

192 años



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

PRUEBAS DE LIMITE DE YACIMIENTO

T R A B A J O E S C R I T O

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A

ROGELIO CAMILO OROZCO ESPINO



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE .

	Pag.
RESUMEN	1
1. INTRODUCCION	2
2. GENERALIDADES	5
2.1 Los datos de Presión en La Ingeniería Petrolera	5
2.2 Bases Matemáticas para el Analisis de Datos de Presión	6
2.3 Soluciones de La Ecuación de Difusividad	23
2.4 Períodos de Flujo: Transitorio, Transitorio tardío, Semi-estacionario y Estacionario	34
2.5 El Principio de Superposición	37
2.6 Efectos de Daño y Almacenamiento	42
3. PRUEBAS DE DECREMENTO DE PRESION	45
3.1 Condiciones de Flujo Transitorio	46
3.2 Condiciones de Flujo Transitorio tardío	49
3.3 Condiciones de Flujo Semi-estacionario	51
4. PRUEBAS DE LIMITE DE VACIMIENTO	54
4.1 Descripción	54
4.2 Analisis del Período de Flujo Transitorio tardío	55
4.3 Analisis del Período de Flujo Semi-estacionario	58
4.4 Método de Analisis de Park Jones	62
4.5 Estimación de La Forma del Area de Drene a partir de Pruebas de Límite de Vacimiento	72
4.6 Pruebas de Límite de Vacimiento utilizando datos de Producción	80
5. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS	87
6. CONCLUSIONES	118
7. NOMENCLATURA	119
8. REFERENCIAS	122
9. APENDICES	125

RESUMEN

En este trabajo se tratan los conceptos físico-matemáticos que han servido para poder desarrollar las técnicas para el análisis de las pruebas de decremento de presión, así como la aplicación de dichas técnicas en el análisis de la información obtenida durante pruebas efectuadas en pozos.

Se ha intentado dar prioridad a los conceptos matemáticos en la demostración de algunas ecuaciones que con frecuencia son utilizadas en la evaluación de la producción de hidrocarburos dado que un buen entendimiento de las bases que expresan en forma matemática el comportamiento de fenómenos físicos como el flujo de fluidos a través de un medio poroso, proporciona como consecuencia un mejor criterio para manejar la información obtenida durante una prueba de decremento de presión.

Las pruebas de decremento aquí tratadas, son de larga duración, por lo cual durante una prueba de este tipo se presentan los tres periodos de flujo básicos: Transitorio -- transitorio tardío u el periodo semi-estacionario pasando con esto un análisis apropiado.

En base al comportamiento de la presión en cada uno de los tres periodos de flujo antes mencionados, se aplican los métodos de análisis de las Pruebas de Límite de Vaciamiento así como la utilidad de dichas pruebas en el cálculo de parámetros que son de gran importancia para la Ingeniería Petrolera.

CAPITULO I

INTRODUCCION

Mucho se ha escrito sobre las pruebas de variación de presión y de las técnicas de análisis de las mismas, a partir de las cuales se han desarrollado los métodos para determinar algunas de las propiedades de las rocas (porosidad, permeabilidad, etc.) y otros parámetros inherentes al yacimiento (presión media, volumen de drenaje efectivo, volumen de hidrocarburos que está en comunicación con el pozo, etc.) lo cual ha sido de mucha utilidad a la Ingeniería de Yacimientos.

Con el estudio de las pruebas de presión se ha logrado desarrollar una variedad de ellas, las más comunes son: las pruebas de incremento, de decremento, de inyección, las llamadas "Fall-off", pruebas de interferencia y las pruebas de límite de yacimiento.

De ellas las más usadas son las cinco primeras lo cual es lógico si se tiene en cuenta que requieren relativamente menor tiempo de prueba que las de límite de yacimiento; sin embargo, la elección de alguna de ellas depende del objetivo que se desee alcanzar al correr dicha prueba.

Por lo general, los parámetros que con mayor frecuencia se desean conocer son: la permeabilidad y porosidad de la formación, el factor de daño y el coeficiente de almacenamiento o descarga; todo lo cual se puede conseguir mediante una prueba de incremento de presión o bien con una de decremento, siendo esta última quizá la más recomendable en estos casos dado que requiere poco tiempo de cierre del pozo previo a la prueba, y posteriormente durante ella el pozo puede seguir fluyendo sin sacrificar la producción.

Cuando se desea conocer la forma y tamaño del drené de un pozo o el volumen de hidrocarburos que está en comunicación con el pozo, entonces deben correrse las pruebas de límite de yacimiento consiguiendo en ellas una información amplia y confiable.

En junio de 1956 Park Jones¹ presentó un artículo en el cual se trató un tema de gran importancia relacionado con el cálculo de volumen de hidrocarburos contenido en el volumen de drené efectivo de un pozo, así como la detección de "barreras" dentro de dicho drené.

La técnica expuesta se basó en el comportamiento de la presión durante el período transitorio y el semi-estacionario, demostrando matemáticamente su validez teórica.

Pero Jones antes de publicar su artículo comprobó la validez práctica del método al aplicarlo en el análisis de una prueba de decremento de larga duración efectuada en un pozo de gas en el condado de Harris, Texas, logrando resultados que posteriormente se comprobaron durante la vida productiva del pozo.

A este tipo de pruebas de decremento corridas con el fin de obtener información sobre el volumen de hidrocarburos contenido en el drené efectivo del pozo, Jones les dio el nombre de "pruebas de límite de yacimiento".

Posteriormente a la publicación de ese artículo, las pruebas de límite de yacimiento fueron adquiriendo más popularidad dentro del ambiente petrolero mundial y la técnica se fue mejorando cada vez más y así Jones publica entre 1957 y 1962 - otros artículos^(2,3) en los que expone el éxito conseguido hasta esa fecha por su método, así como mejoras al mismo.

Muchos investigadores^(4,5,6,7) han hecho aportaciones valiosas basándose en las pruebas de límite de yacimiento; unos⁽⁵⁾ ideando un método para estimar la forma del área de drené a partir de pruebas a situaciones de gasto variable⁽⁶⁾ o -

bien a yacimientos naturalmente fracturados⁽⁷⁾.

Lo más reciente son las pruebas de límite de yacimiento basadas en datos de producción⁽⁸⁾.

En este trabajo se pretende proporcionar un desarrollo matemático sobre la ecuación diferencial de difusividad para un yacimiento de aceite, así como tres soluciones distintas para la misma considerando un gasto constante.

A partir de estas tres soluciones se espera poder explicar el comportamiento de la presión durante los tres periodos de flujo básicos: transitorio, transitorio tardío y periodo semi-estacionario.

Como resultado integral de los tres periodos de flujo en una prueba de decremento de presión, se debe poder calcular: la permeabilidad, k ; la capacidad de flujo, kh ; el factor de daño, s ; así como el volumen poroso, V_p ; área, A y radio efectivo r_e de la parte del yacimiento que está en comunicación con el pozo, y el volumen de aceite, N , contenido en el volumen poroso efectivo del pozo; donde estos últimos cuatro parámetros conforman lo que Park Jones⁽¹⁾ llamó "límites de yacimiento". El estudio de las pruebas de decremento de presión efectuadas con el fin de obtener estos últimos parámetros, constituye el objetivo principal de este trabajo.

CAPITULO I

GENERALIDADES

2.1 Los datos de presión en la Ingeniería Petrolera.

El primer tipo de medición de presión efectuado en pozos fluyentes consistió en introducir un mecanismo de medición al fondo de un pozo que permanece cerrado por un periodo de tiempo hasta que la presión en el yacimiento se estabilice, y a la presión así medida se le denominó Presión Estática.

Durante algún tiempo estas medidas fueron los únicos valores disponibles para indicar la presión en yacimientos permeables de alta productividad; sin embargo, resultó obvio que las presiones estáticas medidas eran función del tiempo de cierre del pozo.

Fue así que surgió la idea de que la velocidad con la que se incrementa la presión al cerrarse el pozo era un reflejo de la permeabilidad de la roca del yacimiento; esta observación cualitativa fue un paso importante para comprender el comportamiento de la presión en un pozo, dicha comprensión condujo hacia otro tipo de medida llamada Prueba Transitoria de Presión que consiste en la medida continua de la presión respecto al tiempo y así obtener un perfil de variación de presión en cada unidad de tiempo. Este es el tipo de medida que se usa en las modernas pruebas de presión en pozos.

Las pruebas de presión efectuadas tanto en pozos de aceite como en pozos de gas son bastante conocidas en la actualidad esto se debe principalmente a la confiabilidad de los resultados que con ellas se ha obtenido hasta la fecha.

Así, los datos de presión se han utilizado para calcular el valor de parámetros tales como la eficiencia en la terminación de un pozo, la interferencia entre dos o más de --

ellos, así como para estimar cuando es conveniente efectuar un cierto tipo de estimulación y el resultado que posteriormente se obtiene con dicho tratamiento.

En la actualidad los datos de presión se han combinado con datos de producción y de laboratorio con el fin de estimar el área y volumen poroso de un yacimiento así como el volumen de hidrocarburos que está en comunicación con el pozo.

2.2 Bases matemáticas para el análisis de datos de Presión.

Los principios físicos básicos que permiten describir matemáticamente el flujo de fluidos a través de un medio poroso son los siguientes:

a) Ley de conservación de masa.

La ley de conservación de la materia establece en términos generales que:

"ciertas cantidades físicas se conservan; es decir que no se crean ni se destruyen".

De lo anterior, podemos plantear el balance de masa para un cierto elemento de volumen:

$$\begin{array}{r} \text{Cantidad de} \\ \text{masa que en} \\ \text{tra} \end{array} - \begin{array}{r} \text{Cantidad de ma} \\ \text{sa que sale} \end{array} + \begin{array}{r} \text{Cantidad de masa} \\ \text{neta que se intro} \\ \text{duce por fuentes} \\ \text{y sumideros} \end{array} = \begin{array}{r} \text{Incremento de} \\ \text{masa en la re} \\ \text{gión} \end{array} \dots (2.2.1)$$

Considerando un sólo fluido fluyendo a través de un medio poroso homogéneo e isotropo y tomando un elemento de volumen arbitrario en la región de flujo, fig. 1, se tiene que los componentes volumétricos de flujo dentro del elemento en las direcciones X, Y y Z, son denotadas por u_x , u_y y u_z , respectivamente. Estas son gastos de flujo volumétrico por unidad de área de sección transversal al flujo.

Por tanto el gasto de flujo másico que entra al elemento en la dirección X, es:

$$\rho U_x \Delta y \Delta z \dots \dots \dots (2.2.2)$$

El gasto de flujo másico que sale del elemento en la dirección X, es:

$$\Delta y \Delta z \left| \rho U_x + \Delta(\rho U_x) \right| \dots \dots \dots (2.2.3)$$

donde: $\Delta(\rho U_x)$ es el cambio en flujo de masa que ocurre dentro - del elemento.

El gasto neto de flujo en la dirección X (cantidad -- que entra menos la que sale), es:

$$\begin{aligned} & \rho U_x \Delta y \Delta z - \Delta y \Delta z \left| \rho U_x + \Delta(\rho U_x) \right| = \\ & = \rho U_x \Delta y \Delta z - \rho U_x \Delta y \Delta z - \Delta(\rho U_x) \Delta y \Delta z = - \Delta y \Delta z \Delta(\rho U_x) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Expresiones similares pueden ser escritas para las direcciones Y y Z, respectivamente. Asumiendo que no se crea ni se pierde masa dentro del elemento, la cantidad de cambio de masa neta en el elemento en un incremento de tiempo Δt , puede expresarse como:

$$\begin{aligned} & -\Delta t \left[\Delta(\rho U_x) \Delta y \Delta z + \Delta(\rho U_y) \Delta x \Delta z + \Delta(\rho U_z) \Delta x \Delta y \right] = \\ & = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \left| \rho \right|_{t+\Delta t} - \rho \Delta x \Delta y \Delta z \left| \rho \right|_t \dots \dots \dots (2.2.5) \end{aligned}$$

La expresión (2.2.5) es simplemente una aplicación - del principio de continuidad. Así que dividiendo esta ecuación entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, se llega a:

$$- \left[\frac{\Delta(\rho U_x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho U_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho U_z)}{\Delta z} \right] = \frac{(\rho)_{t+\Delta t} - (\rho)_t}{\Delta t} \dots (2.2.6)$$

calculando el límite de la expresión anterior, cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y Δt tienden a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = - \frac{\partial(\rho)}{\partial t} \dots \dots \dots (2.2.7)$$

que es la ecuación de continuidad en forma cartesiana para el -

flujo de un fluido en un medio poroso homogéneo e isotrópico.

La ecuación de continuidad para flujo radial, se obtiene siguiendo un desarrollo similar al caso anterior, pero ahora considerando un volumen elemental como se muestra en la Fig. 2.

Como el flujo es radial, sólo se tiene flujo en la dirección del eje radial "r".

Por tanto, el gasto de flujo másico que entra al elemento en la dirección r, es:

$$\rho U_r (r + \Delta r) \theta h \dots \dots \dots (2.2.8)$$

El gasto de flujo de masa que sale del elemento es:

$$\rho U_r (r \theta h) + r \theta h \Delta(\rho U_r) = r \theta h \left| \rho U_r + \Delta(\rho U_r) \right| \dots (2.2.9)$$

donde $\Delta(\rho U_r)$ es el cambio de flujo de masa que ocurre dentro del elemento.

Entonces el gasto neto de flujo en la dirección r (cantidad que entra menos la que sale) es:

$$\theta (r + \Delta r) h (\rho U_r) - \theta r h \left| \rho U_r + \Delta(\rho U_r) \right| \dots \dots \dots (2.2.10)$$

La cantidad de masa que pasa a través del elemento en un periodo de tiempo Δt , está dado por:

$$\begin{aligned} & -\Delta t \left\{ \theta (r + \Delta r) h (\rho U_r) - \theta r h \left| \rho U_r + \Delta(\rho U_r) \right| \right\} \\ & = \theta \rho h \theta \Delta r \left| \dots \right|_{t+\Delta t} - \theta \rho h \theta \Delta r \left| \dots \right|_t \dots \dots \dots (2.2.11) \end{aligned}$$

el signo menos indica que el flujo es en sentido contrario al eje radial r.

Dividiendo la ecuación anterior entre $r \theta \Delta r h \Delta t$ y arreglando:

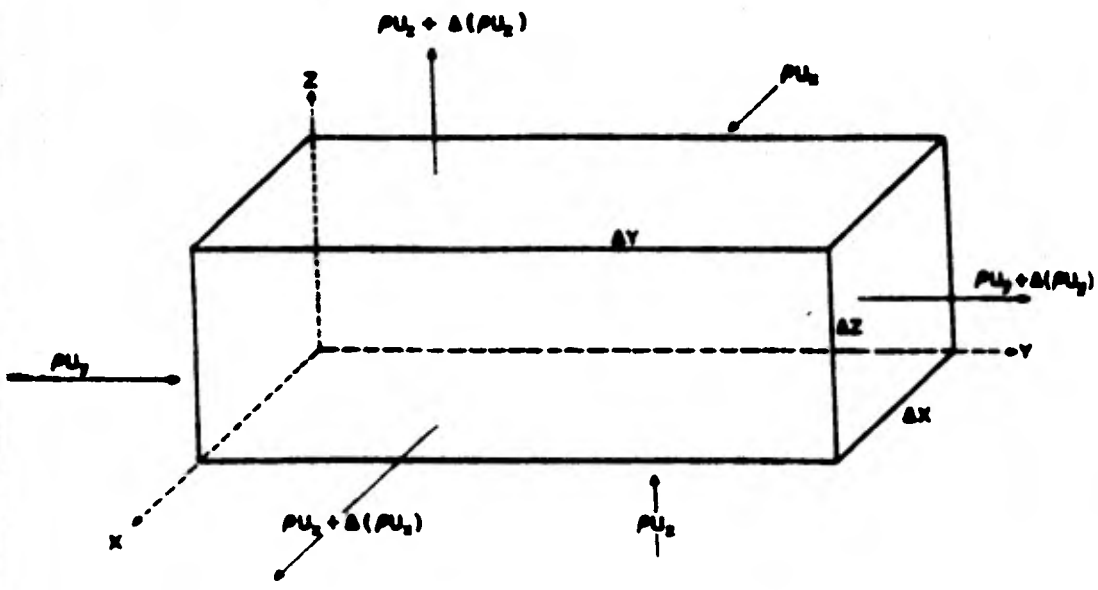


FIG.1 ELEMENTO DE VOLUMEN PARA FLUJO TRIDIMENSIONAL

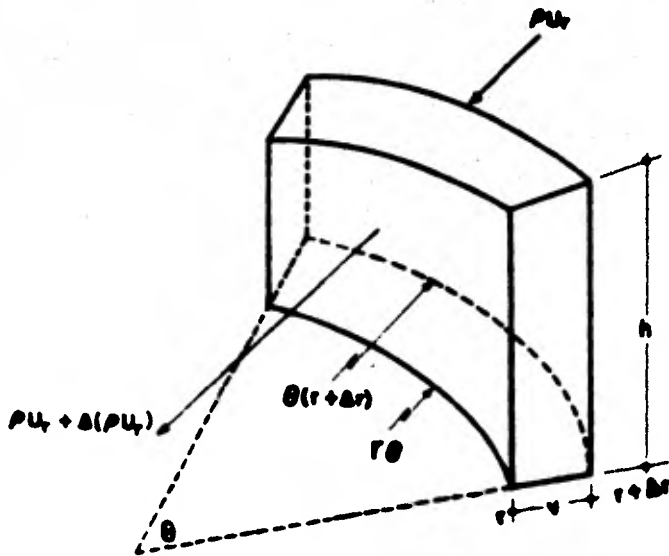


FIG 2 - ELEMENTO DE VOLUMEN
PARA FLUJO RADIAL

$$- \left(\frac{\partial h \Delta \varepsilon (\lambda + \Delta \lambda) (\rho U_\lambda)}{\partial h \Delta \varepsilon \Delta \lambda} - \frac{\Delta \varepsilon \partial h}{\partial h \Delta \varepsilon \Delta \lambda} (\rho U_\lambda + \Delta (\rho U_\lambda)) \right) =$$

$$= \frac{-\partial h \Delta \varepsilon \Delta \rho \left|_{\varepsilon + \Delta \varepsilon}}{\partial h \Delta \varepsilon \Delta \lambda} - \frac{\partial h \Delta \varepsilon \Delta \rho \left|_{\varepsilon}}{\partial h \Delta \varepsilon \Delta \lambda}$$

simplificando se obtiene:

$$- \left(\frac{(\lambda + \Delta \lambda) (\rho U_\lambda)}{\lambda \Delta \lambda} - \frac{\lambda (\rho U_\lambda + \Delta (\rho U_\lambda))}{\lambda \Delta \lambda} \right) = \frac{\partial \theta}{\Delta \varepsilon} \left|_{\varepsilon + \Delta \varepsilon} - \frac{\partial \theta}{\Delta \varepsilon} \left|_{\varepsilon} \right.$$

$$- \frac{1}{\lambda \Delta \lambda} (\lambda \rho U_\lambda + \Delta \lambda \rho U_\lambda - \lambda \rho U_\lambda - \lambda \Delta (\rho U_\lambda)) = \frac{\partial \theta}{\Delta \varepsilon} \left|_{\varepsilon + \Delta \varepsilon} - \frac{\partial \theta}{\Delta \varepsilon} \left|_{\varepsilon} \right.$$

$$\frac{1}{\lambda \Delta \lambda} \left| \rho U_\lambda \Delta \lambda - \lambda \Delta (\rho U_\lambda) \right| = - \frac{\Delta (\partial \theta)}{\Delta \varepsilon} \dots \dots \dots (2.2.12)$$

y como:

$$\frac{1}{\lambda} \left| \rho U_\lambda \frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda} - \frac{\lambda \Delta (\rho U_\lambda)}{\Delta \lambda} \right| = \frac{\partial (\partial \theta)}{\partial \varepsilon} \dots \dots \dots (2.2.13)$$

si:

$$\frac{\Delta (\rho U_\lambda)}{\Delta \lambda} \xrightarrow{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\partial (\rho U_\lambda)}{\partial \lambda}$$

entonces:

$$\frac{1}{\lambda} \left| \rho U_\lambda - \lambda \left(- \frac{\partial (\rho U_\lambda)}{\partial \lambda} \right) \right| = - \frac{\partial (\partial \theta)}{\partial \varepsilon} \dots \dots \dots (2.2.14)$$

es decir:

$$\frac{1}{\lambda} \rho U_\lambda + \lambda \frac{\partial (\rho U_\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial (\partial \theta)}{\partial \varepsilon} \dots \dots \dots (2.2.15)$$

además, se sabe que:

$$\frac{\partial (\lambda \rho U_\lambda)}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial (\rho U_\lambda)}{\partial \lambda} + \rho U_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}$$

además, se sabe que:

$$\frac{\partial(r\phi U_r)}{\partial r} = r \frac{\partial(\phi U_r)}{\partial r} + \phi U_r \frac{\partial r}{\partial r}$$

De tal manera que substituyendo esta última expresión en la ecuación (2.2.15):

$$\frac{1}{r} \left| \frac{\partial}{\partial r} (r\phi U_r) \right| = - \frac{\partial}{\partial z} (\theta \rho) \dots \dots \dots (2.2.16)$$

o bien:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\phi U_r) = - \frac{\partial}{\partial z} (\theta \rho) \dots \dots \dots (2.2.17)$$

donde esta expresión es la ecuación de continuidad para flujo radial.

b) Ley de Darcy u otra ley de flujo.

La ley de Darcy es la más usada para representar el flujo de un fluido a través de un medio poroso.

Esta ley indica que "el gasto volumétrico de flujo en cada área unitaria de sección transversal al flujo, en cualquier punto de un medio poroso uniforme, es proporcional al gradiente del potencial en la dirección del flujo en ese punto".

La expresión matemática correspondiente, en términos del vector velocidad es:

$$\vec{u} = - \frac{k\rho}{\mu} \nabla \phi \dots \dots \dots (2.2.18)$$

el signo menos en la expresión anterior indica que la dirección del flujo es contraria a la dirección en que aumenta el potencial. Sólo es válida para flujo laminar a un valor bajo de número de Reynolds.

Según Hubbert¹⁰

$$\phi = \int \frac{dp}{\rho} + gz \dots \dots \dots (2.2.19)$$

como la densidad del fluido es constante:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} (p - p_0) + gz \\ 0 &= \frac{1}{\rho} p - \frac{1}{\rho} p_0 + gz \dots \dots \dots (2.2.20) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z) \\ g &= g(z) \\ p_0 &= \text{constante} \end{aligned}$$

Calculando el gradiente del potencial, se tiene:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \dots \dots \dots (2.2.21)$$

donde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g$$

por tanto:

$$\nabla \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} j + \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \right| k \dots \dots \dots (2.2.22)$$

sustituyendo (2.2.22) en (2.2.18):

$$\bar{u} = - \frac{k_0}{\mu} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} j + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \right) k \right| \dots \dots \dots (2.2.23)$$

desarrollando:

$$\bar{u} = - \frac{k}{\mu} \frac{x}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} i - \frac{k}{\mu} \frac{y}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} j - \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) k \dots \dots \dots (2.2.24)$$

que es la ecuación de Darcy en coordenadas tridimensionales.

Siguiendo un procedimiento similar y despreciando la gravedad, podemos deducir la ecuación de Darcy para flujo radial partiendo de la ecuación (2.2.18) y sabiendo también que:

$$0 = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + gz = \frac{1}{\rho} (p) - \frac{1}{\rho} p_0 + gz$$

si

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e_\theta \dots \dots \dots (2.2.25)$$

donde:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

por tanto, se puede expresar:

$$\nabla \theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} e_r + 0 \dots \dots \dots (2.2.26)$$

sustituyendo (2.2.26) en la ecuación (2.2.18):

$$\bar{u} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \dots \dots \dots (2.2.27)$$

que también puede escribirse como:

$$\bar{u}_r = - \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \dots \dots \dots (2.2.28)$$

esta es la ecuación de Darcy para flujo radial.

En el caso de altas velocidades, la ley de Darcy ya no es tan válida y se ha encontrado que una corrección cuadrática de velocidad puede ser agregada para modificar la ley de Darcy; entonces la ley de flujo se convierte en:

$$- \frac{k \sigma}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = u + D_1 u^2 \dots \dots \dots (2.2.29)$$

donde D_1 es una constante que es función de la estructura porosa del medio y σ es la dirección del flujo.

Las consideraciones matemáticas para este trabajo están basadas en que el flujo obedece la ley de Darcy.

c) Ecuaciones de Estado.

Una ecuación de estado especifica la variación de la densidad del fluido (ρ) con respecto a la presión (p) y a la temperatura (T); así que, dependiendo del fluido o fluidos presentes, debe escogerse la ecuación de estado apropiada.

Cuando se tiene el flujo de un sólo fluido a condiciones isotérmicas y si la compresibilidad de un fluido se define -

como el cambio relativo de volumen del fluido por unidad de cambio de presión, es decir,

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \dots \dots \dots (2.2.30)$$

que también puede escribirse como:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \dots \dots \dots (2.2.31)$$

ahora, si el fluido es de compresibilidad pequeña y constante, entonces la relación anterior se puede integrar y obtener la siguiente ecuación de estado:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{P - P_0}{P_0} \right)^c \dots \dots \dots (2.2.32)$$

donde ρ_0 es el valor de la densidad del fluido correspondiente a una presión P_0 de referencia. Esta ecuación de estado se aplica a la mayoría de los líquidos.

Cuando se trata de flujo de gas en una sola fase, la ecuación de estado (para un gas ideal) se puede deducir a partir de la ley de los gases ideales:

$$pV = \frac{m}{M} RT \dots \dots \dots (2.2.33)$$

Luego, como:

$$\rho = \frac{m}{V} \dots \dots \dots (2.2.34)$$

de aquí que:

$$\frac{pM}{RT} = \frac{m}{V}$$

y por tanto:

$$p = \frac{M}{RT} \rho \dots \dots \dots (2.2.35)$$

Cuando se trata del flujo de un gas real en una sola fase, debe introducirse el factor de desviación z en la ecuación (2.2.35), así:

$$\rho = \frac{M}{RT} \frac{p}{p_0} \dots \dots \dots (2.2.36)$$

Para obtener la ecuación diferencial de flujo de un fluido a través de un medio poroso homogéneo e isotrópico se deben combinar la ley de Darcy y la ecuación de estado correspondiente con la de continuidad.

Para el caso de un fluido en tres dimensiones y en un sistema cartesiano, substituyendo la ecuación (2.2.24) en la -- (2.2.7) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x \rho_0}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y \rho_0}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z \rho_0}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho p) \dots (2.2.37)$$

Introduciendo la ecuación de estado (2.2.32) en la -- ecuación (2.2.37), considerando que la viscosidad μ es constante y despreciando las fuerzas de gravedad se llega a la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{k_x}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right| + \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{k_y}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \right| + \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{k_z}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right| = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 c \frac{\partial p}{\partial t} \right) \dots (2.2.38)$$

Como ρ_0, μ y k_x son constantes se tiene para el primer término del miembro izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{k_x}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right| &= \frac{k_x}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \left(c \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) \\ &= \frac{k_x}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{k_x}{\mu} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (2.2.39) \end{aligned}$$

Andoamente, para el segundo término del primer --

miembro de la ecuación (2.2.38) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{h}{u} \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \right| = \frac{h}{u} \rho_0 \left| \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right| \dots \dots \dots (2.2.40)$$

y para el tercer término se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{h}{u} \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right| = \frac{h}{u} \rho_0 \left| \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + c \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right| \dots \dots \dots (2.2.41)$$

Ahora, trabajando con el término del segundo miembro de la ecuación (2.2.38).

usando:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\theta p) = \theta \frac{\partial p}{\partial z} + p \frac{\partial \theta}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.42)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left| \theta \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \right| &= \rho_0 \left| \theta \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) c \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| = \\ &= \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \theta c \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned}$$

como:

$$0 = \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left| \theta \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \right| = \rho_0 c \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.43)$$

haciendo:

$$p \frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial p} = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

en la ecuación anterior, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left| \theta \rho_0 \left(\frac{c(p-p_0)}{u} \right) \right| = \rho_0 c \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

$$\rho_0 c \frac{\partial c}{\partial t} = \rho_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$= \rho_0 \left(c + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \frac{\partial c}{\partial t}$$

sabiendo que

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

y como:

$$c_t = c + c_f$$

entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \rho_0 \left(c + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right| = \rho_0 c_t \frac{\partial c}{\partial t} \dots \dots \dots (2.2.44)$$

Sustituyendo las expresiones (2.2.39), (2.2.40), (2.2.41) y (2.2.44) en la ecuación (2.2.38) y sacando como factor a ρ/u , se obtiene:

$$\frac{\rho}{u} \left[k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} c_t + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} c_t + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \right.$$

$$\left. k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} c_t \right] = \rho_0 c_t \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (2.2.45)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.2.45) por u y agrupando los términos que contienen a c_t se llega a la expresión:

$$\left[k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] + c_t \left[k_x \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^2 + k_y \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right|^2 + k_z \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|^2 \right] = \rho_0 u c_t \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (2.2.46)$$

Considerando que la permeabilidad es constante, - es decir que $k_x = k_y = k_z = k$; que c es pequeña, θ es constante y suponiendo que los gradientes de presión involucrados son pequeños, entonces los términos cuadráticos de presión pueden despreciarse. Por tanto, la ecuación (2.2.46) se reduce finalmente

a la siguiente:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\rho v c}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (2.2.47)$$

que es la ecuación de difusividad en coordenadas cartesianas.

Para el caso de flujo radial, se procede en forma similar al caso anterior, sólo que ahora se debe sustituir la ley de Darcy en su forma radial, ecuación (2.2.28), en la ecuación (2.2.17); y de esta manera se obtiene la siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \rho k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho D) \dots \dots \dots (2.2.48)$$

Esta ecuación representa la combinación de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy cuando el flujo es radial. La forma final que toma esta ecuación depende del tipo de fluido que fluye, así como de la ecuación de estado en particular.

Ahora bien, substituyendo (2.2.32) en la ecuación (2.2.48):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \rho_0 c (p-p_0)}{\mu} k_r \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 c (p-p_0)) \dots \dots (2.2.49)$$

Desarrollando el primer miembro de la ecuación (2.2.49)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \rho_0 c (p-p_0)}{\mu} k_r \frac{\partial p}{\partial r} \right] &= \frac{\rho_0 c}{r \mu} \frac{\partial}{\partial r} \left[r c (p-p_0) \left(k_r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{\rho_0 c}{r \mu} \left(r c (p-p_0) \left[k_r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial k_r}{\partial r} \right] \right. \\ &+ \left. \left[k_r \frac{\partial p}{\partial r} \left(r c \frac{\partial p}{\partial r} + c (p-p_0) \frac{\partial r}{\partial r} \right) \right] \right) \\ &= \frac{\rho_0 c}{r \mu} \left(r c (p-p_0) \left[k_r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial k_r}{\partial r} \right] + r k_r c \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + k_r c (p-p_0) \frac{\partial p}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\frac{\rho_0 Q^{c(p-p_0)}}{\lambda u} \left(k_\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial k_\lambda}{\partial r} + ck_\lambda \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{2} k_\lambda \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 Q^{c(p-p_0)}) \dots \dots \dots (2.2.50)$$

y como ya se demostró en la expresión (2.2.44) que:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 Q^{c(p-p_0)}) = \rho_0 c \frac{\partial p}{\partial z}$$

sustituyendo esta expresión en la (2.2.50)

$$\frac{\rho_0 Q^{c(p-p_0)}}{u} \left(k_\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial k_\lambda}{\partial r} + ck_\lambda \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{2} k_\lambda \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \rho_0 c \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.51)$$

además como:

$$\rho = \rho_0 Q^{c(p-p_0)}$$

entonces:

$$\frac{\rho}{u} \left(k_\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial k_\lambda}{\partial r} + ck_\lambda \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{2} k_\lambda \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \rho_0 c \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.52)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por u/ρ :

$$\left| k_\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial k_\lambda}{\partial r} + ck_\lambda \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{2} k_\lambda \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \rho_0 c \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.53)$$

Considerando que la permeabilidad es constante, - es decir que $k_\lambda = k$; que la compresibilidad es pequeña y constan

te, la porosidad es también constante y que el término cuadrático es tan pequeño que puede despreciarse, entonces la ecuación (2.2.53) queda expresada finalmente como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_p}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (2.2.54)$$

Esta ecuación diferencial es la ecuación de difusividad que define al flujo radial de un líquido en una sola fase de compresibilidad pequeña y constante.

La ecuación (2.2.54) es la más frecuentemente usada en la Ingeniería Petrolera; por lo que es de suma importancia no olvidar las consideraciones tomadas para su obtención, - dado que las soluciones de esta ecuación diferencial constituyen la base de las técnicas de análisis de presión^{1, 11}

Únicamente con el propósito ilustrativo y de tener una extensión del manejo de estas ecuaciones se presenta la deducción de las ecuaciones de difusividad para los casos de flujos de gas ideal y real.

Para el flujo lineal en coordenadas cartesianas y considerando un fluido ideal bajo condiciones isotérmicas, se substituye (2.2.35) en la ecuación (2.2.37), obteniéndose:

$$\frac{k}{\mu} \left[\frac{M}{RT} p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{M}{RT} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{M}{RT} p \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{M}{RT} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{M}{RT} p \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{M}{RT} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] = \phi \frac{M}{RT} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{M}{RT} p \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots \dots (2.2.55)$$

Luego se tiene:

$$\frac{kM}{\mu RT} \left(p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + p \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right| \right) = \frac{M}{RT} \left| \phi \frac{\partial p}{\partial t} + p \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \dots \dots \dots (2.2.56)$$

sabiendo que:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial w^2} = 2p \frac{\partial^2 p}{\partial w^2}$$

Entonces multiplicando por $2\mu RT/kM$ ambos miembros de la ecuación (2.2.56) y aplicando el criterio expuesto se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \right) = \frac{2\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\mu}{k} p \frac{\partial \theta}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.57)$$

Además, si se considera que los gradientes de presión son tan pequeños que se pueden despreciar, entonces:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} = \frac{2\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.58)$$

Esta ecuación diferencial es la ecuación de difusividad para el flujo tridimensional de un gas ideal en una sola fase, fluyendo a condiciones isotérmicas.

Considerando ahora el flujo laminar de un gas real; - que la gravedad es despreciable y suponiendo que las propiedades de la roca son constantes, entonces la ecuación (2.2.37) se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\mu k} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\mu k} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mu k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\theta}{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\theta} \right) \dots \dots \dots (2.2.59)$$

Esta ecuación diferencial es la de difusividad para el flujo tridimensional de un gas real en una sola fase, fluyendo a temperatura constante y suponiendo también que las propiedades de la roca son constantes.

Ahora, para el flujo radial de un gas ideal sustituyen do la ecuación (2.2.35) en la ecuación (2.2.48) se llega a:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^2}{\partial r} + \frac{2\phi \mu}{k} \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.60)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^2}{\partial r} + \frac{\phi \mu}{k p} \frac{\partial p^2}{\partial z} \dots \dots \dots (2.2.61)$$

Estas ecuaciones diferenciales no lineales representan el modelo matemático para el flujo radial de un gas ideal en una sola fase, fluyendo isotérmicamente.

Y para el flujo radial de un gas real, la ecuación (2.2.48) se convierte en:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\phi}{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{g} \right) \dots \dots \dots (2.2.62)$$

Esta ecuación diferencial representa el modelo matemático para el flujo radial de un gas real en una sola fase fluyendo a temperatura constante y suponiendo también que las propiedades de la roca son constantes.

Simplificando, la ecuación (2.2.62) se puede expresar también como:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^2}{\partial r} + \frac{\phi}{k} \frac{\mu g}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{g} \right) \dots \dots \dots (2.2.63)$$

Sin embargo, Russell²³ ha demostrado que el uso de esta ecuación en lugar de la ecuación (2.2.62) que es más rigurosa, puede llevarnos a serios errores en las predicciones del comportamiento de la presión en pozos de gas para yacimientos de baja permeabilidad.

2.3 Soluciones de la ecuación de difusividad²⁴

En la sección anterior se han discutido las leyes físicas que gobiernan el flujo de un fluido a través de un medio

poroso y la combinación de estas leyes para dar lugar a expresiones matemáticas que describen los regímenes de flujo que pueden ocurrir.

Las ecuaciones (2.2.47) y (2.2.54) son ecuaciones diferenciales lineales y pueden resolverse analíticamente para diferentes condiciones de frontera.

La aplicación de estas soluciones en la Ingeniería de yacimientos ha demostrado su gran valla a través de los años.

Debido a su utilidad y relativa sencillez, estas ecuaciones se han convertido en la base fundamental de las técnicas de análisis de las pruebas de presión.

Para el desarrollo de las teorías de análisis es necesario obtener tres soluciones básicas de la ecuación (2.2.54) de difusividad.

Las soluciones de la ecuación de difusividad para flujo radial se refieren a los siguientes casos:

- a) Solución de línea fuente para un yacimiento infinito.

Considerando un pozo situado en el centro de un medio poroso de extensión radial infinita, produciendo a un gasto --- constante y que el espesor de la formación es uniforme y se encuentra completamente abierta al flujo; de acuerdo a esto, se pueden tener las siguientes condiciones:

- a) $p(r, 0) = p_i$ a $t = 0$ para toda r .
- b) $(r \frac{\partial p}{\partial r})_{r_w} = \frac{qB}{2\pi kh}$ para $t > 0$
- c) $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i$ para cualquier tiempo.

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (2.2.34), se considera que el yacimiento produce a través de una línea situada en el centro del pozo ($r_w \rightarrow 0$); es decir que se debe reemplazar la condición b) por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r \frac{\partial p}{\partial r}) = \frac{qU}{2\pi kh}, \text{ para } z > 0$$

Esta condición de frontera establece la "solución de línea fuente" aproximada a las condiciones originales⁽¹³⁾. De acuerdo al desarrollo indicado en el apéndice A, se obtiene:

$$p(r, z) = p_L - \frac{qU}{2\pi kh} \left(-E_i \left| - \frac{\partial u_c r^2}{\partial r z} \right| \right) \dots \dots \dots (2.3.1)$$

esta ecuación también se puede obtener mediante argumentos físicos y matemáticos usando la solución del punto fuente instantáneo, ver Collins¹⁰

La ecuación (2.3.1) es la "solución de línea fuente" de la ecuación diferencial, que representa el flujo de un sólo fluido a través de un medio poroso homogéneo, isótropo y de extensión infinita.

De aquí puede determinarse el valor de la presión en función del radio y del tiempo.

Si en la ecuación (2.3.1), la presión que se está registrando o se desea conocer es la presión del fondo del pozo, entonces, $r = r_w$, tomando dicha ecuación la forma siguiente:

$$p(r_w, z) = p_L - \frac{qU}{2\pi kh} \left(-E_i \left| - \frac{\partial u_c r_w^2}{\partial r z} \right| \right)$$

entonces:

$$p_{wf} = p_L - \frac{qU}{2\pi kh} \left(-E_i \left| - \frac{\partial u_c r_w^2}{\partial r z} \right| \right) \dots \dots \dots (2.3.2)$$

Los valores de $-E_L \left(-\frac{\partial u_c r_w^2}{\partial r^2} \right)$ se obtienen de la Tabla 1.

Sin embargo, tomando en cuenta que:

$$-E_L(-y) = -\ln(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) - \ln(y).$$

es posible obtener una aproximación logarítmica de la ecuación (2.3.2) y su desarrollo se presenta en el apéndice A. Esta ecuación es la siguiente:

$$pw_f = p_i - \frac{qu}{2\pi kh} \left[\ln\left(\frac{kr}{\partial u_c r_w^2}\right) + 0.80907 \right] \dots (2.3.3)$$

la cual solo puede usarse para valores de¹¹:

$$\frac{kr}{\partial u_c r_w^2} > 100 \dots (2.3.4)$$

Partiendo de la ecuación (2.3.1) se pueden definir las siguientes variables dimensionales¹¹:

Calda de presión adimensional:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2\pi kh}{qu} |p_i - p(r, t)| \dots (2.3.5)$$

Tiempo adimensional:

$$t_D = \frac{kr^2}{\partial u_c r_w^2} \dots (2.3.6)$$

Distancia radial adimensional:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \dots (2.3.7)$$

Tiempo adimensional basado en el área de drenaje total:

$$t_{DA} = \frac{kr^2}{\partial u_c A} = t_D \left(\frac{r_w^2}{A}\right) = t_D \left(\frac{r_w^2}{\pi r_e^2}\right) \dots (2.3.8)$$

Es frecuente usar el cociente t_D/r_D^2 para indicar el tiempo adimensional basado en cualquier radio r ; en otras ocasiones se -

emplea la expresión τ_D que corresponde a τ_D/r_D^2 para $r=r_e$ y en otras mds. se usa τ_{D0} para indicar τ_e/r_w .

Empleando parámetros adimensionales la "solución de línea fuente" se puede expresar de la siguiente manera:

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{1}{4\tau_D}\right) \dots \dots \dots (2.3.9)$$

o en su aproximación logarítmica:

$$p_D = \frac{1}{2} \left| \ln\left(\tau_D\right) + 0.80907 \right| \dots \dots \dots (2.3.10)$$

donde esta última sólo es útil para valores de

$$\tau_D > 100$$

Con el fin de poder emplear gráficas y además, poder incluir radiales macres al de un pozo, la ecuación (2.3.3) toma las siguientes formas:

$$p_D(r_D, \tau_D) = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{r_D^2}{4\tau_D}\right) \dots \dots \dots (2.3.11)$$

Esta solución se representa en la gráfica de la Fig. 3 y es válida para los siguientes casos (Fig. 4):

1. Para todo valor de r_D si $\frac{\tau_D}{r_D^2} \geq 25$
2. Para todo valor de $\frac{\tau_D}{r_D^2}$ si $r_D \geq 20$
3. Si $\frac{\tau_D}{r_D^2} < 25$, entonces la solución de línea fuente no es válida.

La aproximación logarítmica es:

$$p_D(r_D, \tau_D) = \frac{1}{2} \left| \ln\left(\frac{\tau_D}{r_D^2}\right) + 0.80907 \right| \dots \dots \dots (2.3.12)$$

sólo para valores de:

$$\frac{\tau_D}{r_D^2} \geq 100$$

TABLA 1.- LA INTEGRAL EXPONENCIAL, $-E_1(-x)$ VS x .

x	$-E_1(-x)$
0.00	0.000000
0.01	0.009950
0.02	0.019700
0.03	0.029250
0.04	0.038600
0.05	0.047750
0.06	0.056700
0.07	0.065450
0.08	0.073900
0.09	0.082150
0.10	0.090200
0.11	0.098050
0.12	0.105700
0.13	0.113150
0.14	0.120400
0.15	0.127450
0.16	0.134300
0.17	0.140950
0.18	0.147400
0.19	0.153650
0.20	0.159700
0.21	0.165550
0.22	0.171200
0.23	0.176650
0.24	0.181900
0.25	0.186950
0.26	0.191800
0.27	0.196450
0.28	0.200900
0.29	0.205150
0.30	0.209200
0.31	0.213050
0.32	0.216700
0.33	0.220150
0.34	0.223400
0.35	0.226450
0.36	0.229300
0.37	0.231950
0.38	0.234400
0.39	0.236750
0.40	0.238900
0.41	0.240850
0.42	0.242600
0.43	0.244150
0.44	0.245500
0.45	0.246650
0.46	0.247600
0.47	0.248350
0.48	0.248900
0.49	0.249250
0.50	0.249400

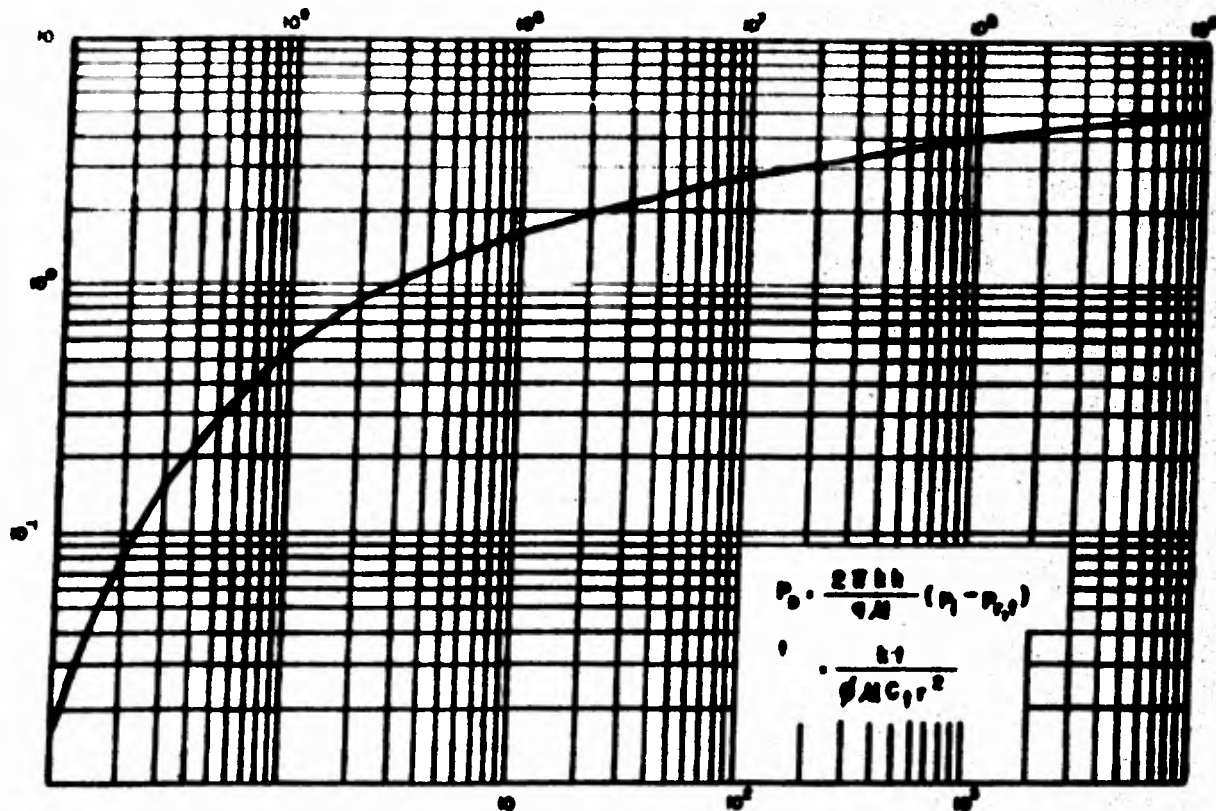


Fig. 3 PRESION ADMISIONAL PARA UN SOLO POCO EN UN YACIMIENTO INFINITO SOLUCION DE LINEA FUENTE

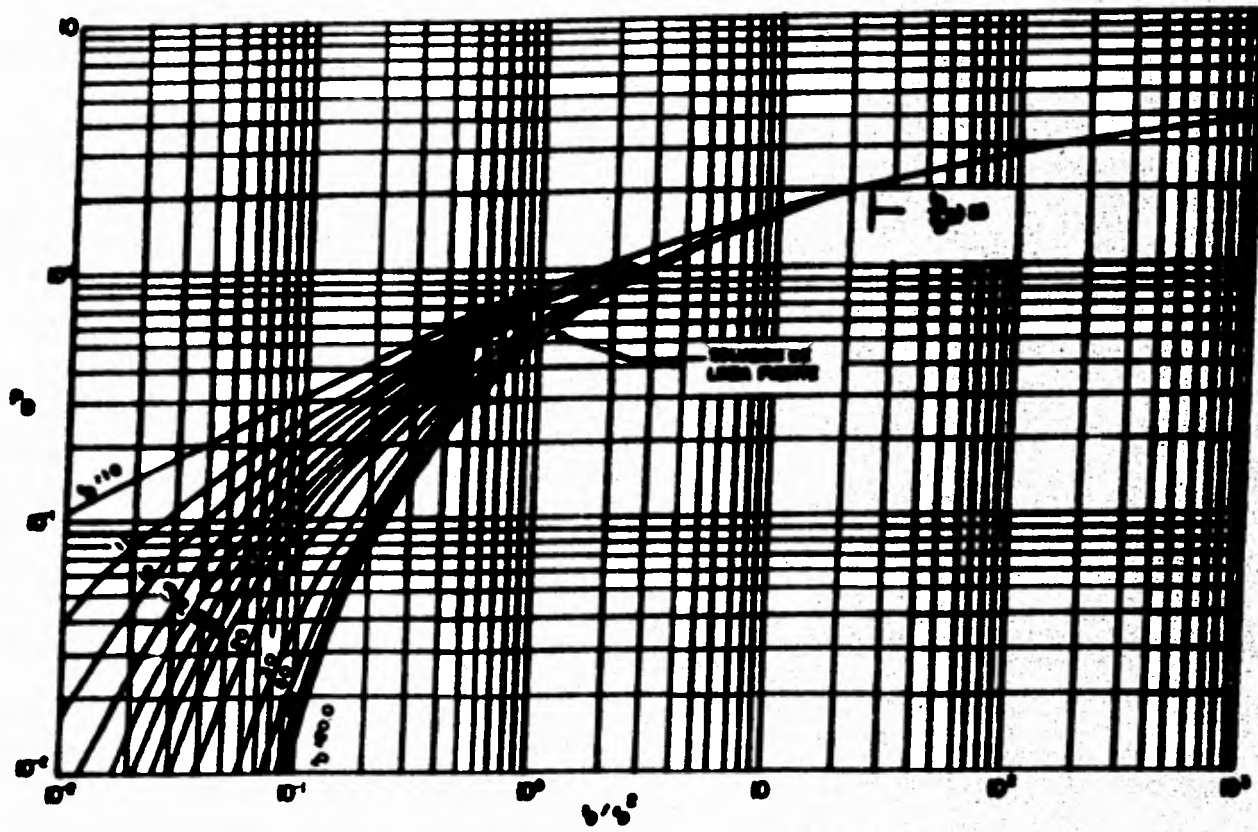


Fig. 4 RANGO DE VALORES DE LA SOLUCION DE LINEA FUENTE

b) Solución de la ecuación de difusividad para un yacimiento limitado.

Sea un pozo fluyendo a un gasto constante que se encuentra situado en el centro de un yacimiento circular sin flujo en la frontera exterior. En este caso, la solución de la ecuación (2.2.54) se puede obtener aplicando las siguientes condiciones -- iniciales y de frontera:

a) $p(r, 0) = p_i$ cuando $t=0$ para toda r

b) $(r \frac{\partial p}{\partial r})_{r=r_w} = \frac{q_w}{2\pi kh}$, para $t > 0$

c) $(\frac{\partial p}{\partial r})_{r=r_e} = 0$, para todo tiempo.

A continuación se presenta un resumen de la solución propuesta por Van Everdingen y Hurst¹⁰ empleando la transformada de Laplace (apéndice B). Expresando en términos adimensionales la ecuación (2.2.54) y las condiciones anteriores, se encuentra que:

$$P_D = \frac{2}{r_{eD}^2 - 1} \left| \frac{r_{D^2}}{4} + t_D \right| - \frac{r_{eD}^2}{r_{eD}^2 - 1} \ln r_{D^2} - \frac{3r_{eD}^2 - 4r_{eD}^2 \ln r_{eD} - 2r_{eD}^2 - 1}{4(r_{eD}^2 - 1)^2} \dots \dots \dots (2.3.13)$$

válida para largos periodos de tiempo, t_D .

Para tiempos cortos se deberá aplicar el "teorema del residuo" de Cauchy y así obtener:

$$p(r, t) = p_i - \frac{q_w}{2\pi kh} \left(\frac{2}{r_{eD}^2 - 1} \left| \frac{r_{D^2}}{4} + t_D \right| - \frac{r_{eD}^2 \ln r_{D^2}}{r_{eD}^2 - 1} - \frac{(3r_{eD}^2 - 4r_{eD}^2 \ln r_{eD} - 2r_{eD}^2 - 1)}{4(r_{eD}^2 - 1)^2} \right)$$

$$p_w = p_i - \frac{qU}{2\pi kh} \left(\frac{2\ell_D}{r_{eD}} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 \ell_D} J_1^2(\alpha_n r_{eD})}{\alpha_n |J_1^2(\alpha_n r_{eD}) - J_1^2(\alpha_n)|} \right) \quad (2.3.14)$$

La ecuación (2.3.14) es parecida a la (2.3.13), con la diferencia del último término contenido en la ecuación (2.3.14); esto se debe a que dicho término desaparece cuando se trata de largos períodos de tiempo. Este último término se conoce como la porción de funciones Bessel.

Para calcular la presión de fondo fluyendo, para el caso en que $r_e \gg r_w$, entonces la ecuación (2.3.14) se puede expresar como:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qU}{2\pi kh} \left(\frac{2\ell_D}{r_{eD}} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 \ell_D} J_1^2(\alpha_n r_{eD})}{\alpha_n |J_1^2(\alpha_n r_{eD}) - J_1^2(\alpha_n)|} \right) \quad (2.3.15)$$

Los valores de α_n en la ecuación (2.3.15) crecen monótonicamente cuando n aumenta: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots$; entonces para un valor de ℓ_D dado el exponencial decrecerá monótonicamente:

$$e^{-\alpha_1^2 \ell_D} > e^{-\alpha_2^2 \ell_D} > \dots$$

Por tanto, al crecer n , los términos de la porción de la función Bessel disminuyen. Entonces, cuando ℓ_D se hace más grande, dichos términos se empequeñecen progresivamente, de tal forma que para un valor de ℓ_D suficientemente grande, todos los términos de la sumatoria se hacen tan pequeños que pueden despreciarse, entonces: la ecuación (2.3.15) se puede escribir:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qU}{2\pi kh} \left[\frac{2\ell_D}{r_{eD}} + \ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} \right] \dots \quad (2.3.16)$$

c) Solución de la Ecuación de difusividad para un yacimiento con Presión Constante en la frontera externa.

Para encontrar esta solución se requiere tomar en cuenta

En las condiciones siguientes:

a) $p(r, 0) = p_i$, a $t = 0$ para toda r .

b) $(r \frac{\partial p}{\partial r})_{r_w} = \frac{qU}{2\pi kh}$, para $t > 0$

c) $p(r_e, t) = p_i$, para todo t .

Como en el caso anterior, empleando nuevamente la transformada de Laplace (apéndice c) se obtiene:

$$p_D = \ln\left(\frac{r_{eD}}{r_D}\right) + \frac{qU}{2\pi kh} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-B_n^2 t_D} J_0^2(B_n r_{eD}) \left| J_0(r_D B_n) Y_1(B_n) - Y_0(B_n r_D) J_1(B_n) \right|}{B_n \left| J_1(B_n) - J_0(B_n r_{eD}) \right|} \dots (2.3.17)$$

donde B_n son las raíces de:

$$J_1(B_n) Y_0(B_n r_{eD}) - Y_1(B_n) J_0(B_n r_{eD}) = 0 \dots (2.3.18)$$

Evaluando la ecuación (2.3.17) en $r_D = 1$, se obtiene el comportamiento de la presión en el pozo:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qU}{2\pi kh} \left| \ln(r_{eD}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-B_n^2 t_D} J_0^2(B_n r_{eD})}{B_n \left| J_1(B_n) - J_0(B_n r_{eD}) \right|} \right| \dots (2.3.19)$$

Cuando t_D aumenta, esta ecuación se reduce a:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qU}{2\pi kh} \ln(r_{eD}) \dots (2.3.20)$$

2.4 Periodos de flujo: Transitorio, Transitorio tardío Semi-Estacionario y Estacionario

Considerando un modelo hipotético en el cual las suposiciones respecto a la formación y al fluido, hechas en la derivación de las soluciones precedentes son adecuadas, entonces el comportamiento de la presión de un pozo que produce a un gasto constante es como se muestra en la Fig. 5.

Durante el tiempo inicial de producción el comportamiento de la presión puede ser descrito con buena aproximación mediante la ecuación (2.3.2). El comportamiento de la presión durante este periodo es esencialmente el mismo que se presenta en un yacimiento infinito el cual se desarrolla durante un periodo de flujo denominado transitorio.

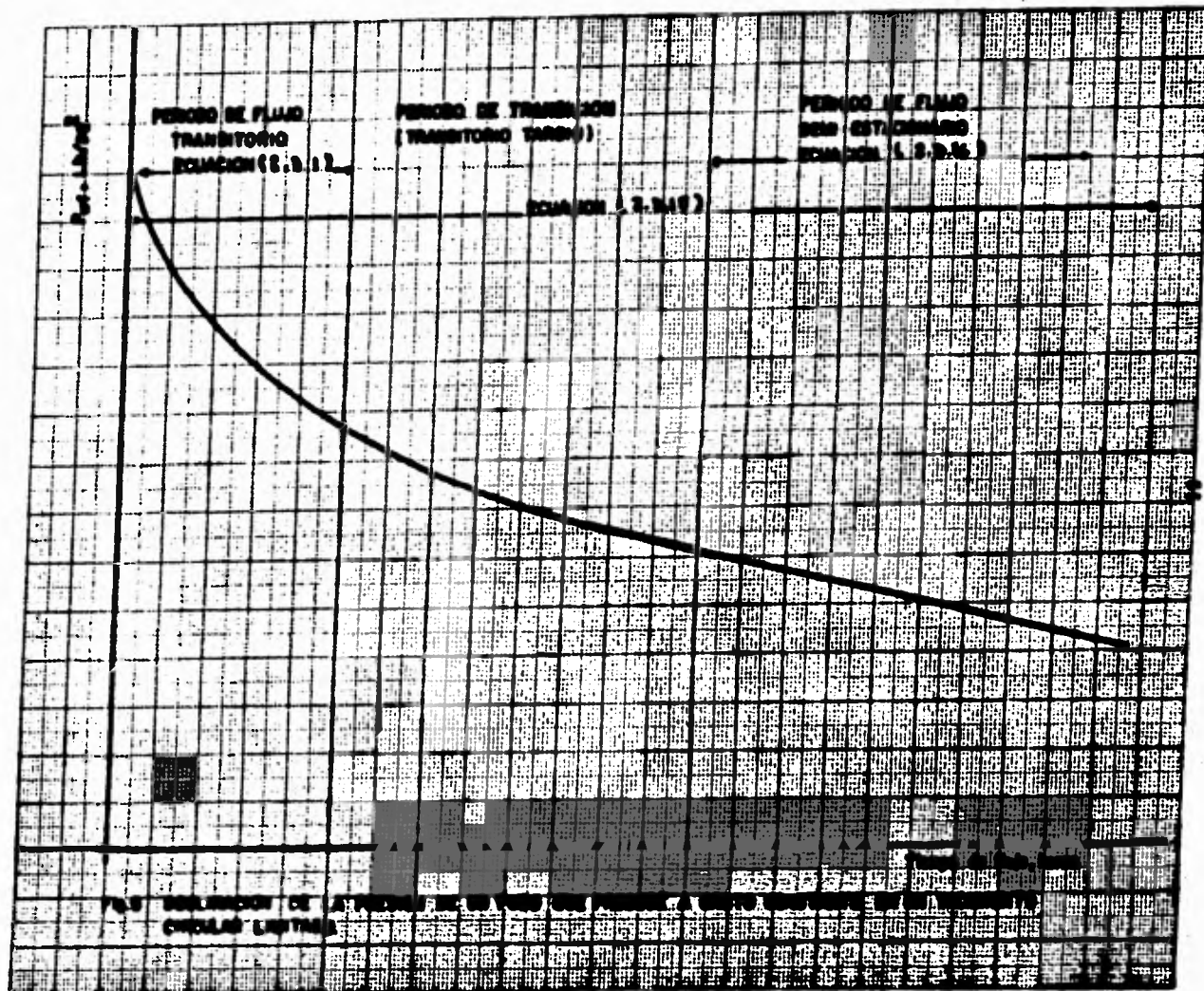
Al final del periodo transitorio empiezan a sentirse los efectos de frontera, lo cual da origen a un periodo de transición conocido como transitorio tardío.

Si no hay flujo a través de la frontera externa y los efectos de frontera se han sentido por completo, la presión declina a través del yacimiento convirtiéndose en una función lineal del tiempo iniciándose con esto un periodo de flujo llamado semi-estacionario.

De la ecuación (2.3.15) se encuentra que la velocidad con que declina la presión en el pozo durante el periodo de flujo semi-estacionario se puede expresar como:

$$\frac{\partial p_w}{\partial t} = - \frac{q}{0.24 k h r_w^2} \dots \dots \dots (2.4.1)$$

de donde se observa que la velocidad con que declina la presión es inversamente proporcional al volumen de fluido que ocupa los espacios porosos de la roca. Este hecho constituye la base de las llamadas Pruebas de Límite de Yacimiento para determinar el



volumen de drenaje de un pozo.

También se observa que la diferencia entre la presión media del yacimiento, la presión de fondo fluyendo en el pozo es constante durante el periodo de flujo semi-estacionario.

A partir de la ecuación (2.4.1) se tiene que la presión media del yacimiento es:

$$\bar{p} = p_i - \frac{qt}{\pi \theta c_e h r_e^2} \dots \dots \dots (2.4.2)$$

Restando la ecuación (2.3.16) de la (2.4.2) se tiene:

$$\bar{p} - p_{wf} = p_i - p_i - \frac{qt}{\pi \theta c_e h r_e^2} + \frac{qu}{2\pi kh} \left[\frac{2x_D}{r_{en}} + \ln(r_{en}) - \frac{3}{4} \right]$$

sustituyendo los parámetros adimensionales por sus correspondientes valores:

$$\bar{p} - p_{wf} = - \frac{qt}{\pi \theta c_e h r_e^2} + \frac{qu}{2\pi kh} \left[\frac{2kx_D / \theta u c_e r_w^2}{r_e^2 / r_w^2} + \ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} \right]$$

y factorizando:

$$\bar{p} - p_{wf} = \frac{qt}{\pi \theta c_e h r_e^2} (1-1) + \frac{qu}{2\pi kh} (\ln r_{eD} - \frac{3}{4})$$

se demuestra lo antes dicho:

$$\bar{p} - p_{wf} = \frac{qu}{2\pi kh} (\ln r_{eD} - \frac{3}{4}) \dots \dots \dots (2.4.3)$$

Por otro lado, dado que el Índice de productividad del pozo se define como:

$$J = \frac{q}{\bar{p} - p_{wf}} \dots \dots \dots (2.4.4)$$

entonces, de acuerdo a las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4) se tiene:

$$J = \frac{2\pi kh}{u (\ln r_{eD} - \frac{3}{4})} \dots \dots \dots (2.4.5)$$

Por tanto, durante el periodo de flujo semi-estacionario, el índice de productividad es constante.

Las condiciones de flujo prevalecientes en un yacimiento natural, generalmente excluyen la ocurrencia del periodo de flujo estacionario. En el flujo estacionario a un gasto constante la presión es independiente del tiempo. Entonces considerando un tiempo grande de producción, la ecuación (2.3.19) se reduce de la manera siguiente:

$$P_{wf} = P_i - \frac{qB}{2\pi kh} \ln(r_{ep}) \dots \dots \dots (2.4.6)$$

esta ecuación representa el comportamiento de la presión en el periodo de flujo estacionario.

En algunos yacimientos, el cambio de la presión con el tiempo es tan pequeño que prácticamente es indetectable; en tales casos la denominación de flujo estacionario se justifica; sin embargo estrictamente hablando, el flujo estacionario puede ocurrir solamente cuando no hay cambio de masa en ningún punto del sistema; por ejemplo cuando el yacimiento tiene una gran entrada de agua por la existencia de un acuífero o cuando se tienen gastos balanceados de producción e inyección.

2.5 El principio de superposición¹⁶⁻¹⁷

Debido a que la ecuación diferencial y las condiciones de frontera que describen el flujo de fluidos a través de un medio poroso, son lineales, es posible emplear el principio de superposición para resolver problemas de yacimiento con varios pozos y distintos gastos de producción.

Este principio puede ser considerado como una técnica¹⁸ para conocer el comportamiento de la presión a cualquier punto y tiempo como la suma de las historias de cada uno de los efectos -

que pueden estar afectando la solución en ese punto; así como para obtener solución a problemas realmente complicados como el caso en que se tienen varios pozos operando a gastos variables en un mismo yacimiento.

Cuando las condiciones de frontera son independientes del tiempo (gasto constante), el principio de superposición muestra que la presencia de una condición no afecta la respuesta debida a otra u otras condiciones de frontera, siendo el efecto total la suma de todos los efectos individuales. Por otro lado, - si las condiciones de frontera dependen del tiempo (gasto variable), entonces puede emplearse el teorema de Duhamel¹⁷, que es - una extensión del principio.

a) Superposición en el espacio¹⁷

Si en un mismo yacimiento se tiene más de un pozo en producción, la presión en cualquier punto de ese yacimiento es - afectada por cada uno de los pozos productores.

Sea un yacimiento con dos pozos, 1 y 2 que producen con gastos q_1 y q_2 , respectivamente, entonces la presión en un punto P, en un yacimiento se obtiene superponiendo las caldas de presión debidas a los efectos de los dos pozos. Para obtener el comportamiento de presión en cualquier punto del yacimiento se requiere conocer la distancia r de ese punto a cada pozo. Esto puede indicarse como:

$$\begin{aligned} (\Delta p)_P &= \Delta p_1 \quad (\text{evaluada en P debido al gasto } q_1) \\ &+ \Delta p_2 \quad (\text{evaluada en P debido al gasto } q_2) \end{aligned}$$

Empleando las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.9), lo anterior puede expresarse como:

$$(\Delta p)_P = \frac{q_1 \mu}{\sqrt{\pi k h}} E_i \left(\frac{r^2 D_1}{4t} \right) + \frac{q_2 \mu}{\sqrt{\pi k h}} E_i \left(\frac{r^2 D_2}{4t} \right) \dots \dots \dots (2.5.1)$$

Cuando se tienen n pozos productores en un yacimiento

y si estos iniciaron su producción simultáneamente, entonces la caída de presión en un punto cualquiera P, de ese yacimiento es:

$$(\Delta p)_P = \frac{\mu}{4\pi kh} \sum_{i=1}^n q_i E_i \left(\frac{\partial u_c r_i^2}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (2.5.2)$$

este concepto es básico en las pruebas de interferencia.

Si dos pozos están produciendo al mismo gasto en un yacimiento infinito, existe entre ellos una frontera equidistante - donde no hay flujos; por tanto, cuando se tiene un pozo productor cercano a una frontera sin flujo, que es el caso de un yacimiento semi-infinito, puede tratarse por superposición de un pozo productor de igual gasto (pozo imagen), colocado al otro lado de la frontera impermeable y a una distancia igual a la del pozo real a la misma frontera.¹⁷

La caída de presión en el punto P a un tiempo t, es la suma de la caída de presión ocasionada por el pozo real más la -- del pozo imagen tal como se expresa en la ecuación (2.5.1)

Ahora si el pozo está en un yacimiento semi-infinito que tiene una frontera a presión constante, entonces la superposición debe realizarse con el pozo real produciendo y un pozo inyector - imagen. Esto se puede expresar como:

$$(\Delta p)_P = \frac{q\mu}{4\pi kh} E_i \left(\frac{\partial u_c r^2}{\partial t} \right) - \frac{q\mu}{4\pi kh} E_i \left(\frac{\partial u_c r_i'^2}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (2.5.3)$$

b) Superposición en el tiempo.

En vista de lo difícil que es mantener por mucho tiempo el gasto constante en un pozo, se ha recurrido al principio de superposición para generar soluciones de comportamiento de presión para gastos variables. Esta aplicación del principio se basa en una superposición en el tiempo de series de gastos constantes.

Para poder explicar esta aplicación del principio de superposición, conviene considerar el caso sencillo de un pozo que

fluye a dos gastos distintos durante su vida productiva tal como se muestra en la Fig. 6 en la cual se ilustra que la caída de presión en el pozo durante el primer intervalo de tiempo se debe al gasto q_1 . En el tiempo t_1 el gasto se incrementa en una cantidad $(q_2 - q_1)$ lo que origina una caída de presión adicional; por tanto, el comportamiento de la presión al tiempo t de flujo se obtiene agregando a la caída de presión debida al gasto q_1 la adicional causada por $(q_2 - q_1)$; de tal manera que matemáticamente puede escribirse:

$$\Delta p(z) = \frac{q_1 \mu}{2\pi kh} p_D(z) + \frac{(q_2 - q_1) \mu}{2\pi kh} p_D(z - t_1) \dots \quad (2.5.4)$$

donde p_D es el parámetro adimensional de caída de presión en el pozo para la condición de frontera pertinente.

El principio siempre es el mismo para cada cambio de gasto: siempre superponiendo (sumando) la caída de presión adicional causada por el último cambio de gasto, a la anterior. Por tanto, para una historia de n gastos, la caída de presión hasta el último período de tiempo está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta p(z) = & \frac{q_1 \mu}{2\pi kh} p_D(z) + \frac{(q_2 - q_1) \mu}{2\pi kh} p_D(z - t_1) + \frac{(q_3 - q_2) \mu}{2\pi kh} p_D(z - t_2) + \\ & \dots + \frac{(q_n - q_{n-1}) \mu}{2\pi kh} p_D(z - t_{n-1}) \dots \quad (2.5.5) \end{aligned}$$

o en forma simplificada:

$$\Delta p(z) = \frac{q_1 \mu}{2\pi kh} \left[p_D(z) + \sum_{i=2}^n \frac{q_i - q_{i-1}}{q_1} p_D(z - t_{i-1}) \right] \dots \quad (2.5.6)$$

Esta ecuación también es válida si uno o más gastos de producción es cero (pozo cerrado).

La combinación de los dos conceptos anteriores, da como resultado la superposición en el tiempo y el espacio¹⁷ cuya aplicación es la más completa del principio de superposición dado

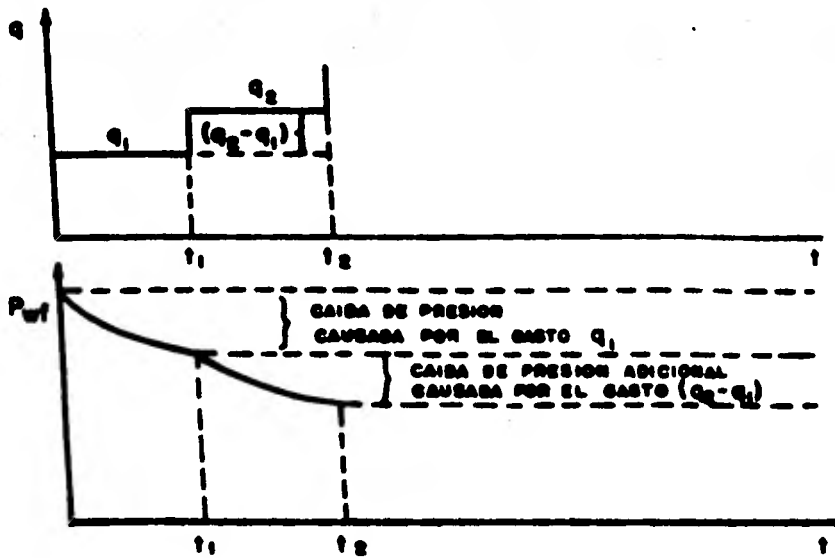


FIG .6- HISTORIAS DE PRODUCCION Y PRESION DE UN POZO QUE PRODUCE A DOS GASTOS DISTINTOS.

que ahora es posible estimar la caída de presión en cualquier punto y a cualquier tiempo para uno o más pozos operando a gastos variables".

2.6 Efectos de daño y almacenamiento.

a) Factor de daño.

La permeabilidad de la formación en las vecindades del agujero puede ser dañada durante los procesos de perforación, o mejorada por las operaciones de estimulación como son fracturamientos o acidificaciones.

Entre los factores que pueden provocar una reducción en la permeabilidad se encuentran: la dispersión de arcillas, la invasión de los fluidos de perforación, presencia de enjarre de lodo, alta saturación de gas alrededor del pozo, penetración parcial, etc.

La zona de permeabilidad reducida se ha denominado "dañada" y el efecto producido se conoce como efecto de daño.

Inicialmente la caída de presión en un pozo que produce a gasto constante, se calculaba simplemente mediante:

$$\Delta p = \frac{q\mu B}{2\pi kh} \left[\ln \left(\frac{kr}{r_w^2} \right) + 0.80907 \right] \dots \quad (2.6.1)$$

Sin embargo, los análisis de datos de presión indicaban una caída de presión mayor a la calculada con la ecuación (2.6.1). Esta caída de presión adicional fue explicada por Van Everdingen¹⁰ quien introdujo el concepto de factor de daño (s) como una cantidad adicional y por Hawkins¹¹ quien consideró una permeabilidad alterada (k_s) cercana al agujero hasta un radio (r_d).

En sus deducciones, Van Everdingen¹⁰ concluye que la caída de presión en un pozo dañado (o mejorado) difiere de uno no -

dañado en una cantidad adicional

$$\Delta p_s = \frac{2kh}{hH} s \dots \dots \dots (2.6.2)$$

de donde:

$$s = \frac{hh}{2kh} \Delta p_s \dots \dots \dots (2.6.3)$$

si se emplea el concepto de Hawkins⁹, se tiene:

$$s = \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_0}{r_w} \right) \dots \dots \dots (2.6.4)$$

Por tanto, a partir de este estudio, el grado de daño o beneficio se expresa en términos del "factor de daño", s , el cual es positivo si existe daño y negativo si existe beneficio - estimulación por fracturamiento hidráulico o acidificación)

b) Efecto de Almacenamiento.

El almacenamiento es considerado como un efecto sobre el comportamiento de la variación de presión en los tiempos cortos.

Este efecto puede explicarse fácilmente si se toma en cuenta que cuando se cierra un pozo productor en la superficie, el flujo de la boca del pozo al exterior cesa inmediatamente; sin embargo, la formación productora sigue aportando fluido hacia el pozo durante algún tiempo más. Cuando se ha acumulado suficiente volumen de fluido en el pozo, el efecto de cierre es transmitido a la formación, este acontecimiento explica la existencia de un retraso en el incremento de presión a tiempos cortos.

El almacenamiento puede ocurrir de varias maneras: el fluido puede ser almacenado en el agujero completamente lleno o bien por el movimiento de una interfase gas-líquido. Esto es cierto ya que el pozo actúa como un tanque de almacenamiento, donde los fluidos entran al pozo levantando el nivel de líquido, o si el pozo está lleno los fluidos se comprimen.

Para el caso de pruebas de decremento de presión el almacenamiento se puede explicar de la siguiente manera: al abrir el pozo en la superficie, el flujo inicial se debe al almacenamiento de fluido acumulado en el agujero. Por tanto, el gasto constante mantenido en la superficie es la suma de dos gastos: - el gasto debido al almacenamiento que va disminuyendo, más el gasto de la formación que va aumentando de cero hasta el gasto q .

La información de presión obtenida durante el periodo de almacenamiento no representa el verdadero comportamiento de la presión y por tanto dicha información no puede analizarse para evaluar la capacidad de flujo o el daño en la formación. Sin embargo, este efecto dura poco tiempo, así es que los datos obtenidos después de este tiempo sí son representativos del comportamiento de la presión.

Durante el tiempo en que predomina el almacenamiento se puede encontrar la constante de almacenamiento C , que fue definida como:

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{qB\Delta t}{2.44p} \dots \dots \dots (2.6.5)$$

esta constante C puede calcularse graficando $\log \Delta p$ contra $\log \Delta t$ y leyendo en esta gráfica los valores de Δp y Δt correspondientes a un punto cualquiera que se encuentra en la recta de pendiente unitaria que se forma en la gráfica. Conociendo estos valores se substituyen en la ecuación (2.6.5) para calcular la constante de almacenamiento.

La constante de almacenamiento dimensional queda definida de la siguiente manera:

$$C_D = \frac{3.615 C}{2.44 \frac{C}{2} h^2} \dots \dots \dots (2.6.6)$$

donde wh^2 es el volumen de fluido contenido en el pozo. En la ecuación (2.6.6) se tienen unidades prácticas (apéndice D).

C A P I T U L O 3

PRUEBAS DE DECREMENTO DE PRESION

Las pruebas en pozos llamadas de Decremento de Presión son útiles para obtener información de las características de tales yacimientos, como: permeabilidad, porosidad, efecto de daño, etc.; además, este tipo de pruebas constituye uno de los medios más eficientes u prácticos para calcular el volumen de hidrocarburos asociados al pozo.

Una prueba de decremento es simplemente una serie de mediciones de la presión del fondo del pozo registradas durante un periodo de flujo o gasto constante. Generalmente el pozo se cierra antes de efectuar la prueba. Este cierre dura un periodo de tiempo suficiente para permitir que la presión se establezca en toda la formación, es decir que se alcance la presión estática. El equipo para medir la presión se baja al fondo del agujero, luego se abre el pozo dejándolo fluir a un gasto constante. Las pruebas pueden durar pocas horas, varios días o hasta meses, dependiendo del objetivo de las mismas.

Es conveniente tomar pruebas de decremento cuando se tiene presión uniforme en el yacimiento; por tanto, los pozos nuevos son excelentes candidatos para efectuar este tipo de pruebas. También si un pozo ha sido cerrado por alguna intervención y ya no es costeable efectuar cierres posteriores para pruebas de incremento, entonces puede correrse una prueba de decremento de presión.

Otra razón para considerar una prueba de decremento se tiene en aquellos pozos donde existe incertidumbre en la interpretación de los datos de una prueba de incremento, en esos casos, se puede hacer una prueba de incremento seguida de una de decremento y así se pueden comparar los resultados de los --

análisis de ambas pruebas.

Las pruebas de decremento de presión pueden correrse a tiempos cortos de duración. Sin embargo, cuando se corren a tiempos largos pueden proporcionar una aproximación del volumen del yacimiento y en algunos casos, este puede ser el objetivo primordial de la prueba.

Las pruebas de decremento pueden analizarse en cada uno de los períodos de flujo desarrollados. Según Odeh y Nabors²² el tiempo de duración de estos períodos puede determinarse en forma aproximada con base en el área de drenaje de los pozos.

3.1 Condiciones de Flujo Transitorio.

Durante el flujo de aceite a gasto constante el comportamiento de la presión de un pozo en un yacimiento infinito viene dado por la ecuación (2.3.2) involucrando en ella el factor de daño. Esta ecuación se puede expresar en unidades prácticas (apéndice D) de la siguiente manera:

$$P_{wf} = P_i - \frac{141.2 q_{wB}}{kh} \left| - \frac{1}{2} E_i \left(\frac{-0.183 \mu c_e r_w^2}{4(264 \times 10^{-6}) kh} \right) \right| \quad (3.1.1)$$

o en su aproximación logarítmica:

$$P_{wf} = P_i - 141.2 \frac{q_{wB}}{kh} \cdot \frac{1}{2} \left| \ln \frac{264 \times 10^{-6} kh}{0.183 \mu c_e r_w^2} + 0.80907 + 2s \right| \quad (3.1.2)$$

o bien:

$$P_{wf} = P_i - 162.6 \frac{q_{wB}}{kh} \left| \log \left| \frac{kh}{0.183 \mu c_e r_w^2} \right| - 3.2275 + 0.86859s \right| \quad (3.1.3)$$

arreglando esta ecuación queda:

$$P_{wf} = P_i - 162.6 \frac{q_{wB}}{kh} \left| \log(x) + \log \left| \frac{kh}{0.183 \mu c_e r_w^2} \right| - 3.2275 + 0.86859s \right| \quad (3.1.4)$$

cuando $\log t=0$, que ocurre cuando $t=1$ se encuentra:

$$P_1 h r = p_i - m \left[\log \left| \frac{k}{\rho v c_2 r_w^2} \right| - 3.2275 + 0.86859s \right] \quad (3.1.5)$$

substituyendo (3.1.5) en la ecuación (3.1.4) se obtiene:

$$p_{wf} = P_1 h r - m \log (t) \dots \dots \dots (3.1.6)$$

Teóricamente una gráfica de los datos de p_{wf} contra $-\log t$ presenta una línea recta (Fig. 7), donde:

$$m = \frac{162.6 \cdot qvB}{kh} \dots \dots \dots (3.1.7)$$

y la ordenada la origen es $P_1 h r$

Aprovechando este comportamiento se puede obtener el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{162.6 \cdot qvB}{mh} \dots \dots \dots (3.1.8)$$

donde m es el valor absoluto de la pendiente de la línea recta-semilogarítmica en lb/pq2/ciclo.

Una vez obtenido el valor de m , se puede calcular el factor de daño, despejando s de la ecuación (3.1.5).

$$s = 1.151 \left| \frac{P_i - P_1 h r}{m} - \log \left| \frac{k}{\rho v c_2 r_w^2} \right| + 3.2275 \right| \quad (3.1.9)$$

donde $P_1 h r$ debe leerse de la recta semilog o de su extrapolación en caso necesario.

En la gráfica de la Fig. 7 se puede observar que existe un periodo de no linealidad en los primeros instantes de la prueba y es el resultado de condiciones inestables en el flujo debi-

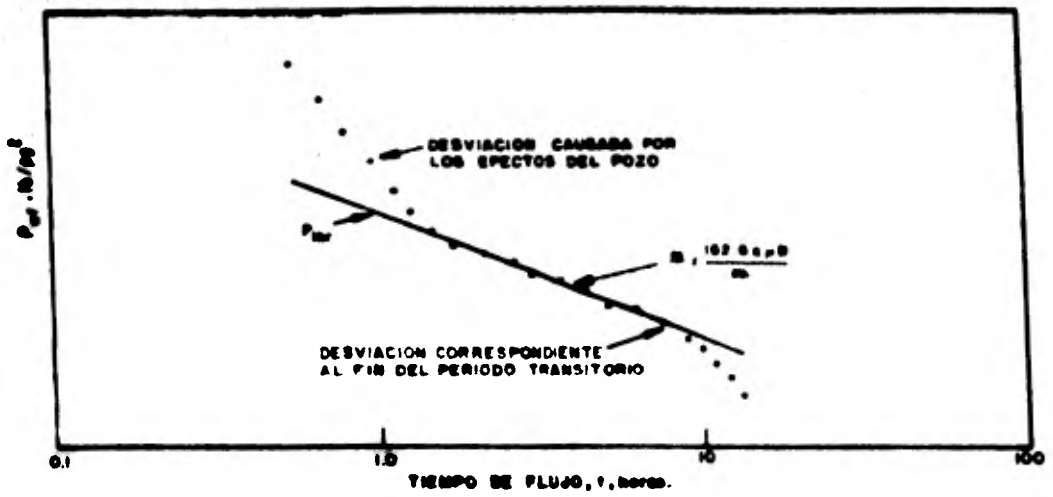


Fig. 7 GRAFICA SEMILOGARITMICA PARA EL ANALISIS DEL PERIODO TRANSITORIO EN UNA PRUEBA DE DECREMENTO DE PRESION.

do. principalmente al efecto del almacenamiento en el agujero y al daño en la formación inmediata al pozo. Por fortuna este periodo es de corta duración y fácil de identificar por la forma particular de la curva en dicho periodo. Posteriormente el comportamiento es lineal hasta un tiempo en que de nuevo la realidad deja de existir. Según Odeh y Nebor²¹ el final del periodo transitorio corresponde a un tiempo:

$$t = \frac{0.4c_t r_e^2}{260 \times 10^{-5} k} \dots \dots \dots (3.1.10)$$

Lo cierto es que al finalizar este periodo, se empiezan a sentir los efectos de frontera.

3.2 Condiciones de flujo transitorio tardío.

Cuando la caída de presión debida a la producción comienza a sentirse en la frontera de drenaje del pozo, el régimen de flujo entra en un periodo de transición previo al estado semi-estacionario. A este periodo se le conoce como transitorio tardío dado que en este intervalo el comportamiento de la presión ni es transitorio ni semi-estacionario.

Durante este periodo el comportamiento de la presión es bastante aproximado al que se presenta en un pozo fluyendo a gasto constante y que se localiza en un yacimiento circular limitado y sin flujo en la frontera externa. Por tanto, para desarrollar el método de análisis que se adapte a este caso es necesario tomar la ecuación (2.3.15) agregándole la caída de presión debida al daño, quedando:

$$p_i - p_{wh} = \frac{q \mu}{2\pi kh} \left[\frac{2kt}{0.4c_t r_e^2} + \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} + s + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (r_e^2) \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{2n} \right] \dots \dots \dots (3.2.1)$$

donde:

$$B_n(\alpha_n, r_{ep}) = \frac{J_1^2(\alpha_n r_{ep})}{\alpha_n \left| J_1^2(\alpha_n r_{ep}) - J_1^2(\alpha_n) \right|}$$

y α_n es la enésima raíz de:

$$J_1(\alpha_n r_{ep}) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_1(\alpha_n r_{ep}) = 0$$

Si para un gasto constante de producción la presión media en el yacimiento viene dada por la ecuación (2.4.2)

$$\bar{p} = p_d - \frac{qB}{2\pi kh} \frac{r_e}{r_w}$$

combinando esta ecuación con la (3.2.1) se llega a:

$$p_{wf} - \hat{p} = \frac{qB}{2\pi kh} \sum_{n=1}^{\infty} \left| -2B_n(\alpha_n, r_{ep}) \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{\alpha_n^2} \right| \dots \dots \dots (3.2.2)$$

donde:

$$\hat{p} = \bar{p} - \frac{qB}{2\pi kh} \left(2\alpha \frac{r_e}{r_w} - \frac{3}{4} \alpha \right) \dots \dots \dots (3.2.3)$$

Cuando se ha estado produciendo durante un tiempo suficiente para llegar al periodo transitorio tardío, todos los términos de la sumatoria con excepción del primero se hacen tan pequeños que pueden ignorarse y así la ecuación (3.2.2) se transforma en:

$$p_{wf} - \hat{p} = \frac{qB}{2\pi kh} \left| -2B_1(\alpha_1, r_{ep}) \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{\alpha_1^2} \right| \dots \dots \dots (3.2.4)$$

Jahne y Emde²³ demostraron que para $r_{ep} > 100$:

$$- 2B_1 = 0.84$$

$$- \alpha_1^2 = \frac{14.6819}{r_{ep}^2}$$

por tanto, la ecuación (3.2.4) se puede escribir como:

$$P_{wf} - \bar{p} = 0.80 \frac{q \mu}{2\pi k h} Q \left[\frac{14.6819 h^2}{\theta u c_z r_e^2} \right] \dots \dots \dots (3.2.5)$$

esta ecuación expresada en unidades prácticas queda:

$$P_{wf} - \bar{p} = 118.6 \frac{q \mu B}{k h} Q \left[\frac{(14.6819) (260 \times 10^{-6}) h^2}{\theta u c_z r_e^2} \right] \dots \dots (3.2.6)$$

Cuando se han sentido todos los efectos de frontera - que según Odeh y Nabor²² se tiene a un tiempo:

$$t = \frac{\theta u c_z r_e^2}{0.00088 k} \dots \dots \dots (3.2.7)$$

el periodo de transición (transitorio tardío) termina, dando lugar a otro periodo de flujo conocido como semi-estacionario.

3.3 Condiciones de flujo semi-estacionario.

Si una prueba de decremento de presión se corre durante un tiempo suficientemente largo ($t_{De} = 0.9$), entonces el estado semi-estacionario se alcanza y el comportamiento de la presión en el pozo para este periodo viene dado por la ecuación - (2.3.16) siempre que se incluya la caída de presión debida al daño; es decir:

$$P_i - P_{wf} = \frac{q \mu}{2\pi k h} \left| \frac{2 t_D}{r_{eD}^2} + \ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} + s \right| \dots \dots \dots (3.3.1)$$

o bien:

$$P_i - P_{wf} = \frac{q \mu}{2\pi k h} \left| \frac{2 k t}{\theta u c_z r_e^2} + \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} + s \right| \dots \dots (3.3.2)$$

desarrollando esta última ecuación se obtiene:

$$P_A - P_{w0} = \frac{2kz}{\sqrt{bc} r_e^2} + \frac{2kh}{\sqrt{bc} r_e} \left| \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} + s \right| \dots (3.3.3)$$

El valor de $z_{D0} = 0.3$ dado como mínimo necesario para llegar al comportamiento semi-estacionario, es válido solo para yacimientos circulares. Para otras formas, especialmente para las menos simétricas, el tiempo de inicio del periodo semi-estacionario es variable. Las curvas de Matthews, Brons y Hazebroek²⁰ pueden consultarse para conocer mejor el valor de ese tiempo para cada forma de yacimiento (también ver Figs. 4.3-4.9 de la referencia 9).

Debido a la forma matemática de la ecuación (3.3.3) - es obvio que solamente en circunstancias fortuitas (s y r_e conocidos) es posible determinar el valor del producto kh a partir del comportamiento de la presión en el periodo semi-estacionario; sin embargo, con los datos de presión de este periodo, es posible determinar el volumen de drenaje efectivo del pozo.

Por otro lado, la variable de la caída de presión adimensional para el periodo semi-estacionario, correspondiente a un sistema circular limitado, se define a partir de la ecuación (2.3.16) (apéndice E) como:

$$P_D = \frac{2kz}{\sqrt{bc} r_e^2} + \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \dots \dots \dots (3.3.4)$$

o bien:

$$= \frac{2z_D}{r_{eD}^2} + \ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} \dots \dots \dots (3.3.5)$$

Generalizando, para cualquier sistema cerrado de factor de forma C_A ²¹ conocido, esta variable adimensional se expresa:

$$P_{D00} = 2\pi z_{DA} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A}{r_w^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2.2458}{C_A}\right) \dots \dots (3.3.6)$$

donde C_A ²¹ es un factor característico que representa la forma y

geometría del sistema, así como la localización del pozo en dicho sistema.

Para un pozo colocado en el centro de un yacimiento el mitad, se tiene que:

$$C_A = 31.62$$

si este valor se usa en la ecuación (3.3.6) se obtiene una expresión para p_i igual a la (3.3.4) ya que de este modo los dos últimos términos de la ecuación (3.3.6) se convierten en -0.75 que aparece como $-3/4$ en la ecuación (3.3.4)

Por tanto, para cualquier sistema cerrado, la ecuación que define el comportamiento de la presión en el periodo semi-estacionario, es:

$$p_i - p_{wg} = \frac{q\tau}{\pi C_L h \lambda} + \frac{q\mu}{2\pi kh} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{A}{r_w^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2.2458}{C_A}\right) + s \right] \quad (3.3.7)$$

Obsérvese que la ecuación (3.3.3) es un caso particular de la (3.3.7). Estas dos ecuaciones expresadas en unidades prácticas, quedan respectivamente:

$$p_i - p_{wg} = 0.23394126 \frac{qB\tau}{\pi C_L h \lambda} + \frac{141.2 q\mu B}{kh} \left[\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} + s \right] \quad (3.3.8)$$

$$p_i - p_{wg} = 0.23394126 \frac{qB\tau}{\pi C_L h \lambda} + \frac{141.2 q\mu B}{kh} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{A}{r_w^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2.2458}{C_A}\right) + s \right] \quad (3.3.9)$$

C A P I T U L O 4

PRUEBAS DE LIMITE DE YACIMIENTO

4.1 Descripción

Una prueba de Límite de Yacimiento es una prueba de decrecimiento de presión de larga duración que se corre en pozos nuevos con la finalidad de determinar el volumen de drenaje del pozo a partir de datos de presión registrados durante los periodos de flujo transitorio y semi-estacionario, manteniendo constante el gasto. Cuando el gasto es variable se puede hacer una extensión de la técnica mediante el empleo del principio de superposición.

Dado que para alcanzar el periodo semi-estacionario es necesario pasar por los periodos de flujo precedentes, al correr esta prueba se pueden obtener también otros parámetros tales como: permeabilidad, transmisibilidad, factor de daño, eficiencia de flujo, así como la detección de barreras, la forma aproximada del área de drenaje y el volumen de aceite o gas que está asociado al pozo.

Las pruebas de Límite de Yacimiento constituyen una valiosa herramienta en la ingeniería de yacimientos, para obtener información relativa a la magnitud de yacimientos de hidrocarburos de reciente descubrimiento.

En circunstancias favorables y bajo condiciones controladas²⁸ este tipo de prueba puede ser de gran ayuda en la evaluación de una explotación más económica, siendo también de mucha utilidad en la toma de decisiones cuando se están perforando pozos de extensión, ya que una buena interpretación de la prueba de Límite de Yacimiento combinada con estudios geológicos

y geofísicos puede ser de gran ayuda en la localización de nuevos pozos, evitando la perforación innecesaria de pozos improductivos.

En este capítulo se presentan las diversas formas de analizar una prueba de límite de vaciamiento; cada una da lugar a un método diferente con un enfoque particular de la prueba.

4.2 Análisis del período de flujo transitorio tardío.

La ecuación (3.2.6) que rige el comportamiento de la presión durante el período transitorio tardío se puede expresar en forma logarítmica como:

$$\log(p_{wf} - \hat{p}) = \log(118.6 \frac{q_{1D}}{kh}) - 168 \times 10^{-5} \frac{hc}{\sigma u c_x r_e^2} \dots \dots (4.2.1)$$

De esta ecuación se puede observar que al graficar $\log(p_{wf} - \hat{p})$ contra t , se obtiene una línea recta donde el valor absoluto de la pendiente es:

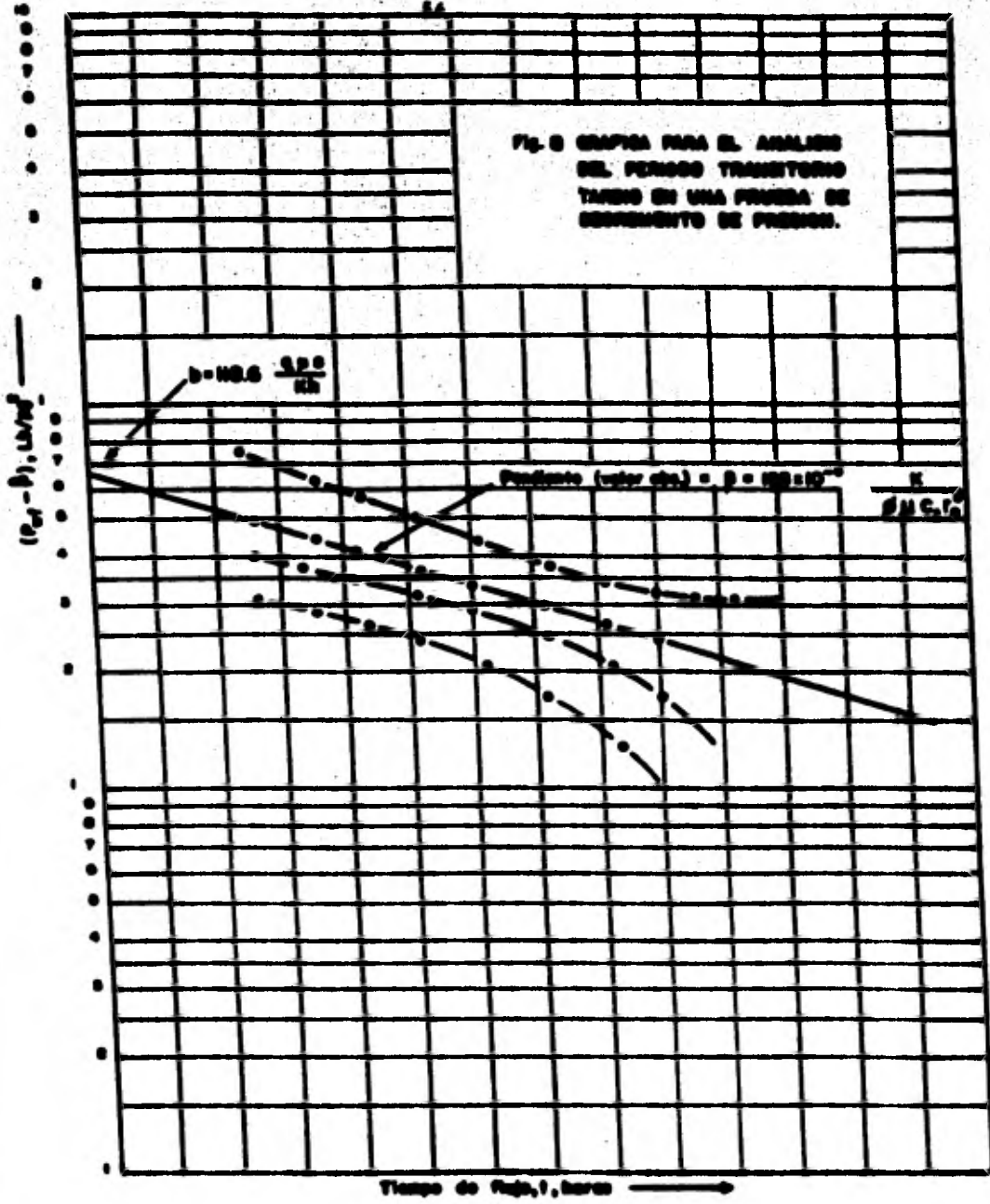
$$s = 168 \times 10^{-5} \frac{hc}{\sigma u c_x r_e^2} \dots \dots \dots (4.2.2)$$

y la ordenada al origen:

$$b = 118.6 \frac{q_{1D}}{kh} \dots \dots \dots (4.2.3)$$

Cuando se conoce el valor de \hat{p} , entonces en una gráfica de $\log(p_{wf} - \hat{p})$ contra t , se obtiene una línea recta; sin embargo por lo general, dicho valor no se puede conocer de antemano lo cual significa que la gráfica se tiene que construir por ensayo y error con valores de \hat{p} supuestos. Aquel valor de \hat{p} que lleve al trazo de una línea recta se toma como el verdadero valor de \hat{p} . La gráfica de $\log(p_{wf} - \hat{p})$ contra t , se muestra en la Fig. 8.

Fig. 3 GRÁFICA PARA EL ANÁLISIS DEL PERIODO TRANSITORIO TARDÍO EN UNA PRUEBA DE DESEMPEÑO DE PRESIÓN.



Una vez resuelto este problema se puede determinar el valor de la permeabilidad o del producto kh a partir del valor - que tenga la ordenada al origen de la línea recta; entonces:

$$kh = 118.6 \frac{qB}{b} \dots \dots \dots (4.2.4)$$

La aportación de este método de análisis en las pruebas de Límite de Yacimiento consiste en que se puede calcular el volumen de drenaje del pozo a partir del valor absoluto de la pendiente, B , de la línea recta correcta en la gráfica. Combinando las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) se puede estimar el volumen poroso expresado en barriles a condiciones de yacimiento:

$$V_p = 0.1115 \frac{qB}{BbC_g} \dots \dots \dots (4.2.5)$$

Las pruebas de decrecimiento generalmente se registran después que el pozo ha permanecido cerrado, logrando con ello estabilizar su presión. Asumiendo que este valor viene dado por la presión media del yacimiento (\bar{p}) y además que su variación durante la prueba es despreciable; entonces es posible conocer el valor de $\bar{p} - \hat{p}$ y así posteriormente se puede encontrar el factor de daño⁹ mediante la ecuación siguiente:

$$s = 0.86 \left(\frac{\bar{p} - \hat{p}}{b} \right) - \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + \frac{3}{4} \dots \dots \dots (4.2.6)$$

La caída de presión en la zona "dañada" está dada por:

$$\Delta p_s = \frac{b_s}{0.76} \dots \dots \dots (4.2.7)$$

Es necesario hacer notar que para el análisis de decrecimiento correspondiente a este período, se considera un yacimiento de forma circular en cuya parte central se localiza el pozo en el que se efectúa la prueba.

El valor calculado para el volumen de drenaje será con-

fiable siempre que el problema a resolver satisfaga las condiciones establecidas para el análisis de este período.

Se ha estudiado ampliamente el efecto producido por las distintas formas de los yacimientos y la posición del pozo en un yacimiento. Estos estudios se basan en la teoría del comportamiento de la calda de presión para diversas formas de área de drenaje².

Es conveniente observar cuidadosamente las curvas de decremento de presión, con el fin de visualizar la forma del área de drenaje; si se define una forma irregular entonces los resultados obtenidos con el análisis del período transitorio tardío deben usarse con reserva.

4.3 ANALISIS DEL PERIODO DE FLUJO SEMI-ESTACIONARIO

La ecuación (3.3.3) que está expresada en unidades -- Darcy, puede escribirse como:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qB}{2\pi hK} \left[\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} + s \right] - \frac{qBc}{\pi h c_e K_e} \dots \dots \dots (4.3.1)$$

De la ecuación (4.3.1) se observa que al graficar p_{wf} contra t se debe obtener una línea recta donde el valor absoluto de la pendiente es:

$$B_L = \frac{qB}{\pi h c_e K_e} \dots \dots \dots (4.3.2)$$

y la ordenada al origen:

$$p_{ord} = p_i - \frac{qB}{2\pi hK} \left[\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} + s \right] \dots \dots \dots (4.3.3)$$

Utilizando la ecuación (4.3.2) se tiene que:

$$\theta \pi h c_e^2 = \frac{qB}{B_L c_e} \dots \dots \dots (4.3.4)$$

como:

$$\theta \pi h_e^2 = V_p \text{ c.y.}$$

entonces:

$$V_p \text{ c.y.} = \frac{qB}{B L c_e} \dots \dots \dots (4.3.5)$$

que corresponde al volumen poroso o volumen de drenaje del pozo a condiciones de yacimiento.

Si:

$$c_e = (1 - S_w) c_e$$

substituyendo esta expresión en la ecuación (4.3.4)

$$\theta \pi h_e^2 = \frac{qB}{B L (1 - S_w) c_e}$$

arreglando:

$$\theta (1 - S_w) \pi h_e^2 = \frac{qB}{B L c_e}$$

donde:

$$\theta (1 - S_w) \pi h_e^2 = V_o \text{ (volumen de aceite original c.y.)}$$

entonces:

$$V_o \text{ c.y.} = \frac{qB}{B L c_e}$$

y dado que:

$$N \text{ c.s.} = \frac{V_o \text{ c.y.}}{B}$$

Por tanto, el volumen de aceite original c.s. almacenado en el volumen de drenaje del pozo es:

$$N = \frac{q}{R L c_e} \dots \dots \dots (4.3.6)$$

La ecuación (4.3.1) se puede expresar en unidades prácticas:

$$P_{wg} = p_i - \frac{141.2 q_{wB}}{kh} \left| \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} + s \right| - \frac{0.23395 q_B}{\pi \mu c_p h^2} t \dots (4.3.7)$$

de tal forma que al graficar p_{wg} contra t (Fig. 9), se obtiene - una línea recta correspondiente al período semi-estacionario, - donde la ordenada al origen es:

$$P_{ord} = p_i - 141.2 \frac{q_{wB}}{kh} \left| \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} + s \right| \dots (4.3.8)$$

y la pendiente en valor absoluto:

$$B_L = \frac{0.23395 q_B}{\pi \mu c_p h^2} \dots (4.3.9)$$

sustituyendo (4.3.8) y (4.3.9) en (4.3.7):

$$P_{wg} = P_{ord} - B_L t \dots (4.3.10)$$

Algunos autores³ utilizan:

$$P_{wg} = P_{ord} + m^* t$$

donde: $m^* = - B_L$

La ecuación (4.3.5) escrita en unidades prácticas es:

$$V_p = \frac{0.23395 q_B}{B_L c_p} \dots (4.3.11)$$

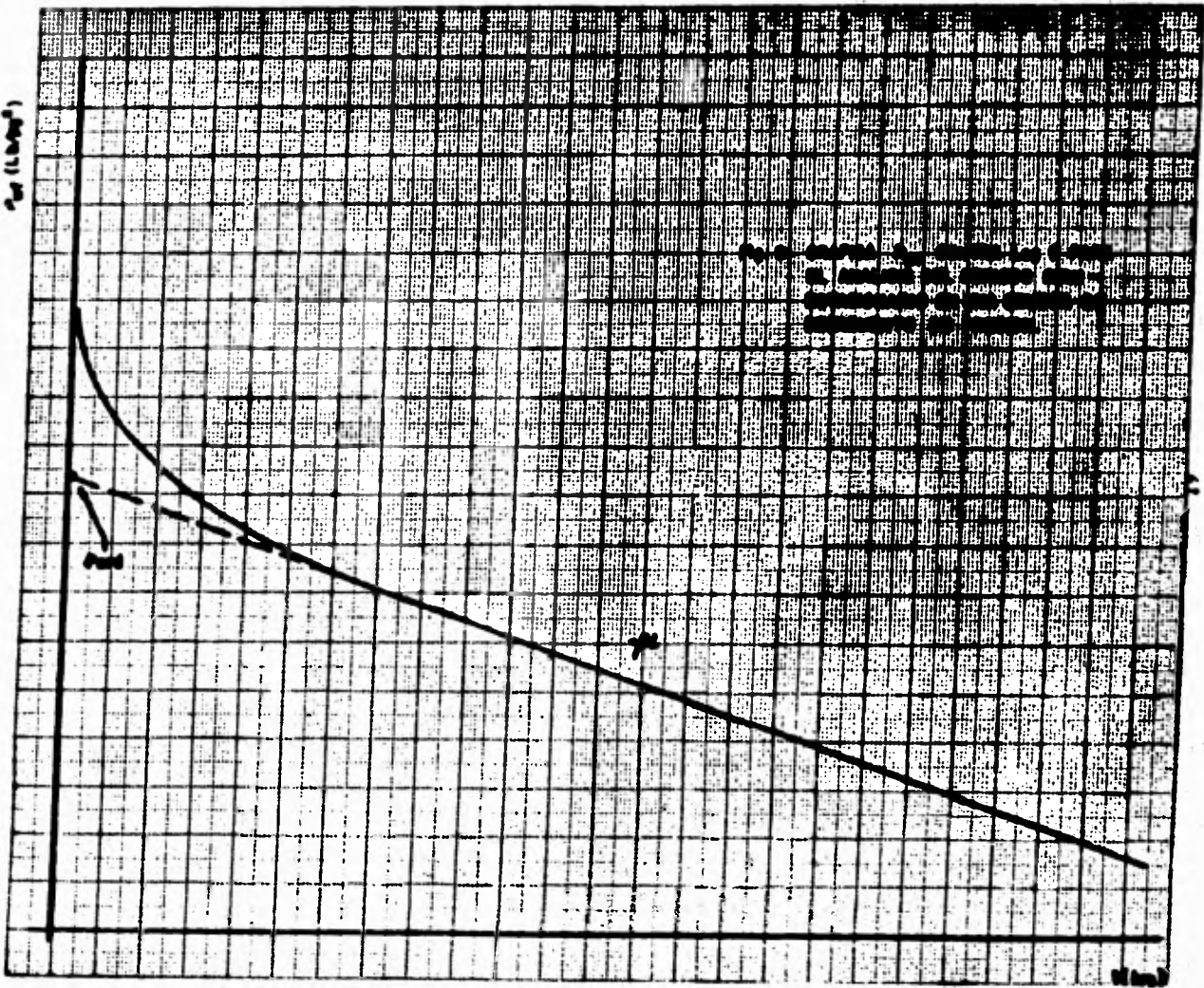
donde V_p está en pies³ a condiciones de yacimiento.

Si el volumen de drenaje (poroso) se desea en barriles,

$$V_p = \frac{0.0418 q_B}{B_L c_p} \dots (4.3.12)$$

La ecuación (4.3.6) expresada en unidades prácticas -

(1000) 100



queda:

$$N = \frac{0.25395 \text{ g}}{\beta_L c_e} \dots \dots \dots (4.3.13)$$

donde N está en pie³ c.s.

Si N se desea en barriles de aceite a c.s.:

$$N = \frac{0.0418 \text{ g}}{\beta_L c_e} \dots \dots \dots (4.3.14)$$

Conviene enfatizar que β_L corresponde al valor absoluto de la pendiente de la línea recta que resulta al graficar p_w (lb/pg²) contra t (horas). En algunas ocasiones conviene usar el tiempo en días, donde la pendiente se denomina β_{LD} y el volumen de drené en pies cúbicos, se calcula con la siguiente ecuación:

$$V_p = \frac{5.615 \text{ gB}}{\beta_{LD} c_e} \dots \dots \dots (4.3.15)$$

4.4 METODO DE ANALISIS DE PARK JONES

Este método de análisis de una prueba de Límite de V_a cimiento se basa en la ecuación de balance de materia y en el uso de ecuaciones de declinación de presión.¹⁷

Aplicando la ecuación de balance de materia para un yacimiento de aceite bajo-saturado se tiene:

$$NB_i c_e (p_i - \bar{p}) = N_p B \dots \dots \dots (4.4.1)$$

donde B es el factor de volumen del aceite a las condiciones de \bar{p} .

Derivando con respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación (4.4.1) y recordando que el valor de p_i es constante:

$$- N B_i c_e \frac{d\bar{p}}{dt} = B \frac{dN_p}{dt} \dots \dots \dots (4.4.2)$$

Para el estado de flujo semi-estacionario, se tiene -
que:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{dp_{wf}}{dt} \dots \dots \dots (4.4.3)$$

Luego como:

$$q = \frac{dN_p}{dt} \dots \dots \dots (4.4.4)$$

y además, para un yacimiento bajo-saturado se puede establecer que:

$$B = B_L \dots \dots \dots (4.4.5)$$

substituyendo lo anterior, en la expresión (4.4.2):

$$-NB_L c_e \frac{dp_{wf}}{dt} = B_L q$$

es decir:

$$-N c_e \frac{dp_{wf}}{dt} = q \dots \dots \dots (4.4.6)$$

multiplicando ambos miembros por B:

$$-NB c_e \frac{dp_{wf}}{dt} = qB$$

acomodando, se tiene:

$$-\frac{dp_{wf}}{dt} = \frac{qB}{NB c_e} \dots \dots \dots (4.4.7)$$

El lado izquierdo de esta ecuación fue definido por Park Jones¹ como "v" cuyas dimensiones son de presión entre volumen, dadas en lb/qa²/dla/bl/dla.

Entonces la expresión (4.4.7) puede escribirse como:

$$v = \frac{qB}{NB c_e} \dots \dots \dots (4.4.8)$$

Despejando N:

$$N = \frac{1}{V c_g} \dots \dots \dots (4.4.9)$$

donde esta última expresión indica que: "El volumen de aceite - del yacimiento que está en comunicación con el pozo (N c.s.), - es igual al recíproco del producto del valor de $V (dp_w/dt/qB)$, la compresibilidad efectiva y el factor de volumen del aceite".

Aunque en este trabajo no se tratan yacimientos de gas, solamente se establece la ecuación correspondiente únicamente con el propósito de tener una extensión del método de análisis.

Sea la ecuación de balance de materia para un yacimiento de gas:

$$G = \frac{G_p B}{B_g - B_{g_i}} \dots \dots \dots (4.4.10)$$

sabiendo que:

$$c_g = \frac{1}{B_g} \frac{\Delta B}{\Delta p} \dots \dots \dots (4.4.11)$$

de la cual:

$$\Delta B_g = c_g B_g \Delta p = B_g - B_{g_i}$$

substituyendo en (4.4.10):

$$G = \frac{G_p}{c_g \Delta p}$$

despejando Δp :

$$\Delta p = \frac{G_p}{G c_g} \dots \dots \dots (4.4.12)$$

donde: $\Delta p = p_i - p_w$ y p_i es constante.

Derivando ambos miembros de la ecuación (4.4.2) con respecto al tiempo:

$$-\frac{dp}{dt} = \frac{1}{G c_g} \cdot \frac{dG_p}{dt}$$

como:

$$q_g = \frac{dq}{dt}$$

entonces:

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q_g}{Gc_g} \dots \dots \dots (4.4.13)$$

Multiplicando y dividiendo por B_g el segundo miembro de la ecuación (4.4.13) y acomodando términos se obtiene:

$$-\frac{dq}{q_g B_g} = \frac{1}{G B_g c_g}$$

Al término de la izquierda de la expresión anterior, se le ha denominado el término V^{-1} , de tal manera:

$$V = \frac{1}{G B_g c_g}$$

y despejando G ; se obtiene finalmente:

$$G = \frac{1}{V c_g B_g} \dots \dots \dots (4.4.14)$$

Para utilizar la ecuación (4.4.9) es necesario saber previamente cómo varía V con respecto al tiempo. Para conocer dicha variación se puede utilizar la ecuación de comportamiento de presión para un yacimiento infinito, así como la correspondiente a un yacimiento limitado que corresponden respectivamente al flujo transitorio y semi-estacionario.

Primeramente, la caída de presión durante el periodo de flujo transitorio viene dada por la ecuación (3.3.2) que se puede expresar como:

$$P_L - P_{wg} = \frac{70.6 \text{ qhB}}{kh} \left| \ln \left(\frac{264 \times 10^{-6} h^2}{\mu c_g t} \right) + 0.80907 + 2s \right| \dots (4.4.15)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo, tomando en cuenta que P_i es constante:

$$-\frac{dp_{w1}}{dt} = \frac{70.6 q_{1B}}{kh} \left| \frac{\phi_{u c_2} \lambda_w^2}{264 \times 10^6 h^2} \cdot \frac{264 \times 10^6 h}{\phi_{u c_2} \lambda_w^2} \right| \dots \dots (4.4.16)$$

es decir:

$$-\frac{dp_{w1}}{dt} = \left(\frac{70.6 q_{1B}}{kh} \right) \frac{1}{z} \dots \dots \dots (4.4.17)$$

Note que el tiempo puede estar en horas o en días y la expresión (4.4.17) no se alterará, ya que al derivar la ecuación (4.4.15) el factor de escala se hace unitario; sin embargo, es conveniente que el tiempo y el gasto se expresen consistentemente.

Acomodando la ecuación (4.4.17):

$$-\frac{dp_{w1}}{dt} = \left(\frac{70.6 q_{1B}}{kh} \right) \frac{1}{z} \dots \dots \dots (4.4.18)$$

y de acuerdo con la expresión (4.4.7), el miembro izquierdo corresponde al parámetro V definido por Jones. Entonces, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$V = \left(\frac{70.6 q_{1B}}{kh} \right) \frac{1}{z} \dots \dots \dots (4.4.19)$$

de esta ecuación es obvio que:

$$2zV = \frac{141.2 q_{1B}}{kh} \dots \dots \dots (4.4.20)$$

Si la ecuación (4.4.19) se expresa en forma logarítmica se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Log } V &= \text{Log} \left| \left(\frac{70.6 q_{1B}}{kh} \right) \frac{1}{z} \right| = \text{Log} \left(\frac{70.6 q_{1B}}{kh} \right) + \text{Log} \left(\frac{1}{z} \right) \\ &= \text{Log} \left(\frac{70.6 q_{1B}}{kh} \right) + \text{Log} (1) - \text{Log} (z) \end{aligned}$$

y ordenando se llega finalmente a:

$$\log V = - \log (t) + \log \left(\frac{70.6 M}{kh} \right) \dots \dots \dots (4.4.21)$$

De esta ecuación se observa que al graficar $\log V$ contra $\log t$, se obtiene una línea recta de pendiente -1, la cual se prolongará mientras que el efecto de la frontera o de alguna "barrera" no se haga sentir en el pozo; ya que la aparición de este efecto repercutirá en una variación de la pendiente o en una interrupción de la recta trazada tal como se observa en la Fig. 10.

En vista de que el interés primordial es determinar -- cuando el efecto de frontera se hace patente en el pozo, es necesario entonces tomar en cuenta a la ecuación que rige el comportamiento de la caída de presión en el periodo de flujo semi-estacionario.

En este caso se pueden emplear cualesquiera de las ecuaciones (3.3.3) o (3.3.7) que están expresadas en unidades Darcy.

Empleando la ecuación (3.3.7) que es más general se tiene:

$$P_i - P_{wf} = \frac{qB}{2\pi c_f kh} + \frac{qB}{2\pi kh} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{c} \right) + s \right] \quad (4.4.22)$$

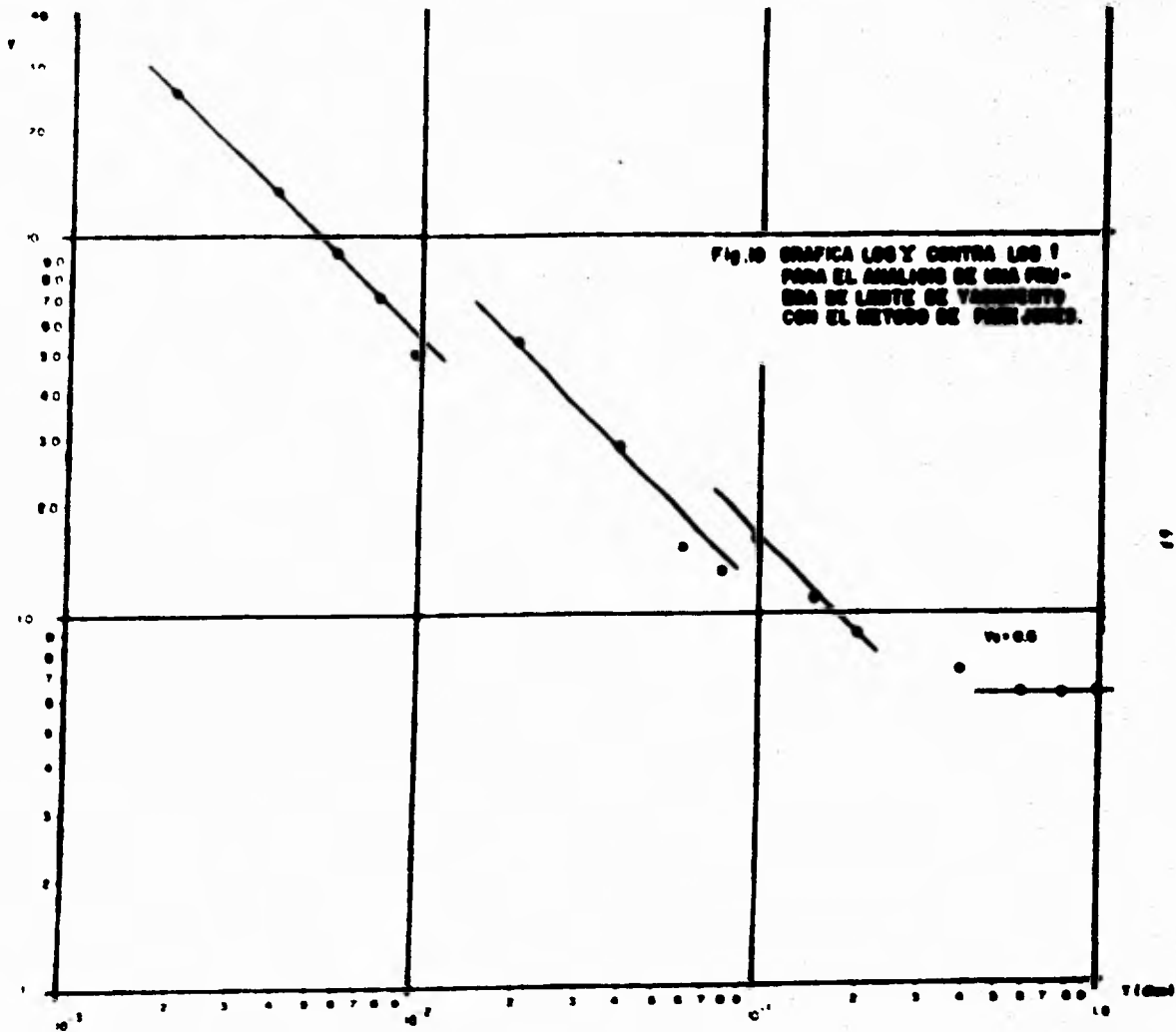
Derivando la ecuación (4.4.22) con respecto al tiempo:

$$- \frac{dp_{wf}}{dt} = \frac{qB}{2\pi c_f kh}$$

o bien:

$$- \frac{dp_{wf}}{dt} = \frac{qB}{\pi 2 c_f kh_e} \dots \dots \dots (4.4.23)$$

Acomodando esta última expresión:



$$-\frac{dp_{wf}}{dz} = \frac{1}{\pi c_x h r_e^2} \dots \dots \dots (4.4.24)$$

de esta ecuación (4.4.24) se puede observar que el término de la derecha es un cierto valor constante que fue definido por Park - Jones como V_Δ .

$$V_\Delta = \frac{1}{\pi c_x h r_e^2} \dots \dots \dots (4.4.25)$$

Con lo cual se establece que V toma un valor V_Δ cuando la relación $- dp_{wf}/dz/qB$ se hace constante; es decir, que V toma un cierto valor constante V_Δ cuando se ha alcanzado el estado de flujo semi-estacionario y con esto el límite exterior del drenaje del pozo ha sido detectado.

Entonces, de acuerdo a lo obtenido en la ecuación (4.4.9) a partir de la ecuación de balance de materia:

$$N = \frac{1}{V c_e B}$$

esta expresión es realmente válida cuando V asume el valor constante V_Δ , entonces:

$$N = \frac{1}{V_\Delta c_e B}$$

es decir:

$$N = \frac{c_x \pi \theta h r_e^2}{B c_e} \dots \dots \dots (4.4.26)$$

y como: $c_x = S_o c_e$

$$N = \frac{S_o c_e \pi \theta h r_e^2}{B c_e}$$

entonces el volumen de aceite que está en comunicación con el pozo es:

$$N_{c.a.} = \frac{S_o \pi \theta h r_e^2}{B} \dots \dots \dots (4.4.27)$$

Haciendo intervenir nuevamente a c_2 en la expresión (4.4.27) se llega otra vez a la (4.4.26), y considerando el significado de V_0 , establecido por Jones, se obtiene:

$$V_0 = \frac{1}{N c_2 B}$$

despejando N:

$$N = \frac{1}{V_0 c_2 B} \dots \dots \dots (4.4.28)$$

De las ecuaciones (4.4.18) y (4.4.24) se puede ver que el valor de V decrece constantemente hasta que alguna barrera o un límite del yacimiento es alcanzado después de lo cual V toma un valor constante V_0 , el cual determina el límite del yacimiento o el aceite contenido en el volumen de drenaje del pozo tal como se encuentra indicado en la ecuación (4.4.28).

Según se observa, esta ecuación (4.4.28) no necesita de factores de escala para adaptarla a las unidades prácticas deseadas, siempre y cuando los parámetros involucrados estén expresados en unidades consistentes.

Como se ha hecho a lo largo de este trabajo, en este método de análisis también q está en bl/día , p en lb/pg^2 , y c en $(\text{lb/pg}^2)^{-1}$; por lo tanto, para que V pueda estar en $\text{lb/pg}^2/\text{bl}$ se requiere entonces que dp_w/dt se exprese en $\text{lb/pg}^2/\text{día}$; es decir, que en este caso el tiempo se empleará en días tanto en la gráfica como en los demás cálculos. Según se concluyó en la ecuación (4.4.17), el uso de t en días no afectará a la gráfica $\log V$ contra $\log t$, y como el valor de V_0 es una consecuencia de lo anterior, tampoco será afectado. Sin embargo el valor de V_0 leído en la gráfica deberá corresponder al que se obtenga con la ecuación de V_0 deducida a partir de la ecuación (3.3.9) pero considerando el tiempo en días. Para lo cual la ecuación (3.3.9) se expresa como:

$$P_L - P_{wf} = \frac{5.615 q B c}{\pi h c_2 N c} + \frac{141.2 q u B}{h N} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{c A} \right) + s \right] \quad (4.4.29)$$

derivando con respecto al tiempo y dividiendo entre q_B , se obtiene:

$$-\frac{dp_{wg}}{dt} \cdot \frac{1}{q_B} = \frac{5.615}{\pi \sqrt{C_2 k h_e}} \dots \dots \dots (4.4.30)$$

es decir:

$$Y_d = \frac{5.615}{\pi \sqrt{C_2 k h_e}} \dots \dots \dots (4.4.31)$$

Según lo visto hasta ahora, es obvio que el valor de Y_d solo se podrá obtener de una tabla que relacione los valores que $dp_{wg}/dt/q_B$ vaya adquiriendo con cada valor de t ; por tanto, la expresión anterior tiene poco uso. Eventualmente se emplea para calcular el radio de drenaje aparente del pozo, siempre que Y_d se conozca de antemano. Por el contrario, la ecuación (4.4.28) es la más usada en las pruebas de límite de yacimiento pues con ella se obtiene el valor del objetivo primordial de este tipo de pruebas.

Con mucha frecuencia al graficar $\log Y$ contra $\log t$, se tendrán no una sola sino varias líneas rectas de pendiente -1 paralelas entre sí tal como se observa en la Fig. 10. En el punto donde termina cada una de estas rectas se tiene el principio de una barrera que termina en el punto inicial de la línea recta paralela siguiente. A cada uno de estos puntos le corresponde como abscisa un cierto tiempo de flujo conocido con el nombre de "tiempo de choque en la barrera" y se simboliza como " t_b ". Se tendrán tantos t_b como barreras se detecten durante la prueba.

Otro aspecto importante del método de Jones consiste en que se puede calcular la permeabilidad de la formación correspondiente a cada tiempo de flujo; para su cálculo se basa en la expresión (4.4.20); entonces:

$$k = \frac{141.2 \mu}{\sqrt{2Vh}} \dots \dots \dots (4.4.32)$$

Si el segundo miembro de la ecuación (4.4.20) se define como la constante de Darcy simbolizada por "D", entonces:

$$D = 2kV \dots \dots \dots (4.4.23)$$

4.5 ESTIMACION DE LA FORMA DEL AREA DE DRENE A PARTIR DE PRUEBAS DE LIMITE DE YACIMIENTO.

Dada la importancia que supone el conocer el tamaño del yacimiento, antes de que existieran como tal las pruebas de limite ya se intentaba encontrar la manera de cuantificar la extensión y forma del yacimiento utilizando las técnicas descubiertas hasta ese tiempo.

Fue Horner²⁰ en 1951 quien trató de explicar que el drenaje de un pozo no siempre tiene un limite circular ya que en el yacimiento existen "barreras" (fallas, barreras de permeabilidad, lutitas) que son quienes determinan realmente el área de drenaje de un pozo.

El razonamiento estribó en plantear cual sería el comportamiento de la presión en un pozo colocado cerca de una falla o de alguna otra barrera en un yacimiento infinito. Dicho comportamiento se dedujo convenientemente con la ayuda de la técnica conocida como "método de las imágenes", en esta formulación el efecto de una barrera es simulada suponiendo la presencia de un pozo idéntico al verdadero produciendo al otro lado de la barrera y colocado en forma simétrica al pozo real.

El pozo imagen interactúa con el real así es que no existe flujo a través de la barrera. La caída de presión resultante en el pozo real será igual a la caída de presión debida a su misma producción más la caída de presión debida a la interferencia del pozo imaginario, esto es necesario para simular correctamente el comportamiento de la presión en un pozo real colocado en las proximidades de una barrera.

Matemáticamente, si el pozo está localizado a una distancia "d" de la barrera, entonces el comportamiento de su presión al fluir con gasto constante es:

$$P_{wg} = P_i - \frac{qB}{4\pi kh} \left[- E_i \left(- \frac{\theta \mu c_e r_w^2}{4kt} \right) - E_i \left(- \frac{\theta \mu c_e d^2}{4kt} \right) + 2s \right] \quad (4.5.1)$$

en dicha ecuación se tomó en cuenta que la distancia del pozo real al pozo imaginario es 2d.

Horner aplicó este razonamiento a sus pruebas de incremento de presión concluyendo que al construir una gráfica -- P_{wg} contra $\log t$ con los datos de presión registrados, los puntos graficados y debidamente correlacionados conforman una serie de líneas rectas donde la primera corresponde al comportamiento de presión en un yacimiento infinito y las posteriores representan el efecto que las barreras surten en el incremento de la presión; concluyendo además que una recta distinta a la inicial, representa una barrera siempre y cuando su pendiente sea aproximadamente el doble de la pendiente de la recta inmediata anterior.

Horner propone que el ángulo entre las barreras puede calcularse de la siguiente manera:

El ángulo que resulta después del choque de las ondas de presión con la primera barrera es aproximadamente:

$$\theta_1 = \frac{m_1}{m_2} \times 360^\circ \quad \dots \quad (4.5.2)$$

Este ángulo deberá ser por lo general cercano a 180°

El ángulo entre la primera y segunda barrera es aproximadamente:

$$\theta_{1,2} = \frac{m_1}{m_3} \times 360^\circ \quad \dots \quad (4.5.3)$$

y así sucesivamente.

Posteriormente, aprovechando los estudios de Miller,²⁹ Horner logró deducir una expresión para poder calcular la distancia del pozo a cada barrera detectada, empleando el valor de $t_{De} = 0.28$ correspondiente al tiempo adimensional en que se estima ha de alcanzarse la estabilización de la presión en el yacimiento; de tal forma que :

$$t_{De} = \frac{6.33 \times 10^{-3} k h (\text{días})}{\mu c_t r_e^2} \dots \dots \dots (4.5.4)$$

haciendo $t = t_b$, donde t_b es el tiempo en el cual las ondas de presión alcanzan una cierta barrera, y usando $t_{De} = 0.28$, entonces:

$$r_e^2 = \frac{6.33 \times 10^{-3} k}{\mu c_t} \frac{t_b}{(0.28)} \dots \dots \dots (4.5.5)$$

haciendo:

$$r_e = \frac{6.33 \times 10^{-3} k}{\mu c_t} \dots \dots \dots (4.5.6)$$

y usando r_b en vez de r_e para referirse a la distancia del pozo a la barrera se tiene:

$$r_b = \sqrt{3.57 \pi t_b} \dots \dots \dots (4.5.7)$$

o bien (según ref.30):

$$r_b = 2 \sqrt{\pi t_b} \dots \dots \dots (4.5.8)$$

Horner propone que una vez conocidas las distancias del pozo a cada una de las barreras y el ángulo de separación entre estas es posible construir un croquis del área de drenaje del pozo.

11-10-81

Posteriormente y con todas las reservas obligadas, se hizo una extensión de este razonamiento para aplicarse con pruebas de decremento de presión, graficando ahora p_{wg} contra $\log t$ (Fig.11) y con las condiciones establecidas en el método original. Este procedimiento asume que las barreras son lineales y entre sus lími

taciones está el no poder determinarse la orientación de los límites.

A partir de 1956 con la aparición de las Pruebas de Límite de Yacimiento se ensayan nuevas técnicas para detectar las barreras (tal como se explica en la sección anterior) y para determinar la forma y tamaño del yacimiento.

Así en octubre de 1971 R.C. Earllougher Jr.⁵ publica un artículo en el que expone la manera de utilizar la información obtenida de una prueba de límite de yacimiento para estimar el tamaño y geometría del sistema, para lo cual es necesario contar con la información correspondiente al período transitorio así como con la del semi-estacionario.

METODO DE ANALISIS:

Cuando un pozo colocado en un yacimiento estabilizado se deja producir con gasto constante, el comportamiento de la presión en el fondo del pozo para los primeros instantes de prueba es el correspondiente al de un pozo colocado en un yacimiento infinito. Dicho comportamiento se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$P_{wf} = p_{1 h} - m \log (t) \dots \dots \dots (4.5.9)$$

donde:

$$m = \frac{162.6 q_{Dh}}{kh} \dots \dots \dots (4.5.10)$$

y con ordenada al origen $p_{1 h}$ leída de la línea recta semilogarítmica o de su extrapolación en caso necesario.

En cuanto el sistema comienza a ser afectado por los efectos de frontera, la ecuación (4.5.9) deja de representar el

comportamiento de la presión y por tanto deja de aplicarse.

Después de un tiempo suficientemente largo la presión sigue un comportamiento semi-estacionario.

El comienzo del comportamiento semi-estacionario para un yacimiento de forma dada, se tiene cuando la curva presentada por Mathews-Brons-Hazebroek²⁰ se hace lineal. Dietz²⁵ (también ref. 9 Fig. 10-29) presenta una tabulación de los diversos tiempos de inicio del comportamiento semi-estacionario para ciertas formas dadas.

Durante el periodo semi-estacionario el comportamiento de la presión de fondo fluyendo en el pozo viene dado por:

$$p_{wf} = p_{ord} - B_L t \quad \dots \dots \dots (4.5.11)$$

donde:

$$B_L = \frac{0.23395 qB}{\theta c_t h \lambda} \quad \dots \dots \dots (4.5.12)$$

y

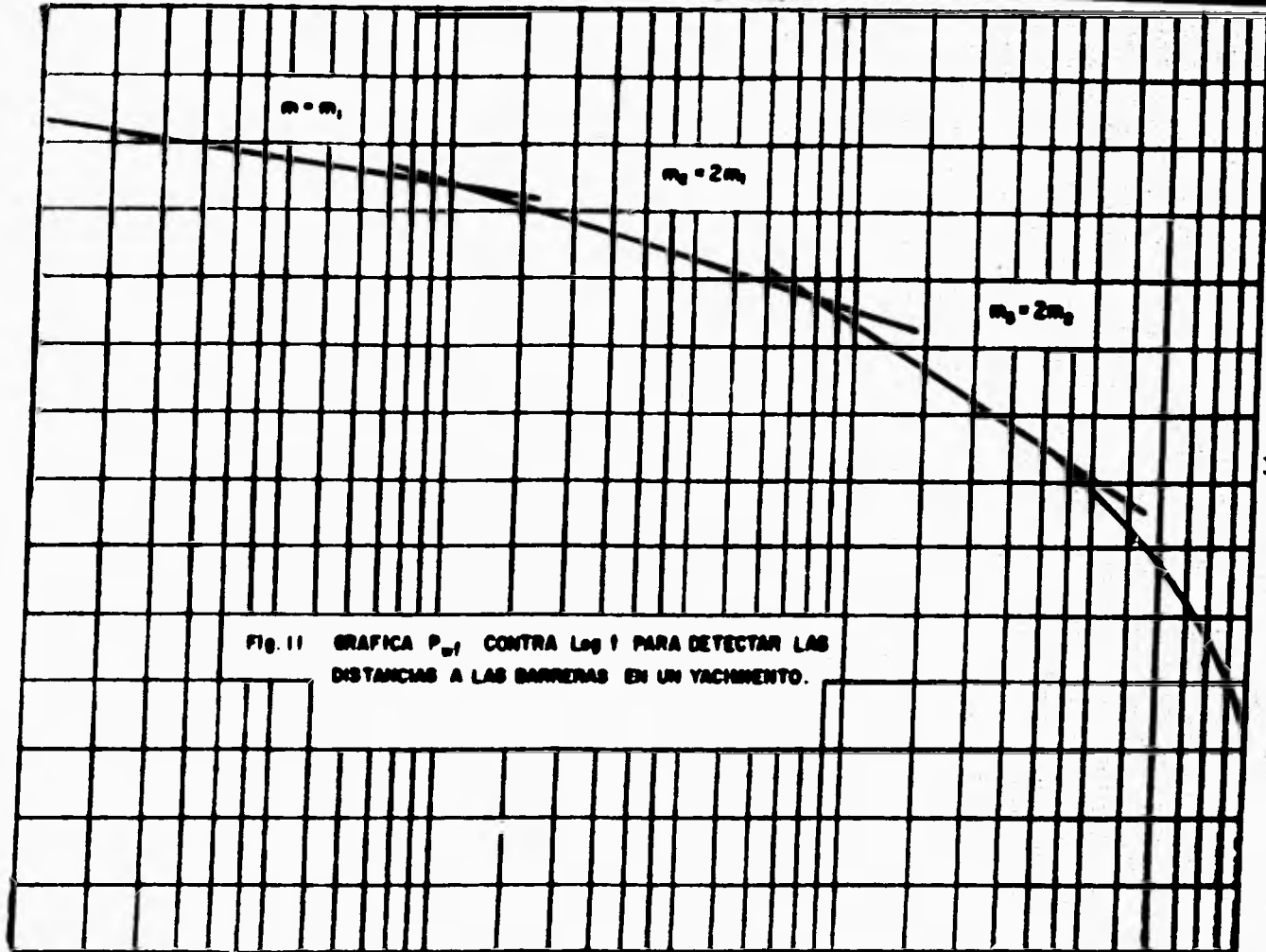
$$p_{ord} = p_i - \frac{70.6 q\mu B}{kh} \left[\ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) - \ln(C_A) + 0.80907 + 2 s \right] \quad (4.5.13)$$

recordando que A es el área de drenaje en pies² y C_A es el factor de forma de la tabla dada por Dietz²⁵ (también en ref. 9 Figs. - 10-29). B_L es el valor absoluto de la pendiente de la recta p_{wf} contra t en lb/pg²/hr.

Combinando las ecuaciones (4.5.9), (4.5.12) y (4.5.13) se obtiene:

$$C_A = 5.456 \frac{m}{B_L} \left(\frac{2.303(p_{ord} - p_i) h \lambda}{m} \right) \quad \dots \dots \dots (4.5.14)$$

o bien:



$$C_A = 5.456 \frac{m}{B_L} \text{ antilog } \left[(p_1 h_R - p_{ord})/m \right] \dots \dots \dots (4.5.15)$$

Una vez calculado el valor del factor de forma, se puede usar la Tabla 2 para determinar la configuración del área de drenaje del sistema; esto se logra comparando el valor de C_A calculado contra los valores tabulados por Dietz (Ver tabla 2). Para usar dicha tabla es necesario conocer de antemano el valor de t_{DA} correspondiente al inicio del período de flujo semi-estacionario, este tiempo puede calcularse con la siguiente ecuación:

$$(t_{DA})_{pas} = 0.1833 \frac{B_L}{m} t_{pas} \dots \dots \dots (4.5.16)$$

donde t_{pas} es el tiempo en horas correspondiente al inicio del período de flujo semi-estacionario y se puede conocer observando el tiempo de inicio de la línea recta de la gráfica p_{wf} contra t .

Se puede utilizar este método para analizar una prueba de límite de yacimiento, tomando en cuenta los siguientes pasos.

- 1° Se construyen las gráficas $p_{wf} - \log t$ y $p_{wf} - t$
- 2° De la gráfica semilog se conocen m y $p_1 h_R$. Si se desean conocer k y s , se puede lograr usando las técnicas ya vistas.
- 3° De la gráfica $p_{wf} - t$ se encuentran: B_L , p_{ord} y t_{pas}
- 4° El área de drenaje se puede calcular con:

$$A = \frac{0.23395 qB}{\rho C_x h B_L}$$

- 5° Se calcula el factor de forma C_A con cualesquiera de las ecuaciones (4.5.14) o (4.5.15).

- 6° Se calcula $(t_{DA})_{pas}$ con la ecuación (4.5.16)

Forma	Centros de gravedad			Forma	Centros de gravedad		
	C_x	C_y	C_z		C_x	C_y	C_z
	348	31.8	0.1		2.28	0.8	0.8
	343	30.9	0.1		1.88	4.88	1.0
	346	31.2	0.1		0.78	2.57	0.8
	328	27.5	0.2		1.00	27.2	0.8
	330	27.1	0.2		-1.48	6.88	2.8
	308	21.8	0.6		-2.16	0.118	3.0
	312	22.8	0.2		1.28	3.88	0.8
	188	1.48	0.7		1.14	5.18	0.8
	10.88	2.38	0.7		-0.80	0.807	1.0
	288	12.8	0.8		-2.80	0.111	1.2
	162	8.27	0.8		-2.32	0.088	0.9
					2.88	19.1	0.1
					3.22	2.8	0.1

TABLA.2 FORMAS DE AREAS DE GRUPO (Cont.)

- 7° Empleando los valores de C_A y $(\rho_A)_{pos}$ calculados, así como la tabla de Dietz (tabla 2) se puede estimar la forma del área de drenaje así como la localización del pozo en el sistema.

4.6 PRUEBAS DE LIMITE DE YACIMIENTO UTILIZANDO DATOS DE PRODUCCION.

Las pruebas de límite de yacimiento vistas hasta ahora se han analizado considerando que el pozo fluye a un gasto constante hasta alcanzar el periodo de flujo semi-estacionario; sin embargo, hasta hace algunos años no se había hecho un análisis matemático que demostrara la validez de las pruebas de límite de yacimiento considerando presión constante.

Durante la etapa de recopilación de información para conformar este trabajo fue notoria la ausencia de artículos que trataran con detalle esta consideración.

Park Jones en su primer artículo sobre pruebas de límite de yacimiento⁽¹⁾ trata el tema considerando gasto constante; sin embargo, sugiere la posibilidad de un análisis de las mismas considerando constante la presión del pozo. Pero ningún artículo más específico al respecto fue publicado sino hasta marzo de 1978 en que Dave O. Cox publica un artículo⁽²⁾ cuyo título en español se ha tomado para encabezar esta sección.

Sin pretender hacer una discusión al desarrollo matemático presentado por Cox, éste y el que a continuación se presenta pueden diferir, sin embargo, las suposiciones hechas por Cox se han tomado igual en esta deducción.

Desarrollo Matemático:

En el capítulo 3 se vio que el comportamiento de la presión en el periodo semi-estacionario se expresa mediante la ecuación (3.3.9), si en esa ecuación se usa el tiempo en días,

entonces dicha ecuación queda:

$$\Delta P_w = 5.6148 \frac{qB}{\sqrt{C_2} h_A} + 141.2 \frac{q_{uB}}{kh} P_{D_0} \quad (4.6.1)$$

donde:

$$P_{D_0} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{CA} \right) + s \quad (4.6.2)$$

La ecuación de flujo que considere presión constante, se puede obtener fácilmente si se toma en cuenta que el comportamiento de la presión en el yacimiento después que ha alcanzado el estado semi-estacionario, es totalmente independiente de cómo dicho comportamiento de flujo se ha alcanzado; es decir, que la historia de producción es irrelevante.

Entonces para situar las propiedades del yacimiento - así como las del fluido, se debe notar que el miembro derecho de la ecuación (4.6.1) para cualquier tiempo posterior al que se alcanzó el período semi-estacionario depende únicamente de la producción acumulada en un cierto tiempo, así como del gasto en ese tiempo.

El producto q en la ecuación (4.6.1) es simplemente el volumen de fluido producido acumulado (N_p), de aquí que la consideración de gasto constante hecha en la obtención de la ecuación (4.6.1) sea aceptada.

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (4.6.1) se puede escribir:

$$\Delta P_w = 5.6148 \frac{N_p B}{\sqrt{C_2} h_A} + 141.2 \frac{q_{uB}}{kh} P_{D_0} \quad (4.6.3)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo considerando ΔP_w constante y recordando que: $dN_p/dt = q$, se obtiene:

$$141.2 \frac{\mu B P D_0}{k h} \frac{dq}{dt} + 5.6148 \frac{B q}{\theta C_2 k A} = 0 \quad (4.6.4)$$

Para poder emplear cualquier método de solución para resolver la ecuación diferencial anterior, se requiere conocer las condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales se obtienen en este caso - evaluando la ecuación (4.6.1) para $t=0$:

$$q(t=0) = \frac{k h \Delta P_0}{141.2 \mu B P D_0} \quad (4.6.5)$$

Haciendo:

$$E = 141.2 \frac{\mu B P D_0}{k h} \quad (4.6.6)$$

y

$$F = 5.6148 \frac{B}{\theta C_2 k A} \quad (4.6.7)$$

Substituyendo (4.6.6) y (4.6.7) en (4.6.4), se obtiene:

$$E \frac{dq}{dt} + F q = 0 \quad (4.6.8)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial por transformada de Laplace:

$$E L \{q'\} + F L \{q\} = 0$$

$$E [S L \{q\} - S(0)] + F L \{q\} = 0$$

$$E S L \{q\} - E S(0) + F L \{q\} = 0$$

$$L \{q\} [E S + F] = E S(0)$$

$$L \{q\} = \frac{E S(0)}{E S + F}$$

multiplicando y dividiendo por E el segundo miembro de la expresión anterior:

$$L(q) = S(0) \frac{1}{s + \frac{F}{E}}$$

calculando la anti-transformada:

$$q = S(0) L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{F}{E}} \right\}$$

$$q = S(0) \mathcal{L}^{-1} \frac{F}{E} t \quad (4.6.9)$$

substituyendo (4.6.6), (4.6.7) y la condición inicial en (4.6.9) se obtiene:

$$q = \frac{k h \Delta P_0}{141.2 \text{ BHP } D_0} \mathcal{L}^{-1} \left[-0.0398 \frac{k}{\text{BUC}_t A P D_0} t \right] \quad \dots (4.6.10)$$

Esta ecuación se puede expresar en forma logarítmica:

$$\ln q = \ln \frac{k h \Delta P_0}{141.2 \text{ BHP } D_0} - 0.0398 \frac{k t}{\text{BUC}_t A P D_0} \quad (4.6.11)$$

donde:

$$\bar{D} = 0.0398 \frac{k}{\text{BUC}_t A P D_0} \quad (4.6.12)$$

La ecuación (4.6.11) también se puede expresar como:

$$\log q = \log \left(\frac{k h \Delta P_0}{141.2 \text{ BHP } D_0} \right) - 0.017285 \frac{k t}{\text{BUC}_t A P D_0} \quad (4.6.13)$$

por lo tanto al graficar $\log q$ contra t se obtiene una línea recta de:

pendiente:

$$\bar{a} = -0.017285 \frac{k}{\mu c_e A \rho D_0} \quad (4.6.14)$$

y ordenada al origen

$$\xi = \frac{k h \Delta p_w}{141.2 \mu S \rho D_0} \quad (4.6.15)$$

tal como se muestra en la Fig. 12.

Por otro lado, observando la ecuación (4.6.11):

$$q_i = \frac{k h \Delta p_w}{141.2 \mu S \rho D_0} \quad (4.6.16)$$

además:

$$\bar{D} = 0.0398 \frac{k}{\mu c_e A \rho D_0} = -2.3026 \bar{a} \quad (4.6.17)$$

Si de la ecuación (4.6.16) se despeja k y se substituye en (4.6.17) se obtiene la expresión para determinar el volumen poroso del yacimiento que está en comunicación con el pozo.

$$V_{pc.y.} = \theta h A = \frac{5.6146 q_i B}{\bar{D} c_e \Delta p_w} \quad (4.6.18)$$

donde:

\bar{D} : días⁻¹

Si $c_e = (1-S_w)c_e$ y como $(1-S_w)\theta h A = V_0 c_e$, entonces:

$$N = \frac{V_0}{B}$$

por tanto el volumen de aceite que está en comunicación con el pozo puede obtenerse de:

$$N = \frac{5.6146 q_i}{\bar{D} c_e \Delta p_w} \quad (4.6.19)$$

En esta forma, la aplicación de la ecuación (4.6.10) constituye una prueba de límite de yacimiento similar a la introducida por Jones solo que ahora considerando la presión constante.

La permeabilidad se puede determinar de la ecuación - (4.6.16):

$$k = \frac{141.2 q_i B^2 P_{D_0}}{h \Delta p_w} \quad (4.6.20)$$

Dado que P_D contiene el factor de daño (ecuación --- 4.6.2), este factor deberá conocerse previamente para poder determinar la permeabilidad; sin embargo, si la permeabilidad se ha obtenido de una prueba del periodo transitorio, el factor de daño bajo condiciones de flujo estabilizado se podrá calcular con:

$$s = P^*_{D_0} (k/k_c - 1) \quad (4.6.21)$$

donde:

$P^*_{D_0}$: es la cantidad adimensional calculada con la ecuación --- (4.6.2) considerando $s = 0$.

k : es la permeabilidad calculada previamente con otro análisis.

k_c : es el valor de permeabilidad calculado con la ecuación --- (4.6.20) usando $P^*_{D_0}$.

q_i : es el gasto inicial (bl/día) que se obtiene al extrapolar la recta $\log q - t$.

Cenit q

z

Figura 12

Fig. 12 GRAFICA $\log q$ CONTRA t PARA EL ANALISIS DE UNA PRUEBA DE LIMITE DE YACIMIENTO USANDO DATOS DE PRODUCCION.

CAPITULO 5

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

En este capítulo se presentan cuatro ejemplos para - ilustrar la aplicación de los métodos de Pruebas de Límite de - Yacimiento vistos en este trabajo. Los tres primeros corresponden al análisis que considera gasto constante, el cuarto y último corresponde al análisis que considera presión constante.

5.1 Este ejemplo fue tomado del apéndice D del "PRESSURE BUILDUP AND FLOW TESTS IN WELLS". Escrito por C.S. Matthews - D.G. Russell (9)

Los valores de presión se obtuvieron a partir de una prueba de decremento de presión efectuada durante 50 horas en - un pozo de un yacimiento de la cuenca de Denver.

Los datos son:

$q = 800$ bbl. c.s./día	$r_w = 0.33$ pies
$\mu = 1.0$ cp	$P_i = 1,895$ lb/pg ²
$\phi = 0.1$	$c_f = 17.7 \times 10^{-6}$ (vol/vol/lb/pg ²)
$h = 8$ pies	$B = 1.25$
	$S_w = 0.35$

- Del análisis del periodo transitorio determine:
 k , kh y s
- Del análisis del periodo transitorio-tardío, determine:
 k , s y V_p
- Del análisis del periodo semi-estacionario, determine:
 V_p y N

Solución:

al En la Fig. 13 se presenta la gráfica P_{wf} contra $\log t$ de la cual se puede observar que después de transcurridos 10 minutos de la prueba los datos de presión conforman una línea recta correspondiente al período transitorio. Una desviación de esta línea recta ocurre a un tiempo aproximado de 2 hrs. (120 minutos), el empiezo de esta desviación señala el final del período transitorio.

La pendiente de la recta correspondiente a este período transitorio es

$$m = 212 \text{ lb/pg}^2/\text{ciclo}$$

De la ecuación 3.1.8 se obtiene:

$$k = \frac{162.6 \text{ qUS}}{m h}$$

entonces:

$$k = \frac{162.6(800) (1.0) (1.25)}{212}$$

$$k = 96 \text{ md}$$

o bien

$$k_h = 767 \text{ md-pie}$$

De la ecuación (3.1.9):

$$s = 1.15 \left| \frac{P_i - P_{1Hr}}{m} - \log \left(\frac{k}{0.148 P_r \mu_w^2} \right) + 3.2275 \right|$$

De la gráfica semilog se lee $P_{1Hr} = 1,690$, entonces:

$$s = 1.15 \left| \frac{1895 - 1690}{212} - \log \frac{96}{0.148 \times 1.0 \times 17.7 \times 10^{-6} \times 0.11} + 3.2275 \right|$$

entonces:

$$\lambda = - 5.0$$

- b) De la ecuación (4.2.1) que es la base del método de análisis para el periodo transitorio tardío se vio la utilidad de graficar $\log (P_{wf} - \beta)$ contra t . Una gráfica de este tipo para el problema en cuestión se presenta en la Fig. 14.

De la Fig. 13 se observó que el periodo transitorio - termina aproximadamente a las 2 horas de prueba. Por otro lado, en la Fig. 15 se muestra la gráfica P_{wf} contra t en ella se observa que el inicio de la línea recta que marca el periodo de - flujo semi-estacionario se tiene aproximadamente a las 10 horas de prueba; por tanto, siendo conservadores se puede decir que - el periodo transitorio tardío queda comprendido en un intervalo de tiempo:

$$2 \leq t \leq 7 \text{ horas}$$

Por ensayo y error se llegó a la conclusión de que el valor de $p = 1,460 \text{ lb/pg}^2$ es el que proporciona la mejor línea recta en la gráfica $\log (P_{wf} - \beta)$ contra t de la Fig. 14. De esta gráfica se observa que el valor absoluto de la pendiente - es:

$$B = \frac{\log 320 - \log 32}{7.8} = \frac{1}{7.8} \text{ hrs}^{-1}$$

y la ordenada al origen es:

$$b = 320 \text{ lb/pg}^2$$

De la ecuación (4.2.4):

$$kh = \frac{118.6 \text{ qvB}}{b} = \frac{(118.6) (800) (1.0) (1.25)}{320}$$

entonces:

$$kh = 371 \text{ md} \cdot \text{pie}$$

$$k = 46.4 \text{ md}$$

De la ecuación (4.2.5)

$$V_p = 0.1115 \frac{qB}{3bc_f} = \frac{(800)(1.25)}{(177.4)(1320)(17.7 \times 10^{-6})}$$

entonces:

$$V_p = 0.146 \times 10^6 \text{ bbl. c.v.}$$

y de la ecuación (4.2.6):

$$s = 0.84 \left(\frac{1895 - 1460}{320} \right) - \ln \left(\frac{482}{0.33} \right) + 0.75$$

$$s = -5.4$$

Los valores de kh y s obtenidos aquí (371 md-pie y -5.4) no son iguales a los obtenidos en el análisis transitorio (767 md-pie y -5), esto se debe probablemente a que al pozo se le hizo un tratamiento de hidrofractura.

- c) De la gráfica P_{wf} contra t (Fig.15) correspondiente al período semi-estacionario se observa que el valor absoluto de la pendiente la recta es:

$$E_L = 15.8 \text{ lb/pg}^2/\text{hr}$$

Ahora, de la ecuación (4.3.11)

$$V_p = \frac{0.23395 qB}{B_L c_f} = \frac{0.23395 (800)(1.25)}{(15.8)(17.7 \times 10^{-6})}$$

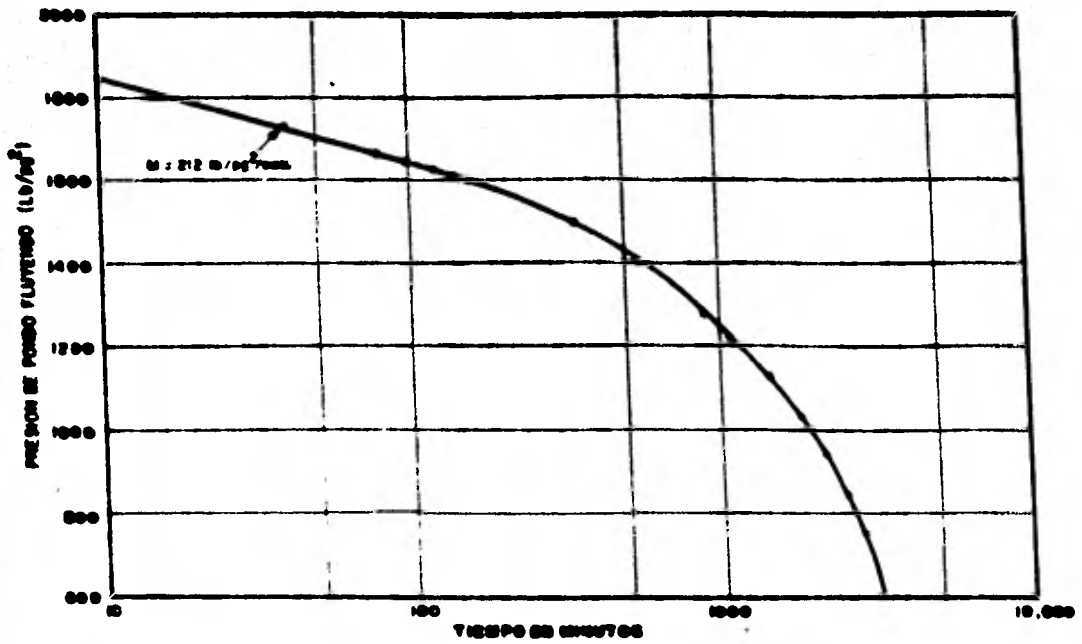


Fig. 13 GRAFICA P_{wf} CONTRA LOS t PARA EL EJEMPLO 5.1.

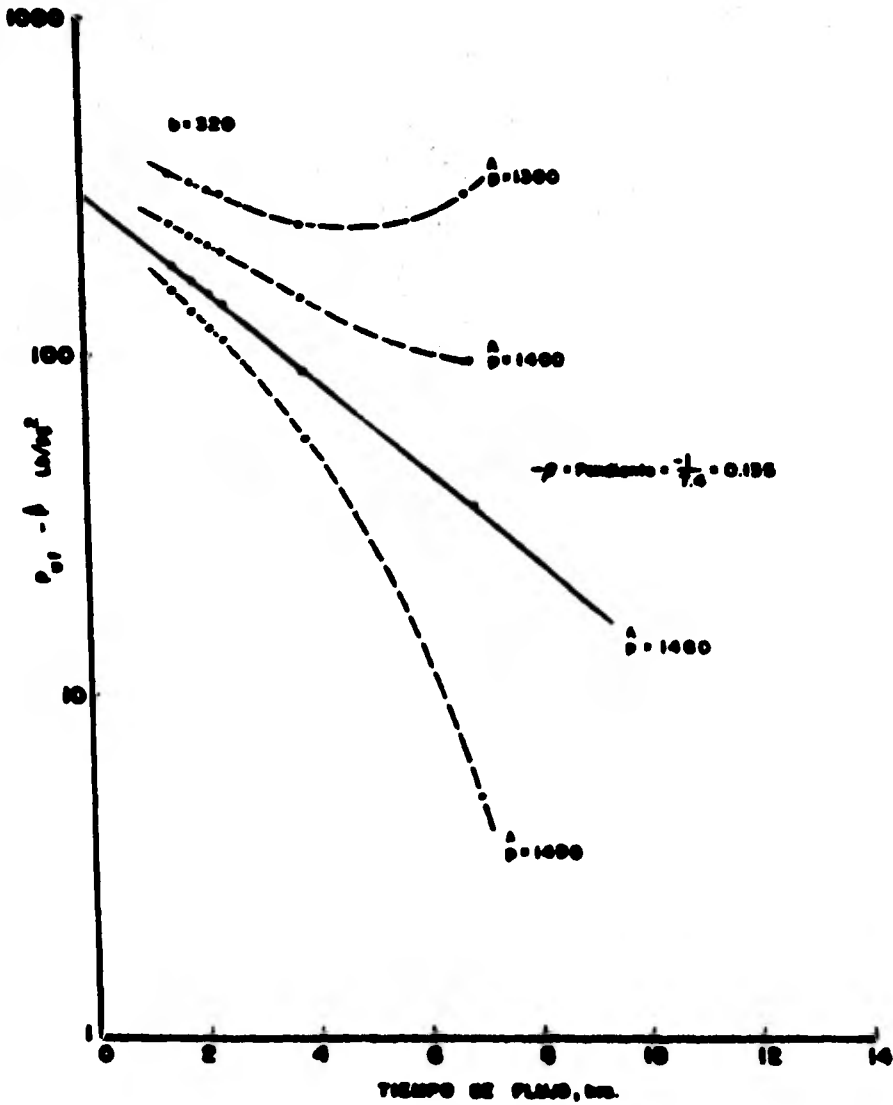


Fig. 24 GRAFICA LOS $(P_{01} - P)$ CONTRA t PARA EL EJEMPLO 8.1.

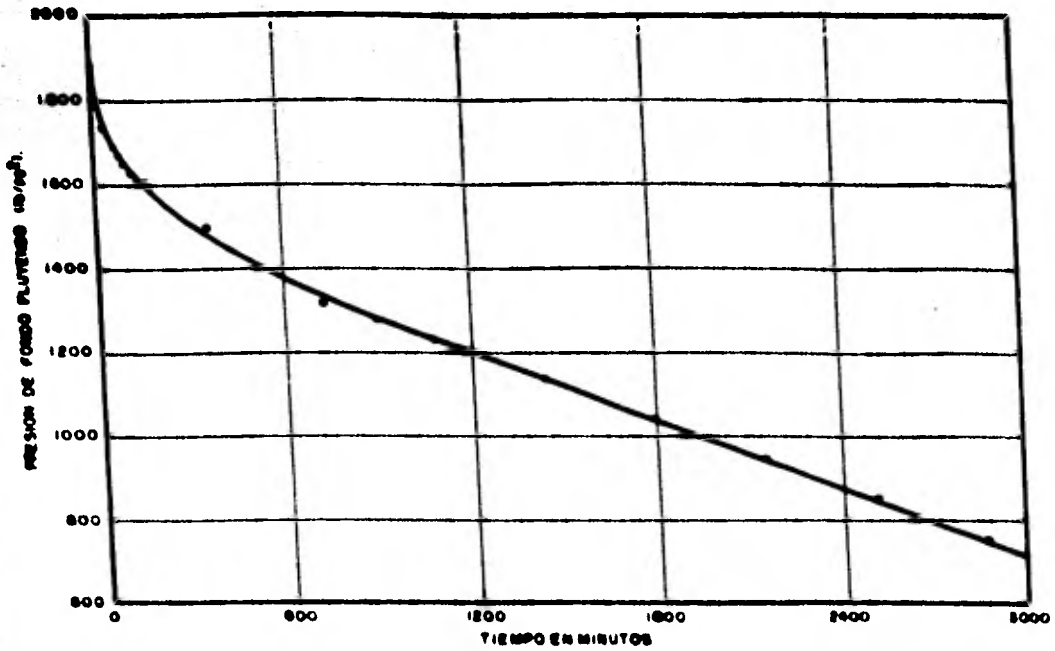


FIG. 18 GRAFICA P_{wf} CONTRA t . PARA EL EJEMPLO 5.1.

$$V_p = 0.83655 \times 10^6 \text{ pies}^3 \text{ c.y.}$$

$$= 0.149 \times 10^6 \text{ bbl. c.y.}$$

De la ecuación (4.3.14):

$$N_{ca} = \frac{0.0418 q}{B_L c_e} = \frac{0.0418 (800)}{15.8 (17.7 \times 10^6) / (1-0.95)}$$

$$N = 77,722.949 \text{ bbl.}$$

De una Prueba de Límite de Vacimiento efectuada en un pozo exploratorio en Louisiana se obtuvo la información que se presenta en la tabla 3. Otros datos son:

Presión de fondo cerrado, previo a la prueba $P_L = 11,074 \text{ lb/pg}^2$

Gasto constante de aceite durante toda la prueba $q = 500 \text{ bbl/día c.s.}$

Porosidad: $\theta = 0.25$

Saturación de agua intersticial: $S_w = 20\% = 0.20$

Viscosidad de aceite: $\mu = 0.8 \text{ cp}$

Compresibilidad efectiva: $c_e = 18 \times 10^{-6} (\text{lb/pg}^2)^{-1}$

- a).- Determinar la permeabilidad
- b).- Calcular V_p y N usando el análisis del periodo semi-estacionario
- c).- Utilizando el Método de Park Jones determinar N
- d).- Determinar distancias a las barreras, ángulos entre las barreras y construir un bosquejo del área de drenaje, empleando la expresión del Método de Horner.

Solución:

a).- Con la información contenida en las columnas 2 y 3 de la Tabla 3 se construye una gráfica P_{wf} (lb/pg²) contra $\log t$ (días), esta gráfica se muestra en la Fig. 16 y en la cual se observa que los efectos producidos por el pozo deca parecen desde $t = 0.001$ días a partir de este tiempo se empieza a extender la línea recta correspondiente al período transitorio. El valor absoluto de la pendiente es:

$$m = m_1 = 45 \text{ lb/pg}^2 / \text{ciclo}$$

De la ecuación (3.1.8) se tiene:

$$k = \frac{162.6 \text{ qvB}}{m h} = \frac{162.6 (500) (0.8) (1.40)}{(45) (8)}$$

$$k = 253 \text{ md}$$

b).- Con la información de las columnas 1 y 3 de la tabla 3, se construye la gráfica P_{wf} (lb/pg²) contra t (hrs.) tal como se muestra en la Fig. 17. En esta gráfica se observa que a partir de un tiempo ($t_{ps} = 7.2$) la curva conformada se convierte en una línea recta que corresponde al período semi-estacionario. El valor absoluto de la pendiente de la recta es:

$$E_L = 12.5 \text{ lb/pg}^2 / \text{hr}$$

Usando la ecuación (4.3.11) se puede obtener el volumen poroso:

$$V_p = \frac{0.23395 \text{ qB}}{E_L c_t} = \frac{0.23395 (500) (1.4)}{12.5 (1 - 0.20) (18 \times 10^{-6})}$$

$$V_p = 909.77157 \times 10^3 \text{ pies}^3$$

De la ecuación (4.3.14) se puede calcular el volumen de aceite que está en comunicación con el pozo:

$$N = \frac{0.0018 \text{ g}}{0.1 \text{ c}_2} \frac{0.0018 (1000)}{172.51 (10^2) 10^{-8}}$$

$$N = 92,890 \text{ bbl. c.a.}$$

- c) Con los datos de las columnas 2 y 7 de la tabla 3, se construye una gráfica $\log V$ ($\text{lb/pg}^2/\text{bbl}$) contra $\log t$ (días).

Esta gráfica se muestra en la Fig. 18 en la que se observa que para el período semi-estacionario, V toma el valor constante:

$$V_s = 0.43 \text{ lb/pg}^2/\text{bbl}$$

Empleando este valor en la ecuación (4.4.28) se obtiene:

$$N = \frac{1}{V_s c_2 B} = \frac{1}{0.43 (18 \times 10^{-8}) (1.8)}$$

$$N = 92,300 \text{ bbl. c.a.}$$

- d) De la tabla 3 se toman los datos de las columnas 2 y 3 para construir una gráfica P_{wf} contra $\log t$. Esta gráfica se muestra también en la Fig. 16 en la cual se observa que al correlacionar los puntos se han obtenido tres líneas rectas distintas.

La recta 1 cuya pendiente (valor absoluto) es - - -
 $m_1 = 43 \text{ lb/pg}^2/\text{ciclo}$, corresponde el comportamiento de un yacimiento infinito. La recta 2 de pendiente en valor absoluto - -
 $m_2 = 91 \text{ lb/pg}^2/\text{ciclo}$, corresponde a una desviación de m_1 motivada por el "choque" de las ondas de presión con la primer barrera. En forma similar cuando una segunda barrera es alcanzada por las

ondas de presión la pendiente en valor absoluto, cambia a $m_3=170$

De la ecuación (4.5.8):

$$x_b = 2 \sqrt{M x_b}$$

donde:

$$\eta = \frac{6.33 \times 10^{-3} \text{ k}}{\mu V c_f} = \frac{6.33 \times 10^{-3} \times (253)}{0.25(0.8) (1-0.2)(18 \times 10^{-6})}$$

$$= 556,070$$

Se observa que para poder calcular las distancias a cada barrera es necesario antes buscar en la gráfica (Fig. 16) los tiempos t_b a los cuales se localizan cada una de ellas.

La primera barrera queda determinada por el punto de intersección de la recta 1 con la 2. A este punto le corresponde un tiempo:

$$t_{b1} = 0.01 \text{ días}$$

La segunda barrera se determina por el punto de intersección de la recta 2 con la 3, correspondiéndole un tiempo:

$$t_{b2} = 0.08 \text{ días}$$

La tercera barrera se localiza en el punto de desviación de la recta 3 hacia un trazo curvo, en ese punto se tiene el inicio del periodo semi-estacionario correspondiéndole un tiempo:

$$t_{b3} = 0.30 \text{ días}$$

Al substituir cada uno de estos tiempos en la ecuación (4.5.8) así como el valor de η , se obtienen:

Para la primera barrera: $r_{b1} = 149$ pies

Para la segunda barrera: $r_{b2} = 422$ pies

Para la tercera: $r_{b3} = 818$ pies

Posteriormente se procede a calcular los ángulos entre las barreras.

Para la recta 1:

$360^\circ (m1/m1) = 360^\circ (45/45) = 0 = 360^\circ$ no existe ángulo ^{lo} que marca un comportamiento de flujo completamente radial.

Para la recta 2:

$$\theta_1 = 360^\circ (m1/m2) = 360^\circ (45/91) \therefore \theta_1 = 178^\circ$$

Para la recta 3:

$$\theta_{1-2} = 360^\circ (m1/m3) = 360^\circ (45/170) \therefore \theta_{1-2} = 95^\circ$$

Con las distancias a las barreras así como con los ángulos entre estas, es posible ²⁰⁻²¹ construir un bosquejo del área de drenaje del sistema. Este croquis se muestra en la Fig. 19.

(1) Tiempo (horas)	(2) Tiempo (días)	(3) Presión de Fondo fluyen- do, P_{wf} (lb/ps ²)	(4) dt (días) $(2)_n - (2)_{n-1}$	(5) $-dP_{wf}/dt$ (lb/ps ²) $(3)_{n-1} - (3)_n$	(6) $-dP_{wf} / dt$ (lb/ps ² /día) $(5) / (4)$	(7) $v = (6)/q_e$ (lb/ps ² /bbl)
0.000	0.000	11,074	--	--	--	--
0.024	0.001	10,815	0.001	251.0	--	--
0.048	0.002	10,803	0.001	12.0	12,000	17.14
0.096	0.004	10,790	0.002	13.0	6,500	9.29
0.144	0.006	10,781	0.002	9.0	4,500	6.43
0.192	0.008	10,774	0.002	7.0	3,500	5.00
0.24	0.01	10,769	0.002	5.0	2,500	3.57
0.48	0.02	10,742	0.01	27.0	2,700	3.86
0.96	0.04	10,714	0.02	28.0	1,400	2.00
1.44	0.06	10,699	0.02	15.0	750	1.07
1.92	0.08	10,686	0.02	13.0	650	0.93
2.4	0.10	10,670	0.02	16.0	800	1.14
3.6	0.15	10,641	0.05	29.0	590	0.83
4.8	0.20	10,619	0.05	22.0	440	0.63
9.6	0.40	10,350	0.2	69.0	345	0.49
14.4	0.60	10,490	0.2	60.0	300	0.43
19.2	0.80	10,430	0.2	60.0	300	0.43
24.0	1.00	10,370	0.2	60.0	300	0.43

TABLA 3 DATOS PRESION - TIEMPO DEL EJEMPLO 5.2

P_{of} (LB/IN²)

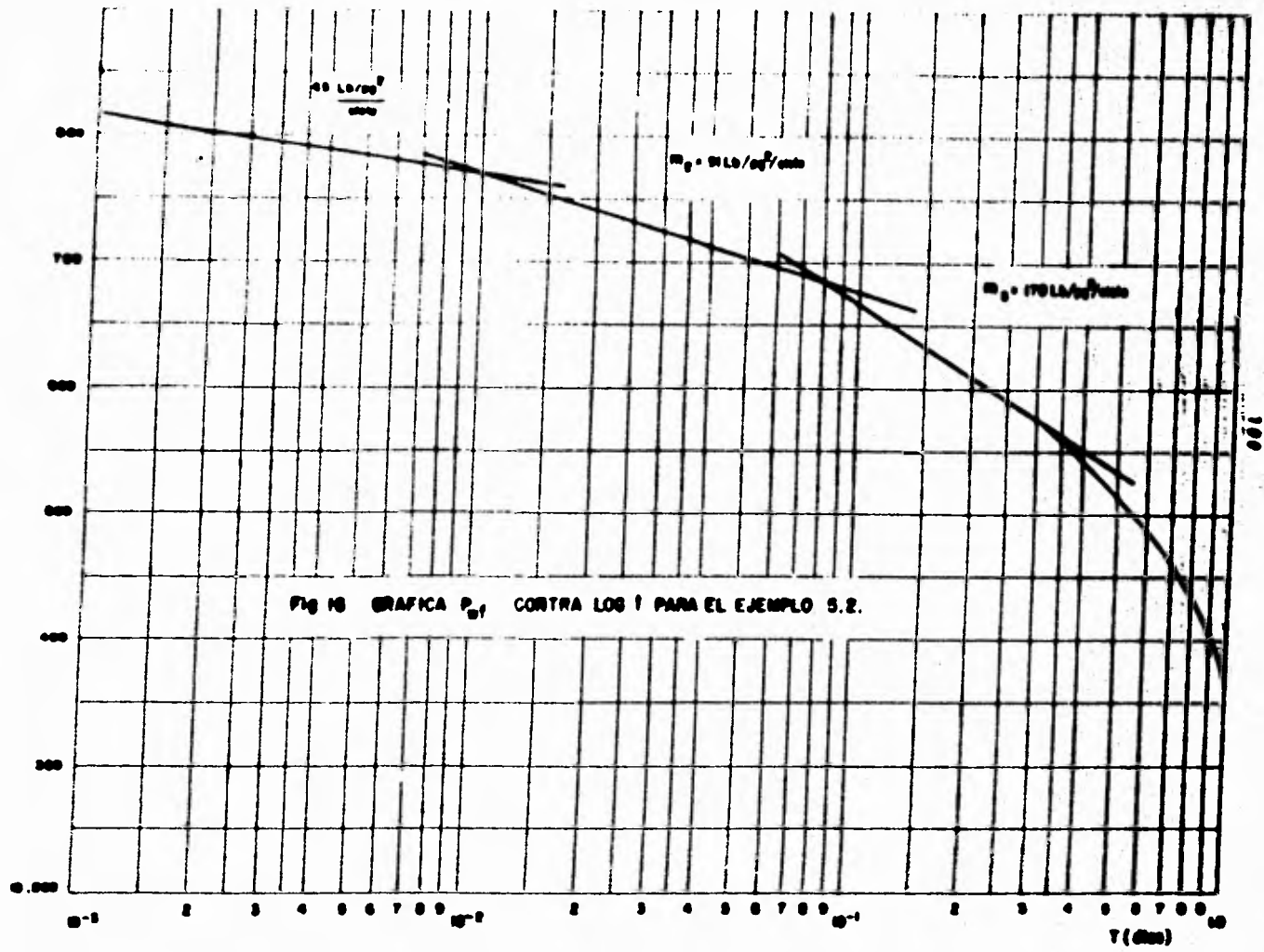
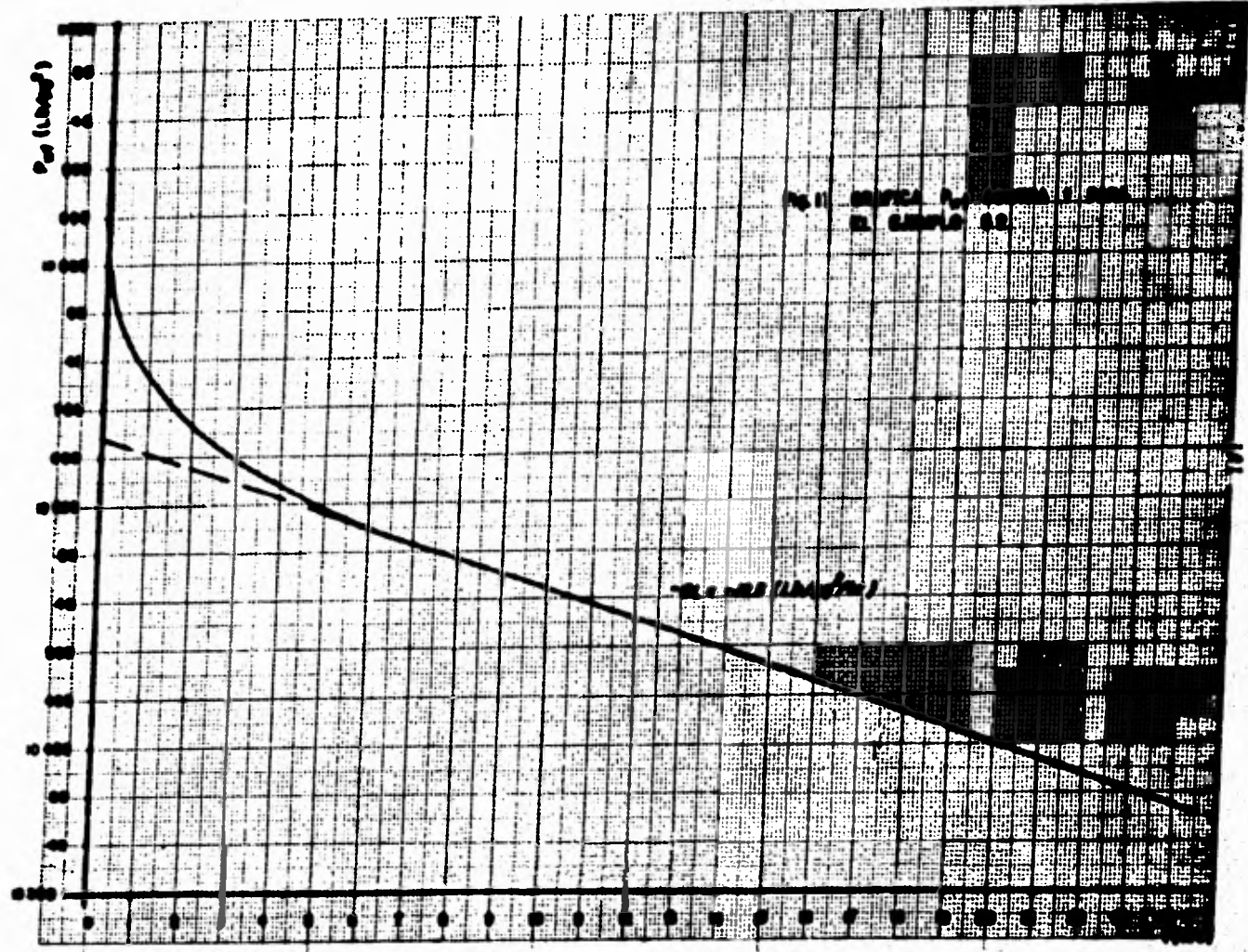
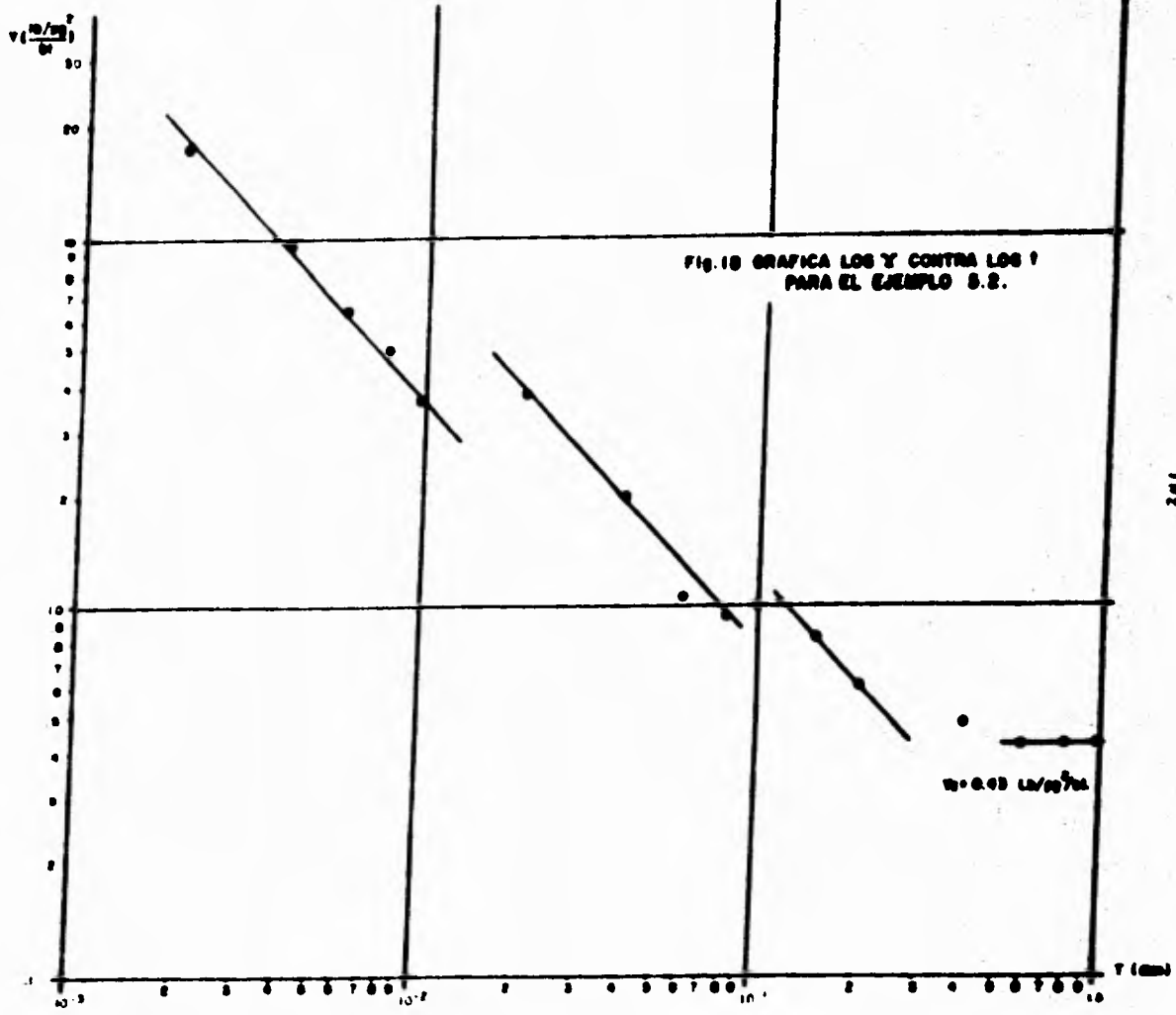


FIG 18 GRAFICA P_{of} CONTRA LOS T PARA EL EJEMPLO 5.2.





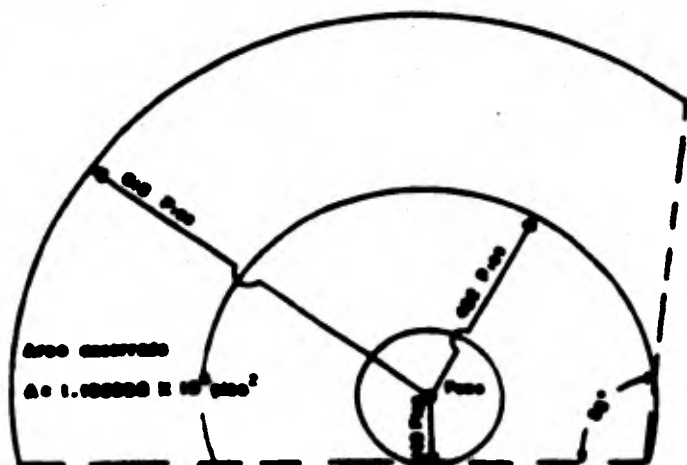


Fig. 10. BOCUEJO DEL AREA DE DRENE DEL POZO DEL EJEMPLO 8.2.

5.3 Prueba Simple de Límite de Vaciamiento.

En la Tabla 4 se presentan datos dados de las gráficas del ejemplo 5.1.

Aparte de esa información, otros datos son:

$q = 800 \text{ bl/dla}$	$h = 8 \text{ pies}$
$B = 1.25 \text{ bl/bl}$	$r_w = 0.33 \text{ pies}$
$\mu = 1.0 \text{ cp}$	$c_g = 17.7 \times 10^{-6} (\text{lb/pg}^2)^{-1}$
$\theta = 0.14$	$p_L = 2000 \text{ lb/pg}^2$
$S_w = 0.35$	

- Usando el análisis del periodo transitorio, calcular k y s .
- Utilizando el análisis del periodo semi-estacionario, calcular: V_p , N , t_{pss} , A
- Empleando el método de análisis de Park Jones, calcular: N , t_{pss} , k (en cada barrera)
- Usando el método de R.C. Eichelouger Jr., estimar: el factor C_A así como la forma aproximada del área de drenaje del sistema.
- Calcular el factor de daño utilizando el valor de k obtenido en el periodo transitorio y el valor de C_A calculado en el inciso anterior.

Solución:

- Con los datos de la tabla 4 se construye la gráfica p_{wf} contra $\log t$. Esta gráfica se muestra en la Fig. 20.

De la recta semilogarítmica se tiene que: $m = 212 \text{ lb/pg}^2/\text{ciclo}$, entonces, de la ecuación (3.1.8) se obtiene:

$$k = \frac{162.6 q_u B}{mh} = \frac{162.6 (800) (1.25) (1.0)}{(212) (8)}$$

$$k = 95.87 \text{ md}$$

De la ecuación (3.1.9)

$$s = 1.151 \left| \frac{?L - P1Hh}{m} - \log \left(\frac{k}{\gamma u c_2^2 m^2} \right) + 3.2275 \right|$$

$$s = 1.151 \left| \frac{2000 - 1690}{272} - \log \frac{95.87}{0.14 \times 1.0 \times 17.7 \times 10^{-6} \times (0.99)^2} + 3.2275 \right|$$

$$s = -4.441$$

b) Con la información de las columnas 1 y 3 de la misma tabla, se construye la gráfica $\rho_w h$ contra z (Fig. 21)

De la gráfica se obtiene que:

$$B_L = 15.8$$

Substituyendo este valor en la ecuación (4.3.11):

$$V_F = \theta h A = \frac{0.23395 (800) (1.25)}{15.8 (17.7 \times 10^{-6})}$$

$$V_n = 8.3637 \times 10^5 \text{ pies}^3 \text{ c.y.}$$

$$\text{Si } A = \frac{V_F}{\theta h} = \frac{8.3637 \times 10^5}{(0.72) (1)}$$

$$A = 746.75893 \times 10^3 \text{ pies}^2$$

De la ecuación (4.3.14):

$$N = \frac{0.0418 q}{BL C_e} = \frac{0.0418 (800)}{(15.8) \frac{17.7 \times 10^{-6}}{(1 - 0.95)}}$$

donde:

$$C_e = (1 - S_u) C_e$$

entonces:

$$N = 77,723 \text{ bla c.s.}$$

De la gráfica p_w contra t se observa que la línea -
recta correspondiente al período semi-estacionario comienza a -
un tiempo aproximado:

$$t_{ps} = 15.8 \text{ hrs.} = 0.658 \text{ días}$$

- c) Con los valores contenidos en las columnas 2 y 7 de la tabla 4 se construye la gráfica $\log V$ (lb/m³bl) contra $\log t$ (días) como se observa en la Fig. 22.

De esta gráfica se tiene que $V_s = 0.3792$, substituyendo este valor en la ecuación (4.4.28):

$$N = \frac{1}{V_s C_e B} = \frac{1}{(0.3792) \frac{17.7 \times 10^{-6}}{(1 - 0.95)}}$$

$$N = 77,475.0292 \text{ bla. c.s.}$$

De la gráfica se observa que la recta cambia de pendiente brusca

mente a partir del tiempo $t = 0.65$ días. Si este cambio de pendiente significa el comienzo del período semi-estacionario, entonces:

$$t_{pas} = 0.65 \text{ días} = 15.6 \text{ hrs.}$$

De la ecuación: (4.4.33)

$$D = 22V$$

y de la (4.4.32):

$$k = \frac{101.2u}{22Vh}$$

De tal forma que observando en la gráfica los tiempos de alcance a cada barrera, se obtiene:

para $t = t_{b_0} = 0.004$ días, $D = 0.189$; entonces:

$$k = 93.4 \text{ md correspondiente al período transitorio}$$

Para $t = t_{b_1} = 0.084$ días, $D = 0.252$; entonces:

$$k = 70 \text{ md}$$

Para $t = t_{b_2} = 0.65$ días, $D = 0.49296$; entonces:

$$k = 35.8 \text{ md.}$$

d) De la gráfica p_{wf} contra $\log t$ (Fig. 20) se pueden leer:

$$m = 212 \text{ lb/pg}^2/\text{ciclo}$$

$$m_{1Hh} = 1690 \text{ lb/pg}^2$$

Ahora, de la gráfica p_{wg} contra z (Fig. 21) se obtienen:

$$B_L = 15.8 \text{ lb/pg}^2/\text{hr}$$

y

$$P_{ord} = 1515 \text{ lb/pg}^2$$

Substituyendo estos valores en la ecuación (4.5.14):

$$2.303 (P_{ord} - P_{IH_2})/m$$

$$C_A = 5.456 \frac{m}{BL} \text{ (C)}$$

$$2.303 (1515 - 1690)/212$$

$$= 5.456 \frac{212}{15.8} \text{ (C)}$$

se obtiene:

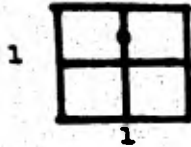
$$C_A = 10.958$$

Luego, substituyendo el valor de $t_{ps} = 15.6$ hrs en la ecuación (4.5.16):

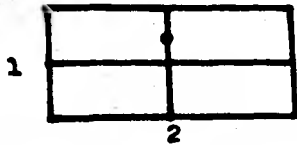
$$(t_{DA})_{ps} = 0.214$$

Ahora, comparando el valor de C_A calculado, contra los tabulados por Dietz (tabla 2), se observa que los valores que más se aproximan al C_A calculado son:

$C_A = 12.9$ para $(t_{DA})_{ps} > 0.6$ correspondiéndole la siguiente forma de área de drenaje:



$C_A = 10.8$ para $(\lambda D_A)_{pas} \geq 0.3$ con la siguiente forma:



De estos dos valores de C_A , se observa que el segundo ($C_A = 10.8$) es el que más se aproxima al calculado, el valor de $(\lambda D_A)_{pas} = 0.214$ apoya el criterio para decidirse por el valor de $C_A = 10.8$.

Por tanto, la forma rectangular 2:1 es tal vez la correspondiente al área de drenaje del pozo.

e) De la ecuación (4.4.29) en la que:

$$P_{ord} = p_i - \frac{141.2 \text{ qms}}{kh} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) + s \right]$$

Despejando s :

$$s = \frac{P_i - P_{ord}}{141.2 \frac{\text{qms}}{kh}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right)$$

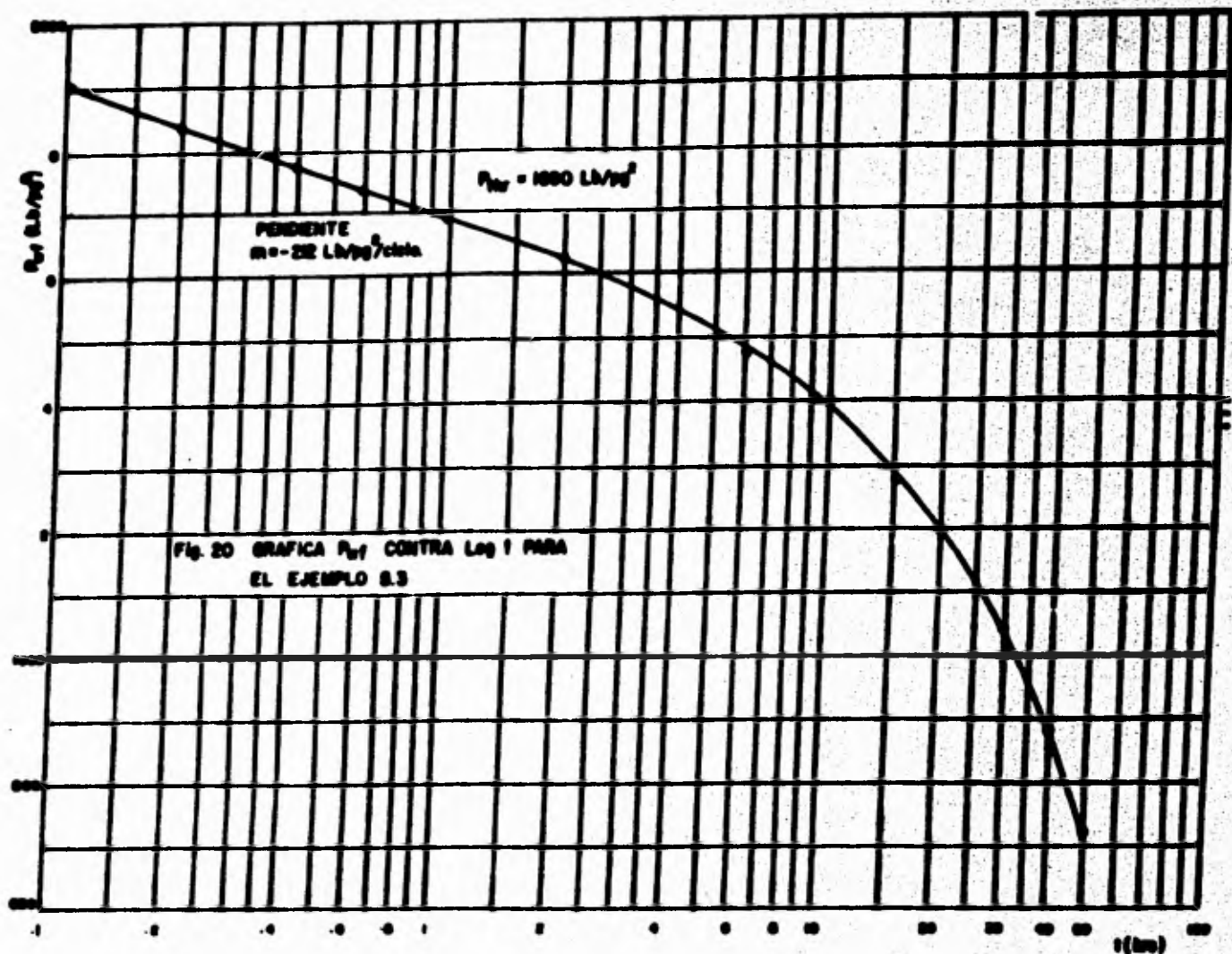
De la gráfica p_{wg} contra t (Fig. 21) se tiene que:

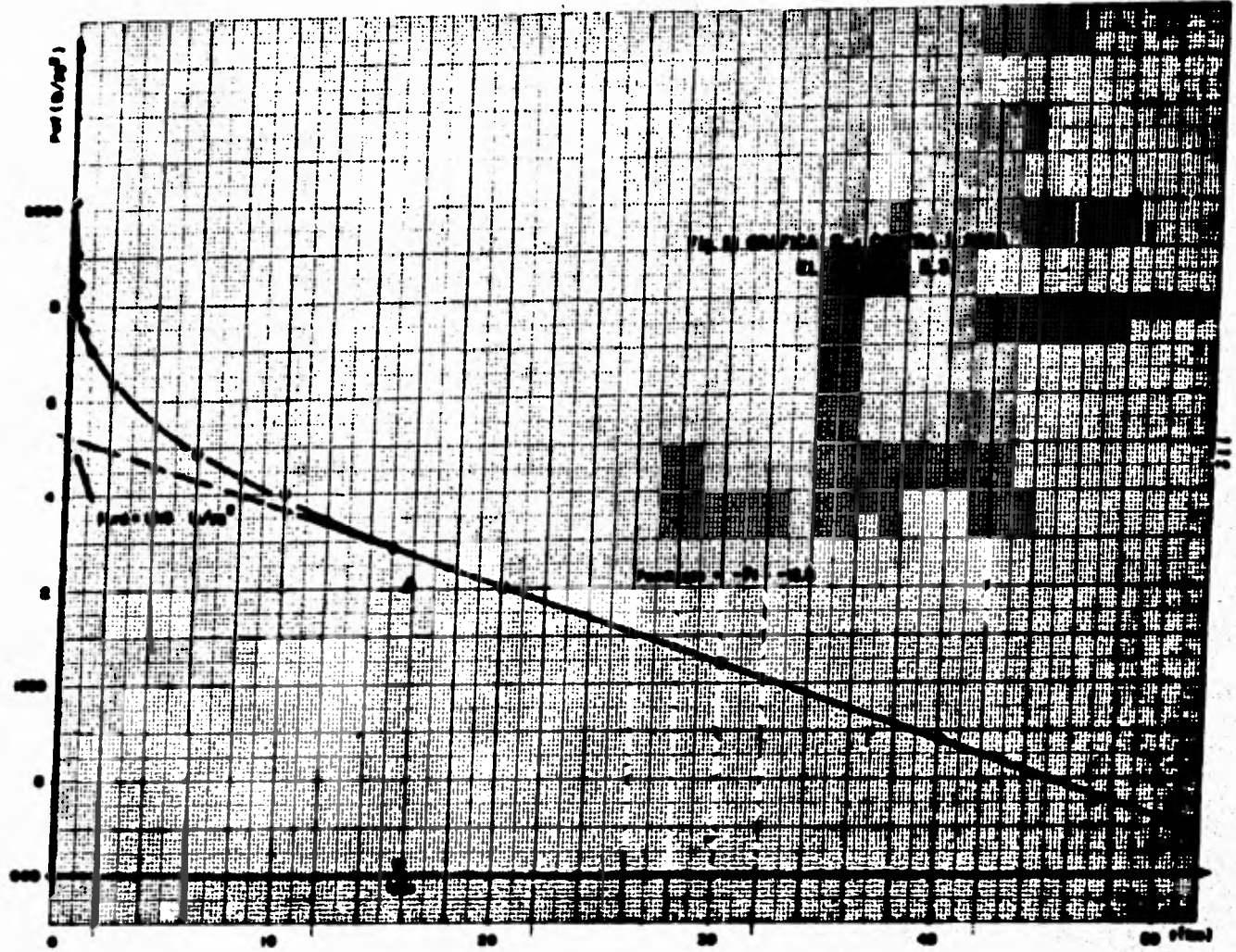
$$P_{ord} = 1515 \text{ lb/ppg}^2$$

entonces:

(1) Tiempo t (horas)	(2) Tiempo t (días)	(3) Presión de fondo, p_{wg} (lb/pg ²)	(4) $\frac{dp_{wg}}{dt}$ (días) $(2)_n - (2)_{n-1}$	(5) $-\frac{dp_{wg}}{dt}$ (lb/pg ²) $(3)_{n-1} - (3)_n$	(6) $-\frac{dp_{wg}}{dt} \cdot t$ (lb/pg ² /días) (5) / (4)	(7) $\frac{v}{qB}$ $(-\frac{dp_{wg}}{dt} / qB)$ $\frac{lb/pg^2/be}{(6)/qB}$
0.000	0.000	2,000.0	---	---	---	
0.1	0.0042	1,902.0	0.0042	98.0	2.34×10^6	23.40
0.2	0.0083	1,838.2	0.0042	63.8	1.52×10^6	15.2
0.4	0.0167	1,774.4	0.0084	63.8	7.6×10^5	7.6
0.6	0.025	1,737.0	0.0083	37.4	4.5×10^5	4.5
1.0	0.0416	1,690.0	0.0166	47.0	2.8×10^5	2.8
2.0	0.0833	1,626.2	0.0417	63.8	1.53×10^5	1.53
6.0	0.25	1,480.0	0.1667	146.2	8.77×10^4	0.877
10.0	0.4167	1,400.0	0.1667	80.0	4.80×10^4	0.48
15.0	0.625	1,278.0	0.2083	122.0	5.86×10^4	0.586
20.0	0.8334	1,199.0	0.2084	79.0	3.79×10^4	0.379
30.0	1.25	1,041.0	0.4166	158.0	3.79×10^4	0.379
40.0	1.6667	883.0	0.4167	158.0	3.79×10^4	0.379
50.0	2.0833	725.0	0.4166	158.0	3.79×10^4	0.379

TABLA 4. DATOS PRESION - TIEMPO DEL EJEMPLO 5.3





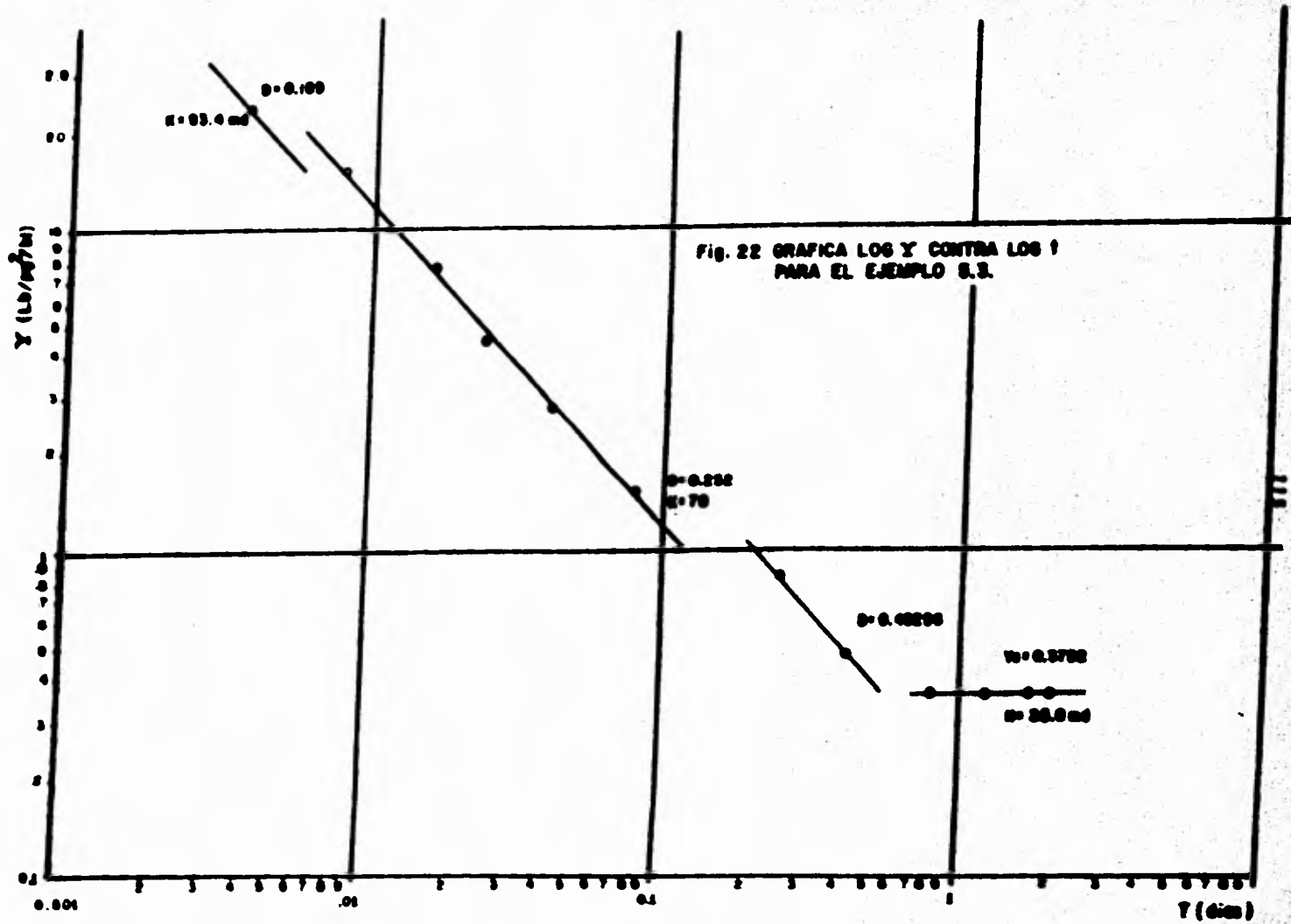


Fig. 22 GRAFICA LOG Y CONTRA LOG T PARA EL EJEMPLO 8.3.

$$s = \frac{2000 - 1575}{141.2 \frac{(800)(17)(1.25)}{(95.87)(18)}} - \frac{1}{2} \ln \frac{746.75893 \times 10^3}{(0.93)^2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{10.938} \right)$$

$$s = -4.45$$

Observe la similitud del valor de "s" calculado aquí con respecto al que se obtuvo en el inciso (a).

5.4 En la Fig. 23 se muestra la historia de producción de un pozo de aceite en Wyoming.

Debido a los efectos iniciales del periodo transitorio el gasto inicial no se puede obtener por extrapolación; sin embargo, éste se puede estimar mediante algunos cálculos tal como se hará en la solución de este problema.

Aparte de la historia de producción otros datos son:

Profundidad al intervalo productor, H	$= 4\ 700$ pies
Espesor del intervalo productor	$h = 42$ pies
Porosidad	$\phi = 0.15$
Permeabilidad de la prueba transitoria	$k = 0.3$ md
Viscosidad del aceite	$\mu = 1.0$ cp
Compresibilidad efectiva	$c_e = 15 \times 10^{-6}$ (lb/pg ²) ⁻¹
Saturación de agua	$S_w = 0.0$
Area de espaciamiento del pozo	$A_e = 40$ acres
Radio del pozo	$r_w = 0.229$ pies
Factor de volumen del aceite	$B = 1.25$ bl/bl

Se sabe que 23,000 barriles de aceite se produjeron hasta Abril de 1975 y el gasto en ese mes fue aproximadamente de 370 bl/mes. La presión inicial del yacimiento es de 2100 lb/pg².

Determinar:

- El gasto Inicial
- El Area de drenaje
- El volumen poroso del yacimiento que está en comunicación con el pozo.
- El volumen de aceite contenido en ese volumen poroso.

Solución.

- a) De la Fig. 23 se observa que:

$$\bar{\alpha} = \frac{\log(370) - \log(580)}{4 \text{ años}} = -0.04881 \text{ 1/año}$$

$$= -0.00407 \text{ (1/mes)}$$

De la ecuación (4.6.17)

$$D = -2.3025 \bar{\alpha} = -2.3025 (-0.00407) = 0.0094 \text{ (1/mes)}$$

$$= 0.0003134 \text{ días}^{-1}$$

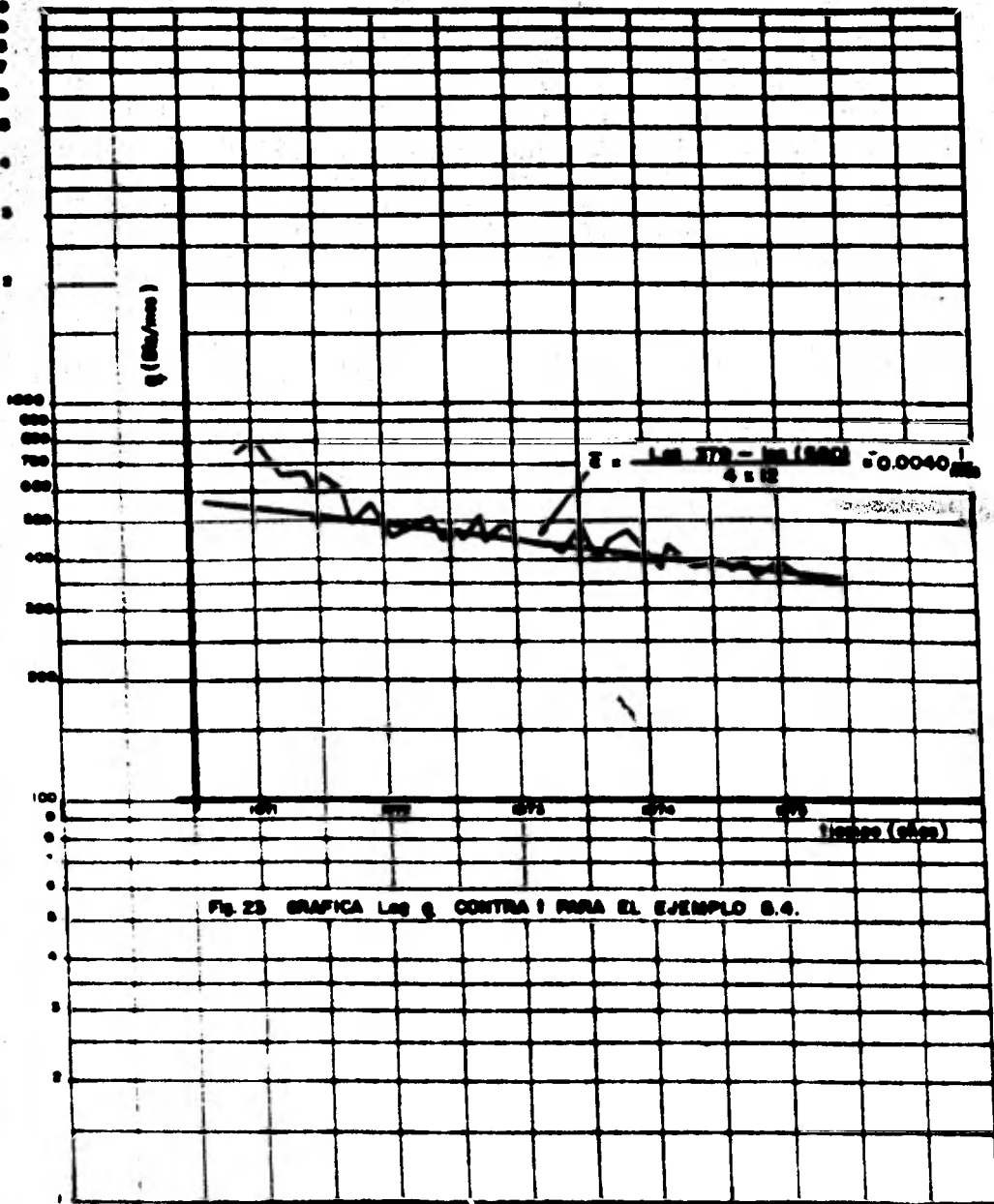
Por tanto:

$$q_i = q + D N_p = 370 \frac{\text{bbl}}{\text{mes}} + 0.0094 \frac{1}{\text{mes}} (23,000 \text{ bbl}) = 590 \frac{\text{bbl}}{\text{mes}} = 19.3 \frac{\text{bbl}}{\text{día}}$$

- b) De la ecuación (4.6.18); despejando el Area:

$$A = \frac{5.6146 q_i B}{D c_f \rho_w h_0} = \frac{5.6146 (19.3) (1.25)}{0.0003134 (15 \times 10^{-6}) (2100) (42) (0.15)}$$

$$A = 2.18 \times 10^6 \text{ pies}^2 = 50 \text{ acres}$$



En este caso para calcular b_{w_0} se considera⁸ que $p_{wf} = 0$, además que $S_w = 0.0$, por tanto $c_f = c_e$.

c) De la misma ecuación anterior:

$$V_p = \frac{5.6146(19.3)(1.25)}{3134 \times 10^{-7} (15 \times 10^{-6}) (2100)}$$

$$V_p = 13.72 \times 10^6 \text{ pies}^3 \text{ c.y.}$$

d) Con la ecuación (4.6.19) se puede calcular el volumen de aceite almacenado en la parte del yacimiento que está en comunicación con el pozo.

$$V = \frac{5.6146 q_i}{D^2 c_e \Delta p_w} = \frac{5.6146 (19.3)}{3134 \times 10^{-7} (15 \times 10^{-6}) (2100)}$$

$$N = 10.976 \times 10^6 \text{ pies}^3 \text{ c.s.}$$

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

1. Las Pruebas de Límite de Vacimiento podrán proporcionar información válida solo si el período semi-estacionario es alcanzado.
2. El análisis que de esta prueba se hace utilizando el período transitorio tardío no da un reflejo bien aproximado del tamaño del yacimiento dado que no considera el total efecto de las fronteras.
3. Tomando en cuenta exclusivamente el análisis del período semi-estacionario, es obvio que el resultado obtenido dependerá en mucho del trazo correcto de la línea recta cartesiana dado -- que la pendiente de esta recta es inversamente proporcional al volumen de hidrocarburos contenido en el volumen de drenaje del pozo.
4. Es obvio que el método ideal para analizar las Pruebas de Límite de Vacimiento es aquel que incluya a la ecuación de balance de materia como base fundamental de su estructura, y este método es el de Park Jones el cual además no depende de la precisión en el trazo de la gráfica para obtener buenos resultados.
5. El análisis de las Pruebas de Límite de Vacimiento utilizando datos de producción solo es válido si la inclinación de la producción es exponencial.
6. En forma general, las pruebas de Límite de Vacimiento tienen el inconveniente de requerir en muchas ocasiones un tiempo de prueba considerablemente grande, aunando a lo difícil que es mantener constante el gasto durante largos períodos de tiempo; sin embargo, existen otros métodos para analizar las Pruebas de Límite de Vacimiento cuando el gasto es variable⁶.

CAPITULO 7

NOMENCLATURA

- A - área de drenaje, pie²
- A_e - área de espaciamiento entre pozos, pie²
- b - ordenada al origen de la recta de la gráfica log - (p_{wf} - p) contra t., lb/pg²
- B - factor de volumen del aceite, Vol. c.y/vol. c.s.
- B_i - factor de volumen del aceite a las condiciones iniciales del yacimiento.
- B_g - factor de volumen del gas, vol. c.y/vol. c.s.
- B_{gi} - factor de volumen del gas a las condiciones iniciales del yacimiento.
- C_A - factor de forma del área de drenaje
- c_e - compresibilidad efectiva = C_o + C_f/(1 - S_w), (lb/pg²)⁻¹
- c_f - compresibilidad de la formación, (lb/pg²)⁻¹
- c_t - compresibilidad total = (1 - S_w) c_e, (lb/pg²)⁻¹
- c.s. - condiciones estándar
- c.y. - condiciones de yacimiento
- D - constante de Darcy
- D̄ - valor absoluto de la pendiente de la recta ln q contra t
- Q - número de Euler = 2.718281828
- g - aceleración de la gravedad
- G - volumen de gas que está en comunicación con el pozo, - pie³ c.s.
- G_p - volumen de gas producido acumulado, pie³ c.s.
- H - profundidad al intervalo productor
- h - espesor de la formación, pie
- J - índice de productividad, bl/día/lb/pg²
- k - permeabilidad de la formación, md
- k_d - permeabilidad de la formación en la zona dañada, md
- ln - logaritmo natural (base Q)
- log - logaritmo base 10
- m - valor absoluto de la pendiente de la recta p_{wf} contra log t., lb/pg²/ciclo
- m° - pendiente de la recta p_{wf} contra t., lb/pg²/hr

- M • peso molecular de un gas, lbm/mole
- N • volumen de aceite que está en comunicación con el pozo, bl c.s.
- N_p • volumen de aceite producido acumulado, bl c.s.
- p_D • calda de presión adimensional, $(p_L - p_{wf}) / (q_0 / 2\pi kh)$
- p_{D0} • $1/2 \ln (A/r_w^2) + 1/2 \ln (2.2458/C_A) + s$
- p_{DAs} • calda de presión adimensional correspondiente al período semi-estacionario para cualquier yacimiento cerrado.
- p_e • presión en la frontera exterior (r_e), lb/pg²
- p_i • presión inicial del yacimiento, lb/pg²
- p_{ord} • ordenada al origen de la recta p_{wf} contra t , lb/pg²
- p_{wf} • presión de fondo fluyendo, lb/pg²
- p_{wb} • presión de fondo cerrado, lb/pg²
- p_i hr • presión leída de la recta p_{wf} contra $\log t$ cuando t_1 hr, lb/pg²
- p^o • presión leída de la extrapolación de la recta p_{wf} contra $\log (t + \Delta t) / \Delta t$ cuando $(t + \Delta t) / \Delta t = 1$
- \bar{p} • presión media, lb/pg²
- \bar{p} • presión de fondo fluyendo en el comportamiento semi-estacionario, usando \bar{p} en vez de p_i , lb/pg²
- P • transformada de Laplace de p_D (Apéndice B)
- Δp_d • calda de presión en la región dañada, lb/pg²
- Δp_w • calda de presión de fondo, lb/pg²
- q • gasto de aceite, bl/día c.s.
- q_i • gasto inicial de aceite, bl/día
- q_g • gasto de gas, pie³/día c.s.
- r • radio, pies
- r_b • distancia a la barrera, pies
- r_D • radio adimensional, r/r_w
- r_e • radio de la frontera externa, pie
- r_{eD} • r_e/r_w , radio adimensional cuando $r = r_e$
- r_d • radio de la zona dañada, pie
- r_w • radio del pozo, pie
- R • constante universal de los gases
- s • factor de daño, adimensional
- S_w • saturación de agua, fracción
- T • temperatura absoluta, °R
- t • tiempo de flujo, hrs.

- t_D • tiempo de flujo dimensional tomando como base r_w
($264 \times 10^{-6} \text{ k}/\theta c_e r_w^2$)
- t_{DA} • tiempo de flujo dimensional tomando como base el área de drené.
- (t_{DA})_{pas} • tiempo dimensional correspondiente a t_{pas} .
- t_{De} • tiempo de flujo dimensional tomando como base el radio de drené r_e
- t_{pas} • tiempo en que se alcanza el período semi-estacionario, hrs.
- U • gasto de flujo volumétrico por unidad de área de sección transversal
- V_o • volumen de aceite original, pie³ c.y.
- V_p • volumen poroso, pie³ c.y.
- V • transformada de Boltzman
- V • Parámetro de Jones, - $dp/dz/qB$, lb/pg²/bl
- V_s • valor constante del parámetro de Jones en el período semi-estacionario, ($1/\pi\theta c_e hr_e^2$), lb/pg²/lb
- z • coordenada z
- β • factor de desviación o de compresibilidad de los gases reales, pv/nRT
- \bar{m} • pendiente de la recta $\log q$ contra t , 1/día
- \bar{m} • valor absoluto de la pendiente de la recta $\log (p_{wf}-p)$ contra t , hrs⁻¹
- B_L • valor absoluto de la pendiente de la recta p_{wf} contra t , lb/pg²/hr
- BL_D • valor absoluto de la pendiente de la recta p_{wf} contra t , lb/pg²/día
- γ • constante de Euler, = 1.78
- ξ • ordenada al origen de la recta $\log q$ contra t , bl/día
- θ • porosidad, fracción
- θ • ángulo entre barreras, grados sexagesimales
- ϕ • potencial
- $\nabla\phi$ • gradiente de potencial
- ρ • densidad, gm/cm³
- μ • viscosidad, cp
- η • $6.33 \times 10^{-3} \text{ k}/\theta c_e$

CAPITULO 8

REFERENCIAS

1. Jones, P. and McGhee, E.: "Gulf Coast verifies Reservoir Limit Tests", *Oil and Gas J.* (June, 18, 1956) 186.
2. Jones, Park: "Drownout Exploration, Reservoir Limit, Well and Formation Evaluation", paper 824-G presented at SPE Permian Basin Oil Recovery Conference, Midland, Tex. (April, 1957).
3. Jones, Park: "Reservoir Limit Test on Gas Wells", *J. Pet. Tech* (June, 1962) 613-619
4. Jones, L. G.: "Reservoir Reserve Tests", *J. Pet Tech* (March, 1963) 333-337.
5. Earlougher, R. C. Jr., "Estimating Drainage Shapes from Reservoir Limit Tests". *J. Pet. Tech.* (Oct. 1971) 1266-1268; *Trans. AIME*, 251.
6. Earlougher, Robert C., Jr.: "Variable Flow Rate Reservoir Limit Testing", *J. Pet. Tech.* (Dec. 1972) 1423-1429.
7. Strobel, C. J., Gulati, M. S., and Ramey, H. J., Jr.: "Reservoir Limit Tests in a Naturally Fractured Reservoir - A Field Case - Study Using Type Curves", paper SPE 5596 presented at the SPE-AIME 50th Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Dallas, Sept. 28-Oct. 1, 1975.
8. Cox, Dave, O.: "Reservoir Limit Testing Using Production Data", *The Log Analyst* (March-April, 1978) 19-17
9. Matthews, C. S. and Russell, D. G.: *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*, Monograph Series, Society of Petroleum Engineers, Dallas (1967) 11.
10. Hubbert, M. King: "Darcy law and the Field Equations of the - Flow of Underground Fluids", *Trans., AIME* (1956) 207, 222 239.
11. Earlougher, Robert C., Jr.: *Advances in Well Test Analysis*, Monograph Series, SPE, Dallas (1977) 5.
12. Russell, D.G., Goodrich, J. H., Perry, G.E. and Bruskotter, J.F.: "Methods for Predicting Gas Well Performance", *J. Pet. Tech.* (June, 1966) 99-109

13. Polubarinova-Kochina, P. Ya.: "Theory of Ground Water Movement", Translated from the Russian by J.N.R. De Weist, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1962) 549.
14. Collins, R.E.: "Flow of Fluids Through Porous Materials", Reinhold Publishing Corp., New York (1961)
15. Van Everdingen, A.F. and Hurst, W.: "The Application of the Laplace Transformation To Flow Problems in Reservoirs, Trans. AIME (1949) 186, 305-324.
16. Garcia Rivera, J. I.: Curso de Evaluación de la Producción, impartido en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. (Abril-Agosto, 1980)
17. Leon V.R.: "Análisis de Pruebas de Variación de Presión en Yacimientos Fracturados". Trabajo Escrito, 1980. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.
18. Van Everdingen, A. F.: "The Skin Effect and Its Influence on the Productive Capacity of a Well", Trans., AIME(1953) 198, 1971-1976.
19. Hawkins M. F., Jr. - "A Note on the Skin Effect". Petroleum Transactions, AIME, 207 (1956), 356-357.
20. Ramey, H. J., Jr.: "Non-Darcy Flow and Wellbore Storage Effects in Pressure Build-up and drawdown of Gas Wells", J. Pet. Tech. (Feb. 1965) 223-233., Trans. AIME, 234. Also Reprint Series No.9 Pressure Analysis Methods, SPE of AIME, Dallas (1967) 223-243.
21. Agarwal, Ram G., Al-Hussainy, Rafi, and Ramey, H. J., Jr.: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow: I. Analytical Treatment," Soc. Pet. Eng. J. (Sept. 1970) 279-290; Trans., AIME, 249.
22. Odeh, A. S. and Nabor. G. W., : "The effect of Production History on Determination of Formation Characteristics From Flow Tests", J. Pet., Tech., (Oct. 1966) 1343-1350.
23. Jahnke, E. and Emde, F.: Tables of Functions, fourth Ed. Dover Publications, New York.
24. Matthew, C. S., Brons, F. and Hazebroek, P.: "A Method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir", Trans., AIME (1954) 201; 182-191.
25. Dietz, D. N.: "Determination of Average Reservoir Pressure from Buildup Surveys", J. Pet., Tech. (Aug., 1965) 953-959).
26. Root, P.J., Warren, J. E. and Hartscock, J. H.: "Implications of Transient Flow Theory: The Estimation of Gas Reserves", Drill. and Prod. Prac., API(1965) 141.

27. **Well Testing Manual.**, Scientific Software Corporation, Denver Colorado, U.S.A., (1980).
28. **Horner, D. R.:** "Pressure Buildup in Wells", Proc., Third World Pet. Cong', E. J. Brill, Leiden (1951) II, 503-523. Also Reprint Series, No. 9 - Pressure Analysis Methods, SPE., ATME, Dallas (1967) 25-43.
29. **Millar, C. C., Dyes, A.B., and Hutchinson, C. A.:** "The Estimation of Permeability and Reservoir Pressure from Bottom Hole - Pressure Buildup Characteristics". Trans., AIME, Vol. 189, (1950) 91-104.
30. **Guerrero, E. T.:** "How to Find Reservoir Limits, Drainage Area, and Initial Oil in Place from Pressure Drawdown Data". Reservoir Engineering Part. 79, O.G.J., Vol. 63, No. 36, (June 28, 1965) 90-93.
31. **Guerrero, E. T.:** "How to Find Radius of Drainage". Reservoir Engineering Part 78., O.G.J. Vol. 63, No. 19 (May, 10, 1965) 172-173

CAPITULO 9

APENDICES

**APENDICE A. Solución de la Ecuación de Difusividad para un Vacío-
cimiento Infinito.**

Considerando un pozo situado en el centro de unacimiento infinito, que produce a gasto constante, considerando a la formación completamente abierta en todo su espesor uniforme, Fig. A.1(a), se tienen las siguientes condiciones:

$$a) p(r, 0) = p_i \text{ cuando } t=0 \text{ para toda } r \dots (A.1)$$

que es la condición inicial.

b) condición de frontera interna:

Considerando que el pozo produce a un gasto constante para cualquier tiempo $t > 0$:

$$(q)_{r_w} = \text{cte. para todo } t > 0 \dots (A.2)$$

Además, recordando que el gasto en el pozo cumpla la condición de continuidad:

$$q = A \bar{u} \dots (A.3)$$

donde:

$$A = 2\pi r h \dots (A.4)$$

$$\bar{u} = -\frac{k}{\nu} \frac{\partial p}{\partial r} \dots (A.5)$$

sustituyendo (A.4) y (A.5) en (A.3), recordando que h es el espesor productor de la formación, se tiene:

$$q = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (2\pi r h) \quad \dots (A.6)$$

además, como $r = r_w$ se puede escribir:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi r h} \frac{1}{r_w} \quad \dots (A.7)$$

Así pues, la condición de frontera interna es:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r_w} = \frac{q\mu}{2\pi r h} \frac{1}{r_w} \quad \text{para toda } t > 0 \quad \dots (A.8)$$

c).- Condición de frontera externa:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = P_i \quad \text{para todo tiempo} \quad \dots (A.9)$$

$$r \rightarrow \infty$$

Una forma práctica de resolver la ecuación de difusividad para este caso, es considerar que el yacimiento está produciendo a través de un pozo cuyo radio tiende a cero ($r_w \rightarrow 0$), según lo establece Polubarinova-Kochina^[13]. En otras palabras, se dice que el yacimiento produce a través de una línea fuente, lo cual se puede expresar por medio de la condición de frontera interna - (b) que se convierte en la siguiente:

$$\lim_{r_w \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{q\mu}{2\pi k h}, \quad \text{para toda } t > 0 \quad \dots (A.10)$$

la cual establece la definición de "línea fuente" aproximada a las condiciones originales, Fig. A.1b.

Para desarrollar la solución, es necesario utilizar la transformada de Boltzmann:

$$v = \frac{q\mu c k^2}{4 k h t} \quad \dots (A.11)$$

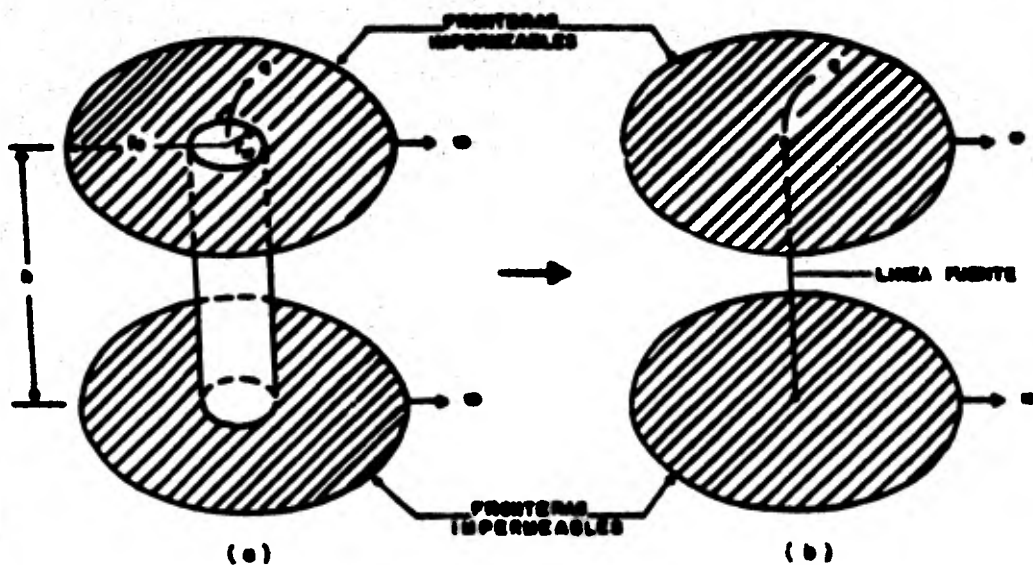


FIG. A.1: REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UN YACIMIENTO INFINITO PARA LA SOLUCION DE LINEA FUENTE¹⁰⁴

y derivando esta expresión con respecto al radio:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\theta u c r^2}{2R^2} \dots (A.12)$$

Haciendo:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\theta u c r^2}{2R^2} \frac{\partial p}{\partial V} \dots (A.13)$$

Si:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right) \frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial R} \right) \frac{\partial V}{\partial R}$$

Substituyendo el valor de $\frac{\partial V}{\partial R}$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\theta u c r^2}{2R^2} \frac{\partial p}{\partial V} \right) \left(\frac{\theta u c r^2}{2R^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} = \frac{\theta u c r^2}{2R^2} \left| \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\theta u c r^2}{2R^2} \frac{\partial p}{\partial V} \right) + \frac{\theta u c r^2}{2R^2} \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right| \dots (A.14)$$

Pero de la ecuación (A.11):

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\theta u c r^2}{2R^2} \dots (A.15)$$

De donde:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \dots (A.16)$$

Substituyendo en la expresión (A.14)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial r} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \right. \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \left. - \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right) \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{4v^2}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right. \quad (A.17)$$

La variación de la presión con respecto al tiempo es:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta \mu c_f r^2}{4kz} \right) \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\theta \mu c_f r^2}{4kz} \frac{\partial p}{\partial v} \quad (A.18)$$

Substituyendo (A.13), (A.14) y (A.18) en la ecuación (2.2.54)

$$\left| \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{4v^2}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right| + \frac{1}{r} \left| \frac{\theta \mu c_f r^2}{4kz} \frac{\partial p}{\partial v} \right| = \frac{\theta \mu c_f}{k} \left(- \frac{\theta \mu c_f r^2}{4kz} \right) \frac{\partial p}{\partial v}$$

De acuerdo con la expresión (A.15) y arreglando:

$$v \left(\frac{\partial p}{\partial v} + v \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right) = \frac{\theta \mu c_f r^2}{4kz} \left(1 - \frac{\theta \mu c_f r^2}{4kz} \right) \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$v \frac{\partial p}{\partial v} + v^2 \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = - v^2 \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$(v + 1) \frac{\partial p}{\partial v} + v \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0 \quad (A.19)$$

La expresión anterior es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución requiere de dos condiciones de las mencionadas anteriormente.

Como la ecuación (A.19) depende de una sola variable, entonces puede expresarse como:

$$(v + 1) \frac{dp}{dv} + v \frac{d^2 p}{dv^2} = 0 \quad \dots (A.20)$$

Haciendo:

$$p' = \frac{dp}{dy} \quad (\text{A.21})$$

entonces la ecuación (A.20) se expresa:

$$y \frac{dp'}{dy} + (1 + \gamma) p' = 0 \quad (\text{A.22})$$

separando variables e integrando, se obtiene:

$$\ln p' = - \ln y - \gamma + C_1$$

por propiedad de los logaritmos:

$$p' = \frac{C_2}{y} Q^{-\gamma}$$

o bien:

$$p' = \frac{dp}{dy} = \frac{C_2}{y} Q^{-\gamma} \quad (\text{A.23})$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

De acuerdo a la condición indicada en la expresión (A.10) se puede establecer:

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2y \frac{dp}{dy} = \frac{q u}{2\pi k h} \quad (\text{A.24})$$

comparando esta expresión con la ecuación (A.23)

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2y \frac{dp}{dy} = \frac{q u}{2\pi k h} = \lim_{y \rightarrow 0} 2C_2 Q^{-\gamma} \quad (\text{A.25})$$

Entonces:

$$C_2 = \frac{q u}{4\pi k h}$$

De tal manera que la ecuación (A.25) se convierte en:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{qU}{4\pi kh} \frac{e^{-y}}{y} \quad (\text{A.27})$$

separando variables:

$$dp = -\frac{qU}{4\pi kh} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (\text{A.28})$$

e integrando:

$$p = -\frac{qU}{4\pi kh} \int^y \frac{e^{-y}}{y} dy + C_3 \quad (\text{A.29})$$

El límite inferior de la integral en esta última expresión puede ser asignado arbitrariamente. Tomando a $y = \infty$ como límite inferior:

$$p = -\frac{qU}{4\pi kh} \int^y \frac{e^{-y}}{y} dy + C_3 \quad (\text{A.30})$$

o bien:

$$p = -\frac{qU}{4\pi kh} \int_y^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy + C_3 \quad (\text{A.31})$$

Esta última expresión puede escribirse como:

$$p = -\frac{qU}{4\pi kh} E_i(-y) + C_3 \quad \dots \quad (\text{A.32})$$

y aplicando la condición de frontera (c) se encuentra que:

$$C_3 = p_i \quad (\text{A.33})$$

Substituyendo el valor de la constante en (A.32)

$$p = p_i - \frac{qU}{4\pi kh} E_i(-y) \quad (\text{A.34})$$

luego,

$$- \frac{qU}{2\pi^2 h} E_i (-V) = p_i - p \quad (\text{A.35})$$

Si p es la presión a cualquier radio y tiempo, se puede escribir también como:

$$p = p(r, t)$$

Tomando esto en cuenta en la expresión (A.35), se obtiene:

$$p_i - p(r, t) = \frac{qU}{2\pi^2 h} \left| - E_i (-V) \right| \quad (\text{A.36})$$

es decir:

$$p_i - p(r, t) = \frac{qU}{2\pi^2 h} \left| - E_i \left(-\frac{\theta \mu c r^2}{4kz} \right) \right| \quad (\text{A.37})$$

esta solución puede también obtenerse mediante argumentos físicos y matemáticos usando como base la solución del punto fuente instantáneo. Para una mejor ilustración de esta técnica de solución usada, el lector puede referirse al libro escrito por Collins⁽⁷⁴⁾

De la ecuación (A.37) se puede despejar a $p(r, t)$ y acomodando se llega finalmente a:

$$p(r, t) = p_i - \frac{qU}{2\pi^2 h} \left| - \frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\theta \mu c r^2}{4kz} \right) \right| \quad (\text{A.38})$$

donde esta ecuación es conocida como la "solución de línea fuente".

Los valores de $- E_i (-V)$ se encuentran en la Tabla No. 1; sin embargo, la ecuación anterior puede aproximarse a una solución logarítmica cuyo uso se restringe a ciertos valores del argumento de E_i .

La deducción de esta aproximación logarítmica se muestra a continuación:⁽⁷⁷⁾

Se sabe que:

$$-E_1(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Ahora bien, cuando

$$x < 0.0025$$

con toda validez se cumple:

$$-E_1(-x) = -\ln(\gamma x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 0.5772 \quad (\text{A.39})$$

donde $\gamma = 1.78$, siendo γ la constante de Euler.

Entonces se puede decir que la expresión (A.39) es válida para valores de

$$\frac{1}{x} > 400.$$

En el caso que nos interesa se tiene que $x = V$, así que la condición a cumplir será:

$$V = \frac{\theta \mu c_p r^2}{4kt} < 0.0025 \quad (\text{A.40})$$

o

$$\frac{1}{V} = \frac{4kt}{\theta \mu c_p r^2} > 400 \quad (\text{A.41})$$

o también:

$$\frac{1}{4V} = \frac{kt}{\theta \mu c_p r^2} > 100 \quad (\text{A.42})$$

Usando V en vez de x en la ecuación (A.39):

$$-E_1(-V) = -E_1\left(-\frac{\theta \mu c_p r^2}{4kt}\right) = -\ln\left(\gamma \frac{\theta \mu c_p r^2}{4kt}\right) =$$

$$= - \left| \ln \left(\frac{\sigma_{UC} r^2}{4kz} \right) + \ln (v) \right| = \ln \left(\frac{4kz}{\sigma_{UC} r^2} \right) - \ln (v)$$

es decir:

$$-E_i (-v) = \ln \left(\frac{1}{v} \right) - 0.5772 = \ln \left(\frac{4kz}{\sigma_{UC} r^2} \right) - 0.5772 \quad \dots (A.43)$$

Si en la ecuación (A.38) se hace $r = rw$, se obtiene la expresión para calcular la presión en el fondo del pozo:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qM}{4\pi kh} \left| -E_i \left(\frac{\sigma_{UC} r w^2}{4kz} \right) \right| \quad \dots (A.44)$$

Substituyendo (A.43) en (A.44)

$$p_{wf} = p_i - \frac{qM}{4\pi kh} \left| \ln \left(\frac{4kz}{\sigma_{UC} r w^2} \right) - 0.5772 \right| \quad \dots (A.45)$$

haciendo:

$$\ln \frac{4kz}{\sigma_{UC} r w^2} = \ln (4) + \ln \left(\frac{kz}{\sigma_{UC} r w^2} \right)$$

y substituyendo en (A.45), se obtiene finalmente:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qM}{4\pi kh} \left| \ln \left(\frac{kz}{\sigma_{UC} r w^2} \right) + 0.80907 \right| \quad (A.46)$$

válida sólo para valores de

$$\frac{kz}{\sigma_{UC} r w^2} > 100$$

De la ecuación (A.38) se pueden definir las siguientes variables dimensionales:

Calda de presión dimensional:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{P_i - p(r, t)}{\frac{qM}{2kh}} \quad (A.47)$$

Tiempo adimensional:

$$t_D = \frac{kt}{\mu c_p r_w^2} \quad (A.48)$$

Distancia radial adimensional:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (A.49)$$

Haciendo intervenir los parámetros adimensionales en la "solución de línea fuente", se tiene:

$$P_i - p_{wf} = \frac{qM}{2kh} \left| -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\mu c_p r_w^2}{4kt} \right) \right|$$

Luego:

$$\frac{P_i - p_{wf}}{\frac{qM}{2kh}} = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\mu c_p r_w^2}{4kt} \right) \quad (A.50)$$

si al miembro izquierdo de la ecuación (A.50) se le ha definido como p_D , entonces:

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\mu c_p r_w^2}{4kt} \right) \quad (A.51)$$

o bien:

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{1}{4t_D} \right) \quad (A.52)$$

Procediendo en forma similar con la ecuación (A.46) se llega a:

$$p_D = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{kt}{\mu c_p r_w^2} \right) + 0.80907 \right| \quad (A.53)$$

o bien:

$$p_D = \frac{1}{2} \ln(x_D) + 0.80907 \quad (\text{A.54})$$

donde las ecuaciones (A.53) y (A.54) sólo podrán usarse cuando

$$x_D > 100$$

Con el fin de hacer más general el uso de las ecuaciones (A.51) y (A.53) pueden escribirse respectivamente de la siguiente forma:

$$p_D(x_D, x_D) = -\frac{1}{2} E_1 \left(1 - \frac{x_D^2}{x_D} \right) \quad (\text{A.55})$$

$$m_D(x_D, x_D) = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{x_D}{x_D^2} \right) + 0.80907 \right| \quad (\text{A.56})$$

APENDICE B. Solución de la Ecuación de Difusividad para un Vaciamiento Limitado.

Considerese un pozo fluyendo a gasto constante, situado en el centro de un yacimiento circular sin flujo en la frontera externa.

En este caso se tienen las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$a). - p(r, 0) = p_i, \text{ a } t=0 \text{ para toda } r$$

$$b). - \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w} = \frac{q}{2\pi h k h}, \text{ para } t > 0$$

$$c). - \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_e} = 0 \text{ para todo tiempo.}$$

De todas las soluciones existentes para este caso, aquél se presenta la solución de van Everdingen y Hurst⁽¹⁵⁾

Substituyendo las variables dimensionales en la ecuación de difusividad (2.2.54) se tiene:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (B.1)$$

siendo las condiciones:

$$a). - p_D(r_D, 0) = 0, \text{ a } t_D = 0 \text{ para todo } r_D$$

$$b). - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \text{ para } t_D > 0$$

$$c). - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=r_{De}} = 0, \text{ para todo } t_D$$

La transformada de Laplace de P_D viene dada por:

$$P(r_D, S) = \int_0^{\infty} r_D(r_D, r_D) e^{-Sr_D} dr_D, \quad (B.2)$$

donde S en este caso es la variable de transformación de Laplace.

Utilizando la transformada de Laplace, la ecuación B.1 y las condiciones de frontera se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 P}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dP}{dr_D} = SP \quad (B.3)$$

$$\left(\frac{dP}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{S} \quad (B.4)$$

$$\left(\frac{dP}{dr_D} \right)_{r_D=0} = 0 \quad (B.5)$$

La ecuación (B.3) es una función de Bessel cuya solución general es:

$$P = A I_0(r_D \sqrt{S}) + B K_0(r_D \sqrt{S}), \quad (B.6)$$

donde $I_0(r_D \sqrt{S})$ y $K_0(r_D \sqrt{S})$ son funciones Bessel modificadas de orden cero y de primera y segunda clase, respectivamente. Los coeficientes A y B son constantes que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden.

Derivando la ecuación (B.6) con respecto a r_D y aplicando las condiciones de frontera (B.4) y (B.5):

$$\frac{dP}{dr_D} = A \sqrt{S} I_1(\sqrt{S}) - B \sqrt{S} K_1(\sqrt{S}) = -\frac{1}{S}$$

$$\frac{dP}{d\lambda_D} = A\sqrt{s} I_1(\lambda_D\sqrt{s}) - B\sqrt{s} K_1(\lambda_D\sqrt{s}) = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones para A y B y substituyendo los valores en la ecuación (B.6):

$$= \frac{K_1(\lambda_D\sqrt{s}) I_0(\lambda_D\sqrt{s}) + I_1(\lambda_D\sqrt{s}) K_0(\lambda_D\sqrt{s})}{s^{3/2} | I_1(\lambda_D\sqrt{s}) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\lambda_D\sqrt{s}) I_1(\sqrt{s}) |} \quad (B.7)$$

onde esta expresión es la transformada de Laplace de la solución general de la ecuación (B.1)

El comportamiento de P para valores pequeños de S se tiene con:

$$\lim_{s \rightarrow 0} P = \frac{1}{s} \left[\frac{\lambda_{eD}^2}{\lambda_{eD}^2 - 1} \ln \frac{\lambda_{eD}}{\lambda_D} - \frac{\lambda_{eD}^2 - \lambda_D^2}{2(\lambda_{eD}^2 - 1)} + \frac{\lambda_{eD}^2 \ln \lambda_{eD}}{(\lambda_{eD}^2 - 1)^2} - \frac{(\lambda_{eD}^2 + 1)}{4(\lambda_{eD}^2 - 1)} \right] + \frac{1}{s^2} \frac{2}{(\lambda_{eD}^2 - 1)} \quad (B.8)$$

La inversa de la ecuación (B.8), obtenida aplicando el teorema de Cauchy a la fórmula de Mellin⁽¹⁵⁾, indica el comportamiento de P_D para valores grandes de t_D :

$$P_D = \frac{2}{\lambda_{eD}^2 - 1} \left(\frac{\lambda_D^2}{4} + t_D \right) - \frac{\lambda_{eD}^2}{\lambda_{eD}^2 - 1} \ln(\lambda_D)$$

$$\frac{3\lambda_{eD}^4 - 4\lambda_{eD}^4 \ln \lambda_{eD} - 2\lambda_{eD}^2 - 1}{4(\lambda_{eD}^2 - 1)^2} \quad (B.9)$$

Para encontrar el comportamiento para tiempos cortos debe aplicarse el teorema de los residuos:

$$\operatorname{Res} \left| Q^{2D} P(z) \right| = \frac{1}{2\pi i} \oint Q^{2D} P(z) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint Q^{-u^2 2D} \frac{J_1(u^2 eD) Y_0(u^2 D) - Y_1(u^2 eD) J_0(u^2 D)}{u^2 | J_1(u^2 eD) Y_1(u) - J_1(u) Y_1(u^2 eD) |} du \quad (B.10)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son las raíces de:

$$J_1(\alpha_n^2 eD) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_1(\alpha_n^2 eD) = 0 \quad (B.11)$$

Los residuos de los α_n en la ecuación (B.10) están dados por:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{-\alpha_n^2 2D}}{\alpha_n u - \alpha_n} \left| \frac{J_1(\alpha_n^2 eD) Y_0(\alpha_n^2 D) - Y_1(\alpha_n^2 eD) J_0(\alpha_n^2 D)}{J_1(u^2 eD) Y_1(u) - J_1(u) Y_1(u^2 eD)} \right|$$

De acuerdo a las fórmulas de recurrencia⁽¹⁵⁾ y a la ecuación (B.11), las series anteriores se simplifican a:

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{-\alpha_n^2 2D}}{\alpha_n} \frac{J_1^2(\alpha_n^2 eD) | J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n^2 D) - Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n^2 D) |}{n | J_1^2(\alpha_n^2 eD) - J_1^2(\alpha_n) |} \quad (B.12)$$

Por tanto, la suma de la ecuación (B.9) con los residuos (B.12) y considerando la definición de presión adimensional, se obtiene finalmente:

$$p(r, z) = P_i - \frac{q_0}{2\pi k h} \left[\frac{2}{\alpha_{eD}^2 - 1} \left(\frac{\alpha_{eD}^2}{4} + zD \right) - \frac{\alpha_{eD}^2 \ln \alpha_{eD}}{\alpha_{eD}^2 - 1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(s^2 r_{eD}^2 - s^2 r_{eD}^2 \ln r_{eD}^2 - s^2 r_{eD}^2 - 1)}{s(r_{eD}^2 - 1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \\
 Q^{-\alpha_n^2 tD} & \frac{J_1^2(\alpha_n r_{eD}) | J_0(\alpha_n) Y_0(\alpha_n r_{eD}) - Y_0(\alpha_n) J_0(\alpha_n r_{eD}) |}{\alpha_n | J_1(\alpha_n r_{eD}) - J_1(\alpha_n) |} \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

que es la solución de la ecuación de difusividad para el caso de un yacimiento limitado.

Para la presión en el pozo, p_{wf} , donde $r_e \gg r_w$, puede escribirse:

$$\begin{aligned}
 p_{wf} &= p_i - \frac{qB}{2\pi h k} \left[\frac{2tD}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{-\alpha_n^2 tD} J_1^2(\alpha_n r_{eD})}{\alpha_n | J_1(\alpha_n r_{eD}) - J_1(\alpha_n) |} \right] \quad (B.14)
 \end{aligned}$$

Los valores de α_n crecen monótonicamente:

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots$, entonces para un valor de tD , los exponentes de la ecuación anterior decrecen: $Q^{-\alpha_1^2 tD} > Q^{-\alpha_2^2 tD} > \dots$. Para valores de tD grandes, los términos de la sumatoria pueden despreciarse, entonces:

$$p_{wf} = p_i - \frac{qB}{2\pi h k} \left[\frac{2tD}{r_{eD}^2} + \ln(r_{eD}^2) - \frac{3}{4} \right] \quad (B.15)$$

Sumando y restando el término $\ln(\gamma \phi c r_w^2 / k\mu)$ a la ecuación (B.14):

$$p_{wf} = p_i + \frac{qB}{2\pi h k} \left[\ln \frac{\gamma \phi c r_w^2}{k\mu} - \gamma(r) \right] \quad (B.16)$$

APENDICE C. Solución de la Ecuación de Difusividad para un Vacío con Presión Constante en la Frontera Externa.

Para encontrar esta solución se requiere considerar las siguientes condiciones:

- a).- $p(r, 0) = p_i$, a $t = 0$ para toda r .
- b).- $(r \frac{\partial p}{\partial r})_{r=0} = \frac{q_0}{2\pi h k}$, para $t > 0$
- c).- $p(r_e, t) = p_i$, en la frontera externa para todo t

Estas condiciones expresadas en términos adimensionales son:

- a).- $pp(r_D, 0) = 0$, a $tp = 0$ para toda r_D
- b).- $(\frac{r_D p}{r_D})_{r_D=1} = -1$, para $tp > 0$
- c).- $pp(r_{eD}, tp) = 0$, en $r_D = r_{eD}$ para todo tp

Empleando la transformada de Laplace se tiene:

$$\frac{d^2 p}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dp}{dr_D} = sP \quad (C.1)$$

cuya solución general es la misma ecuación (B.6)

Las transformadas de las condiciones de frontera son:

$$\left(\frac{dp}{dr_D}\right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s} \quad (C.2)$$

$$(P)_{r_{eD}} = 0 \quad (C.3)$$

Haciendo intervenir estas condiciones de frontera en la ecuación (B.6), se obtiene respectivamente:

$$A\sqrt{S} I_1(\sqrt{S}) - B\sqrt{S} K_1(\sqrt{S}) = -\frac{1}{S}$$

$$AI_0(r_e D \sqrt{S}) + BK_0(r_e D \sqrt{S}) = 0$$

encontrando los valores de A y B, se determina con la ecuación (B.6) que la transformada de la solución de este problema es:

$$P = \frac{I_0(r_e D \sqrt{S}) K_0(r D \sqrt{S}) - K_0(r_e D \sqrt{S}) I_0(r D \sqrt{S})}{\sqrt{S} \left[I_1(\sqrt{S}) K_0(r_e D \sqrt{S}) + K_1(\sqrt{S}) I_0(r_e D \sqrt{S}) \right]} \quad (C.4)$$

Procediendo en la misma forma que en el caso del yacimiento circular limitado, se encuentra que para valores pequeños de S, el comportamiento de P está representado por:

$$P = \frac{1}{S} (\ln r_e D - \ln r D) \quad (C.5)$$

Por tanto, para tiempos largos se tiene:

$$p_D = \ln r_e D - \ln r D \quad (C.6)$$

Para obtener la solución completa es necesario encontrar el comportamiento de P para tiempos cortos y sumarlo a la expresión (C.6):

$$p_D = \ln \left(\frac{r_e D}{r D} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 t D}}{\beta_n} \frac{J_0(\beta_n r_e D) \left[J_0(\beta_n r D) Y_1(\beta_n) - Y_0(\beta_n r D) J_1(\beta_n) \right]}{\beta_n \left[J_1^2(\beta_n) - J_0(\beta_n r_e D) \right]}$$

(C.7)

donde B_n son las raíces de:

$$J_1(B_n) Y_0(B_n r_{eD}) - Y_1(B_n) J_0(B_n r_{eD}) = 0 \quad (C.8)$$

Finalmente se obtiene la expresión para el comportamiento de la presión en el pozo, evaluando la ecuación (C.7) en $r_p=1$ y de acuerdo a la definición de presión adimensional:

$$P_{wf} = P_i - \frac{qB}{2\pi kh} \left[\ln(r_{eD}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-B_n^2 r_{eD}^2} J_1^2(B_n r_{eD})}{B_n [J_1^2(B_n) - J_0^2(B_n r_{eD})]} \right] \quad (C.9)$$

A medida que r_{eD} aumenta, los términos de la sumatoria disminuyen debido a $e^{-B_n^2 r_{eD}^2}$ y la ecuación (C.9) se reduce a:

$$P_{wf} = P_i - \frac{qB}{2\pi kh} \ln(r_{eD}) \quad (C.10)$$

que se cumple para $r_{eD} > 1.0 r_{eD}^2$, aproximadamente.

Esta ecuación también se puede obtener directamente con integración de la ley de Darcy para un sistema de flujo radial.

APENDICE D. Conversión de Unidades Darcy a Unidades Prácticas.

Las unidades empleadas durante la deducción de las ecuaciones de comportamiento de presión corresponden a las unidades Darcy; sin embargo, en la práctica los parámetros involucrados en esas ecuaciones se miden por lo general en unidades distintas a las Darcy.

Por tanto ha sido necesario adoptar dichas ecuaciones para poder emplear las unidades prácticas convenientes. Esta adaptación se ha logrado introduciendo en la ecuación pertinente factores de escala con cada parámetro expresado en unidades prácticas.

En la Tabla D.1 se muestran las unidades Darcy y prácticas usadas, así como los factores de escala correspondientes a cada parámetro.

Para ilustrar el cambio de una ecuación en unidades Darcy a unidades prácticas, sea el siguiente caso:

$$P_{wf} = P_i - \frac{q_{1B}}{2\pi kh} \left[- E_i \left(- \frac{\phi_{1c} \mu_w^2}{4kz} \right) + 2.4 \right] \quad (D.1)$$

Para expresarla en unidades prácticas se requiere hacer el siguiente análisis:

En la ecuación (D.1) es obvio que el término q / kh tiene unidades de presión, es decir:

$$p = \frac{q_{1B}}{2\pi kh} \quad (D.2)$$

Para poder utilizar unidades prácticas es necesario introducir el valor del parámetro expresado en unidades prácticas.

acompañado de su factor de escala correspondiente, así:

$$\frac{1}{14.7} p = \frac{1.8461939 \text{ g} \times 1 \text{ u} \text{ l} \text{ B}}{4\pi(10^{-8}) h (30.48) h}$$

efectuando operaciones y despejando p , la expresión del término (D.2) en unidades prácticas es:

$$p = 70.62231251 \frac{\text{quB}}{\text{kh}} \quad (D.3)$$

$$= 141.2 \frac{\text{quB}}{\text{kh}} \cdot \frac{1}{2} \quad (D.4)$$

Por otro lado, el término $\theta u c_p r_w^2 / 4kt$ que en la ecuación (D.1) está expresado en unidades Darcy, deberá adaptarse para emplear en ella unidades prácticas; para lo cual se sigue un procedimiento similar al anterior, entonces:

$$\frac{\theta u (14.7) c_p (30.48)^2 r_w^2}{4 \times 10^{-3} k (3600) t}$$

efectuando operaciones:

$$\frac{\theta u c_p r_w^2}{4(263.606 \times 10^{-6}) kt} \quad (D.5)$$

Una vez efectuado el análisis anterior se puede asegurar que la ecuación (D.1) expresada en unidades prácticas es:

$$p_{wf} = p_i - 141.2 \frac{\text{quB}}{\text{kh}} \left| - \frac{1}{2} E_i \right| - \frac{\theta u c_p r_w^2}{263.606 \times 10^{-6} (4kt)} + s \quad (D.6)$$

La cantidad 263.606×10^{-6} con frecuencia se aproxima a 264×10^{-6} durante el uso práctico.

Note que el factor de escala de B es la unidad, esto es válido siempre que dicho parámetro se exprese en unidades consistentes

(hL/hL , m^3/m^3 , $\rho L e^3/\rho L e^3$, etc.)

Sea la siguiente expresión en unidades Darcy:

$$eD = \frac{hL}{\rho u c_f \mu_w^2}$$

siguiendo el procedimiento de adaptación a unidades prácticas, en el segundo miembro, se obtiene:

$$eD = \frac{264 \times 10^{-6} hL}{\rho u c_f \mu_w^2} \quad (D.7)$$

Las expresiones:

$$r_D = r/r_w \text{ y } r_{eD} = r_e/r_w$$

no requieren de cambio a unidades prácticas siempre y cuando se usen las mismas unidades en el numerador como en el denominador.

De acuerdo a todo lo anterior, la ecuación:

$$P_{wf} = P_i - \frac{q_{UB}}{2.448} \left| \ln \left(\frac{hL}{\rho u c_f \mu_w^2} \right) + 0.80907 + 2s \right|$$

cuyas unidades son las Darcy, deberá adaptarse para emplear en ella unidades prácticas, quedando:

$$P_{wf} = P_i - \frac{141.2 q_{UB}}{k h} \left| \ln \left(\frac{264 \times 10^{-6} hL}{\rho u c_f \mu_w^2} \right) + 0.80907 + 2s \right| \quad (D.8)$$

Desarrollando el término logarítmico:

$$\ln \left(\frac{264 \times 10^{-6} hL}{\rho u c_f \mu_w^2} \right) = \ln (L) + \ln \left(\frac{k}{\rho u c_f \mu_w^2} \right) + \ln (264 \times 10^{-6})$$

entonces:

$$P_{wg} = P_L - \frac{161.2 \text{ qUB}}{K_h} \left| \ln \left(\frac{h}{\sqrt{\mu C_p} K_w z} \right) + \ln(z) - 7.4384915 + z_h \right| \quad (D.9)$$

Luego, sabiendo que:

$$\ln x = 2.302585093 \log x \quad (D.10)$$

substituyendo (D.10) en (D.9), y factorizando a 2.302585093, se obtiene finalmente:

$$P_{wg} = P_L - 162.6 \frac{\text{qUB}}{K_h} \left| \log z + \log \left(\frac{h}{\sqrt{\mu C_p} K_w z} \right) - 3.2275 + 0.868594 \right|$$

(D.11)

PARAMETRO	UNIDADES DARCY	UNIDADES PRACTICAS	FACTOR DE ESCALA
$c, c_e, c_t,$	Vol/Vol/atm	Vol/Vol/lb/pg ²	14.7
θ	fracción	fracción	1
h	cm	pie	30.48
k	Darcies	md	10^{-3}
μ	cr	cp	1
p	atm	lb/pg ²	1/14.7
q	cm ³ /seg	bl/dla c.d.	1.8401339
r	cm	pie	30.48
t	seg	hora	3600
V	cm ³	pie ³	$(30.48)^3$
B	cm ³ / cm ³	bl/bl; m ³ /m ³ , etc.	1

TABLA D.1 FACTORES DE ESCALA PARA CONVERTIR DE UNIDADES DARCY A UNIDADES PRACTICAS.

APENDICE E. Ecuación de la Calda de Presión Adimensional en un pozo situado en un Yacimiento Limitado.

De la ecuación:

$$P_i - P_{wf} = \frac{qB}{2\pi h k} \left[2\pi r_D A + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) \right] \quad (E.1)$$

se tiene:

$$\frac{P_i - P_{wf}}{qB/2\pi h k} = \left[2\pi r_D A + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) \right]$$

como al término del miembro izquierdo se le conoce como $P_{D_{\text{L}}}$; entonces:

$$P_{D_{\text{L}}} = 2\pi r_D A + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) \quad (E.2)$$

que es la variable adimensional de calda de presión para cualquier yacimiento limitado.

Si C_A toma el valor de 31.62 para un pozo colocado en el centro de un yacimiento circular limitado y sustituyendo este valor en la ecuación (E.2) se obtiene un caso particular de la variable $P_{D_{\text{L}}}$.

para $A = \pi r_e^2$

$$P_D = 2\pi r_D + \frac{1}{2} \ln(\pi) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_e^2}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{31.62} \right) \quad (E.3)$$

sabiendo que:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_e^2}{r_w^2} \right) = \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \quad (E.4)$$

y como:

$$2\pi r_D A = \frac{2 \pi D}{r_{eD}} \cdot \frac{2 h z}{0.013 c r_e} \quad (E.5)$$

Sustituyendo (E.4) y (E.5) en la ecuación (E.3) y realizando operaciones, se llega finalmente a:

$$r_D = \frac{2 h z}{0.013 c r_e} \cdot \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} \quad (E.6)$$

que es la expresión de la variable adimensional de caída de presión para un pozo colocado en un yacimiento circular limitado, expresado en unidades Darcy. La adaptación de esta ecuación para usarse con unidades prácticas se efectuará como se vio en el apéndice anterior. De igual forma se procederá en la adaptación de cualquier otra ecuación cuando se requiera.

