



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**ESTUDIO DEL FENÓMENO DE CONIFICACIÓN DE AGUA EN UN POZO
DE ACEITE UTILIZANDO UN SIMULADOR NUMÉRICO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO PETROLERO

PRESENTA:

TREJO REYES, GUILLERMO

Ciudad Universitaria, México, Distrito Federal,

1979



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

Al Pasante señor GUILLERMO TREJO REYES
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Prof. Ing. José A. Ceballos S., para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de INGENIERO PETROLERO.

"ESTUDIO DEL FENOMENO DE CONIFICACION DE AGUA EN UN POZO DE ACEITE UTILIZANDO UN SIMULADOR NUMERICO"

- I.- Resumen.
- II.- Introducción.
- III.- Desarrollo.
 - a) Descripción del fenómeno de conificación de -- agua en pozos bajosaturados afectados por empuje hidráulico.
 - b) Revisión de la Literatura.
 - c) Formulación matemática del problema.
- IV.- Simulación numérica.
 - a) Modelo numérico de conificación.
 - b) Procedimiento de cálculo.
- V.- Ejemplo de aplicación y análisis de resultados.
- VI.- Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,
"POR EL RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
C.R. Universitaria, D. F., a 26 de junio de 1979
EL DIRECTOR

PROF. JAVIER GUERRA GONZALEZ

C O N T E N I D O

	PAGINA
I RESUMEN -----	1
II INTRODUCCION -----	2
III DESARROLLO -----	4
a) Descripción del fenómeno de conificación en pozos bajosaturados afectados por empuje hi- dráulico -----	4
b) Revisión de la literatura -----	5
c) Formulación matemática del problema -----	11
IV SIMULACION NUMERICA -----	18
a) Modelo Numérico de Conificación -----	18
b) Procedimiento de Cálculo -----	30
V EJEMPLO DE APLICACION Y ANALISIS DE RESULTADOS -	36
VI CONCLUSIONES -----	47
NOMENCLATURA -----	48
BIBLIOGRAFIA -----	50
APENDICE I -----	52
APENDICE II -----	58
APENDICE III -----	61

I.- RESUMEN

Se presenta un modelo numérico bidimensional bifásico agua-aceite en coordenadas cilíndricas, que permite simular el fenómeno de conificación de agua en un pozo productor de aceite.

Con el auxilio del modelo se analiza el efecto del ritmo de extracción y la penetración del pozo en el intervalo productor, sobre la recuperación total de aceite.

Este simulador numérico resuelve la ecuación de difusión, la cual está basada en la ley de conservación de la materia representada por la ecuación de continuidad, combinada con una ecuación de movimiento, la Ley de Darcy, y con una ecuación de estado.

El simulador se procesó en el sistema de Cómputo Univac/1100 del I.M.P., utilizando un tiempo promedio de 120 minutos por corrida.

Para aplicar el simulador fue necesario representar una sección transversal del pozo correspondiente a su área de drenaje en coordenadas cilíndricas r , z y θ , para determinar en ella la variación de la presión y de la saturación de fluidos. A esta sección transversal se le adaptó una malla logarítmica en la dirección radial, y para hacerla más representativa de los cambios en la litología se dividió en estratos verticales cuyas características señalaremos en el cuerpo del trabajo. Las propiedades de la roca y de los fluidos se obtuvieron de correlaciones y pruebas de laboratorio. El radio de drenaje del pozo se determinó con la ecuación de Darcy.

Los resultados finales se presentan en gráficas para su comparación y estudio. Estos resultados, junto con un análisis económico, ayudan a determinar la política de explotación de los pozos para obtener la mejor recuperación desde un punto de vista económico.

II.- INTRODUCCION.

Entre la gran cantidad de problemas de ingeniería de yacimientos se encuentra como uno de los más complejos, el fenómeno de conificación de fluidos en un pozo productor de aceite.

Este fenómeno fue analizado desde 1935 cuando Muskat y Wycroff buscaron la forma de determinar la máxima elevación estable del cono, formado por la entrada de agua en la zona de aceite en el pozo productor. A partir de entonces han aparecido diversas investigaciones que tratan el problema y lo resuelven, cada una, de una manera distinta. Algunas de ellas con modelos analógicos⁽⁶⁾, otras por medio de gráficas⁽¹¹⁾ y correlaciones⁽³⁾, todas tratando de determinar la política de explotación más idónea. El procedimiento más reciente para analizar este fenómeno es el tratamiento numérico de las ecuaciones capaces de representarlo.

Los trabajos realizados investigan el efecto que tiene la posición y magnitud del intervalo productor, el espesor del acuífero que subyace a la zona de aceite, la relación de permeabilidades horizontal a vertical, las características de los fluidos, la caída de presión en el pozo, el tipo de la malla asignada al corte transversal, el intervalo de tiempo utilizado en el cálculo y el ritmo de extracción de los fluidos del pozo en cuestión en el comportamiento del fenómeno de conificación.

Los modelos numéricos utilizados por los diferentes autores han proporcionado un avance en el tratamiento de las ecuaciones que representan el movimiento de los fluidos en un medio poroso.

Usualmente, la respuesta operativa a la conificación es manifestado por el cierre de los pozos, o bien por la disminución en el ritmo de extracción de los fluidos para evitar que el contacto agua-aceite siga elevándose en las fronteras del pozo. Sin embargo, recientemente han aparecido autores argumentando que la extracción de los fluidos a altos

ritmos produce una mejoría económica en la recuperación total de hidrocarburos. Este trabajo es básicamente una investigación sobre la validez de dicho argumento.

III.- DESARROLLO.

a) Descripción del fenómeno de conificación de agua en pozos bajosaturados.

En los yacimientos de hidrocarburos la presencia de dos o más fluidos inmiscibles obliga a establecer la posición de la superficie que los limita, de la cual nos interesa su movimiento que está en función, según se ha descrito, de varios parámetros entre los que destaca el ritmo de extracción. Este movimiento es provocado por la caída de presión causada por la penetración del pozo en la zona de aceite y la extracción de los fluidos a través del mismo. En el caso del agua y del aceite se define como contacto agua-aceite aquella superficie debajo de la cual la saturación de agua es de 100%.

La conificación es un fenómeno cuya manifestación es más notoria y más severa en el área de drene cercana al pozo productor; a medida que se aleja de éste, disminuye notablemente. Los cambios de saturaciones y presión en las proximidades de la pared del pozo productor ocurren -- más bruscamente que en las áreas más alejadas. Una sección del esquema representativo del pozo y su área de drene se muestra en la fig. '1'.

Los fluidos en el yacimiento se encuentran originalmente situados según su densidad; el agua se encuentra en la parte inferior, sobre ella sobreyace el aceite y por último, en la cima, el gas si es que existe - en forma libre. Estos fluidos, al ser explotado el pozo, inician su movimiento hacia la zona disparada pudiéndose llegar a crear un desequilibrio entre las fuerzas gravitacionales y las generadas por la presión de flujo. Dependiendo de la magnitud de dicho desequilibrio entre las fuerzas gravitacionales y las generadas por la presión de flujo. Dependiendo de la magnitud de dicho desequilibrio los fluidos pueden moverse horizontalmente o bien iniciar una elevación gradual o repentina, según sean el ritmo de extracción y otros parámetros. Por la forma de campaña que adopta el contacto agua-aceite en las cercanías del pozo productor, al fenómeno resultante se le conoce como conificación.

Este fenómeno no sólo se presenta en pozos cuya área de drenaje contiene agua y aceite sino en todo aquél que exista dos o más fluidos inmiscibles. Estos casos se muestran, esquemáticamente, en las Figs. 2, 3 y 4.

b) Revisión de la literatura.

Los trabajos realizados por algunos investigadores permiten comparar la estabilidad y el grado de aproximación de las pruebas realizadas.

D. N. Blades y D. H. Strigh⁽³⁾ (1975) presentan los resultados de un estudio del comportamiento de conificación de agua en pozos bajosaturados, donde la presión fue mantenida por la entrada de agua de fondo. Las pruebas las llevaron a efecto en un modelo numérico y un modelo físico y de las gráficas de sus resultados obtuvieron grupos de curvas tipo para con ellas comparar las propiedades de otros pozos y predecir su comportamiento. El objetivo principal de su trabajo fue evaluar el efecto de la relación de permeabilidades horizontal a vertical, el daño en los bloques cercanos al pozo, la presión capilar, la viscosidad del aceite y el ritmo de extracción sobre el comportamiento del cono de agua. El efecto del ritmo de extracción lo determinaron con ayuda de las curvas tipo, observando que la relación agua-aceite y la recuperación total aumentan con el ritmo de extracción. El modelo numérico utilizado fue bidimensional bifásico agua-aceite en coordenadas cilíndricas.

Sobocinski y Cornelius⁽¹⁴⁾ (1965) presentan en su trabajo una correlación para predecir el comportamiento de un cono de agua establecido desde el contacto agua-aceite original, en un pozo bajosaturado, hasta las condiciones de surgencia. Esta correlación es parcialmente empírica e incluye grupos adimensionales de propiedades de la roca y fluidos del pozo y características de producción. Estos grupos fueron deducidos de las consideraciones hechas para el desplazamiento de aceite por agua. Las correlaciones están basadas en una cantidad limitada de resultados obtenidos experimentalmente de un modelo de laboratorio y de los proporcionados por un simulador numérico para un sistema incompresible bidimen-

sional. Como los grupos son adimensionales pueden ser utilizados para estimar el comportamiento de casos de conificación que no se hayan definido en su trabajo. Sin embargo, a pesar de su condición adimensional, las correlaciones no son completamente generales y pueden proporcionar estimaciones equivocadas de comportamientos de conos en algunos casos. Las suposiciones más importantes de las correlaciones se refieren fundamentalmente a la presencia de un sistema homogéneo e incompresible sin casquete de gas y con un ritmo constante de extracción.

Los modelos numéricos de simulación utilizados por los diferentes autores pueden ser definidos como explícitos, semi-implícitos e implícitos. Esta clasificación está basada en la forma en que son tomadas las variables que se encuentran en función de la presión y de la saturación. Se definen como explícitos a aquéllos que utilizan los valores de presión y saturación al nivel de tiempo anterior al que se está calculando (n). Los implícitos se definen como aquéllos que obtienen los valores de presión y saturación, al igual que las funciones de éstos, al nivel de tiempo que se calcula (n+1), y los semi-implícitos son los que utilizan extrapolaciones para obtener los valores de las variables multivariadas en el nivel de tiempo calculado (n+1)⁽¹⁵⁾.

Sonier, Desset y Ombret (1973) describen en su trabajo un modelo trifásico bidimensional para simular el comportamiento del fenómeno de la conificación en dos o tres fases. Su modelo es totalmente implícito con respecto a todas las variables y utiliza la solución simultánea de las diferentes ecuaciones que describen el flujo multifásico. Para mejorar los resultados obtenidos por su modelo establecen una expresión matemática para simular las condiciones de frontera en los bloques de la pared del pozo, llamándole efecto de salida, cuyo manejo representa la principal diferencia respecto a los otros modelos presentados. Analizaron, con un modelo de laboratorio, la existencia de barreras impermeables y la magnitud de los intervalos de tiempo. Los resultados obtenidos les condujeron a las conclusiones siguientes: El máximo período de tiempo estable es independiente del tamaño de los bloques de la malla; debido a la estabilidad del modelo es posible simular las barreras impermeables.

J. M. Dumore y O. Marsal⁽⁷⁾ (1973) presentaron un trabajo en el que utilizan ecuaciones íntegro-diferenciales para determinar el comportamiento de los yacimientos simulado por modelos numéricos bidimensionales trifásicos que permiten, aplicando el principio de superposición, conocer el flujo de los fluidos en medios porosos heterogéneos. Estas ecuaciones pueden ser utilizadas también en el cálculo del balance de materia, en el cual incluyen la aplicación a un yacimiento representado por un grupo de estratos de diferente permeabilidad con entrada de agua. El objeto de su trabajo fue hacer notar la utilidad de las ecuaciones íntegro-diferenciales en los problemas de flujo de fluidos en medios porosos. Después de los resultados obtenidos concluyen que las ecuaciones utilizadas son de gran utilidad para simular el comportamiento de yacimientos de hidrocarburos.

Claude Bournasel y Bernard Jeanson⁽⁵⁾ (1971), basaron su investigación en estudios teóricos y experimentales utilizando números adimensionales que les permitieron una fácil y rápida determinación del gasto crítico y el tiempo de surgencia, así como la relación agua-aceite, la diferencial de presión, el índice de productividad y el ritmo mínimo de flujo que permite disminuir la producción de agua. En su trabajo no consideraron las fuerzas capilares existentes; sin embargo, todos los experimentos fueron hechos con fluidos inmiscibles y considerados incompresibles. Los resultados obtenidos fueron comparados con los proporcionados por un modelo numérico y observaron que la diferencia entre ellos era despreciable, lo que permite hacer una rápida predicción y seleccionar adecuadamente la profundidad de penetración del pozo.

Spivak y K.H. Coats⁽¹⁷⁾ (1970) describen el uso de un modelo numérico multidimensional para predecir el comportamiento del fenómeno de conificación de fluidos en dos y tres fases. En su trabajo demuestran cómo es afectada la magnitud del período de tiempo, por la forma en que son tomados los términos de producción. Cuando son tomados en forma explícita, el modelo suele comportarse en forma inestable y es necesario acortar los intervalos de tiempo para eliminar este defecto; no sucede esto cuando se toman en forma implícita. En el análisis de la estabilidad de su modelo encontraron que un modelo numérico totalmente implícito tiene

dos desventajas importantes: primero, la formulación matemática y la programación se vuelven extremadamente complejas y segundo, a pesar del aumento del tamaño del período de tiempo, el tiempo de computadora por período aumenta significativamente; la ventaja que muestran estos modelos es la mayor estabilidad en el cálculo de los parámetros deseados. Después de las pruebas realizadas concluyeron que inestabilidad en la simulación numérica de la conificación de pozos de aceite es causada por el manejo de las variables dependientes de la saturación, en forma explícita. Además, el uso en forma implícita de los términos de producción en las ecuaciones diferenciales que simulan la conificación, puede producir un aumento en el período admisible de tiempo para una solución estable y sin aumentar el tiempo de computadora por período.

R. C. MacDonald y K.H. Coats⁽¹¹⁾ (1970) hacen una descripción y evaluación de tres métodos para simular el comportamiento de la conificación de fluidos en un pozo productor de aceite. Uno de los métodos analizados en su trabajo es el de presión implícita-saturación explícita (IMPES), que utiliza los términos de producción implícitamente. El segundo método analizado es similar al primero sólo que las permeabilidades entre los bloques son tratadas implícitamente en la ecuación de saturación. El tercer modelo es totalmente implícito con respecto a todas las variables y utiliza soluciones simultáneas de las ecuaciones diferenciales que describen el flujo multifásico. El objetivo primordial de este trabajo fue comparar la eficiencia de los métodos señalados y determinar qué problemas son resueltos en forma más aproximada por estos métodos. Las conclusiones más importantes que reportan son: el segundo método requiere menos tiempo de computadora que el primero; al comparar este método (el segundo) con el tercero observa que es menos eficiente, sobre todo en problemas donde las fuerzas capilares son significativas.

J.P. Letkeman y R. L. Riding⁽⁹⁾ (1970) presentan en su trabajo un modelo de simulación que exhibe un comportamiento estable de la saturación y la producción durante la formación del cono y después del surgimiento. Para asegurar la estabilidad del modelo, los ritmos de extracción de aceite y las movilidades son extrapolados implícitamente al nuevo nivel de tiempo. Las ecuaciones resueltas por el modelo que utilizan

representan el movimiento de cada una de las fases existentes en el área de drenaje del pozo, la cual representan en coordenadas cilíndricas. Los resultados obtenidos los grafican y comparan con otros modelos llegando a las conclusiones siguientes: la técnica utilizada presenta un comportamiento estable de la saturación y de los ritmos de producción durante la formación del cono y después del surgimiento; además, los períodos de tiempo son mucho mayores que los utilizados por otros modelos de conificación. Y, por último, la simulación del fenómeno de conificación es práctica y económica usando las ecuaciones modificadas que se manejan en este trabajo.

Antonin Settari y Khalid Aziz⁽¹⁴⁾ (1974) logran en su investigación establecer una nueva forma de tratar las condiciones de frontera para hacer más estables los modelos numéricos que existían a la fecha. Ellos agregan el efecto de salida, que es el cambio que sufre el movimiento de los fluidos al salir del medio poroso al pozo productor, a su modelo; junto con otra condición a la que llaman condición de compatibilidad, la cual argumentan que se cumple cuando el gradiente de presión vertical en el pozo es igual al gradiente de presión en la frontera del borde del pozo. El objetivo principal es demostrar que al agregar estos dos factores a los modelos existentes es posible representar y simular la manera más aproximada lo que sucede en el medio poroso cuando la producción de un pozo se lleva a efecto. Las conclusiones a las que llegan son: la extensión de la zona en que las saturaciones son influenciadas por el efecto de salida es muy pequeña y aumenta sólo cuando los ritmos de extracción son extremadamente bajos, debido a que dominan las fuerzas capilares. Además encontraron que es fácil incorporar un método para calcular la caída de presión en el borde del pozo con este modelo numérico.

E. G. Woods y A. K. Khurana⁽¹⁹⁾ (1975) sugieren en su trabajo un grupo de pseudofunciones para predecir el comportamiento de yacimientos bajo-saturados con entrada de agua de fondo. Para realizar la predicción elaboraron gráficas de pseudopresión capilar y permeabilidad relativa. En su modelo supusieron un equilibrio gravitacional y capilar en la dirección vertical; del mismo modelo desarrollaron parámetros adimensionales para estimar cuándo las condiciones mencionadas no eran válidas. Del trabajo se

lizado concluyen que las pseudofunciones pueden ser utilizadas, como se mencionó anteriormente, en yacimiento donde la entrada de agua de fondo predomina sobre cualquier otra forma de desplazamiento, para representar adecuadamente el tiempo de surgencia y la eficiencia de desplazamiento. Además - concluyen que para casos donde las fuerzas viscosas dominan sobre las gravitacionales, las pseudofunciones son independientes del ritmo de extracción.

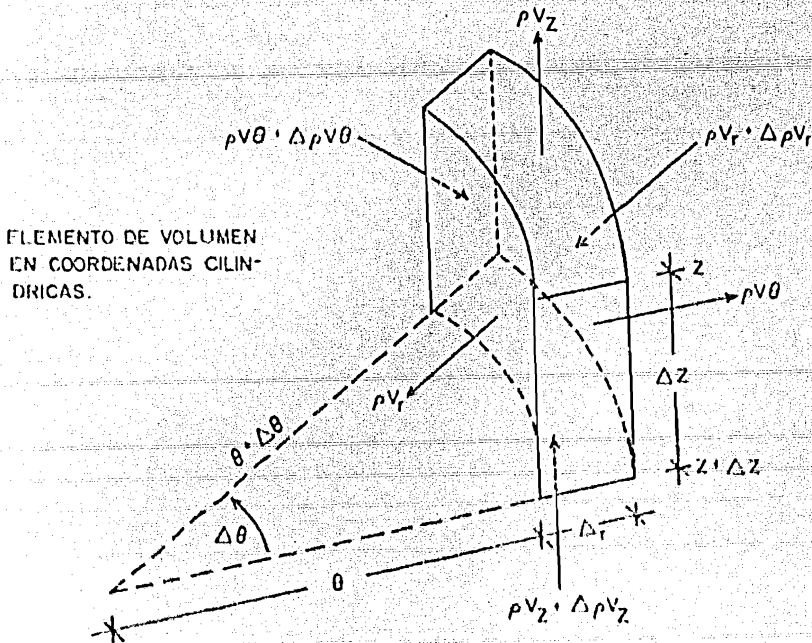
William B. Byrne y Richard A. Morse⁽⁶⁾ (1973) desarrollaron un modelo numérico bidimensional bifásico agua-aceite en sistema radial, para representar el flujo de estos fluidos en el área de drene del pozo productor. - El objeto de su investigación fue demostrar que producir un pozo a elevados ritmos de extracción, puede permitir una mejor recuperación desde el punto de vista económico. Para conseguir esto, probaron el modelo diversificando los valores de los parámetros para determinar el efecto que éstos tienen - sobre el fenómeno de conificación. Los parámetros probados fueron: la forma de la malla asignada a la sección transversal del área de drene del pozo productor, la magnitud del período de tiempo, el espesor del acuífero, la penetración del pozo en la zona de aceite, la diferencia de presión y la relación de permeabilidades horizontal a vertical, tomando como base de comparación el comportamiento de las curvas de relación agua-aceite para cada parámetro probado y las curvas de agua producida acumulada. De los parámetros analizados los que mostraron un efecto marcado sobre la relación agua-aceite fueron: la penetración del pozo en la zona de aceite, la relación de permeabilidades en combinación con la penetración y la diferencia de presión, aunque esta última en menor proporción que las anteriores. Encontraron que a mayor penetración del pozo es mayor la relación agua-aceite obtenida; definen como penetración del pozo al intervalo disparado en la zona de aceite. - En el caso de la relación de permeabilidades, al aumentar ésta, la relación agua-aceite disminuye. Con la diferencia de presión sucede lo mismo que con la penetración del pozo. Después de las pruebas realizadas y de comparar los resultados obtenidos señalan que: altas relaciones agua-aceite durante la vida productiva del pozo resultan de incrementos en la penetración del pozo o de aumentos en la caída de presión en el pozo productor. Hacen notar que el aumento de la relación agua-aceite es acompañada por un correspondiente aumento en el volumen de aceite producido. Agregan también que no existe

una razón que indique que la recuperación total sea afectada en forma adversa por aumentos en el ritmo total de extracción, Por el contrario, tal parece que aumentos en el ritmo de extracción pueden mejorar la recuperación total desde un punto de vista económico. finalmente, concluyen que para determinar la mejor penetración de un pozo es necesario considerar un balance entre la penetración, la vida operativa del pozo y los costos diarios de producción que son afectados por el volumen de agua producida.

De la literatura revisada se observa que el fenómeno de conificación dejó de ser desconocido y por ello temido; ahora se intenta controlarlo para con su ayuda obtener una mejor recuperación en el menor tiempo posible. La experiencia obtenida permite formarse un juicio acerca de la política de explotación más adecuada a las características presentadas por cada pozo en particular.

c) Formulación matemática del problema.

Tomando un elemento de volumen de un sistema radial vamos a considerar el flujo de los fluidos a través del mismo.



Teniendo en cuenta la ley de conservación de masa en la ley de continuidad tenemos:

"Masa que entra en un volumen de control en un tiempo Δt menos la masa que sale del volumen de control en un tiempo Δt es -- igual a la masa acumulada en ese mismo tiempo Δt ".

De la figura se tiene:

Flujo de masa en la dirección r:

$$\text{Masa que entra} = (r + \Delta r) \Delta \theta \Delta z (\rho V_r + \Delta \rho V_r) \Delta t$$

$$\text{Masa que sale} = r \Delta \theta \Delta z \rho V_r \Delta t$$

Flujo total en la dirección r:

$$(r + \Delta r) \Delta \theta \Delta z (\rho V_r + \Delta \rho V_r) \Delta t - r \Delta \theta \Delta z \rho V_r \Delta t$$

Dividiendo entre $r \Delta r \Delta \theta \Delta z \Delta t$ tenemos:

$$\frac{(r + \Delta r) (\rho V_r + \Delta \rho V_r)}{r \Delta r} - \frac{r \rho V_r}{r \Delta r} = \frac{r \rho V_r}{r \Delta r} + \frac{r \Delta \rho V_r}{r \Delta r} + \frac{\Delta r \rho V_r}{r \Delta r} + \frac{\Delta r \Delta \rho V_r}{r \Delta r} - \frac{r \rho V_r}{r \Delta r}$$

$$\approx \frac{\Delta \rho V_r}{\Delta r} + \frac{\rho V_r}{r} + \frac{\Delta \rho V_r}{r}$$

Tomando límites cuando Δr y $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \rho V_r}{\Delta r} + \frac{\rho V_r}{r} + \frac{\Delta \rho V_r}{r} \right) = \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\rho V_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) \quad (1)$$

Flujo de masa en la dirección θ

$$\text{Masa que entra} = \Delta z \Delta r (\rho V_\theta + \Delta \rho V_\theta) \Delta t$$

$$\text{Masa que sale} = \Delta z \Delta r (\rho V_\theta) \Delta t$$

Flujo total en la dirección θ

$$\Delta z \Delta r (\rho V_\theta + \Delta \rho V_\theta) \Delta t - \Delta z \Delta r (\rho V_\theta) \Delta t$$

Dividiendo por $r \Delta r \Delta \theta \Delta z \Delta t$

$$\frac{\rho V_\theta + \Delta \rho V_\theta}{r \Delta \theta} - \frac{\rho V_\theta}{r \Delta \theta} = \frac{1}{r} \frac{\Delta \rho V_\theta}{\Delta \theta}$$

Tomando límites cuando $\Delta r, \Delta \theta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta r, \Delta \theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\Delta \rho V_\theta}{\Delta \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta}$$

(2)

Flujo de masa en la dirección z

$$\text{Masa que entra} = \Delta r \Delta \theta r (\rho V_z + \Delta \rho V_z) \Delta t$$

$$\text{Masa que sale} = r \Delta \theta \Delta r (\rho V_z) \Delta t$$

Flujo total en la dirección θ

$$\Delta r \Delta \theta r (\rho V_z + \Delta \rho V_z) \Delta t - r \Delta \theta \Delta r (\rho V_z) \Delta t$$

Dividido entre $r \Delta r \Delta \theta \Delta z \Delta t$

$$\frac{\rho V_z + \Delta \rho V_z}{r \Delta z} - \frac{\rho V_z}{r \Delta z} = \frac{\Delta \rho V_z}{\Delta z}$$

Tomando límites

$$\lim_{\Delta r, \Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \rho V_z}{\Delta z} \right) = \frac{\partial \rho V_z}{\partial z}$$

(3)

Masa acumulada en el volumen de control

$$\text{Masa en el tiempo } t = \rho \Delta z \Delta \theta \Delta r$$

$$\text{Masa en el tiempo } t + \Delta t = \Delta z \Delta r \Delta \theta r (\rho + \Delta \rho) / \Delta t \Delta t$$

$$\rho \Delta r \Delta \theta r \Delta z - \Delta z \Delta r \Delta \theta r (\rho + \Delta \rho)$$

Dividiendo por $r \Delta r \Delta \theta \Delta z \Delta t$

$$\frac{\rho}{\Delta t} - \frac{\rho + \Delta \rho}{\Delta t} = - \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$$

Tomando límites

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(- \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4)$$

Sumando las tres primeras ecuaciones e igualándolas a la última tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que es la ecuación de continuidad del flujo de fluidos.

En este trabajo se considera un flujo simétrico en la dirección θ con lo que el término en la dirección θ se vuelve cero.

Quedando la ecuación:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde las velocidades son relacionadas con la ley de Darcy en los medios porosos.

$$v = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial S}$$

siendo S la dirección del movimiento.

Si existiera extracción de fluido del volumen de control se agrega el término:

$$\rho q^*$$

donde:

$$q^* = \frac{Q}{\Delta t \Delta z r \Delta \theta}$$

que es el gasto por unidad de volumen.

El término de extracción se obtiene de:

$$\text{Masa extraída} = \rho BQ \Delta t$$

siendo Q el gasto de extracción.

Dividiendo por $r \Delta \theta \Delta r \Delta z \Delta t$

$$= \frac{\rho Q B}{r \Delta \theta \Delta r \Delta z} = \rho \cdot B q^*$$

La ley de Darcy en las dos direcciones:

$$V_r = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \quad \text{en la dirección } r$$

$$V_z = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \quad \text{en la dirección } z$$

siendo $l = o, w$

La nomenclatura se define al final del trabajo.

La ecuación de continuidad para cada uno de los fluidos en el yacimiento se definen de la siguiente manera:

siendo $k_2 = k k_{rg}$, la permeabilidad efectiva al fluido.

Para el aceite:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \rho_o \left(\frac{k_r k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial \phi_o}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_o \left(\frac{k_z k_{rz}}{\mu_o} \frac{\partial \phi_o}{\partial z} \right) \right] + \rho_o B_o q_o^* - \frac{\partial \rho_o}{\partial t}$$

Multiplicando por (-1):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_o \frac{k_r k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial \phi_o}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_o \frac{k_z k_{rz}}{\mu_o} \frac{\partial \phi_o}{\partial z} \right) - \rho_o B_o q_o^* - \frac{\partial \rho_o}{\partial t} \quad (1)$$

Para el agua tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho_w \frac{k_r k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial \phi_w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_w \frac{k_z k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial \phi_w}{\partial z} \right) - \rho_w B_w q_w^+ = \frac{\partial \rho_w}{\partial t} \quad (II)$$

donde:

$$\phi_l = p_l - \rho_l g z \quad l = o, w$$

Cumpléndose además que:

$$p_c = p_o - p_w \quad (III)$$

y:

$$S_w + S_o = 1 \quad (IV)$$

Las ecuaciones para definir la densidad del fluido (ρ) son las ecuaciones de estado para líquidos ligeramente compresibles.

$$C = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

c = compresibilidad

Si $V = V(\rho)$ entonces:

$$C = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad \text{como} \quad V = \frac{1}{\rho}$$

$$C = - \frac{1}{1/\rho} \frac{d(1/\rho)}{dP} \quad \text{integrando} \quad - \int_{P_{sc}}^P \frac{d(1/\rho)}{1/\rho} = \int_{P_{sc}}^P C dP$$

tomando C como constante cuando el cambio de presión es pequeño.

$$\ln \rho - \ln \rho_{sc} = C (P - P_{sc})$$

P_{sc} es la presión manométrica a la que definiremos como a menos que se indique otra cosa.

Arreglando tenemos: $\ln \frac{\rho}{\rho_{sc}} = C(P - P_{sc})$

$$\frac{\rho}{\rho_{sc}} = e^{cP}$$

$$\rho = \rho_{sc} e^{cP}$$

Para el aceite:

$$\rho_o = \rho_{o,sc} e^{c_o P_o}$$

Para el agua:

$$\rho_w = \rho_{w,sc} e^{c_w P_w}$$

considerando la presión capilar.

$$\rho_w = \rho_{w,sc} e^{c_w (P_o - P_{cow})}$$

Reordenando las ecuaciones tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho_1 \frac{k_r k_{r1}}{\mu_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_1 \frac{k_z k_{z1}}{\mu_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) + \rho_{1,sc} q_1^* = \frac{1}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_1 S_1)$$

donde:

$$1 = 0, w$$

Las dos ecuaciones resultantes de ésta, las ecuaciones de presión - capilar y la de saturaciones forman un sistema, cuya solución se obtiene convirtiéndolo en un esquema de diferencias finitas, que en el siguiente capítulo se desarrollan.

IV.- SIMULACION NUMERICA DEL FENOMENO.

a) Modelo numérico de conificación.

La forma de las ecuaciones de flujo derivadas en el capítulo anterior hace imposible su solución por métodos analíticos. Por lo tanto, es necesario utilizar un método numérico. Se emplea la técnica de diferencias finitas porque ésta facilita la solución de problemas de flujo multifásico multidimensional de fluidos. En esta técnica se utiliza un grupo de términos finitos de la serie de Taylor para aproximar las derivadas parciales, tanto en tiempo y en espacio, existentes en la ecuación que se resuelven. Este procedimiento, sin embargo, tiene la desventaja de producir soluciones para la ecuación solamente en puntos preseleccionados en el tiempo y en el espacio. En resumen, la presentación en diferencias finitas para las ecuaciones de flujo es una aproximación que presenta tanto errores de truncamiento como errores de redondeo inherentes en todos los problemas resueltos por computadoras y pueden volverse significativos de tal manera que imposibiliten un avance notable en el tiempo de las soluciones. El error de truncamiento es el que se tiene por el hecho de sólo utilizar un número pequeño de términos de la serie de Taylor.

Los errores de redondeo son función del número de veces que la computadora asigna a una variable. En la mayoría de las ocasiones, la mejor aproximación de una variable en representación binaria incurre en un error que al manejarse en repetidas ocasiones, puede ser aumentado. Para alcanzar la solución de estas ecuaciones de un período de tiempo a otro, varios miles de operaciones tienen que llevarse a cabo.

El procedimiento de solución para las ecuaciones descritas fue empleando, para cada período de tiempo, la representación en diferencias finitas de la ecuación de balance de masa que fue resuelta simultáneamente con todo el sistema. Ciertas cantidades son calculadas, se revisa la exactitud de la solución, se imprimen resultados intermedios y la escala de tiempo avanza. El proceso se repite cuantas veces sea necesario para simular un predeterminado período de tiempo.

Para utilizar la representación en diferencias finitas de las ecuaciones de flujo, el sistema físico es representado en coordenadas cilíndricas y es discretizado por medio de una malla con un bloque central. Se supone simetría radial que elimina la necesidad de utilizar la coordenada θ . Los bloques en que el sistema es discretizado representan cilindros con diferentes amplitudes. El bloque central puede ser definido arbitrariamente, pero los demás es conveniente espaciarlos geométricamente por dos razones: primera, simplifica la ecuación y segunda, resulta en una malla fina cerca del borde del pozo. Este arreglo representa en detalle las alteraciones que ocurren en las cercanías del pozo, y como los cambios son pequeños a medida que el radio aumenta, la malla se hace más gruesa en ese lugar.

El desarrollo de las ecuaciones en diferencias finitas fue basado totalmente en el trabajo del Dr. José Luis Bashbush Bausa.

Definiendo como:

$$r_w = r_{1/2} ; r_i = \alpha^{i-1} r_1$$

donde: α es una constante seleccionada de manera que: $r_e = \frac{r_{NR+1} - r_{NR}}{\ln\left(\frac{r_{NR+1}}{r_{NR}}\right)}$ (1)

El radio de la frontera del bloque es el radio logarítmico medio.

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \alpha} \quad r_{i-1/2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{\ln \alpha} \quad 2 \text{ y } 3$$

La distancia vertical está dividida en NZ intervalos de, posiblemente, diferentes alturas y la coordenada r es considerada horizontal.

Las ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo radial en dos fases se escriben para coordenadas cilíndricas como sigue:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \rho_o \frac{k_r k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial \phi_o}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_o \frac{k_z k_{rz}}{\mu_o} \frac{\partial \phi_o}{\partial z} \right) + \rho_{o,c} q_o^t = \frac{1}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \mu_o S_o) \quad (4)$$

y para el agua:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho_w \frac{k_r k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial \phi_w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_w \frac{k_z k_{rw}}{\mu_w} \right) + \rho_w \kappa_c q_w^* = \frac{1}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) \quad (5)$$

El término de producción es:

$$q_w^* = \frac{Q}{V_{b_{i,k}}}$$

donde: $V_{b_{i,k}}$ es el volumen del bloque (i,k) dado por:

$$V_{b_{i,k}} = \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \Delta z_k$$

Utilizando aproximaciones por diferencias centrales para representar las derivadas espaciales y una diferencia regresiva para las derivadas en el tiempo, al igual que las expresiones 2 y 3 las expresiones 4 y 5 después de ser multiplicadas por $V_{b_{i,k}}/\rho_{LSC}$ pueden ser escritas como:

$$T_{i+1/2,k}^{n+1} (P_{i+1,k}^{n+1} - P_{i+1,k}^n) - T_{i-1/2,k}^{n+1} (P_{i,k}^{n+1} - P_{i-1,k}^n) + T_{i,k+1/2}^{n+1} (P_{i,k+1}^{n+1} - P_{i,k}^n - \Delta z_{k+1/2}$$

$$Y_{i,k+1/2}^n) - T_{i,k-1/2}^{n+1} (P_{i,k}^{n+1} - P_{i,k-1}^n - \Delta z_{k-1/2} Y_{i,k-1/2}^n) + q_{i,\kappa c_{i,k}}^n$$

$$\frac{V_{b_{i,k}}}{5.615 \Delta t} \left[\left(\phi \frac{\rho_i}{\rho_{i,\kappa c}} S_i \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{\rho_i}{\rho_{i,\kappa c}} S_i \right)^n \right] \quad (6)$$

donde:

$$T_{i+1/2,k}^{n+1} = \frac{1}{288} \frac{g}{E_c} (\rho_{i,k+1}^n + \rho_{i,k}^n) \quad (7a) \quad Y_{i,k-1/2}^n = \frac{1}{288} \frac{g}{E_c} (\rho_{i,k-1}^n + \rho_{i,k}^n) \quad (7b)$$

La ecuación (6) no es lineal pues contiene productos de presión y transmisibilidad, que son función de la saturación y la presión como podrá verse en la siguiente sección, ambas se toman al nivel de tiempo $n+1$. Los simuladores de yacimientos que evalúan transmisibilidades explícitamente, en el nivel de tiempo n , son sucesivamente utilizados en simuladores areales y cortes seccionales porque las dimensiones de cada bloque son grandes y por consecuencia, los cambios de saturación y presión son

pequeños en un período de tiempo normal. Problemas en los pozos, talen - como la conificación, son caracterizados por altas velocidades de flujo y grandes cambios en la saturación cerca del borde del pozo, donde los bloques son pequeños.

La evaluación de permeabilidades relativas explícitamente en simula - dores de conificación impone limitaciones a la estabilidad que restringe severamente el período de tiempo manejable; para valores muy pequeños de períodos de tiempo es antieconómico llevar a cabo las corridas por el gran tiempo de computadora que se necesita para cada prueba.

Las experiencias de estudios anteriores, indican que la permeabili - dad relativa en los términos de la transmisibilidad necesita tomarse implí - citamente, ya que las variables restantes, Densidad y Viscosidad, son poco afectadas por los cambios de presión y sus variaciones sobre períodos de - tiempo consecutivos son pequeñas.

Las expresiones de transmisibilidad 9 y 11 contienen términos que de - ben ser evaluados en las fronteras entre bloques; teóricamente se ha justi - ficado la ampliamente aceptada práctica de evaluar la permeabilidad relati - va en la saturación de agua correspondiente al bloque superior.

$$k_{r1,1+1/2,k}^{n+1} = (1-w) k_{r1,k}^{n+1} + w_{r1,1+1,k}^{n+1} \quad (8)$$

donde:

$$w = 1 \quad \phi_{1,k} \leq \phi_{1+1,k}$$

y:

$$w = 0 \quad \phi_{1,k} > \phi_{1+1,k}$$

Entonces los términos de transmisibilidad pueden ser escritos como:

$$T_{1,k}^{n+1} = C_{1,k} K_{r1,k}^{n+1} \quad (9)$$

$$T_{1,1+1/2,k}^{n+1} = \frac{1.127 u \Delta z_k k_x}{\rho_{1,k} \ln \alpha} \left[\left(\frac{\rho_1}{\mu_1} \right)_{1+1,k}^n + \left(\frac{\rho_1}{\mu_1} \right)_{1,k}^n \right] \left[(1-w_{xf}) k_{r1,k}^{n+1} + w_{xf} k_{r1,1+1,k}^{n+1} \right] \quad (10)$$

$$T_{iz}^{n+1} = C_{iz} K_{il}^{n+1}$$

(11).

$$T_{i,k+1/2}^{n+1} = \frac{1.127 (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{\rho_{i,c}} \left[\frac{k_{z,i,k} + k_{z,i,k+1}}{\Delta z_k k_{z,k+1} + \Delta z_{k+1} k_{z,k}} \right] \left[\left(\frac{\rho_1}{\mu_1} \right)_{i,k+1}^n + \left(\frac{\rho_1}{\mu_1} \right)_{i,k}^n \right] \cdot [(1-w_{zi}) k_{ro,i,k}^{n+1} + W_{zi} K_{il,i,k+1}^{n+1}] \quad (12)$$

Las expresiones correspondientes a $T_{i,i-1/2,k}^{n+1}$ son similares a la (10) pero el subíndice (i+1) es cambiado por (i-1) y W_{xf} por W_{xb} . Similarmente en la ecuación (12), el K+1 es sustituido por (k-1) y W_{zf} por W_{zb} para obtener

$$T_{i,i,k-1/2}^{n+1}$$

Las densidades de los fluidos que aparecen en las ecuaciones anteriores son evaluadas de la siguientes manera:

$$\rho_o = \rho_{o,sc} e^{C_o P_o}$$

y:

$$\rho_w = \rho_{w,sc} e^{C_w P_w} = \rho_{w,sc} e^{C_w (P_o - P_{cow})}$$

Las viscosidades de los fluidos son consideradas constantes e independientes de la presión.

En la simulación de la conificación en dos fases, se probaron extensivamente tres diferentes formas de desarrollar los términos de flujo en las ecuaciones de diferencias finitas. Se encontró que el método semi-implícito linealizado fue rápido y estable para periodos de tiempo tan largos como los de los métodos totalmente implícitos y semi-implícitos. La inestabilidad de estos dos métodos fue evidenciados por inconvergencia del algoritmo de iteración Newtoniano, usado para resolver las ecuaciones no lineales. Basado en esta consideración, el método semi-implícito linealizado fue seleccionado para construir el simulador numérico utilizado en este trabajo.

Este método utiliza una serie de Taylor de primer orden progresivo para expandir los valores de la permeabilidad relativa y la presión capilar.

$$K_r^{n+1} = K_r^n + \frac{\partial K_r}{\partial S_w} |^n (S_w^{n+1} - S_w^n) \quad (13a)$$

y:

$$P_c^{n+1} = P_c^n + \frac{\partial P_c}{\partial S_w} |^n (S_w^{n+1} - S_w^n) \quad (13b)$$

Donde las derivadas de la presión capilar y la permeabilidad relativa pueden ser calculadas como la pendiente de la cuerda entre dos puntos cercanos sobre la curva alrededor de la saturación S_w . Si las funciones están dadas en forma analítica las expresiones pueden ser calculadas analíticamente.

Sustituyendo las expresiones 9 a 13b en la 5 se produce un sistema de ecuaciones no lineales, incluyendo productos de saturación de agua -- con presión y con la misma saturación de agua. Este sistema es linealizado por la suposición:

$$(\Delta_x S_w)(\Delta_x P_c^{n+1}) = (\Delta_x S_w)(\Delta_x P_c^n) \quad (14)$$

La solución de la ecuación requiere de la determinación del ritmo de producción de cada una de las fases para cada uno de los bloques de la malla contenido en el pozo siendo, normalmente, especificados los gastos en términos de flujo total de líquido. El simulador determina el ritmo de flujo de las fases individuales.

Si el pozo penetra 2 ó más bloques, entonces uno aporta una fracción de la producción total del pozo que es variable con el tiempo. De las expresiones semi-implícitas puede derivarse la relación de ritmo total de producción de los bloques productores individuales a la producción total del pozo.

Esto puede provocar que los ritmos de cada bloque dependan de la saturación de los otros bloques productores, y suele complicar la solución de las ecuaciones. Se evitaren los problemas calculando el ritmo de producción total de los bloques individuales, en forma explícita, como sigue:

$$q_{1,k}^n = q_T \frac{C_{1,1/2,k}^n K_{1,1,k}^n + C_{1,1/2,k}^n K_{1,1,k}^n}{\sum_{K \text{ BLO}} (C_{1,1/2,k}^n K_{1,1,k}^n + C_{1,1/2,k}^n K_{1,1,k}^n)} \quad (15)$$

Donde:
$$C_{i, i+1/2, k}^n = \frac{2.254 \pi \Lambda z_k K_{rk}}{\ln \alpha} \left(\frac{1}{\mu_1 B_1} \right)^n \lambda_{i+1/2, k}^n$$

Una vez que el ritmo total de flujo fue dividido proporcionalmente entre los bloques productores, el flujo total de cada bloque puede ser dividido en términos de cada una de las fases producidas.

$$q_{o, k}^{n+1} = q_{T, k}^n \frac{K_{ro, k}^n + \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \lambda_{1, k}^n \Delta_l S_w}{K_{ro, k}^n + \lambda_{1, k}^n K_{rw, k}^n} \quad (16a)$$

$$q_{w, k}^{n+1} = q_{T, k}^n \frac{\lambda_{1, k}^n (K_{rw, k}^n + \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \lambda_{1, k}^n \Delta_l S_w)}{K_{ro, k}^n + \lambda_{1, k}^n K_{rw, k}^n} \quad (16b)$$

Las permeabilidades relativas en el denominador son tomadas en el nivel de tiempo n para evitar la no linealidad.

Los miembros del lado derecho de la ecuación 5 pueden ser desarrollados de manera apropiada para eliminar la no linealidad y facilitar su solución.

Ecuación del aceite:

$$RHS = \frac{V_b}{5.615 \rho_{v, c} \Delta_l} \Delta_l (\phi \rho_o S_o) \quad (17)$$

$$\Delta_l (\phi \rho_o S_o) = (\phi \rho_o S_o)^{n+1} - (\phi \rho_o S_o)^n$$

definiendo:

donde:

$$\phi^{n+1} = \phi^n \phi_c^{n+1}$$

$$\phi_c^{n+1} = 1 + C_r \Delta_l P_o$$

$$\Delta_l (\phi \rho_o S_o) = \phi^n [(\phi_c \rho_o)^{n+1} S_o^{n+1} - S_o^n \rho_o^n] \quad (18)$$

De la definición de la presión capilar de dos fases:

$$\Delta_l P_w = \Delta_l P_o - \Delta_l P_c$$

La densidad puede ser expresada en el nivel de tiempo n+1 como:

$$\rho_o^{n+1} = \rho_o^n + \frac{\partial \rho_o}{\partial P} \lambda_{1, k}^n$$

o bien: $\rho_o^{n+1} = \rho_o^n + C_o \rho_o^n \Delta_t P_o$

$$(\phi_c \rho_o)^{n+1} = (1 + C_r \Delta_t P_o) (\rho_o^n + C_o \rho_o^n \Delta_t P_o)$$

despreciando los términos de mayor grado y además:

$$C_r C_o \rho_o^n (\Delta_t P_o)^2 \approx 0$$

$$(\phi_c \rho_o)^{n+1} \approx \rho_o^n + \rho_o^n (C_o + C_r) \Delta_t P_o$$

por otra parte:

$$\Delta_t S_o = -\Delta_t S_w$$

y:

$$S_o^n = (1 - S_w^n)$$

Después de sustituir y reorganizar, tenemos:

$$\Delta_t (\phi \rho_o S_o) = \rho_o \phi^n [(1 - S_w^{n+1}) (C_o + C_r) \Delta_t P_o - \Delta_t S_w]$$

Para evitar la no linealidad consideramos que:

$$(1 - S_w^{n+1}) \approx 1 - S_w^n$$

Finalmente la expresión 17 queda:

$$RHS = \frac{V_p \rho_o^n}{5.615 \rho_{o,c} \Delta t} [(1 - S_w^n) (C_r + C_o) \Delta_t P_o - \Delta_t S_w] \tag{19}$$

Ecuación del agua:

$$RHS = \frac{V_b}{5.615 \rho_{w,c} \Delta t} [\Delta_t (\phi \rho_w S_w)]$$

$$\Delta_t (\phi \rho_w S_w) = \phi^n [(\phi_c \rho_w)^{n+1} S_w^{n+1} - S_w^n \rho_w^n]$$

$$(\phi_c \rho_w)^{n+1} = (1 + C_r \Delta_t P_w) (\rho_w^n + C_w \rho_w^n \Delta_t P_w)$$

Por otra parte, despreciando uno de los resultados de la multiplicación tenemos:

$$(\phi_c \rho_w)^{n+1} = \rho_w^n + (C_w + C_c) \rho_w^n \Delta_t P_o - \rho_w^n C_w \Delta_t P_c$$

y:

$$\Delta_t (\phi \rho_w S_w) = \phi^n \rho_w^n [(C_w + C_c) \Delta_t P_o S_w^{n+1} - S_w^{n+1} \Delta_t P_c]$$

Eliminando la no linealidad, los términos de acumulación de agua -- pueden escribirse:

$$RHS = \frac{V_p \rho_w}{5.615 \rho_w \Delta_t} [S_w^n (C_w + C_c) \Delta_t P_o + (1 - S_w^n) C_w \frac{\partial P_c}{\partial S_w} |^n \Delta_t S_w] \quad (20)$$

Forma final de las ecuaciones.

Incorporando los desarrollos anteriores en la ecuación 5, la forma final de la ecuación en diferencias finitas para flujo bidimensional, bi-fásico, agua-aceite es escrita en notación SIP como sigue:

$$\begin{aligned} Z_{1,k}^{1,o} p_{o,k-1}^{n+1} + D_{1,k}^{1,o} p_{o-1,k}^{n+1} + E_{1,k}^{1,o} p_{o,k}^{n+1} + F_{1,k}^{1,o} p_{o+1,k}^{n+1} + S_{1,k}^{1,o} p_{o,k+1}^{n+1} + Z_{1,k}^{1,w} S_{w,k-1}^{n+1} + \\ D_{1,k}^{1,w} S_{w-1,k}^{n+1} + E_{1,k}^{1,w} S_{w,k}^{n+1} + F_{1,k}^{1,w} S_{w+1,k}^{n+1} + S_{1,k}^{1,w} S_{w,k+1}^{n+1} = q_{1,k}^1 \end{aligned} \quad (21)$$

y:

$$\begin{aligned} Z_{1,k}^{2,o} p_{o,k-1}^{n+1} + D_{1,k}^{2,o} p_{o-1,k}^{n+1} + E_{1,k}^{2,o} p_{o,k}^{n+1} + F_{1,k}^{2,o} p_{o+1,k}^{n+1} + S_{1,k}^{2,o} p_{o,k+1}^{n+1} + Z_{1,k}^{2,w} S_{w,k-1}^{n+1} + \\ D_{1,k}^{2,w} S_{w-1,k}^{n+1} + E_{1,k}^{2,w} S_{w,k}^{n+1} + F_{1,k}^{2,w} S_{w+1,k}^{n+1} + S_{1,k}^{2,w} S_{w,k+1}^{n+1} = q_{1,k}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

la definición de cada uno de los coeficientes anteriores está dada en el Apéndice I.

Condiciones iniciales y de frontera.

Las condiciones son tomadas como de no flujo en la frontera, incluida como sigue:

$$T_{1/2, k} = T_{NR+1/2, k} = 0 \quad (23a)$$

$$T_{1, 1/2} = T_{1, NR+1/2} = 0 \quad (23b)$$

que es el equivalente de imponer fronteras de reflexión usadas comúnmente con bloques de nodos centrales.

Inicialmente, una distribución de saturación es especificada de la siguientes manera:

$$S_{wi, k}^o \text{ y } S_{oi, k}^o$$

que están dados en todos los nodos, donde $N = 0$ representa el punto de -- inicio en el tiempo. Similarmente, $P_{oj, k}$, es especificado en la cima del yacimiento. El programa calcula entonces los restantes $P_{oj, k}$ en tal forma que se establezca el equilibrio gravitacional en la fase de aceite.

La entrada de agua puede ser considerada en el modelo por la especificación del gasto total de entrada. Este total es dividido proporcionalmente entre todos los bloques de la capa de fondo en términos de su transmisibilidad vertical, e incluido en la ecuación como un término de inyección. De esta manera en casos en que tiene lugar la entrada de agua, el bloque situado en el fondo puede no ser considerado como parte de la sección productora, porque esto puede hacer que el bloque tenga una producción y una inyección al mismo tiempo.

La formulación del problema bifásico en una solución de ecuaciones simultáneas aumenta la estabilidad de los diferentes esquemas. La matriz de coeficientes de las ecuaciones constituye una matriz de escasos elementos no nulos cuya estructura permite el uso efectivo de técnicas iterativas para su solución. La solución directa por el método de Gauss de un problema bifásico típico (360 ecuaciones con 360 incógnitas aproximadamente para ser resueltas en cada periodo de tiempo) puede requerir excesiva

memoria y tiempo de computadora. Por esta razón, la versión de Douglas - Richford (1956) del ADIP (método implícito de dirección alternante) iterativo, junto con el desarrollo del algoritmo tridiagonal desarrollado en otros trabajos, se usaron para resolver las ecuaciones en los casos de flujo bifásico.

ECUACIONES EN FORMA MATRICIAL.

$$\bar{Z}_{i,k} \bar{U}_{i,k-1} + \bar{D}_{i,k} \bar{U}_{i-1,k} + \bar{E}_{i,k} \bar{U}_{i,k} + \bar{F}_{i,k} \bar{U}_{i+1,k} + \bar{S}_{i,k} \bar{U}_{i,k+1} = \bar{q}_{i,k} \quad (24)$$

donde:

$$\bar{Z}_{i,k} = \begin{bmatrix} Z^{1,0} & Z^{1,w} \\ Z^{2,0} & Z^{2,w} \end{bmatrix}_{i,k} ; \quad \bar{D}_{i,k} = \begin{bmatrix} D^{1,0} & D^{1,w} \\ D^{2,0} & D^{2,w} \end{bmatrix}_{i,k}$$

$$\bar{E}_{i,k} = \begin{bmatrix} E^{1,0} & E^{1,w} \\ E^{2,0} & E^{2,w} \end{bmatrix}_{i,k} ; \quad \bar{F}_{i,k} = \begin{bmatrix} F^{1,0} & F^{1,w} \\ F^{2,0} & F^{2,w} \end{bmatrix}_{i,k}$$

$$\bar{S}_{i,k} = \begin{bmatrix} S^{1,0} & S^{1,w} \\ S^{2,0} & S^{2,w} \end{bmatrix}_{i,k} ; \quad \bar{q}_{i,k} = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}_{i,k}$$

$$\bar{U}_{i,k} = \begin{bmatrix} p_0 \\ S_w \end{bmatrix}_{i,k}^{n+1}$$

El desarrollo del ADIP iterativo consiste de dos etapas:

$$\bar{D}_{i,k} \partial \bar{U}_{i-1,k}^{(*)} + (\bar{E}_{i,k} - \bar{E}_{x_{i,k}} - \bar{H}_m) \partial \bar{U}_{i,k}^{(*)} + \bar{F}_{i,k} \partial \bar{U}_{i+1,k}^{(*)} = \bar{R}_{i,k}^{(*)} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{i,k} \partial \bar{U}_{i,k-1}^{m+1} + (\bar{E}_{i,k} - \bar{E}_{x_{i,k}} - \bar{H}_m) \partial \bar{U}_{i,k}^{m+1} + \bar{S}_{i,k} \partial \bar{U}_{i,k+1}^{m+1} = \\ \bar{R}_{i,k}^m - (\bar{D}_{i,k} \partial \bar{U}_{i-1,k}^{(*)} + \bar{E}_{x_{i,k}} \partial \bar{U}_{i,k}^{(*)} + \bar{F}_{i,k} \partial \bar{U}_{i+1,k}^{(*)}) \end{aligned} \quad (26)$$

Donde los asteriscos de ∂U indican valores intermedios entre la iteración m y $(m+1)$. $\bar{R}_{i,k}^{(m)}$ y los otros términos se definen a continuación.

$$\partial \bar{U}_{i,k}^{(*)} = \bar{U}_{i,k}^{(*)} - \bar{U}_{i,k}^m$$

$$\partial \bar{U}_{i,k}^{m+1} = \bar{U}_{i,k}^{m+1} - \bar{U}_{i,k}^m$$

$$\bar{H}_m = \begin{bmatrix} \alpha_m^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_m^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_1^J T_o^{(1)} & \sum_1^J T_w^{(1)} \\ \sum_1^J T_o^{(2)} & \sum_1^J T_w^{(2)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\bar{R}_{i,k}^m = \bar{q}_{i,k} - (\bar{Z}_{i,k} \bar{U}_{i,k-1}^m + \bar{D}_{i,k} \bar{U}_{i-1,k}^m + \bar{E} \bar{U}_{i,k}^m + \bar{F}_{i,k} \bar{U}_{i+1,k}^m + \bar{S}_{i,k} \bar{U}_{i,k+1}^m) \quad (28)$$

La matriz de iteración \bar{H}_m varía ciclicamente con el nivel de iteración, cada ciclo incluye de 6 a 10 iteraciones. En este modelo:

$$\alpha_m^{(1)} = \alpha_n^{(2)} = \alpha_m$$

$$\sum_1^J T_j^{(1)} = Z_{i,k}^{j,1} + D_{i,k}^{j,1} + F_{i,k}^{j,1} + S_{i,k}^{j,1} \quad ; \quad j = 1, 2 \quad ; \quad l = o, w$$

La ecuación 25 es implícita en los términos a lo largo de la dirección radial y explícita a lo largo de la coordenada vertical, resultando un sistema de bloques tridiagonales de ecuaciones lineales, una por cada línea, que son resueltas para (*) usando el algoritmo antes mencionado. Del mismo modo, uno por cada columna, que es resuelta para $\theta_{ij}^{(m+1)}$. Barridos alternados en las direcciones r y z son repetidos hasta obtener la convergencia.

b) Procedimiento de cálculo.

Las ecuaciones anteriores fueron escritas en lenguaje FORTRAN y manejadas en un sistema de cómputo UNIVAC/1100.

La solución de los sistemas de ecuaciones lineales se llevó a cabo por medio de la técnica ADIP.

A continuación se describe brevemente el programa de cómputo.

Simulador bifásico agua-aceite.

El simulador consiste de un programa principal, dos subrutinas y seis subprogramas function.

Programa principal.

El programa principal lee e imprime los datos de entrada, calcula los parámetros básicos, regula el flujo general de los cálculos, imprime los resultados inmediatos y perfora los resultados finales en el proceso. Esto se solicita al final para llevar la simulación más allá en tiempo.

La primera sección del programa principal lee las propiedades de la roca y los fluidos junto con algunos parámetros que regulan la secuencia de cálculo; si se tiene historia del pozo, las distribuciones de saturaciones y presiones son datos, de otro modo son calculadas estableciendo un equilibrio gravitacional y tomando como $P_e = 0$ en el contacto agua-aceite.

La segunda sección calcula los radios de los bloques, los gastos de

entrada de agua, los parámetros ADIP, el aceite y agua originales y las partes constantes de los coeficientes de transmisibilidad. Al iniciar ésta se definen claramente las condiciones de frontera. El propósito de la variable INICIO? es que al principio de la simulación ($t = 0$) se establezca un equilibrio gravitacional en la fase aceite. Pero esto no garantiza que un equilibrio capilar exista simultáneamente. Por esta razón el simulador lleva fuera de todo cálculo (INICIO = 5) los términos de inyección y producción iguales a cero. Se encontró empíricamente que dos o tres cálculos, con grandes períodos de tiempo, son suficientes para activar simultáneamente el equilibrio gravitacional-capilar.

Al principio de la tercera sección, los seis subprogramas function son utilizados para obtener las propiedades dependientes de la saturación, que son: P_c , $\frac{\partial P_c}{\partial S}$, K_{ro} , $\frac{\partial K_{ro}}{\partial S}$, K_{rw} y $\frac{\partial K_{rw}}{\partial S}$; en el resto de esta sección se calculan los coeficientes de la presión de las ecuaciones 25 y 26. Se observa que usando en la formulación del problema las densidades del fluido y expresando éstas como una función exponencial de su respectiva expresión, se elimina la necesidad de utilizar dos subprogramas function (correspondientes a los factores de volumen del agua y del aceite).

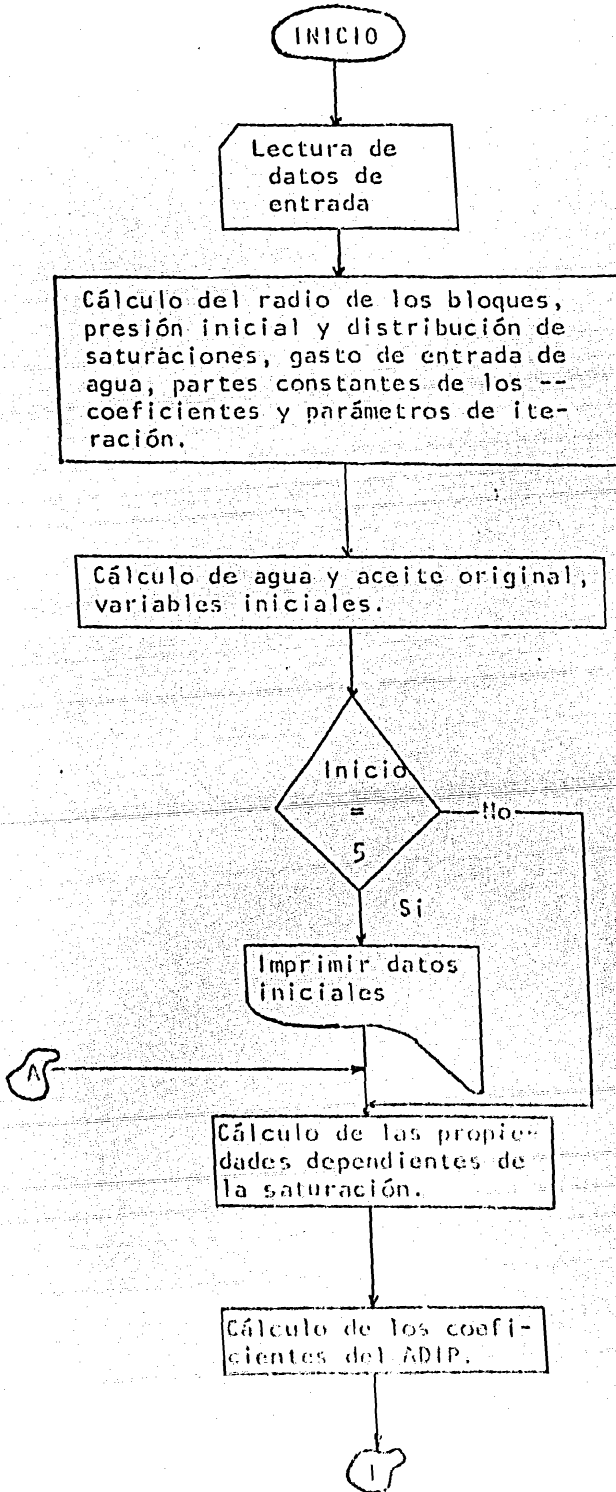
La cuarta sección consiste de una transferencia a la subrutina -- ADIP donde las ecuaciones 25 y 26 son resueltas.

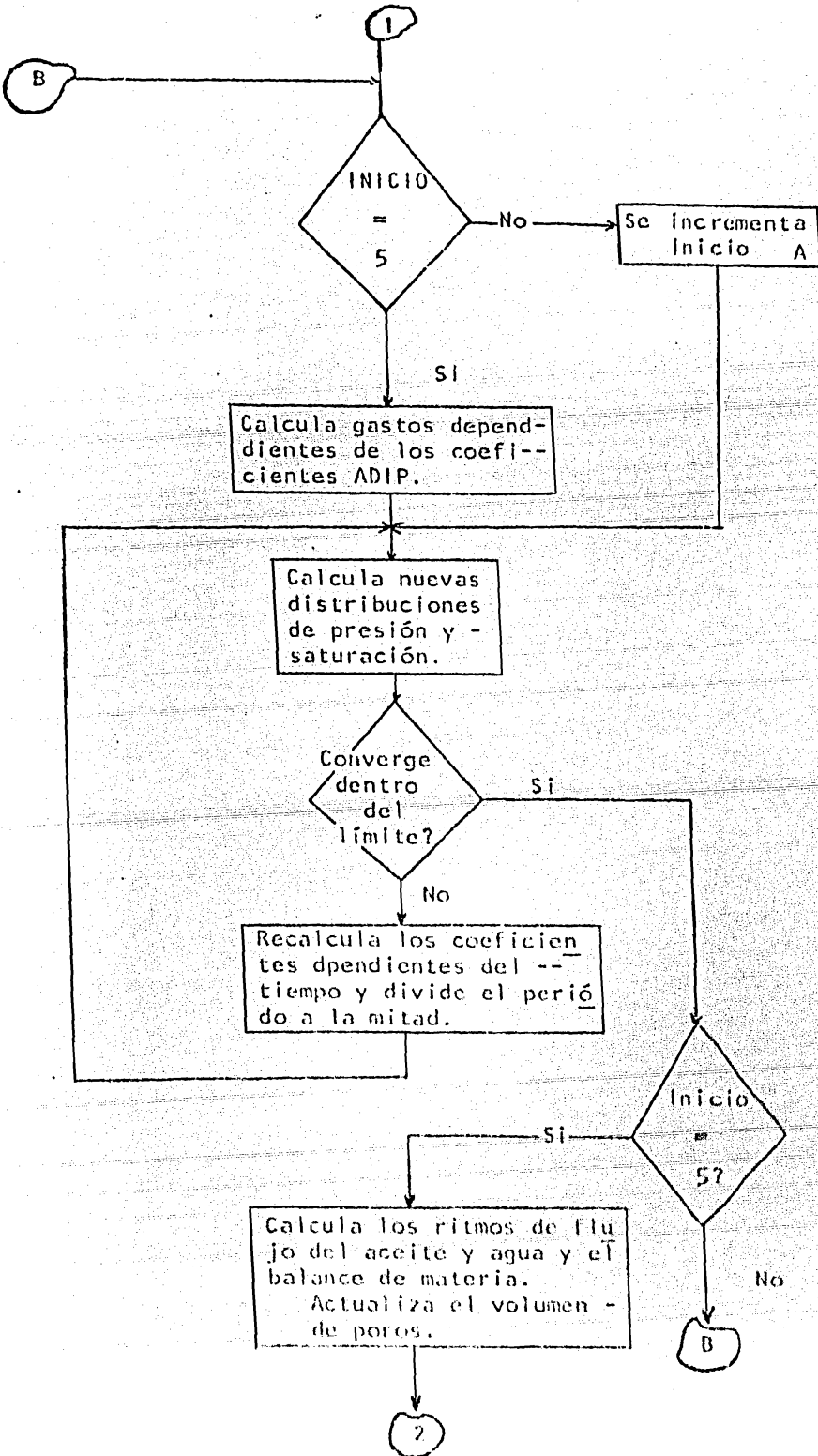
En la quinta y última sección, se utilizan las presiones calculadas recientemente y las saturaciones al final del período de tiempo; los ritmos de flujo del agua y del aceite son obtenidos junto con el nuevo volumen de poros (dependiente de la presión), agua y aceite residual, y se comparan con el balance de materia. Se asigna el programa para imprimir los resultados obtenidos para cada uno de los períodos. Entonces, si el número de iteraciones requeridas para la convergencia en el último período es menor que la especificación, el tamaño del período es duplicado.

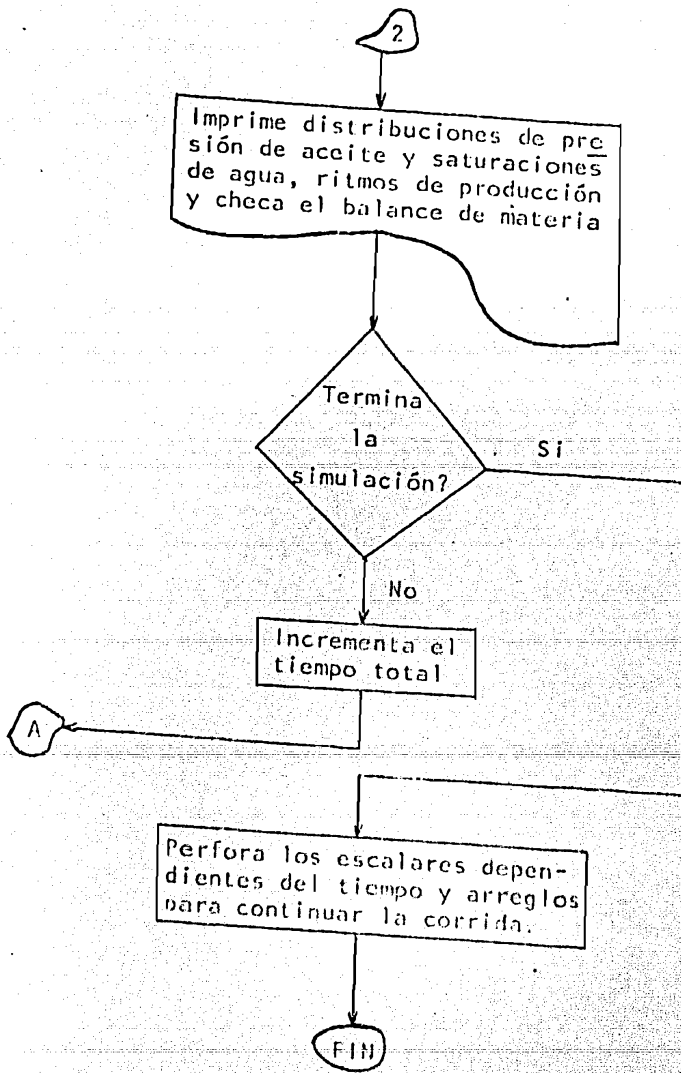
Convergencia y estabilidad.

Es difícil establecer un criterio de estabilidad para problemas multidimensionales no lineales, como los que se presentan en la solución de las ecuaciones de modelos de yacimientos. La experiencia con la opo-

DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO DE CALCULO







ración de modelos demuestra que existe un límite en el período de tiempo más allá del cual la solución se vuelve inestable. En algunos trabajos anteriores, discutieron el error de truncamiento así como la convergencia y estabilidad del problema con una malla de bloques irregulares comúnmente usados en la simulación de yacimientos.

Dos cantidades adimensionales, $q_t \Delta t / V_p$ y el balance de materia, proporcionan un medio de evaluación de la aproximación del modelo de diferencias finitas.

La estabilidad del esquema de solución es función del tamaño de los bloques productores o inyectores, la magnitud del período de tiempo y el ritmo de producción (inyección) $t_r = q_t \Delta t / V_p$ donde V_p es el volumen de poros de un bloque productor (inyector) y q_t el gasto total de producción (inyección) para ese bloque. Físicamente t_r es el número de volúmenes de poros de fluido que pasa a través de un bloque dado en un período de tiempo.

En este modelo, el ritmo de flujo y el volumen de poros son constantes, por lo que el período de tiempo fue usado como factor de control para determinar la estabilidad. Si para un período de tiempo dado, el número de iteraciones necesarias para la convergencia es menor que el previamente fijado, el período de tiempo se duplica.

A continuación se muestra el diagrama de flujo del proceso de cálculo.

V.- EJEMPLO DE APLICACION Y ANALISIS DE RESULTADOS.

Los resultados de las pruebas realizadas con diferentes gastos son mostrados en gráficas que permiten una comparación y la formación de un criterio para definir la política de explotación de un pozo bajosaturado.

Los datos utilizados por el modelo se anexan en el Apéndice II. La buena calidad de los resultados se reflejó en los bajos errores de balance de materia cuyos valores fueron mantenidos dentro de un rango de 0.9999 a 1.000056.

Los parámetros analizados por considerarse que tienen una mayor influencia sobre el fenómeno de conificación son: el ritmo total de producción, la longitud del intervalo disparado y la posición de éste en relación a la zona de aceite. Además, de estos parámetros existe la posibilidad de analizar, por medio de este modelo, la viscosidad de ambas fases, la anisotropía (K_h/K_v), la magnitud del espesor del acuífero, el espesor de aceite, la saturación de agua inicial y la magnitud del radio de drené.

Los ritmos de extracción probados fueron de 1000, 2000, 3000 y 12000 B/D manteniéndolos constantes hasta alcanzar un flujo fraccional de agua de .95, que es el valor conocido como límite económico. Las propiedades de la roca y de los fluidos se determinaron de correlaciones y pruebas de laboratorio.

El simulador proporciona gráficas que representan el movimiento de los frentes de saturación de agua en la sección transversal del área de drené del pozo. Se anexa una secuencia de la evolución de estas curvas con el tiempo al final de este trabajo. Apéndice III.

Los ritmos totales de extracción se introducen en el modelo y éste, dependiendo de los parámetros petrofísicos y propiedades de los fluidos, hace un prorrateo entre los ritmos parciales de agua y aceite en donde éste último disminuye en forma drástica conforme el tiempo de simulación avanza. Para la comparación del comportamiento del ritmo de producción de aceite se anexa una gráfica de éste y la producción acumulativa de agua como función del tiempo, por claridad sólo se muestran tres ritmos de extracción (Fig. 5). Se graficó también el ritmo de producción de aceite contra recuperación para determinar cuál era la máxima alcanzada cuando el flujo fraccional de agua llegaba a un valor de 0.95 (Fig. 8). Para comprobar la confiabilidad de los valores de esta gráfica se hizo lo mismo con los flujos fraccionales contra la recuperación y se muestran en la Fig. 7.

La recuperación se consideró como la relación del volumen de aceite producido al volumen de aceite recuperable, definiendo como volumen recuperable aquél que puede ser obtenido por desplazamiento con agua, que para este trabajo fue de 11'304,827 bl.

Los resultados obtenidos para tres ritmos de extracción se presentan en la tabla siguiente:

Ritmo de producción Bbl/D	Volumen producido de aceite	Tiempo (años)	Recuperación %	Agua producida Bbl	Valor del aceite producido 10 ⁵ dólares
1000	8478620	84	75	27239377	127.179
3000	7235089	32	64	32015384	108.326
12000	6782896	11	60	42125780	101.743

En la tabla de resultados se observa una notable diferencia en el tiempo de recuperación para los ritmos de producción de 1000 y 12000 barriles siendo mucho mayor para el primero; en la columna de volumen de agua producida la diferencia no es tan marcada. Tomando como precio del crudo 15 dólares por barril la diferencia obtenida por el hecho de producir a un ritmo de 1000 barriles es de 25.435 millones de dólares, pero esto dividido por la diferencia de tiempo es menos de medio millón de dólares.

lares que realmente no representan una ganancia significativa.

Se observa también, que la recuperación aumenta cuando el ritmo de extracción disminuye, no obstante eso la diferencia no se justifica si se logra en el tiempo indicado ya que esto hace que los costos de producción aumenten considerablemente.

Teniendo en cuenta que la actitud más común, cuando se presentaban manifestaciones de una posible conificación, era cerrar el pozo. Se simuló el cierre del pozo durante un tiempo de 12 años resultando que el contacto agua-aceite no descendió en forma notable debido a la homogeneidad del medio simulado y a las fuerzas capilares existentes.

Las gráficas de los resultados obtenidos en la simulación se presentan a continuación, representación el gasto de aceite y recuperación en función del tiempo, figuras 5 y 6, respectivamente. Se presenta también al flujo fraccional y gasto de aceite en función de la recuperación figuras 7 y 8.

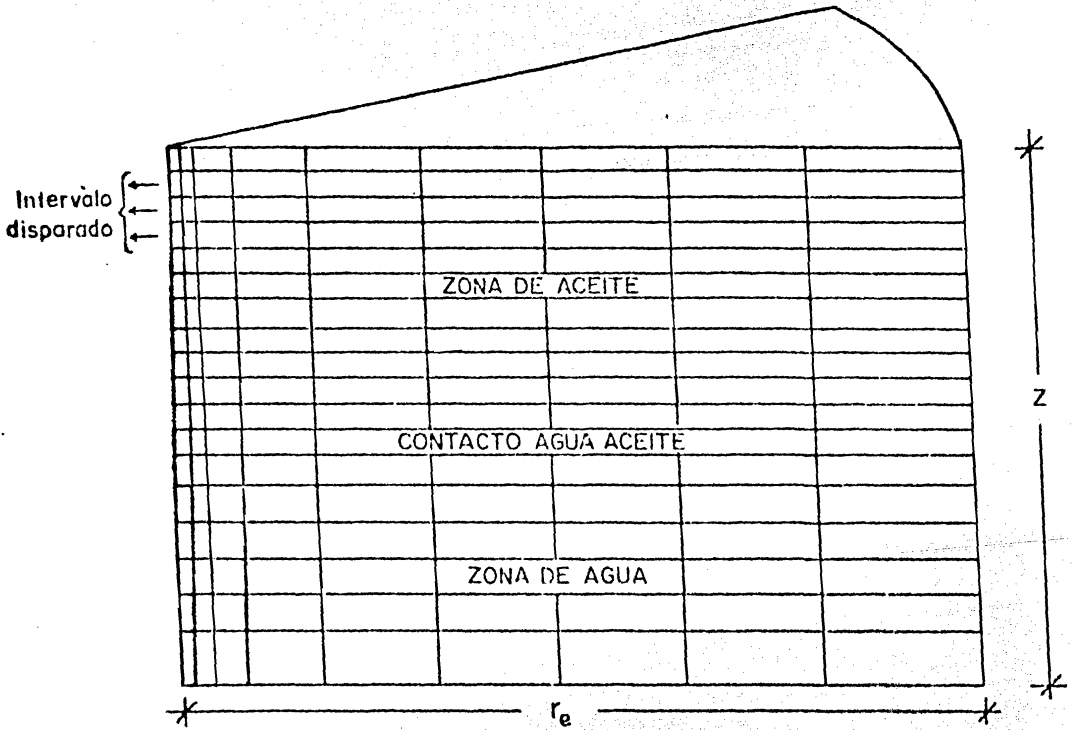


Fig. 1 Esquema representativo del área de drenaje del pozo y de la malla asignada a su corte transversal.

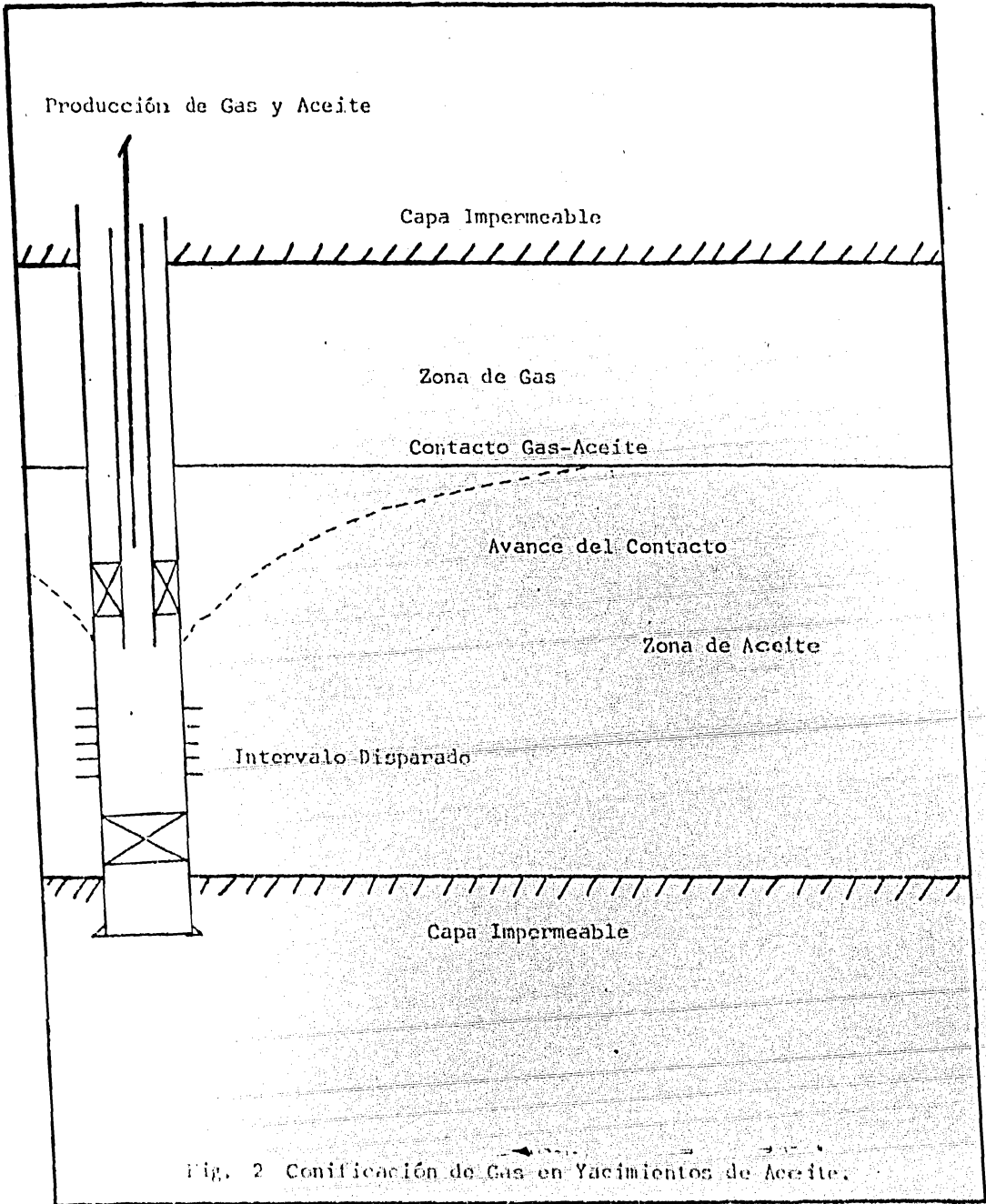


Fig. 2 Conificación de Gas en Yacimientos de Aceite.

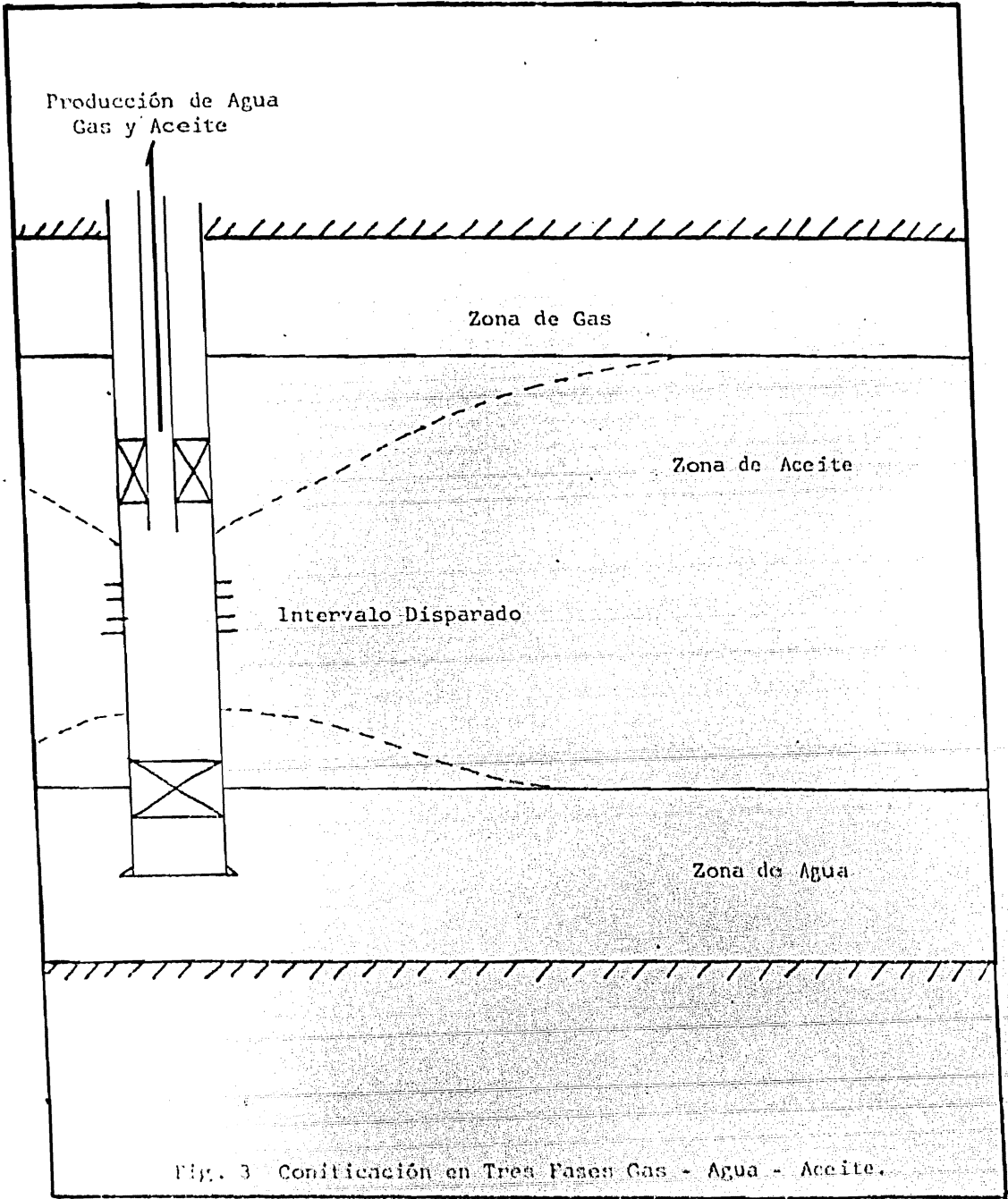


Fig. 3 Conificación en Tres Fases Gas - Agua - Aceite.

Producción Agua y
Aceite.

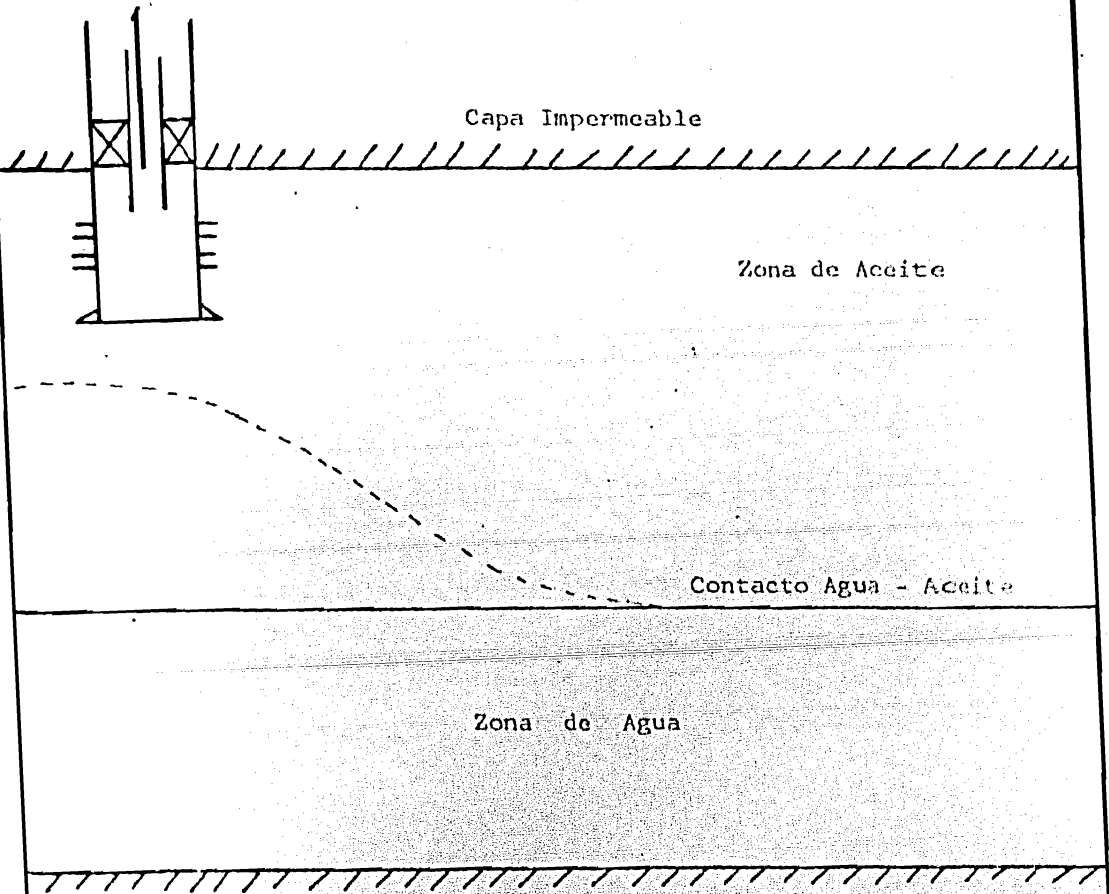


Fig. 4 - Conificación de Agua en Yacimientos de Aceite
Bajosaturado

Fig. 5 Gasto de Aceite en Función del Tiempo.

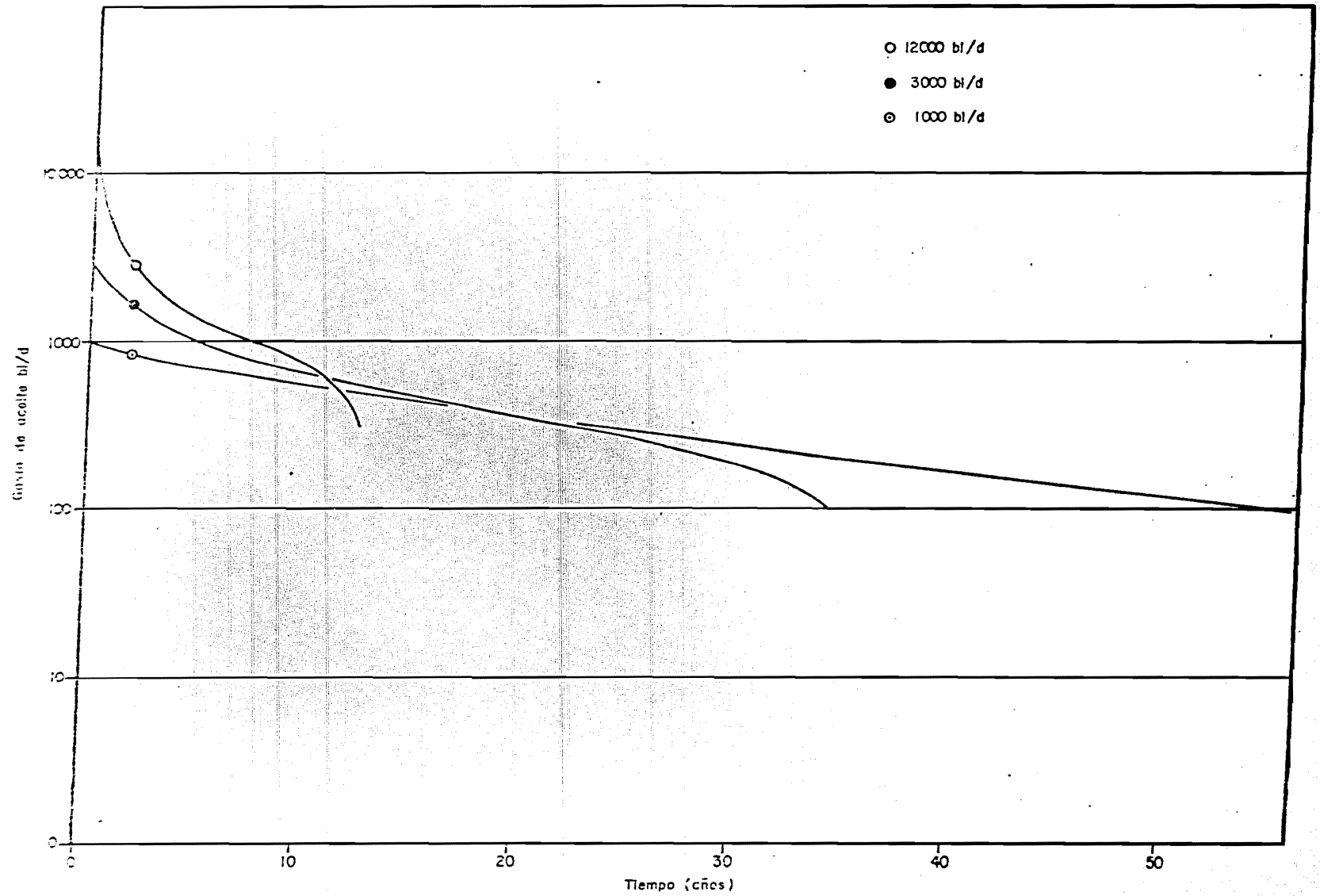
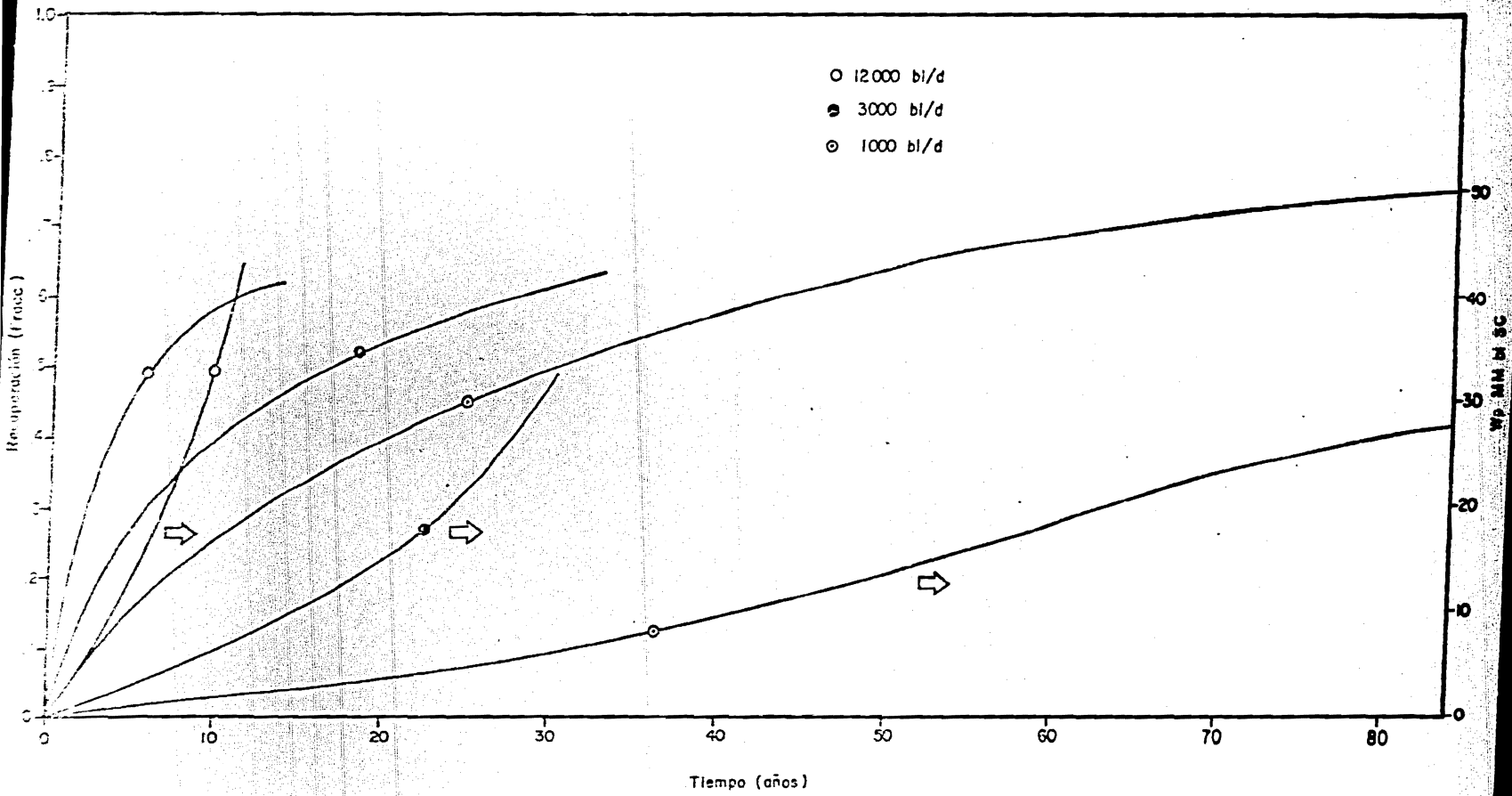
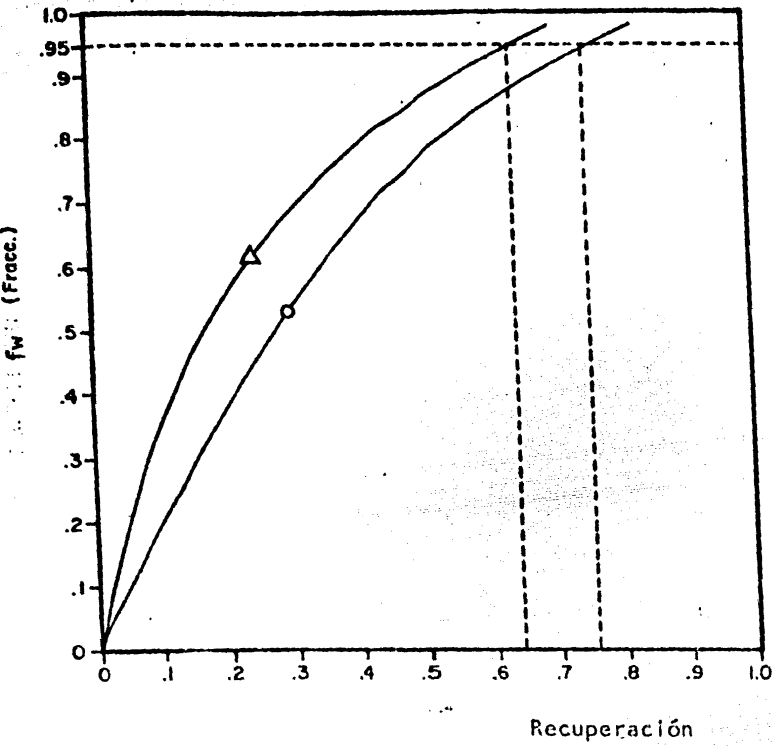


Fig. 6 Recuperación en Función del Tiempo.





△ 3000 bl/d
○ 1000 bl/d

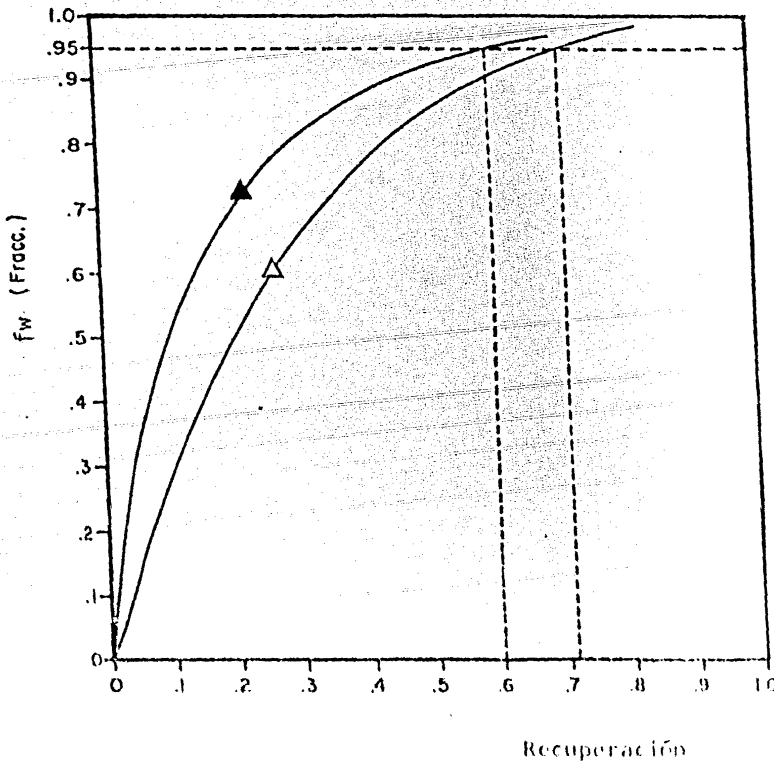


Fig. 7 Flujos Fraccionales Vs Recuperación.

GASTO DE ACEITE (bl/d)

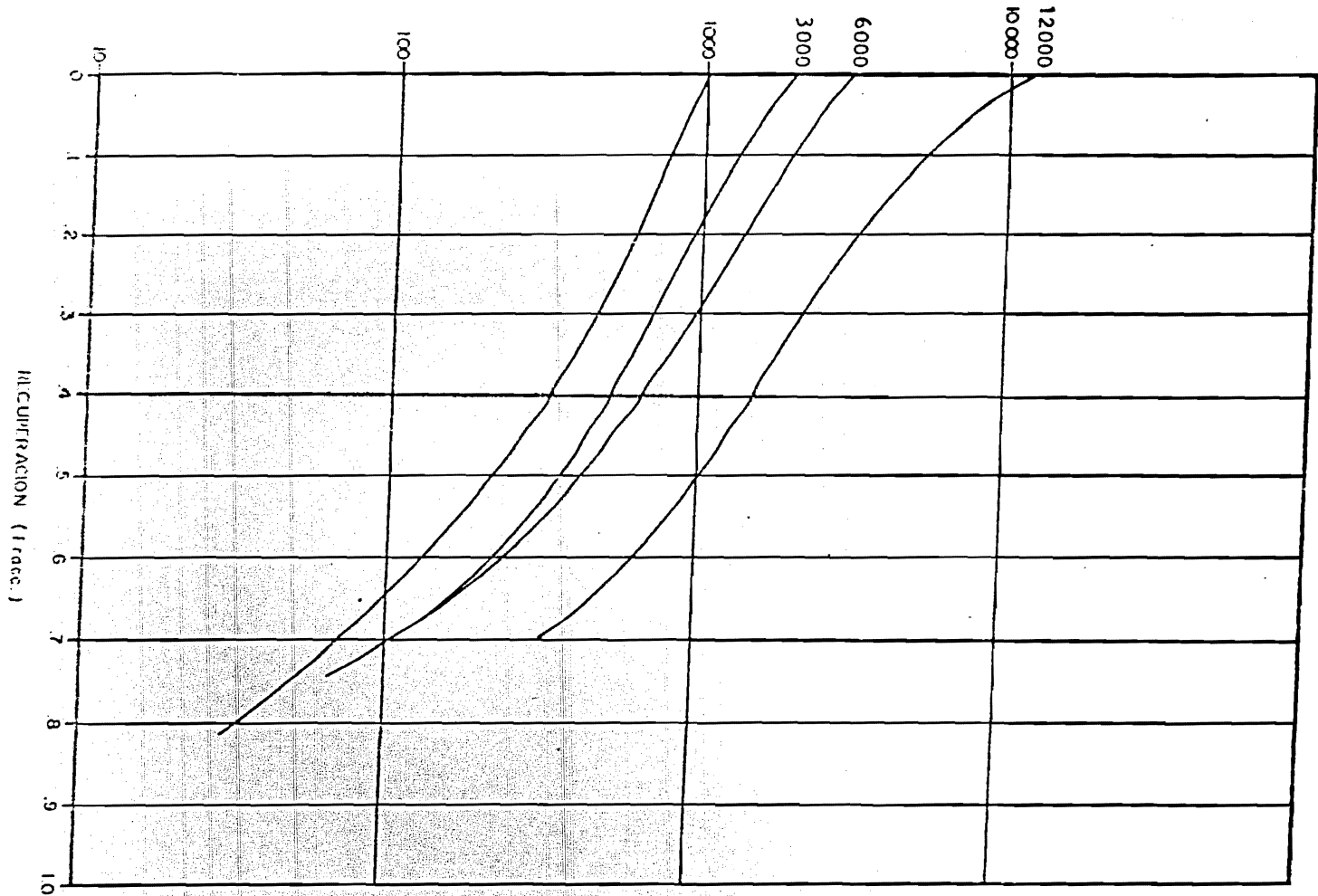


Fig. 8 Gasto de Aceite Vs Recuperación

VI.- CONCLUSIONES. RECOMENDACIONES.

Después de analizar el trabajo realizado, los resultados obtenidos con la ayuda del simulador y la literatura consultada, las conclusiones finales son:

1. Los parámetros más importantes que se deben analizar cuando se en cuentra la posibilidad de ocurrir una conificación de fluidos son:
 - a) Ritmo total de producción.
 - b) Magnitud y posición del intervalo productor.
 - c) Relación de permeabilidades horizontal a vertical.
2. La magnitud del intervalo productor está en función directa del ritmo de producción deseado y
3. Los ritmos altos de producción pueden conducir a una mejor recuperación total desde el punto de vista económico.

Para la determinación del ritmo óptimo de producción es necesario tomar en cuenta los parámetros que se han analizado y además para cada caso en particular las propiedades de la roca y los fluidos que se encuentran en el yacimiento. Se debe tener en cuenta además que los resultados aquí obtenidos son un caso particular diferente de cualquier otro en cuestión.

N O M E N C L A T U R A

ρ	Densidad
v	Velocidad
Δ	Incremento
τ	Tiempo
r	Radio - dirección radial
z	Dirección vertical
θ	Dirección angular
k	Permeabilidad
μ	Viscosidad
q^*	Gasto por unidad de volumen
Q	Gasto total de fluidos producidos
s	Dirección, saturación
ϕ	Potencial de velocidad
B	Factor de volumen
P	Presión
C	Compresibilidad
α	Constante utilizada para definir los radios de los bloques
g/gc	Unidades de fuerza por unidad de masa
T	Transmisibilidad
N	Número
ϕ	Porosidad
NR	Número de celdas en la dirección radial
NZ	Número de celdas en la dirección vertical

SUBINDICES

- r Radio
- r Dirección radial
- C Capilar
- c Crítico
- w Agua
- o Aceite
- st,sc Condiciones estándar
- z Dirección vertical
- θ Dirección angular
- r Relativo
- b/d Barriles por día
- x Dirección
- T Total
- t Tiempo

SUPERINDICES

- n Nivel de tiempo
- m Nivel de iteración
- 1 Ecuación del aceite
- 2 Ecuación del agua
- o Aceite
- w Agua

B I B L I O G R A F I A

1. Bashbush, B. J.: "Numerical simulation of two and three phase -- coning", The Pennsylvania State University (1975).
2. Beveridge S., K.H. Coats y M.T. Alexandre: "Numerical coning applications". Canadian Technology J. (julio-septiembre, 1970).
3. Blades, D.N. y D.H. Stright: "Predicting high volume lift performance in wells coning water". The Journal Canadian Petroleum (oct. dic., 1975).
4. Blair, P.M. y Weinaug: "Solution of two-phase flow problems using implicit difference equations". Soc. Pet. Eng. J. (diciembre 1969).
5. Bournazel, C. y Jeanson, B. "Fast water-coning evaluation method" Artículo 3628 presentado en el Congreso Anual de la SPE-AIME, New Orleans, (oct. 1971).
6. Byrne, B.W.; Morse, R.A.: "Water coning may not be harmful". Oil and Gas Journal (septiembre, 1973).
7. Chierici, G. L.; Ciucci, G.M. y Pizzi G.: "A systematic study of gas and water coning by potentiometric models". J. Pet. Tech. -- (agosto, 1964).
8. Dumore, J.M. y D. Marsal y D. Marsal: "The use of integral equations in the numerical solution of complex reservoir engineering problems". Soc. Pet. Eng. J. (diciembre, 1973).
9. Letkeman, J.P. y Ridings, R.L.: "A numerical coning model". Soc. Pet. Eng. J. (diciembre, 1970).
10. Limón, J.T.: "Un estudio de conificación de agua". Rev. del Instituto Mexicano del Petróleo (octubre, 1970).
11. MacDonald, R.C. y Coats, K.H.: "Methods for numerical simulation of water and gas coning". Soc. Pet. Eng. J. (diciembre, 1970).
12. Pérez R. C., Hefferan, V.J. y Loreto, M.E.G.: "Graphical solution of water and gas coning". Soc. Pet. Eng. J. (agosto, 1959).
13. Settari, A. y Aziz, K.: "Use of irregular grid in reservoir simulation". Soc. Pet. Eng. J. (abril, 1972).
14. Settari, A. y Aziz, K.: "A computer model for two phase coning simulation". Soc. Pet. Eng. J. (junio, 1974).
15. Sobocinski D.P. y A.J. Cornelius "A correlation for predicting water coning time", Journal Pet. Tech. (mayo, 1965).

16. Sonier, F. Besset, P. y Ombret, O.: "A numerical model of multi-phase flow around a well". Soc. Pet. Eng. J. (diciembre, 1973).
17. Spivak, A. y Coats, K.H.: "Numerical simulation of coning using implicit production terms". Soc. Pet. Eng. J. (septiembre, 1970).
18. Welge, H. J. y Weber, A.G.: "Use of two dimensional methods for calculating well coning behavior". Soc. Pet. Eng. J. (diciembre, 1964).
19. Woods, E. G. y Khurana, A. K.: "Pseudo functions for water coning in a 3-dimensions reservoir simulator". Soc. Pet. Eng. J. (octubre, 1975).

A P E N D I C E I

FORMULACION DE LOS COEFICIENTES DEL ESQUEMA

EN DIFERENCIAS FINITAS DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

Se presenta la definición de cada uno de los coeficientes de las ecuaciones 21 y 22.

$$Z_{1,k}^{1,0} = C_{oz_{1,k-1/2}}^n [(1-w_{zb}) K_{ro_{1,k}}^n + W_{zb} K_{ro_{1,k-1}}^n],$$

$$D_{1,k}^{1,0} = C_{or_{1-1/2,k}}^n [(1-w_{xb}) K_{ro_{1,k}}^n + W_{xb} K_{ro_{1-1,k}}^n],$$

$$F_{1,k}^{1,0} = C_{or_{1+1/2,k}}^n [(1-w_{xf}) K_{ro_{1,k}}^n + W_{xb} K_{ro_{1+1,k}}^n],$$

$$S_{1,k}^{1,0} = C_{oz_{1,k+1/2}}^n [(1-w_{xf}) K_{ro_{1,k}}^n + W_{xf} K_{ro_{1,k+1}}^n]$$

$$E_{z_{1,k}}^{1,0} = -Z_{1,k}^{1,0} - S_{1,k}^{1,0}$$

$$I_{1,k}^{1,0} = \frac{V \rho_{1,k}^n \rho_{o_{1,k}}^n}{5.615 \rho_{o_{1,k}}^n} (1 - S_{w_{1,k}}^n) (C_o + C_r),$$

$$E_{x_{1,k}}^{1,0} = -D_{1,k}^{1,0} - F_{1,k}^{1,0}$$

$$E_{i,k}^{1,0} = E_{x_{1,k}}^{1,0} + E_{z_{1,k}}^{1,0} - \frac{I_{1,k}^{1,0}}{\Delta t}$$

$$Z_{1,k}^{1,w} = W_{zb} C_{oz_{1,k-1/2,k}}^n \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{1,k-1}^n \Lambda_x \phi_{o_{1,k-1}}^n$$

$$D_{i,k}^{1,w} = -W_{xb} C_{or_{i-1/2,k}}^n \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{i-1,k}^n \Delta_x \Phi_{o_{i-1,k}}^n ;$$

$$F_{i,k}^{1,w} = W_{xb} C_{or_{i+1/2,k}}^n \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{i+1,k}^n \Delta_x \Phi_{o_{i,k}}^n ;$$

$$S_{i,k}^{1,w} = W_{zf} C_{oz_{i,k+1/2}}^n \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{i,k+1}^n \Delta_z \Phi_{o_{i,k}}^n ;$$

$$E_{x_{i,k}}^{1,w} = \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n [(1-W_{xf}) C_{or_{i+1/2,k}}^n \Delta_x \Phi_{o_{i,k}}^n - (1-W_{xb})$$

$$C_{or_{i-1/2,k}}^n \Delta_x \Phi_{o_{i-1,k}}^n] ;$$

$$E_{z_{i,k}}^{1,w} = \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n [(1-W_{zf}) C_{oz_{i,k+1/2}}^n \Delta_z \Phi_{o_{i,k}}^n - (1-W_{xb})$$

$$C_{oz_{i,k-1/2}}^n \Delta_z \Phi_{o_{i,k-1}}^n] ;$$

$$\Gamma_{i,k}^{1,w} = \frac{-V_{\rho_{i,k}}^n \rho_{n_{i,k}}^n}{5.615 \rho_{o_{ac}}} ;$$

$$E_{i,k}^{1,w} = E_{x_{i,k}}^{1,w} + E_{z_{i,k}}^{1,w} \frac{\Gamma_{i,k}^{1,w}}{\Delta t} + \frac{q_{T_{i,k}}^n \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n}{K_{ro_{i,k}}^n + \lambda_{i,k} K_{iw_{i,k}}^n} ;$$

$$Z_{i,k}^{2,0} = C_{wz_{i,k-1/2}}^n [(1 - W_{xb}) K_{rw_{i,k}}^n + W_{xb} K_{rw_{i,k-1}}^n] ;$$

$$D_{i,k}^{2,0} = C_{wr_{i-1/2,k}}^n [(1 - W_{xb}) K_{rw_{i,k}}^n + W_{xb} K_{rw_{i-1,k}}^n] ;$$

$$F_{i,k}^{2,0} = C_{wr_{i+1/2,k}}^n [(1 - W_{xf}) K_{rw_{i,k}}^n + W_{xb} K_{rw_{i+1,k}}^n] ;$$

$$S_{i,k}^{2,0} = C_{wz_{i,k+1/2}}^n [(1 - W_{xf}) K_{rw_{i,k}}^n + W_{xf} K_{rw_{i,k+1}}^n] ;$$

$$E_{x_{i,k}}^{2,0} = - D_{i,k}^{2,0} - F_{i,k}^{2,0} ;$$

$$E_{z_{i,k}}^{2,0} = - Z_{i,k}^{2,0} - S_{i,k}^{2,0} ;$$

$$\Gamma_{i,k}^{2,0} = \frac{V \rho_{i,k} \rho_{w_{i,k}}}{5.615 \rho_{w_{sc}}} (C_w + C_f) S_{w_{i,k}}^n ;$$

$$Z_{i,k}^{2,w} = - Z_{i,k}^{2,0} \left. \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \right|_{i,k-1}^n - W_{xb} \left. \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \right|_{i,k-1}^n \Delta z \Phi_{w_{i,k-1}}^n C_{wz_{i,k-1/2}}^n ;$$

$$D_{i,k}^{2,w} = - D_{i,k}^{2,0} \left. \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \right|_{i-1,k}^n - W_{xb} \left. \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \right|_{i-1,k}^n \Delta x \Phi_{w_{i-1,k}}^n C_{wr_{i-1/2,k}}^n ;$$

$$F_{i,k}^{2,w} = - F_{i,k}^{2,0} \left. \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \right|_{i+1,k}^n - W_{xf} \left. \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \right|_{i+1,k}^n \Delta x \Phi_{w_{i,k}}^n C_{wr_{i+1/2,k}}^n ;$$

$$E_{i,k}^{2,0} = E_{x,i,k}^{2,0} + E_{z,i,k}^{2,0} - \frac{\Gamma_{i,k}^{2,0}}{\Delta t}$$

$$S_{i,k}^{2,w} = -S_{i,k}^{2,0} \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \Big|_{i,k+1}^n + W_{zf} \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \Big|_{i,k+1}^n \Delta z \Phi_{w,i,k+1/2}^n C_{wz,i,k+1/2}^n ;$$

$$E_{x,i,k}^{2,w} = -E_{x,i,k}^{2,0} \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n + \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n [(1-W_{xf}) C_{wz,i+1/2,k}^n \Delta x \Phi_{w,i,k}^n$$

$$- (1-W_{xb}) C_{wz,i-1/2,k}^n \Delta x \Phi_{w,i-1,k}^n] ;$$

$$E_{z,i,k}^{2,w} = -E_{z,i,k}^{2,0} \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n + \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} [(1-W_{zf}) C_{wz,i,k+1/2}^n \Delta z \Phi_{w,i,k}^n$$

$$- (1-W_{zb}) C_{wz,i,k-1/2}^n \Delta z \Phi_{w,i,k-1}^n] ;$$

$$\Gamma_{i,k}^{2,w} = \frac{V_{p,i,k} \rho_{w,i,k}}{5.615 \rho_{wsc}} [1 - C_w S_{w,i,k}^n \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n] ;$$

$$E_{i,k}^{2,w} = E_{x,i,k}^{2,w} + E_{z,i,k}^{2,w} - \frac{\Gamma_{i,k}^{2,w}}{\Delta t} + \frac{q_{i,k}^n \lambda_{i,k}^n \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w} \Big|_{i,k}^n}{K_{ro,i,k}^n + \lambda_{i,k}^n K_{rw,i,k}^n} ;$$

$$q_{i,k}^1 = S_{i,k}^{1,0} \gamma_{o,i,k+1/2}^n \Delta Z_{k+1/2} - Z_{i,k}^{1,0} \gamma_{o,i,k-1/2}^n \Delta Z_{k-1/2} + Z_{i,k}^{1,w} S_{w,i,k-1}^n$$

$$+ D_{i,k}^{1,w} S_{w,i-1,k}^n + E_{i,k}^{1,w} S_{w,i,k}^n + F_{i,k}^{1,w} S_{w,i+1,k}^n + S_{i,k}^{1,w} S_{w,i,k+1}^n$$

$$-\frac{\Gamma_{i,k}^{1,0}}{\Delta t} P_{o,i,k}^n - \frac{q_{T,i,k}^n K_{i,o,i,k}^n}{K_{r,o,i,k}^n + \lambda_{i,k}^n K_{r,w,i,k}^n} ;$$

$$\begin{aligned} q_{i,k}^2 = & F_{i,k}^{2,0} \Delta x P_{c,i,k}^n - D_{i,k}^{2,0} \Delta x P_{c,i-1,k}^n + S_{i,k}^{2,0} (\Delta z P_{c,i,k}^n) + \\ & + \gamma_{w,i,k+1/2}^n \Delta Z_{k+1/2} - Z_{i,k}^{2,0} (\Delta z P_{c,i,k-1}^n) + \gamma_{w,i,k-1/2}^n \Delta Z_{k-1/2} + \\ & + Z_{i,k}^{2,w} S_{w,i,k-1}^n + D_{i,k}^{2,w} S_{w,i-1,k}^n + E_{i,k}^{2,w} S_{w,i,k}^n + \\ & + F_{i,k}^{2,w} S_{w,i+1,k}^n + S_{i,k}^{2,w} S_{w,i,k+1}^n - \frac{\Gamma_{i,k}^{2,0}}{\Delta t} P_{o,i,k}^n \\ & - \frac{q_{T,i,k} \lambda_{i,k} K_{r,w,i,k}^n}{K_{r,o,i,k}^n + \lambda_{i,k} K_{r,w,i,k}^n} \end{aligned}$$

$$\lambda_{i,k} = \frac{C_{w,i,k}}{C_{o,i,k}}$$

A P E N D I C E II

DATOS UTILIZADOS EN EL EJEMPLO DE APLICACION

SE ENLISTAN LAS PROPIEDADES DE LA ROCA Y DE LOS FLUIDOS QUE SE
UTILIZARON EN LAS PRUEBAS REALIZADAS EN EL SIMULADOR

Número de celdas en la Dirección Radial	9
Número de celdas en la Dirección Vertical	18
Radio del pozo	2 (pies)
Radio de drene	984.24 (pies)
Espesor de la zona de aceite	223.09 (pies)
Presión inicial en la cima del yacimiento	5440.00 (psi)
Peso específico del aceite medido a C.S.	53.47 (lb/pie ³)
Peso específico del agua medido a C.S.	70.69 (lb/pie ³)
Compresibilidad del aceite	.0000/37 (psi ⁻¹)
Compresibilidad del agua	.0000030 (psi ⁻¹)
Compresibilidad de la roca	.0000037 (psi ⁻¹)
Viscosidad del aceite	.53 (cp)
Viscosidad del agua	.52 (cp)

Aceite original "in situ" 18 204 229 bl st.

Agua inicial "in situ" 80 1145 396 bl st.

TABLA DE PROPIEDADES DE CADA UNO DE LOS ESTRATOS EN QUE SE DIVIDIO
LA SECCION TRANSVERSAL.

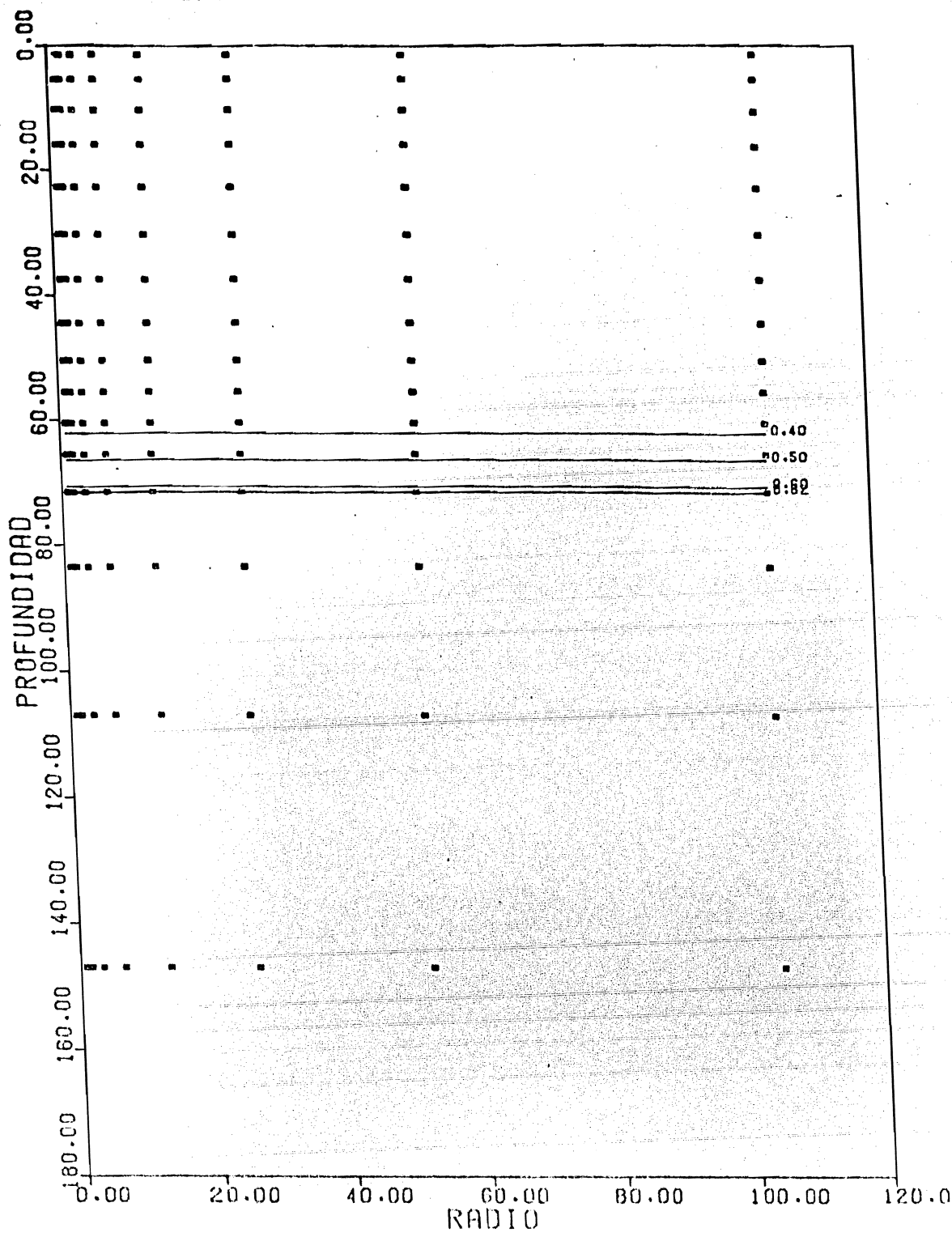
Estrato	Espesor	Porosidad	Per-Hor	Per-Ver	Sw
1	3	.19	.14	.140	.300
2	5	.19	.14	.140	.300
3	5	.19	.14	.140	.300
4	6	.19	.14	.140	.300
5	7.5	.20	.162	.162	.300
6	7.5	.20	.162	.162	.300
7	7	.20	.162	.162	.300
8	7	.20	.162	.162	.300
9	5	.19	.140	.140	.320
10	5	.19	.140	.140	.350
11	5	.19	.140	.140	.380
12	5	.19	.140	.140	.420
13	7	.19	.140	.140	.621
14	17	.20	.162	.162	1.00
15	30	.20	.162	.162	1.00
16	50	.20	.162	.162	1.00
17	50	.20	.162	.162	1.00
18	50	.20	.162	.162	1.00

A P E N D I C E III

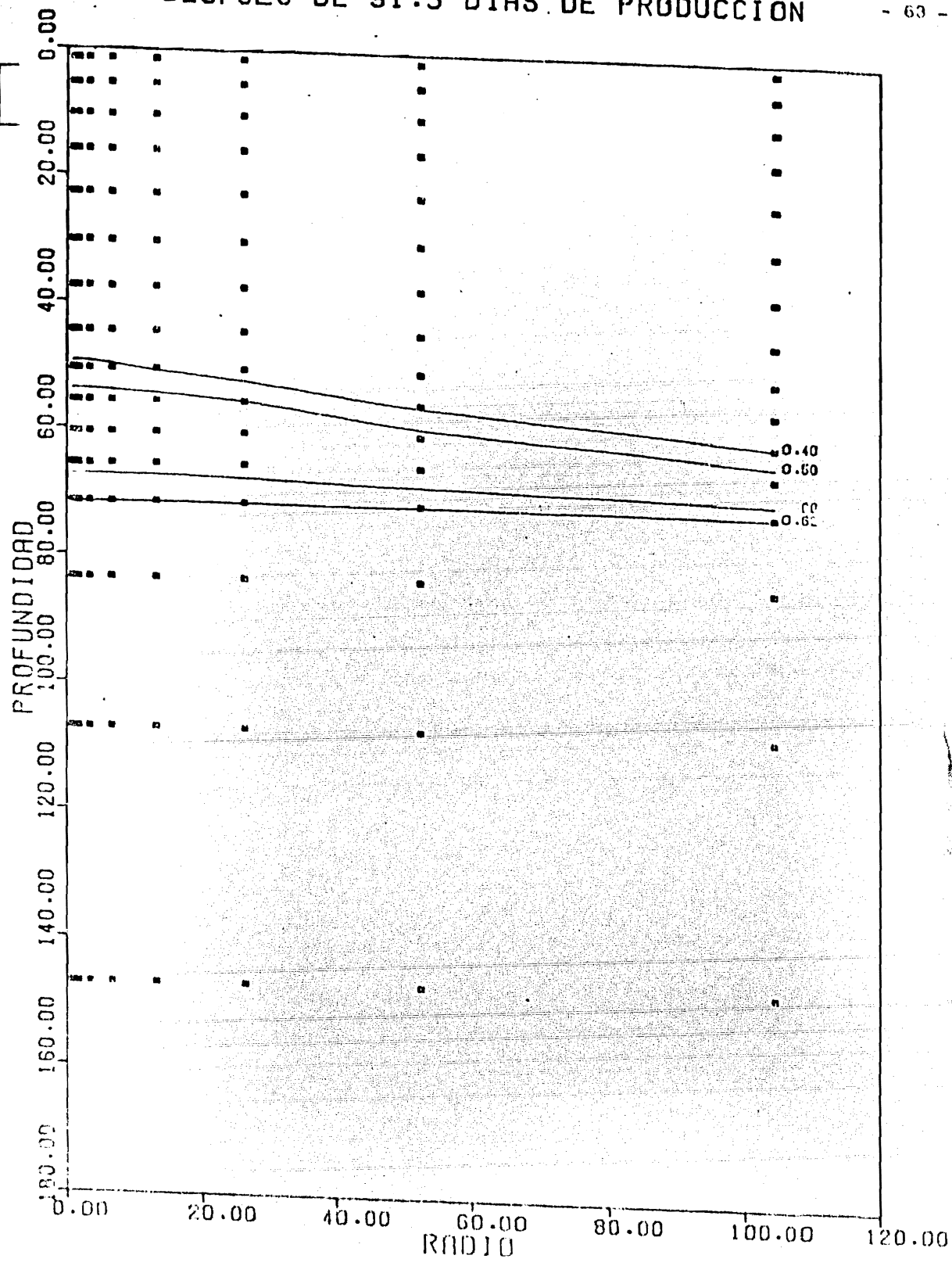
GRAFICAS PRODUCIDAS POR EL SIMULADOR PARA UN

RITMO DE EXTRACCION DE 3000 b/d.

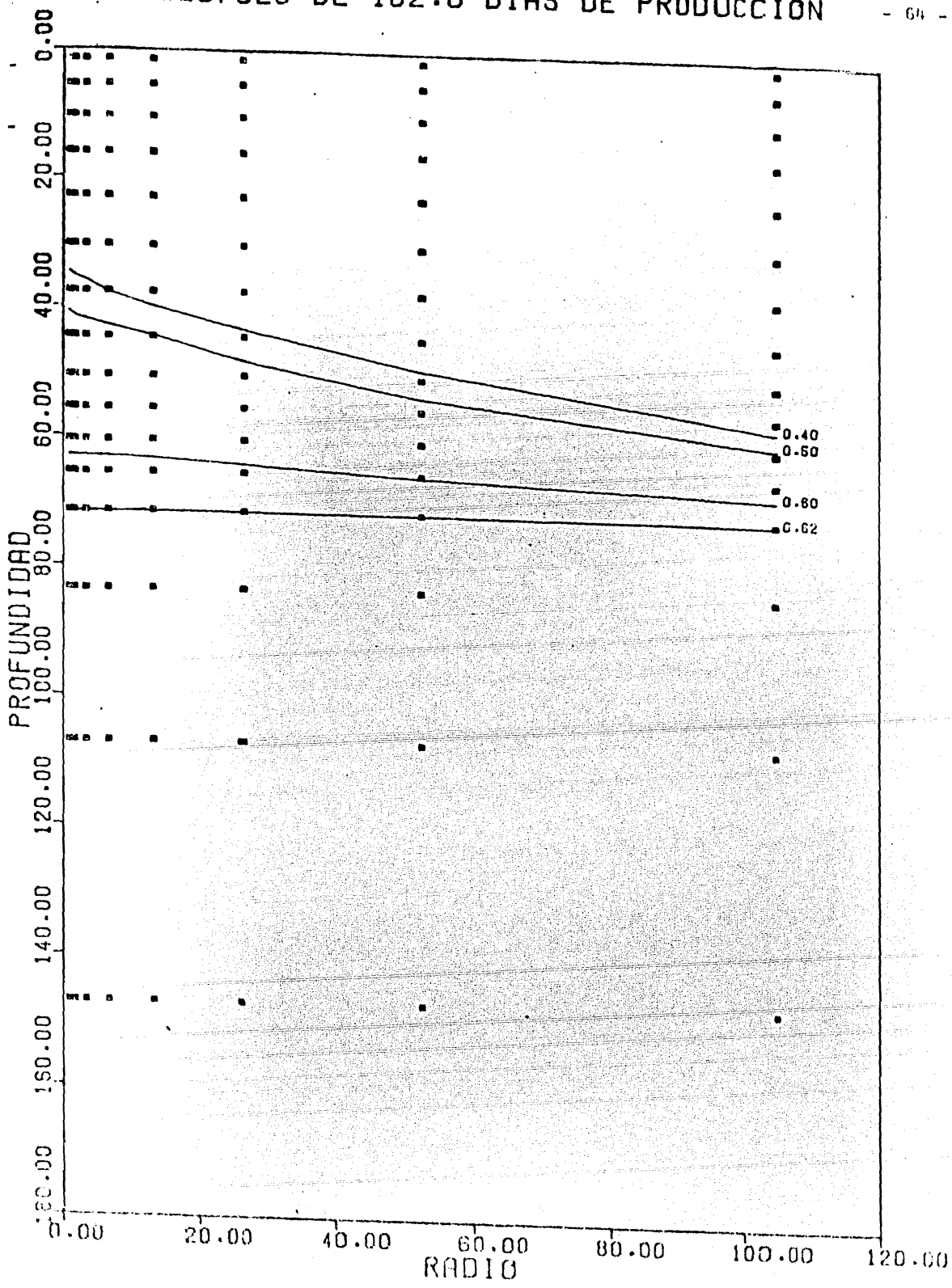
PERFILES DE SATURACION DE AGUA DESPUES DE 27.1 DIAS DE PRODUCCION



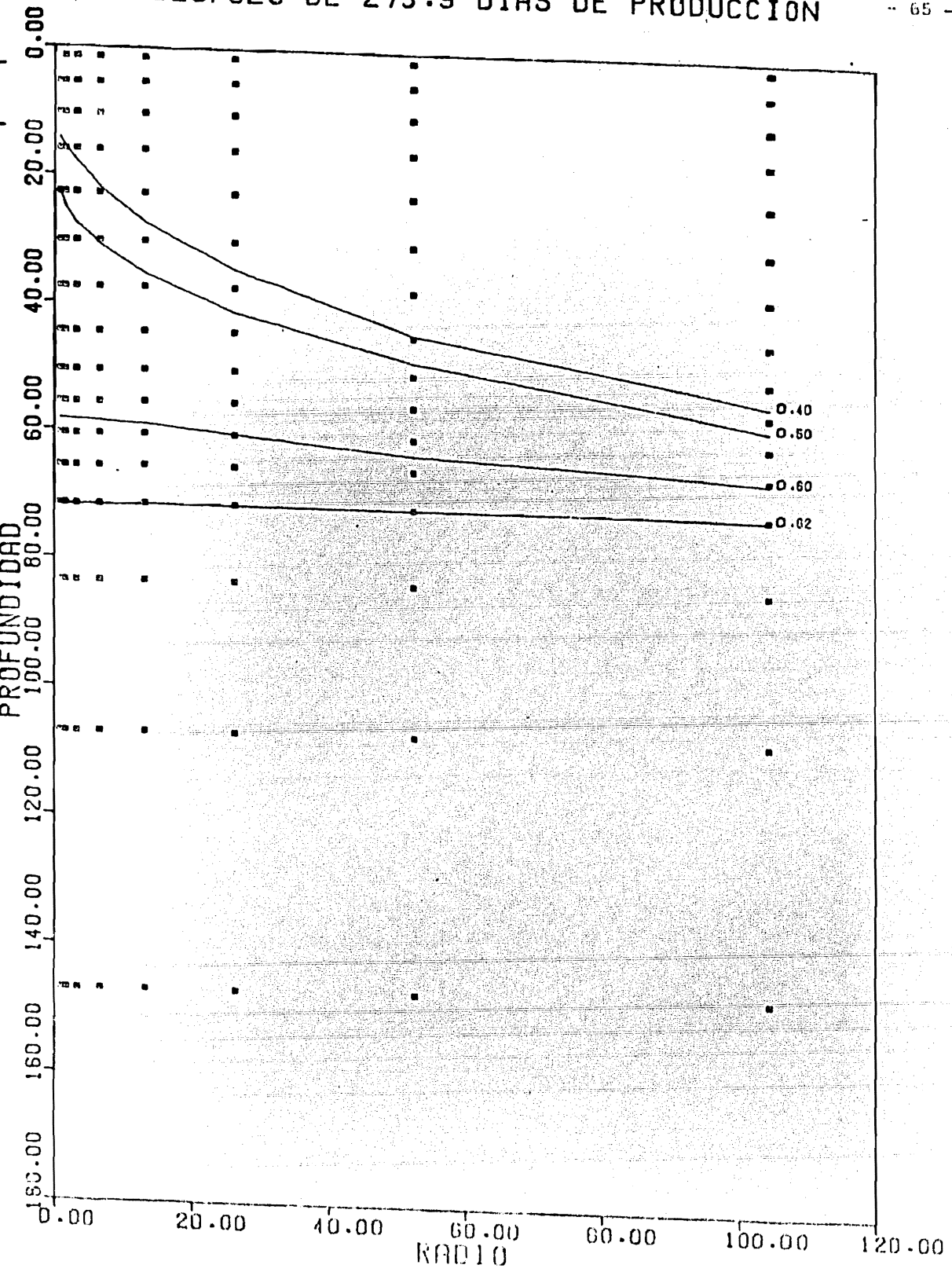
PERFILES DE SATURACION DE AGUA
DESPUES DE 91.3 DIAS DE PRODUCCION



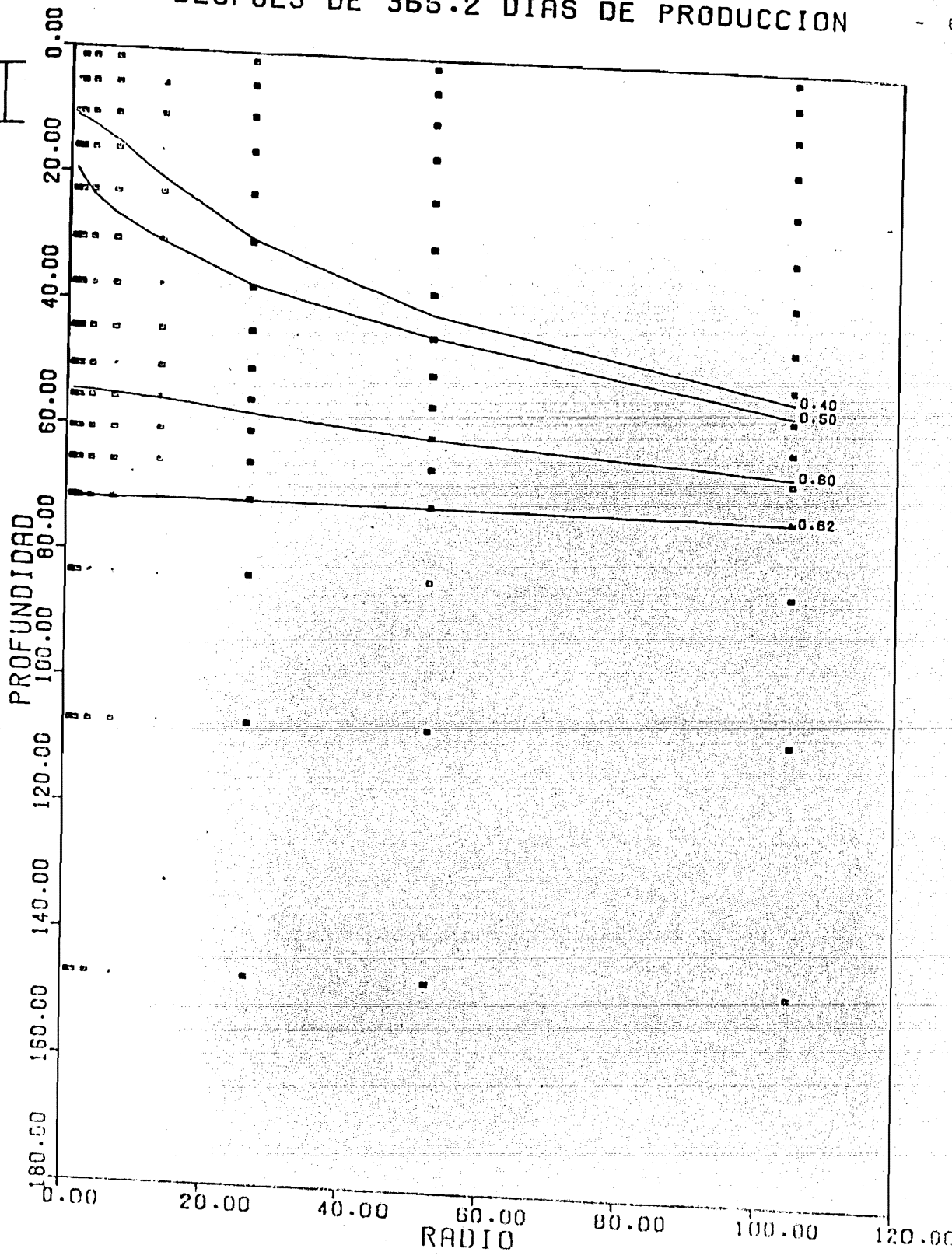
PERFILES DE SATURACION DE AGUA DESPUES DE 182.6 DIAS DE PRODUCCION



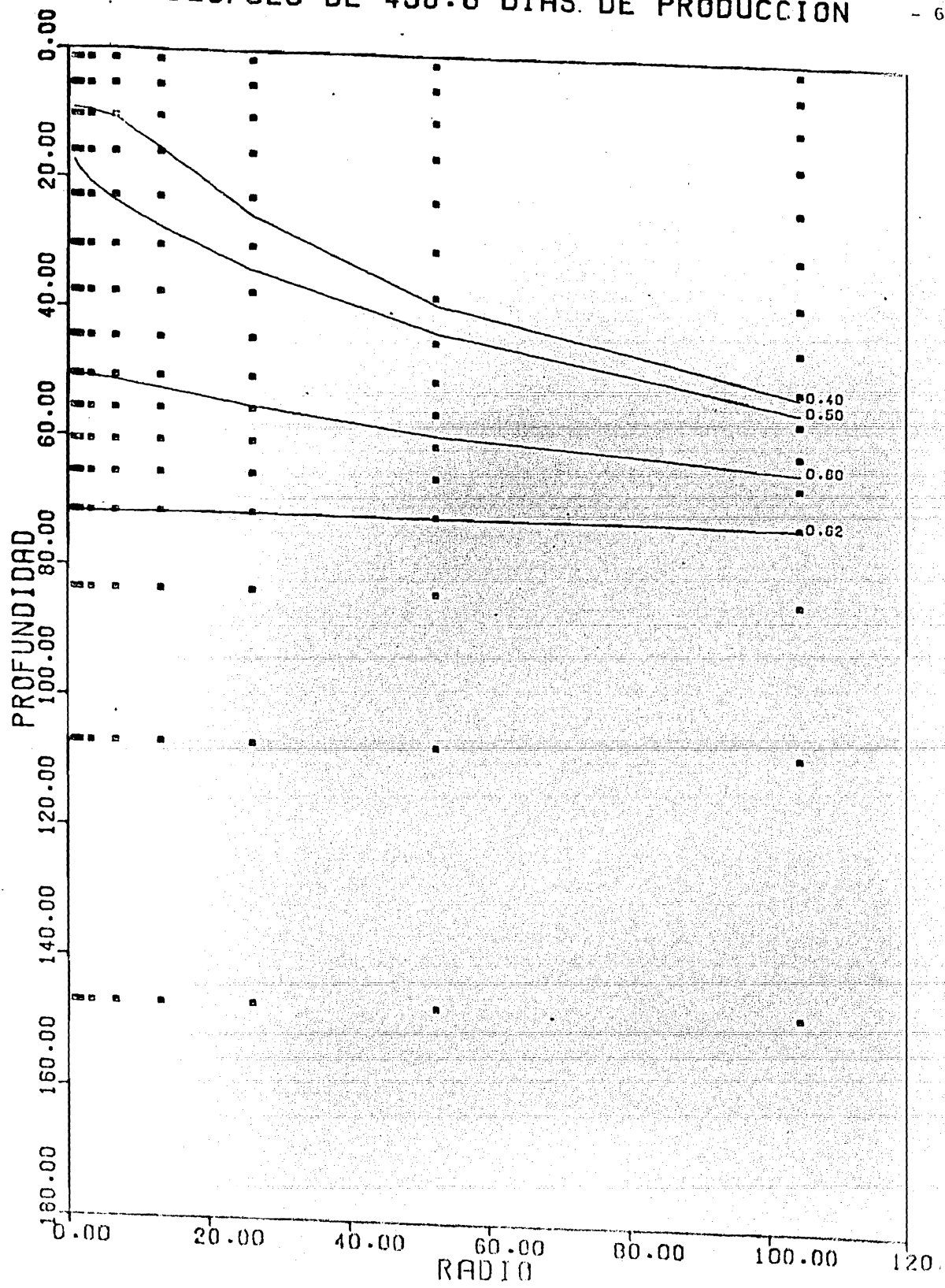
PERFILES DE SATURACION DE AGUA
DESPUES DE 273.9 DIAS DE PRODUCCION



PERFILES DE SATURACION DE AGUA DESPUES DE 365.2 DIAS DE PRODUCCION



PERFILES DE SATURACION DE AGUA
DESPUES DE 456.6 DIAS. DE PRODUCCION



PERFILES DE SATURACION DE AGUA DESPUES DE 547.9 DIAS DE PRODUCCION

