual manera puede obtenerse otra expresión para la primera derivada a partir de la Ec. (5.5.2). Despejando de dicha ecuación la primera derivada se tiene:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \quad (5.5.5.)$$

Considerando nuevamente un error de truncamiento de primer orden, ahora para la expresión (5.5.5) resulta:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \theta (\Delta x) \quad (5.5.6)$$

Es posible obtener una fórmula más precisa o de mayor orden para la primera derivada al restar la Ec. (5.5.2) de la Ec. (5.5.3). Así pues:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots \quad (5.5.7)$$

La Ec. (5.5.7), considerando un error de truncamiento de segundo orden ( $\theta(\Delta x)^2$ ), se puede escribir como sigue:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \theta (\Delta x)^2 \quad (5.5.8)$$

Procediendo en forma análoga se pueden obtener fórmulas para la primera derivada que tengan una mayor precisión expandiendo el polinomio de Taylor en otros puntos cercanos al punto  $x$ . Ejemplo de ello pueden ser las expresiones (5.5.9) y (5.5.10).

$$f_{i+2} = f_i + (2\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i + \dots + \frac{(2\Delta x)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \quad (5.5.9)$$

$$\begin{aligned}
 f_{i-2} = f_i - (2\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i \\
 + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i - \dots + \frac{(2\Delta x)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_i \quad (5.5.10)
 \end{aligned}$$

Cualquiera de las expresiones obtenidas con anterioridad, pueden utilizarse para evaluar la primera derivada. La Ec. (5.5.8) es la más empleada.

#### 5.5.1.2. Segunda derivada.

Una expresión para la segunda derivada se obtiene sumando las Ecs.: (5.5.1) y (5.5.2). Esto es:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + (\Delta x)^4 \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i + \dots \quad (5.5.11)$$

Despejando de la expresión anterior la segunda derivada:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i + \dots \quad (5.5.12)$$

Considerando para la Ec. (5.5.12) un error de truncamiento de segundo orden, la ecuación para la segunda derivada queda como sigue:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \theta (\Delta x)^2 \quad (5.5.13)$$

Que es la expresión utilizada para obtener la segunda derivada de una función.

### 5.5.2. Polinomio de Taylor en dos dimensiones.

Es posible mediante el uso del polinomio de Taylor obtener expresiones que proporcionen las fórmulas de las derivadas en dos dimensiones. Así pues, de la misma manera en que se estableció el polinomio de Taylor en una dimensión dado por las Ecs. (5.5.1) y (5.5.2) se pueden tener las expresiones del polinomio de Taylor en dos dimensiones representadas por las Ecs. (5.5.14), (5.5.15), (5.5.16) y (5.5.17).

$$\begin{aligned}
 f_{i+1, j+1} = & f_{i, j} + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i, j} + (\Delta y) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i, j} \\
 & + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i, j} + (\Delta x)(\Delta y) \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i, j} \\
 & + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i, j}
 \end{aligned} \tag{5.5.14}$$

$$\begin{aligned}
 f_{i-1, j-1} = & f_{i, j} - (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i, j} - (\Delta y) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i, j} \\
 & + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i, j} + (\Delta x)(\Delta y) \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i, j} \\
 & + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i, j}
 \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

$$\begin{aligned}
f_{i+1, j-1} = f_{i, j} &+ (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i, j} - (\Delta y) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i, j} \\
&+ \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i, j} - (\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i, j} \\
&+ \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i, j}
\end{aligned} \tag{5.5.16}$$

$$\begin{aligned}
f_{i-1, j+1} = f_{i, j} &- (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i, j} + (\Delta y) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i, j} \\
&+ \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i, j} - (\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i, j} \\
&+ \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i, j}
\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

La obtención de estas ecuaciones se logra utilizando las fórmulas de una dimensión, haciendo variar la función en una dirección primero y en la segunda dirección después. El signo lo proporcionarán los subíndices según se trate de diferencia hacia adelante ( $i+1$  ó  $j+1$ ) o diferencia hacia atrás ( $i-1$  ó  $j-1$ ).

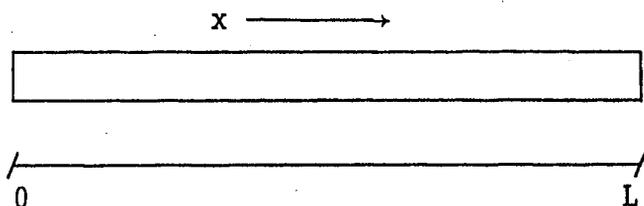
Si fuera necesario en un problema determinado utilizar el polinomio de Taylor en tres dimensiones, éste podría obtenerse con un procedimiento análogo al anterior agregando una dimensión más en su desarrollo.

## 5.6 Esquemas de solución de las ecuaciones de flujo.

Crichlow en su libro "Modern Reservoir Engineering - A simulation Approach" proporciona una explicación muy clara acerca de los tipos de esquemas que existen para llevar a cabo la transformación de las ecuaciones, de una forma continua a una forma discreta.

Considérese la distribución de la temperatura en una sola dirección a lo largo de una barra metálica. La ecuación que gobierna el comportamiento de este fenómeno es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.6.1)$$



Al analizar dicha ecuación se observa que la temperatura ( $T$ ) es función, además del tiempo ( $t$ ) de la distancia ( $x$ ). Una solución analítica de la Ec. (5.6.1) proporciona una función continua tanto en tiempo como en espacio. Sin embargo una solución numérica de la misma ecuación, proporcionará valores de temperatura en localizaciones fijas y para valores de tiempo determinados, lo cual puede ser visualizado como si se tratara de una serie de fotografías tomadas en diferentes instantes, Fig. (5.3). Los valores de tiempo 0, 1, 2, 3 ....., que aparecen en dicha -

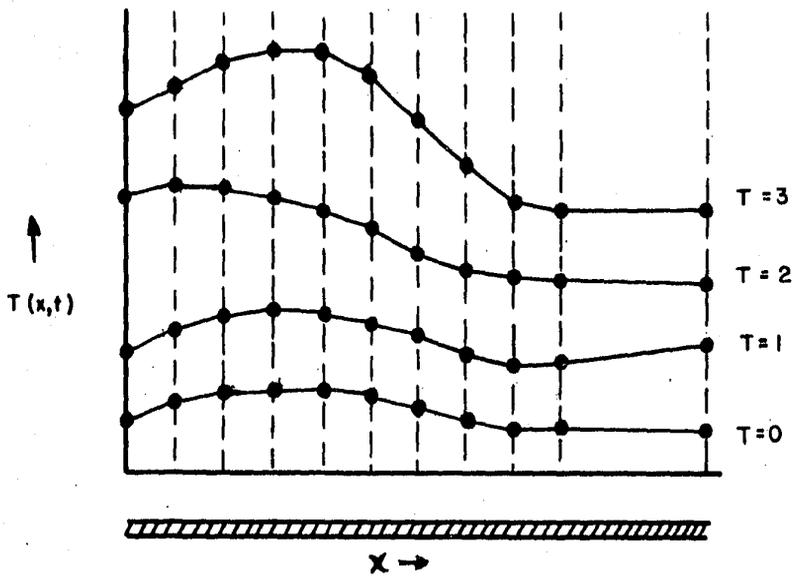
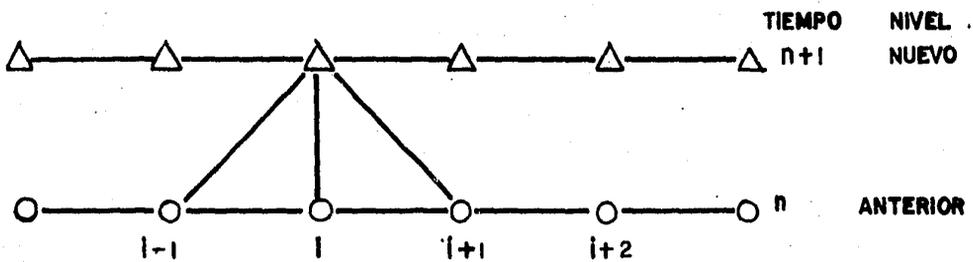


FIG. 5.3 DISTRIBUCION DE LA TEMPERATURA EN UNA BARRA.



EC. DIFERENCIAL :  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}$

EC. EN DIFERENCIAS:

$$\frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

FIG. 5.4 ESQUEMA EXPLICITO EN UNA DIMENSION.

figura corresponden a los diferentes valores del mismo, los cuales son mayores a medida que la solución avanza. El valor de la temperatura para un nivel de tiempo dado por ejemplo:  $t = 1$  se utiliza para calcular el nuevo valor de la temperatura para un nivel de tiempo superior ( $t = 2$ ).

Existen básicamente dos maneras para ir de los valores del nivel de tiempo anterior a los valores en el nivel de tiempo nuevo, lo cual se discute a continuación.

#### 5.6.1. Esquema de solución explícito.

Este esquema es el más simple ya que resuelve el problema para una sola incógnita en el tiempo nuevo, valiéndose para ello de los valores conocidos de la incógnita en el tiempo anterior, Fig. (5.4).

Considere la siguiente ecuación en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.6.2)$$

Aplicando los principios sobre fórmulas de derivación obtenidas del polinomio de Taylor visto con anterioridad, la Ec. (5.6.2) en diferencias finitas queda como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta y)^2} \\ & = \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

En donde:

$i, j$  : localización de la celda dentro de la malla.

$n$  : nivel de tiempo anterior.

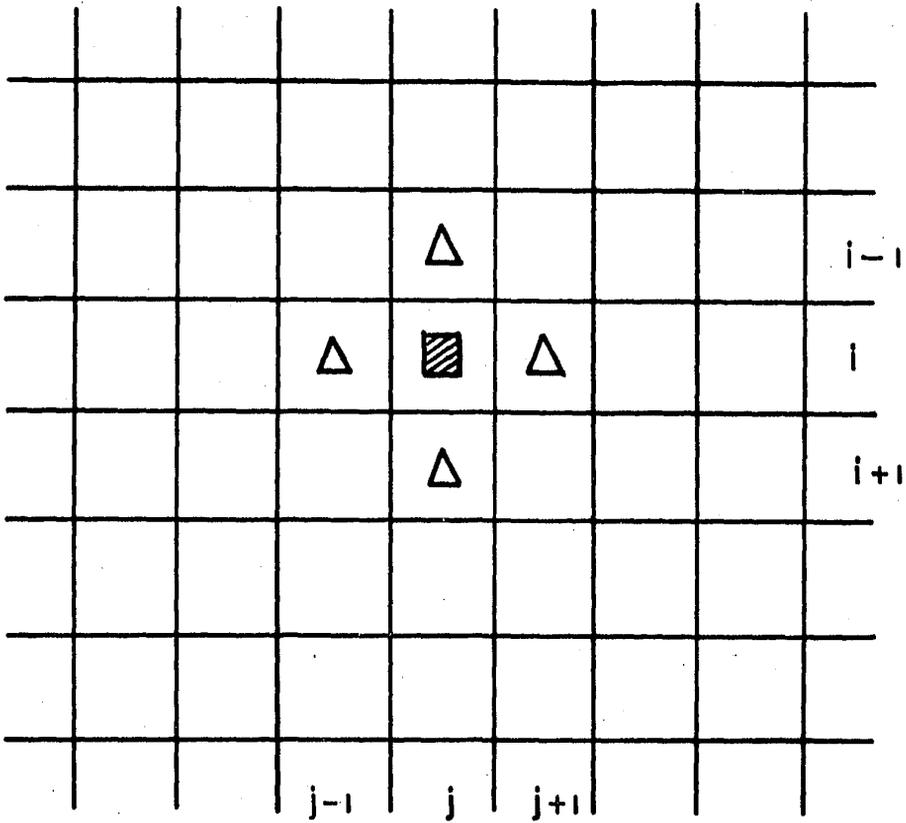
$n+1$  : nivel de tiempo nuevo.

Como puede observarse, la Ec. (5.6.3) tiene una sola incógnita, el valor de la presión al tiempo nuevo ( $n+1$ ), el cual se encuentra involucrado en el lado derecho de dicha ecuación.

Despejando de la Ec. (5.6.3) se puede obtener explícitamente el valor de la presión para el tiempo nuevo ( $P_{i,j}^{n+1}$ ) en función de los valores de presión en el tiempo anterior, los cuales son conocidos. Así entonces:

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Delta t \left[ \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta y)^2} \right] \quad (5.6.4)$$

Como todos los valores del lado derecho de esta última ecuación son conocidos, se trata de resolver simplemente una ecuación con una incógnita. Ahora bien, para avanzar la solución de "n" a "n+1" se requiere aplicar la misma ecuación para todos y cada uno de los puntos que constituyen la malla. La Fig. (5.5) muestra el arreglo de las celdas en una malla en dos dimensiones.



**FIG. 5.5 ARREGLO DE LAS CELDAS EN UNA MALLA DE DOS DIMENSIONES.**

Es común escribir la Ec. (5.6.5) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^{n+1} = & P_{i,j}^n + \alpha (P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n) \\
 & + \beta (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n) \quad (5.6.5)
 \end{aligned}$$

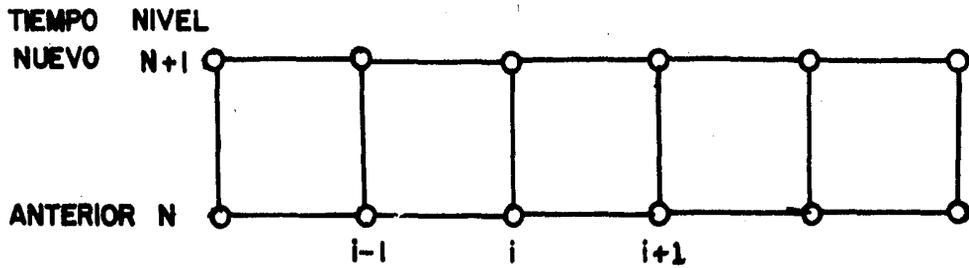
Donde:

$$\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \qquad \beta = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

Por su sencillez este esquema presenta limitaciones fuertes de estabilidad (más adelante se dá la explicación de este concepto), lo que ocasiona tener que utilizar intervalos de tiempo pequeños al avanzar la solución, lo cual tampoco es muy conveniente debido al tiempo de computadora que se requiere para efectuar una corrida. Esta limitación hace que su aplicación sea impráctica en la mayoría de los problemas de simulación, no obstante que el esfuerzo que se requiere para desarrollar un simulador que esté basado en este esquema es mucho menor que con ningún otro.

### 5.6.2. Esquema de solución implícito.

Este esquema consiste en resolver el problema para todos los valores de las incógnitas en forma simultánea, como puede apreciarse en la Fig. (5.6).



EC. DIFERENCIAL:  $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$

EC. EN DIFERENCIAS:  $\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}$

FIG. 5.6 ESQUEMA IMPLICITO EN UNA DIMENSION.

Considérese la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.6.6)$$

La cual puede expresarse en diferencias finitas de la siguiente manera:

$$\frac{P_{i-1}^n - 2P_i^n + P_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \quad (5.6.7)$$

Esta ecuación tiene solo una incógnita,  $P_i^{n+1}$ , sin embargo, se puede establecer de tal manera que se resuelva para los tres valores de  $P_i$  como sigue:

$$\frac{P_{i-1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \quad (5.6.8)$$

Como puede apreciarse la Ec. (5.6.8) tiene como incógnitas a todos los valores de presión al nuevo nivel de tiempo  $(n+1)$ . Dicha ecuación puede escribirse:

$$P_{i-1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \quad (5.6.9)$$

Factorizando:

$$P_{i-1}^{n+1} - \left(2 + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} P_i^n \quad (5.6.10)$$

Nótese que esta última expresión, la cual tiene tres incóg-



finen, como se verá más adelante, producto de las condiciones de frontera que se estén utilizando.

Nótese que la matriz que se generó tiene una forma característica, hay tres elementos diagonales y todos los demás elementos fuera de dichas diagonales son cero. A toda matriz que presente esta característica se le conoce con el nombre de "Matriz Tridiagonal". El conjunto de ecuaciones simultáneas puede ser escrito utilizando notación matricial como sigue:

$$A \bar{p} = \bar{d} \quad (5.6.12)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} a_i & & \\ & b_i & \\ & & c_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i \end{bmatrix} \quad (5.6.13)$$

El sistema se resuelve para la presión desconocida "P" utilizando el algoritmo de Thomas, el cual es discutido en el capítulo siguiente.

Para un sistema en dos dimensiones el desarrollo es idéntico al utilizado con anterioridad para el de una sola dimensión, solo que los resultados son un poco diferentes.

Considérese la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.6.14)$$

La ecuación anterior en diferencias finitas para el esquema implícito se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{P_{i,j-1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{P_{i-1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\ = \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

Nótese que todas las presiones están en el nuevo nivel de tiempo y en consecuencia son incógnitas. Así pues, existen cinco incógnitas en la Ec. (5.6.15).

Para simplificar el problema supóngase que  $\Delta x = \Delta y$ . Desarrollando y factorizando, la Ec. (5.6.15) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} P_{i,j-1}^{n+1} + P_{i+1,j}^{n+1} - 4P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1} + P_{i,j+1}^{n+1} \\ = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (5.6.16)$$

La cual se reduce a:

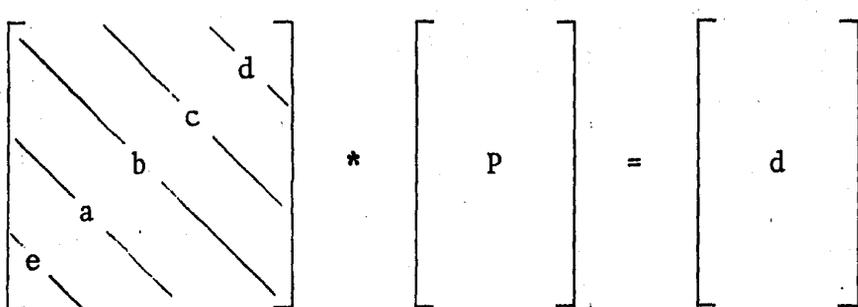
$$\begin{aligned} P_{i,j-1}^{n+1} + P_{i+1,j}^{n+1} - \left(4 + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1} + P_{i,j+1}^{n+1} \\ = - \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} P_{i,j}^n \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

La forma general de esta última expresión es:

$$e_i p_{i, j-1}^{n+1} + a_i p_{i+1, j}^{n+1} + b_i p_{i, j}^{n+1} + c_i p_{i-1, j}^{n+1} + f_i p_{i, j+1}^{n+1} = d_i \quad (5.6.18)$$

Donde los coeficientes  $e_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $f_i$  y  $d_i$ , son similares a los que se definieron para el sistema en una dimensión.

Nuevamente, para avanzar la solución al nuevo nivel de tiempo se requiere escribir la Ec. (5.6.18) para todas y cada una de las  $N$  celdas que constituyen la malla. De esta manera se tendrán  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas. En esta ocasión se trata de un sistema pentadiagonal, el cual puede escribirse en notación matricial como se muestra a continuación:

$$A \bar{p} = \bar{d}$$


$$* \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} \quad (5.6.19)$$

Los algoritmos que se utilizan para resolver este tipo de problemas de dos dimensiones se discuten en el capítulo siguiente.

El esquema implícito es el que involucra mayor esfuerzo de cómputo para avanzar la solución de un nivel a otro ya que para resolverlo se recurre a procesos iterativos, sin embargo permite utilizar incrementos de tiempo mucho mayores que el esquema explícito y aún así permanece estable.

### 5.6.3. Esquema de Crank-Nicholson.

Este esquema involucra una combinación de los valores anteriores y de los valores nuevos de la variable dependiente en el intervalo de tiempo considerado, Fig. (5.7).

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales:

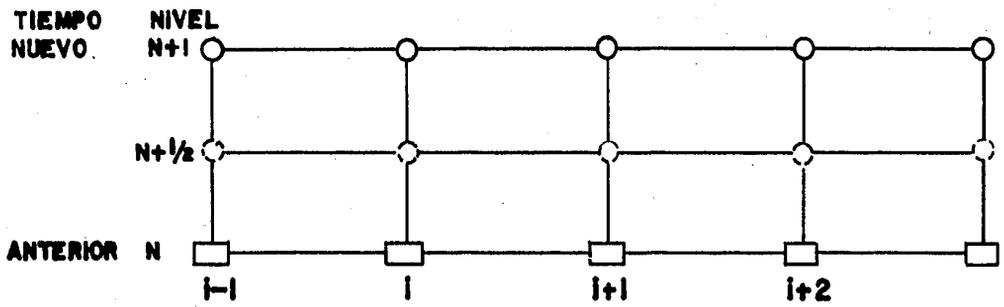
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.6.20}$$

La cual puede escribirse en diferencias finitas, considerando tanto el nivel de tiempo anterior como el nivel de tiempo nuevo, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \theta \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + (1 - \theta) \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \\ = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

Donde  $0 < \theta \leq 1$

Si se analiza la Ec. (5.6.21) se notará que si:



EC. DIFERENCIAL: 
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

EC. DIFERENCIAS:

$$\frac{p_i^{n+1} - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

FIG. 5.7 ESQEMA DE CRANK — NICHOLSON EN UNA DIMENSION.

$\theta = 0$  , entonces el esquema es explícito.

$\theta = \frac{1}{2}$  , entonces el esquema es de Crank-Nicholson.

$\theta = 1$  , entonces el esquema es implícito.

#### 5.6.4. El concepto de transmisibilidad en los esquemas de solución.

Ya con anterioridad, en los capítulos iniciales de este trabajo, se comentó que al utilizar una malla que divida al yacimiento en una serie de bloques, se debe determinar de alguna manera la interacción de flujo que existe entre los mismos. Por ello a continuación, se define el concepto de transmisibilidad.

La transmisibilidad (T) es la capacidad de transmitir el flujo y está dada por la siguiente expresión:

$$q = TP \quad (5.6.22)$$

Donde:

T : Transmisibilidad.

q : Gasto.

P : Presión.

Recordando la ecuación de Darcy dada por la expresión (4.4.3):

$$q = - \frac{K A dP}{\mu ds}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (5.6.22), haciendo  $ds = L$  y despejando:

$$T = \frac{K}{\mu} \frac{A}{L} \quad (5.6.23)$$

Es claro, según la Ec. (5.6.23), que la capacidad de transmitir no será igual para todos los bloques que constituyen la malla, sino que ésta dependerá tanto de la geometría del bloque ( $L, A$ ) como de las propiedades físicas que se le asignen a cada uno de ellos ( $K, \mu$ ). Así pues para determinar el flujo (y con ello implícitamente la variación de presión) que cruza de un bloque A a un bloque B, los cuales son adyacentes, es preciso considerar las transmisibilidades de ambos bloques.

De esta manera los esquemas de solución de las ecuaciones de flujo en una dimensión afectados por el término de transmisibilidad quedan como sigue:

a) Esquema de solución explícito.

En este esquema las transmisibilidades de los términos de flujo, lo mismo que ocurrió con las presiones anteriormente, se evalúan al nivel de tiempo conocido "n". La expresión en diferencias finitas es:

$$T_{x_{i+1/2}}^n (P_{i+1}^n - P_i^n) - T_{x_{i-1/2}}^n (P_i^n - P_{i-1}^n) = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \quad (5.6.24)$$

El subíndice " $i + 1/2$ " ó " $i - 1/2$ " se utiliza por lo que ya se explicó, que el flujo que cruza por el punto " $i$ " al pasar de " $i + 1$ " a " $i - 1$ " o viceversa, se vé afectado por la transmisibilidad de ambos bloques. El subíndice  $x$  indica la dirección y el término  $Vb_i$  es el volumen total del bloque  $i$ .

b) Esquema de solución mixto.

Este esquema surge al considerar el concepto de transmisibilidad. En él las presiones se evalúan al nivel de tiempo nuevo " $n + 1$ ", mientras las transmisibilidades se evalúan al nivel de tiempo anterior o conocido " $n$ ". La expresión en diferencias finitas es la siguiente:

$$\begin{aligned} T_{i+1/2}^n (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T_{i-1/2}^n (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) \\ = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \end{aligned} \quad (5.6.25)$$

Este tipo de esquema se utiliza con éxito en simuladores a-reales y tridimensionales en los cuales, en general, no se dan cambios bruscos de presiones y/o saturaciones de un intervalo de tiempo a otro. Sin embargo, pueden presentar serias limitaciones de estabilidad y consecuentemente, requerir intervalos de tiempo muy pequeños en simuladores de flujo convergente, tales como simuladores de conificación y algunos simuladores de secciones transversales.

c) Esquema de solución implícito.

Este esquema consiste en evaluar además de las presiones, como ya se vió, las transmisibilidades al nuevo nivel de tiempo "n + 1" quedando la ecuación en diferencias finitas como sigue:

$$\begin{aligned} T_{i+1/2}^{n+1} (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T_{i-1/2}^{n+1} (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) \\ = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \end{aligned} \quad (5.6.26)$$

## 5.7 Conceptos relacionados con el modelo numérico.

### 5.7.1. Errores.

Dependiendo de la fuente que los produzca, los errores en los que se incurre al utilizar computadoras para resolver problemas, puede clasificarse en alguno de los siguientes tipos.

- a) Errores inherentes.
- b) Errores por truncamiento.
- c) Errores por redondeo.

Los errores inherentes o errores propios de los datos son aquéllos que se producen al leer de algún dispositivo de medición un dato para representar alguna magnitud física y son debidos a la imprecisión del dispositivo.

Los errores por truncamiento son aquéllos que se presentan al utilizar series en los cálculos como por ejemplo el polinomio de Taylor visto con anterioridad. Estas series tienen un número infinito de términos y al hacer algún cálculo con ellas, se utiliza solo un número determinado de términos, truncando los demás.

Por último, los errores por redondeo se deben a la imposibilidad de manejar en operaciones como multiplicación o división, todos los dígitos resultantes que involucran estas operaciones. En este caso, el resultado se redondea o aproxima al número máximo de dígitos con los que se dispone para trabajar.

#### 5.7.2. Estabilidad.

Los errores provenientes de cualquier fuente se propagan de diferentes formas, algunos de estos errores crecerán poco y por lo tanto, no afectarán en forma significativa la exactitud de un resultado. Otros, pueden crecer tanto que invaliden completamente los resultados de un cálculo.

Si con la función  $f(n)$  se puede representar el crecimiento de un error "e" y si el resultado al cabo de  $n$  operaciones hace que  $f(n)$  se comporte como  $f(n) = Kne$ , para alguna constante  $K$  que no dependa de  $n$ , se dice que el crecimiento es lineal. Si el crecimiento del error se comporta como

$f(n) = K^n \epsilon$ , para alguna constante  $K$  mayor que la unidad, se dice que la rapidez de crecimiento del error es exponencial, Fig. (5.8).

El crecimiento lineal de un error es generalmente inevitable, cuando  $K$  y  $\epsilon$  son pequeños los resultados que se obtienen en la solución de un problema, son por lo general aceptables. En cambio, el crecimiento exponencial de un error se debe evitar, ya que el término  $K^n$  crece rápidamente aún para valores relativamente pequeños de  $n$ , por lo cual los resultados que se obtienen en la solución de un problema resultan inaceptables.

Si un procedimiento presenta un crecimiento exponencial del error, se considerará como inestable. Entonces, se dirá que un esquema de solución es estable cuando la propagación del error, al desarrollar dicho esquema, siga un crecimiento lineal, esto es, que el incremento del error de una aproximación a otra sea pequeño, determinando una tolerancia.

Es muy importante tener en consideración este concepto al desarrollar un esquema, ya que los resultados que puede proporcionar el mismo al ser inestable estarán muy alejados de la realidad, Fig. (5.9).

Existen dos procedimientos para determinar la estabilidad de un esquema de solución<sup>1</sup>:

a) Análisis de Von Neumann (Análisis de Fourier).

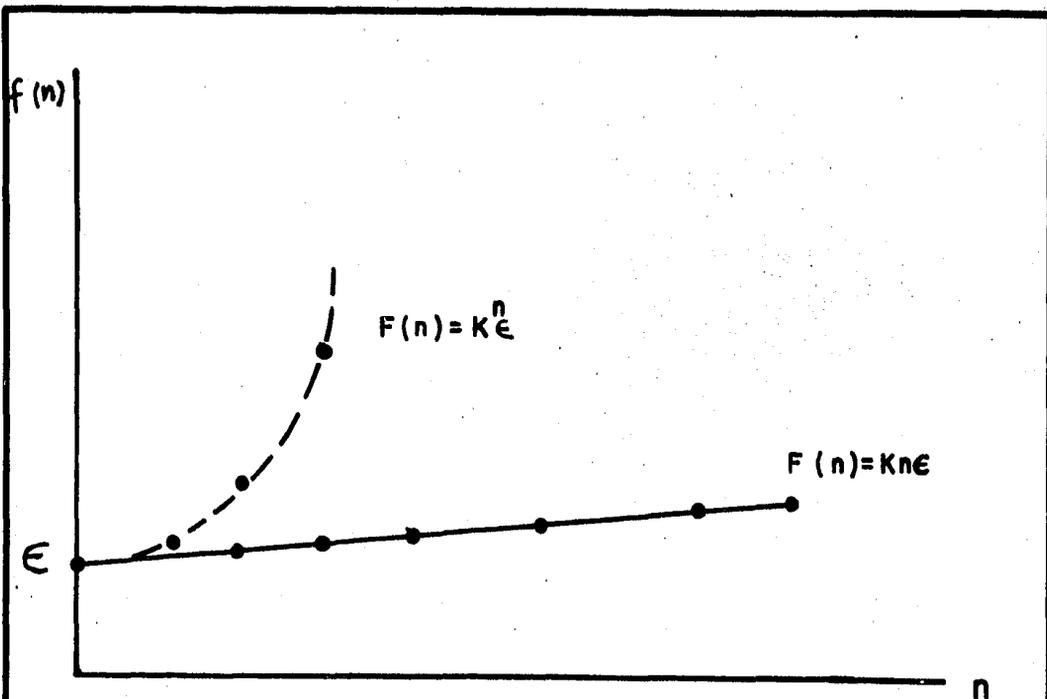


FIG. 5.8 ERROR LINEAL Y EXPONENCIAL.

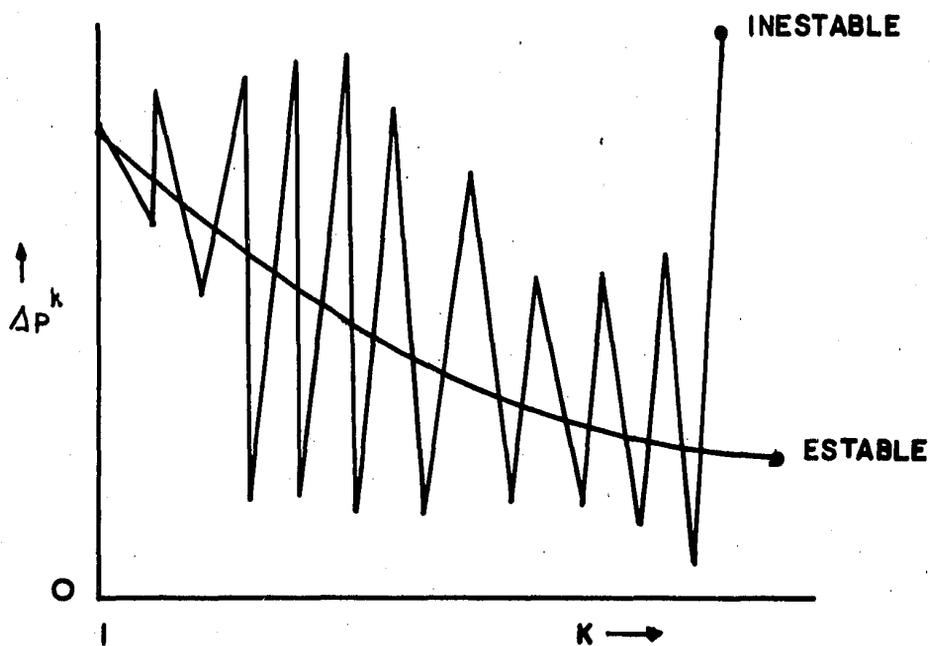


FIG. 5.9 SOLUCIONES ESTABLE E INESTABLE.

## b) Método Matricial.

### 5.7.3. Convergencia.

Cuando se estudian métodos numéricos, generalmente se utiliza el término convergencia. Se dice que una ecuación en diferencias finitas es convergente si la solución exacta a las ecuaciones en diferencias (v) tiende a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales (v) para todo valor de  $x$  a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ .

## 5.8 Sistema de cuadrícula de la malla.

Se ha comentado ya que en la simulación es sobrepuesto al plano estructural del yacimiento un sistema de cuadrícula o sistema de celdas, siendo cada celda una unidad básica usada en el simulador. Así pues, algunos puntos básicos a considerar en la selección del sistema de celdas son los siguientes:

- a) El sistema de la malla en toda su forma será rectangular.
- b) La malla tendrá la menor cantidad de bloques como sea posible, dependiendo la heterogeneidad del yacimiento.
- c) La malla será correctamente orientada, clasificada según su tamaño y su forma para permitir una buena aproximación de los límites del yacimiento.
- d) Si existe permeabilidad direccional u orientada, un eje de la malla estará en la dirección de máxima permeabilidad.

Dicha permeabilidad podrá ser determinada por medio de pruebas de presión.

- e) Tratar de colocar un pozo por bloque y en el centro del mismo.
- f) Si se sabe de la existencia de un acuífero o si se sospecha flujo de agua, el sistema de malla incluirá hileras extras de celdas a cubrir el acuífero para simular el flujo del agua.

Ahora bien, para cerrar las fronteras cuando se utiliza una malla de bloques, existen básicamente dos maneras de lograrlo, que son:

- a) Evitar el flujo a través de toda la periferia, haciendo las transmisibilidades de dicha periferia igual a cero.
- b) Extender la malla agregando bloques virtuales externos a dicha frontera y haciendo las propiedades (presiones, saturaciones, permeabilidades, etc.) de cada bloque agregado iguales a los del bloque interior inmediato adyacente, de tal manera que no haya cambio de bloque a bloque adyacente y el flujo sea cero. La deficiencia de esta segunda forma es que se genera una nueva red, lo que implica un aumento considerable de ecuaciones.

## REFERENCIAS

- 1.- Crichlow, H. B.: "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach". Prentice - Hall, Inc.
- 2.- Domínguez G. V.: "Notas del Curso de Simulación Matemática de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 3.- Piskunov, N.: "Cálculo Diferencial e Integral". Editorial Mir-Moscú.
- 4.- "Apuntes de Ecuaciones Diferenciales". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 5.- Iníarte, B.; Borrás, H. y Durán, R.: "Apuntes de Métodos Numéricos". Facultad de Ingeniería UNAM.

## CAPITULO 6

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS.

## 6.1 Introducción.

En el capítulo anterior se vió que al aplicar las ecuaciones resultantes del esquema de solución implícito a cada uno de los bloques que componen la malla, se establece un determinado número de ecuaciones algebraicas con su correspondiente número de incógnitas. Este sistema lineal de ecuaciones simultáneas que resulta puede ser escrito en forma general empleando la notación matricial siguiente:

$$A\vec{p} = \vec{d} \quad (6.1.1)$$

Donde "A" es la matriz de coeficientes, "d" es un vector conocido y "p" es el vector de incógnitas de presión en todos los puntos del sistema considerado o "vector p".

De esta manera, ahora el problema consiste en resolver el sistema para obtener el vector de incógnitas de presión, el cual puede ser muy simple o muy complejo, dependiendo del fenómeno físico que se intente resolver.

Cuando la solución es relativamente fácil, como en el caso de problemas de una dimensión y muchos problemas de dos dimensiones la solución al vector de presión constituye solo una fracción del tiempo total de cómputo y del costo de la simulación del ya-

cimiento. Sin embargo, en problemas más complejos como en el caso de algunos modelos de dos y la gran mayoría de los de tres dimensiones, el esfuerzo que se requiere para resolver el "vector p" tiene un mayor significado con relación al resto del problema de la simulación del yacimiento. Por lo anterior es fácil comprender que la eficiencia que tenga un simulador tanto para resolver el problema planteado como en el aspecto económico depende en gran medida del algoritmo que se utilice para resolver eficientemente el vector de presión establecido.

Los métodos que se emplean para obtener la solución de la ecuación (6.1.1) pueden dividirse en dos grandes grupos: métodos directos y métodos iterativos.

Este capítulo tiene como finalidad el estudio de estas técnicas. Algunas de ellas son tratadas de una manera muy general debido a la poca o nula aplicación que tienen en la simulación de yacimientos; sin embargo a aquéllas que son más utilizadas en la práctica, se les presta una mayor atención.

Como a lo largo del presente capítulo se hace uso de algunos conceptos básicos del álgebra lineal (los cuales a pesar de ser muy sencillos algunas veces han sido olvidados o simplemente se ha perdido la habilidad para manejarlos), al final del trabajo se proporciona un apéndice que puede ser consultado con el objeto de aclarar ciertas dudas que se tengan sobre el manejo de matrices.

## 6.2 Métodos directos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas.

Los métodos directos son aquéllos en los cuales la solución del sistema de ecuaciones se obtiene cuando se ha resuelto la matriz que representa el problema. Este proceso se indica en forma esquemática en la Fig. (6.1).

Algunos ejemplos de métodos directos son los siguientes:

- 1) Inversión de matriz.
- 2) Regla de Cramer.
- 3) Eliminación de Gauss.
- 4) Método de Gauss - Jordan.
- 5) Descomposición matricial.

### 6.2.1. Inversión de matriz.

Se trata de un método bastante sencillo para el cual se requiere determinar la matriz inversa de la matriz de coeficientes y mediante una premultiplicación obtener la solución. El procedimiento es como sigue:

Dado el sistema:

$$A\vec{p} = \vec{d} \quad (6.2.1.1)$$

Y teniendo determinada la inversa de A, ésto es,  $A^{-1}$ , multiplíquese por ella ambos miembros de la Ec. (6.2.1.1)

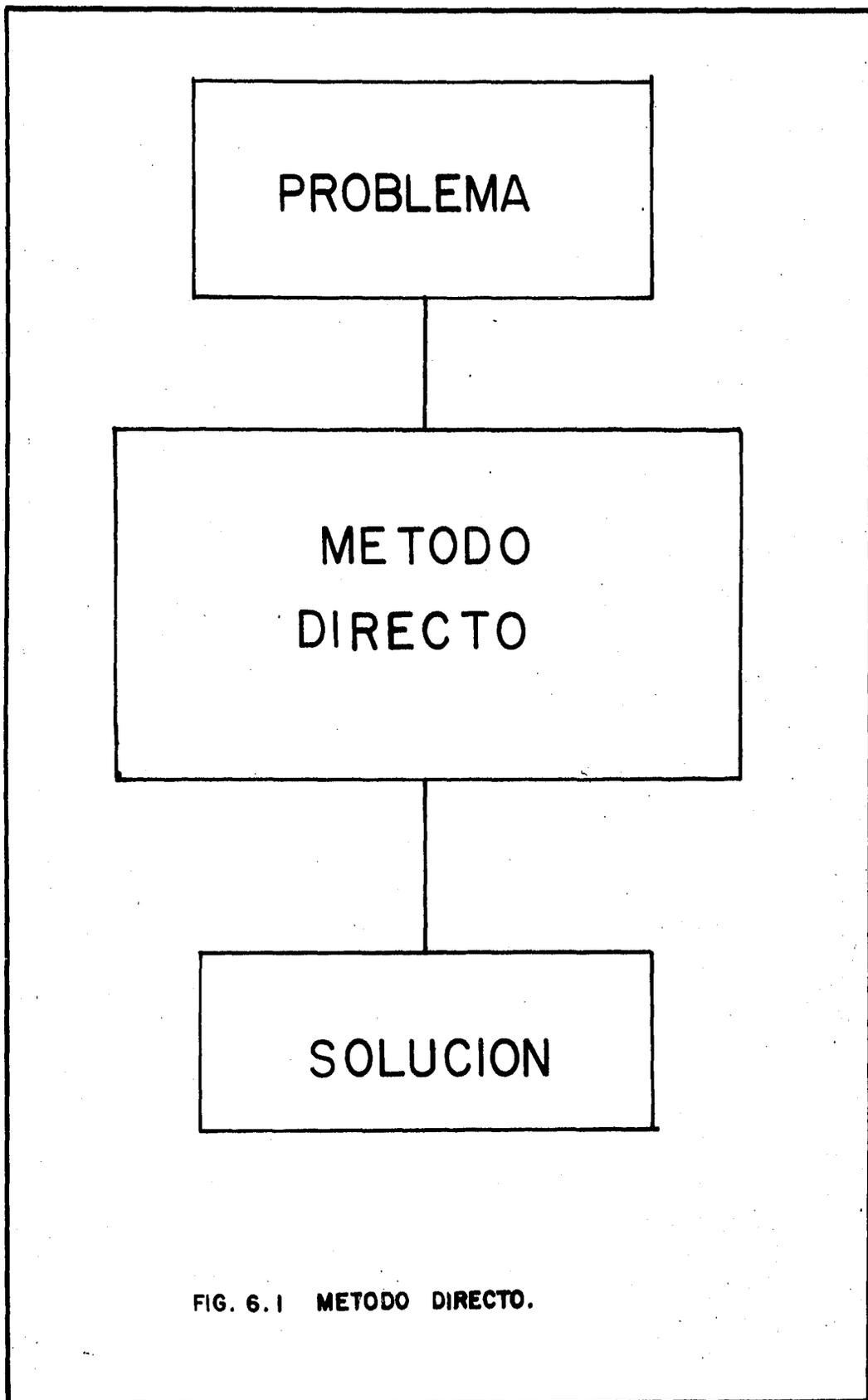


FIG. 6.1 METODO DIRECTO.

$$A^{-1} A \vec{p} = A^{-1} \vec{d} \quad (6.2.1.2)$$

De álgebra lineal:

$$A^{-1} A = I \quad (6.2.1.3)$$

Por lo que la Ec. (6.2.1.2) queda:

$$I \vec{p} = A^{-1} \vec{d} \quad (6.2.1.4)$$

La solución se obtiene con los resultados que proporcione el producto del lado derecho de la Ec. (6.2.1.4). El sistema resultante es:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d' \end{bmatrix} \quad (6.2.1.5)$$

Donde  $\vec{d}'$  es un nuevo vector que proporciona la solución del sistema.

Como puede suponerse, el uso de este método es un tanto elaborado y lento debido a la necesidad de obtener la matriz inversa de la matriz de coeficientes, por lo que su empleo en trabajos de simulación es prácticamente nulo.

### 6.2.2. Regla de Cramer.

Este es un método extremadamente sencillo pero no muy práctico

co para ser desarrollado en una computadora tal como lo requiere el tratar de obtener la solución del "vector p". El método dice que el valor de los j-ésimos elementos del vector incógnita es igual al cociente entre el determinante obtenido al intercambiar el lado derecho de la ecuación matricial o vector de constantes con la j-ésima columna de la matriz de coeficientes A y el determinante de dicha matriz. - Para mayor claridad considérese el siguiente ejemplo:

Dado el sistema:

$$2p_1 - 3p_2 = 7$$

$$3p_1 + 5p_2 = 1$$

Cuya ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se aplicará la regla de Cramer para obtener su solución.

Primero se calcula el determinante " $\Delta$ " de la matriz de coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19$$

Se obtienen ahora los otros determinantes al hacer el intercambio de columnas tal como lo enuncia la regla:

$$\Delta p_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 3 = 38$$

$$\Delta p_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$$

En consecuencia la solución del sistema es:

$$p_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2$$

$$p_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta} = \frac{-19}{19} = -1$$

La aplicación de este método en la simulación de yacimientos prácticamente no se da, ya que solo es útil para resolver sistemas de ecuaciones pequeños y el querer resolver problemas mayores con él provoca la utilización de un tiempo de cómputo prohibitivo aún para casos relativamente sencillos.

### 6.2.3. Método de eliminación de Gauss.

Este método consiste básicamente en sistematizar el teorema fundamental de equivalencia. Para ello se requiere aplicar a una matriz ampliada (que se forma con la matriz de coeficientes y el vector de valores conocidos) un número determinado de operaciones, las cuales son llamadas operaciones ele

mentales sobre los renglones de una matriz, con el fin de obtener un sistema equivalente al anterior que proporcione las incógnitas de una forma sencilla y directa. Dichas operaciones elementales sobre los renglones de la matriz ampliada del sistema son las siguientes:

- a) Intercambiar un renglón por otro. Esto equivale a reordenar las ecuaciones del sistema.
- b) Multiplicar todos los elementos de un renglón por un escalar diferente de cero. Operación que es equivalente a multiplicar una ecuación por una constante.
- c) Multiplicar todos los elementos de un renglón por un escalar diferente de cero y sumar cada elemento resultante con su correspondiente en otro renglón, ya que es equivalente a la sustitución de una ecuación por una combinación lineal de las ecuaciones del sistema.

Así pues, tomando el sistema original, el objetivo es transformar la matriz de coeficientes "A" a una matriz triangular superior como se indica a continuación:

Dado el sistema:

$$A\vec{p} = \vec{d} \quad (6.2.3.1)$$

El vector constante  $\vec{d}$  es añadido a la matriz de coeficientes formando así, la matriz ampliada como sigue:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & d_n \end{array} \right]$$

(6.2.3.2)

La cual después de efectuar un número determinado de operaciones elementales a los renglones de la matriz ampliada dada por la expresión (6.2.3.2) se reduce a la forma siguiente:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d'_1 \\ & c_{22} & \dots & c_{2n} & d'_2 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{nn} & d'_n \end{array} \right]$$

(6.2.3.3)

La expresión anterior puede escribirse como:

$$\left[ \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & & c_{2n} \\ & & & 0 \\ & & & c_{nn} \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_n \end{bmatrix}$$

(6.2.3.4)

De esta manera el valor de "p<sub>n</sub>" puede obtenerse directamente de:

$$p_n = \frac{d'_n}{c_{nn}} \quad (6.2.3.5)$$

Los n-1, n-2, ....., 3, 2, 1 valores se calculan mediante la simple sustitución de los mismos que ya han sido obtenidos - con anterioridad.

A manera de ejemplo, considérese el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3p_1 + 4p_2 - 2p_3 + p_4 + p_5 = 16$$

$$2p_1 + p_2 + 4p_3 - 8p_4 + 2p_5 = 13$$

$$8p_1 - p_2 - p_3 + 3p_4 + 2p_5 = 14$$

$$p_1 + p_2 - 3p_3 + 2p_4 - p_5 = -4$$

$$4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - p_4 - 3p_5 = 3$$

Cuya forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -8 & 2 \\ 8 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 14 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema anterior queda como sigue:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & -2 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & -8 & 2 & 13 \\ 8 & -1 & -1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & -1 & -3 & 3 \end{array} \right]$$

Se efectuarán a continuación algunas operaciones fundamentales a los renglones de esta última matriz, con el objeto de reducirla a una matriz diagonal superior.

1° Multiplicando por (-4) el cuarto renglón y sumándolo al quinto, lo cual puede ser indicado con la notación siguiente para simplificar:  $(-4) (R4) + (R5)$ , se tiene:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & -2 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & -8 & 2 & 13 \\ 8 & -1 & -1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 15 & -9 & 1 & 19 \end{array} \right]$$

2° Multiplicando por (-3); por (-2) y por (-8) al cuarto renglón y sumando respectivamente al primero, segundo y tercer renglón:  $(-3) (R4) + (R1)$ ;  $(-2) (R4) + (R2)$  y  $(-8) (R4) + (R3)$ .

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & -1 & 10 & -12 & 4 & 21 \\ 0 & -9 & 23 & -13 & 10 & 46 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 15 & -9 & 1 & 19 \end{array} \right]$$

3° Intercambiando el 1° y 4° renglón: (R1) x (R4)

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 10 & -12 & 4 & 21 \\ 0 & -9 & 23 & -13 & 10 & 46 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & -2 & 15 & -9 & 1 & 19 \end{array} \right]$$

4° Multiplicando por (1), por (9) y por (2) al 4° renglón - para sumar al 2°, 3° y 5° se tiene: (1) (R4) + (R2); (9) (R4) + (R3) y (2) (R4) + (R5).

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 17 & -17 & 8 & 49 \\ 0 & 0 & 86 & -58 & 46 & 298 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 29 & -19 & 9 & 75 \end{array} \right]$$

5° Intercambiando el segundo y el cuarto renglón: (R2) x (R4).

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 86 & -58 & 46 & 298 \\ 0 & 0 & 17 & -17 & 8 & 49 \\ 0 & 0 & 29 & -19 & 9 & 75 \end{array} \right]$$

6° Dividiendo entre 17 al 4° renglón (R4/17)

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 86 & -58 & 46 & 298 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{8}{17} & \frac{49}{17} \\ 0 & 0 & 29 & -19 & 9 & 75 \end{array} \right]$$

7° Multiplicando por (-86) y por (-29) al 4° renglón para -  
sumarlo al 3° y al 5° respectivamente (-86) (R4) + (R3)  
y (-29) (R4) + (R5).

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & \frac{94}{17} & \frac{852}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{8}{17} & \frac{49}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -\frac{79}{17} & -\frac{146}{17} \end{array} \right]$$

8° Intercambiando el 3° y el 4° renglón (R3) x (R4)

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{8}{17} & \frac{49}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 28 & \frac{94}{17} & \frac{852}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -\frac{79}{17} & -\frac{146}{17} \end{array} \right]$$

9° Multiplicando por (1/10) el 5° renglón, (1/10) (R5)

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{8}{17} & \frac{49}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 28 & \frac{94}{17} & \frac{852}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{79}{170} & -\frac{146}{170} \end{array} \right]$$

10° Multiplicando por (-28) el 5° renglón y sumándolo al 4°,  
o sea (-28) (R5) + (R4)

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{8}{17} & \frac{49}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3152}{170} & \frac{12608}{170} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{79}{170} & -\frac{146}{170} \end{array} \right]$$

11° Intercambiando el 4° con el 5° renglón (R4) x (R5)

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{8}{17} & \frac{49}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{79}{170} & -\frac{146}{170} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3152}{170} & \frac{12608}{170} \end{array} \right]$$

Esta última matriz ya es triangular superior por lo que es posible obtener directamente el valor de la incógnita  $p_5$  según la Ec. (6.2.3.5.). Con el valor de  $p_5$  se puede obtener el de  $p_4$  y así sucesivamente hasta resolver para el total de incógnitas del sistema.

El nuevo sistema queda, al multiplicar por (170) al 4° y 5°-renglón y por (17) al 3°, como sigue:

$$\begin{array}{rcl} p_1 + p_2 - 3p_3 + 2p_4 - p_5 & = & -4 \\ p_2 + 7p_3 - 5p_4 + 4p_5 & = & 28 \\ 17p_3 - 17p_4 + 8p_5 & = & 49 \\ 170p_4 - 79p_5 & = & -146 \\ 3152p_5 & = & 12608 \end{array}$$

De esta manera los resultados se obtienen como se muestra a continuación:

$$p_5 = \frac{12608}{3152} = \underline{\underline{4}}$$

$$170 p_4 - 79(4) = -146$$

$$p_4 = \frac{-146 + 79(4)}{170} = \underline{\underline{1}}$$

$$17 p_3 - 17(1) + 8(4) = 49$$

$$p_3 = \frac{49 - 8(4) + 17(1)}{17} = \underline{\underline{2}}$$

$$p_2 + 7(2) - 5(1) + 4(4) = 28$$

$$p_2 = 28 - 7(2) + 5(1) - 4(4) = \underline{\underline{3}}$$

$$p_1 + (3) - 3(2) + 2(1) - (4) = -4$$

$$p_1 = -4 - (3) + 3(2) - 2(1) + (4) = \underline{\underline{1}}$$

#### 6.2.4. Método de Gauss - Jordan.

Se trata de un método útil y sencillo para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es muy parecido al método de eliminación de Gauss visto con anterioridad, solo que aquí el aplicar las operaciones fundamentales en los renglones de la matriz ampliada es con el objeto de convertirla en la matriz identidad [I], a partir de la cual se puede obtener la solución directamente.

Los pasos a seguir para la obtención de sistemas equivalen-

tes por el método de Gauss - Jordan son:

- 1) Seleccionar un elemento pivote. Este debe ser algún elemento de la matriz del sistema.
- 2) Convertir en uno el elemento pivote.
- 3) Convertir en ceros todos los elementos de la columna donde se encuentra el elemento pivote.
- 4) Seleccionar un nuevo pivote, el cual no debe estar ni en el renglón, ni en la columna donde se encontraba(n) el (los) pivote(s) anterior(es).
- 5) Repetir los pasos citados hasta obtener una matriz de coeficientes formada solamente con unos y ceros. En caso necesario, escalar la matriz para obtener la matriz identidad.

Para una mejor comprensión del método se resolverá un ejemplo.

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3p_1 - 6p_2 + 7p_3 = 4$$

$$8p_1 - 5p_3 = 19$$

$$p_1 - 2p_2 + 6p_3 = 5$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 7 & 4 \\ 8 & 0 & -5 & 19 \\ 1 & -2 & 6 & 5 \end{array} \right]$$

Seleccionando al elemento  $a_{21} = 8$  como pivote y dividiendo todos los elementos del segundo renglón entre 8, se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3.000 & - 6.000 & 7.000 & 4.000 \\ 1.000 & 0.000 & - 0.625 & 2.375 \\ 1.000 & - 2.000 & 6.000 & 5.000 \end{array} \right]$$

Ahora se requiere convertir en ceros los elementos  $a_{11}$  y  $a_{31}$ , puesto que son los que están en la columna donde se encuentra el pivote. Para lograrlo se multiplicarán los elementos del segundo renglón de la matriz ampliada del sistema por la constante (-3) y se sumarán con sus respectivos elementos del primer renglón, ésto es  $(-3) (R2) + (R1)$ , obteniéndose:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.000 & - 6.000 & 8.875 & - 3.125 \\ 1.000 & 0.000 & - 0.625 & 2.375 \\ 1.000 & - 2.000 & 6.000 & 5.000 \end{array} \right]$$

Para convertir en cero el elemento  $a_{31}$ , se hará lo siguiente:

$$(-1) (R2) + (R3)$$

Lo que significa que todos los elementos del segundo renglón se multiplicarán por la constante (-1) y se sumarán con sus

respectivos elementos del tercer renglón:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.000 & - 6.000 & 8.875 & -3.125 \\ 1.000 & 0.000 & - 0.625 & 2.375 \\ 0.000 & - 2.000 & 6.625 & 2.625 \end{array} \right]$$

El siguiente paso es seleccionar un nuevo pivote, el cual no debe estar en la primera columna ni en el segundo renglón, - por lo que éste puede ser alguno de los elementos  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{32}$  ó  $a_{33}$ . Se seleccionará el elemento  $a_{13} = 8.875$ . Ahora dividiendo todos los elementos del primer renglón entre - 8.875 se obtiene:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.000 & - 0.676 & 1.000 & -0.352 \\ 1.000 & 0.000 & - 0.625 & 2.375 \\ 0.000 & - 2.000 & 6.625 & 2.625 \end{array} \right]$$

Multiplicando el primer renglón por (0.625) y sumándolo al - segundo y a su vez, multiplicando el primer renglón por - (-6.625) y sumándolo al tercero, se obtiene el siguiente sis tema equivalente:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.000 & - 0.676 & 1.000 & -0.352 \\ 1.000 & - 0.423 & 0.000 & 2.155 \\ 0.000 & 2.479 & 0.000 & 4.957 \end{array} \right]$$

Por último, el tercer pivote seleccionado debe ser el elemento  $a_{32} = 2.479$ . Procediendo de la siguiente manera:

$(0.676) (R3) + (R1)$ ;  $(0.423) (R3) + (R2)$  y  $(R3/2.479)$ , se obtiene:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.000 & 0.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 3.001 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 2.000 \end{array} \right]$$

Reacomodando:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 3.001 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 1.000 \end{array} \right]$$

Por lo que la solución es:

$$p_1 = 3.001$$

$$p_2 = 2.000$$

$$p_3 = 1.000$$

#### 6.2.4.1. Errores en el método de Gauss - Jordan,

El método de Gauss - Jordan no es un método de aproximaciones sucesivas, por lo tanto su solución debería ser exacta, pero no lo es debido a los errores que se presen

tan en el desarrollo del mismo.

La solución del ejemplo resuelto con anterioridad es en realidad  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 2$  y  $p_3 = 1$ , que difiere de los resultados obtenidos, debido que al efectuar las operaciones se trabajó redondeando a tres cifras decimales, incurriéndose en un error de 0.001 en el valor de  $p_1$ . Este problema se presenta al resolver sistemas de ecuaciones lineales en computadoras, ya que éstas tienen siempre un límite con respecto al número de dígitos en las constantes con las que trabajan.

Se puede demostrar que si se selecciona como pivote el mayor elemento en valor absoluto de la matriz de coeficientes, se minimiza el error por redondeo<sup>2</sup>.

#### 6.2.5. Descomposición matricial.

Este método implica la transformación de la matriz de coeficientes en otras matrices, las cuales son por regla general, más fáciles de operar; después utilizando estas matrices se obtiene la solución.

La descomposición de la matriz de coeficientes, según el método atribuido a Crout<sup>1</sup>, puede hacerse en dos matrices triangulares superior e inferior como lo muestran las expresiones (6.2.5.3) y (6.2.5.4). La descomposición es seguida por una sustitución hacia atrás la cual calcula la incógnita



A partir de estas dos matrices triangulares se puede determinar el vector de solución  $p$  ya que, con la Ec. (6.2.5.2)

$$A = LU \quad (6.2.5.2)$$

La cual después de la descomposición puede escribirse como:

$$LUp = b \quad (6.2.5.5)$$

Llamando al producto  $Up$  como vector " $y$ ". Con la Ec.

(6.2.5.5)

$$Ly = b \quad (6.2.5.6)$$

y

$$Up = y \quad (6.2.5.7)$$

### 6.3 Métodos Iterativos en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas.

Este tipo de métodos son de naturaleza repetitiva y el proceso de solución implica un cálculo sistemático de una aproximación a dicha solución, la cual es mejor en cada interacción. Para ello se requiere la selección de un conjunto de valores iniciales de las incógnitas, conocido con el nombre de vector inicial, sobre el cual se opera para producir un mejor resultado.

En los procesos A y B que aparecen en la Fig. (6.2) se lleva a cabo la refinación y finalmente la estimación del vector solu-

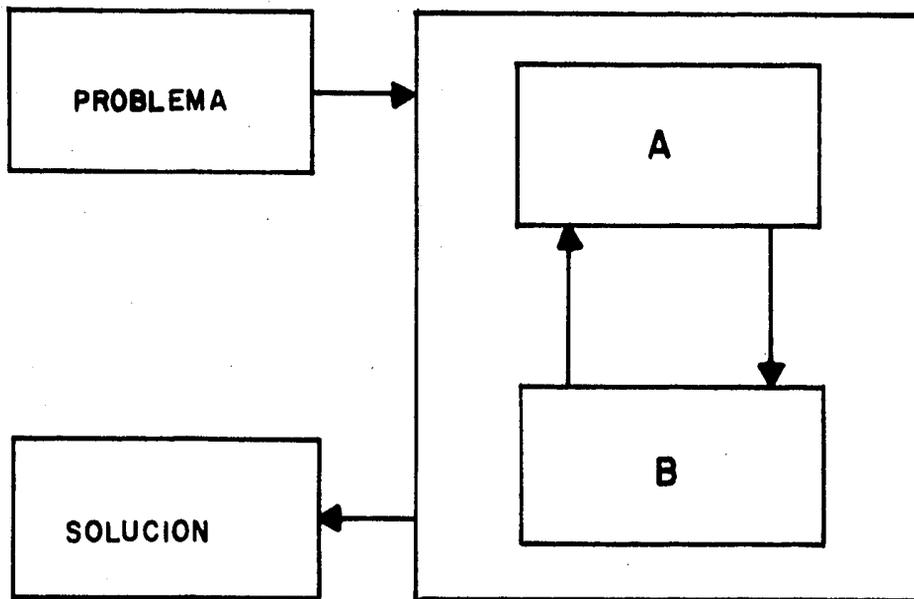


FIG. 6.2 METODO ITERATIVO.

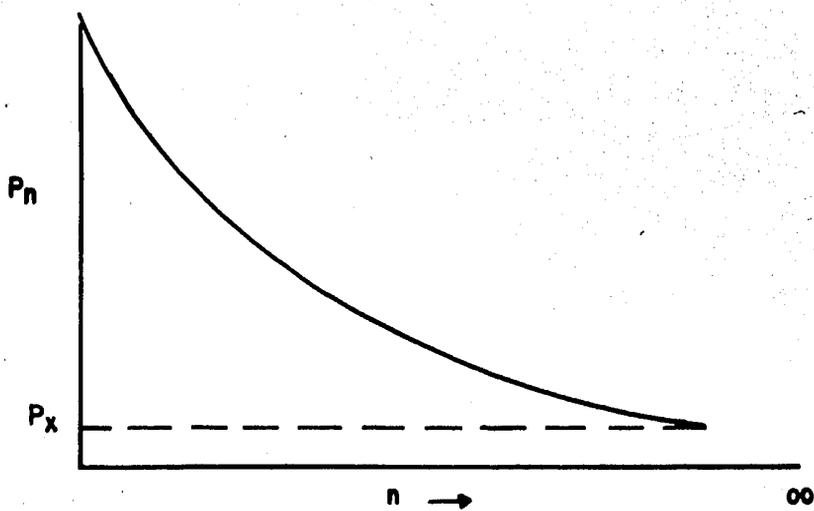


FIG. 6.3 CONVERGENCIA DE UN METODO ITERATIVO.

ción. El error en cada paso se reduce y el nuevo valor de la incógnita  $p_n$  que se obtiene se aproxima a la solución correcta  $p^*$  a medida que se sigue iterando, Fig. (6.3).

Dentro de los métodos iterativos más importantes se tienen los siguientes:

- 1) Método de Jacobi.
- 2) Método de Gauss - Seidel.
- 3) Métodos de relajación.

#### 6.3.1. Método de Jacobi.

Supóngase que en el sistema:

$$A\vec{p} = \vec{b} \quad (6.3.1.1)$$

La matriz "A" se sustituye por:

$$A = D + R \quad (6.3.1.2)$$

Donde D es una matriz diagonal, es decir una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son los únicos diferentes de cero. "R" es otra matriz que contiene ceros en su diagonal principal y los restantes elementos de "A", en sus demás elementos. Sustituyendo en la expresión

(6.3.1.1)

$$(D + R)\vec{p} = \vec{b} \quad (6.3.1.3)$$

$$\vec{Dp} + \vec{Rp} = \vec{b} \quad (6.3.1.4)$$

$$\vec{Dp} = \vec{b} - \vec{Rp} \quad (6.3.1.5)$$

Premultiplicando por  $D^{-1}$

$$\vec{p} = D^{-1} \vec{b} - D^{-1} \vec{Rp} \quad (6.3.1.6)$$

Ecuación que haciéndola recursiva queda como sigue:

$$\vec{p}^{(K+1)} = D^{-1} \vec{b} - D^{-1} \vec{Rp}^{(K)} \quad (6.3.1.7)$$

Donde

$$K = 0, 1, 2, \dots$$

El método de Jacobi, definido por la ecuación matricial de recurrencia dada por la expresión (6.3.1.7) significa que una vez planteado el sistema (6.3.1.1) se despeje  $p_1$  de la primera ecuación,  $p_2$  de la segunda,  $p_3$  de la tercera, etc., quedando:

$$\left. \begin{aligned} p_1^{(K+1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} p_2^{(K)} - a_{13} p_3^{(K)} - \dots - a_{1n} p_n^{(K)}) \\ p_2^{(K+1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} p_1^{(K)} - a_{23} p_3^{(K)} - \dots - a_{2n} p_n^{(K)}) \\ p_3^{(K+1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} p_1^{(K)} - a_{32} p_2^{(K)} - \dots - a_{3n} p_n^{(K)}) \\ &\vdots \\ p_n^{(K+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} p_1^{(K)} - a_{n2} p_2^{(K)} - \dots - a_{n(n-1)} p_{n-1}^{(K)}) \end{aligned} \right\} (6.3.1.8)$$

Donde

$$K = 0, 1, 2, \dots$$

Partiendo de una primera aproximación:

$$\vec{p}^{(0)} = \left[ p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, \dots, p_n^{(0)} \right] \quad (6.3.1.9)$$

Se sustituirá en los segundos miembros de las ecuaciones de la expresión (6.3.1.8) para obtener la nueva aproximación:

$$\vec{p}^{(1)} = \left[ p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, \dots, p_n^{(1)} \right] \quad (6.3.1.10)$$

A su vez, sustituyendo  $p^{(i)}$ , se obtendrá:

$$\vec{p}^{(2)} = \left[ p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}, \dots, p_n^{(2)} \right] \quad (6.3.1.11)$$

Y así sucesivamente. Se considerará solución del sistema - aquélla que cumpla con:

$$\left| \vec{p}^{(n+1)} - \vec{p}^{(n)} \right| \leq \vec{\epsilon} \quad (6.3.1.12)$$

Donde  $\vec{\epsilon}$  es un vector de tolerancia preestablecido.

Sustituyendo el vector inicial  $\vec{p}^{(0)} = \{0, 0, 0, \dots, 0\}$  en los segundos miembros de las ecuaciones de la expresión - (6.3.1.8) se obtendrá una nueva aproximación que estará dada por:

$$\vec{p} = \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \frac{b_3}{a_{33}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}} \right\} \quad (6.3.1.13)$$

Este último vector  $\vec{p}$ , se utilizará como vector inicial  $\vec{p}^{(0)}$  en la solución de sistemas por el método de Jacobi.

Para una mejor comprensión del método, se resolverá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6p_1 + 2p_2 + p_3 &= 22 \\ -p_1 + 8p_2 + 2p_3 &= 30 \\ p_1 - p_2 + 6p_3 &= 23 \end{aligned}$$

Despejando  $p_1$  de la primera ecuación,  $p_2$  de la segunda y  $p_3$  de la tercera:

$$p_1 = \frac{1}{6} (22 - 2p_2 - p_3)$$

$$p_2 = \frac{1}{8} (30 + p_1 - 2p_3)$$

$$p_3 = \frac{1}{6} (23 - p_1 + p_2)$$

Haciendo recursivo este sistema, según la expresión

(6.3.1.8)

$$p_1^{(K+1)} = \frac{1}{6} (22 - 2p_2^{(K)} - p_3^{(K)}) \quad (a)$$

$$p_2^{(K+1)} = \frac{1}{8} (30 + p_1^{(K)} - 2p_3^{(K)}) \quad (b)$$

$$p_3^{(K+1)} = \frac{1}{6} (23 - p_1^{(K)} + p_2^{(K)}) \quad (c)$$

Donde  $K = 0, 1, 2, \dots$ .

Tomando el vector inicial  $\vec{p}^{(0)} = (\frac{22}{6}, \frac{30}{8}, \frac{23}{6})$  y sustituyendo  $K = 0$  en las tres ecuaciones de recurrencia (a), (b) y (c), se obtiene:

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{6} (22 - 2p_2^{(0)} - p_3^{(0)})$$

$$p_2^{(1)} = \frac{1}{8} (30 + p_1^{(0)} - 2p_3^{(0)})$$

$$p_3^{(1)} = \frac{1}{6} (23 - p_1^{(0)} + p_2^{(0)})$$

Sustituyendo valores:

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{6} (22 - 2(\frac{30}{8}) - \frac{23}{6}) = 1.778$$

$$p_2^{(1)} = \frac{1}{8} (30 + \frac{22}{6} - 2(\frac{23}{6})) = 3.250$$

$$p_3^{(1)} = \frac{1}{6} (23 - \frac{22}{6} + \frac{30}{8}) = 3.847$$

Obteniéndose:

$$\vec{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.778 & 3.250 & 3.847 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo  $K = 1$  en (a), (b) y (c):

$$p_1^{(2)} = \frac{1}{6} (22 - 2(3.25) - 3.847) = 1.942$$

$$p_2^{(2)} = \frac{1}{8} (30 + 1.778 - 2(3.847)) = 3.011$$

$$p_3^{(2)} = \frac{1}{6} (23 - 1.778 + 3.250) = 4.079$$

Por lo tanto:

$$\vec{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.942 & 3.011 & 4.079 \end{bmatrix}$$

Procediendo reiteradamente en forma similar se obtiene:

$$K = 2 ; \vec{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.983 & 2.973 & 4.012 \end{bmatrix}$$

$$K = 3 ; \vec{p}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2.007 & 2.995 & 3.998 \end{bmatrix}$$

$$K = 4 ; \vec{p}^{(5)} = \begin{bmatrix} 2.002 & 3.001 & 3.998 \end{bmatrix}$$

$$K = 5 ; \vec{p}^{(6)} = \begin{bmatrix} 2.000 & 3.001 & 4.000 \end{bmatrix}$$

$$K = 6 ; \vec{p}^{(7)} = \begin{bmatrix} 2.000 & 3.000 & 4.000 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la solución del sistema es:

$$P_1 = 2.000$$

$$P_2 = 3.000$$

$$P_3 = 4.000$$

Con tres cifras decimales exactas.

#### 6.3.1.1. Convergencia del método de Jacobi.

El método de Jacobi tiene la desventaja de que no siempre converge a la solución del sistema y algunas veces lo hace pero lentamente. Sin embargo, este método con

vergirá siempre a la solución, cuando la magnitud del coeficiente de una incógnita diferente en cada ecuación del conjunto sea suficientemente dominante con respecto a las magnitudes de los otros coeficientes de esa ecuación. Cuando el valor absoluto del coeficiente dominante para una incógnita diferente en cada ecuación sea mayor que la suma de los valores absolutos de los otros coeficientes de esa ecuación, se considerará que este coeficiente es suficientemente dominante y, por lo tanto la convergencia estará asegurada.

En el sistema de ecuaciones que se utilizó en el ejemplo anterior puede verse que el coeficiente de  $p_1$  es dominante en la primera ecuación y los coeficientes de  $p_2$  y  $p_3$  son dominantes en la segunda y tercera ecuación respectivamente.

### 6.3.2. Método de Gauss-Seidel.

Este método es prácticamente idéntico al de Jacobi, la única diferencia consiste en que el método de Gauss-Seidel se acelera cuando existe la convergencia a la solución, debido a que una vez que calcula la componente  $p_i^{(K+1)}$ , la utiliza inmediatamente en la misma iteración, esto es:

$$p_1^{(K+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} p_2^{(K)} - a_{13} p_3^{(K)} - \dots - a_{1n} p_n^{(K)})$$

$$p_2^{(K+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} p_1^{(K+1)} - a_{23} p_3^{(K)} - \dots - a_{2n} p_n^{(K)})$$

$$p_3^{(K+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} p_1^{(K+1)} - a_{32} p_2^{(K+1)} - \dots - a_{3n} p_n^{(K)})$$

·  
·  
·  
·  
·  
·  
·  
·  
·  
·

$$p_n^{(K+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} p_1^{(K+1)} - a_{n2} p_2^{(K+1)} - \dots - a_{n(n-1)} p_{n-1}^{(K+1)})$$

(6.3.2.1)

Donde  $K = 0, 1, 2, \dots$

El criterio de convergencia de este método es el mismo que el de Jacobi.

Como ejemplo del procedimiento de cálculo que sigue este método se resolverá el mismo sistema de ecuaciones que se empleó para ejemplificar el método de Jacobi.

$$6p_1 + 2p_2 + p_3 = 22$$

$$-p_1 + 8p_2 + 2p_3 = 30$$

$$p_1 - p_2 + 6p_3 = 23$$

Las ecuaciones según la expresión (6.3.2.1) se reducen a:

$$p_1^{(K+1)} = \frac{1}{6} (22 - 2p_2^{(K)} - p_3^{(K)}) \quad (d)$$

$$p_2^{(K+1)} = \frac{1}{8} (30 + p_1^{(K+1)} - 2p_3^{(K)}) \quad (e)$$

$$p_3^{(K+1)} = \frac{1}{6} (23 - p_1^{(K+1)} + p_2^{(K+1)}) \quad (f)$$

Donde  $K = 0, 1, 2, \dots$

Tomándose el mismo vector inicial que en aquel ejemplo, esto es:

$$\vec{p}^{(0)} = \left\{ \frac{22}{6}, \frac{30}{8}, \frac{23}{6} \right\}$$

Y sustituyendo  $K = 0$  en las ecuaciones (d), (e) y (f):

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{6} (22 - 2p_2^{(0)} - p_3^{(0)})$$

$$p_2^{(1)} = \frac{1}{8} (30 + p_1^{(1)} - 2p_3^{(0)})$$

$$p_3^{(1)} = \frac{1}{6} (23 - p_1^{(1)} + p_2^{(1)})$$

Sustituyendo valores:

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{6} (22 - 2 \left(\frac{30}{8}\right) - \frac{23}{6}) = 1.778$$

$$p_2^{(1)} = \frac{1}{8} (30 + 1.778 - 2 \left(\frac{23}{6}\right)) = 3.014$$

$$p_3^{(1)} = \frac{1}{6} (23 - 1.778 + 3.014) = 4.039$$

Se obtiene:

$$\vec{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.778 & 3.014 & 4.039 \end{bmatrix}$$

Procediendo reiteradamente en forma similar, resultan las siguientes iteraciones:

$$K = 1 ; \vec{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.989 & 2.989 & 4.000 \end{bmatrix}$$

$$K = 2 ; \vec{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.004 & 3.001 & 4.000 \end{bmatrix}$$

$$K = 3 ; \vec{p}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2.000 & 3.000 & 4.000 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$p_1 = 2.000$$

$$p_2 = 3.000$$

$$p_3 = 4.000$$

Como puede apreciarse, es la misma solución que proporciona el método de Jacobi, con la ventaja que éste la obtiene en tres iteraciones menos.

### 6.3.3. Método de relajación.

Se trata de un método que acelera la obtención de la solución con respecto a los métodos iterativos vistos anteriormente.

En éste, el nuevo valor de  $p_i^{(K + 1)}$  se obtiene con parte de la nueva iteración y con parte de la anterior. Para ello se introduce el término "parámetro de relajación" ( $\omega$ ), cuya presencia acelera el proceso de convergencia.

Así pues, notacionalmente se tiene lo siguiente:

$$p_1^{(K+1)} = (\omega) \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} p_2^{(K)} - a_{13} p_3^{(K)} - \dots - a_{1n} p_n^{(K)}) + (1-\omega) p_1^{(K)}$$

$$p_2^{(K+1)} = (\omega) \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} p_1^{(K+1)} - a_{23} p_3^{(K)} - \dots - a_{2n} p_n^{(K)}) + (1-\omega) p_2^{(K)}$$

$$p_3^{(K+1)} = (\omega) \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} p_1^{(K+1)} - a_{32} p_2^{(K+1)} - \dots - a_{3n} p_n^{(K)}) + (1-\omega) p_3^{(K)}$$

⋮

$$p_n^{(K+1)} = (\omega) \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} p_1^{(K+1)} - a_{n2} p_2^{(K+1)} - \dots - a_{n(n-1)} p_{n-1}^{(K+1)}) + (1-\omega) p_n^{(K)}$$

Donde  $K = 0, 1, 2, \dots$

Para cualquier valor que se fije a  $\omega$  entre cero y dos, el proceso converge para los tipos de sistemas de ecuaciones que puedan encontrarse en la simulación de yacimientos. Cuando el valor de  $\omega > 1.0$  se dice que el proceso es de sobrerelajación. Si el valor de  $\omega$  estuviese comprendido entre cero y uno, se tendría bajorelajación, aunque hay que hacer notar que dicho procedimiento no es efectivo para el tipo de problemas de yacimientos. Si  $\omega = 1$  el proceso se reduce, como se podrá observar viendo la Ec. (6.3.3.1) y comparándola con la Ec. (6.3.2.1), al método de Gauss-Seidel.

Es muy importante seleccionar el valor adecuado de  $\omega$  para acelerar el proceso, pues un valor óptimo de dicho parámetro produce una convergencia extraordinariamente rápida<sup>1</sup>.

#### 6.4 Algoritmo de Thomas para la solución de un sistema de ecuaciones tridiagonales.

En problemas de simulación para una dimensión es común tener que resolver un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea tridiagonal, para lo cual se emplea el algoritmo de Thomas, que es básicamente una variación de la eliminación de Gauss y con el cual se disminuyen los problemas en cuanto a capacidad de computadora.

Considérese la siguiente matriz tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

De donde:

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \quad (6.4.2)$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \quad (6.4.3)$$

$$a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3 \quad (6.4.4)$$

$$a_4 x_3 + b_4 x_4 = d_4 \quad (6.4.5)$$

De la Ec. (6.4.2):

$$x_1 = \frac{d_1 - c_1 x_2}{b_1} \quad (6.4.6)$$

Sustituyendo la Ec. (6.4.6) en la Ec. (6.4.3):

$$a_2 \left( \frac{d_1 - c_1 x_2}{b_1} \right) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \quad (6.4.7)$$

$$\frac{a_2 d_1}{b_1} - \frac{a_2 c_1 x_2}{b_1} + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \quad (6.4.8)$$

Factorizando la expresión anterior:

$$x_2 \left[ b_2 - \frac{a_2 c_1}{b_1} \right] + c_2 x_3 = d_2 - \frac{a_2 d_1}{b_1} \quad (6.4.9)$$

Definiendo:

$$\alpha_2 = b_2 - \frac{a_2 c_1}{b_1} \quad (6.4.10)$$

$$S_2 = d_2 - \frac{a_2 d_1}{b_1} \quad (6.4.11)$$

Y sustituyendo la Ec. (6.4.9), puede escribirse como:

$$x_2 \alpha_2 + c_2 x_3 = S_2 \quad (6.4.12)$$

Despejando:

$$x_2 = \frac{S_2 - c_2 x_3}{\alpha_2} \quad (6.4.13)$$

Sustituyendo la Ec. (6.4.13) en la Ec. (6.4.4):

$$a_3 \left[ \frac{S_2 - c_2 x_3}{\alpha_2} \right] + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3 \quad (6.4.14)$$

$$\frac{a_3 S_2}{\alpha_2} - \frac{a_3 c_2 x_3}{\alpha_2} + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3 \quad (6.4.15)$$

Factorizando:

$$x_3 \left[ b_3 - \frac{a_3 c_2}{\alpha_2} \right] + c_3 x_4 = d_3 - \frac{a_3 S_2}{\alpha_2} \quad (6.4.16)$$

Definiendo:

$$\alpha_3 = b_3 - \frac{a_3 c_2}{\alpha_2} \quad (6.4.17)$$

$$S_3 = d_3 - \frac{a_3 S_2}{\alpha_2} \quad (6.4.18)$$

La Ec. (6.4.16) se puede escribir como sigue:

$$x_3 \alpha_3 + c_3 x_4 = S_3 \quad (6.4.19)$$

Despejando:

$$x_3 = \frac{S_3 - c_3 x_4}{\alpha_3} \quad (6.4.20)$$

Sustituyendo esta última expresión en la Ec. (6.4.5):

$$a_4 \left[ \frac{S_3 - c_3 x_4}{\alpha_3} \right] + b_4 x_4 = d_4 \quad (6.4.21)$$

$$\frac{a_4 S_3}{\alpha_3} - \frac{a_4 c_3 x_4}{\alpha_3} + b_4 x_4 = d_4 \quad (6.4.22)$$

Factorizando:

$$x_4 \left[ b_4 - \frac{a_4 c_3}{\alpha_3} \right] = d_4 - \frac{a_4 S_3}{\alpha_3} \quad (6.4.23)$$

Definiendo:

$$\alpha_4 = b_4 - \frac{a_4 c_3}{\alpha_3} \quad (6.4.24)$$

$$S_4 = d_4 - \frac{a_4 S_3}{\alpha_3} \quad (6.4.25)$$

La Ec. (6.4.23) puede escribirse como:

$$x_4 \alpha_4 = S_4 \quad (6.4.26)$$

Despejando:

$$x_4 = \frac{S_4}{\alpha_4} \quad (6.4.27)$$

Para los términos enésimos:

$$x_n = \frac{S_n}{\alpha_n} \quad (6.4.28)$$

$$S_n = d_n - \frac{a_n S_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \quad (6.4.29)$$

$$\alpha_n = b_n - \frac{a_n c_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \quad (6.4.30)$$

Como podrá observarse para inicializar el sistema:

$$\alpha_1 = b_1 \quad (6.4.31)$$

$$S_1 = d_1 \quad (6.4.32)$$

Generalizando:

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad (6.4.33)$$

$$S_i = d_i - \frac{a_i S_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad (6.4.34)$$

$$x_i = \frac{S_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i} \quad (6.4.35)$$

El algoritmo es el siguiente:

- a) Calcular los valores de  $\alpha$ 's y  $S$ 's con las Ecs. (6.4.33) y (6.4.34), empezando con las Ecs. (6.4.31) y (6.4.32).
- b) Calcular el valor de  $x_n$ , Ec. (6.4.28).
- c) Calcular los valores  $x_i$ , Ec. (6.4.35) hacia atrás.

## REFERENCIAS

- 1.- Crichlow, H. B.: "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach". Prentice - Hall, Inc.
- 2.- Iriarte, R.; Borrás, H. y Durán, R.: "Apuntes de métodos numéricos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 3.- Kaplan, W. y Lewis, D.: "Cálculo y Algebra Lineal", Volumen II. Editorial Limusa.
- 4.- Lipschutz, S.: "Algebra Lineal". Series Schaum.
- 5.- Berlanga, J. M.: "Computación Aplicada a la Ingeniería Petrolera". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 6.- Domínguez, G. V.: "Notas del Curso de Simulación Matemática de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.

## CAPITULO 7

MODELOS MATEMATICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS.

## 7.1 Introducción.

En el capítulo 4 se desarrollaron las ecuaciones para los diferentes tipos de flujo que se presentan en el medio poroso; sin embargo, para hacer uso de esas ecuaciones es necesario presentarlas de tal manera que en ellas se manejen unidades prácticas.

No obstante que la obtención de la constante que permita el uso de unidades prácticas (o de cualquier juego de unidades que se desee) en las ecuaciones empleadas en simulación no es una tarea difícil, frecuentemente el estudiante y aún el mismo ingeniero en la práctica tiene muchos problemas para transformar una ecuación a otras unidades. Por ello se decidió dedicar un capítulo especial en el presente trabajo al manejo de las unidades, en el que además de proporcionar las ecuaciones ya transformadas para ser utilizadas directamente en unidades prácticas, se da (utilizando la ecuación de Darcy) una breve explicación de la manera en que se puede llevar a cabo dicha transformación, estando seguros de que es lo que todo estudiante de simulación debe tener la capacidad de llevar a cabo.

## 7.2 La ecuación de Darcy.

Recordemos la Ec. (4.4.3) que representa la ley de Darcy:

$$q = \frac{KA}{\mu} \frac{dp}{ds} \quad (4.4.3)$$

Se dijo que en dicha ecuación, debido a las condiciones bajo las cuales se realizó el experimento, las unidades de cada parámetro son las siguientes:

q en (cm<sup>3</sup>/seg)

K en (darcys)

μ en (cp)

A en (cm<sup>2</sup>)

dp en (atmósferas)

ds en (cm)

Las cuales no se manejan en la práctica. Sin embargo, es posible encontrar una constante que afectando la Ec. (4.4.3) permita utilizar las siguientes unidades que son más comunes:

q en (bl/día)

K en (milidarcys)

μ en (cp)

A en (pie<sup>2</sup>)

dp en (lb/pg<sup>2</sup>)

ds en (pies)

Para ello se procede como sigue:

Partiendo de la ecuación original se debe llegar a una ecuación equivalente, la cual se forma al ir haciendo la transformación de las unidades para cada uno de sus parámetros. Para ello - del lado izquierdo de la igualdad se pone el parámetro con las unidades originales; en el lado derecho después de poner las unidades que se desean utilizar, se van haciendo una serie de transformaciones con el fin de tener en ambos lados las unidades iniciales. Así pues, para el gasto sería como sigue:

$$q \text{ (cm}^3\text{/seg)} = q'' \text{ (bl/día)} \quad (7.2.1)$$

donde  $q'' = \text{constante } q' = q$

Para obtener el valor de la "constante" es necesario mediante una serie de operaciones, llegar a tener en ambos lados de la igualdad las mismas unidades originales, así pues como:

$$1 \text{ bl} = 0.159 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ día} = 86400 \text{ seg}$$

$$1 \text{ atmósfera} = 14.7 \text{ lb/pg}^2$$

$$1 \text{ pie} = 30.48 \text{ cm}$$

Se tiene:

$$q \text{ (cm}^3\text{/seg)} = q' \left( \frac{\text{bl}}{\text{día}} \right) \left( \frac{0.159 \text{ m}^3}{1 \text{ bl}} \right) \left( \frac{1000000 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3} \right) \left( \frac{1 \text{ día}}{86400 \text{ seg}} \right)$$

Como puede verse, en ambos lados de la igualdad se tienen ya las mismas unidades, ésto es (cm<sup>3</sup>/seg), por lo tanto:

$$q = 1.8403 q' \quad (7.2.2)$$

Procediendo de una manera similar con cada uno de los parámetros de la Ec. (4.4.3) se tiene:

$$K \text{ (darcy)} = K' \text{ (milidarcy)} \left( \frac{1 \text{ darcy}}{1000 \text{ milidarcys}} \right)$$

$$K = 0.001 K' \quad (7.2.3)$$

$$\mu \text{ (cp)} = \mu' \text{ (cp)}$$

$$\mu = 1 \mu' \quad (7.2.4)$$

$$A \text{ (cm}^2\text{)} = A' \text{ (pie}^2\text{)} \left( \frac{(30.48)^2 \text{ cm}^2}{1 \text{ pie}^2} \right)$$

$$A = 929.03 A' \quad (7.2.5)$$

$$dp \text{ (atmósferas)} = dp' \text{ (lb/pg}^2\text{)} \left( \frac{1 \text{ atmósfera}}{14.7 \text{ lb/pg}^2} \right)$$

$$dp = 0.068027 dp' \quad (7.2.6)$$

$$ds \text{ (cm)} = ds' \text{ (pie)} \left( \frac{30.48 \text{ cm}}{1 \text{ pie}} \right)$$

$$ds = 30.48 ds' \quad (7.2.7)$$

Por lo que la nueva ecuación equivalente quedará, al sustituir de la Ec. (7.2.2) a la Ec. (7.2.7) en la Ec. (4.4.3), como sigue:

$$1.8403 q' = \frac{0.001 K' (929.03) A' (0.068027) dp'}{\mu' (30.48) ds'} \quad (7.2.8)$$

Haciendo las operaciones para obtener una sola constante:

$$q' = 0.001127 \frac{K' A' dp'}{\mu' ds'} \quad (7.2.9)$$

La Ec. (7.2.9) es la ecuación de Darcy en unidades prácticas, - donde si se utilizan directamente las unidades siguientes:

K (mdarcys) ; A (pies<sup>2</sup>) ; dp (lb/pg<sup>2</sup>) ;  $\mu$  (cp) ; ds (pies)

Se obtiene el valor del gasto en (bl/día).

A manera de ejemplo, se obtendrá la constante que permita manejar la ecuación de Darcy en las siguientes unidades:

q en (m<sup>3</sup>/día)

K en (milidarcy)

$\mu$  en (lb<sub>m</sub>/pie-seg)

A en (m<sup>2</sup>)

dp en (Kg/cm<sup>2</sup>)

ds en (m)

Para ello se puede partir de la Ec. (4.4.3) o bien de la Ec. - (7.2.9). Se hará de las dos formas con fines ilustrativos.

De la Ec. (4.4.3):

$$q = \frac{KA}{\mu} \frac{dp}{ds}$$

Haciendo cada una de las transformaciones como ya se ha indicado:

$$q \text{ (cm}^3\text{/seg)} = q' \left( \frac{\text{m}^3}{\text{día}} \right) \left( \frac{1 \text{ día}}{86400 \text{ seg}} \right) \left( \frac{1000000 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3} \right)$$

$$q = 11.5741 q' \quad (7.2.10)$$

$$K \text{ (darcy)} = K' \text{ (mildarcy)} \left( \frac{1 \text{ darcy}}{1000 \text{ mildarcy}} \right)$$

$$K = 0.001 K' \quad (7.2.11)$$

Como  $1 \text{ cp} = 6.7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m\text{/pie-seg}$ . (Consúltese el apéndice - sobre unidades al final del trabajo).

$$\mu \text{ (cp)} = \mu' \text{ (lb}_m\text{/pie-seg)} \left( \frac{1 \text{ cp}}{6.7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m\text{/pie-seg}} \right)$$

$$\mu = 1488.1616 \mu' \quad (7.2.12)$$

$$A \text{ (cm}^2\text{)} = A' \text{ (m}^2\text{)} \left( \frac{10000 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \right)$$

$$A = 10000 A' \quad (7.2.13)$$

$$dp \text{ (atmósfera)} = dp' \text{ (Kg/cm}^2\text{)} \left( \frac{1 \text{ atmósfera}}{1.033 \text{ Kg/cm}^2} \right)$$

$$dp = 0.9680542 dp' \quad (7.2.14)$$

$$ds \text{ (cm)} = ds' \text{ (m)} \left( \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)$$

$$ds = 100 ds' \quad (7.2.15)$$

Sustituyendo las expresiones (7.2.10) a la (7.2.15) en la Ec. - (4.4.3) se tiene:

$$11.5741 q' = \frac{(0.001 K') (0.9680542 dp') (10000 A')}{(1488.1616 \mu') (100 ds')} \quad (7.2.16)$$

Haciendo las operaciones para obtener una sola constante:

$$q' = 5.62032 \times 10^{-6} \frac{K' A' dp'}{\mu' ds'} \quad (7.2.17)$$

Que es la ecuación que se está buscando.

Partiendo ahora de la Ec. (7.2.9) se tendrá lo siguiente:

$$q' \text{ (bl/día)} = q'' \left( \frac{m^3}{\text{día}} \right) \left( \frac{6.2896 \text{ bl}}{1 m^3} \right)$$

$$q' = 6.2896 q'' \quad (7.2.18)$$

$$K \text{ (milidarcy)} = K' \text{ (milidarcy)} \left( \frac{1 \text{ milidarcy}}{1 \text{ milidarcy}} \right)$$

$$K' = (1) K'' \quad (7.2.19)$$

$$\mu' \text{ (cp)} = \mu'' \text{ (lb}_m\text{/pie-seg)} \left( \frac{1 \text{ cp}}{6.7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m\text{/pie-seg}} \right)$$

$$\mu' = 1488.1616 \mu'' \quad (7.2.20)$$

$$A' \text{ (pies}^2\text{)} = A'' \text{ (m}^2\text{)} \left( \frac{10.76 \text{ pie}^2}{1 \text{ m}^2} \right)$$

$$A' = 10.76 A'' \quad (7.2.21)$$

$$dp' \text{ (lb/pg}^2\text{)} = dp'' \text{ (Kg/cm}^2\text{)} \left( \frac{14.22 \text{ lb/pg}^2}{1 \text{ Kg/cm}^2} \right)$$

$$dp = 14.22 dp'' \quad (7.2.22)$$

$$ds' \text{ (pies)} = ds'' \text{ (m)} \left( \frac{3.28 \text{ pies}}{1 \text{ m}} \right)$$

$$ds' = 3.28 ds'' \quad (7.2.23)$$

Sustituyendo las expresiones (7.2.18) a la (7.2.23) en la Ec. - (7.2.9) se tiene:

$$6.2896 q'' = \frac{0.001127 (1) (10.76) A'' (14.22) dp''}{(1488.1616) \mu'' (3.28) ds''} \quad (7.2.24)$$

Haciendo las operaciones para obtener una sola constante:

$$q'' = 5.62 \times 10^{-6} \frac{K'' A'' dp''}{\mu'' ds''} \quad (7.2.25)$$

Como puede observarse es la misma constante que se obtuvo en la Ec. (7.2.17).

Por lo tanto, dicha ecuación (7.2.17) y esta última ecuación - (7.2.25) es la ecuación de Darcy para las siguientes unidades:

$q$  ( $\text{m}^3/\text{día}$ ) ;  $K$  (milidarcy) ;  $\mu$  ( $\text{lb}_m/\text{pie-seg}$ ) ;  $A$  ( $\text{m}^2$ ) ;  
 $dp$  ( $\text{Kg/cm}^2$ ) ;  $ds$  (m).

### 7.3 Ecuación para fluidos incompresibles en una sola fase.

Como se vió con anterioridad (capítulo 4), en el caso en que se trate de un fluido incompresible su densidad se considera constante. Además, al tratarse de flujo de una sola fase, la permeabilidad relativa es igual a la unidad. Así pues, considerando el término fuente, la ecuación para fluidos incompresibles en una sola fase en unidades prácticas queda como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0.00127 K_x \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (0.00127 K_y \frac{\partial P}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (0.00127 K_z \frac{\partial P}{\partial z}) \pm \frac{\mu q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = 0 \quad (7.3.1)$$

Donde las permeabilidades en todas las direcciones están en millidarcys, las presiones en lb/pg<sup>2</sup>, la viscosidad en centipoises, el gasto en bl/día y las longitudes en pies.

La Ec. (7.3.1) puede escribirse, al dividir todos los términos entre 0.00127:

$$K_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \pm \frac{\mu q}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = 0 \quad (7.3.2)$$

Hay que recordar que si el pozo es inyector, el signo del término sumidero es positivo. Si por el contrario el pozo es productor, el signo del término fuente es negativo.

Cuando el medio es isotrópico, esto es que  $K = K_x = K_y = K_z$ , la Ec. (7.3.2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \pm \frac{\mu q}{0.00127 K \Delta x \Delta y \Delta z} = 0 \quad (7.3.3)$$

Asimismo la Ec. (7.3.3) puede reducirse a la ecuación de Laplace si no existen pozos, ésto es  $q = 0$  (además debe haber isotropía).

#### 7.4 Ecuación para fluidos ligeramente compresibles en una sola fase.

En este caso también, por tratarse de una sola fase, el valor de la permeabilidad relativa y la saturación del fluido en el medio poroso es la unidad. Así pues, la ecuación para fluidos ligeramente compresibles en una sola fase, considerando término fuente es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0.00127 K_x \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (0.00127 K_y \frac{\partial P}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (0.00127 K_z \frac{\partial P}{\partial z}) \pm \frac{\mu q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \phi \mu c \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.4.1)$$

Sin embargo en esta ecuación, debido a las condiciones en que fué desarrollada, el gasto se tiene en pie<sup>3</sup>/día, ya que la densidad y la compresibilidad (que se utilizaron para llegar a esta ecuación) fueron manejadas en (lb<sub>m</sub>/pie<sup>3</sup>) y (pg<sup>2</sup>/lb) respectivamente. De esta manera, sabiendo que 1 bl = 5.6146 pie<sup>3</sup> la Ec. (7.4.1) puede escribirse como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0.00127 K_x \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (0.00127 K_y \frac{\partial P}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (0.00127 K_z \frac{\partial P}{\partial z}) \pm \frac{\mu q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu c}{5.6146} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.4.2)$$

En donde las permeabilidades están en milidarcys, las presiones en lb/pg<sup>2</sup>, la viscosidad en centipoices, el gasto en bl/día, la longitud en pies, el tiempo en días, la compresibilidad en pg<sup>2</sup>/lb y la porosidad en fracción.

Una manera más condensada de la Ec. (7.4.2) es:

$$0.00127 K_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 0.00127 K_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + 0.00127 K_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \pm \frac{\mu q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu c}{5.6146} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.4.3)$$

Dividiendo ambos miembros de la Ec. (7.4.3) entre 0.00127 se tiene:

$$K_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \pm \frac{\mu q}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu c}{0.00713054} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.4.4)$$

Por último, si se considera un medio isotrópico y homogéneo, esto es  $K = K_x = K_y = K_z$ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \pm \frac{\mu q}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu c}{0.00713054 K} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.4.5)$$

Nuevamente, el signo del término fuente lo proporciona según se trate, el pozo inyector o productor.

7.5 Ecuación para fluidos compresibles (gases) en una sola fase.

Recordando la ecuación para fluidos compresible desarrollada en el capítulo 4 en función del potencial de gas y, utilizando la constante que se ha venido manejando, producto de la Ecuación de Darcy, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (0.00127 K_x \frac{\partial m(P)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (0.00127 K_y \frac{\partial m(P)}{\partial y}) \\ + \frac{\partial}{\partial z} (0.00127 K_z \frac{\partial m(P)}{\partial z}) = \phi \mu c_g \frac{\partial m(P)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

Si se hace nuevamente el desarrollo pero ahora considerando el término fuente la Ec. (7.5.1), quedará como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (0.00127 K_x \frac{\partial m(P)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (0.00127 K_y \frac{\partial m(P)}{\partial y}) \\ + \frac{\partial}{\partial z} (0.00127 K_z \frac{\partial m(P)}{\partial z}) \pm \frac{2qRT}{M \Delta x \Delta y \Delta z} = \phi \mu c_g \frac{\partial m(P)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Que en una forma más compacta puede escribirse como:

$$\begin{aligned} 0.00127 K_x \frac{\partial^2 m(P)}{\partial x^2} + 0.00127 K_y \frac{\partial^2 m(P)}{\partial y^2} + 0.00127 K_z \frac{\partial^2 m(P)}{\partial z^2} \\ \pm \frac{2qRT}{5.6146 M \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu c_g}{5.6146} \frac{\partial m(P)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

En esta Ec. (7.5.3) las unidades que se manejan son exactamente las mismas que para la Ec. (7.4.2) a excepción del gasto, que -

aquí se maneja en pie<sup>3</sup>/día. Además, T es la temperatura en °R, M es el peso molecular en lb y R es la constante de los gases reales con un valor de 10.73. Tomando en cuenta ésto, la Ec. (7.5.3) se puede escribir de la siguiente manera:

$$K_x \frac{\partial^2 m (P)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 m (P)}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 m (P)}{\partial z^2} \pm \frac{q T}{0.0003323 M \Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\phi \mu_g c_g}{0.00713054} \frac{\partial m (P)}{\partial t} \quad (7.5.4)$$

Finalmente, si el medio es isotrópico ( $K = K_x = K_y = K_z$ ), la Ec. (7.5.4) queda:

$$\frac{\partial^2 m (P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m (P)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m (P)}{\partial z^2} \pm \frac{q T}{0.0003323 M \Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\phi \mu c_g}{0.00713054 K} \frac{\partial m (P)}{\partial t} \quad (7.5.5)$$

## 7.6 Ecuaciones de flujo para dos fases.

El procedimiento seguido para obtener las ecuaciones para una fase se extiende para aplicarse al desarrollo de las mismas en dos fases, ésto es para cuando se tiene simultáneamente flujo de aceite y de agua a través del medio poroso. De esta manera la ecuación de difusividad se escribe para cada fase, expresando la densidad de la fase en términos de su factor de volumen (por ejemplo:  $\rho_o = \rho_{CS}/B_o$ , donde  $\rho_o$  es la densidad del aceite

a condiciones de yacimiento y  $\rho_{CS}$  es la densidad del aceite pe-  
ro a las condiciones atmosféricas), como sigue:

Para el aceite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r_o}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial z} \right) \\ = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Considerando la viscosidad del aceite constante, incluyendo el  
término fuente y utilizando unidades prácticas la Ec. (7.6.1) -  
se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r_o}{B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r_o}{B_o} \frac{\partial P_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r_o}{B_o} \frac{\partial P_o}{\partial z} \right) \\ \pm \frac{q_o \mu_o}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu_o}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

Nuevamente, si se trata de un pozo inyector, el signo del térmi-  
no fuente es positivo; si el pozo es productor su signo será ne-  
gativo. Las unidades de la ecuación (7.6.2) son las siguien-  
tes: las permeabilidades en milidarcys, la presión en lb/pg<sup>2</sup>,  
la viscosidad en centipoises, el gasto en bl/día y las longitu-  
des en pies.

Para el agua:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_{r_w}}{\mu_w B_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_{r_w}}{\mu_w B_w} \frac{\partial P_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_{r_w}}{\mu_w B_w} \frac{\partial P_w}{\partial z} \right) = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_w}{B_w} \right) \quad (7.6.3)$$

Considerando la viscosidad del agua constante, incluyendo el término fuente y utilizando unidades prácticas la Ec. (7.6.3) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_{r_w}}{B_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_{r_w}}{B_w} \frac{\partial P_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_{r_w}}{B_w} \frac{\partial P_w}{\partial z} \right) \pm \frac{q_w \mu_w}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi \mu_w}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_w}{B_w} \right) \quad (7.6.4)$$

La convención del signo para el término fuente es igual para la Ec.(7.6.4) que para la Ec. (7.6.2), lo mismo que las unidades que se manejan.

Además de las expresiones (7.6.2) y (7.6.4), para resolver un problema en dos fases se requiere del siguiente par de ecuaciones:

$$S_o + S_w = 1 \quad (7.6.5)$$

$$P_{c_{o-w}} = P_o - P_w \quad (7.6.6)$$

### 7.7 Ecuaciones de flujo para tres fases.

Las ecuaciones de flujo para el aceite y el agua son las mismas ecuaciones vistas en el inciso anterior para flujo en dos fases, ésto es Ec. (7.6.2) y Ec. (7.6.4). Sin embargo, un balance de materia para el gas debe considerar tanto el flujo de gas como una fase por separado, como el gas disuelto tanto en el agua como en el aceite. Así pues, la velocidad del gas en cualquier punto del medio poroso está dada por:

$$V_g = V'_g + \frac{B_g R_{s_o}}{B_o} V_o + \frac{B_g R_{s_w}}{B_w} V_w \quad (7.7.1)$$

Donde:

$R_{s_o}$  es la solubilidad del gas en el aceite en pies<sup>3</sup> a c.s/bl a c.s,

$R_{s_w}$  es la solubilidad del gas en el agua en pies<sup>3</sup> a c.s/bl a c.s,

$B_g$  es el factor de volumen del gas en bl a c.y/pie<sup>3</sup> a c.s y

$V'_g$  es la velocidad de flujo del gas libre dada por una ecuación similar a las que se han utilizado para  $V_o$  y  $V_w$  (dadas por la Ec. de Darcy).

Así pues, sustituyendo las expresiones de las velocidades en la expresión (7.7.1) y posteriormente en la ecuación de continuidad para obtener la correspondiente de difusividad, se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r}{\mu_o B_o} R_{s_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r}{\mu_w B_w} R_{s_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r}{\mu_o B_o} R_{s_o} \frac{\partial P_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r}{\mu_w B_w} R_{s_w} \frac{\partial P_w}{\partial y} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r}{\mu_o B_o} R_{s_o} \frac{\partial P_o}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r}{\mu_w B_w} R_{s_w} \frac{\partial P_w}{\partial z} \right) \\
& = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{S_o R_{s_o}}{B_o} + \frac{S_w R_{s_w}}{B_w} \right)
\end{aligned} \tag{7.7.2}$$

Incluyendo el término fuente en la Ec. (7.7.2) y utilizando unidades prácticas se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r}{\mu_o B_o} R_{s_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_x K_r}{\mu_w B_w} R_{s_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r}{\mu_o B_o} R_{s_o} \frac{\partial P_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K_y K_r}{\mu_w B_w} R_{s_w} \frac{\partial P_w}{\partial y} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r}{\mu_o B_o} R_{s_o} \frac{\partial P_o}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_z K_r}{\mu_w B_w} R_{s_w} \frac{\partial P_w}{\partial z} \right) \\
& \pm \frac{q_g}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\phi}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{S_o R_{s_o}}{B_o} + \frac{S_w R_{s_w}}{B_w} \right)
\end{aligned} \tag{7.7.3}$$

Las unidades de la Ec. (7.7.3) son las siguientes:

$q_g$  en  $\text{pie}^3$  a c.s/día,

$Rs_o$  y  $Rs_w$  en  $\text{pie}^3$  a c.s/bl a c.s,

$B_g$  en bl a c.y/ $\text{pie}^3$  a c.s,

$B_o$  y  $B_w$  en bl a c.y/bl a c.s,

Las permeabilidades ( $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ) en milidarcys,

Las saturaciones en fracción y,

Las distancias en pies.

Hay que hacer notar que además de la ecuación para la presión capilar entre el aceite y el agua dada por la expresión (7.6.6), se requiere la de la presión capilar entre el aceite y el gas dada por:

$$P_{c_{g-o}} = P_g - P_o \quad (7.7.4)$$

La ecuación de la saturación para tres fases es:

$$S_o + S_w + S_g = 1.$$

Debido al número considerable de términos que tiene la ecuación (7.7.3) lo que la hace muy poco manejable, es frecuente expresarla en notación vectorial. De esta manera las ecuaciones para el flujo en tres fases, en unidades prácticas, en notación -

vectorial y en términos del potencial de flujo ( $\phi$ ) quedan como sigue:

Para el aceite:

$$\nabla \left[ \frac{K K_{r_o}}{\mu_o B_o} \nabla \phi_o \right] \pm \frac{q_o}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (7.7.5)$$

Para el agua:

$$\nabla \left[ \frac{K K_{r_w}}{\mu_w B_w} \nabla \phi_w \right] \pm \frac{q_w}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (7.7.6)$$

Para el gas:

$$\nabla \left[ \frac{K K_{r_g}}{\mu_g B_g} \nabla \phi_g \right] + \nabla \left[ \frac{K K_{r_o}}{\mu_o B_o} R_{s_o} \nabla \phi_o \right] + \nabla \left[ \frac{K K_{r_w}}{\mu_w B_w} R_{s_w} \nabla \phi_w \right] \pm \frac{q_g}{0.00127 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{0.00713054} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( \frac{S_g}{B_g} + \frac{S_o R_{s_o}}{B_o} + \frac{S_w R_{s_w}}{B_w} \right) \right] \quad (7.7.7)$$

En las ecuaciones anteriores el potencial para cualquiera de las fases, se define como sigue:

$$\phi = p - \frac{\rho D}{144} \quad (7.7.8)$$

Donde  $\phi$  está en lb/pg<sup>2</sup>, p (presión de la fase) en lb/pg<sup>2</sup>,  $\rho$

(densidad de la fase en particular) en  $\text{lb}/\text{pie}^3$  y  $D$  es la profundidad del punto considerado en pies (positiva hacia abajo).

Los gastos para todas las ecuaciones de este capítulo, se manejan en  $\text{bl}$  a  $\text{c.s}/\text{día}$  para el aceite y el agua y en  $\text{pie}^3$  a  $\text{c.s}/\text{día}$  para el gas.

## REFERENCIAS

- 1.- Rodríguez, R. N.: "Notas del Curso Principios de Mecánica de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 2.- Farougal, S. A.: "Numerical Reservoir Simulation". Department of Petroleum and Natural Gas. The Pennsylvania - State University.
- 3.- Garaicochea, F. P.: "Notas del Curso Transporte de Hidrocarburos". Facultad de Ingeniería UNAM.
- 4.- Domínguez, G. V.: "Notas del Curso Simulación Matemática de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.

## CAPITULO 8

ASPECTOS PRACTICOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS.

## 8.1 Introducción.

Con lo que se ha presentado hasta el capítulo siete, es fácil comprender que la persona que esté encargada de llevar a cabo un trabajo de simulación deberá contar con un conjunto de conocimientos que van desde la herramienta matemática hasta una base sólida en el uso de la computación, pasando, claro está, por el dominio de los fundamentos de la ingeniería de yacimientos. Además este conocimiento que es esencial, deberá ser complementado con la experiencia, pues ésta la mayoría de las veces, determina el éxito o el fracaso que pueda tenerse al realizar un trabajo.

A través del tiempo, producto de los estudios que se han efectuado con simulación, han surgido una serie de "aspectos prácticos" por llamarlos de alguna manera, que deben ser aprovechados en beneficio de nuevos proyectos por desarrollar.

Este capítulo ha sido dividido en dos partes. En la primera se hace referencia precisamente a algunos de estos "aspectos prácticos" que alguien que estudia simulación no deberá pasar por alto y quien la practica deberá conocer y aprovechar. Hay que hacer notar que no se profundiza en el tema, pues el hacerlo está fuera del alcance y de los objetivos del presente trabajo. La segunda parte de este capítulo tiene por objeto el hacer que el es

tudiante evalúe de alguna manera, los conocimientos que ha adquirido sobre simulación. Para ello se plantean y se resuelven una serie de problemas que van desde un grado de dificultad mínimo hasta aquéllos que requieren un poco más de conocimiento, o quizá de estudio sobre las bases tanto matemáticas como numéricas que han sido presentadas con anterioridad. De cualquier manera se trata de un complemento al trabajo que seguramente será de gran utilidad para el estudiante.

## 8.2 Fuentes de error en los resultados obtenidos de un simulador<sup>1</sup>.

Los resultados que proporciona un simulador están sujetos a algunas fuentes potenciales de error cuya consideración es importante:

- a) El modelo en sí es solo una aproximación al fenómeno físico que se da en el yacimiento, ya que al desarrollarlo se han hecho una serie de suposiciones que son parcialmente válidas.
- b) El reemplazar el modelo matemático que se ha planteado para resolver el problema por un modelo numérico, introduce un error de truncamiento, lo que significa que la solución de las ecuaciones en diferencias finitas difiere de alguna manera de la solución exacta que se obtendría de resolver las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales originales.
- c) Nunca se obtiene la solución exacta de las ecuaciones en di-

ferencias finitas, ya que al utilizar la computadora para realizar los cálculos se incurre en un error por redondeo.

d) Definitivamente la fuente de error más importante es que los datos que describen al yacimiento ( $\phi$ , K,  $S_o$ , etc.), rara vez se conocen con precisión.

El poder evitar que se den los errores citados con anterioridad es una tarea muy difícil, sin embargo, se deberán tratar de minimizar hasta donde sea posible. Es importante que dichos errores sean estimados para determinar hasta qué grado pueden afectar la solución y en consecuencia, si dicha solución puede considerarse como aceptable.

El grado que afecta el error de truncamiento a los resultados calculados puede estimarse mediante la repetición de corridas o porciones de corridas, con intervalos de tiempo o de espacio más pequeños. Cambios significativos en los resultados calculados a variaciones de dichos intervalos indican que el error por truncamiento tiene un valor significativo y que será necesario reducir los intervalos de tiempo o de espacio.

Comparados con errores de otras fuentes, los errores por redondeo son generalmente despreciables.

Es difícil determinar los errores que provoca una defectuosa descripción del yacimiento, ya que nunca se sabrá cual es la descripción verdadera del mismo. Como ya se comentó en alguna parte de este trabajo, la combinación de análisis de muestras en el

laboratorio, pruebas de presión, registros geofísicos y estudios geológicos, proporcionará una mejor idea sobre la naturaleza de la distribución de porosidades y de permeabilidades, además de la geometría del yacimiento. Sin embargo, la mejor manera de obtener una descripción del mismo es determinando la caracterización de éste, que resulta del mejor parecido entre el comportamiento calculado y el comportamiento que se observa en un perfodo disponible de la historia del campo.

La sensibilidad a los errores en los datos que describen al yacimiento puede determinarse mediante la repetición de una corrida, haciendo variaciones de esos datos y cubriendo un rango razonable de incertidumbre.

#### 8.2.1. Inestabilidad.

Como ya se ha visto, las técnicas numéricas no proporcionan una solución exacta, pues existe un error asociado a los resultados. Este error en ocasiones crece de una manera muy rápida provocando que la solución se "dispare"; en otras palabras, la solución físicamente se hace irreal.

Esta inestabilidad puede detectarse al analizar los resultados obtenidos, ya que lo que comúnmente provoca son cambios excesivamente grandes en los valores de saturación y de presión durante el intervalo de tiempo considerado. Generalmente esto puede remediarse mediante la reducción del tamaño del intervalo de tiempo utilizado.

### 8.2.2. Dispersión numérica.

Se trata de un problema inherente a la solución numérica debido a que ésta proporciona respuestas en forma discreta, ésto es en puntos específicos en tiempo y en espacio, lo cual difiere de la solución analítica que proporcionaría resultados de manera continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo considerado. En los trabajos de simulación este fenómeno se presenta al hacer la representación del yacimiento mediante un conjunto de celdas, en las cuales las propiedades son promedio, ya que cuando un frente de saturación entra a alguna de las celdas, éste se extiende a lo largo de la misma al considerarse un valor promedio de saturación, lo que lógicamente difiere del fenómeno real.

La dispersión numérica puede minimizarse mediante la reducción de las dimensiones de la celda. Sin embargo no hay que perder de vista que ésto conduce a un incremento en el tiempo de cálculo y en consecuencia, en el tiempo de computadora.

### 8.3 Error por el método de balance de materia<sup>2</sup>.

Un criterio para determinar la compatibilidad de los valores de presión y de saturación que se obtienen de una simulación es el error por el método de balance de materia (MBE). Una forma de balance de materia es conociendo los volúmenes de aceite en el yacimiento al principio y al final del intervalo de tiempo.

La diferencia entre los valores deberá ser igual a la producción total durante el intervalo. El error incrementado (MBEI) que se va generando se calcula con la siguiente expresión:

$$(MBEI) = \frac{\sum_1^m \left[ V\phi \left( \frac{S_0}{B_0} \right) \right]^n - \sum_1^m \left[ V\phi \left( \frac{S_0}{B_0} \right) \right]^{n+1}}{q_0 \Delta t} - 1$$

Donde V es el volumen de celda y la sumatoria se toma para las m celdas.

Algunos autores utilizan el error acumulativo (MBEC) que se obtiene con la siguiente ecuación:

$$(MBEC) = \frac{\text{Aceite inicial en el yacimiento} - \sum_1^m \left[ V\phi \left( \frac{S_0}{B_0} \right) \right]^{n+1}}{\text{Producción total acumulada}} - 1$$

Cabe advertir que es necesario obtener un valor pequeño de error por el método de balance de materia, pero esto no es suficiente para afirmar que la solución sea correcta. Un error pequeño indica que el aceite total que se tiene en el yacimiento a un nivel de tiempo n+1 es correcto, pero de ninguna manera esto garantiza que el aceite esté distribuido correctamente entre todas las celdas.

### 8.3.1. Validez de la solución.

Una vez que se ha efectuado una corrida de simulación es válido hacerse la siguiente pregunta: ¿Qué tan buena es la solución?

Como se dijo anteriormente, un error pequeño por el método de balance de materia indica que los volúmenes totales de los fluidos son correctos, pero no garantiza que la distribución que se tiene de los mismos a lo largo de todo el yacimiento sea válida. Si dicha distribución de fluidos obtenida es cuestionable, se requerirá de un análisis más detallado.

Las variables que influyen en la distribución de la saturación son: la medida del intervalo de tiempo  $\Delta t$  y las dimensiones de la celda  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ . Si se desea un análisis riguroso se deberá determinar la sensibilidad de los resultados a las variaciones de todos estos parámetros; sin embargo, como no es práctico cambiar los valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ , ya que el hacerlo requeriría una nueva revisión de los datos, es común estudiar solamente el efecto que tiene en la solución la medida del intervalo de tiempo. Para ello se vuelve a correr el simulador reduciendo el intervalo de tiempo y comparando los resultados. Esto se realiza hasta que una reducción en el valor de  $\Delta t$  no provoca cambios significativos en los resultados obtenidos; con ello se sabrá que se ha obtenido la mejor solución para la medida de la celda escogida.

#### 8.4 Medida y número de las celdas.

La selección de la medida de las celdas, entre otras cosas, de-

pendará en gran parte del tipo de proceso de recuperación que se desea simular. Así por ejemplo, si se piensa utilizar un modelo en dos dimensiones para simular el comportamiento de un yacimiento sujeto a condiciones primarias de explotación, como puede ser la expansión del aceite, o bien el empuje por gas disuelto liberado, un sistema de malla grueso (con un número reducido de celdas) será suficiente para resolver el problema. Si en el yacimiento se efectuara la inyección de agua, lo más seguro es que se requeriría que el modelo presentara una malla más fina, para tener una mejor precisión al caracterizar el frente de inyección.

H. M. Staggs y E. F. Herbek, utilizando un modelo de aceite negro en dos dimensiones, realizaron una serie de corridas con el objeto de demostrar los efectos del tamaño de las celdas en la predicción de la recuperación de aceite. El trabajo consistió en utilizar un elemento con un área de cinco Acres (1 Acre = 4046.86 m<sup>2</sup>), el cual primeramente fué dividido en un sistema de malla de 3 x 3. Se hizo la corrida simulando un desplazamiento con agua. Utilizando la misma área, sin ningún cambio en los datos de entrada a excepción de aquéllos necesarios para acondicionar el número de celdas, se repitió la corrida para sistemas de malla de 4 x 4, 5 x 5 y 6 x 6. Se observó que la medida de la malla afectaba los resultados, obteniéndose el mayor gasto de producción al emplearse la cuadrícula más fina (6 x 6). Al compararse los resultados obtenidos con los que proporcionó otro modelo, se observó que el sistema de malla más fino era el que proporcionaba la predicción más cercana a la correcta.

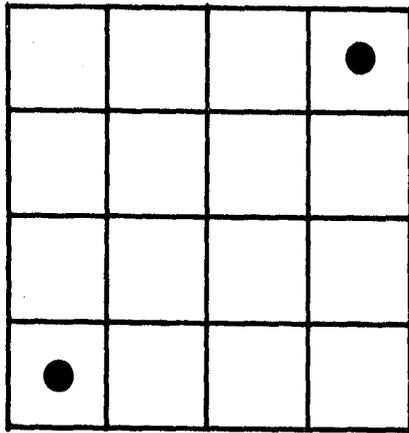
No obstante lo anterior, cabe hacer un comentario. Hay que tener en cuenta que el querer utilizar una malla fina trae consigo una serie de problemas adicionales. Primeramente la cantidad de información con que se debe contar se incrementa en forma notable. Además, el trabajar con una malla constituida por un número de celdas grande es impráctico, ya que se provoca un considerable aumento en la cantidad de cálculos que se deben realizar con el consiguiente aumento en el requerimiento de tiempo de computadora.

Los autores concluyen que su experiencia les indica que un número razonable de celdas para utilizar es de 1000 a 1500 y que un sistema con 2000 a 2500 se aproxima al límite práctico, el cual quizá sea aumentado con el desarrollo de nuevas computadoras. Finalmente dicen que para simular el desplazamiento del aceite de un yacimiento sujeto a la inyección de agua, deberá utilizarse un sistema de malla que tenga al menos dos celdas entre la distancia que exista de un pozo productor a un pozo inyector.

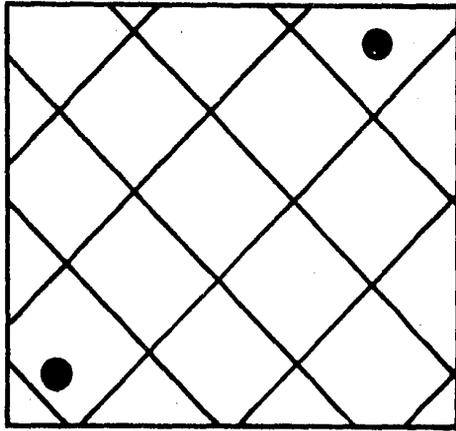
#### 8.5 Orientación de la malla.

Básicamente existen dos diferentes sistemas de malla, dependiendo de la orientación que se le dé: la malla en paralelo y la malla en diagonal. Fig. (8.1).

Se ha comprobado que bajo ciertas condiciones, como son el simular un desplazamiento utilizando el procedimiento de discretización de cinco puntos, principalmente cuando la movilidad de los



**MALLA EN PARALELO**



**MALLA EN DIAGONAL**

**FIG. 8.1 ORIENTACION DE LA MALLA.**

fluidos difiere en forma significativa, estos dos sistemas de malla producen resultados diferentes, más aún, ambas soluciones son incorrectas.

En el caso en que se utilice un sistema de malla en paralelo para simular el desplazamiento de un fluido por otro en el yacimiento, se tendrá un arribo en tiempo menor del fluido que se inyecta al pozo productor, mientras que el empleo de la malla en diagonal dará como resultado el arribo del fluido inyectado en un tiempo retardado.

Hasta hace pocos años, los modelos areales (x-y) de simulación hacían uso del esquema común de diferencias finitas de cinco puntos para considerar la interacción entre los bloques, sin embargo, recientemente se empezaron a utilizar nueve puntos para el desarrollo del modelo numérico, lo cual se ha visto, reduce notablemente los efectos que tiene la orientación de la malla en la solución.

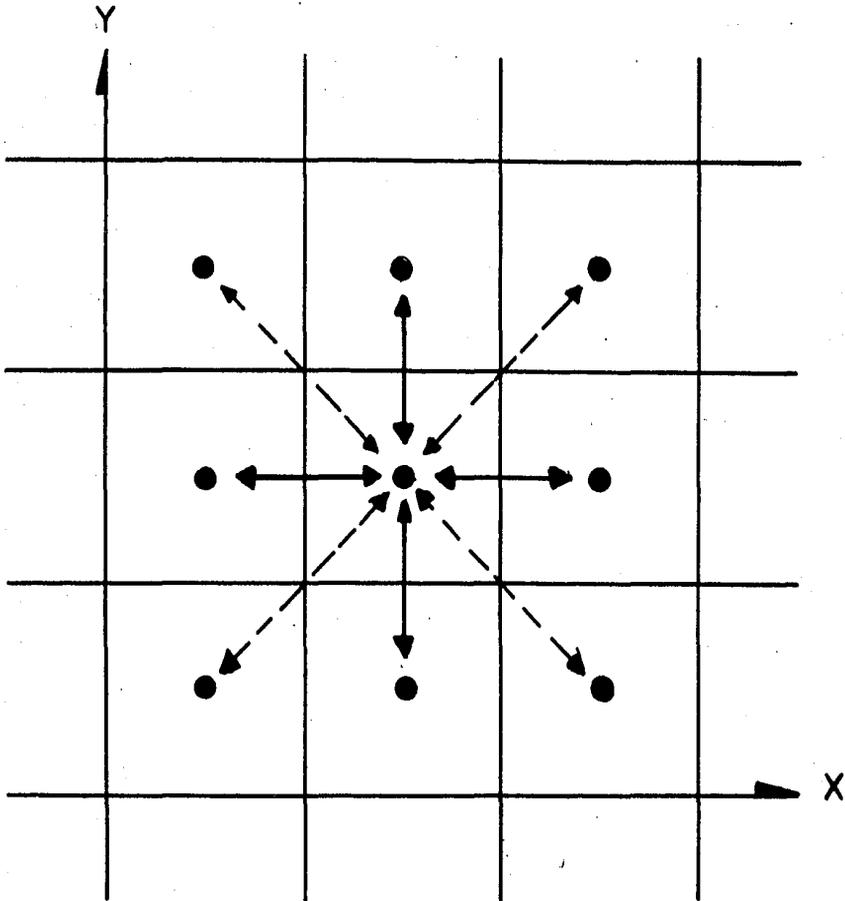
## 8.6 Consideraciones de cálculo.

### 8.6.1. Tiempo de computadora.

Se ha comentado que el tiempo de computadora está relacionado directamente con la cantidad de cálculos necesarios para efectuar una simulación. Es importante que este tiempo de computadora sea optimizado, o mejor dicho no sea desperdiciado, ya que el uso de CPU (unidad de procesamiento central) -

————— 5 PUNTOS

- - - - - 9 PUNTOS



**FIG. 8.2 ESQUEMA EN DIFERENCIAS CON NUEVE Y CON CINCO PUNTOS.**

de la máquina está relacionado a costos por el uso de tiempo de computación.

El tiempo de computadora que se necesita para simular el comportamiento de un yacimiento en particular depende principalmente de:

- a) El número de celdas.
- b) La cantidad de intervalos de tiempo.

Así pues, si se duplica el número de nodos que contiene la malla, aproximadamente se duplicará en consecuencia, el tiempo de computadora necesario para efectuar los cálculos por intervalo de tiempo.

La experiencia ha determinado que el número de intervalos que se requieren para simular un período de tiempo depende de la magnitud del  $\Delta t$  permitido y que el valor máximo de éste es una función del volumen de la celda.

#### 8.6.2. Desarrollo del programa de cómputo.

El programador deberá tener en mente ciertas consideraciones al desarrollar el programa de cómputo, principalmente que el simulador será usado de manera frecuente y por otras personas. Dentro de estas consideraciones importantes se tienen las siguientes:

- a) Rapidez en la corrida (eficiencia de la programación).

- b) Optimización de la memoria disponible.
- c) Estructurar convenientemente el manejo de la entrada y salida de información.
- d) Facilidad para reiniciar la corrida.
- e) Mensajes de diagnóstico.
- f) Escribir el programa en forma "modular", de manera que las rutinas sean fácilmente intercambiables.

La rapidez de la corrida en partes del programa puede ser afectada seriamente si se hace una programación ineficiente. Algunos de los puntos importantes a considerar para tener un incremento en la eficiencia de la programación son:

- 1) Uso de variables con subíndice (vectores o arreglos) sencillos.
- 2) Manejo de funciones dentro del programa.
- 3) Uso de subrutinas.

Aunque en la literatura se considera como algo primordial al desarrollar el programa de cómputo, el hecho de optimizar la memoria disponible de la máquina mediante el uso de arreglos equivalentes y de áreas de memoria común, hay que hacer notar que gracias a la evolución que han tenido las computadoras esto ha pasado a segundo término. Actualmente no importa tanto el hecho de ahorrar memoria, como el de estructurar el programa. Como no es el objetivo el explicar los conceptos de la programación estructurada, bastará con decir que se trata de una técnica para programar en forma lógica y cu-

ya finalidad es que los programas sean más fáciles de entender, de manejar e incluso de modificar cuando así se requiera, sin que ésto altere de manera significativa sus características.

Muchas veces al introducir cierta información al simulador - se comete algún error que ocasiona que la corrida se detenga. El programa deberá hacerse considerando esta posibilidad de tal manera que, al solventar el error, reinicie la corrida - en el punto en que se quedó y no desde el principio.

Es conveniente que el programa cuente con mensajes de diagnóstico que le den mayor claridad y calidad.

#### 8.7 Uso de las pseudofunciones.

El término "pseudofunciones" fué aplicado en la literatura sobre simulación primeramente para describir modificaciones hechas a los valores de permeabilidad relativa y de presión capilar medidos en el laboratorio; sin embargo, las pseudofunciones se refieren, en forma más amplia, a propiedades de roca o de fluidos-roca cuyos valores obtenidos en el laboratorio han sido modificados - para llevar a cabo algún objetivo en particular. Dichas propiedades incluyen desde luego, las citadas con anterioridad.

Debido a que este tema es bastante amplio y un tanto complejo, - se tomará como ejemplo con fines ilustrativos las pseudofunciones de presión capilar. Una explicación más detallada se podrá

obtener en la literatura especializada<sup>5,6</sup>.

Las curvas de pseudopresión capilar en trabajos de simulación de yacimientos multidimensionales, son determinaciones con cierta lógica y sustituyen a los valores de presión capilar obtenidos en forma convencional (en el laboratorio). Son similares a las curvas convencionales de  $P_c$  hasta el punto de relacionar funcionalmente la diferencia de presión entre dos fases con la saturación de una de las fases. También el aceite residual implícito en la pseudocurva es idéntico al aceite residual implícito en la curva convencional. La diferencia principal entre ambas curvas es que mientras la curva convencional relaciona la  $P_c$  en un punto con la saturación correspondiente en ese punto, la pseudocurva relaciona la cantidad  $(P_g - P_o)$  con  $S$ , donde  $S$  es la saturación promedio para un volumen finito, como por ejemplo un bloque de la malla y,  $P_o$  y  $P_g$  son las presiones de aceite y de gas en el centro del volumen considerado. Así entonces, las pseudopresiones capilares relacionan la saturación promedio de un bloque con la diferencia de presión entre dos fases.

Debido a que la saturación promedio de un bloque está en función del tamaño de la celda en cuestión, de la geometría del bloque, de la variación vertical de la porosidad, de las características capilares de la roca y de la diferencia de densidades de los fluidos, la pseudopresión capilar será en consecuencia, una función de todos estos parámetros.

Como la mayoría de dichos parámetros varían, ya sea con el espa-

cio o con la presión, una determinación rigurosa de la pseudopresión capilar requeriría su cálculo para cada bloque, en cada intervalo de tiempo, lo cual definitivamente es impráctico en término de costo de computadora. En la práctica se emplea una técnica menos rigurosa pero más rápida. Esta técnica consiste en generar un conjunto de curvas de pseudopresión capilar utilizando valores de los diferentes parámetros que son representativos de un grupo de bloques para los cuales van a ser aplicadas dichas curvas.

#### 8.8 Abuso en la aplicación de los simuladores<sup>1</sup>.

El término "exageración" es el más frecuente tipo de abuso que se tiene con los simuladores, pues a menudo, al presentarse un problema determinado, automáticamente se quiere aplicar el modelo más complejo y sofisticado que se tiene a la mano.

Aunque se ha comentado que el utilizar una malla con un número considerable de celdas generalmente tiene pocas bases, es típico en la práctica, que la medida de las celdas que componen la malla sea más pequeña que la que justifica la información que se tiene con la descripción del yacimiento.

Así entonces, la "exageración" a la que se hace referencia, es la aplicación de modelos que cuentan con flujo para  $m$ -fases y que utilizan una malla constituida por  $n$  celdas cuando la solución al problema puede obtenerse adecuadamente, empleando un modelo que describa el flujo de  $m-1$  ó  $m-2$  fases y que cuente con

una malla de  $n/2$  ó  $n/3$  bloques.

Esto no significa de ninguna manera, que no haya la necesidad en ocasiones, de utilizar una malla con cuadrícula pequeña y simuladores que consideren flujo multifásico con transferencia de masa entre las fases. La literatura reporta que se han llevado a cabo estudios bien fundamentados con simuladores que presentan estas características y se ha tenido éxito; sin embargo, el uso del juicio ingenieril en la mayoría de los casos, servirá para tender a utilizar el modelo más simple.

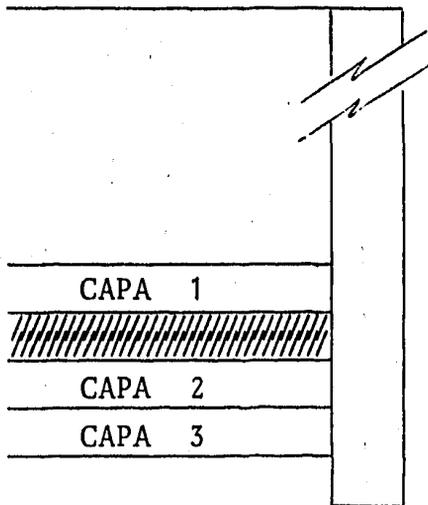
Los simuladores también son mal aplicados cuando existe bastante incertidumbre con respecto a la información que se tenga con las características del yacimiento. No hay que perder de vista que el simulador entregará resultados de acuerdo con los datos que se le estén proporcionando; dará la solución que se le esté forzando a dar. Así entonces, una recomendación que se hace es que cuando no se tenga información suficiente no se utilice la simulación.

#### 8.9 Aplicación de los conceptos fundamentales de simulación.

Como se mencionó al iniciar este capítulo, a continuación se resuelven once problemas en los que se aplican los conceptos básicos de simulación.

PROBLEMA No. 1.

En la figura mostrada a continuación se idealizan las condiciones de un pozo que cuenta con tres capas productoras de aceite con diferentes características. Suponiendo que no existe daño en la formación y que el gasto que se tiene frente a las capas es el mismo que se tiene en la superficie. ¿Cuál es el gasto total que aporta el pozo, si se sabe que el radio de drenaje para todas las capas es de 425 pies y la presión en el pozo es de 600 - lb/pg<sup>2</sup>? Suponga una caída de presión lineal de 2.8 lb/pg<sup>2</sup>/pie.



Capa	Area al flujo (Pies <sup>2</sup> )	$\mu_o$ (cp)	K (md)
1	136	1.3	150
2	250	2	300
3	184	2.2	200

Solución:

Utilizando la ecuación de Darcy dada por:

$$q = 0.001127 \frac{KA}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta L}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = 2.8 \text{ lb/pulg}^2/\text{pie}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación se tiene:

$$q = 0.003156 \frac{KA}{\mu}$$

- Para la capa No. 1:

$$q_1 = 0.003156 \frac{(150)(136)}{(1.3)} = \underline{49.52 \text{ bl/día}}$$

- Para la capa No. 2:

$$q_2 = 0.003156 \frac{(300)(250)}{(2)} = \underline{118.35 \text{ bl/día}}$$

- Para la capa No. 3:

$$q_3 = 0.003156 \frac{(200)(184)}{(2.2)} = \underline{52.79 \text{ bl/día}}$$

Por lo tanto:

$$q_T = q_1 + q_2 + q_3$$

$$q_T = (49.52) + (118.35) + (52.79)$$

$$q_T = \underline{\underline{220.66 \text{ bl/día}}}$$

PROBLEMA No. 2.

Desarrolle la ecuación de Darcy para un sistema de coordenadas radial. Tome en cuenta que el área expuesta al flujo es  $2\pi rh$ . Suponga que no existe daño en la formación.

Solución:

De la Ec. de Darcy:

$$q = -0.001127 \frac{KA}{\mu} \frac{dP}{ds}$$

Considerando que  $A = 2\pi rh$  y que  $ds$  en este caso es  $dr$ , se tiene:

$$q = -0.001127 \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dr} (2\pi rh)$$

Acomodando términos e integrando:

$$q \int_{r_w}^{r_e} \frac{dr}{r} = -0.001127 \frac{K}{\mu} (2\pi h) \int_{P_w}^{P_e} dP$$

$$q \left[ \ln r_e - \ln r_w \right] = 0.00708 \frac{Kh}{\mu} (P_e - P_w)$$

Sabiendo que la diferencia de logaritmos es igual al cociente y, despejando el gasto de la ecuación anterior se tiene:

$$q = \frac{0.00708 Kh (P_e - P_w)}{\mu \ln \frac{r_e}{r_w}}$$

Esta última expresión es la Ec. de Darcy para un sistema de coordenadas radial, donde  $P_e$  es la presión estática,  $P_w$  es la presión de fondo fluyendo,  $r_e$  es el radio de drenaje y  $r_w$  el radio del pozo.

PROBLEMA No. 3.

Calcule el volumen de aceite que producirá un pozo en una semana si se cuenta con la siguiente información:

$$h = 120 \text{ pies}; P_e = 3200 \text{ lb/pg}^2; P_w = 2500 \text{ lb/pg}^2; r_e = 1200 \text{ pies}; r_w = 0.375 \text{ pies}; K = 90 \text{ md}; \mu = 1.2 \text{ cp}; B_o = 1.15.$$

Considere además que no existe daño en el pozo.

Solución:

Con la Ec. obtenida del problema anterior:

$$q = \frac{0.00708 K h (P_e - P_w)}{\mu \ln \frac{r_e}{r_w}}$$

Sustituyendo los valores que se dan como datos en esta ecuación se tiene:

$$q = \frac{0.00708 (90) (120) (3200 - 2500)}{(1.2) \ln \left( \frac{1200}{0.375} \right)}$$

$$q = 5526.52 \text{ bl}_o/\text{día a c.y.}$$

$$\text{Vol. aceite} = 5526.52 \left( \frac{\text{bl}_o \text{ a c.y.}}{\text{día}} \right) 7 (\text{días})$$

$$\text{Volumen a c.y.} = \underline{\underline{38685.64 \text{ bl}_o}}$$

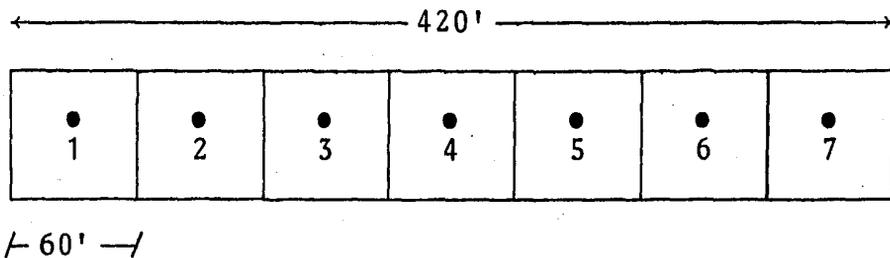
Finalmente:

$$\text{Volumen a c.s.} = 38685.64 \text{ bl}_o \text{ a c.y.} \left( \frac{1}{1.15} \right) \frac{\text{bl}_o \text{ a c.s.}}{\text{bl}_o \text{ a c.y.}}$$

$$\text{Volumen a c.s.} = \underline{\underline{33639.69 \text{ bl}_o}}$$

PROBLEMA No. 4.

Calcule el gasto y la distribución de presiones para el siguiente sistema:



$$Kx = 200 \text{ md}$$

$$\mu = 1 \text{ cp}$$

$$A = 200 \cdot \text{pies}^2$$

$$P_1 = 600 \text{ lb/pg}^2$$

$$P_7 = 100 \text{ lb/pg}^2$$

Se tiene un sistema linea, medio homogéneo, hay un pozo inyector en la celda 1 y un pozo productor en la celda 7.

Solución:

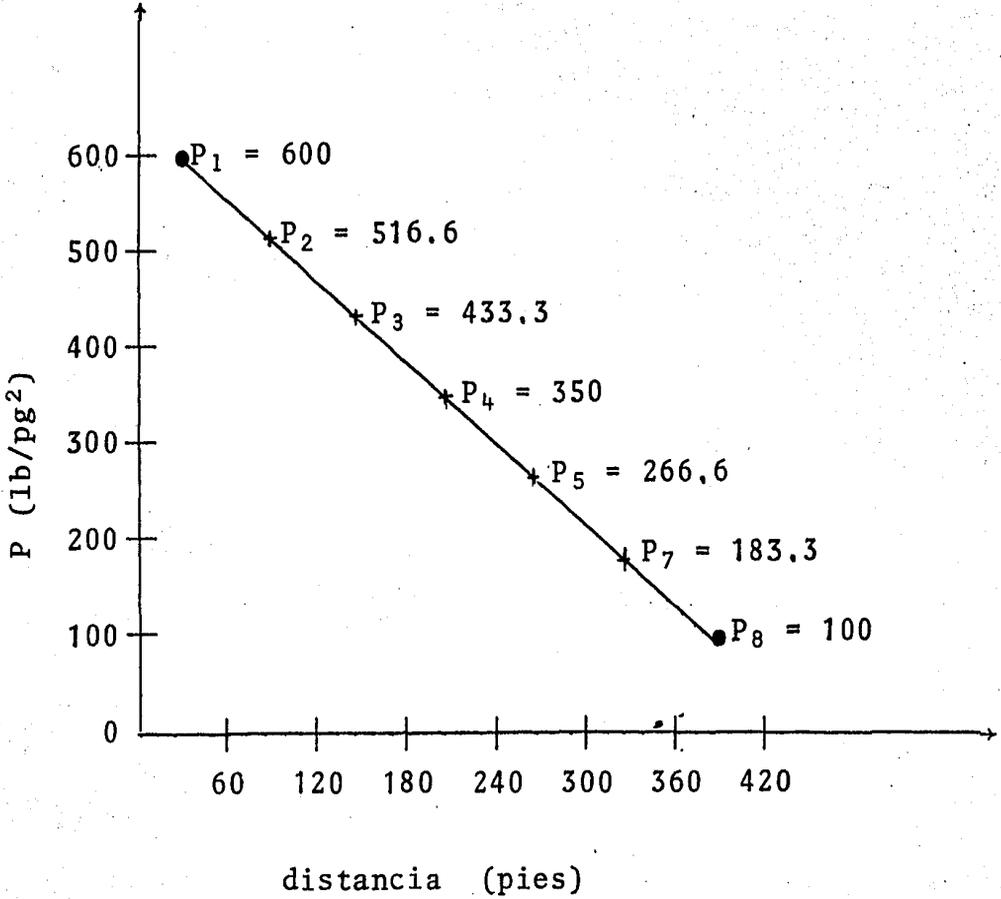
Con la Ec. de Darcy se obtiene el gasto:

$$q = 0.001127 \frac{KA}{\mu \Delta L} \Delta P = \frac{(0.001127)(200)(200)(500)}{(1)(360)}$$

$$q = \underline{\underline{62.61 \text{ bl/día a c.y.}}}$$

En este caso particular las presiones se pueden calcular en una forma muy sencilla. Considerando que se trata de un sistema lineal, la presión varía en forma lineal para cada celda y el -

gradiente permanece constante en el sistema, se puede hacer una gráfica de distancia v.s. P, tomando en cuenta los datos proporcionados, de tal manera que para cada distancia se pueda tener un valor de presión.



PROBLEMA No. 5.

La ecuación que representa el sistema planteado en el problema anterior es:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\mu q_i a c y}{0.001127 Kx (\text{Vol. celda } i)} = 0$$

Donde  $q = 62.61$  y  $q = -62.61$  para las celdas 7 y 1 respectivamente. Para las demás celdas  $q = 0$ .

Obtenga la representación en diferencias finitas y establezca el sistema matricial que deberá resolverse.

Solución:

La ecuación en diferencias finitas para las celdas 2, 3, 4, 5 y 6 es (como  $q = 0$  para estas celdas el segundo término del lado izquierdo de la ecuación original se elimina).

$$\frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Multiplicando por  $(\Delta x)^2$  ambos miembros de la ecuación anterior:

$$P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1} = 0$$

Por lo que, aplicando la última ecuación en las celdas donde no se conoce la presión, se tiene lo siguiente:

Celda

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 2 & P_1 & - & 2P_2 & + & P_3 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
 3 & 0 & + & P_2 & - & 2P_3 & + & P_4 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
 4 & 0 & + & 0 & + & P_3 & - & 2P_4 & + & P_5 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
 5 & 0 & + & 0 & + & 0 & + & P_4 & - & 2P_5 & + & P_6 & + & 0 & = & 0 \\
 6 & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & P_5 & - & 2P_6 & + & P_7 & = & 0
 \end{array}$$

Pasando las presiones conocidas del lado derecho de las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcccccc}
 -2P_2 & + & P_3 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -600 \\
 P_2 & - & 2P_3 & + & P_4 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
 0 & + & P_3 & - & 2P_4 & + & P_5 & + & 0 & = & 0 \\
 0 & + & 0 & + & P_4 & - & 2P_5 & + & P_6 & = & 0 \\
 0 & + & 0 & + & 0 & + & P_5 & - & 2P_6 & = & -100
 \end{array}$$

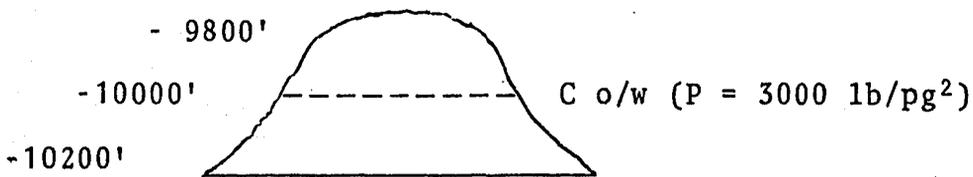
Que en notación matricial se escribe como sigue:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

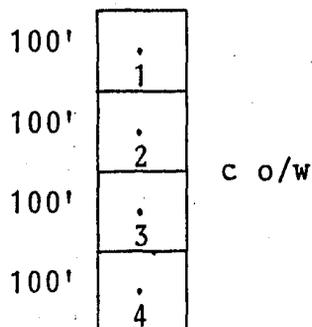
Se recomienda resolver el sistema anterior por cualquiera de los métodos vistos en el capítulo 6 para comprobar que la solución es la misma que se obtuvo en el problema 4.

PROBLEMA No. 6.

El yacimiento Cuichapa de el Distrito El Plan de Petr6leos Mexicanos, tiene una presi6n en el contacto agua-aceite de 3000 lb/pg<sup>2</sup> a una elevaci6n de -10000 pies. El yacimiento tiene un espesor de 200 pies arriba y 200 pies abajo del contacto agua-aceite. Considere que no existe zona de transici6n ( $P_{cow} = 0$ )



- Dibuje una gr1fica de presi6n contra elevaci6n usando un gradiente en la zona de aceite de 0.3 y de 0.48 lb/pg<sup>2</sup>/pie en la zona de agua.
- Suponiendo que se representa este yacimiento con una malla de una dimensi6n como la siguiente:



¿Cu1l es la distribuci6n de potencial del aceite en la malla? ( $\phi_o$ ).

¿Cu1l es la distribuci6n de potencial del agua en la malla? ( $\phi_w$ )

Calcule la diferencia de potencial del aceite entre las celdas - 2 y 3 ( $\Delta\phi_o$  2-3).

Calcule la diferencia de potencial del agua entre las celdas 2 y 3 ( $\Delta\phi_w$  2-3).

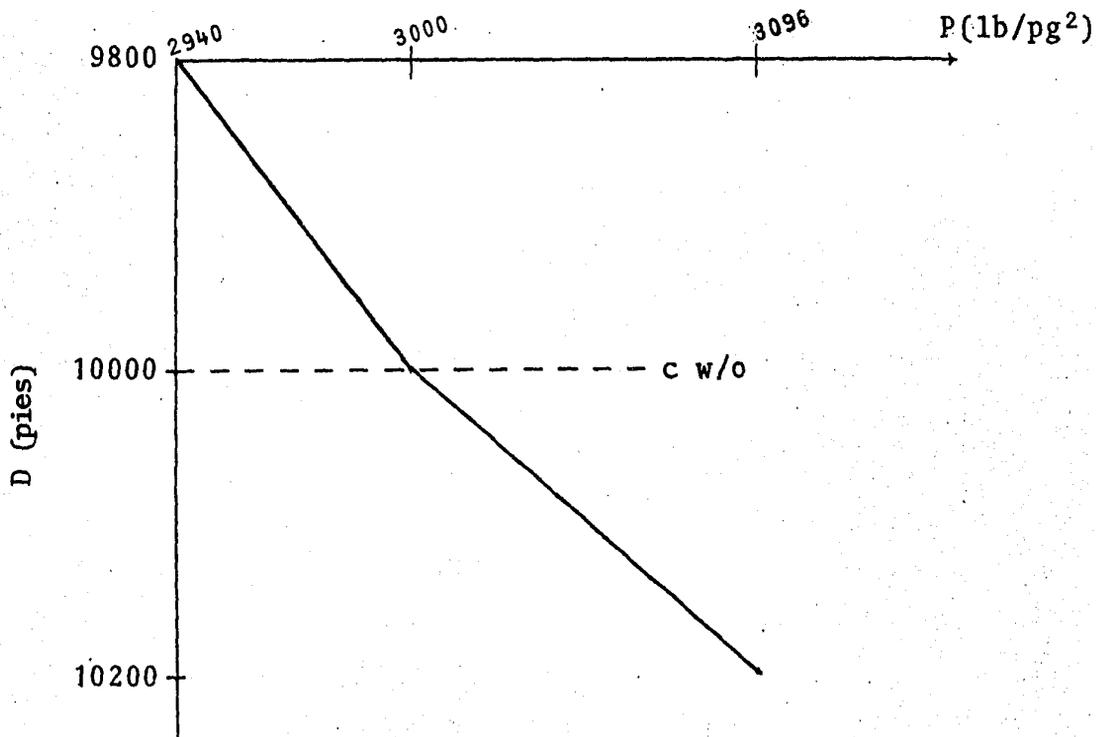
Solución:

- La presión en la cima del yacimiento será:

$$3000 \text{ lb/pg}^2 - \left[ \left( 0.3 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (200 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{2940 \text{ lb/pg}^2}}$$

- La presión en la base del yacimiento es:

$$3000 \text{ lb/pg}^2 + \left[ \left( 0.48 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (200 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{3096 \text{ lb/pg}^2}}$$



- La distribución de potencial del aceite en la malla es la siguiente:

- Para el punto 1

$$\phi_1 = 3000 \text{ lb/pg}^2 - \left[ \left( 0.3 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (150 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{2955 \text{ lb/pg}^2}}$$

- Para el punto 2

$$\phi_2 = 3000 \text{ lb/pg}^2 - \left[ \left( 0.3 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (50 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{2985 \text{ lb/pg}^2}}$$

- Para el punto 3

$$\phi_3 = 3000 \text{ lb/pg}^2 + \left[ \left( 0.3 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (50 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{3015 \text{ lb/pg}^2}}$$

- Para el punto 4

$$\phi_4 = 3000 \text{ lb/pg}^2 + \left[ \left( 0.3 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (150 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{3045 \text{ lb/pg}^2}}$$

- La distribución de potencial del agua en la malla es:

- Para el punto 1

$$\phi_1 = 3000 \text{ lb/pg}^2 - \left[ \left( 0.48 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (150 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{2928 \text{ lb/pg}^2}}$$

- Para el punto 2

$$\phi_2 = 3000 \text{ lb/pg}^2 - \left[ \left( 0.48 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (50 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{2976 \text{ lb/pg}^2}}$$

- Para el punto 3

$$\phi_3 = 3000 \text{ lb/pg}^2 + \left[ \left( 0.48 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}} \right) (50 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{3024 \text{ lb/pg}^2}}$$

- Para el punto 4

$$\phi_4 = 3000 \text{ lb/pg}^2 + \left[ (0.48 \frac{\text{lb/pg}^2}{\text{pie}}) (150 \text{ pie}) \right] = \underline{\underline{3072 \text{ lb/pg}^2}}$$

- La diferencia de potencial del aceite entre las celdas 2 y 3 -  
es:

$$\Delta\phi_{O \ 2-3} = (2985) - (3015) = \underline{\underline{-30 \text{ lb/pg}^2}}$$

- La diferencia de potencial del agua entre las celdas 2 y 3 -  
es:

$$\Delta\phi_{W \ 2-3} = (2976) - (3024) = \underline{\underline{-48 \text{ lb/pg}^2}}$$

PROBLEMA No. 7.

Establezca la forma en diferencias finitas de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + a \frac{\partial P}{\partial x} + b \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Considere  $\Delta x = \Delta y$ . Arréglela de tal manera que pueda escribirse en forma matricial.

Solución:

Utilizando las ecuaciones para la primera y segunda derivada que fueron obtenidas en el capítulo 5, se tiene:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{P_{j+1} - 2P_j + P_{j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_{j+1} - P_{j-1}}{2(\Delta y)}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación original:

$$\frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{j+1} - 2P_j + P_{j-1}}{(\Delta y)^2} + a \left[ \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2(\Delta x)} \right] \dots$$

$$+ b \left[ \frac{P_{j+1} - P_{j-1}}{2(\Delta y)} \right] = 0$$

Como  $\Delta x = \Delta y = \Delta c$ . Multiplicando la última expresión por  $2\Delta c$ .

$$2 \left[ \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta c} \right] + 2 \left[ \frac{P_{j+1} - 2P_j + P_{j-1}}{\Delta c} \right] \\ + a \left[ P_{i+1} - P_{i-1} \right] + b \left[ P_{j+1} - P_{j-1} \right] = 0$$

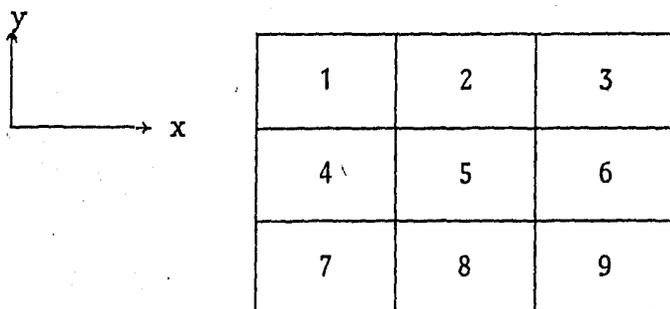
Factorizando:

$$P_{i+1} \left[ \frac{2}{\Delta c} + a \right] + P_{i-1} \left[ \frac{2}{\Delta c} - a \right] + P_i \left[ -\frac{4}{\Delta c} \right] + P_{j+1} \left[ \frac{2}{\Delta c} + b \right] \\ + P_{j-1} \left[ \frac{2}{\Delta c} - b \right] + P_j \left[ \frac{4}{\Delta c} \right] = 0$$

Esta última expresión como podrá observarse, ya puede ser escrita en forma matricial.

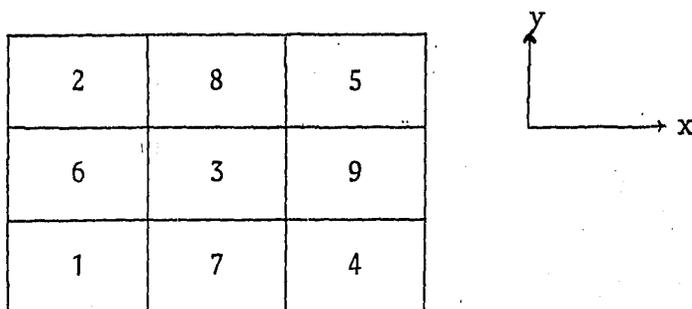
PROBLEMA No. 8.

En un problema de simulación en el que se tiene una sola incógnita se utiliza la siguiente malla:



El esquema de diferencias finitas que se usa es el convencional de cinco puntos para un modelo de dos dimensiones:

- a) Represente en forma esquemática el tipo de matriz que se tendría que resolver si se usa un esquema implícito ( $A\bar{p} = \bar{b}$ ; - qué forma tiene la matriz A llamando a cada coeficiente  $x$ ?)
- b) Price y Coats sugieren utilizar el mismo esquema implícito y la misma malla pero numerada de la siguiente forma:



Indique si numerando la malla en esta forma se requieren menos operaciones para resolver el sistema utilizando eliminación de Gauss.

Solución:

La ecuación a resolver es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

cuya equivalente en diferencias finitas es:

$$\frac{P_{i+1, j} - 2P_{i, j} + P_{i-1, j}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i, j+1} - 2P_{i, j} + P_{i, j-1}}{(\Delta y)^2} =$$

$$\frac{P_{i, j}^{n+1} - P_{i, j}^n}{\Delta t}$$

Como se vió en el capítulo 5 esta ecuación, después de hacer algunas consideraciones y operaciones puede quedar de la siguiente manera:

$$\gamma P_{i+1, j} - (4\gamma + 1) P_{i, j} + \gamma P_{i-1, j} + \gamma P_{i, j+1} + \gamma P_{i, j-1} = -P_{i, j}$$

Aplicando esta ecuación para cada celda de la primera malla se tiene (considerando los puntos que se emplean en cada caso):

- Para la celda 7  
x<sub>7</sub>, x<sub>8</sub> y x<sub>4</sub>
- Para la celda 8  
x<sub>7</sub>, x<sub>8</sub>, x<sub>9</sub>, x<sub>5</sub>



te:

- Para la celda 1  
 $x_1, x_6, x_7$
- Para la celda 7  
 $x_1, x_7, x_4, x_3$
- Para la celda 4  
 $x_4, x_7, x_9$
- Para la celda 6  
 $x_2, x_6, x_1, x_3$
- Para la celda 3  
 $x_3, x_8, x_6, x_9, x_7$
- Para la celda 9  
 $x_9, x_3, x_4, x_5$
- Para la celda 2  
 $x_2, x_6, x_8$
- Para la celda 8  
 $x_8, x_2, x_5, x_3$
- Para la celda 5  
 $x_5, x_8, x_9$

Cuyo arreglo matricial es el siguiente:



PROBLEMA No. 9

Resuelva el siguiente sistema matricial por medio del algoritmo de Thomas:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Las expresiones que maneja el algoritmo de Thomas son las siguientes:

$$\alpha_n = b_n - \frac{A_n C_n - 1}{\alpha_{n-1}} \quad (1)$$

$$S_n = d_n - \frac{A_n S_n - 1}{\alpha_{n-1}} \quad (2)$$

$$P_n^* = \frac{S_n}{\alpha_n} \quad (3)$$

$$p_n = \frac{S_i - C_i P_{n+1}}{\alpha_i} \quad (4)$$

Para inicializar el sistema se tiene:

$$\alpha_1 = b_1 = \underline{\underline{-2}}$$

$$S_1 = d_1 = \underline{\underline{-100}}$$

Calculando los términos  $\alpha$ 's y S's, recordando que los valores de A, b y c los da la matriz de coeficientes, según se explica en el capítulo 5, se tiene:

$$\alpha_2 = b_2 - \frac{(A_2)(C_1)}{\alpha_1} = -2 - \frac{(1)(1)}{(-2)} = \underline{\underline{-1.50}}$$

$$S_2 = d_2 - \frac{(A_2)(S_1)}{\alpha_1} = 0 - \frac{(1)(-100)}{(-2)} = \underline{\underline{-50}}$$

$$\alpha_3 = b_3 - \frac{(A_3)(C_2)}{\alpha_2} = -2 - \frac{(1)(1)}{-1.50} = \underline{\underline{-1.333}}$$

$$S_3 = d_3 - \frac{(A_3)(S_2)}{\alpha_2} = 0 - \frac{(1)(-50)}{(-1.50)} = \underline{\underline{-33.333}}$$

$$\alpha_4 = b_4 - \frac{(A_4)(C_3)}{\alpha_3} = -2 - \frac{(1)(1)}{-1.333} = \underline{\underline{-1.25}}$$

$$S_4 = d_4 - \frac{(A_4)(S_3)}{\alpha_3} = 0 - \frac{(1)(-33.333)}{(-1.333)} = \underline{\underline{-25}}$$

$$\alpha_5 = b_5 - \frac{(A_5)(C_4)}{\alpha_4} = -2 - \frac{(1)(1)}{(-1.25)} = \underline{\underline{-1.2}}$$

$$S_5 = d_5 - \frac{(A_5)(S_4)}{\alpha_4} = 0 - \frac{(1)(-25)}{(-1.25)} = \underline{\underline{-20}}$$

$$\alpha_6 = b_6 - \frac{(A_6)(C_5)}{\alpha_5} = -2 - \frac{(1)(1)}{(-1.2)} = \underline{\underline{-1.1666}}$$

$$S_6 = d_6 - \frac{(A_6) (S_5)}{\alpha_5} = 0 - \frac{(1) (-20)}{(-1.2)} = \underline{\underline{-16.666}}$$

Con la Ec. (3):

$$p_1^* = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{(-100)}{(-2)} = \underline{\underline{50}}$$

$$p_2^* = \frac{S_2}{\alpha_2} = \frac{(-50)}{(-1.50)} = \underline{\underline{33.333}}$$

$$p_3^* = \frac{S_3}{\alpha_3} = \frac{(-33.333)}{(-1.333)} = \underline{\underline{25}}$$

$$p_4^* = \frac{S_4}{\alpha_4} = \frac{(-25)}{(-1.25)} = \underline{\underline{20}}$$

$$p_5^* = \frac{S_5}{\alpha_5} = \frac{(-20)}{(-1.2)} = \underline{\underline{16.666}}$$

$$p_6^* = \frac{S_6}{\alpha_6} = \frac{(-16.666)}{(-1.1666)} = \underline{\underline{14.286}}$$

Finalmente con la Ec. (4) se obtienen los valores del vector  $\bar{p}$ :

$$p_6 = p_6^* = \underline{\underline{14.286}}$$

$$p_5 = \frac{S_5 - C_5 (p_6)}{\alpha_5} = \frac{(-20) - (1) (14.286)}{(-1.2)} = \underline{\underline{28.5717}}$$

$$p_4 = \frac{S_4 - C_4 (p_5)}{\alpha_4} = \frac{(-25) - (1) (28.5717)}{(-1.25)} = \underline{\underline{42.8574}}$$

$$p_3 = \frac{S_3 - C_3 (p_4)}{\alpha_3} = \frac{(-33.333) - (1) (42.8574)}{(-1.333)} = \underline{\underline{57.1429}}$$

$$p_2 = \frac{S_2 - C_2 (p_3)}{\alpha_2} = \frac{(-50) - (1) (57.1429)}{(-1.50)} = \underline{\underline{71.4286}}$$

$$p_1 = \frac{S_1 - C_1 (p_2)}{\alpha_1} = \frac{(-100) - (1) (71.4286)}{(-2)} = \underline{\underline{85.7143}}$$

Por lo que la ecuación matricial resuelta es:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85.7143 \\ 71.4286 \\ 57.1429 \\ 42.8574 \\ 28.5717 \\ 14.286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA No. 10.

El movimiento de un determinado solvente a través de un medio poroso en una dimensión está gobernado por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$c \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - v \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1)$$

Donde:

c : constante de difusividad.

v : término de la velocidad.

$\rho$  : término de la concentración.

Obtenga su aproximación equivalente en diferencias finitas si se utiliza:

- a) Un esquema explícito.
- b) Un esquema totalmente implícito.
- c) Un esquema implícito (Crank - Nicholson).

Solución:

Según se vió en el capítulo 5, se tendrá:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{(2\Delta x)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \quad (4)$$

a) Utilizando un esquema explícito. Sustituyendo las Ecs. (2), (3) y (4) en la Ec. (1) se tiene:

$$c \left[ \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] - v \left[ \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] = \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}$$

Despejando " $\rho_i^{n+1}$ "

$$\rho_i^{n+1} = c\Delta t \left[ \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] - v\Delta t \left[ \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] + \rho_i^n$$

Factorizando la expresión anterior:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_{i+1}^n \left[ \frac{\Delta tc}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta tv}{2\Delta x} \right] + \rho_i^n \left[ 1 - \frac{2c\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] + \rho_{i-1}^n \left[ \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x} \right]$$

b) Utilizando un esquema totalmente implícito:

$$c \left[ \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - 2\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] - v \left[ \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - \rho_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] = \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}$$

Despejando " $\rho_i^{n+1}$ ":

$$\rho_i^{n+1} = -c\Delta t \left[ \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - 2\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] + v\Delta t \left[ \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - \rho_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] + \rho_i^{n+1}$$

Factorizando:

$$-\rho_{i-1}^{n+1} \left[ \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta x} \right] + \rho_i^{n+1} \left[ 1 + \frac{2c\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] - \rho_{i+1}^{n+1} \left[ \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} \right]$$

$$= \rho_i^n$$

c) Utilizando un esquema implícito (Crank - Nicholson)

$$\frac{1}{2} c \left[ \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + \frac{1}{2} c \left[ \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - 2\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] -$$

$$\frac{1}{2} v \left[ \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] - \frac{1}{2} v \left[ \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - \rho_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] = \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}$$

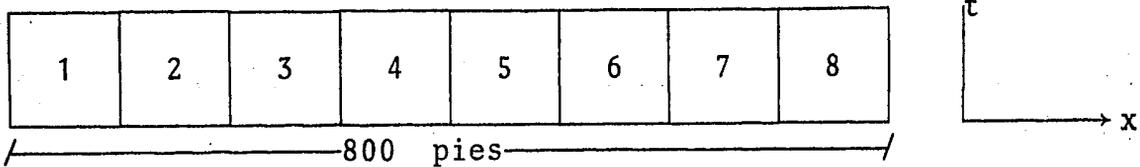
Multiplicando ambos miembros por " $\Delta t$ ", factorizando y pasando del lado derecho los términos evaluados al nivel de tiempo conocido " $n$ " se llega a:

$$-\left[ \frac{c\Delta t}{2(\Delta x)^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta x} \right] \rho_{i-1}^{n+1} + \left[ 1 + \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] \rho_i^{n+1} - \left[ \frac{c\Delta t}{2(\Delta x)^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta x} \right] \rho_{i+1}^{n+1}$$

$$= \left[ \frac{c\Delta t}{2(\Delta x)^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta x} \right] \rho_{i-1}^n + \left[ 1 - \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] \rho_i^n + \left[ \frac{c\Delta t}{2(\Delta x)^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta x} \right] \rho_{i+1}^n$$

PROBLEMA No. 11.

Considere una malla en una dimensión como la que se muestra en la figura siguiente:



Se cuenta con la siguiente información:

$$\Delta x = \text{cte} = 100 \text{ pies}$$

$$K = 200 \text{ md}$$

$$\phi = 0.3$$

$$\mu = 3 \text{ cp}$$

$$C_o = 3 \times 10^{-5} (\text{lb/pg}^2)^{-1}$$

La ecuación que representa la distribución de densidades en la malla es:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Las condiciones iniciales son:

$$t = 0 \quad \rho(x, 0) = 0.8$$

Las condiciones de frontera son:

$$t > 0 \quad \rho(0, t) = 0.6$$

$$t > 0 \quad \rho(800, t) = 0.8$$

Empleando un esquema explícito obtenga la distribución de densidades a lo largo de la malla para un tiempo total de 20 minutos utilizando un  $\Delta t = 10$  minutos. ( $\Delta t = 1/1440$  días).

Solución:

La ecuación en diferencias finitas que se empleará es la siguiente:

$$\frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \right]$$

De la que despejando y factorizando se llega a:

$$\rho_{i+1}^n \left[ \frac{\Delta t \alpha}{(\Delta x)^2} \right] + \rho_{i-1}^n \left[ \frac{\Delta t \alpha}{(\Delta x)^2} \right] + \rho_i^n \left[ 1 - \frac{2\Delta t \alpha}{(\Delta x)^2} \right] = \rho_i^{n+1}$$

De los datos del problema:

$$\alpha = \frac{0.001127 \text{ K} (200) (0.001127)}{\phi \mu c (0.3)(3)(3 \times 10^{-5})} = 8348.15$$

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \alpha = \frac{(10) (8348.15)}{(100)^2 (1440)} = 0.0058$$

Por lo que la ecuación quedará como:

$$0.0058 \rho_{i+1}^n + 0.0058 \rho_{i-1}^n + 0.9884 \rho_i^n = \rho_i^{n+1}$$

Para  $\Delta t = 10$  minutos (se emplean las condiciones iniciales y de

frontera. La frontera se considerará con un bloque ficticio a la izquierda y a la derecha de las celdas 1 y 8 respectivamente).

- En la celda 1

$$0.0058 (0.8) + 0.0058 (0.6) + 0.9884 (0.8) = \underline{\underline{0.7988}}$$

- En la celda 2

$$0.0058 (0.8) + (0.0058) (0.8) + 0.9884 (0.8) = \underline{\underline{0.8}}$$

- En la celda 3

$$0.0058 (0.8) + (0.0058) (0.8) + 0.9884 (0.8) = \underline{\underline{0.8}}$$

El mismo valor se obtiene para las celdas 4, 5, 6, 7 y 8.

Cuando  $t = 20$  minutos (se considera otro  $\Delta t = 10$  minutos) la distribución de densidades es la siguiente:

- En la celda 1

$$0.0058 (0.8) + 0.0058 (0.6) + 0.9884 (0.7988) = \underline{\underline{0.7977}}$$

- En la celda 2

$$0.0058 (0.8) + 0.0058 (0.7988) + 0.9884 (0.8) = \underline{\underline{0.799}}$$

- En la celda 3

$$0.0058 (0.8) + 0.0058 (0.8) + 0.9884 (0.8) = \underline{\underline{0.8}}$$

- En la celda 4

$$0.0058 (0.8) + 0.0058 (0.8) + 0.9884 (0.8) = \underline{\underline{0.8}}$$

En las celdas 5, 6, 7 y 8 se tendrá el mismo valor de 0.8

La distribución de densidades no ha cambiado gran cosa debido a que el tiempo que se ha considerado (20 minutos) es pequeño como para tener variaciones considerables.

Se recomienda, siguiendo el procedimiento descrito con anterioridad, calcular la distribución de densidades para un tiempo mayor, además de determinar los efectos que tendría, sobre la solución del problema:

- a) El cambio en el valor de  $\Delta t$ .
- b) El cambio en el valor de  $\Delta x$  (duplicando el número de celdas que constituyen la malla).
- c) Variación en los valores de  $\phi$ ,  $\mu$ ,  $K$  y  $c$ .

Debido a lo tedioso de los cálculos, quizá convendría elaborar un pequeño programa de cómputo en calculadora de bolsillo para resolver el problema.

## REFERENCIAS

- 1.- Coats, K. H.: "Use and Misuse of Reservoir Simulation Models" J. P. T. November 1969.
- 2.- Odeh, A. S.: "Reservoir Simulation ... What is it? J. P. T. - November 1969.
- 3.- Sta-gs, H. M.: " Reservoir Simulation Models - An Engineering Overview" J. P. T. December 1971.
- 4.- Odeh, A. S.: "An Overview of Mathematical Modeling of the Behavior of Hidrocarbon Reservoir" SIAM Review Vol. 24 No. 3 - July 1982.
- 5.- Aziz K. and Settari A.: "Petroleum Reservoir Simulation" - Applied Science Publishers LTD London, 1979.
- 6.- Coats, K. H.: "Reservoir Simulation: State of the Art" J.P.T. August 1982.
- 7.- Cinco, H. L.: "Notas del Curso Evaluación de la Producción" - Facultad de Ingeniería UNAM.
- 8.- Crichlow, H. B.: "Modern Reservoir Engineering - A Simulation Approach" Prentice - Hall Inc.
- 9.- Domínguez, G. V.: "Notas del Curso Simulación Matemática de - Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.

CAPITULO 9

- BOAST -

SIMULADOR DE ACEITE NEGRO MULTIFASICO, TRIDIMENSIONAL.

## 9.1 Introducción.

En el Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (CECAFI), se han estado haciendo diferentes pruebas a un simulador con el objeto de tenerlo operando para ser utilizado tanto por los alumnos que cursen la materia "Simulación Matemática de Yacimientos" como por todas aquellas personas, profesores o estudiantes de la carrera de Ingeniero Petrolero que estén interesados en llevar a cabo algún estudio o investigación con él.

El contar con una herramienta de esta naturaleza en la Facultad de Ingeniería es sin lugar a duda un avance significativo, principalmente en el aspecto didáctico, pues los alumnos lejos de quedarse con el solo aprendizaje teórico podrán aplicar de alguna manera los conocimientos que adquieran durante el curso y conocer físicamente como manejar un simulador, la información que se le proporciona y en que forma se obtienen los resultados, mismos que podrán ser analizados y discutidos durante el curso del semestre lectivo.

BOAST que es el nombre de dicho modelo es un simulador de aceite negro, para tres fases - tres dimensiones, que puede emplearse en estudios de depresionamiento natural, mantenimiento de presión y en proyectos sencillos de recuperación secundaria por medio de inyección de agua.

Este simulador fué desarrollado por el Departamento de Energía de Estados Unidos y publicado en 1982. En un principio se tenía grabado en una cinta y el trabajo desarrollado consistió en "cargarlo" (o introducirlo) en la computadora Vax 11/780 con que se cuenta en la Facultad de Ingeniería. Hasta el momento, BOAST ha sido probado para simular el comportamiento de yacimientos en una y dos dimensiones.

Hay que hacer notar que lejos de ser éste un capítulo destinado al estudio detallado de BOAST y la manera de poder utilizarlo, lo que puede ser por sí solo motivo de un libro quedando por lo tanto fuera del alcance del presente trabajo, lo que aquí se pretende es verlo más bien a un nivel informativo sin llegar a profundizar en el tema. Para todas aquellas personas interesadas en el manejo de BOAST cabe decir que, una vez que se tenga completamente listo este simulador con todas sus alternativas de uso probadas, se piensa imprimir un pequeño manual sobre su manejo.

## 9.2 Aspectos Generales.

BOAST fué desarrollado principalmente con el apoyo económico del Departamento de Energía (DOE) de los Estados Unidos. Es una versión sustancialmente mejorada de un simulador desarrollado por Sawger y Mercer en 1978.

BOAST es un modelo de aceite negro en tres fases - tres dimen-

siones que, como se mencionó en el capítulo 3 de este trabajo, son los simuladores que se han utilizado con mayor frecuencia a lo largo de la historia de la simulación. Está diseñado con el fin de ser un programa de uso fácil para simular el comportamiento de yacimientos de aceite negro en depresionamiento natural, mantenimiento de presión (ya sea mediante la inyección de agua y/o la de gas) y en operaciones básicas de recuperación secundaria como es el caso del desplazamiento de aceite por medio de la inyección de agua.

Las ecuaciones que resuelve el programa son las establecidas para tres fases (aceite, agua y gas) que se vieron en el capítulo 7. El esquema de solución que utiliza es el IMPES, el cual es un procedimiento implícito en presión y explícito en saturación y que es utilizado ventajosamente en la mayoría de los estudios de yacimientos. Para la solución de la ecuación matricial BOAST tiene la característica de poder resolverla al elegir uno de los tres métodos con que cuenta; dos de ellos son directos y el tercero es iterativo. Uno de los métodos directos que utiliza el programa llamado BAND, es prácticamente el método de descomposición matricial visto en el capítulo 6; el otro llamado D4 es un ordenamiento especial, un tanto diferente a los vistos aquí. El método iterativo (LSOR) es muy parecido al método de relajación estudiado en el mismo capítulo 6.

Por último, las condiciones de frontera que se usan en el programa son las de no-flujo o frontera cerrada y se establecen al

hacer las transmisibilidades de los bloques de la periferia de la malla igual a cero.

### 9.3 Estructura del programa.

Cada corrida de BOAST se hace en dos etapas. En la primera se leen todos los datos, excepto aquéllos con la información de los pozos y de los incrementos de tiempo. Este primer grupo de datos sirve para fijar en el modelo las condiciones iniciales del yacimiento. Una vez que se ha inicializado el programa, éste procede a llevar a cabo la segunda etapa que consiste en resolver las ecuaciones del flujo de los fluidos. Debido a que la configuración y estrategia en la operación de los pozos que integran el yacimiento pueden cambiar durante la vida productiva del mismo, BOAST permite introducir los datos con la información de los pozos en tiempos especificados por el usuario durante alguna corrida. La naturaleza repetitiva de los datos con la información de los pozos y con la medida de los intervalos de tiempo a utilizar para llevar a cabo la simulación han provocado que la información para la segunda etapa se les denomine datos recurrentes.

El procedimiento de cálculo utilizado por BOAST puede resumirse de la siguiente manera:

- 1) Etapa de inicialización
  - a) Lee la geometría de la malla.

- b) Lee la distribución de porosidades y de permeabilidades.
- c) Calcula la parte geométrica de las transmisibilidades.
- d) Lee las propiedades de los fluidos y los datos de permeabilidades relativas.
- e) Inicializa la distribución de presiones y de saturaciones.
- f) Especifica los parámetros para los métodos de solución.

2) Etapa de recurrencia.

- a) Lee los datos con la información de los pozos y de los intervalos de tiempo a utilizar.
- b) Calcula los gastos de los pozos por medio de la opción de un gasto máximo.
- c) Calcula los gastos de los pozos por medio de la opción de presión máxima.
- d) Calcula los coeficientes de la ecuación de presión.
- e) Cambia los coeficientes para la opción de presión implícita.
- f) Resuelve la ecuación de presión.
- g) Cálcula los gastos de los pozos por la opción de presión implícita.
- h) Resuelve para la saturación de aceite ( $S_o$ ).
- i) Resuelve para la saturación de agua ( $S_w$ ).
- j) Utiliza la ecuación siguiente  $S_g = 1 - S_o - S_w$ , para calcular las saturaciones de gas.
- k) Prueba para el intervalo de tiempo automático. Repite

el intervalo de tiempo si es necesario.

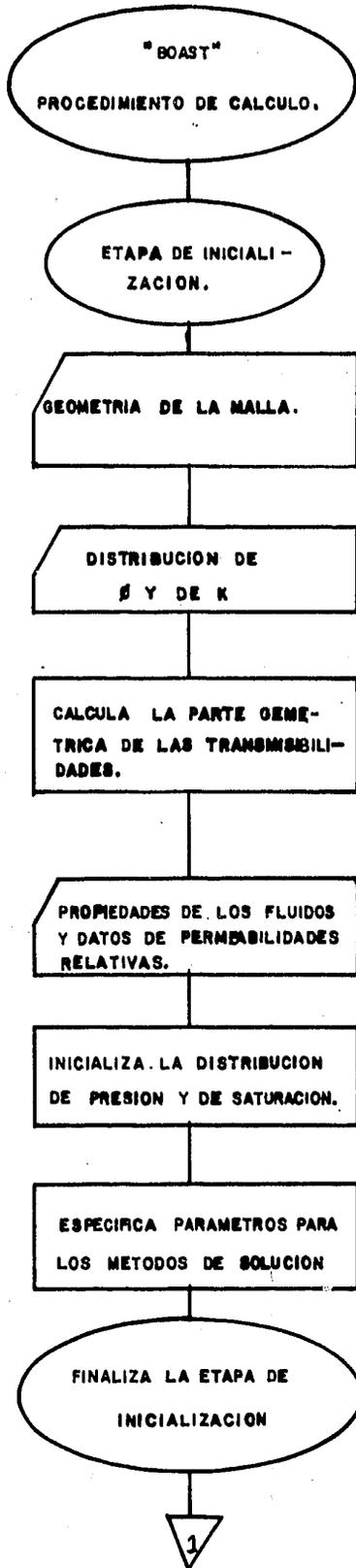
- l) Calcula la presión de burbujeo.
- m) Escribe el reporte de pozos.
- n) Hace un cálculo de balance de materia.
- ñ) Escribe el resumen del reporte.
- o) Actualiza la distribución de presiones y de saturaciones.
- p) Repite la etapa de recurrencia.

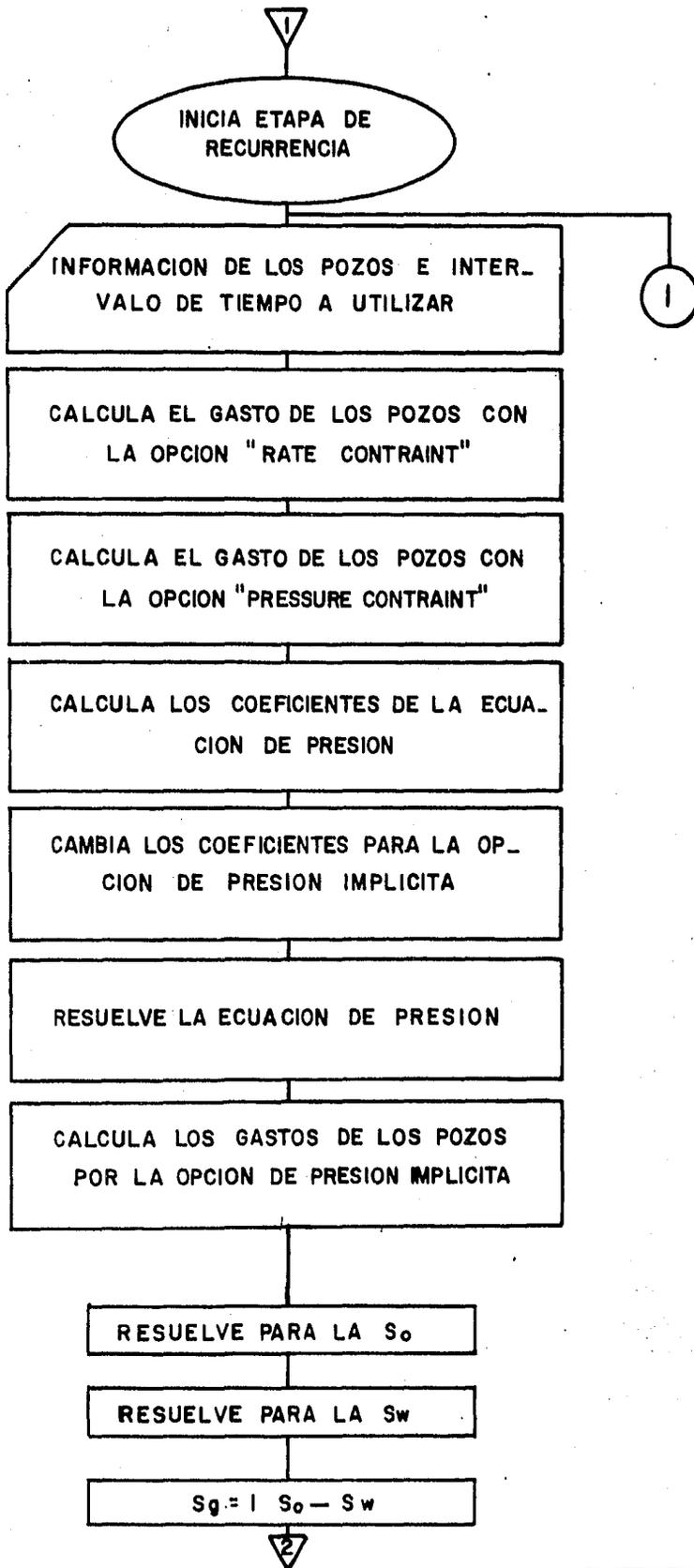
En la Fig. (9.1) se presenta el diagrama de flujo con el procedimiento de cálculo que utiliza BOAST.

#### 9.4 Subrutinas que maneja el programa.

BOAST cuenta con diecinueve subrutinas, cada una de las cuales tiene una determinada función. A continuación se da una lista de estas subrutinas y el propósito que tiene cada una de ellas:

<u>Subrutina</u>	<u>Función</u>
BANDIN	Construye la matriz de coeficientes para la solución del vector de presión con un ordenamiento - standard.
BAND	Resuelve el vector de presión por descomposición matricial.
CODES	Lee el método y los parámetros de solución y diagnostica el control de salida.





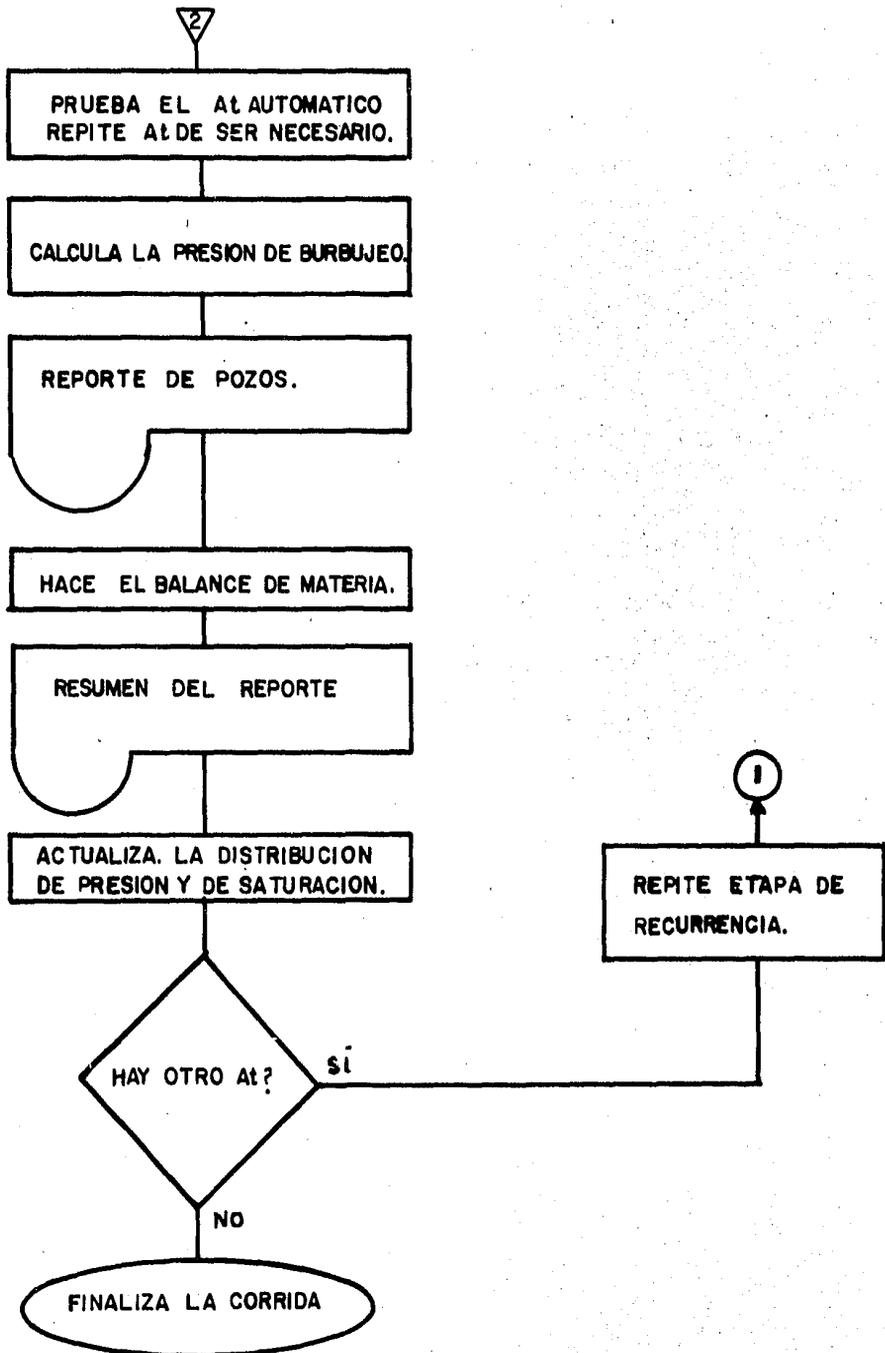


FIG. 9.1 PROCEDIMIENTO DE CALCULO DE "BOAST"

<u>Subrutina</u>	<u>Función</u>
D4IN	Construye la matriz de coeficientes para la solución del vector de presión con un ordenamiento D4.
GRID1	Lee la medida de los bloques de la malla y calcula la elevación de los nodos.
INTERP	Hace interpolaciones lineales.
INTPVT	Hace la interpolación lineal para el punto de burbujeo para el cálculo de las propiedades PVT del aceite bajosaturado.
LSOR	Método de sobrerelajación lineal sucesiva para la solución de la ecuación matricial.
LTRI	Algoritmo tridiagonal.
MATBAL	Hace los cálculos de balance de materia.
NODES	Lee los datos con la información de los pozos y de los intervalos de tiempo.
PARM1	Lee la distribución de porosidades y de permeabilidades.
PRTPS	Escribe un reporte resumido.
QRATE	Calcula los gastos de los pozos para cualquiera

## Subrutina

## Función

de los dos casos:

PRATE1: Revisa los coeficientes de la ecuación de presión cuando se utiliza la opción de presión implícita.

PRATE0: Calcula los gastos cuando se utiliza la opción de presión implícita.

SOLMAT           Calcula los coeficientes para el vector de presión.

TABLE           Lee los datos PVT y las permeabilidades relativas.

TRAN1           Calcula la parte geométrica de las transmisibilidades.

UNINIT1       Lee la distribución de presión y de saturación inicial.

### 9.5 Forma de introducir los datos al simulador.

Los datos que se introducen al simulador pueden ser divididos en dos grandes grupos que son: los datos de inicialización y los datos de recurrencia. El orden de introducirlos es el siguiente:

1) Datos de Iniciación.

1.1 Geometría y dimensiones de la malla.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Número de bloques que componen la malla del modelo.
- c) Título de la tarjeta.
- d) Código para controlar el tipo de entrada que será utilizado.
- e) Dimension(es) de bloque(s) en la dirección - x.
- f) Dimension(es) de bloque(s) en la dirección - y.
- g) Dimension(es) de bloque(s) en la dirección - z.

1.2 Modificaciones a las dimensiones de la malla.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Número de bloques donde las dimensiones de la malla serán cambiados.
- c) Modificaciones de las dimensiones de la malla en la dirección - x.
- d) Modificaciones de las dimensiones de la malla en la dirección - y.
- e) Modificaciones de las dimensiones de la malla en la dirección - z.

1.3 Profundidades de la cima de los bloques para la primera capa de bloques.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Código que controla la entrada de los valores de las profundidades.
- c) Valor(es) de la(s) profundidad(es).

1.4 Distribución de las porosidades y permeabilidades.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Código que controla la entrada de los valores.
- c) Valor(es) de porosidad(es).
- d) Valor(es) de permeabilidad(es) en la dirección - x.
- e) Valor(es) de permeabilidad(es) en la dirección - y.
- f) Valor(es) de permeabilidad(es) en la dirección - z.

1.5 Distribución de las porosidades y permeabilidades modi  
ficadas.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Número de bloques en los que se cambiarán los valo  
res de porosidades y/o permeabilidades.
- c) Modificación en el (los) valor(es) de la(s) porosi  
dad(es).
- d) Valor(es) modificado(s) de la(s) permeabilidad(es)  
en la dirección - x.
- e) Valor(es) modificado(s) de la(s) permeabilidad(es)  
en la dirección - y.
- f) Valor(es) modificado(s) en la(s) permeabilidad(es)  
en la dirección - z.

1.6 Modificaciones de la transmisibilidad.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Número de bloques en los cuales se va a cambiar el  
valor de la transmisibilidad.

- c) Valor(es) de transmisibilidad modificados en la dirección - x.
- d) Valor(es) de transmisibilidad modificados en la dirección - y.
- e) Valor(es) de transmisibilidad modificados en la dirección - z.

1.7 Tabla de permeabilidades relativas y de presiones capilares.

1.8 Tabla de las propiedades PVT de los fluidos.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Presión de burbujeo, propiedades del aceite bajosa turado, máximo valor de presión que entra en la tabla PVT.
- c) Título de la tarjeta.
- d) Tabla PVT del aceite.
- e) Título de la tarjeta.
- f) Tabla PVT del agua.
- g) Título de la tarjeta.
- h) Tabla PVT del gas y compresibilidad de la roca.
- i) Título de la tarjeta.
- j) Densidad de los fluidos del yacimiento.

1.9 Inicialización de la presión y de la saturación.

- a) Título de la tarjeta.
- b) Código que controla la inicialización de la presión

y de la saturación.

c) Datos iniciales de presión.

d) Datos iniciales de saturación.

1.10 Códigos de diagnóstico.

a) Título de la tarjeta.

b) Códigos para controlar la salida de diagnóstico.

1.11 Parámetros que controlan la corrida.

a) Título de la tarjeta.

b) Valores de los parámetros que controlan la corrida.

1.12 Especificaciones del método de solución.

a) Título de la tarjeta.

b) Parámetros de control del método de solución.

2) Datos de Recurrencia.

a) Título de la tarjeta.

2.1 Control de salida y del intervalo de tiempo.

a) Código para el control de la salida y del intervalo de tiempo.

2.2 Información de los pozos.

a) Título de la tarjeta.

b) Número total de pozos en el modelo.

c) Tarjeta con las características de los pozos.

d) Información de los pozos.

Nuevamente con la información que se proporciona aquí acerca de

la manera de introducir los datos al programa no es suficiente para poder realizar una corrida, para éello es preciso consultar el manual original de BOAST.

#### 9.6 Información que proporciona el programa.

De la misma manera en que se hace para los datos que se introducen en el simulador, la información que éste proporciona puede dividirse en: de iniciación y de recurrencia. Así pues, BOAST siempre proporciona los siguientes datos de inicialización:

- a) Medida de los bloques de la malla.
- b) Elevación de los nodos de la malla.
- c) Distribución de porosidad.
- d) Distribución de permeabilidades.
- e) Tabla de permeabilidades relativas y de presiones capilares.
- f) Tabla PVT de los fluidos.
- g) Pendientes calculadas de los datos PVT (incluyendo la conversión de unidades para uso interno del programa).
- h) Datos de control del período de tiempo.
- i) Volúmenes iniciales de fluido en el yacimiento.
- j) Distribución inicial de presiones y de saturaciones.
- k) Información inicial de los pozos.

Puede obtenerse a la salida más información a discreción del usuario, sin embargo, ésta generalmente carecerá de importancia.

La información de recurrencia que se obtiene durante el curso de la corrida, tiene tres formas esenciales que son:

1. Reporte de pozos.
2. Resumen.
3. Arreglo de la distribución de presiones y de saturaciones.

En el reporte de pozos se tienen, a los tiempos especificados por el usuario, los gastos y datos de producción y/o inyección de cada pozo, así como los totales del campo.

El resumen es sin lugar a duda de los tres reportes que proporciona el programa, el más importante. Contiene un resumen de la producción e inyección total en el campo, información sobre el período de tiempo y del balance de materia y una determinación de cuando han ocurrido los máximos cambios de presiones y de saturaciones en el modelo del yacimiento.

Por último, el usuario podrá obtener los arreglos de las distribuciones de presión, de saturación y de presión de saturación cuando lo desee, aunque generalmente este último carece de sentido mandarlo imprimir.

A continuación se pueden observar los resultados que proporcionó el simulador al correr un ejemplo sencillo en una dimensión. El objetivo de ello es que el alumno conozca la manera en que el modelo da los resultados y no los analice, ya que para ello habría que explicar con más detalle al respecto.

## 9.7 Ejemplo de aplicación.

Se hizo una corrida para simular el comportamiento de un yacimiento sujeto a la inyección de agua en una dimensión (modelo horizontal). Los datos utilizados en el ejemplo fueron:

- Número de bloques que componen la malla : 40
- Todas las celdas tienen las mismas medidas.
- Longitud de las celdas en la dirección - x : 20 pies
- Longitud de las celdas en la dirección - y : 1320 pies
- Longitud de las celdas en la dirección - z : 20 pies
- Profundidad de todos los bloques : 8325 pies
- Porosidad para los bloques 1 y 40 (extremos de la malla) : 0.125
- Porosidad para los demás bloques : 0.25
- Los datos de permeabilidad son los mismos para todas las celdas.
- Permeabilidad en la dirección - x : 200 md
- Permeabilidad en la dirección - y : 200 md
- Permeabilidad en la dirección - z : 20 md
- Los valores iniciales de saturación son los mismos para todos los bloques.
- Saturación inicial de aceite : 0.80
- Saturación inicial de agua : 0.20

Se tienen dos pozos en la malla:

1) En el bloque 40

Un pozo productor (600 bl/día y  $P_{wf} = 2500 \text{ lb/pg}^2$ ).

b) En el bloque 1

Un pozo inyector (900 bl/día y  $P_{wi} = 7500 \text{ lb/pg}^2$ ).

Se consideraron intervalos de tiempo de tres días.

Los resultados que se obtuvieron con la variación en la distribución de presión y de saturación a lo largo de la malla se muestran a continuación.

ARCHIVO DE DATOS EMPLEADO PARA CORRER EL EJEMPLO.

EJEMPLO SENCILLO DE DESPLAZAMIENTO POR AGUA EN UN YACIMIENTO DE ACEITE NEGRO.

40            1            1

MEDIDA DE LAS CELDAS.

-1            -1            -1

20.

1320.

20.

MODIFICACIONES A LAS MEDIDAS DE LAS CELDAS.

0            0            0            0

PROFUNDIDAD DE CAPA SUPERIOR DE BLOQUES.

0

8325.

VALORES DE POROSIDAD Y DE PERMEABILIDAD.

-1            -1            -1            -1

0.250

200.

200.

20.

MODIFICACION A LOS VALORES DE POROSIDAD Y DE PERMEABILIDAD

2            0            0            0            1

1            1            1            0.125

40            1            1            0.125

MODIFICACION A LOS VALORES DE LAS TRANSMISIBILIDADES.

0	0	0	0		
SAT	KRO	KRW	KRG	PCOW	PCGO
-0.10	0.0	0.0	0.0		
0.10	0.0	0.0	0.000		
0.20	0.00147	0.0	0.075		
0.30	0.00228	0.0122	0.190		
0.40	0.03700	0.0244	0.410		
0.50	0.05710	0.0336	0.72		
0.60	0.134	0.0672	0.87		
0.70	0.207	0.1344	0.94		
0.80	0.604	0.2688	0.9667		
0.90	1.00	0.4704	0.9933		
1.10	1.0	0.5	1.0		
PBO	VSLOPE	BSLOPE	RSLOPE	PMAX	
4014.7	0.00	-0.000001	0.0	9014.7	
P	VISCA	BO	RSO		
14.7	2.0	1.5	1.0		
4014.7	2.0	1.5	1.0		
9014.7	2.0	1.5	1.0		
P	VISCAG	BW	RSW		
14.7	1.00	1.0	0.0		
4014.7	1.0	1.0	0.0		
9014.7	1.0	1.0	0.0		
P	VISCG	BG	CR		
14.7	0.0080	0.935800	0.000003		

264.7	0.0096	0.067902	0.000003
514.7	0.0112	0.035228	0.000003
1014.7	0.0140	0.017951	0.000003
2014.7	0.0189	0.009063	0.000003
3014.7	0.0228	0.006064	0.000003
4014.7	0.0268	0.004554	0.000003
5014.7	0.0309	0.003644	0.000003
9014.7	0.0470	0.002167	0.000003
DENAC	DENAG	DENGAS	
46.244	62.238	0.0647	

DISTRIBUCION INICIAL DE PRESION Y DE SATURACION

0	0						
4806.6	0.0	8425.0	8300.0				
0.80	0.20	0.0					
KSNL	KSML	KCOL	KTR	KCOF			
0	0	0	0	0			
NMAX	FACT1	FACT2	TMAX	WORMAX	GORMAX	PAMIN	PAMAX
500	1.20	0.5	365.0	20.0	500000.0	14.7	10000.0
KSOL	MITR	OMEGA	TOL	TOL1	DSMAX	DPMAX	
1	100	1.70	0.1	0.0	0.05	100.0	

DATOS DE RECURRENCIA

1	1	1	1	1	1	1	1	0
3.0	3.0	3.0						

GASTOS

2									
PROD	40	1	1	1	1	600.0	0.0	0.0	0.0
	1.0	2500.0							

INJ	1	1	1	1	2	0.0	-900.0	0.0	0.0
10.0	7500.0								
0	8	0	0	0	0	0	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	1	1	1	1	1	1	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	9	0	0	0	0	0	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	1	1	1	1	1	1	0	0	
3.0	3.0								
0	9	0	0	0	0	0	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	1	1	1	1	1	1	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	9	0	0	0	0	0	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	1	1	1	1	1	1	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	79	0	0	0	0	0	0	0	
3.0	3.0	3.0							
0	1	1	1	1	1	1	0	0	
3.0	3.0	3.0							

```
*****
*
*
*          BOAST:
*    BLACK OIL APPLIED SIMULATION TOOL
*          (VERSION 1.1)
*
*
*****
```

```
*****
*
*  EJEMPLO SENCILLO DE DESPLAZAMIENTO POR AGUA EN UN YACIMIENTO DE ACEITE NEGRO
*
*
*****
```

GRID BLOCK LENGTH (DX) IS INITIALLY SET AT 20.0000 FOR ALL NODES

GRID BLOCK WIDTH (DY) IS INITIALLY SET AT 1320.0000 FOR ALL NODES

GRID BLOCK DEPTH (DZ) IS INITIALLY SET AT 20.0000 FOR ALL NODES





1014.7	0.01400.1795E-01	0.300E-05
2014.7	0.01890.9063E-02	0.300E-05
2514.7	0.02080.7266E-02	0.300E-05
3014.7	0.02280.6064E-02	0.300E-05
4014.7	0.02680.4554E-02	0.300E-05
5014.7	0.03090.3644E-02	0.300E-05
9014.7	0.04700.2167E-02	0.300E-05

DENAC DENAGUA DENGAS

46.2440 62.2380 0.0647

\*\*\*\* SLOPES FOR COMPRESSIBILITY CALCULATIONS \*\*\*\*

P	BO	DBO/DP	RSO	DRSO/DP
4014.7	1.5000	0.0000E+00	0.2	0.0000E+00
9014.7	1.5000	0.0000E+00	0.2	0.0000E+00

P	BW	DBW/DP	RSW	DRSW/DP
4014.7	1.0000	0.0000E+00	0.0	0.0000E+00
9014.7	1.0000	0.0000E+00	0.0	0.0000E+00

P	BG	DBGDP
264.7	0.6790E-01	-0.3472E-02
514.7	0.3523E-01	-0.1307E-03
1014.7	0.1795E-01	-0.3455E-04
2014.7	0.9063E-02	-0.8888E-05
2514.7	0.7266E-02	-0.3594E-05
3014.7	0.6064E-02	-0.2404E-05
4014.7	0.4554E-02	-0.1510E-05
5014.7	0.3644E-02	-0.9100E-06
9014.7	0.2167E-02	-0.3693E-06

MAXIMUM NUMBER OF TIME-STEPS = 500  
 FACTOR FOR INCREASING DELT = 1.200000 WHEN DSMAX AND DPMAX NOT EXCEEDED.  
 FACTOR FOR DECREASING DELT = 0.500000 WHEN DSMAX OR DPMAX IS EXCEEDED.  
 MAXIMUM SIMULATION TIME = 365.000000  
 MAXIMUM RESERVOIR WOR/TIME-STEP = 20. STB/STB  
 MAXIMUM RESERVOIR GOR/TIME-STEP = 500000. SCF/STB  
 MINIMUM AVERAGE RESERVOIR PRESSURE/TIME-STEP = 15.  
 MAXIMUM AVERAGE RESERVOIR PRESSURE/TIME-STEP = 10000.





ELAPSED TIME (DAYS) = 3.00 TIME STEP NUMBER = 1 TIME STEP SIZE (DAYS) = 3.00  
 CURRENT AVG RES PRESSURE = 4788.5 PREVIOUS AVG RES PRESSURE = 4787.3 PRESSURE DPMAX( 1, 1, 1) = 189.1  
 GAS INJECTION RATE (MSCF/D) = 0.0 CUM. GAS INJECTION (MSCF) = 0.0000E+00  
 WATER INJECTION RATE (STB/D) = -900.0 CUM. WATER INJECTION (STB) = -.2700E+04  
 PRODUCING WOR (STB/STB) = 0.000 CUM. WOR (STB/STB) = 0.000  
 PRODUCING GOR (SCF/STB) = 1. CUM. GOR (SCF/STB) = 1.

\*\*\*\*\* RESERVOIR PRESSURE DISTRIBUTION \*\*\*\*\*

K = 1

4976. 4966. 4957. 4947. 4937. 4927. 4917. 4908. 4898. 4888. 4879. 4869. 4860. 4850. 4841. 4831. 4822. 4812. 4803. 4793.  
 4784. 4774. 4765. 4755. 4746. 4736. 4727. 4717. 4708. 4698. 4689. 4679. 4669. 4660. 4650. 4640. 4630. 4620. 4610. 4600

\*\*\*\*\* OIL SATURATION \*\*\*\*\*

K = 1

0.571 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800  
 0.800

\*\*\*\*\* WATER SATURATION \*\*\*\*\*

K = 1

0.429 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200  
 0.200

\*\*\*\*\* GAS SATURATION \*\*\*\*\*

K = 1

0.000  
 0.000

\*\*\*\*\* END OF REPORT \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* WELL REPORT FOR ALL ACTIVE WELLS      ELAPSED TIME = 30.000000 DAYS FROM BEGINNING OF SIMULATION \*\*\*\*\*

| WELL<br>ID | LOCATION |   |   | CALC<br>BHFP | SPEC<br>BHFP | SPEC<br>PI | RATE         |              |                | GOR | WOR   | CUMULATIVE  |             |               |
|------------|----------|---|---|--------------|--------------|------------|--------------|--------------|----------------|-----|-------|-------------|-------------|---------------|
|            | I        | J | K |              |              |            | OIL<br>STB/D | GAS<br>MCF/D | WATER<br>STB/D |     |       | OIL<br>HSTB | GAS<br>MHCF | WATER<br>HSTB |
| ROD        | 40       | 1 | 1 | 1608.        | 2500.        | 1.000      | 600.         | 1.           | 0.             | 1.  | 0.000 | 18.         | 0.          | 0.            |
| NJ         | 1        | 1 | 1 | 5711.        | 7500.        | 10.000     | 0.           | 0.           | -900.          | 0.  | 0.000 | 0.          | 0.          | -27.          |
| TOTALS     |          |   |   |              |              |            | 600.         | 1.           | -900.          |     |       | 18.         | 0.          | -27.          |

```

*****
*
*
*          SUMMARY REPORT: BOAST (VERSION 1.1)
*
*
*
*****

```

```

ELAPSED TIME (DAYS)      = 30.00   TIME STEP NUMBER      = 10   TIME STEP SIZE (DAYS)   = 3.00
CURRENT AVG RES PRESSURE = 4787.9  PREVIOUS AVG RES PRESSURE = 4787.9  PRESSURE DPMAX( 3, 1, 1) = 12.8
GAS INJECTION RATE (MSCF/D) = 0.0     CUM. GAS INJECTION (MSCF) =0.0000E+00
WATER INJECTION RATE (STB/D)= -900.0   CUM. WATER INJECTION (STB) =-.2700E+05
PRODUCING WOR (STB/STB)   = 0.000   CUM. WOR (STB/STB)      = 0.000
PRODUCING GOR (SCF/STB)  = 1.      CUM. GOR (SCF/STB)     = 1.

```

\*\*\*\*\* RESERVOIR PRESSURE DISTRIBUTION \*\*\*\*\*



```

*****
*
*
*          SUMMARY REPORT: BOAST (VERSION 1.1)
*
*
*
*****

```

```

LAPSED TIME (DAYS)      = 60.00  TIME STEP NUMBER      = 20  TIME STEP SIZE (DAYS)      = 3.00
CURRENT AVG RES PRESSURE = 4787.8  PREVIOUS AVG RES PRESSURE = 4787.8  PRESSURE DPMAX( 6, 1, 1) = 5.0
GAS INJECTION RATE (MSCF/D) = 0.0  CUM. GAS INJECTION (MSCF) = 0.0000E+00
WATER INJECTION RATE (STB/D) = -900.0  CUM. WATER INJECTION (STB) = -5.4000E+05
PRODUCING WOR (STB/STB) = 0.000  CUM. WOR (STB/STB) = 0.000
PRODUCING GOR (SCF/STB) = 1.  CUM. GOR (SCF/STB) = 1.

```

\*\*\*\* RESERVOIR PRESSURE DISTRIBUTION \*\*\*\*

= 1

5088. 5069. 5046. 5020. 4989. 4946. 4915. 4902. 4892. 4882. 4872. 4862. 4852. 4842. 4832. 4822. 4812. 4802. 4792. 4782.  
4772. 4762. 4752. 4742. 4732. 4722. 4712. 4702. 4692. 4682. 4672. 4662. 4652. 4642. 4632. 4622. 4612. 4602. 4592. 4582.

\*\*\*\*\* OIL SATURATION \*\*\*\*\*

= 1

0.281 0.309 0.332 0.370 0.441 0.572 0.745 0.797 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800  
0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800

\*\*\*\*\* WATER SATURATION \*\*\*\*\*

= 1

0.719 0.691 0.668 0.630 0.559 0.428 0.255 0.203 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200  
0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200

\*\*\*\*\* END OF REPORT \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* WELL REPORT FOR ALL ACTIVE WELLS ELAPSED TIME = 90.000000 DAYS FROM BEGINNING OF SIMULATION \*\*\*\*\*

| WELL LOCATION<br>ID I J K | CALC<br>BHFP | SPEC<br>BHFP | SPEC<br>PI | RATE         |              |                | GOR | WOR   | CUMULATIVE  |             |               |
|---------------------------|--------------|--------------|------------|--------------|--------------|----------------|-----|-------|-------------|-------------|---------------|
|                           |              |              |            | OIL<br>STB/D | GAS<br>MCF/D | WATER<br>STB/D |     |       | OIL<br>MSTB | GAS<br>MBCF | WATER<br>MSTB |
| ROD 40 1 1                | 1592.        | 2500.        | 1.000      | 600.         | 1.           | 0.             | 1.  | 0.000 | 54.         | 0.          | 0.            |
| MJ 1 1 1                  | 5619.        | 7500.        | 10.000     | 0.           | 0.           | -900.          | 0.  | 0.000 | 0.          | 0.          | -81.          |
| TOTALS                    |              |              |            | 600.         | 1.           | -900.          |     |       | 54.         | 0.          | -81.          |

\*\*\*\*\*  
 \*  
 \*  
 \* SUMMARY REPORT: BOAST (VERSION 1.1)  
 \*  
 \*  
 \*\*\*\*\*

ELAPSED TIME (DAYS) = 90.00 TIME STEP NUMBER = 30 TIME STEP SIZE (DAYS) = 3.00  
 CURRENT AVG RES PRESSURE = 4788.2 PREVIOUS AVG RES PRESSURE = 4788.1 PRESSURE DPHAX( 8, 1, 1) = 10.5  
 GAS INJECTION RATE (MSCF/D) = 0.0 CUM. GAS INJECTION (MSCF) = 0.0000E+00  
 WATER INJECTION RATE (STB/D) = -900.0 CUM. WATER INJECTION (STB) = -.8100E+05  
 PRODUCING WOR (STB/STB) = 0.000 CUM. WOR (STB/STB) = 0.000  
 PRODUCING GOR (SCF/STB) = 1. CUM. GOR (SCF/STB) = 1.

\*\*\*\*\* RESERVOIR PRESSURE DISTRIBUTION \*\*\*\*\*





\*\*\*\*\* WELL REPORT FOR ALL ACTIVE WELLS      ELAPSED TIME = 360.000000 DAYS FROM BEGINNING OF SIMULATION \*\*\*\*\*

| WELL LOCATION<br>ID I J K | CALC<br>BHFP | SPEC<br>BHFP | SPEC<br>PI | ----- RATE ----- |              |                | GOR | WOR   | --- CUMULATIVE --- |             |               |
|---------------------------|--------------|--------------|------------|------------------|--------------|----------------|-----|-------|--------------------|-------------|---------------|
|                           |              |              |            | OIL<br>STB/D     | GAS<br>MCF/D | WATER<br>STB/D |     |       | OIL<br>MSTB        | GAS<br>MMCF | WATER<br>MSTB |
| ROD 40 1 1                | 1404.        | 2500.        | 1.000      | 600.             | 1.           | 0.             | 1.  | 0.000 | 216.               | 0.          | 0.            |
| NJ 1 1 1                  | 5348.        | 7500.        | 10.000     | 0.               | 0.           | -900.          | 0.  | 0.000 | 0.                 | 0.          | -324.         |
| <b>TOTALS</b>             |              |              |            | <b>600.</b>      | <b>1.</b>    | <b>-900.</b>   |     |       | <b>216.</b>        | <b>0.</b>   | <b>-324.</b>  |

```

*****
*
*
*          SUMMARY REPORT: BOAST (VERSION 1.1)
*
*
*
*****

```

ELAPSED TIME (DAYS) = 360.00    TIME STEP NUMBER = 120    TIME STEP SIZE (DAYS) = 3.00

CURRENT AVG RES PRESSURE = 4792.0    PREVIOUS AVG RES PRESSURE = 4792.0    PRESSURE DPMAX( 29, 1, 1) = 4.7

GAS INJECTION RATE (MSCF/D) = 0.0    CUM. GAS INJECTION (MSCF) = 0.0000E+00

WATER INJECTION RATE (STB/D) = -900.0    CUM. WATER INJECTION (STB) = -.3240E+06

PRODUCING WOR (STB/STB) = 0.000    CUM. WOR (STB/STB) = 0.000

PRODUCING GOR (SCF/STB) = 1.    CUM. GOR (SCF/STB) = 1.

\*\*\*\*\* RESERVOIR PRESSURE DISTRIBUTION \*\*\*\*\*

K = 1

5232, 5221, 5204, 5184, 5162, 5140, 5118, 5096, 5073, 5051, 5029, 5006, 4984, 4961, 4939, 4916, 4892, 4869, 4845, 4820,  
4795, 4770, 4744, 4717, 4689, 4660, 4629, 4593, 4554, 4505, 4476, 4464, 4454, 4444, 4434, 4424, 4414, 4404, 4394, 4384.

\*\*\*\*\* OIL SATURATION \*\*\*\*\*

K = 1

0.192 0.266 0.289 0.297 0.299 0.300 0.300 0.300 0.300 0.300 0.301 0.302 0.303 0.305 0.307 0.311 0.314 0.319 0.323 0.3  
0.334 0.339 0.346 0.352 0.361 0.372 0.393 0.433 0.481 0.606 0.753 0.797 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800 0.800

\*\*\*\*\* WATER SATURATION \*\*\*\*\*

K = 1

0.808 0.734 0.711 0.703 0.701 0.700 0.700 0.700 0.700 0.700 0.699 0.698 0.697 0.695 0.693 0.689 0.686 0.681 0.677 0.67  
0.666 0.661 0.654 0.648 0.639 0.628 0.607 0.567 0.519 0.394 0.247 0.203 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200 0.200

\*\*\*\*\* END OF REPORT \*\*\*\*\*

## REFERENCIAS

- Frenchi J. R. and Bujnowski S. W.: "Boast: A Three Dimensional Three-Phase Black Oil Applied Simulation Tool (Version 1.1) Volume 1: Technical Description and Fortran Code. United States Department of Energy, DOE/BC/10033-3, September, 1982.

## CAPITULO 10

### CONCLUSIONES.

El desarrollo del presente trabajo fué motivado principalmente - por las tres razones siguientes:

- Proporcionar a los alumnos que cursan la materia "Simulación Matemática de Yacimientos", unos apuntes que puedan ser utilizados como referencia o libro de texto.
- Permitir a cualquier alumno o profesionista interesado en el tema contar con una fuente de consulta en español para estudiar los fundamentos de la simulación de yacimientos petroleros.
- Sustituir una versión anterior de estos apuntes, la cual fué elaborada por los ingenieros José R. Serrano Lozano y Luis A. Ayala Gómez en Mayo de 1982.

Con estos tres motivos en mente, se desarrolló el presente trabajo, el cual representa un esfuerzo grande para tratar de modificar, mejorar y ampliar lo que de este tema se trata en los apuntes de los ingenieros Serrano y Ayala, basándose para ello en - dos años de experiencia de la utilización de los mismos.

Como es difícil en este tipo de trabajos listar una serie de conclusiones y recomendaciones, lo que se hará a continuación es comentar los aspectos más importantes relacionados con la simulación de yacimientos, destacando hasta donde sea posible sus ventajas y desventajas.

Con el desarrollo de la computadora, se vinieron a simplificar -

todos los cálculos rutinarios que se efectuaban a mano, lo que realmente fué un avance muy significativo, ya que se han podido atacar problemas cada vez más sofisticados que de otra manera no se hubieran podido resolver.

Con la llegada de la simulación, que utiliza en forma exhaustiva la computadora y gracias al desarrollo reciente de los métodos numéricos, ha sido posible predecir el comportamiento de yacimientos sujetos a procesos de recuperación mejorada muy complejos, los cuales hace algunos años ni siquiera se hubiera pensado en tratar de estudiar.

No obstante la simulación también ha sido y quizá siga siendo mal empleada. La ignorancia de lo que es y el desconocimiento de sus fundamentos creó una especie de misterio a su alrededor. Se creyó que ésta al hacer uso de una computadora, sería capaz de proporcionar todas las soluciones que se buscaban. Así pues se empezó a utilizar la simulación para todos y cada uno de los problemas de yacimientos que se presentaban. Aún en los casos más simples, se trató de utilizar simuladores cuya complejidad no se justificaba.

La realidad es que el hecho de que haya aparecido la simulación no implica que los métodos analíticos que se utilizaban antes de su llegada deban desaparecer o pasen a ser obsoletos. Hay que recordar que dichos métodos simplificados dan mejores resultados en algunos casos donde la simulación solo contribuye a complicar

más las cosas.

Actualmente, gracias a la experiencia que se ha tenido, se sabe que la simulación no es más que una herramienta muy poderosa y de gran utilidad cuando se le aplica con propiedad, pero que también tiene sus limitaciones. Así pues, es importante considerar las siguientes preguntas antes de utilizar un modelo:

- Se tiene bien identificado el proceso que se quiere simular?
- Existe un modelo matemático para representar el proceso físico que ocurre en el yacimiento?
- Se tiene una buena caracterización del yacimiento que se va a estudiar?
- Se justifica tanto técnica como económicamente el uso de un simulador para resolver el problema planteado?

Si la respuesta a cualquiera de las preguntas anteriores es negativa o se tienen dudas, probablemente lo que conviene es tratar de definir mejor la posible solución al problema utilizando alguna otra de las herramientas con que se cuenta en la ingeniería de yacimientos.

Hay que tomar en cuenta que un simulador por más que sus bases tanto matemáticas como numéricas estén bien fundamentadas, nunca podrá reemplazar un buen estudio geológico del yacimiento, ni podrá determinar por si solo las propiedades petrofísicas de la ro

ca, ni las características de los fluidos. En otras palabras, los resultados que proporcione serán tan buenos como los datos que se le suministren.

Si los datos son de baja calidad, los resultados obtenidos con el modelo también lo serán. Esto es quizá uno de los aspectos más importantes de simulación, el cual debe ser considerado muy seriamente cuando se trate de efectuar un estudio de yacimientos utilizando un simulador.

Por último, es importante destacar el papel que dentro de la simulación de yacimientos debe de jugar el ingeniero petrolero, ya sea a nivel de usuario o como encargado de desarrollar un modelo. Un simulador por muy bueno que sea, requiere de un ingeniero que sepa interpretar los resultados y hacer las modificaciones necesarias a los datos para volver a correrlo en la computadora. Es decir, se requiere de una persona que pueda aprovechar al máximo la capacidad que tenga el modelo, de otra forma sería como utilizar por poner un ejemplo, un coche de carreras para viajar a vuelta de rueda. En el caso de un ingeniero encargado de desarrollar un simulador, la situación es todavía más crítica, ya que éste será tan bueno o tan malo como la habilidad del ingeniero para representar el proceso físico que ocurre en el yacimiento a través de un modelo matemático. En otras palabras, si el ingeniero petrolero no tiene una idea clara del proceso físico que ocurre en el yacimiento, difícilmente lo podrá represen-

tar matemáticamente y menos aún lo podrá resolver numéricamente. Es por ésto que se requiere conocer los fundamentos de simulación de yacimientos petroleros para poder utilizar con propiedad un simulador y para poder desarrollar uno propio de manera adecuada cuando fuera necesario.

## APENDICE A

CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE EL MANEJO DE MATRICES.

## A.1 Matriz. Renglones y Columnas.

Una ordenación rectangular de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde los  $a_{ij}$  son escalares, se llama matriz. Esta también se denota por  $(a_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ , ó simplemente por  $(a_{ij})$ .

$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ ,  $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$ ,  $\dots$ ,  $(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ , son los renglones de la matriz y:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

son sus columnas. Obsérvese que el elemento  $a_{ij}$ , llamado la componente  $ij$ , ocupa el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna. Una matriz con  $m$  renglones y  $n$  columnas es una matriz  $m \times n$ .

Por ejemplo:

La siguiente es una matriz 2 X 3 
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Sus renglones son: (1, -3, 4) y (0, 5, -2).

Sus columnas son: 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A una matriz con un solo renglón o con una sola columna se le llama "vector".

## A.2 Suma de matrices y multiplicación por un escalar.

Considérese dos matrices A y B del mismo tamaño, es decir, con el mismo número de filas y de columnas, por ejemplo, las matrices mxn:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

La suma de A y B, es la matriz que se obtiene sumando las componentes correspondientes:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

El producto de un escalar K por la matriz A, es la matriz que se obtiene al multiplicar cada componente de A por K:

$$KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & \dots & Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & \dots & Ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Ka_{m1} & Ka_{m2} & \dots & Ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Se puede observar que A + B y KA son también matrices mxn. La suma de matrices de diferente tamaño no está definida. Por ejemplo:

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}. \text{ Por tanto,}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{bmatrix}$$

### A.3 Multiplicación de matrices.

Sea A un vector renglón y B un vector columna, su producto  $A \cdot B$  se puede encontrar combinando las matrices de la siguiente manera:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Con lo cual queda definido el producto de un vector renglón A por un vector columna B.

Considérese ahora el producto de las matrices A y B definido por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & A_1 \cdot B^3 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & A_2 \cdot B^3 \end{bmatrix}$$

Donde  $A_1$  y  $A_2$  son los renglones de A y  $B^1$ ,  $B^2$  y  $B^3$  son las columnas de B.

En la multiplicación de matrices, para que se pueda efectuar, el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de renglones de la matriz B. Generalizando, sean  $A = (a_{i,j})$  y  $B = (b_{i,j})$  dos matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B; es decir, A es una matriz  $m \times p$  y B es una matriz  $p \times n$ . Entonces el producto AB es la matriz  $m \times n$  cuya componente  $c_{i,j}$  es la que se obtiene multiplicando el renglón  $i$ -ésimo  $A^i$  de A por la columna  $j$ -ésima  $B^j$  de B.

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \dots & A_1 \cdot B^n \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \dots & A_2 \cdot B^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \dots & A_m \cdot B^n \end{bmatrix}$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde  $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{K=1}^n a_{iK} b_{Kj}$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Los dos ejemplos anteriores muestran que la multiplicación de matrices no es conmutativa, ésto es, los productos de matrices AB y BA no son necesariamente iguales. Considérese los siguientes ejemplos para una mayor comprensión del producto con matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 15 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -3 & 3 \\ -11 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

#### A.4 Matrices cuadradas.

Una matriz con el mismo número de renglones y de columnas es una matriz cuadrada. La diagonal (o diagonal principal) de la  $n$ -matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  consta de los elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ . Por ejemplo, la siguiente es una 3-matriz cuadrada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Los elementos de su diagonal son 1, 5 y 9.

Una matriz triangular superior es una matriz cuadrada cuyos componentes debajo de la diagonal principal son todos cero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Similarmente, una matriz triangular inferior es una matriz cuadrada cuyos componentes encima de la diagonal principal son todos cero.

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada donde los componentes que no están en la diagonal son todos cero.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

En particular, la n-matriz cuadrada con unos como elementos de la diagonal y ceros como elementos que no están en la diagonal, denotada por I, se llama la matriz identidad. Por ejemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz I es similar al escalar 1 en que para toda n-matriz cuadrada A.

$$AI = IA = A$$

Se dice que una matriz cuadrada A es inversible si existe una matriz B con la propiedad de que

$$AB = BA = I$$

donde I es la matriz identidad. La matriz B es única. En este caso, a la matriz B se le llamará la inversa de A y se denota por  $A^{-1}$ . La relación anterior es simétrica, ésto es, si B es la inversa de A, entonces A es la inversa de B.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-5 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  son inversibles y son inversas la una de la otra.

APENDICE B

UNIDADES.

Tabla B.1 Constantes Físicas.

| <u>CANTIDAD</u>                            | <u>MAGNITUD</u> | <u>UNIDADES</u>                                   |
|--|-----------------|---|
| Cero Absoluto                              | 0.00            | K   |
|  | -273.15         | °C  |
|  | 0.00            | °R  |
|  | -459.67         | °F  |
| Constante de los gases (R)                 | 8.3143          | J/mol-K   |
|  | 8.3143E+7       | erg/(grmole) °K                                   |
|  | 10.732          | lb/pg <sup>2</sup> -pie <sup>3</sup> /(lbmole) °R |
| Densidad máxima del agua                   | 999.973         | Kg/m <sup>3</sup>                                 |
|  | 0.999973        | gr/cm <sup>3</sup>                                |
|  | 62.4261         | lbm/pie <sup>3</sup>                              |
| Gradiente del agua a 60°F (15°C, 288.71 K) | 9796.98         | Pa/m  |
|  | 979.698         | dina/cm <sup>3</sup>                              |
|  | 0.433100        | lb/pie  |
| Atmósfera standard                         | 1.01325E+05     | Pa  |
|  | 1.01325E+06     | dina/cm <sup>2</sup>                              |
|  | 14.6959         | lb/pg <sup>2</sup>                                |

| <u>CANTIDAD</u>   | <u>MAGNITUD</u>                     | <u>UNIDADES</u>                                      |
|-------------------|-------------------------------------|--|
| Densidad del aire | 1.2232                              | Kg/m <sup>3</sup>                                    |
| a 1 atm, 60°F     | 1.2232E-03                          | gr/cm <sup>3</sup>                                   |
|                   | 0.076362                            | lb <sub>m</sub> /pie <sup>3</sup>                    |
| g                 | 980.6650                            | cm/seg <sup>2</sup>                                  |
|                   | 32.17405                            | pie/seg <sup>2</sup>                                 |
| g <sub>c</sub>    | 1.000                               | Kg-m/N-sec <sup>2</sup>                              |
|                   | 1.000                               | gr-cm/dina sec <sup>2</sup>                          |
|                   | 32.17405                            | lb <sub>m</sub> pie/lb <sub>f</sub> sec <sup>2</sup> |
| °API              | $\frac{141.5}{\gamma_{ro}} - 131.5$ |  |

Tabla B.2. Factores de conversión.

| <u>Para convertir de</u>          | <u>a</u>                          | <u>Multiplique por</u> |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| <u>AREA</u>                       |                                   |                        |
| acre                              | m <sup>2</sup>                    | 4.046856E+03           |
|                                   | pie <sup>2</sup>                  | 4.356000E+04           |
| darcy                             | m <sup>2</sup>                    | 9.86923E-13            |
|                                   | cm <sup>2</sup>                   | 9.86923E-09            |
|                                   | md                                | 1.00000E+03            |
| pie <sup>2</sup>                  | m <sup>2</sup>                    | 9.290304E-02           |
|                                   | cm <sup>2</sup>                   | 9.290304E+02           |
|                                   | pg <sup>2</sup>                   | 1.440000E+02           |
| hectárea                          | m <sup>2</sup>                    | 1.000000E+04           |
|                                   | acre                              | 2.471054E+00           |
| milla <sup>2</sup>                | m <sup>2</sup>                    | 2.589988E+06           |
|                                   | acre                              | 6.400000E+02           |
| <u>DENSIDAD</u>                   |                                   |                        |
| gr/cm <sup>3</sup>                | Kg/m <sup>3</sup>                 | 1.000000E+03           |
|                                   | lb <sub>m</sub> /pie <sup>3</sup> | 6.242797E+01           |
|                                   | lb <sub>m</sub> /galón            | 8.345405E+00           |
|                                   | lb <sub>m</sub> /barril           | 3.505070E+02           |
| lb <sub>m</sub> /pie <sup>3</sup> | Kg/m <sup>3</sup>                 | 1.601846E+01           |
|                                   | lb <sub>m</sub> /galón            | 1.336805E-01           |
|                                   | lb <sub>m</sub> /barril           | 5.614583E+00           |

| <u>Para convertir de</u> | <u>a</u>                | <u>Multiplique por</u> |
|--------------------------|-------------------------|------------------------|
| lb <sub>m</sub> /galón   | Kg/m <sup>3</sup>       | 1.198264E+02           |
|                          | lb <sub>m</sub> /barril | 4.200000E+01           |

### FUERZA

|                 |                 |              |
|-----------------|-----------------|--------------|
| dina            | Newton          | 1.000000E-05 |
|                 | lb <sub>f</sub> | 2.248089E-06 |
| Kg <sub>f</sub> | Newton          | 9.806650E+00 |
|                 | lb <sub>f</sub> | 2.204622E+00 |
| lb <sub>f</sub> | Newton          | 4.448222E+00 |

### LONGITUD

|       |     |              |
|-------|-----|--------------|
| cm    | m   | 1.000000E-02 |
| pie   | m   | 3.048000E-01 |
|       | cm  | 3.048000E+01 |
| pg    | m   | 2.540000E-02 |
|       | cm  | 2.540000E+00 |
| milla | m   | 1.609344E+03 |
|       | pie | 5.280000E+03 |

### MASA

|                 |                 |               |
|-----------------|-----------------|---------------|
| gr <sub>m</sub> | Kg              | 1.000000E-03  |
| lb <sub>m</sub> | Kg              | 4.5359237E-01 |
|                 | onza            | 1.600000E+01  |
| slug            | Kg              | 1.459390E+01  |
|                 | lb <sub>m</sub> | 3.217405E+01  |

Para convertir de      a      Multiplique por

Tonelada métrica      Kg      1.000000E+03

PRESION

760 mm de Hg a c.s      Pa      1.01325E+05  
 Pies de agua(4°C)      3.38995E+01  
 lb/pg<sup>2</sup>      1.46960E+01  
 bar      1.01325E+00  
 bar      Pa      1.000000E+05  
 lb/pg<sup>2</sup>      1.450377E+01  
 dina/cm<sup>2</sup>      Pa      1.000000E-01  
 lb/pg<sup>2</sup>      1.450377E-05  
 Kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>      Pa      9.806650E+04  
 bar      9.806650E-01  
 lb/pg<sup>2</sup>      1.422334E+01  
 lb/pg<sup>2</sup>      Pa      6.894757E+03

TIEMPO

día      seg      8.640000E+04  
          min      1.440000E+03  
          hora      2.400000E+01  
 hora      seg      3.600000E+03  
          min      6.000000E+01  
 min      seg      6.000000E+01

Para convertir de                    a    Multiplique por

VISCOSIDAD

|                                      |                                      |              |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------|
| cp                                   | Pa-seg                               | 1.000000E-03 |
|                                      | dina-seg/cm <sup>2</sup>             | 1.000000E-02 |
|                                      | lb <sub>m</sub> /pie-seg             | 6.719689E-04 |
|                                      | lb <sub>f</sub> seg/pie <sup>2</sup> | 2.088543E-05 |
|                                      | lb <sub>m</sub> /pie-hora            | 2.419088E+00 |
| centistoke                           | m <sup>2</sup> /seg                  | 1.000000E-06 |
|                                      | cp                                   | 1.000000E+00 |
| poise                                | Pa-seg                               | 1.000000E-01 |
| lb <sub>m</sub> /pie-seg             | Pa-seg                               | 1.488164E+00 |
| lb <sub>m</sub> /pie-hora            | Pa-seg                               | 4.133789E-04 |
| lb <sub>f</sub> seg/pie <sup>2</sup> | Pa-seg                               | 4.788026E+01 |

VOLUMEN

|                  |                  |              |
|------------------|------------------|--------------|
| barril           | m <sup>3</sup>   | 1.589873E-01 |
|                  | pie <sup>3</sup> | 5.614583E+00 |
|                  | galón            | 4.200000E+01 |
| pie <sup>3</sup> | m <sup>3</sup>   | 2.831685E-02 |
|                  | pg <sup>3</sup>  | 1.728000E+03 |
|                  | galón            | 7.480520E+00 |
| galón            | m <sup>3</sup>   | 3.785412E-03 |
|                  | pg <sup>3</sup>  | 2.310001E+02 |
| litro            | m <sup>3</sup>   | 1.000000E-03 |

Para convertir de      a

Multiplique por

GASTO

|                       |                       |              |
|-----------------------|-----------------------|--------------|
| bl/día                | m <sup>3</sup> /seg   | 1.840131E-06 |
|                       | m <sup>3</sup> /hora  | 6.624472E-03 |
|                       | m <sup>3</sup> /día   | 1.589873E-01 |
|                       | cm <sup>3</sup> /seg  | 1.840131E+00 |
|                       | pie <sup>3</sup> /min | 3.899016E-03 |
|                       | galón/min             | 2.916667E-02 |
| pie <sup>3</sup> /min | m <sup>3</sup> /seg   | 4.719474E-04 |
| pie <sup>3</sup> /seg | m <sup>3</sup> /seg   | 2.831685E-02 |
| galón/min             | m <sup>3</sup> /seg   | 6.309020E-05 |

Tabla B.3 Conversiones de temperatura.

| <u>Para convertir</u> | <u>a</u> | <u>Resuelva</u>            |
|-----------------------|----------|----------------------------|
| °F                    | K        | $T_K = (T_F + 459.67)/1.8$ |
| °R                    | K        | $T_K = T_R/1.8$            |
| °F                    | °R       | $T_R = T_F + 459.67$       |
| °F                    | °C       | $T_C = (T_F - 32)/1.8$     |
| °C                    | K        | $T_K = T_C + 273.15$       |

# NOMENCLATURA

|       |                               |
|-------|-------------------------------|
| A     | área                          |
| Bg    | factor de volumen del gas.    |
| Bo    | factor de volumen del aceite. |
| Bw    | factor de volumen del agua.   |
| c.s   | condiciones estandard.        |
| c.y   | condiciones de yacimiento.    |
| C     | compresibilidad.              |
| Cg    | compresibilidad del gas.      |
| Co    | compresibilidad del aceite.   |
| Cw    | compresibilidad del agua.     |
| D     | profundidad.                  |
| e     | error.                        |
| Eg    | energía gravitacional.        |
| Ep    | energía potencial.            |
| Fg    | fuerza gravitacional.         |
| g     | aceleración de la gravedad.   |
| $g_c$ | constante gravitacional.      |

|                 |                                   |
|-----------------|-----------------------------------|
| h               | espesor.                          |
| K               | permeabilidad absoluta.           |
| Kg              | permeabilidad efectiva al gas.    |
| Ko              | permeabilidad efectiva al aceite. |
| Kw              | permeabilidad efectiva al agua.   |
| Kr <sub>g</sub> | permeabilidad relativa al gas.    |
| Kr <sub>o</sub> | permeabilidad relativa al aceite. |
| Kr <sub>w</sub> | permeabilidad relativa al agua.   |
| L               | longitud.                         |
| m               | masa.                             |
| M               | peso molecular.                   |
| n               | número de moles.                  |
| n               | nivel de tiempo anterior.         |
| n+1             | nivel de tiempo nuevo.            |
| P               | presión.                          |
| Patm            | presión atmosférica.              |
| Pc              | presión capilar.                  |

|               |   |
|---------------|---|
| $P_{c_{o-g}}$ | presión capilar entre las interfases gas-aceite.  |
| $P_{c_{w-o}}$ | presión capilar entre las interfases agua-aceite. |
| $P_{c_{g-w}}$ | presión capilar entre las interfases agua-gas.    |
| $P_e$         | presión estática.                                 |
| $P_t$         | presión en la cabeza del pozo.                    |
| $P_{wf}$      | presión de fondo fluyendo.                        |
| $Q$           | gasto.  |
| $q$           | gasto.  |
| $r$           | radio.  |
| $r_e$         | radio de drene.                                   |
| $r_w$         | radio del pozo.                                   |
| $R$           | constante universal de los gases.                 |
| $R_s$         | relación de solubilidad del gas en el aceite.     |
| $R_{sw}$      | relación de solubilidad del gas en el agua.       |
| $s$           | distancia.  |
| $S$           | saturación.                                       |
| $S_g$         | saturación de gas.                                |

|          |   |
|----------|---|
| So       | saturación de aceite.                     |
| Sw       | saturación de agua.                       |
| t        | tiempo.                                   |
| T        | temperatura.                              |
| T        | transmisibilidad.                         |
| v        | velocidad.                                |
| V        | volumen.                                  |
| W        | término fuente.                           |
| W        | trabajo.                                  |
| Z        | altura.                                   |
| Z        | factor de desviación de los gases reales. |
| $\phi$   | porosidad.                                |
| $\phi_e$ | porosidad efectiva.                       |
| $\mu$    | viscosidad.                               |
| $\mu_g$  | viscosidad del gas.                       |
| $\mu_o$  | viscosidad del aceite.                    |
| $\mu_w$  | viscosidad del agua.                      |

|            |                           |
|------------|---------------------------|
| $\rho$     | densidad.                 |
| $\rho_g$   | densidad del gas.         |
| $\rho_o$   | densidad del aceite.      |
| $\rho_w$   | densidad del agua.        |
| $\gamma_r$ | densidad relativa.        |
| $\alpha$   | constante de difusividad. |
| $\phi$     | potencial de flujo        |
| $\phi_g$   | potencial gravitacional.  |
| $\phi_p$   | potencial de presión.     |
| $\Delta$   | incremento.               |
| $\omega$   | parámetro de relajación.  |