Dij. 164

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

HIDROLOGIA ESTOCASTICA

Tesis Profesional

Que para obtener el título de

INGENIERO CIVIL

Presenta

FRANCISCO JAVIER RAMOS CORDOBA

México, D. F. 1986

CAPITULO I

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El agua es un recurso vital para toda actividad y tipo de vida. Su aprovechamiento debemos realizarlo en forma racionalizada y para ésto existe la Hidrología, ya que una cantidad muy importante del agua que se consume a nivel mundial es de escurrimientos superficiales. Dentro de la Hidrología, se encuentra la Hidrología Estocástica.

Los métodos estocásticos aplicados a la hidrología fueron introducidos para atacar el problema de diseño de embalses. En este trabajo se trata el tema y su aplicación. A continuación se describe en forma general de lo que consta cada capítulo.

El capítulo II trata sobre generalidades. En él se dá la definición de Hidrología Estocástica, se habla de procesos estocásticos y series de tiempo, haciendo notar el porqué del nombre de las series. Este nombre es de acuerdo a las variables que se consideren en la serie. Teniendo la serie, es necesario ajustar un modelo en el que se debe definir si el modelo es estacionario o no con respecto al tiempo. El modelo va a reproducir las características reales de la serie, pero se debe tener cuidado en el manejo del modelo, ya que de no hacerlo así, podemos incurrir en problemas de interpretación, debido a que consideramos otras variables que no corresponden al problema.

En el capítulo III, se describen los conceptos básicos para el desarrollo de la Hidrología Estocástica. Estos conceptos tienen por objetivo ayudar al análisis de las series hidrológicas y también para el desarrollo de los métodos de cálculo como son: El Método de Morán, de Lloyd y para el análisis de Registros Autocorrelacionados.

En el capítulo IV, se describen algunas series hidrológicas, así como sus características. Las series hidrológicas son series de tiempo que pueden ser continuas, series de tiempo, que son fracciones de un día, series de tiempo de intervalos que son fracciones del año y series de tiempo anual.

Los métodos de cálculo son tratados en el capítulo V, aquí se describe el Método de Morán, el Método de Lloyd y para Registros Autocorrelacionados. El Método de Morán y el de Lloyd son muy parecidos en cuanto al procedimiento de cálculo, en el primero, se trabaja con intervalos de tiempo de un año, en el segundo, menores de un año y los dos tienen por característica considerar que las series no están correlacionadas. En los registros correlacionados es necesario definir intervalos que permitan clasificar los ingresos, determinar las fracciones de distribución y construir la matriz de transición, de aquí en adelante, el proceso que sigue es semejante al proceso del Método de Lloyd.

Se muestra un ejemplo, en el cual se aplica el Método de Morán, ya que fué el primer método que existió en la Hidrología Estocástica para atacar el problema del diseño de embalses.

Por último, se encuentran los comentarios de este Trabajo.

C A P I T U L O II

G E N E R A L I D A D E S

II.1 Definición de Hidrología Estocástica.

La ciencia estocástica, está definida como el arte de estimar en la mejor forma, la probabilidad de eventos, de tal manera que, de acuerdo con nuestro criterio y proceder seleccionemos el camino más seguro.

La hidrología estocástica se refiere a series de tiempo que son parcialmente aleatorias, y a su vez, llena la brecha entre los modelos determinísticos y la hidrología probabilística.

La hidrología estocástica tiene sentido en su diseño o en la toma de decisiones de tipo operacional. La base principal de la hidrología estocástica, es la generación de secuencias de eventos equiprobables y en los que cada secuencia tiene propiedades estadísticas similares. Como se puede observar, la parte primordial en este proceso, es la secuencia en el tiempo.

Los métodos estocásticos fueron introducidos a la hidrología para atacar el problema del diseño de embalses. Los métodos estocásticos dan una herramienta para estimar la probabilidad de secuencias de años secos durante cualquier período futuro específico.

La hidrología determinística supone que la variabilidad en el tiempo, está totalmente explicada por otras variables, al ser procesadas por un modelo apropiado.

La combinación de métodos estocásticos y determinísticos parecen ofrecer buenas perspectivas para mejorar las frecuencias estimadas de crecientes.

II.2 Procesos Estocásticos y Series de Tiempo.

Considerando una variable denotada por X. Si el resultado de la variable puede ser predecida con precisión, se dice que es una variable determinística, en el caso contrario se dice que es una variable aleatoria. En un caso posterior, se puede decir que el resultado de X puede ser expresado por una ley de probabilidad. Asumiendo que el resultado puede ser observado de manera secuencial decimos que X_1, X_2, ... X_n, donde el símbolo puede representar intervalos de tiempo, distancia, etc. Una secuencia semejante es llamada una serie y donde el intervalo es el tiempo, es llamada una "Serie de Tiempo". Si X es una variable determinística, la secuencia X_1, X_2, ... X_n es una serie determinística. El determinar las variables X_t asociadas con este mecanismo determinístico es llamado un proceso determinístico. Similarmente, si X es una variable aleatoria donde X_1, X_2, ... X_n es una serie probabilística o en general una serie estocástica.

Actualmente un proceso estocástico requiere del conocimiento de la distribución de probabilidades $f(X_1, X_2, X_3, \ldots X_n)$ de las variables aleatorias X_1, X_2, X_3, ... X_n. Si la conexión de la distribución puede ser hecha dentro del producto marginal de distribuciones como $f(X_1).\ f(X_2)$ .... el proceso se vuelve un proceso estocástico independiente y la serie, una serie independiente; por el contrario, si existe cierta dependencia entre las variables, el proceso estocástico es llamado un proceso estocástico dependiente y corresponde a una serie de tiempo dependiente.

Todas las propiedades de un proceso estocástico se encuentran en una distribución $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$, es conveniente indicar algunas propiedades específicas como el contar con valores como varianza y covarianza.

En general, el contar con estos valores, en un proceso estocástico X_1, X_2,.... X_n, se compone de determinar dichos valores en cada posición, representándolas $E(X_1)$, $E(X_2)$ . ... $E(X_n)$. Similarmente, la determinación de varianzas, $Var(X_1)$, $Var(X_2)$.... $Var(X_n)$. Considerando solo dos posiciones T y T-k, la covarianza está entre las variables X_t y X_{t-k} y es representada por $Cov\ T(K)=Cov(X_t, X_{t-k})$. La covarianza es la propiedad que describe la dependencia lineal de los procesos estocásticos.

Si el valor supuesto no varía con el tiempo, se trata de un proceso estocástico estacionario en la media o estacionario de primer orden sería $E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_t)$. De manera semejante cuando la varianza es constante, el proce so estocástico es estacionario en la varianza. Es estacionario en la covarianza donde la covarianza depende sólo del tiempo K, pero no depende de la posición T.

Un proceso estocástico es estacionario de segundo orden donde es estacionario en la media y la covarianza.

II.3 Modelos de Series de Tiempo.

Un modelo matemático que representa un proceso estocástico, es llamado un modelo estocástico o modelo de serie de tiempo. Tiene cierta forma matemática o estructura y parámetros determinados. Un modelo de serie simple puede estar representado por una sola función de distribución de probabilidad f $(X;\theta)$ con parámetros $\theta=(\theta_1, \theta_2 \ldots.)$ válido para todos los valores t=1, 2, ..., y sin que haya dependencia entre X_1, X_2 .... Por ejemplo, si X es normal con media μ y varianza σ^2, el modelo de serie de tiempo puede ser escrito como:

$$X=\mu+\sigma E_t \quad -- \text{ (A)} \qquad t= 1,\ 2,\ \ldots.,$$

donde E_t es también normal con media cero y varianza uno y E_1, E_2 ...., son independientes. El modelo tiene parámetros μ y σ constantes, por lo tanto el modelo es estacionario. La estructura del modelo es simple puesto que la variable X_t es función sólo de la variable independiente E_t y X_t es también independiente.

Un modelo de serie de Tiempo con estructura dependiente puede ser formado como:

$$E_t=\phi E_{t-1} + \xi_t \quad -- \quad (B)$$

donde ξ_t es una serie independiente con media cero y varianza $(1-\phi^2)$. E_t es la serie dependiente y ϕ es el parámetro del modelo. En la ecuación B E_t es una serie que también depende porque es función de ξ t, es E en un tiempo t=1.

Puesto que los parámetros que se muestran en los modelos son constantes, los modelos son estacionarios representando series de tiempo estacionarios o procesos estocásticos estacionarios. En los modelos no estacionarios los parámetros varían con el tiempo.

II.4 Reproducción de las Características Históricas.

Los modelos reproducen las principales características estadísticas de la historia hidrológica de una serie de tiempo. Tal reproducción se sobreentiende que debe de ser bajo una ley estadística, por lo tanto, no significa que todas las series estén basadas en modelos que tienen que dar algunas características estadísticas que muestra el histo-rial. Lo anterior conduce hacia la pregunta de que las características estadísticas pueden ser reproducidas por el modelo y cómo estas características pueden ser interpretadas o entendidas.

No es tan sencillo contestar la pregunta anterior, porque hay que conocer las verdaderas características estadísticas de una serie hidrológica que casi por lo general son desconocidas, debido a que la observación no es continua o solamente se muestra con un número de años determinado, el resultado de las características son derivadas de unas cuantas muestras y son solamente estimaciones de las características reales. Esas estimaciones de una muestra de N años son inciertas, porque si en lugar de N años de observación contáramos con un número diferente N', se define que N' es mayor que N, cualquier pequeña o gran muestra de N es observada, entonces esas estimaciones basadas en N' o N pueden ser diferentes. Los valores observados en las series históricas de un número de años da una solución de varias alternativas que pueda tener un período de ocurrencia. Consecuentemente, las características estadísticas derivadas de las muestras son solamente una posible estimación de muchas otras. Esto es, las muestras estimadas son variables aleatorias y son poco precisas.

Aparte del problema de la incertidumbre de las características estadísticas que da una muestra de una serie de tiempo, es el problema de la definición e interpretación de las características estadísticas derivadas de la muestra. Las principales partes son: media, desviación estándard, asimetría y autocorrelación. Usualmente la media, desviación estándard, son las de menor incertidumbre. La asimetría es altamente imprecisa y puede ser muy importante o no puede serlo. La autocorrelación es muy incierta, especial mente para pequeñas muestras.

Otras características son importantes, pero dependen de las antes mencionadas. Su interpretación y su uso en modelos de series hidrológicas ha producido controversias entre los hidrologistas.

C A P I T U L O III

C O N C E P T O S B A S I C O S

III.1 Análisis de Series de Tiempo.

En el estudio de las series hidrológicas de tiempo se acostumbra partir de la hipótesis de que el proceso es estacionario, esta hipótesis implica que el proceso complete puede caracterizarse a partir de una muestra de tamaño finito, siempre que ésta sea suficientemente grande. La hipótesis es generalmente cierta siempre que no ocurran cambios drásticos en la conformación de la cuenca ni en su clima.

Para su análisis se considera formada por la superposición de cuatro componentes que son: Tendencia, Componente Cíclica, Persistencia o Componente Autorregresiva y Componente Aleatoria. En el caso de una serie hidrológica, estos cuatro componentes pueden interpretarse a partir de los procesos físicos.

Aún cuando se pudiera conocer con precisión la Tendencia, las variaciones cíclicas y la dependencia del proceso con su historia, quedarían algunas variaciones, imposibles de explicar en términos de relaciones causa-efecto. Estas variaciones, que ya son función del tiempo, pueden atribuirse a fenómenos completamente casuales y solo pueden caracterizarse en términos probabilísticos, mediante su función de distribución.

Debe tenerse en mente que es conveniente tratar de explicar los resultados que se obtengan en términos del conocimiento de los procesos físicos que suceden en la cuenca.

Generalmente el análisis se desarrolla buscando caracterizar primero la Tendencia, para una vez restada, encontrar las características de la componente cíclica, la que a su vez se resta para encontrar la componente autorregresiva y, finalmente, restar esta última para analizar la componente aleatoria.

III.1.1 Tendencia.

Se acostumbra definir la Tendencia como un incremento o decremento estable y regular en los valores de una serie de tiempo.

Para caracterizar la Tendencia en una serie histórica de valores X(t), se utilizan modelos del tipo:

$$X_t=X_o+A_1\ T+A_2\ T^2 + \ldots + A_n\ T^n$$

ó

$$X_t=X_o\ \exp\ (\infty_1\ \ T_1 + \infty_2\ \ T^2 + \ldots + \infty_n\ T^n)$$

en donde es el residuo (lo que no puede ser explicado en forma determinística mediante el modelo).

Sin embargo, estos modelos son demasiado complejos, por la gran cantidad de parámetros, y en especial en relación con los procesos hidrológicos, no corresponden a la explicación del proceso físico. En la práctica se acostumbra ajustar mediante un modelo de mínimos cuadrados obteniendo un modelo simple de la forma:

$$X_{1t}= X_o+\infty\ t+ \xi \quad ---- \quad (C)$$

Para facilitar el análisis de la serie, pueden utilizarse solamente los valores anuales de X, de tal manera que se evita trabajar con la componente cíclica, o bien utilizar técnicas de filtrado mediante las cuales se transforma la serie original X (t) en una serie Y (t) más sencilla de analizar. Una forma de filtrado sencilla y de uso frecuente es la llamada de "promedios móviles", en la que la transformación es de la forma:

$$Yt=(2K+1)^{-1} \sum_{J=-K}^{K} X_{t+j}$$

El valor K se escoge de tal manera que las pequeñas oscilaciones se promedien pero el filtrado no sea excesivo.

Las técnicas de filtrado son útiles también para detectar la presencia de cambios bruscos en el registro histórico. En el caso de que existan, es necesario encontrar su causa y transformar en consecuencia el registro original para formar una muestra homogénea.

III.1.2 Componente Cíclica.

El análisis armónico es el estudio de series periódicas. Fué utilizado primero en problemas de acústica, posteriormente Fourier mostró que una serie discreta puede ser expresada por una serie armónica finita de senoides de la forma:

$$X_t=\sum_{i=1}^{n}\lambda i \ \text{Sen}\,(\frac{2\pi}{T} i+\phi i) \text{ ---- (D)}$$

donde i y ϕi, representan la amplitud y ángulo de fase de cada senoide, y el cociente i/t, la frecuencia asociada a cada armónica.

Si se considera una senoide cualquiera

$$Y_t=A \text{ Sen } (Wt+\phi)$$

Su varianza es únicamente de la amplitud

$$S_y^2= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} Y^2 dt=\frac{A^2}{2} \text{ - - - - (E)}$$

Para una serie histórica dada, es posible ajustar una función de la forma "D", para lo cual se puede utilizar el método de la transformada de Fourier, calcular la variancia asociada a cada componente con la ecuación "E" y relacionarlas mediante una figura llamada peridiograma.

El peridiograma permite detectar los períodos más importantes en el sentido de la variancia asociada del registro histórico. Si en el peridiograma se destacan, por ejemplo, las componentes asociadas ai=me i=n, la componente cíclica tomará la forma:

$$X_{2t}=\lambda m \text{ sen } \frac{2\pi\, mt+\phi m}{T} +\lambda n \text{ sen } \left(\frac{2\pi\, nt+\phi n}{T}\right) \text{- - - - (F)}$$

Para el uso en la práctica, en especial con series hidrológicas, es conveniente tomar en cuenta los siguientes comentarios:

a) Las componentes cíclicas que se obtengan serán consideradas como determinísticas y, por lo tanto, es necesario demostrar que realmente existen. De lo contrario, se corre el riesgo de incluir como componente cíclica a la parte estocástica del proceso (la persistencia y la componente puramente aleatoria).

b) La selección de cuáles son las frecuencias (periodos) que representan realmente el proceso, debe tomarse en cuenta que la precisión en la determinación de la variancia asociada a cada frecuencia en el peridiograma es menor conforme el periodo correspondiente es mayor, debido a que una muestra de tamaño N, contiene más ciclos de tamaño pequeño que ciclos de gran tamaño.

c) El número de componentes con importancia relevante en el fenómeno es en general pequeño y no existe ninguna razón teórica para suponer que la componente cíclica tenga forma senoidal.

d) El análisis ayuda a encontrar las variaciones periódicas de la media pero en realidad puede haber variaciones periódicas también de las variancias del coeficiente de asimetría, etc.

III.1.3 Persistencia o Componente Autorregresiva.

La persistencia se debe fundamentalmente a fenómenos de almacenamiento que hacen que los valores que toma la variable analizada dependan de su propia historia. Se manifiesta en el registro histórico por el hecho de que valores grandes son generalmente seguidos por valores grandes y valores chicos por valores chicos.

Otra forma de hacer notar el fenómeno de persistencia consiste en tomar una serie de datos históricos (ejemplo: los escurrimientos de un río), a los cuales se denominará X (t), y calcular los valores de la variable transformada:

$$Y\ (T) = \sum_{k=1}^{t} (X\ (K) - \bar{X}) \text{ ----(E) donde } t=1,\ 2\ \ldots,\ N$$

Si se considera un cruce del valor cero cada ocasión en que Y(t) 0y Y(t+1) 0, o bien, Y(t) 0 y Y(t+1) 0 la secuencia generada según la ecuación E tendrá un número de cruces n_0.

Si ahora se toman los valores de la variable original X(t) pero siguiendo una secuencia aleatoria en lugar de la secuencia histórica, la nueva secuencia X_1 (t), tendrá asociada una variable transformada:

$$Y1(t)=\sum_{k=1}^{t}(X1(K)-\bar{X}) \text{-----}(F) \qquad \text{donde } t=1,2,\ldots,N$$

En general, el número de cruces n_1 de la secuencia generada, según F será mayor que el correspondiente a la secuencia Y (t), y la diferencia será mayor conforme sea mayor el grado de persistencia de la serie original.

Analíticamente, el grado de persistencia de una función continúa X (t) con media nula se mide a través de la función de autocovariancia:

$$CV(1)=\frac{1}{T}\int_{0}^{t-1} X(t)\ X(T+1)dt$$

Si el proceso X (t) es estacionario, tendrá una variancia finita y por lo tanto es posible definir la función de autocorrelación:

$$\rho\ (1)=CV(L)/\sigma_x^2 \quad \text{-----}\ (G)$$

donde:

$$\sigma_x^2=\frac{1}{T}\int_0^t X(T)\cdot X(T)\ dt$$

El uso de la función G tiene la ventaja de que ρ (1) es adimensional y ésta acotada entre -1 y +1. Cuando $|\rho(1)|$ es cercano a uno, el grado de persistencia es alto, mientras que cuando $|\rho(1)|$ se acerca a cero, la persistencia es baja.

La función de autocorrelación r (1) para series históricas discretas, se calcula con:

$$r\ (1)=\sum_{k=1}^{N-1}(XK-X)\ (X_{k+1}-X)/\sum_{k=1}^{N}(X_k-X)^2 \text{----}\ (H)$$

La ecuación H permite caracterizar estadísticamente la estructura de autocorrelación(persistencia) de un registro histórico, sin embargo un valor (l) relativamente grande para $l \geq 2$ no implica una dependencia líneal entre los valores $\dot{X}(t)$ y $X(t+l)$.

Para facilitar el análisis de las características de auto dependencia de una serie, se utiliza el concepto de autocorrelación parcial.

III.1.4 Función de Autocorrelación Parcial.

Si una serie X (t) se asimila a un modelo de la forma $X(t)=A1X(t-1)+A_2X(t-2)+....+A_{l-1}X(t-l+1)+E(t)$--(I) donde A1, A_2...., A_{l-1} son coeficientes que se obtienen de un ajuste por mínimos cuadrados, la serie remanente, E(t), pudeanalizaese a su vez para estimar la correlación de orden l.

$$r_e(l)=\sum_{k=1}^{N-l}(E(k)-\bar{E})(E(k+l)-\bar{E})/\sum_{K=1}^{N}(E(k)-\bar{E})^2$$

El valor r_e (l) mide la autocorrelación remanente en la serie después de ajustar un modelo de orden (l-1) y por lo tanto, su valor dependerá de l , por lo que se acostumbra utilizar la notación ϕ (l), es la autocorrelación de orden l remanente después de ajustar a la serie original un modelo líneal de orden (l-1).

La función de autocorrelación parcial ϕ(l) permite analizar con mayor facilidad el alcance de la dependencia de la serie original.

III.1.5 Ruido

Las componentes analizadas en los subcapítulos anteriores se caracterizan por su relación con el tiempo, que actúa como variable independiente en las ecuaciones C, F e I. Si estas componentes se removieran de la serie original se obtendría una nueva serie cuyas principales características son su carácter aleatorio y su no dependencia del tiempo . Esta última componente, a la que se denomina ruido, estará entonces totalmente definida si se conoce su función.

de distribución de probabilidad.

Las funciones de distribución de probabilidad de mayor uso en el estudio de series de variables hidrológicas son la Normal, la Log-Normal y la Gama.

III.2 Cadenas de Markov.

Se dice que un proceso estocástico $\{S(T), T \geq 0\}$ es un proceso Markoviano de primer orden, cuando para una secuencia de valores $T_1 < T_2 < T_3 \ldots < T_m$, que corresponden a las etapas 1, 2, ..., m, del proceso, la distribución de probabilidad del estado del proceso en un instante futuro $S(T_{i+1})$ puede definirse si se conoce el estado actual del proceso $S(T_i)$, y no depende de lo que ocurrió en el pasado.

Cuando la variable en cuestión solo toma valores discretas $S(t)=0, 1, 2, \ldots n$ el proceso se denomina Cadena de Markov, y a los valores posibles "estados del proceso".

III.2.1 Matriz de Transición.

Cuando el número N de estados posibles de una Cadena de Markov es finito, es posible definir la probabilidad de pasar de un estado cualquiera en el tiempo $T=t$ a otro estado $T=t+1$. Si estas probabilidades se acoplan en una matriz $[T]$ cuyos elementos $A_{i,j}$ son las probabilidades de pasar del estado i al j, en un paso, la matriz $[T]$ se denomina matriz de Transición.

Las propiedades básicas de una matriz de Transición de una cadena de Markov son:

a) Sus elementos tienen valores comprendidos entre 0 y 1, de tal manera:

$$0 \leq A_{i,j} \leq 1$$

b) La suma de los valores de los elementos de un renglón es igual a 1 de tal manera:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{i,j}=1$$

Si la matriz cumple con las propiedades anteriores se le denomina "Matriz Estocástica".

III.2.2 Vector de Estado.

Se denomina vector de estado, P, asociado a una etapa cualquiera K, a un vector cuyos elementos definen las probabilidades de que el proceso se encuentre en cada uno de los estados de la etapa K.

Una cadena de Markov estará totalmente determinada cuando se conoce su matriz de transición y el vector de estado para la etapa inicial, en el sentido de que, dados estos valores, es posible conocer el vector de estado para cualquier etapa posterior. Así, por ejemplo:

$$\{P\}^1 = \{P\}^0 \; [T]$$

$$\{P\}^2 = \{P\}^1 \; [T] = \{P\}^0 \; [T]^2$$

$$\{P\}^3 = \{P\}^2 \; [T] = \{P\}^0 \; [T]^3$$

El vector de estado para una etapa cualquiera K, puede obtenerse multiplicando la matriz de transición de un paso por el vector de estado de la etapa inmediata anterior, pero también puede obtenerse elevando la matriz de transición a la potencia K y multiplicándola por el vector de estado inicial P^0, es decir:

$$\{P\}^k = \{P\}^k \; [T] = \{P\}^0 \; [T]^k \quad \text{——} \quad (J)$$

III.2.3 Matriz de Equilibrio

Si un proceso determinado por un vector de estado inicial y una matriz de transición, se lleva a cabo durante mucho tiempo, es lógico pensar que, a la larga, las probabilidades asociadas a cada estado tienden a un valor fijo. Cuando la matriz de transición es una matriz estocástica ocurre que, independientemente del estado inicial, el vector de estado para una etapa N suficientemente grande tien de a un valor fijo, es decir:

$$\{P\}^N = \{P\}$$

Tomando en cuenta la ecuación J, se tendrá:

$$\{P\} = \{P\}^o [T]^N = \{P\}^o [T]^{N+1} \quad \text{----} \quad (K)$$

La ecuación K implica que, para N suficientemente grandes, existe una matriz de equilibrio, π , sería:

$$[T]^N = [T]^{N+1} = [\pi] \quad \text{----} \quad (L)$$

Las principales características de la matriz de equilibrio son:

a) Es una matriz estocástica, sus elementos tienen valores comprendidos entre 0 y 1, y la suma de los valores de los elementos de cualquier renglón es igual a la unidad.

b) Los valores de los elementos de cualquier columna 1, son idénticos entre sí e iguales a la probabilidad a largo plazo (N grande) asociada al estado 1.

III.2.4 Determinación de los Estados de Equilibrio.

Para obtener el vector de estado para la situación de equilibrio, se puede realizar con el proceso anterior. Sin embargo, cuando el número de estados que se consideran es grande, el proceso anterior resulta tardado y tedioso (ya que se estima que son unas 10 multiplicaciones de la matriz de transición por sí misma) por lo que resulta preferible el siguiente procedimiento.

De acuerdo con las ecuaciones K y L, se tendrá:

$$\{P\} = \{P\} [T] \quad \text{----} \quad (M)$$

La ecuación "M" representa un sistema con tantas ecuaciones e incógnitas como estados se definan.

De acuerdo a las características de la matriz de transición, las ecuaciones son linealmente dependientes, por lo cual, es necesario substituir una ecuación por la condición de que la suma de probabilidades de estado es igual a la unidad, para poder obtener una solución única.

De acuerdo a lo anterior se llega a un sistema de ecuaciones, el cual se resuelve por el método que más convenga. La solución del sistema, nos da el vector de estado para la situación de equilibrio.

C A P I T U L O IV

CARACTERISTICAS DE LAS SERIES HIDROLOGICAS

IV.1 Tipos de Series Hidrológicas.

Los tipos de series más comunes en hidrología son básicamente unidimensionales en tiempo, las series de línea o uno a uno y multidimensional en el tiempo. Generalmente cuando una serie se refiere al tiempo usualmente es llamada una serie de tiempo.

IV.1.1 Serie de Tiempo.

Hidrológicamente las series de tiempo pueden ser divididas en dos grupos: las series de tiempo simple en un punto específico, y las series de tiempo múltiples en diferentes puntos. Las series de tiempo son llamadas series unidimensionales y las series de tiempo múltiples son llamadas series de tiempo multidimensionales. En algunos casos establecen las relaciones mutuas de series de tiempo de puntos individuales a lo largo de una línea, sobre una área, a través del espacio. Como ejemplo de una serie de tiempo simple es la precipitación anual, mensual medida en una estación, el promedio anual o mensual sobre una área. Como ejemplos de series de tiempo múltiples son la cantidad de agua en relación con las variaciones de la calidad del agua en el tiempo, las series anuales o mensuales de precipitación medida en varios puntos.

Las series de tiempo simples o múltiples son identificadas de acuerdo al intervalo de tiempo usado, porque las características generales, los métodos de modelaje y la estimación de parámetros son relacionados en varias formas al seleccionar el intervalo de tiempo. Básicamente, el intervalo de tiempo determina el tipo de serie de tiempo.

a) Series de tiempo continuas para las cuales las variables son registradas continuamente.

b) Las series de tiempo de intervalos que son una fracción de día, como sería, 2 horas, 6 horas, 12 horas, etc., que muestran a diario el ciclo anual con sus características estadísticas básicas conjuntamente con las variables aleatorias.

c) Las series de tiempo de intervalos que son fracciones del año, como son, día, semana, mes, período o sus múltiplos muestran el ciclo anual en sus características estadísticas conjuntamente con las variaciones aleatorias.

d) Las series de tiempo anual que por la recapitulación sobre el año no muestran ciclos.

La experiencia muestra que la estimación de modelos y parámetros hacen que una serie sea de forma continua o ya sea en intervalos de tiempo cortos o grandes y el análisis simplista es para las series de tiempo en que el intervalo de tiempo es el año.

IV.2 Propiedades Generales de las Series de Tiempo Hidrológicas.

Las series unidimensionales están generalmente descritas por estimación de sus características estadísticas como son la media, desviación estándard, asimetría, distribución de probabilidad y la dependencia del tiempo. Por otro lado las series multivariadas requieren, además, las características de cada serie individual y la estimación de las interrelaciones entre las series.

Ambas series, simple y múltiple, son básicamente estudiadas como series discretas de varios intervalos.

Las series de tiempo hidrológicas son representadas por los siguientes componentes:

a) Cada año tienden a cambios determinísticos.

b) Cambios en los ciclos o periodos del día y el año.

c) Los pocos cambios como los efectos periódicos sobre las series de tiempo hidrológicas.

d) Componentes que representan lo estocástico o variaciones aleatorias.

IV.3 Características de Series de Tiempo Anuales.

La serie de tiempo anual es una serie simple en hidrología en cuanto a sus características estadísticas en general.

Las desviaciones en las series anuales se presentan en los procesos estocásticos independientes o dependientes. Por ejemplo, cuando los cambios son despreciables en el almacenaje total de un río que llega a una presa, ésto se observa al final del ciclo hidrológico, por lo tanto la serie es independiente. Son dependientes cuando el almacenaje al final del año es apreciable con respecto al promedio anual que se ha presentado.

Las grandes variaciones con respecto al caudal que lleva un río año con año puede ser considerado como el principal factor físico que afecta la dependencia.

Las características de dependencia de una serie de tiempo anual, son básicamente investigadas y presentadas para ser usadas en dos relaciones estadísticas clásicas: 1) El Correlograma que es una representación en que domina el tiempo; 2) El Espectro que es una representación en que la frecuencia domina. Para una serie independiente la población del correlograma es igual a cero para $K \neq 0$. Sin embargo, muestras de series independientes, debido a la variabilidad de la muestra, tiene un coeficiente de autocorrelación (k) que varía alrededor de cero pero que no es necesariamente igual a cero. En algunos casos, es usual determinar los límites de probabilidad para el correlograma de una serie independiente. Los límites que propone Anderson son los siguientes:

$$k(95\%)=\frac{-1\pm1.96\sqrt{N-K-1}}{N-K}$$

$$k(99\%)=\frac{-1\pm2.326\sqrt{N-K-1}}{N-K}$$

donde N es el tamaño de la muestra.

El espectro de una serie anual puede ser determinado mediante una transformación del correlograma (r_τ), de acuerdo con Yevjevich:

$$g(f)=2(1+2\sum_{k-1}^{m} Dk \quad rk \quad \cos 2\pi fK)$$

donde g (f) es la densidad espectral de la muestra, f es la frecuencia ordinaria (igual a 1/2m). K es el desplazamiento, m es el máximo número de K's usados (frecuentemente n/6 a N/4) y Dk es una función. De acuerdo con Parzen Dk es igual a:

$$Dk=1-6\left[\frac{K}{m}\right]^2+6\left[\frac{K}{m}\right]^3 \qquad \text{para } K\leq\frac{m}{2}$$

$$Dk=2-\left[\frac{K}{m}\right]^3 \qquad \text{para } \frac{m}{2}\leq K\leq m$$

$$Dk=0 \qquad \text{para } K>m$$

IV.4 Características de Series de Tiempo Intermitentes.

Las series de tiempo hidrológicamente intermitentes son series que tienen valores nulos o constantes en algunos intervalos de tiempo, valores diferentes de cero (usualmente positivos) o valores no constantes en intervalos de tiempo continuos. Algunos ejemplos de series intermitentes son: ríos en los que no hay gasto en ciertos períodos, pequeños intervalos (hora, día, semana) de precipitación, transporte de sedimentos solamente durante grandes avenidas, depósitos en que sus estados de llenado y vaciado pueden ser considerados como intermitentes.

Cuando la intermitencia es adicionada al período y a las componentes estocásticas de una serie de tiempo hidrológica, esta se hace muy compleja y es necesario conocer más características para entenderlas y describirlas. La nueva información es para los intervalos (valores nulos y no nulos) con algunas normas en sus relaciones. Dos propuestas básicas son usadas para describir las características de estas series: 1) Las series intermitentes son concebidas, como un intervalo adicional del proceso, de todas las demás características del proceso de una serie de tiempo periódica; 2) Las series intermitentes son concebidas solamente como series truncadas.

CAPITULO V

METODO DE CALCULO

V.1 Método de Morán.

Los primeros trabajos sobre la teoría probabilística aplicada a vasos de almacenamiento se debe a Morán (1954) que inició la teoría basándose en ingresos independientes a la presa con una distribución de probabilidad fija, sería de la siguiente forma, considerando etapas de un año, teniendo todos los años la misma distribución de probabilidad de ingreso, sin estar relacionadas las etapas entre sí.

A fin de lograr la aplicación de este método es necesario dividir la capacidad útil del vaso en varios estados o niveles.

El almacenamiento en presas cambia continuamente con el tiempo dependiendo de los ingresos al vaso, las extracciones aunadas a la evaporación e infiltración y una reducción en la capacidad útil debido al depósito de sedimentos en el vaso. Los factores anteriores son difíciles de evaluar analíticamente; Morán hace las siguientes simplificaciones.

1) El proceso ocurre en una serie discreta de intervalos de tiempo que se toman de un año.

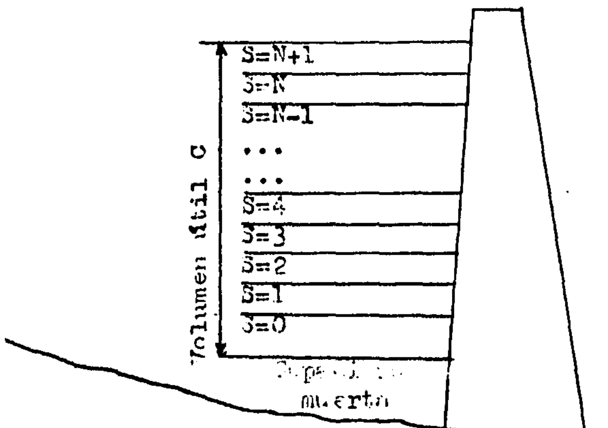
2) Todos los ingresos ocurren durante la llamada temporada de lluvias y todas las extracciones son hechas después de dicha temporada, al final del período anual. Sin embargo, en general, se puede admitir que los ingresos y las extracciones ocurren simultáneamente a lo largo del año aunque el nivel en el vaso sea bajo, la demanda de agua se restringe a la cantidad que haya disponible.

3) Las series discretizadas de ingresos al vaso no están correlacionadas en serie y tienen distribución de probabilidad fija.

4) Las pérdidas son despreciables, aunque pueden considerarse aproximadamente en las cantidades de extracción.

V.2 Desarrollo del método.

Para aplicar la teoría de Morán, se debe considerar una serie discretizada de ingresos X_t a un vaso de capacidad útil C. También es necesario dividir la capacidad útil de la presa, C, en N intervalos de tamaño C/N. Para el estadio inicial y final corresponde la mitad del intervalo. De acuerdo con lo descrito y con el objeto de que quede en forma más clara, se muestra el siguiente esquema.



Estado	L (I)	L(S)	VR
0	-	0	0
1	0	C/N	C/N-1/2 C/N
2	C/N	2C/N	2C/N-1/2 C/N
3	2C/N	3C/N	3C/N-1/2 C/N
.			
.			
.			
.			
N	(N-1) C/N	C	C-1/2 C/N
N+1	C	∞	C

donde:

L (I)= Límite inferior
L (S)= Límite superior
VR = Valor representativo

De lo anterior se puede apreciar que para el estado inicial y final corresponde la mitad del intervalo. También se considera un estado denominado como estado 0 y otro como N+1; corresponden a volúmenes almacenados menores que el mínimo y volúmenes mayores que el máximo, respectivamente. La interpretación física de alcanzar los estados descritos es la siguiente: cuando se alcanza el estado 0 hubo un déficit parcial o total en el suministro de la demanda y cuando se alcanza el estado N+1 hubo un derrame.

V.3 Cálculo de las Probabilidades de Transición.

Para el cálculo de las probabilidades de transición, conviene relacionar el volumen almacenado en la presa al inicio y al final del año (se toma de un año para que se cumplan las suposiciones), conjuntamente con el volumen demandado en el mismo intervalo y el volumen de ingreso caracterizado por una función de distribución X. Analíticamente se expresa de la siguiente forma:

$$X = S^{k-1} + \Theta - S^{k}$$

donde:

S^{k} = Volumen almacenado al inicio.
S^{k+1} = Volumen almacenado al final.
= Volumen demandado.
X = Volumen de ingreso.

La probabilidad de transición de un estado i a otro estado j se obtiene con la ecuación:

$$p(i, j) = \text{prob}\left\{L\ I\ (j) + \Theta - VR(i) \leq x \leq L\ s\ (I) + \Theta - VR\ (i)\right\}$$

Considerando que los ingresos se distribuyen según una función de distribución F (x), se tendrá:

$$p(i, j) = F\left\{Ls(j) + \Theta - VR(i)\right\} - F\left\{LI\ (j) + \Theta - VR\ (i)\right\}$$

Habiéndose obtenido los elementos p(i,j), es posible establecer la matriz de transición T cuyos elementos son los elementos p(i, j). La probabilidad a largo plazo puede ser calculada mediante la ecuación "M", la cual implica el planteamiento de un sistema de ecuaciones, este proceso es descrito en el capítulo III.2.4, otra forma de llegar a este punto sería la multiplicación de la matriz de transición por si misma hasta llegar a la matriz de equilibrio, el proceso se describe en el capítulo III.2.3, los resultados permiten evaluar el buen o mal funcionamiento de la alternativa.

El método de Morán no se apega mucho a la realidad dado que el lapso de tiempo es mucho muy amplio y las condiciones a lo largo de un año varían considerablemente.

En el año de 1964 Lloyd y Odom investigaron los efectos de cambios en la distribución de probabilidad de los ingresos para temporadas a lo largo del ciclo anual. Sugieren la división del año en "n" etapas y la obtención de una matriz de transición diferente para cada una de ellas.

V.4 Método de Lloyd.

Considera que los ingresos en cada temporada son independientes con respecto a las demás temporadas, no estan correlacionadas en serie y la ley de extracción varía en cada etapa.

Se deben analizar los ingresos en cada temporada independiente, observando a qué distribución de probabilidad se ajustan mejor y encontrando una matriz de transición para cada etapa.

La matriz de transición del período anual se obtiene multiplicando las matrices de cada temporada en el orden adecuado, ésto es, si se ha dividido el año en tres etapas, la matriz anual resulta de multiplicar las matrices de Enero-Abril, Mayo-Agosto, Septiembre-Diciembre, en este orden. La distribución de probabilidades estacionaria se obtiene, al resolver el sistema de ecuaciones, la probabilidad total de falla se obtiene de forma similar como en el método de Morán, analizando la distribución de probabilidad de ingresos de cada temporada con la distribución estacionaria anual. La probabilidad total de falla será la mayor obtenida en este análisis.

Este modelo requiere un tratamiento similar al de Morán, pero tratando cada temporada como ciclo anual independiente y se debe tener cuidado al multiplicar en el orden apropiado las matrices de cada temporada.

V.5. Análisis para Registros Autocorrelacionados.

Los métodos de Morán y Lloyd no consideran que los ingresos dependan de una etapa previa. Por lo cual se describe a continuación en forma muy general el análisis para registros autocorrelacionados.

Al considerar la autocorrelación entre los ingresos, el problema aumenta, siendo que los estados asociados a una etapa cualquiera ya no pueden ser definidos solo en términos del volumen almacenado en el vaso, sino que dependen también del valor de los ingresos en la etapa previa. Por lo tanto, hay necesidad de efectuar los siguientes pasos, para cada etapa del año que se considere:

1.- Definir intervalos que permitan clasificar los ingresos de la etapa previa.

2.- Determinar las funciones de distribución de ingresos de la etapa en estudio, condicionada a los ingresos de la etapa previa.

3.- Construcción de la matriz de transición entre estados, tomando en cuenta que el número de estados posibles es igual al producto del número de subdivisiones de la capacidad de la presa por el número de clases definidas en el primer paso.

4.- Definidas las matrices de transición, el proceso es enteramente análogo al descrito para el método de Lloyd.

EJEMPLO

A continuación se desarrollará un ejemplo, en el que se aplicará el Método de Morán.

El Método de Morán es descrito en el capítulo V.1, para el cual necesitamos conocer la capacidad útil del vaso, las extracciones, tomando un intervalo de tiempo de un año.

Los datos que se muestran corresponden a la Presa La Angostura.

Los ingresos al vaso se muestran en la Tabla 1.1, la extracción que se realiza anualmente es de $100 \times 10^8 m^3$.

Tabla 1.1

Tabla 1.1

Volumen de entrada en M.M.3.

AÑO	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
1952	288.00	210.00	183.00	162.00	261.00	970.00	1251.00
1953	360.00	211.00	201.00	163.00	222.00	652.00	1215.00
1954	307.00	203.00	183.00	180.00	425.00	1359.00	1921.00
1955	297.00	239.00	210.00	177.00	200.00	1321.00	2103.00
1956	438.00	290.00	244.00	210.00	359.00	1585.00	1163.00
1957	358.00	268.00	296.00	280.00	272.00	540.00	862.00
1958	317.00	230.00	223.00	184.00	200.00	870.00	1703.00
1959	416.00	291.00	270.00	235.00	248.00	836.00	804.00
1960	342.00	258.00	225.00	207.00	248.00	1240.00	1621.00
1961	440.00	338.00	302.00	263.00	273.00	728.00	947.00
1962	358.00	247.00	210.00	229.00	216.00	664.00	1078.00
1963	335.00	248.00	234.00	200.00	223.00	430.00	1429.00
1964	367.00	271.00	221.00	182.00	217.50	770.80	1867.10
1965	338.00	237.10	215.20	178.30	203.60	757.40	1045.80
1966	390.00	265.80	243.50	247.50	282.60	1081.40	1839.80
1967	401.90	286.50	244.40	233.30	204.90	494.90	593.60
1968	301.80	224.80	197.80	172.30	276.20	876.40	1180.10
1969	330.30	224.30	264.80	188.60	254.30	614.00	1404.10
1970	416.10	295.10	257.00	201.00	213.20	456.40	1645.40
1971	417.80	284.80	245.10	209.90	233.70	408.70	617.30
1972	357.30	260.00	225.30	193.00	267.00	816.10	922.10
1973	264.90	194.80	176.50	155.70	172.40	635.10	778.80
1974	433.00	284.00	268.00	211.30	257.00	445.00	730.00
1975	161.00	109.00	90.00	58.00	130.00	319.00	540.00
1976	334.00	267.00	268.00	253.00	309.00	1050.00	1500.00
1977	168.20	170.10	282.90	93.10	330.50	663.30	529.50
1978	261.30	206.80	205.30	213.00	491.70	719.30	1423.40
1979	304.40	223.70	290.50	291.90	349.30	835.10	1225.30
1980	472.40	276.00	274.10	303.30	323.20	578.90	740.00
1981	313.00	198.00	232.40	241.20	292.40	1410.20	2097.90
1982	249.70	263.00	229.30	214.60	541.10	1484.50	960.80
1983	285.90	294.70	292.00	219.70	201.30	713.30	1136.50
1984	258.70	195.60	243.40	188.60	634.90	1564.40	1966.40

Continuación Table 1.1

AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ANUAL
1818.00	1765.00	2460.00	993.00	580.00	10941.0
869.00	1937.00	2335.00	795.00	410.00	9370.0
1237.00	2317.00	2035.00	807.00	411.00	11285.0
1890.00	2038.00	3096.00	1473.00	472.00	12516.0
868.00	2682.00	2124.00	725.00	480.00	11173.0
1110.00	2068.00	1092.00	460.00	402.00	8008.0
1730.00	2093.00	1934.00	953.00	621.00	11058.0
1407.00	1080.00	1997.00	880.00	487.00	8951.0
2043.00	2870.00	2240.00	1312.00	631.00	10221.0
963.00	1213.00	1143.00	1190.00	526.00	8326.0
1291.00	3037.00	2155.00	791.00	462.00	10738.0
1268.00	2469.00	1926.00	884.00	537.00	10183.0
1204.70	2238.80	1847.20	593.90	439.20	10213.2
1606.70	1957.80	3169.80	1010.80	527.20	11247.7
1405.50	2551.60	2667.00	1013.70	553.60	12542.0
1030.80	1028.60	1795.40	662.30	402.70	7379.3
593.80	2169.10	2193.20	796.00	479.40	9460.9
3257.00	4527.30	2591.20	1086.60	618.20	15300.7
2174.50	3173.30	1913.30	1040.50	602.10	12387.9
1851.30	2178.50	2274.80	797.30	484.90	10004.1
1111.70	1080.00	891.60	505.10	355.50	6984.7
2669.00	2676.40	3060.60	1084.00	658.70	12526.5
463.00	1412.00	1007.00	338.00	247.00	6095.3
958.00	2144.00	2081.00	961.00	442.00	7993.0
633.00	1016.00	1333.00	558.00	490.00	8011.0
1101.00	1505.30	798.40	454.30	410.90	6507.3
1369.30	2570.60	1574.80	581.30	408.80	10025.6
1579.80	3595.40	1670.00	695.20	466.80	11527.4
1256.30	2842.30	1049.30	582.80	403.20	9901.0
2387.30	3198.00	2813.80	909.20	577.10	14671.0
944.10	2074.70	2361.60	681.20	434.30	10438.9
1329.50	2928.50	1078.70	629.90	407.20	9517.2
2559.30	3972.00	1902.00	632.20	477.00	14594.5
					=34[illegible]9.4

$\mu = 10306.042 \times 10^{6} m^{2}$
$\sigma = 2221.033 \times 10^{6} m^{3}$

De acuerdo con el punto V.2 dividimos la capacidad ú til en 5 estados de 1700 hm^3 cada uno, los cuales se mues tran en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2

Estado	L(I)	L(S)	V(R)
0	$-\infty$	0	0.0
1	0	17	8.5
2	17	34	25.5
3	34	51	42.5
4	51	68	59.5
5	68	85	76.5
6	85	∞	85.0

Para el cálculo de las probabilidades de transición, es necesario ajustar una función de distribución, a los valores de la Tabla 1.1. La función de distribución que se le ajusta es una Distribución Normal, la cual se expre sa de la siguiente forma:

$$F(x)= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, b}\int_{0}^{x} \exp -\frac{1}{2}\ (Z-a)^2\ d$$

donde los parámetros a y b toman los valores de la y la de la Tabla 1.1.

Para este ejemplo se ajusta la distribución normal, pero se puede ajustar cualquier otra función (dependien - do del mejor ajuste), por ejemplo una Log-Normal.

El cálculo de las probabilidades de transición se mues tra en la Tabla 1.3. Los valores de la Tabla se obtienen de la siguiente forma, de acuerdo con lo descrito en el punto V.3.

Para obtener los valores de la columna X, se hace uso de la Tabla 1.2 y de la siguiente ecuación:

$$X_1= LS(J)+\theta - VR\ (i)$$

Para la columna X_2 se hace uso de la Tabla 1.2 y de la ecuación:

X_2= L I (J) + a + VR (i)

para mayor claridad se muestra el cálculo de algunos valores:

Estado	X_1	X_2
0-0	X= 0+100-0=100	X= 0+(-∞)-0=-∞
0-1	X=17+100-0=117	X= 0+100-)=100
0-2	X=34+100-0=134	X-17+100-0=117
0-3	X=51+100-0=151	X=34+100-0=134

La columna $F(X_1)$ y $F(X_2)$ se obtiene al substituir respectivamente los valores de X_1 y X_2, en la siguiente ecuación:

$$Z = \frac{Xi - a}{b}$$

donde Z es la variable normalizada correspondiente a X.

Con el valor que se obtiene de la ecuación anterior y haciendo uso de la Curva Normal tipificada obtenemos los valores correspondientes a las columnas $F(X_1)$ y $F(X_2)$, como se muestra en seguida:

X_1	X_2		
100	-∞	Z=(100-103.06)/22.21=-0.134	Z=(- -103.06)/22.21=- ∞
117	100	Z=(117-103.06)/22.21= 0.628	Z=(100-103.06)/22.21=-0.134
134	117	Z=(134-103.06)/22.21= 1.393	Z=(117-103.06)/22.21= 0.628
151	134	Z=(151-103.06)/22.21= 2.158	Z=(151-103.06)/22.21= 1.393

haciendo uso de la Curva Normal Tipificada:

Z_1	Z_2	$F(X_1)$	$F(X_2)$
0.134	- ∞	0.4467	0.0000
0.628	-0.134	0.7357	0.4467
1.393	1.393	0.9177	0.7357
2.158	2.158	0.9842	0.9177

La columna de las probabilidades (Pi, j) se obtiene de la diferencia de las columnas $F(X_1)$ y $F(X_2)$, de la siguiente forma:

$$P(i, j)=F(X_1)-F(X_2)$$

Tal como se muestra:

P(0, 0)=0.4467-0.0000=0.4467
P(0, 1)=0.7357-0.4467=0.2890
P(0, 2)=0.9177-0.7357=0.1820
P(0, 3)=0.9842-0.9177=0.0665

Los cálculos mostrados son para ejemplificar la secuencia, en seguida se muestra la tabla completa:

Tabla 1.3

Tabla 1.3

Estado	X_1	X_2	$F(X_1)$	$F(X_2)$	$P(i,j)$	Zi
0-0	100	$-\infty$	0.4467	0.000	0.4464	-0.134
0-1	117	100	0.7357	0.4467	0.2890	0.628
0-2	134	117	0.9177	0.7357	0.1820	1.393
0-3	151	134	0.9842	0.9177	0.0685	2.158
0-4	168	151	0.9982	0.9842	0.0140	2.924
0-5	185	168	0.9999	0.9982	0.0017	3.689
0-6	∞	185	1.00	0.9999	0.0001	
					=1.0000	
1-0	91.50	$-\infty$	0.3015	0.000	0.3015	-0.521
1-1	108.5	91.5	0.5948	0.3015	0.2933	0.243
1-2	125.5	108.5	0.8438	0.5948	0.2490	1.010
1-3	142.5	125.5	0.9616	0.8438	0.1178	1.776
1-4	159.5	142.5	0.9945	0.9616	0.0329	2.54
1-5	176.5	159.5	0.9950	0.9945	0.0005	3.307
1-6	∞	176.5	1.000	0.9950	0.005	
					=1.0000	
2-0	74.5	$-\infty$	0.0985	0.000	0.0985	-1.286
2-1	91.5	74.5	0.3015	0.0985	0.2030	-0.521
2-2	108.5	91.5	0.5948	0.3015	0.2933	0.243
2-3	125.5	108.5	0.8438	0.5948	0.2490	1.010
2-4	142.5	125.5	0.9616	0.8438	0.1178	1.776
2-5	159.5	142.5	0.9945	0.9616	0.0329	2.541
2-6	∞	159.5	1.000	0.9945	0.0055	
					=1.0000	
3-0	57.5	$-\infty$	0.0202	0.0000	0.0202	-2.051
3-1	74.5	57.5	0.0985	0.0202	0.0783	-1.286
3-2	91.5	74.5	0.3015	0.0985	0.2030	-0.521
3-3	108.5	91.5	0.5948	0.3015	0.2933	0.243
3-4	125.5	108.5	0.8438	0.5948	0.2490	1.010
3-5	142.5	125.5	0.9616	0.8438	0.1178	1.776
3-6	∞	142.5	1.000	0.9616	0.0384	
					=1.000	

4-0	110.5	$-\infty$	0.0024	0.000	0.0024	-2.816
4-1	57.5	40.5	0.0202	0.0024	0.0178	-2.051
4-2	74.5	57.5	0.0985	0.0202	0.0783	-1.286
4-3	91.5	74.5	0.3015	0.0985	0.2030	-0.521
4-4	108.5	91.5	0.5948	0.3015	0.2933	0.243
4-5	125.5	108.5	0.8438	0.5948	0.2490	1.010
4-6	∞	125.5	1.000	0.8438	0.1562	
					=1.0000	
5-0	23.5	$-\infty$	0.0002	0.0000	0.0002	-3.582
5-1	40.5	23.5	0.0024	0.0002	0.0022	-2.816
5-2	57.5	40.5	0.0202	0.0024	0.0178	-2.051
5-3	74.5	57.5	0.0985	0.202	0.0783	-1.286
5-4	91.5	74.5	0.3015	0.0985	0.2030	-0.521
5-5	108.5	91.5	0.5948	0.3015	0.2933	0.243
5-6	∞	108.5	1.000	0.5948	0.4052	
					=1.0000	
6-0	15.0	$-\infty$	0.0000	0.000	0.0000	-3.965
6-1	32.0	15.0	0.0010	0.0000	0.0010	-3.199
6-2	49.0	32.0	0.0060	0.0010	0.0050	-2.434
6-3	66.0	49.0	0.0480	0.0060	0.0420	-1.669
6-4	83.0	66.0	0.1800	0.0480	0.1320	-0.903
6-5	100.0	83.0	0.446	0.1800	0.2660	-0.134
6-6	∞	100.0	1.000	0.4460	0.5540	
					=1.0000	

De acuerdo con el punto III.2.1 se planteó y se verificó la matriz de transición, la cual se muestra en seguida.

$$
T=\begin{bmatrix}
0.4464 & 0.2390 & 0.1820 & 0.0655 & 0.0140 & 0.0017 & 0.0001\\
0.3015 & 0.2933 & 0.2490 & 0.1178 & 0.0329 & 0.0005 & 0.0050\\
0.0985 & 0.2030 & 0.2933 & 0.2490 & 0.1178 & 0.0329 & 0.0055\\
0.0202 & 0.0783 & 0.2030 & 0.2933 & 0.2490 & 0.1178 & 0.0384\\
0.0024 & 0.0178 & 0.0783 & 0.2030 & 0.2933 & 0.2490 & 0.1562\\
0.0002 & 0.0022 & 0.0178 & 0.0783 & 0.2030 & 0.2933 & 0.4052\\
0.0000 & 0.0010 & 0.0050 & 0.0420 & 0.1320 & 0.2660 & 0.5540
\end{bmatrix}
$$

Habiendo obtenido la matriz de transición y de acuerdo con el punto III.2.4 se plantea el sistema de ecuaciones, el cual se muestra:

$$-0.5536P_0^E+0.3015P_1^E+0.0985P_2^E+0.0202P_3^E+0.0024P_4^E+0.0002P_5^E+0.0000P_6^E=0 \quad \text{---(a)}$$

$$0.2390P_0^E-0.7067P_1^E+0.2030P_2^E+0.0783P_3^E+0.0178P_4^E+0.0022P_5^E+0.0010P_6^E=0 \quad \text{---(b)}$$

$$0.1820P_0^E+0.2490P_1^E+0.7067P_2^E+0.2030P_3^E+0.0783P_4^E+0.0178P_5^E+0.0050P_6^E=0 \quad \text{---(c)}$$

$$0.0655P_0^E+0.1178P_1^E+0.2490P_2^E-0.7067P_3^E+0.2030P_4^E+0.0783P_5^E+0.0420P_6^E=0 \quad \text{---(d)}$$

$$0.0140P_0^E+0.0329P_1^E+0.1178P_2^E+0.2490P_3^E-0.7067P_4^E+0.2030P_5^E+0.1320P_6^E=0 \quad \text{---(e)}$$

$$0.0017P_0^E+0.0005P_1^E+0.0329P_2^E+0.1178P_3^E+0.2490P_4^E-0.7067P_5^E+0.2660P_6^E=0 \quad \text{---(f)}$$

$$0.0001P_0^E+0.0050P_1^E+0.0055P_2^E+0.0384P_3^E+0.1562P_4^E+0.4052P_5^E-0.446\,P_6^E=0 \quad \text{---(g)}$$

Como el sistema de ecuaciones es linealmente dependiente, se procede a substituir la ecuación (b) por la ecuación (h)

$$P_0^E+P_1^E+P_2^E+P_3^E+P_4^E+P_5^E+P_6^E = 1 \quad \text{(h)}$$

Resolviendo el sistema, el vector de probabilidades de estado a largo plazo es:

$$\tilde{P}=\left[0.1292,\ 0.1760,\ 0.1571,\ 0.1186,\ 0.1419,\ 0.1148,\ 0.1624\right]$$

Resolviendo el sistema, el vector de probabilidades de estado a largo plazo es:

P= 0.1292, 0.1760, 0.1571, 0.1186, 0.1419, 0.1148, 0.1624

El resultado nos da una estimación muy gruesa del comportamiento futuro del vaso.

Cada estado nos da la probabilidad de tener la cantidad de agua cada año, tal como se muestra en la tabla.

Estado	L(I)	L(S)	Probabilidad de cada estado	Cantidad disponible de agua en m^3 en el vaso.
0	$-\infty$	0	12.92	Déficit (Total o parcial)
1	0	17	17.60	17×10^8
2	17	34	15.71	34×10^8
3	34	51	11.86	51×10^8
4	51	68	14.19	68×10^8
5	68	85	11.48	85×10^8
6	85	∞	16.24	Derrame

La política de operación que se sigue es la adecuada dado que el estado 0, representa físicamente un déficit total o parcial y la probabilidad de que se presente este estado es del 12.92%. El estado 6 representa un derrame, pero se puede satisfacer la demanda, así como en los estados de 1 a 5.

Para mayor claridad la probabilidad de falla es del 12.92% y la probabilidad de poder satisfacer la demanda es de 87.08%.

C O M E N T A R I O S

COMENTARIOS

La hidrología estocástica se refiere a series de tiempo que son parcialmente aleatorios. La secuencia en el tiempo es la parte primordial.

Toda serie de tiempo hidrológico tiene una cantidad limitada de información, esta información tiene una descripción más completa cuando el registro es continuo.

Es posible generar, mediante funciones matemáticas, series de tiempo que difieren de la observada pero que conservan propiedades de la original. La secuencia generada, debe tener por objetivo que los eventos individuales tengan la misma probabilidad de ocurrencia que la serie observada. La construcción de series es mediante técnicas de generación estocástica.

La hidrología estocástica solo tiene sentido en el diseño o en decisiones de tipo operacional. Los métodos estocásticos se introdujeron a la hidrología para atacar problemas de diseño de embalses.

El análisis estocástico parte de la suposición básica de que el proceso es estacionario, en otras palabras, que las propiedades estadísticas no varian con el tiempo.

Analizando el correlograma y el espectro de una serie de tiempo, se pueden identificar las tendencias determinísticas, siendo identificadas y sustraidas de la serie original, se analiza la serie de residuos, a esta serie se le puede ajustar una distribución de probabilidad.

La serie de tiempo es modelada matemáticamente como la combinación de una parte determinística y una componente residual aleatoria.

Las series de tiempo se clasifican de acuerdo al intervalo de tiempo que manejen, como se muestra:

a) Serie de tiempo continua.

b) Series de tiempo de intervalos que son fracción del día.
c) Series de tiempo de intervalos que son fracción del año.
d) Series de tiempo anual.

Las series de tiempo están representadas por las siguientes componentes:

a) Cada año tienden a cambios determinísticos.
b) Cambios en los ciclos o períodos del año.
c) Los pocos cambios como los efectos periódicos sobre las series de tiempo hidrológicas.
d) Componentes que representan lo estocástico o variaciones aleatorias.

Existen varios tipos de series hidrológicas como son: Serie de Tiempo Anual, Serie de Tiempo Periódico, Serie de Tiempo Intermitente, etc.

El método de Morán no es muy confiable dado que el intervalo de tiempo es muy grande (1 año), y las extracciones del embalse se realizan a lo largo del año. Es un método simple en el que no se considera que los datos dependen de una etapa previa.

El método de Lloyd, se apega más a la realidad, dado que el intervalo de tiempo es menor de un año, pero también es un método simple en el que no se considera la dependencia entre las etapas.

Al considerar la autocorrelación se acepta que los ingresos dependan de una etapa previa y que además ya no se definen exclusivamente en términos del volumen almacenado. Este método es mucho más complejo que los anteriores.

De los tres métodos, el menos confiable y más sencillo es el método de Morán y en su lado opuesto se encuentra el análisis de Registros Autocorrelacionados.

La hidrología estocástica ofrece otra alternativa para el diseño de embalses y a su vez llena la brecha que hay entre los modelos determinísticos y la hidrología probabilística.

BIBLIOGRAFIA

- J.D. Salas, J.W. Delleur, V. Yevjevich and W.L. Lane.
  Applied Modeling of Hidrologic Time Series.
  Water Resources Publications.

- Linsley R.K. y Franzini.
  Ingeniería de los Recursos Hidráulicos.
  C.E.C.S.A. México 1977.

- Linsley, Kohler, Paulus.
  Hidrología para Ingenieros.
  Mc Graw Hill.

- Murray R. Spiegel.
  Probabilidad y Estadística.
  Serie Schaum, México 1978.

- Lipschutz S.
  Matemáticas Finitas.
  Serie Schaum, Nueva York 1972.

- Morán P.A.P.A.
  Probability Theory of Dams and Storage Systems.
  Australian Journal of Applied Science. Vol. 5

- Hinojosa Martínez Jorge Alvaro.
  Operación de una Presa.
  Tesis Profesional, U.N.A.M., México 1982.

- Francisco Javier Aparicio Mijares.
  Apuntes de Hidrología.
  México.