

24/15

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA



**APLICACION DE METODOS MATRICIALES A LA OBTENCION DE
MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS AL PRESFUERZO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A
ENRIQUE DE ALZUA SOBERANES



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

* I N D I C E *

1.- INTRODUCCION,	1
2.- DESCRIPCION DEL METODO,	8
- Método de flexibilidad y método de rigidez,	9
- Problema A (viga asimétrica) de 3 claros,	10
- Solución al problema A, por superposición,	22
- Solución al problema A por el método de las cargas equivalentes, ...	26
- Problema B (viga simétrica de 3 claros),	29
- Solución al problema B por el método de superposición,	31
- Solución al problema B por el método de las cargas equivalentes, ...	34
- Solución al problema B por el método de flexibilidad, (ecuación de los 3 momentos),	37
- Solución alternativa por el método de rigidez directo,	54
3.- DESARROLLO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA,	56
- Utilización de software (symphony), en el programa,	57
- Codificación del programa en symphony,	59
- Impresión de la hoja electrónico para el uso del programa,	62
- Breve explicación del manejo de la hoja electrónica de symphony, ...	63
4.- EJEMPLOS DE APLICACION,	65
- Ejemplo No 1; viga simétrica de 2 claros,	65
- Ejemplo No 2; viga asimétrica de 2 claros,	67
- Ejemplo No 3; viga asimétrica de 3 claros,	70
- Ejemplo no 4; viga asimétrica de 4 claros,	72
5.- CONCLUSIONES,	74
6.- BIBLIOGRAFIA,	77

I N T R O D U C C I O N

Uno de los principales problemas en la ingeniería dentro de la rama del diseño estructural, es el análisis de elementos hiperestáticos, es decir, los que tienen un cierto grado de indeterminación estática, que difieren fundamentalmente de los estáticamente determinados en que las fuerzas que actúan en los primeros "... no se pueden obtener solo con las ecuaciones de equilibrio estático; siendo necesario conocer también algunas condiciones geométricas bajo carga..." (1), las que en su obtención implican un grado de dificultad mayor para el diseñador justificadamente, ya que estos elementos presentan una capacidad estructural superior debido a su continuidad.

En las siguientes páginas se ejemplifica lo anterior con el uso de una tabla y una gráfica, comparando los momentos de una viga simplemente apoyada, con los de una parcialmente continua y estos a la vez con los de una totalmente continua.

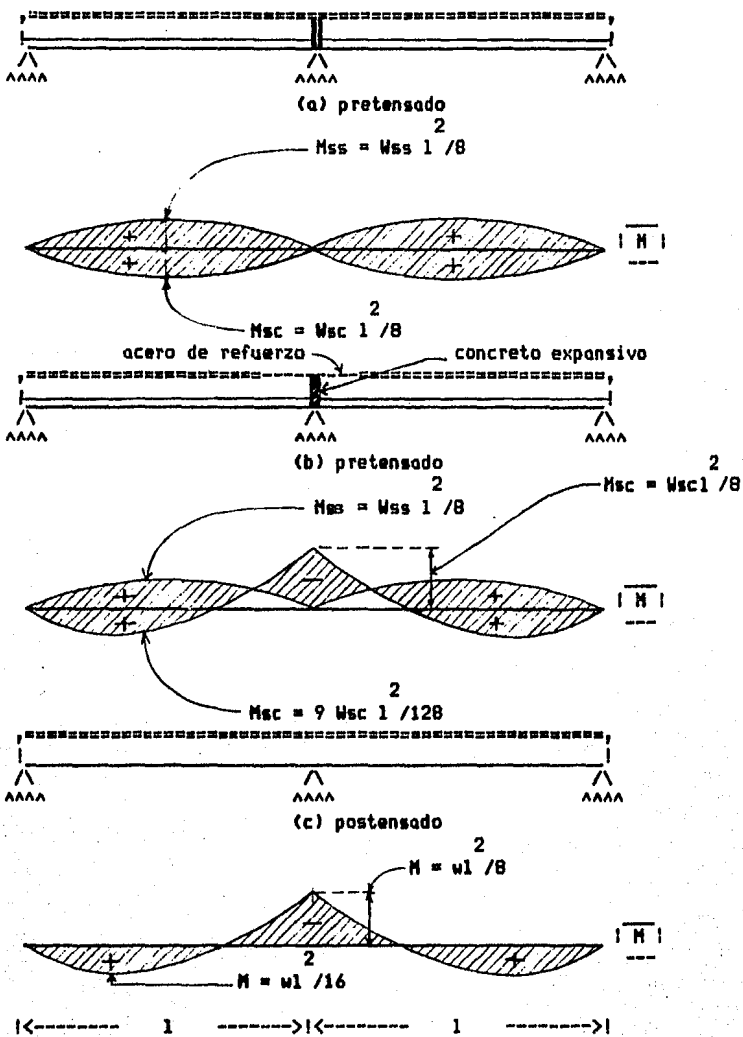
Numericamente se pueden comparar los incrementos en la carga admisible, para cada una de las vigas de la figura (1), este análisis numérico se muestra en la siguiente tabla (A).

TABLA (A).- Análisis numérico comparativo
referido a la fig. (1).

VIGA	FIG(1)	MOMENTO	MOM/WL ²	INCR. EN LA CAP. DE CARGA	INCREMENTO
SIMPLEMENTE APOYADA	(a)	$W_{sc} (L^2 / 8)$	0.12500	1.7778	77.78 %
PARCIALMENTE CONTINUA	(b)	$\frac{9}{128} (W_{sc} L^2)$	0.07031		
CONTINUA	(c)	$W (L^2 / 16)$	0.06250	1.1249	12.49 %

W = carga admisible

L = longitud entre apoyos



NOMENCLATURA: Los subindices ss y sc indican secc. simple y secc. compuesta respectivamente.

FIG. 1: Magnitud de los momentos en vigas pretensadas. (a) Viga simplemente apoyada. (b) Viga parcialmente continua. (c) Viga continua.

El manejo de vigas continuas como la analizada en la figura 1.c, nos lleva a la optimización de la solución en algunos de los problemas más comunes de la ingeniería estructural, dentro de los cuales se puede citar el diseño estructural de un puente, aquí se van a manejar varios factores como son: claros, altura, trazo geométrico vertical y horizontal, etc. Estos factores dependerán de características físicas como topografía y geología, así como de la función de dicha estructura, -- pero la solución en base a estos desde un punto de vista económico, nos llevará concretamente a una elección. Cabe señalar que esta elección en muchos de los casos -- no será hiperestática, sin embargo esta tendencia no -- descarta las ventajas de los elementos indeterminados, -- como son: para claros y cargas dados los momentos de diseño son menores. La rigidez se aumenta y las deflexiones se disminuyen. Mediante la continuidad en el postensado de los tendones a lo largo de varios claros, se requieren menos anclajes y los costos de mano de obra para el tendado se reducen grandemente.

En los párrafos anteriores, se da una idea de la importancia que tiene para el ingeniero desarrollar y conocer ampliamente las técnicas y métodos para el diseño de estructuras hiperestáticas.

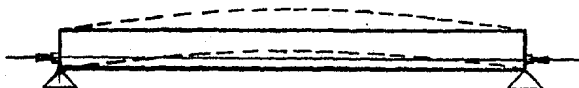
En el caso de elementos hiperestáticos de concreto presforzado, además de manejar una mayor capacidad estructural, hay que someterse a las limitaciones respecto a pérdidas por fricción y la no utilización de varillas ordinarias de acero, lo que dificulta las adaptaciones del armado al tratar de variar el momento resistente según lo requieran las acciones.

Además de las características hasta aquí mencionadas, las vigas estáticamente indeterminadas presforzadas desarrollan de manera característica momentos hiperestáticos debidos al presfuerzo, los cuales son el motivo principal de estudio de esta tesis, en la que solo se contempla la sistematización de uno de los problemas a resolver en el diseño de estructuras hiperestáticas presforzadas.

Para contemplar con mayor claridad la dirección de este trabajo, surge la necesidad de definir primeramente que es el momento hiperestático debido al presfuerzo. A diferencia de los elementos isostáticos, en los elementos hiperestáticos podemos considerar para fines del análisis, un número igual al grado de hiperestaticidad de apoyos redundantes, es decir, apoyos que solamente aumentan el grado de seguridad del elemento, suponiendo

lo ya isostático.

El momento hiperestático debido al presfuerzo en una viga, es el efecto que proviene de las reacciones que se producen en los apoyos redundantes, como consecuencia de la tendencia a deformación del elemento ante el presfuerzo. Al presforzar una viga excéntricamente, se produce una deflexión por encima de la horizontal, como se muestra enseguida:



Si introducimos un apoyo intermedio, que impida dicha tendencia a la deformación, este elemento producirá mediante su restricción efectos diferentes a los que -- provoca el presfuerzo, que finalmente se combinarán con estos para producir los efectos totales sobre la viga -- que nos llevan a la deflexión real debida al presfuerzo, la cual sería como sigue



Podemos deducir de la viga deformada anterior, que el apoyo introducido absorbe la deformación que se producirá en la viga isostática inicial, mediante una reacción de magnitud tal, que debe generar la deformación opuesta que equilibre el sistema de apoyos de la estructura hiperestática analizada.

En las siguientes páginas se manejarán estos conceptos a través de métodos objetivos de análisis, logrando así la determinación de los momentos hiperestáticos finalmente, aunque el objetivo principal, será seleccionar de entre todos estos un método para su programación, el cual permita obtener los momentos hiperestáticos de una manera práctica, para su aplicación en los problemas reales del diseño de estructuras de concreto presforzado.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO .

La elección de un método específico para la obtención de los momentos hiperestáticos debidos al presfuerzo, implica necesariamente el manejo y utilización de conceptos y métodos variados, relacionados con el comportamiento de materiales y con las consideraciones de análisis estructural. Al intentar obtener un procedimiento general ante un problema de este tipo, es importante definir claramente el objetivo dentro de un amplio panorama teórico empezando por limitar nuestros campos de acción, en este caso la tendencia principal es la sistematización por computadora y el análisis de vigas, lo cual nos da un importante punto de partida ya que por otra parte el hecho de obtener únicamente los momentos hiperestáticos debidos al presfuerzo, aporta la limitación complementaria para iniciar la selección objetiva de la secuencia a seguir.

Antes de poder seleccionar, es imprescindible tener una amplia visión de los conceptos y métodos mencionados inicialmente, por lo cual se desarrolla en la siguiente sección, una descripción general del análisis de vigas continuas de concreto presforzado.

En general, el análisis de estructuras puede realizarse mediante dos métodos; el método de flexibili-

dad, también llamado método de fuerzas, y el método de rigidez o método de desplazamiento, los cuales se definen en seguida.

METODO DE FLEXIBILIDAD.

"... Consiste en introducir liberaciones para hacer la estructura estáticamente determinada; se calculan los desplazamientos resultantes y se corrigen las incongruencias en los desplazamientos con la aplicación de fuerzas adicionales en la dirección de los liberamientos. De este modo se obtiene un grupo de ecuaciones de compatibilidad: su solución da las fuerzas desconocidas..." (2).

METODO DE RIGIDEZ.

"... En este se introducen restricciones en los nodos. Se calculan las fuerzas restringentes que se necesitan para evitar los desplazamientos de los nodos. Después se permite que tengan lugar los desplazamientos en la dirección de las fuerzas restringentes hasta que desaparecen estas; de aquí se obtiene un grupo de ecuaciones de equilibrio: su solución proporciona los desplazamientos desconocidos. Luego se determinan las fuerzas internas de la estructura por superposición de los efectos de estos desplazamientos y los de la carga aplicada con los desplazamientos restringidos..." (3).

2) GHALI A. Análisis estructural p.44

3) Loc. cit.

Partiendo de la metodología general de estos dos principales métodos en cuanto a su contenido teórico, se derivan varios métodos específicos, entre los cuales cabe mencionar y estudiar: el método de superposición y el método de las cargas equivalentes, que tienen una aplicación directa en el problema de la determinación de los momentos hiperestáticos debidos al presfuerzo, aunque su tendencia sea un poco didáctica, ya que las consideraciones que implican pueden conducir a errores notables en el cálculo práctico y real de estos elementos, los cuales se tratarán con énfasis más adelante.

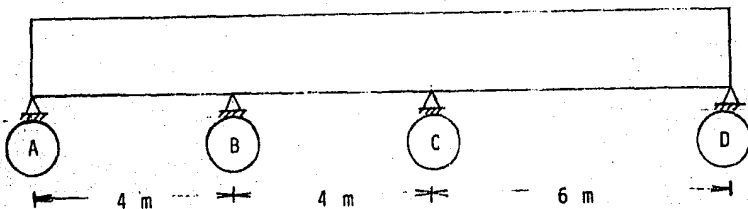
con el objeto de manejar los efectos y consideraciones que implica el diseño y análisis de vigas hiperestáticas de concreto presforzado, a continuación se plantea un problema teórico a resolver partiendo desde las solicitaciones, lo que es equivalente a determinar desde el perfil del tendón de presfuerzo.

Es conveniente aclarar que la solución del siguiente problema va más allá de lo necesario, pero si permite introducir y ubicar en la parte medular de esta tesis.

P R O B L E M A . A

Una viga indeterminada de concreto presforzado, postensada, debe soportar una carga viva de 1.5 T/m y-

una carga muerta de 0.75 T/m sobreadicional a su peso propio, consta de tres claros asimétricos, uno de 6.0m. y dos de 4.0 m. se usara concreto con $f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$. Se estima que al momento de la transferencia, el concreto habrá alcanzado el 70% de la resistencia última, equivalente a 245 Kg/cm^2 . Las pérdidas dependientes del tiempo, se pueden considerar como 15% del presfuerzo inicial, resultando una relación de efectividad del 85%. Determinése las dimensiones requeridas del concreto, la magnitud de la fuerza pretensora, la excentricidad del centroide del acero considerando despreciables las diferencias de tensión a lo largo del claro debidas a la fricción, hallar los momentos primario, secundario y total resultantes del presfuerzo.



Los apoyos impiden el desplazamiento vertical, no habiendo así deflexión sobre estos.

Solución:

Peso propio de la viga = 375 Kg/m.

LIMITES DE ESFUERZOS.

1.- Esfuerzos inmediatamente después de la transferencia del presfuerzo (antes de las pérdidas).

a) compresión en fibras extremas:

$$f_{ci} = -0.60 f'_{ci}$$

$$f_{ci} = -0.60 \times 245 = -147 \text{ Kg/cm}^2.$$

b) tensión en fibras extremas:

$$f_{ti} = \sqrt{f'_{ci}} = \sqrt{245} = 15.65 \text{ Kg/cm}^2.$$

2.- Esfuerzos bajo cargas de servicio (después de las pérdidas de presfuerzo).

a) compresión en fibras extremas:

$$f_{cs} = -0.45 f'_{c}$$

$$f_{cs} = -0.45 \times 350 = -157.5 \text{ Kg/cm}^2.$$

b) tensión en fibras extremas:

$$f_{ts} = 6 \sqrt{f'_{c}}$$

$$f_{ts} = 6 \sqrt{350} = 112.25 \text{ Kg/cm}^2.$$

MÓDULOS DE SECCIÓN.

Módulo de sección, superficie superior:

$$S_f \gg \frac{(1-R) M_o + M_d + M_l}{R f_{ti} - f_{cs}}$$

Módulo de sección superficie inferior:

$$S_2 \gg \frac{(1-R) M_0 + M_d + M_l}{f_{ts} - R f_{ci}}$$

Obtención de M_0 , M_d y M_l por el método de CRSS.

M_0 = momento debido al peso propio.

M_d = momento debido a la carga muerta.

M_l = momento debido a la carga viva.

Momento debido al peso propio (M_0).

Factores de distribución :

$$r_{AB} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{4} = 0.75 EI$$

$$r_{BC} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$r_{CD} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{6} = \frac{EI}{2}$$

$$FD_{BA} = \frac{0.75EI}{(0.75 + 1.00) EI} = \frac{3/4}{7/4} = \frac{3}{7}$$

$$FD_{BC} = \frac{EI}{(0.75 + 1.00) EI} = \frac{1}{7/4} = \frac{4}{7}$$

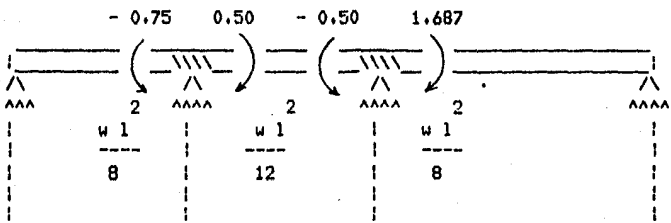
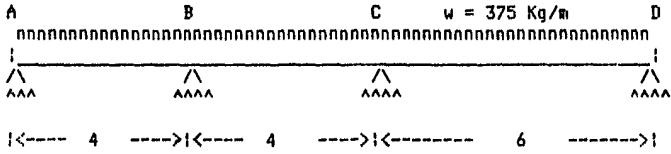
$$FD_{CD} = \frac{0.5EI}{(1.00 + 0.50) EI} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

Momentos de empotramiento:

$$M_{EBA} = w l^2 / 8 = 0.375(4)^2 / 8 = 0.75 \text{ T-m}$$

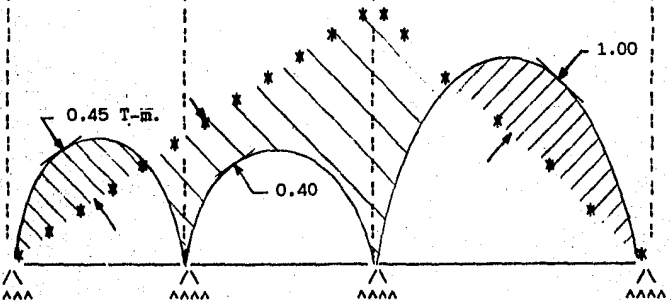
$$M_{EBC} = w l^2 / 12 = 0.75(4)^2 / 12 = 0.50 \text{ T-m}$$

$$M_{ECD} = w l^2 / 8 = 0.375(6)^2 / 8 = 1.687 \text{ T-m}$$

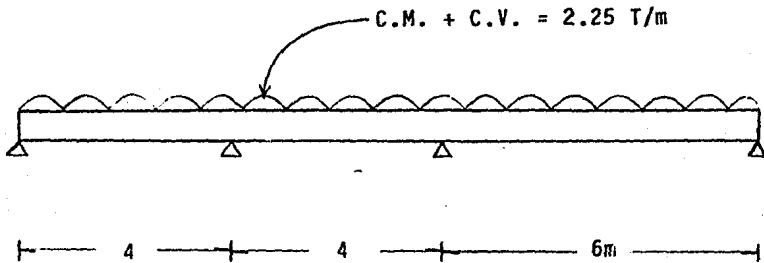


0.428	0.572	0.666	0.334
-0.75	+0.50	-0.50	+1.687
0.25		-1.187	

0.107	0.143	-0.790	-0.396
-0.643	0.643	-1.29	1.29



Momento debido a la carga muerta más la carga viva ($M_d + M_l$).



Momentos de empotramiento:

$$MEBA = \frac{w l^2}{8} = \frac{2.25 (4)^2}{8} = 4.50$$

$$MEBC = \frac{w l^2}{12} = \frac{2.25 (4)^2}{8} = 3.00$$

$$MECD = \frac{w l^2}{8} = \frac{2.25 (6)^2}{8} = 10.25$$

Momentos desequilibrantes:

apoyo B :	-4.50
	+ <u>3.00</u>

-1.50

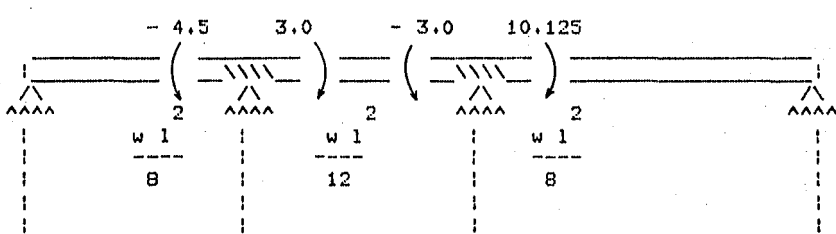
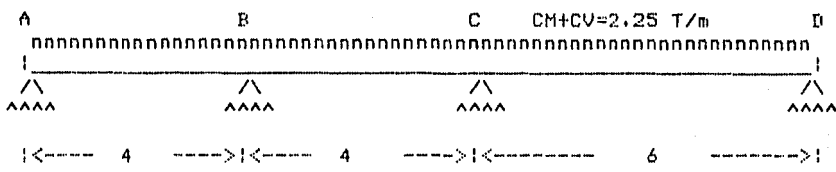
Apoyo C :	-3.00
-----------	-------

10.125

7.125

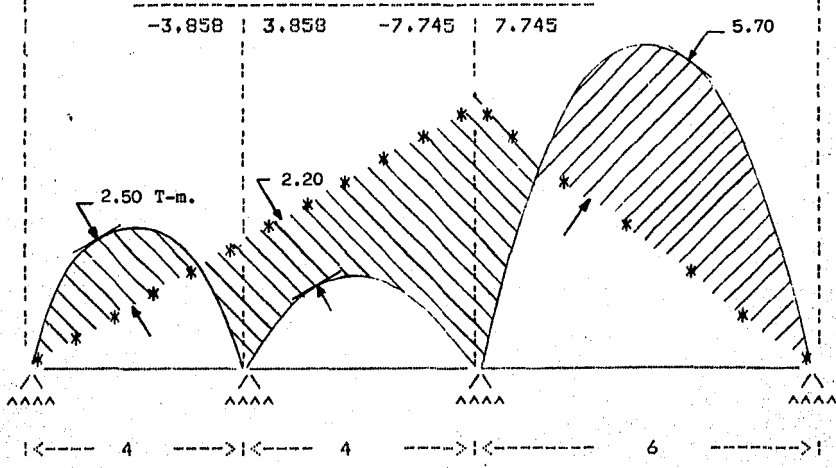
Momentos equilibrantes:

1.50 y -7.125



FD	0.428	0.572	0.666	0.334
ME	-4.5	+3.00	-3.00	+10.125
M.EQ	1.500		-7.125	

0.642	0.858	-4.745	-2.379
-3.858	3.858	-7.745	7.745



MÓDULOS DE SECCIÓN.

En el apoyo B :

SB₁ = módulo de sección superficie superior.

SB₂ = módulo de sección superficie inferior.

$$SB_1 \gg \frac{(1-R) M_o + M_d + M_l}{R f_{ti} - f_{cs}}$$

$$SB_1 \gg \frac{(0.15 \times 0.643) \times 10^5 + 3.858 \times 10^5}{0.85 (46.95) - (-157.5)}$$

$$SB_1 \gg \frac{395,445}{197.407} = 2,003.2 \text{ cm}^3$$

$$SB_2 \gg \frac{(1-R) M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - R f_{ci}}$$

$$SB_2 \gg \frac{(0.15 \times 0.643) \times 10^5 + 3.858 \times 10^5}{112.25 + (0.85 \times 147)}$$

$$SB_2 \gg \frac{395,445}{237.20} = 1,668 \text{ cm}^3$$

En el apoyo C : los momentos en este apoyo serviran para obtener la sección requerida.

$$Sc_1 \gg \frac{(0.15 \times 1.29) \times 10^5 + 7.745 \times 10^5}{0.85 (46.95) - (-157.5)}$$

$$Sc_1 \gg \frac{7.9385 \times 10^5}{197.407} = 4,021.4 \text{ cm}^3$$

$$Sc_2 \gg \frac{(0.15 \times 1.29) \times 10^5 + 7.745 \times 10^5}{112.25 + (0.85 \times 147)}$$

$$S_{C_2} \gg \frac{7.9385 \times 10^5}{237.20} = 3,346.7 \text{ cm}^3$$

Entre A y B :

$$S_1 \gg \frac{(0.15 \times 0.45) \times 10^5 + 2.5 \times 10^5}{197.407}$$

$$S_1 \gg \frac{2.5675 \times 10^5}{197.407} = 1,300.6 \text{ cm}^3$$

$$S_2 \gg \frac{2.5675 \times 10^5}{237.20}$$

$$S_2 \gg 1,082.4 \text{ cm}^3$$

Entre B y C :

$$S_1 \gg \frac{(0.15 \times 0.40) \times 10^5 + 2.2 \times 10^5}{197.407} = \frac{2.26 \times 10^5}{197.407}$$

$$S_1 \gg 1,144.8 \text{ cm}^3$$

$$S_2 \gg \frac{2.26 \times 10^5}{237.20}$$

$$S_2 \gg 952.78 \text{ cm}^3$$

Entre C y D :

$$S_1 \gg \frac{(0.15 \times 1.00) \times 10^5 + 5.70 \times 10^5}{197.407} = \frac{5.85 \times 10^5}{197.407}$$

$$S_1 \gg 2,963.4 \text{ cm}^3$$

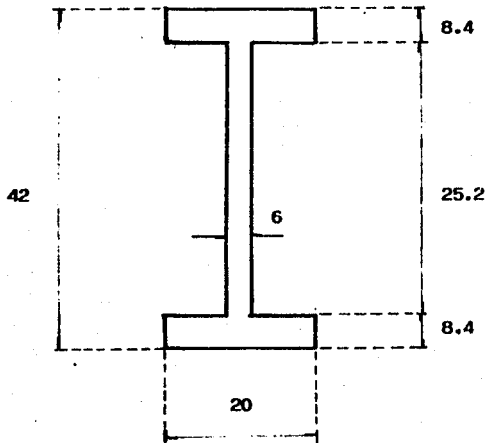
$$S_2 \gg \frac{5.85 \times 10^5}{237.20}$$

$$S_2 \gg 2,466.3 \text{ cm}^3$$

ELECCION DE LA SECCION.

Se propone : I simétrica

$$\begin{aligned} b &= 20 \text{ cm} & ; & & h &= 42 \text{ cm} \\ b_x &= 6 \text{ cm} & ; & & h_f &= 8.4 \text{ cm.} \\ b_w/b &= 0.3 & ; & & h_f/h &= 0.2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_c &= 0.58 \times 20 \times 42 = 487.2 \text{ cm}^2 \\ I &= 0.0707 (20)(42)^3 = 104,760.4 \text{ cm}^4 \\ S &= \frac{104,760.4}{21} = 4,988.6 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Aunque $4,988.6 > 4,021.4$, proporciona buena
olcura para cumplir con los recubrimientos.

Esfuerzos en el centroide del concreto :

$$f_{cci} = f_{ti} - \frac{C_1}{h} (f_{ti} - f_{ci})$$

$$f_{cci} = 15.65 - \frac{21}{42} (15.65 + 147) = -65.67 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Fuerza pretensora inicial} = P_i = f_{cci} \times A_c$$

$$P_i = 65.67 \times 487.2$$

$$P_i = 31,995 \text{ Kg.}$$

Excentricidades

Sección de máximo momento : (apoyo C)

$$e = (f_{ti} - f_{cci}) \frac{S_1}{P_i} + \frac{M_o}{P_i}$$

$$e = (15.65 + 65.67) \left(\frac{4.998.6}{31,995} \right) + \frac{1.29 \times 10^5}{31,995}$$

$$e = 12.70 + 4.03 = 16.73 \text{ cm}$$

En el apoyo B :

$$e = 81.32 \left(\frac{2,004}{31,995} \right) + \frac{0.643 \times 10^5}{31,995}$$

$$e = 5.09 + 2.01 = 7.10 \text{ cm}$$

Entre A y B :

$$e = 81.32 \left(\frac{1,300.6}{31,995} \right) + \frac{0.45 \times 10^5}{31,995}$$

$$e = 3.30 + 1.41 = 4.71 \text{ cm.}$$

Entre B y C :

$$e = 81.32 \left(\frac{1,144.84}{31,995} \right) + \frac{0.40 \times 10^5}{31,995}$$

$$e = 2.91 + 1.25 = 4.16 \text{ cm}$$

Entre C y D

$$e = 81.32 \left(\frac{2,963.42}{31,995} \right) + \frac{1.00 \times 10^5}{31.995}$$

$$e = 7.53 + 3.12 = 10.65 \text{ cm.}$$

Una vez obtenidas las excentricidades, es posible colocar el tendón de presfuerzo a lo largo de toda la viga, como se muestra en la siguiente figura :

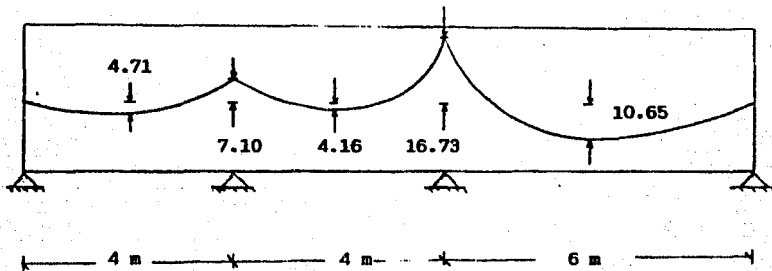
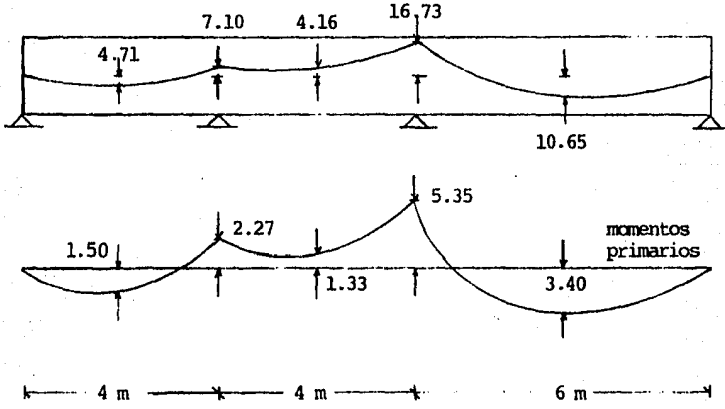


Figura 2 . Geometría del tendón de presfuerzo.

Obtención de los momentos secundarios por el método de Superposición.

Momentos primarios = excentricidades por fuerza pretensora.



Deflexión en B :

$$d_{B0} = \frac{1}{EI} \left(1.50 + \frac{2.272}{2} \right) \times \left(4 \times \frac{2}{3} \times 2 \right) - \left(2.272 \times 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \right) = \frac{1.941}{EI} \text{ m.}$$

(como es positiva se levanta del apoyo)

Cálculo del momento máximo en B suponiendo redundante la reacción en C.

$$\sum M_A = 0 :$$

$$4 R_B - 14 R_D = 0 ; R_D = + \frac{4 R_B}{14} = + 0.285 R_B$$

$$R_D - R_B + R_A = 0 \quad ; \quad R_A = -R_D - R_B$$

$$R_A = -0.285 R_B - R_B = -1.285 R_B$$

$$\begin{aligned} \text{Momento máximo en B} &= 4 R_A = 4 (-1.285) \\ &= -5.142 R_B \end{aligned}$$

Deflexión debida a R_B :

$$d_{bb} = \frac{-1}{EI} \left(-5.142 R_B \times 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \right) = \frac{-27.428}{EI} R_B$$

Por compatibilidad :

$$\frac{1.941}{EI} = \frac{27.428}{EI} R_B$$

$$R_B = \frac{1.941}{27.428} = 0.0707$$

Finalmente el momento máximo en B = 5.6 R_B

$$M_{\text{máx}} = 5.6 \times 0.0707$$

$$M_{\text{máx}} = 0.396 \text{ T-m}$$

Cálculo del momento máximo en C suponiendo redundante la reacción en B :

$$M_A = 0 \quad ;$$

$$+ 8 R_C - 14 R_D = 0 \quad R_D = \frac{-8R_C}{-14} = 0.571 R_C$$

$$R_A + R_D = R_C$$

$$R_A = R_C - R_D = R_C - 0.571 R_C$$

$$R_A = 0.429 R_C$$

$$\begin{aligned} \text{Momento máximo en C} &= 8 R_A = 8 (0.429 R_C) \\ &= 3.432 R_C \end{aligned}$$

Deflexión debida a R_C :

$$d_{cc} = -\frac{1}{EI} \left(3.432 R_C \times 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \right) = -\frac{73.21}{EI} R_C$$

Deflexión en C :

$$d_{co} = d_{bo} + \frac{1}{EI} \left(2.482 \times 4 \times \frac{2}{3} \times 6 \right) -$$

$$\left(\frac{5.35 + 2.272}{2} \times 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \right)$$

$$d_{co} = \frac{1.941}{EI} + \left(\frac{39.712 - 81.28}{EI} \right) = -\frac{39.63}{EI} \text{ m.}$$

Por compatibilidad :

$$-\frac{39.63}{EI} = \frac{73.21}{EI} R_C$$

$$R_C = \frac{-39.63}{73.21} = -0.54$$

Finalmente el momento máximo en C :

$$M_{\text{máx}} = 3.432 R_C$$

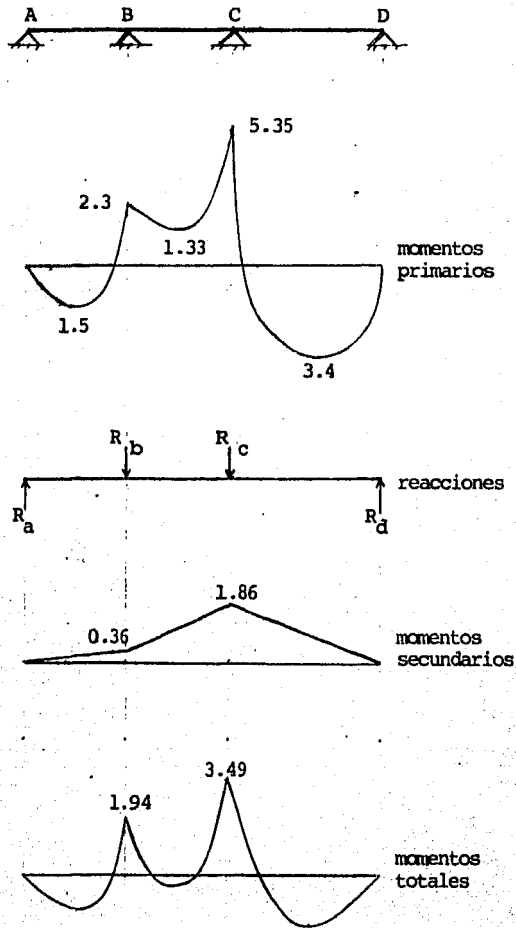
$$M_{\text{máx}} = 3.432 (-0.54)$$

$$M_{\text{máx}} = -1.86 \text{ T-m}$$

La suma de los momentos obtenidos y los momentos primarios es igual a los momentos totales, esto se ilustra en la siguiente gráfica.

METODO DE SUPERPOSICION.

Representacion Gráfica.



Obtención de los momentos secundarios por el método de las cargas equivalentes (mismo ejemplo).

carga correspondiente al claro extremo de 4m = W_{p1}

carga correspondiente al claro central de 4m = W_{p2}

carga correspondiente al claro extremo de 6m = W_{p3}

$$W_{p1} = \frac{8PY_1}{l_1^2} = \frac{8(32)(4.71 + \frac{7.10}{2})}{(4)^2} = 1.3216 \text{ T/m.}$$

$$W_{p2} = \frac{8PY_2}{l_2^2} = \frac{8(32)(7.10 - 4.16) + \frac{16.13 - 7.10}{2}}{(4)^2}$$

$$W_{p2} = 1.1928 \text{ T/m}$$

$$W_{p3} = \frac{8PY_3}{l_3^2} = \frac{8(32)(\frac{16.73}{2} + 10.65)}{(6)^2} = 1.3521 \text{ T/m.}$$

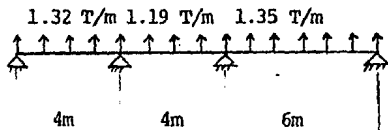
Cálculo de los momentos de empotramiento:

$$M_{E1} = \frac{1.3216(4)^2}{12} = 1.762 \text{ T-m}$$

$$M_{E2} = \frac{1.1928(4)^2}{8} = 2.385 \text{ T-m}$$

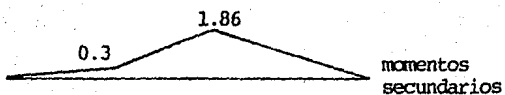
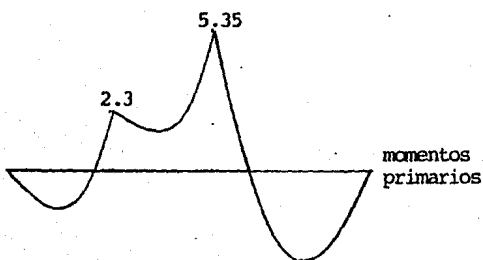
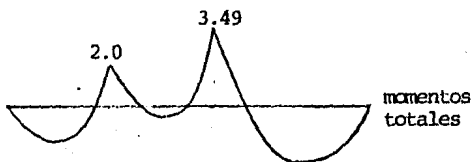
$$M_{E3} = \frac{1.3521(6)^2}{12} = 4.056 \text{ T-m}$$

Análisis por el método de CROSS :

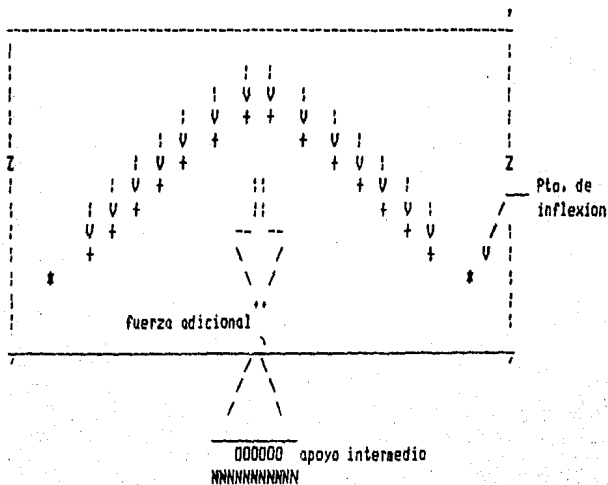


.428	.57	.66	.33	f. de distrib.
1.76	2.38	2.38	4.05	m. de empotr.
- 0.62	- 1.67			m. equilibrante
- .26	- .36	1.11	- .56	
-2.02	2.02	-3.49	3.49	m. final

Ya conocidos los momentos finales, sólo hay que restarles los momentos primarios.



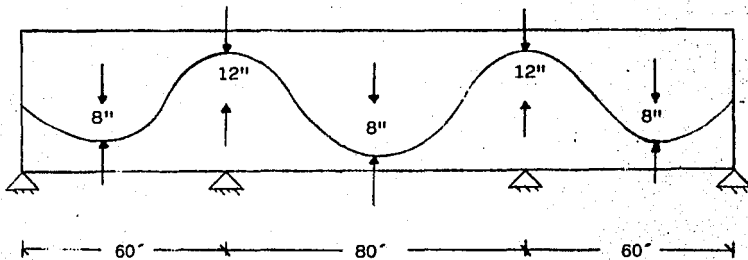
La aplicación de los métodos de superposición y de las cargas equivalentes en el problema anterior, revela las consideraciones básicas para analizar los efectos del cable de presfuerzo en la viga, este criterio proporciona lo mínimo, ya que en el proceso no se consideran las curvaturas que necesariamente tiene el cable de presfuerzo debido a su continuidad, - esta simplificación obliga a manejar adicionalmente la fuerza que se genera sobre cada apoyo a causa de la curva cóncava hacia abajo con un punto máximo que coincide con el eje del apoyo, este efecto se ejemplifica en la siguiente figura :



Con la finalidad de lograr un estudio más real y preciso es preferible utilizar un problema que presente magnitudes igualmente reales y considerar todos los efectos necesarios, para lo cual se utiliza en la siguiente parte un mismo problema, resuelto por los tres métodos diferentes. El objetivo de los siguientes ejemplos, es permitir una clara comparación entre los resultados obtenidos por los dos métodos planteados anteriormente y el método de flexibilidad, elegido para ser aplicado matricialmente mediante un programa de computadora.

PROBLEMA.

Calcular los momentos producidos sobre los apoyos debido al preesforzamiento, para la viga continua de tres tramos, preesforzada, de concreto, de sección constante. La fuerza de preesforzamiento es de 660 k y el perfil del cable es parabólico.



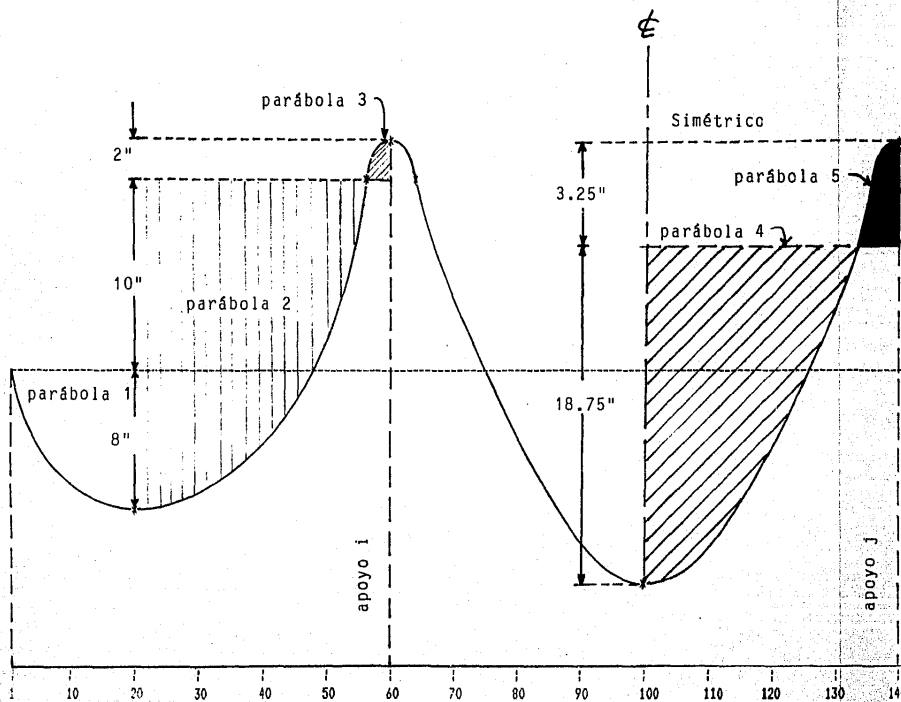
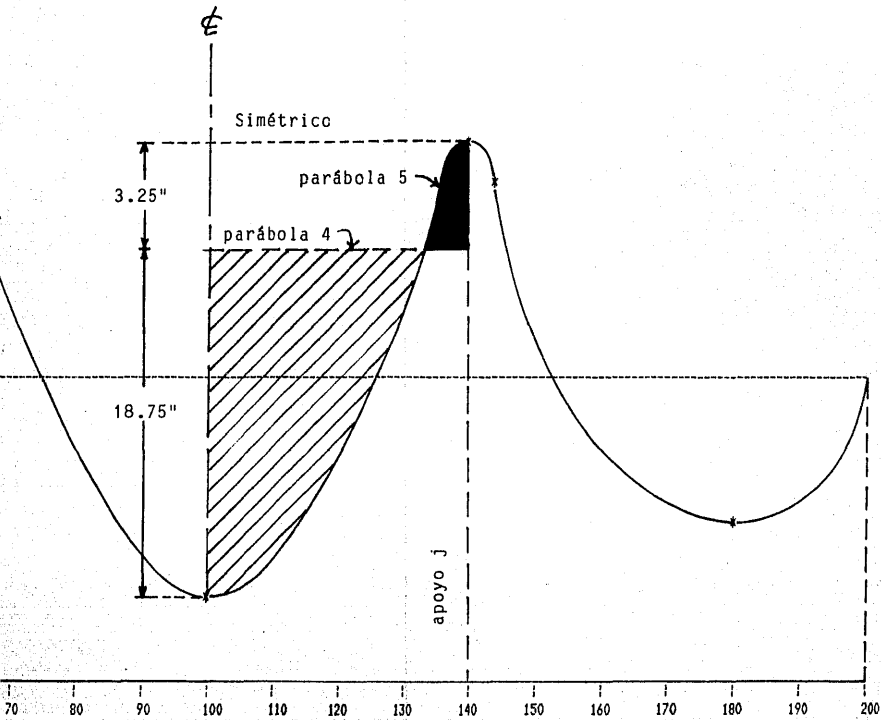


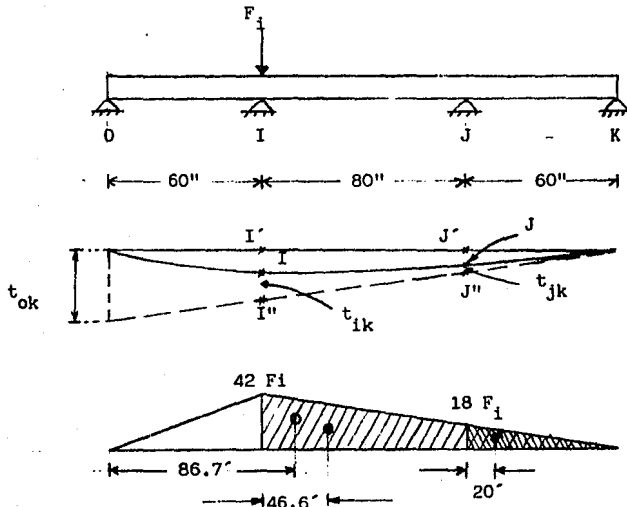
FIGURA 4. Perfil detallado del cable de presfuerzo a base de 5 parábolas.



(acotaciones en pies)

able de presfuerzo a base de 5 parábolas.

SOLUCION POR EL METODO DE SUPERPOSICION.



Determinación de la flecha en el eje I debida a

$$F_1 : \\ V_i = I'I'' - I''I \quad ; \quad (I''I = t_{ik})$$

$$\frac{T_{ok}}{200} = \frac{I'I''}{140} \quad I'I'' = \frac{140}{200} t_{ok} = 0.7 t_{ok}$$

$$V_i = 0.7 t_{ok} - t_{ik}$$

$$t_{ok} = \frac{1}{EI} \left[\frac{(200)(42 F_1)}{2} \right] (86.7) = 364,140$$

$$t_{ik} = \frac{1}{EI} \left[\frac{(140)(42 F_1)}{2} \right] (46.6) = 137,004$$

$$V_i = \frac{0.7 (364,140) - 137,004}{EI} = \frac{117,894}{EI}$$

Determinación de la flecha en el eje J

debida a F_i :

$$V_j = \overline{J^*J''} - \overline{JJ''} \quad (JJ'' = T_{jk})$$

$$\frac{T_{ok}}{200} = \frac{J^*J''}{60} ; J^*J'' = \frac{60}{200} T_{ok} = 0.3 (364,140)$$

$$J^*J'' = 109,242 / EI$$

$$\frac{42F_i}{140} = \frac{x}{60} ; x = 18 F_i$$

$$V_j = \frac{109,242}{EI} - T_{jk}$$

$$T_{jk} = \frac{1}{EI} \left[\frac{(60)(18 F_i)}{2} \right] (20) = \frac{10,800}{EI}$$

$$V_j = (109,242 - 10,800) / EI$$

$$V_j = 98,442 / EI$$

Debido a la simetría de la viga respecto al -
punto medio la flecha total en el eje I es :

$$V_{TI} = V_{Tj} = V_i + V_j = \frac{117,894 + 98,442}{EI}$$

$$V_{TI} = \frac{216,336}{EI}$$

Obtención de los momentos estáticos

(en relación a la figura No.4)

$$\overline{T}_{io} = \overline{T}_{jk} = \frac{H}{EI} (A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4) / L_i$$

$$A_1 X_1 = - \frac{2}{3} (20) (\frac{8}{12}) (12,5) = - 111.11$$

$$A_2 X_2 = - \frac{2}{3} (36) (\frac{18}{12}) (33,5) = - 1,206$$

$$A_3 X_3 = (40) (\frac{10}{12}) (40) = 1,333.33$$

$$A_4 X_4 = + \frac{2}{3} (4) (\frac{2}{12}) (58,5) = 25.99$$

Sustituyendo en la expresión inicial :

$$\overline{T}_{io} = \overline{T}_{jk} = \frac{660}{60EI} (-111.11 - 1206 + 1333.33 + 25.99)$$

$$\overline{T}_{io} = \overline{T}_{jk} = 464,44 / EI$$

$$\overline{T}_{ij} = \overline{T}_{ji} = \frac{H}{EI} \left[\frac{1}{2} (A_5 + A_6 + A_7 + A_8) \right]$$

$$A_5 = \frac{2}{3} (8.75) (\frac{5.25}{12}) = 2.552$$

$$A_6 = (80) (\frac{6.75}{12}) = 45$$

$$A_7 = - \frac{2}{3} (62.5) (\frac{18.75}{12}) = -65.104$$

$$A_8 = \frac{2}{3} (8.75) \left(\frac{5.25}{12} \right) = 2.552$$

Sustituyendo en γ_{ij} :

$$\gamma_{ij} = \frac{660}{6CEI} (2.552 + 45 - 65.104 + 2.552)$$

$$\gamma_{ij} = -4950 / EI,$$

$$\gamma_i = \gamma_{io} + \gamma_{ij} = -4485.56 / EI, \text{ por simetría } = \gamma_j$$

Obtención de F_i :

$$\frac{216,336 F_i}{EI} = \frac{4485.56 \times 60'}{EI} ; F_i = 1.244$$

Momento secundario en i :

$$M_{seci} = 1.244 \times 60 = 74.64 \text{ k-pie}$$

METODO DE LAS CARGAS EQUIVALENTES

$$w_{p1} = \frac{8py_1}{l_1^3} = \frac{8 (660) (8/12 + 1/3)}{(60^3)} = 1.466 \text{ K/ pie}$$

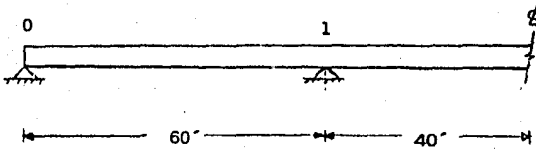
$$w_{p2} = \frac{8py_2}{l_2^3} = \frac{8 (660) (2)}{80^3} = 1.650 \text{ K/ pie}$$

Momentos de empotramiento

$$M_{e1} = M_{e3} = \frac{1.466 (60)^2}{12} = 440 \text{ K - pie}$$

$$M_{e2} = \frac{1.65 (80)^2}{12} = 880 \text{ K-pie}$$

Metodo simplificado de CROSS :



Factores de distribución :

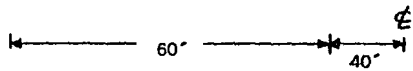
$$\text{Nudo 0 : } r_{01} = 1.00$$

$$\text{Nudo 1 : } r_{1-0} = 3 EI / 60 = EI / 20$$

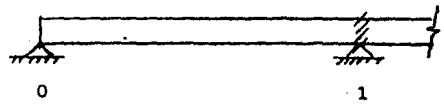
$$r_{1-2} = 2 EI / 80 = EI / 40$$

$$F_{D1-0} = \frac{1/20}{1/20 + 1/40} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$F_{D1-2} = \frac{1/40}{1/20 + 1/40} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



* por simetría



F. distribución	1.00	2/3	1/3	
M. empotramiento	420	-420	854	
	-420	→	-210	
	-74.65	←	-149.3	-74.65
	74.65	→	37.32	
	-12.44	←	-24.88	-12.44
	12.44	→	6.22	
	-1.03	←	-2.07	-1.03
	1.03	→	0.51	
	-0.17	←	-0.34	-0.17
	0.17	→	0.08	
	-----		-----	-----
	0		-762.46	765.71

Momento secundario = $M_{tot.} - M_{primario}$

Momento secundario = 762 - 660 = 102

Por este método, el valor del momento secundario varia, ya que no se considera la curvatura sobre los apoyos, al calcular las cargas equivalentes.

SOLUCION POR EL METODO DE FLEXIBILIDAD

Una de las formas del método de flexibilidad es la ecuación general de los tres momentos, la cual ofrece la ventaja de hallar exactamente los momentos redundantes, producidos por un cable de perfil excéntrico en una viga presforzada continua. Esta ecuación se puede deducir utilizando el método de las fuerzas virtuales, ya que expresa una condición de compatibilidad de deformaciones para un apoyo intermedio de dicha estructura.

La ecuación de los tres momentos para un apoyo intermedio j de la viga continua de la figura 5 es :

$$F_{ji} X_i + F_{jj} X_j + F_{jk} X_k + \gamma_j = 0$$

donde :

X_i, X_j, X_k = momentos redundantes en i, j y k

$F_{ji}, F_{jj}, F_{jk}, \gamma_j$ = desviaciones (flexibilidades) angulares en los extremos.

*... Esta ecuación puede utilizarse como una fórmula recurrente para la construcción de la matriz de flexibilidad del sistema, dada a continuación.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline F_i & F_{ij} & 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline X_i \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline F_{ji} & F_{jj} & F_{jk} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline X_j \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & F_{jk} & F_k \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline X_k \\ \hline \end{array}
 = 0$$

Respecto a los efectos primarios y secundarios, los términos de carga $\gamma_j = \gamma_{ji} + \gamma_{jk}$ representan la suma de las desviaciones angulares en los

extremos de la estructura básica debidas a las cargas (y/u otros efectos) que actuan en j ...' (4). Estos otros efectos, son en este caso los momentos hiperestáticos, lo cual permite utilizar la ecuación de los tres momentos despejando unicamente los momentos redundantes X_i , X_j , X_k , para la obtención directa de los efectos secundarios, ya que las acciones consideradas sólo dependen de la excentricidad del cable y son proporcionales a la fuerza de presforzamiento.

Se ha seleccionado el método de flexibilidad para elaborar un programa, ya que la forma matricial de la ecuación de los tres momentos permite obtener los momentos hiperestáticos clara y sistemáticamente, debido a que en este sistema sólo hay que concretarse a calcular los momentos estáticos alrededor de los apoyos intermedios.

En la siguiente parte se desarrolla la solución mediante la ecuación de los tres momentos de la viga simétrica resuelta anteriormente por dos métodos, de forma detallada y manualmente, con el objeto de comprender la secuencia y forma de operación del programa antes mencionado. El cálculo de los momentos estáticos se hace por medio de trapecios, lo que produce un ligero error proporcional a la aproximación deseada en la consideración de la trayectoria del cable de presfuerzo.

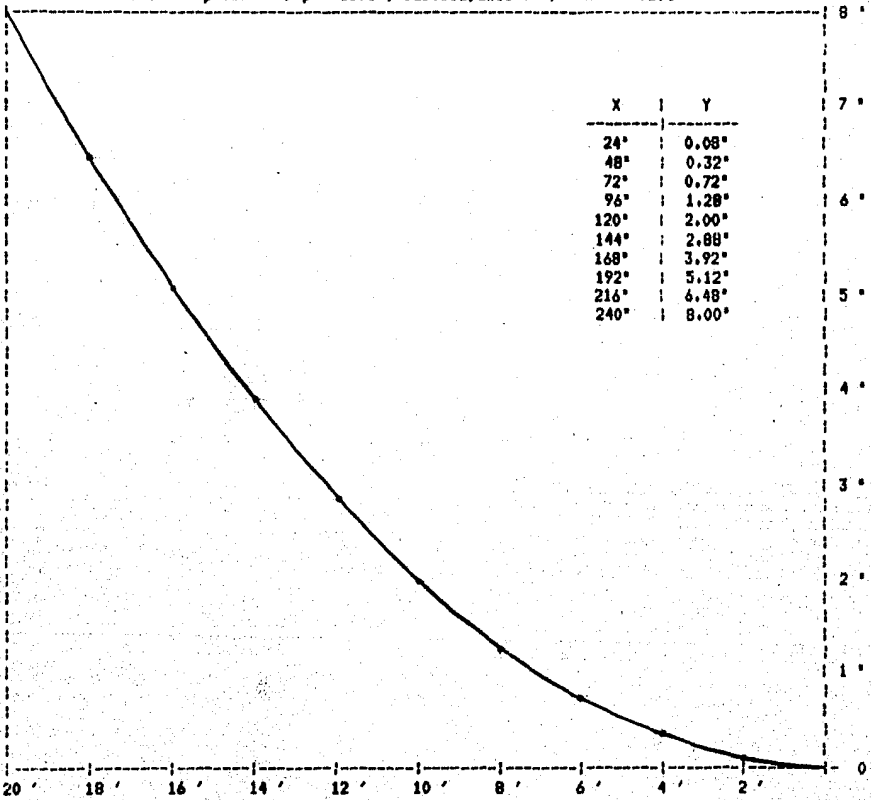
Partiendo de la geometría del cable de presfuerzo dada en la figura 5, se procede a calcular las ordenadas del cable analizando cada una de las parábolas que la componen, como sigue.

4) TUMA Y MUNSHI. Análisis estructural avanzado p.99

PERFIL DEL CABLE A LA DERECHA DEL APOYO O

Tomando como origen el punto de excentricidad máxima entre el apoyo i y el apoyo O, tenemos una parábola con eje paralelo al eje Y que pasa por el punto $(- 240 \text{ }', 8 \text{ }')$, con fórmula :

$$(- 240)^2 = 4p (8) \text{ ---} \rightarrow p = 1800 \text{ ; sustituyendo : } y = x^2 / 7200$$

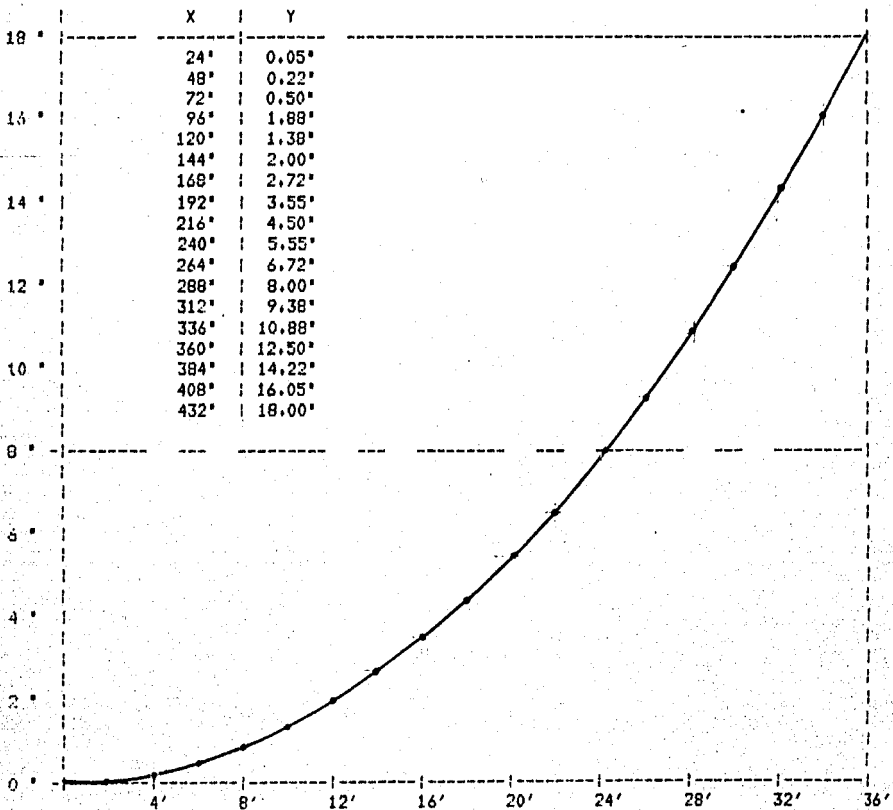


PERFIL DEL CABLE A LA IZQUIERDA DEL APOYO *i* HASTA EL PUNTO DE EXCENTRICIDAD MÁXIMA HACIA EL APOYO *0*.

Tomando como origen el punto de excentricidad máxima entre el apoyo *0* y el apoyo *i*, tenemos una parábola con vértice en el origen, que pasa por el punto (432', 18') y eje que coincide con el eje *Y*.

$$X^2 = 4 p y \quad ; \quad (432)^2 = 4 p (18)$$

$$186,624 = 75 p \quad \text{--->} \quad y = X^2 / 10368$$



OBTENCION DEL PERFIL DEL CABLE SOBRE EL APOYO i

Tomando como origen el punto del cable que se localiza sobre el apoyo i se pueden obtener las ecuaciones de las dos parábolas que en este tienen su vértice.

Lado izquierdo.- Parábola con vértice en el origen, y eje que coincide con el eje Y, pasando por el punto (-48,-2)

$$X^2 = 4 p y$$

$$(-48)^2 = 4p (-2)$$

$$2304 = -8p \Rightarrow p = -228$$

La ecuación de la parábola es :

$$X^2 = - 1152 y$$

Despejando; $y = X^2 / -1152$

X	Y
-12"	- 0.125"
-24"	- 0.500"
-36"	- 1.125"
-48"	- 2.000"
-60"	- 3.125"

Lado derecho.- Parábola con vértice en el origen, y eje que coincide con el eje Y, pasando por el punto (105, 5.25)

$$X^2 = 4 p y$$

$$(105)^2 = 4p (5.25)$$

$$11,025 = 21 p \Rightarrow p = 525$$

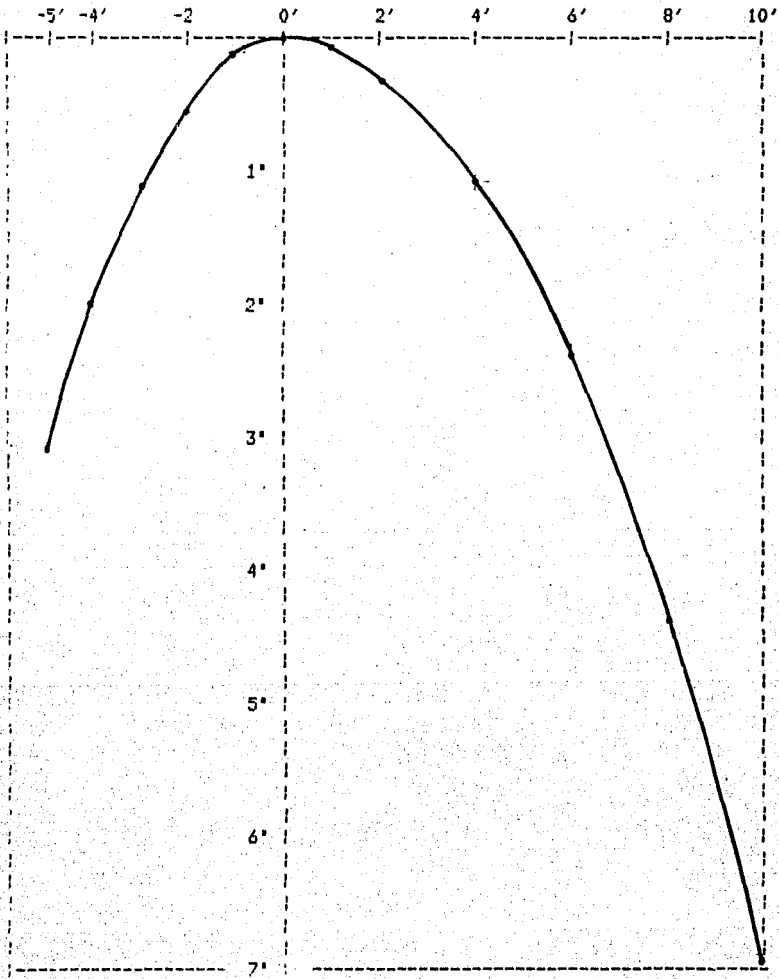
La ecuación de la parábola es:

$$X^2 = 2100 y$$

Despejando; $y = X^2 / 2100$

X	Y
-12"	0.068"
-24"	0.274"
-36"	0.617"
-48"	1.097"
-60"	1.714"
-72"	2.468"
-84"	3.360"
-96"	4.388"
-105"	5.250"
-108"	5.554"
-120"	6.857"

PERFIL DEL CABLE SOBRE EL APOYO i

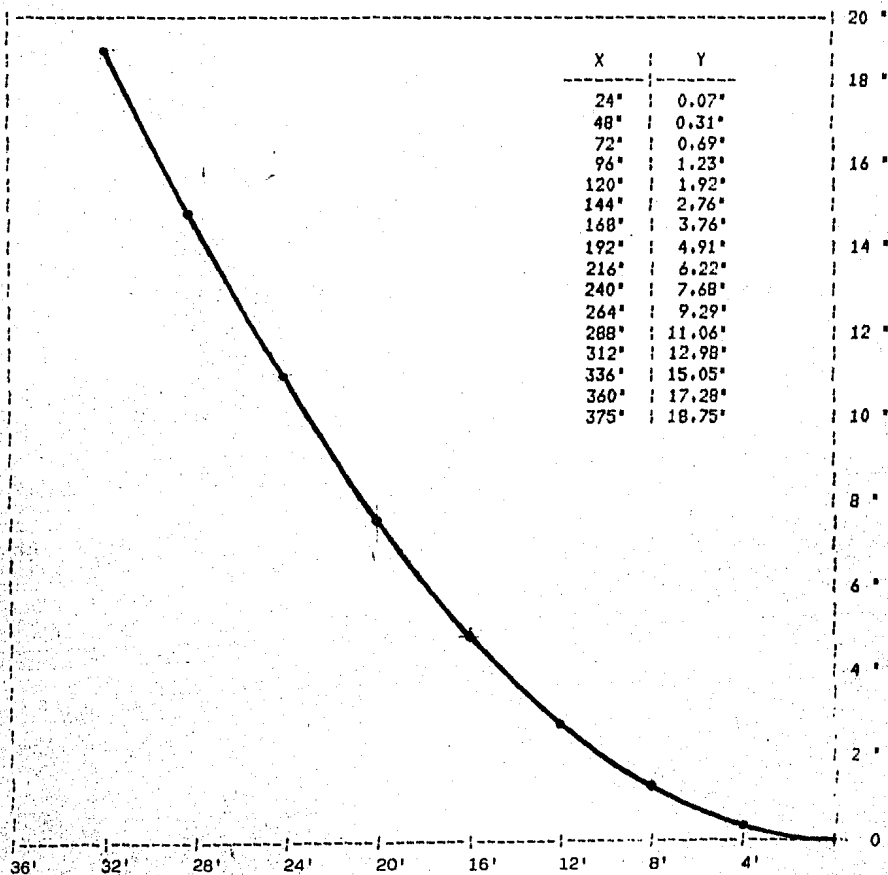


PERFIL DEL CABLE A LA DERECHA DEL APOYO i

Tomando como origen el punto sobre el perfil del cable, de máxima excentricidad entre el apoyo i y el apoyo j, tenemos una parábola con vértice en el origen y eje que coincide con el eje Y, pasando por el punto; (-375, 18.75) de fórmula:

$$X^2 = 4 p y \quad ; \quad (-375)^2 = 4 p (18.75)$$

$$140,625 = 75 p \quad \text{--->} \quad y = X^2 / 7500$$



OBTENCION DE LOS MOMENTOS ESTATICOS POR Σ DE TRAPECIOS

AREA NEGATIVA a la izquierda del apoyo 1

a)	$(0.00 - 1.52) / 2 \times 24^2 =$	18.24	in ²
b)	$(-1.52 - 2.88) / 2 \times 24^2 =$	52.80	in ²
c)	$(-2.88 - 4.08) / 2 \times 24^2 =$	83.52	in ²
d)	$(-4.08 - 5.12) / 2 \times 24^2 =$	110.40	in ²
e)	$(-5.12 - 6.00) / 2 \times 24^2 =$	133.44	in ²
f)	$(-6.00 - 6.72) / 2 \times 24^2 =$	152.64	in ²
g)	$(-6.72 - 7.28) / 2 \times 24^2 =$	168.00	in ²
h)	$(-7.28 - 7.68) / 2 \times 24^2 =$	179.52	in ²
i)	$(-7.68 - 7.92) / 2 \times 24^2 =$	187.20	in ²
j)	$(-7.92 - 8.00) / 2 \times 24^2 =$	191.04	in ²
		-----	2
	S u m a	1276.80	in ²
k)	$(-8.00 - 7.94) / 2 \times 24^2 =$	191.33	in ²
l)	$(-7.94 - 7.77) / 2 \times 24^2 =$	188.65	in ²
m)	$(-7.77 - 7.50) / 2 \times 24^2 =$	183.32	in ²
n)	$(-7.50 - 7.11) / 2 \times 24^2 =$	175.33	in ²
o)	$(-7.11 - 6.61) / 2 \times 24^2 =$	164.66	in ²
p)	$(-6.61 - 6.00) / 2 \times 24^2 =$	151.33	in ²
q)	$(-6.00 - 5.27) / 2 \times 24^2 =$	135.32	in ²
r)	$(-5.27 - 4.44) / 2 \times 24^2 =$	116.65	in ²
s)	$(-4.44 - 3.50) / 2 \times 24^2 =$	95.33	in ²
t)	$(-3.50 - 2.44) / 2 \times 24^2 =$	71.33	in ²
u)	$(-2.44 - 1.27) / 2 \times 24^2 =$	44.65	in ²
v)	$(-1.27 - 0.00) / 2 \times 24^2 =$	15.32	in ²
		-----	2
	S u m a	1533.22	in ²

CENTROIDE DEL AREA NEGATIVA

$$\text{Suma de areas de a) a j) = } 1276,80 \text{ in}^2 = 8,86 \text{ ft}^2$$

$$\text{Suma de areas de k) a v) = } 1533,22 \text{ in}^2 = 10,65 \text{ ft}^2$$

Distancias al centroide

$$\text{area de a) a j) = } 12,5 \text{ '}$$

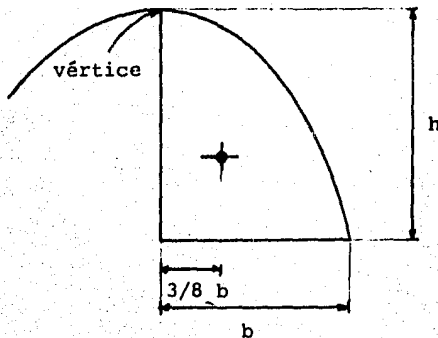
$$\text{area de k) a v) = } 20 \text{ ' + (} 24 \text{ ' x } 3/8 \text{) = } 29 \text{ '}$$

$$\text{centroide} = \frac{8,86 (12,5) + 10,65 (29)}{8,86 + 10,65}$$

$$\text{centroide} = \frac{110,837 + 308,850}{19,51} = 21,503 \text{ ft}$$

$$\text{MOMENTO ESTATICO} = (- 8,86 - 10,65) (21,503) = - 420,40$$

CENTROIDE DE UNA PARABOLA



ORTENCION DE LOS MOMENTOS ESTATICOS POR Σ DE TRAPECIOS

AREA POSITIVA a la izquierda del apoyo i

a)	$(0.00 + 1.38) / 2 \times 24' =$	16.65 in ²
b)	$(1.38 + 2.88) / 2 \times 24' =$	51.31 in ²
c)	$(2.88 + 4.50) / 2 \times 24' =$	88.65 in ²
d)	$(4.50 + 6.22) / 2 \times 24' =$	128.66 in ²
e)	$(6.22 + 8.05) / 2 \times 24' =$	171.32 in ²
f)	$(8.05 + 10.0) / 2 \times 24' =$	216.66 in ²
		----- ²
	S u m a	673.25 in ²

i)	$(10.0 + 11.5) / 2 \times 24' =$	258.00 in ²
j)	$(11.5 + 12.0) / 2 \times 24' =$	282.00 in ²
		----- ²
	S u m a	540.00 in ²

Debido a que la parábola que forma el cable a la izquierda del apoyo i de a) a f) no contiene el vértice en el trayecto del cable, se ha calculado su centroide utilizando cada uno de los trapecios - en que se simplificó como se muestra :

Calculo del centroide del area a) a f)

	AREA	DISTANCIA AL CENTROIDE DEL TRAPECIO DESDE 0	AREA x DISTANCIA
a)	16.65	16.00'	266.49
b)	51.31	37.40'	1919.22
c)	88.65	60.87'	5396.66
d)	128.66	84.64'	10890.37
e)	171.32	108.51'	18590.88
f)	216.66	132.43'	28692.50
	-----		-----
Suma	673.27		Suma 65,756.14

$$\text{centroide} = \frac{65,756.14}{673.27} = 97.66 \text{ in} = 8.139 \text{ ft.}$$

Distancia al centroide del area a) a f)

$$44' + 8.139' = 52.139'$$

Distancia al centroide del area i) y j)

$$56' + (4' + 5/8') = 58.5'$$

Momento estatico del area a) a f)

$$(4.67 \text{ in} \times 52.139') = 243.49$$

Momento estatico del area i) y j)

$$(3.75 \text{ in} \times 58.5') = 219.37$$

MOMENTO ESTATICO area positiva = 462.86

MOMENTO ESTATICO TOTAL DEL TRAMO 0 - i = (462.86 - 420.40)(660/60 EI)

* MOMENTO ESTATICO TOTAL DEL TRAMO 0 - i = 469.97 / EI

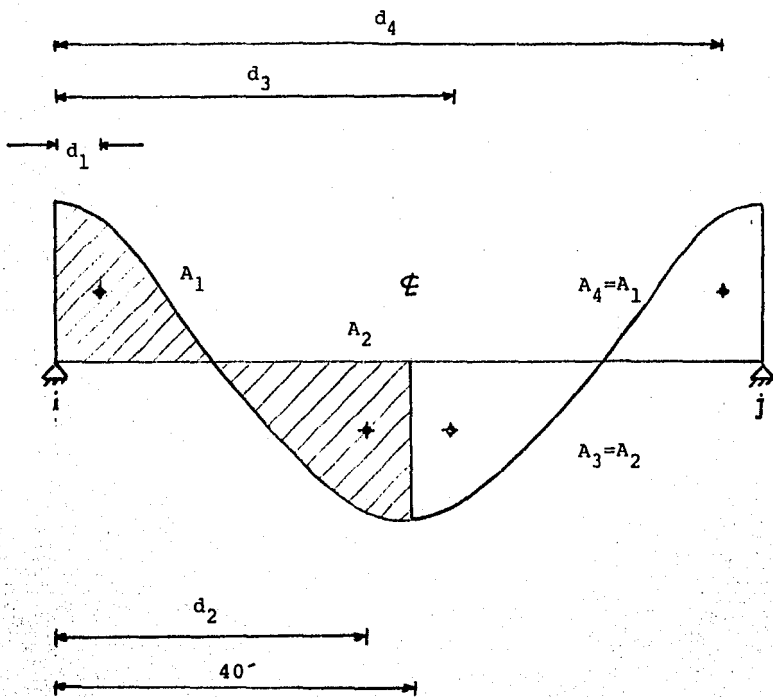
MOMENTO ESTATICO A LA DERECHA DEL APOYO i
(Tramo i - j)

A partir del método utilizado para el tramo 0 - i, en el tramo central i - j se ha utilizado una tabla de cálculo que muestra simultaneamente el area del trapecio y su distancia al centroide desde i, obteniendose de esta manera el producto Area x Distancia al centroide (A x D) de cada uno de los trapecios, teniendo finalante :

$$\text{centroide de la parábola} = \frac{\sum A \times D}{\sum A}$$

Una vez conocida la ubicación de centroide de cada parábola el momento estático se obtiene como el producto de las areas totales por la distancia al centroide desde el punto sobre el apoyo i .

La obtención del momento estático del tramo $i-j$ se puede simplificar tomando en cuenta que la viga es simétrica respecto al centro del claro, por lo que solo hay que calcular las áreas y los centroides de la mitad del claro, deduciendo de estos la otra mitad.



Para determinar los valores de A_1 , d_1 , A_2 , d_2 se ha utilizado la siguiente tabla que contiene dos porciones de la gráfica; Área positiva a la derecha de i (A_1) y Área negativa a la derecha de i (A_2). La tabla se muestra en la siguiente página.

TRAPECIO No	Area (in) ²	DISTANCIA AL CENTROIDE	A x D	
1	143.58	5.99	860.0442	
2	141.93	17.98	2551.901	
3	138.64	29.97	4155.040	
4	133.70	41.95	5608.71	
5	127.12	53.94	6856.852	
6	118.89	65.92	7837.228	
7	109.02	77.90	8506.68	A <
8	97.50	89.87	8762.32	1
9	64.62	100.41	6488.494	
10	90.25	112.19	10125.14	
11	99.96	130.92	13086.76	
12	48.36	153.94	7444.538	ACUMULADO
13	5.88	172.00	1011.36	83,295.09 /

14	-5.64	188.00	-1060.32	
15	-43.68	205.93	-8995.02	
16	-84.24	228.92	-19284.2	
17	-121.2	252.57	-30611.4	
18	-154.32	276.40	-42654.0	
19	-183.72	300.30	-55171.1	
20	-209.52	324.23	-67932.6	A <
21	-231.72	348.17	-80677.9	2
22	-250.20	372.13	-93106.9	
23	-264.84	396.10	-104903	
24	-275.88	420.06	-115886.	
25	-283.32	444.04	-125805.	ACUMULADO
26	-287.04	468.01	-134337	-797,130.92 /

$$\text{Distancia al centroide de A} = \frac{A \times D}{1}$$

$$\text{Distancia al centroide de A} = \frac{83,295.09 \text{ in}^3}{1,319.63 \text{ in}} = 63.12 \text{ in}$$

$$\text{Distancia al centroide de A} = \frac{713,835.0 \text{ in}^3}{-2395.32 \text{ in}} = 298.01 \text{ in}$$

$$\text{Distancia al centroide de A} = 480'' + (480'' - 298.01'') = 662''$$

$$\text{Distancia al centroide de A} = 480'' + (480'' - 63.12'') = 897''$$

Momento estático de i a J = γ_{ij}

$$\gamma_{ij} = (1319.63)(63.12) - (2395.32)(298.01) - (2395.32)(662) + (1319.63)(896.88)$$

$$\gamma_{ij} = 83,295.045 - 713,829.310 - 1,585,701.84 + 1,183,549.75$$

$$\gamma_{ij} = -1,032,686.35 \left(\frac{16,3872}{28,300} \right) = -600$$

Como es proporcional a la fuerza de presfuerzo $\times \frac{EI}{L}$

$$\gamma_{ij} = -600 \frac{660}{EI} = - \frac{4950}{EI}$$

MOMENTO ESTÁTICO TOTAL DEL TRAMO = $-4950 / EI$

MOMENTO ESTÁTICO EN i = $\gamma_i = \gamma_{io} - \gamma_{ij}$

$$\gamma_i = \frac{470}{EI} - \frac{4950}{EI} = \frac{4480}{EI} = \gamma_j \text{ (por simetría)}$$

Una vez conocidos los momentos estáticos que son equivalentes a las desviaciones angulares producidas por el presfuerzo, es posible la utilización de la ecuación de los tres momentos sustituyendo dichos valores en el sistema matricial. La matriz de flexibilidades será en este caso de dos por dos y dependerá únicamente de la longitud entre claros y las condiciones de los apoyos según se muestra en la siguiente tabla :

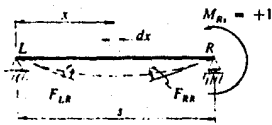
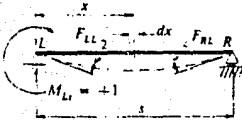
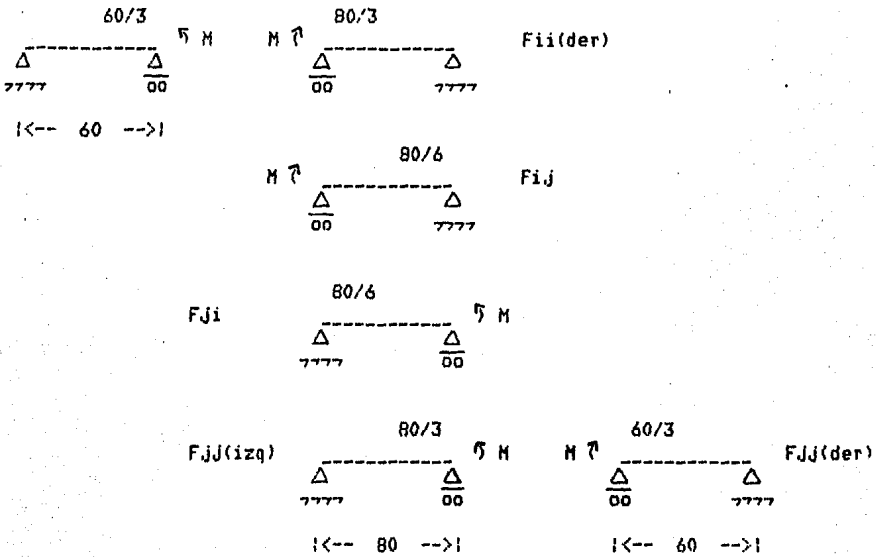
CAUSA UNITARIA	SECCION TRANSVERSAL	
	VARIABLE	CONSTANTE
	$F_{RR} = \int_0^s \frac{x^2 dx}{s^2 EI}$ $F_{LR} = \int_0^s \frac{(s-x)x dx}{s^2 EI}$	$\frac{s}{3EI}$ $\frac{s}{6EI}$
	$F_{RL} = \int_0^s \frac{x(s-x) dx}{s^2 EI}$ $F_{LL} = \int_0^s \frac{(s-x)^2 dx}{s^2 EI}$	$\frac{s}{6EI}$ $\frac{s}{3EI}$

Tabla de flexibilidades segmentales.

Las dos únicas variantes en la tabla anterior dependen de la aplicación del momento unitario, ya que en uno de los segmentos de la viga el momento se aplica en el apoyo fijo y en el otro se aplica en el apoyo liberado - en el sentido longitudinal de la viga.

La matriz de flexibilidad se integra de la siguiente manera :



(M = Momento unitario)

$$\begin{bmatrix} F_i & F_{ij} \\ F_{ji} & F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80/6 & 60/3 + 80/3 \\ 60/3 + 80/3 & 80/6 \end{bmatrix}$$

Finalmente el sistema matricial de la ecuacion de los tres momentos es :

$$\begin{bmatrix} 46.7 & 13.3 \\ 13.3 & 46.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4480 \\ -4480 \end{bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA

Calculo de la matriz inversa $[A]^{-1}$

$$[A] = \begin{bmatrix} 46.7 & 13.3 \\ 13.3 & 46.7 \end{bmatrix}$$

determinante = $|A| = (46.7 \times 46.7) - (13.3 \times 13.3) = 2004$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{46.7}{|A|} & -\frac{13.3}{|A|} \\ -\frac{13.3}{|A|} & \frac{46.7}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02333 & -0.00667 \\ -0.00667 & 0.02333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ X_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02333 & -0.00667 \\ -0.00667 & 0.02333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4480 \\ -4480 \end{bmatrix}$$

$X_i = X_j = (0.02333)(-4480) + (-0.00667)(-4480) = 74.66$

MOMENTO HIPERESTATICO EN i = 74.66

MOMENTO HIPERESTATICO EN j = 74.66

SOLUCION ALTERNATIVA POR EL METODO DE RIGIDES DIRECTO

En todos los problemas de análisis estructural, es importante tomar en cuenta el método de rigideces, el cual en la actualidad proporciona la solución de la mayoría de los problemas de cálculo de estructuras. En este método no vamos a hablar de indeterminación estática, ya que las ecuaciones de equilibrio son formadas por compatibilidad partiendo de los giros en cada uno de los nodos que inicialmente se han restringido evitando los desplazamientos.

Como es notorio en el método de flexibilidades, también en rigideces la principal incógnita a determinar en la solución de una viga hiperestática son los momentos de empotramiento, los cuales son determinados inicialmente en la aplicación de este método.

El aspecto más importante a tratar, es el tipo de indeterminación que se presenta en el método de rigideces, al aplicar fuerzas de fijación a la estructura, se tendrá el mismo número de desplazamientos posibles en los nodos, esta condición de indeterminación se denomina indeterminación cinemática. "... El número de desplazamientos independientes de nodos de una estructura se conoce como grado de indeterminación cinemática o número de grados de libertad. Este número es la suma de grados de libertad de rotación y traslación..." (5). Un sistema de desplazamiento de nodos se denomina independiente si cada desplazamiento de nodos se puede variar arbitrario e independiente de todos los otros.

Es recomendable hacer hincapié en no confundir la indeterminación cinemática con la indeterminación estática. Si introducimos un elemento para liberar un nodo (articulación) podemos reducir en uno el grado de indeterminación estática, pero al mismo tiempo estamos permitiendo una rotación que aumenta también en uno la determinación cinemática. Este razonamiento nos da una idea de como seleccionar el método que se aplicara para el análisis en función del tipo de indeterminación que pueda presentarse.

5) TUMA Y MUNSHI. Análisis estructural avanzado p.37

DESARROLLO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

La utilización de un programa de computadora para la solución del problema en cuestión resulta de una aplicación práctica, ya que es posible lograr el grado de exactitud que se requiera en el diseño.

Tomando como base la solución del problema anterior por el método de flexibilidad se ha llegado a la elaboración de este programa de computadora, siendo el principal objetivo obtener los momentos hiperestáticos debidos al presfuerzo para cualquier trayecto del cable de presfuerzo. Esto es posible utilizando la geometría del cable para la obtención de los momentos estáticos en los apoyos intermedios.

Para programar la forma matricial de la ecuación de los tres momentos, es preciso elaborar una secuencia de cálculo que facilite principalmente la obtención de los momentos estáticos. Debido a esto el programa sugiere la delimitación de cada uno de los tramos de la viga, manejando las ordenadas del cable separadas por tramo, como se puede apreciar en la tabla mostrada más adelante, esta clasificación inicialmente permite calcular los momentos estáticos totales sobre cada uno de los apoyos sumando unicamente el momento estático del tramo izquierdo con el del tramo derecho.

El problema inmediato anterior muestra claramente la solución utilizando trapecios, la cual se mejorará en este programa. Esta solución requiere el conocimiento de las ordenadas del cable correspondientes a diferentes abscisas respecto a un punto de referencia, siendo en este caso el punto definido por el cruce del eje centroidal de la sección y el apoyo externo izquierdo definido como eje 0.

En base a este criterio es posible explicar el funcionamiento de este programa de computadora, de la siguiente forma ; El programa se ordena mediante el uso de una tabla en la que aparecen columnas verticales separadas por tramo, y en cada tramo se requieren necesariamente los siguientes datos :

Para un cierto tramo n.

- a) Ordenadas que van de un valor mayor a uno menor
- b) Ordenadas que van de un valor menor a uno mayor
- c) Distancia entre cada una de las abscisas

En el caso de trabajar con claros asimétricos se requiere una columna más correspondiente a las áreas de cada uno de los trapecios, como se muestra más adelante en los ejemplos de aplicación.

Los datos a), b) y c) son tres de las cuatro columnas contenidas en la tabla del programa, siendo la cuarta columna la de resultados, es decir la columna de los momentos estáticos. Para obtener el momento estático de cada tramo solo se requiere la suma total de la cuarta columna.

Para lograr este cálculo se ha utilizado un paquete de programación en SOFTWARE disponible comercialmente para microcomputadora (llamado SYMPHONY), el cual permite el manejo de una fórmula en cada uno de los elementos que componen a una hoja electrónica, mediante el uso de cursores de ancho regulable en el sentido horizontal, para simplificar el contenido del

programa se muestra en seguida una impresión del ejemplo resuelto en el capítulo anterior por el método de flexibilidades mediante el uso del programa aquí descrito.

La impresión se puede realizar mediante el uso del mismo paquete de dos formas distintas, una que muestra las fórmulas que se programan para el cálculo requerido y la otra muestra el valor que se obtiene en la aplicación de cada fórmula. La impresión de las fórmulas no es visible en la hoja electrónica y se requiere colocar el cursor en el lugar donde se encuentra la fórmula, para que así aparezca su contenido en la pantalla .

El orden de impresión es de la siguiente manera; cada renglón representa la información que tiene grabada un cursor, y la hoja electrónica es descrita por renglones de izquierda a derecha, es posible que en un cursor el contenido de información varíe desde un solo carácter hasta una fórmula muy elaborada. Para poder interpretar este primer modo de impresión es recomendable relacionarlo con el segundo.

Para simplificar el contenido de cada impresión, antes de imprimir se pueden eliminar los caracteres que solo tienen un sentido gráfico.

La segunda forma de impresión muestra en su totalidad lo que se aprecia en la hoja electrónica de la pantalla. A continuación se muestran las dos formas antes descritas en este mismo orden.

H13: (F2) $((D13+D12) * (F13/2) * ((2 * D13 + D12) / D13 + D12) * (F13/3))$
 P13: (F2) $((J12 + J13) * N13 / 2)$
 R13: (F2) $((+J12 + J13) * N13 / 2) * (-((2 * J13) + J12) / (J13 + J12) * (N13/3)) + N13$
 Z13: (F2) $((+T12 + T13) * X13 / 2) * (-((2 * T13) + T12) / (T13 + T12) * (X13/3)) + X13 + (AG15 * I2)$
 H14: (F2) $((+D14 + D13) * (F14/2)) * ((2 * D14) + D13) / (D14 + D13) * (F14/3) + \text{SUM}(F * I3, .F13)$
 P14: (F2) $((+J13 + J14) * N14 / 2)$
 R14: (F2) $((+J13 + J14) * N14 / 2) * (-((2 * J14) + J13) / (J14 + J13) * (N14/3)) + N14 + \text{SUM}(N * I3, .N13)$
 Z14: (F2) $((+T14 + T13) * X14 / 2) * (-((2 * T14) + T13) / (T14 + T13) * (X14/3)) + X14 + \text{SUM}(X * I3, .X13) + (AG15 * I2)$
 H15: (F2) $((+D15 + D14) * (F15/2)) * ((2 * D15) + D14) / (D15 + D14) * (F15/3) + \text{SUM}(F * I3, .F15)$
 P15: (F2) $((+J14 + J15) * N15 / 2)$
 R15: (F2) $((+J14 + J15) * N15 / 2) * (-((2 * J15) + J14) / (J15 + J14) * (N15/3)) + N15 + \text{SUM}(N * I3, .N14)$
 Z15: (F2) $((+T14 + T15) * X15 / 2) * (-((2 * T15) + T14) / (T15 + T14) * (X15/3)) + X15 + \text{SUM}(X * I3, .X14) + (AG15 * I2)$
 H16: (F2) $((+D16 + D15) * (F16/2)) * ((2 * D16) + D15) / (D16 + D15) * (F16/3) + \text{SUM}(F * I3, .F15)$
 P16: (F2) $((+J15 + J16) * N16 / 2)$
 R16: (F2) $((+J15 + J16) * N16 / 2) * (-((2 * J16) + J15) / (J16 + J15) * (N16/3)) + N16 + \text{SUM}(N * I3, .N15)$
 Z16: (F2) $((+T15 + T16) * X16 / 2) * (-((2 * T16) + T15) / (T16 + T15) * (X16/3)) + X16 + \text{SUM}(X * I3, .X15) + (AG15 * I2)$
 H17: (F2) $((+D17 + D16) * (F17/2)) * ((2 * D17) + D16) / (D17 + D16) * (F17/3) + \text{SUM}(F * I3, .F16)$
 P17: (F2) $((+J16 + J17) * N17 / 2)$
 R17: (F2) $((+J16 + J17) * N17 / 2) * (-((2 * J17) + J16) / (J17 + J16) * (N17/3)) + N17 + \text{SUM}(N * I3, .N16)$
 Z17: (F2) $((+T16 + T17) * X17 / 2) * (-((2 * T17) + T16) / (T17 + T16) * (X17/3)) + X17 + \text{SUM}(X * I3, .X16) + (AG15 * I2)$
 H18: (F2) $((+D18 + D17) * (F18/2)) * ((2 * D18) + D17) / (D18 + D17) * (F18/3) + \text{SUM}(F * I3, .F17)$
 P18: (F2) $((+J17 + J18) * N18 / 2)$
 R18: (F2) $((+J17 + J18) * N18 / 2) * (-((2 * J18) + J17) / (J18 + J17) * (N18/3)) + N18 + \text{SUM}(N * I3, .N17)$
 Z18: (F2) $((+T17 + T18) * X18 / 2) * (-((2 * T18) + T17) / (T18 + T17) * (X18/3)) + X18 + \text{SUM}(X * I3, .X17) + (AG15 * I2)$
 H19: (F2) $((+D19 + D18) * (F19/2)) * ((2 * D19) + D18) / (D19 + D18) * (F19/3) + \text{SUM}(F * I3, .F18)$
 P19: (F2) $((+J18 + J19) * N19 / 2)$
 R19: (F2) $((+J18 + J19) * N19 / 2) * (-((2 * J19) + J18) / (J19 + J18) * (N19/3)) + N19 + \text{SUM}(N * I3, .N18)$
 Z19: (F2) $((+T18 + T19) * X19 / 2) * (-((2 * T19) + T18) / (T19 + T18) * (X19/3)) + X19 + \text{SUM}(X * I3, .X18) + (AG15 * I2)$
 H20: (F2) $((+D20 + D19) * (F20/2)) * ((2 * D20) + D19) / (D20 + D19) * (F20/3) + \text{SUM}(F * I3, .F19)$
 P20: (F2) $((+J19 + J20) * N20 / 2)$
 R20: (F2) $((+J19 + J20) * N20 / 2) * (-((2 * J20) + J19) / (J20 + J19) * (N20/3)) + N20 + \text{SUM}(N * I3, .N19)$
 H21: (F2) $((+D21 + D20) * (F21/2)) * ((2 * D21) + D20) / (D21 + D20) * (F21/3) + \text{SUM}(F * I3, .F20)$
 P21: (F2) $((+J20 + J21) * N21 / 2)$
 R21: (F2) $((+J20 + J21) * N21 / 2) * (-((2 * J21) + J20) / (J21 + J20) * (N21/3)) + N21 + \text{SUM}(N * I3, .N20)$
 Z21: (F2) $((+T19 + T20) * X21 / 2) * (-((2 * T20) + T19) / (T20 + T19) * (X21/3)) + X21 + \text{SUM}(X * I3, .X19) + (AG15 * I2)$
 H22: (F2) $((+D22 + D21) * (F22/2)) * ((2 * D22) + D21) / (D22 + D21) * (F22/3) + \text{SUM}(F * I3, .F21)$
 P22: (F2) $((+J21 + J22) * N22 / 2)$
 R22: (F2) $((+J21 + J22) * N22 / 2) * (-((2 * J22) + J21) / (J22 + J21) * (N22/3)) + N22 + \text{SUM}(N * I3, .N21)$
 P23: (F2) $((+J22 + J23) * N23 / 2)$
 R23: (F2) $((+J22 + J23) * N23 / 2) * (-((2 * J23) + J22) / (J23 + J22) * (N23/3)) + N23 + \text{SUM}(N * I3, .N22)$
 Z23: (F2) $((+T23 + T21) * X23 / 2) * (-((2 * T23) + T21) / (T23 + T21) * (X23/3)) + X23 + \text{SUM}(X * I3, .X22) + (AG15 * I2)$
 H24: (F2) $((+D22 + D24) * (F24/2)) * ((2 * D24) + D22) / (D24 + D22) * (F24/3) + \text{SUM}(F * I3, .F23)$
 P24: (F2) $((+J23 + J24) * N24 / 2)$
 R24: (F2) $((+J23 + J24) * N24 / 2) * (-((2 * J24) + J23) / (J24 + J23) * (N24/3)) + N24 + \text{SUM}(N * I3, .N23)$
 Z24: (F2) $((+T24 + T23) * X24 / 2) * (-((2 * T24) + T23) / (T24 + T23) * (X24/3)) + X24 + \text{SUM}(X * I3, .X23) + (AG15 * I2)$
 P25: (F2) $((+J24 + J25) * N25 / 2)$
 R25: (F2) $((+J24 + J25) * N25 / 2) * (-((2 * J25) + J24) / (J25 + J24) * (N25/3)) + N25 + \text{SUM}(N * I3, .N24)$
 Z25: (F2) $((+T25 + T24) * X25 / 2) * (-((2 * T25) + T24) / (T25 + T24) * (X25/3)) + X25 + \text{SUM}(X * I3, .X24) + (AG15 * I2)$
 H26: (F2) $((+D24 + D26) * (F26/2)) * ((2 * D26) + D24) / (D26 + D24) * (F26/3) + \text{SUM}(F * I3, .F25)$
 Z26: (F2) $((+T26 + T25) * X26 / 2) * (-((2 * T26) + T25) / (T26 + T25) * (X26/3)) + X26 + \text{SUM}(X * I3, .X25) + (AG15 * I2)$
 H27: (F2) $((+B26 + B27) * (F27/2)) * ((2 * B27) + B26) / (B27 + B26) * (F27/3) + \text{SUM}(F * I3, .F26)$
 P27: (F2) $((+J25 + J27) * N27 / 2)$
 R27: (F2) $((+J25 + J27) * N27 / 2) * (-((2 * J27) + J25) / (J27 + J25) * (N27/3)) + N27 + \text{SUM}(N * I3, .N26)$
 Z27: (F2) $((+T27 + T26) * X27 / 2) * (-((2 * T27) + T26) / (T27 + T26) * (X27/3)) + X27 + \text{SUM}(X * I3, .X26) + (AG15 * I2)$
 H28: (F2) $((+B27 + B28) * (F28/2)) * ((2 * B28) + B27) / (B28 + B27) * (F28/3) + \text{SUM}(F * I3, .F27)$
 Z28: (F2) $((+T28 + T27) * X28 / 2) * (-((2 * T28) + T27) / (T28 + T27) * (X28/3)) + X28 + \text{SUM}(X * I3, .X27) + (AG15 * I2)$

H29: (F2) ((+B28+B29)*F29/2)*(-((2*B29)+B28)/(B29+B28)*(F29/3))+F29)*#SUN(F#13, F28)
P29: (F2) (HL27*H29)*H29/2
R29: (F2) ((+HL27*H29)*H29/2)*(-((2*H29)+H27)/(L29+H27)*(H29/3))+#SUN(H#13, H28)
Z29: (F2) ((+V29*H28)*(X29/2))*(-((2*H29)+V28)/(V29+V28)*(X29/3))+#SUN(X#13, X28))+ (AG#15#12)
H30: (F2) ((+B29+B30)*F30/2)*(-((2*B30)+B29)/(B30+B29)*(F30/3))+F30)*#SUN(F#13, F29)
P30: (F2) (HL29*H30)*H30/2
R30: (F2) ((+HL29*H30)*H30/2)*(-((2*H30)+L29)/(L30+L29)*(H30/3))+#SUN(H#13, H29)
Z30: (F2) ((+V30*H29)*(X30/2))*(-((2*V30)+V29)/(V30+V29)*(X30/3))+#SUN(X#13, X29))+ (AG#15#12)
H31: (F2) ((+B30+B31)*F31/2)*(-((2*B31)+B30)/(B31+B30)*(F31/3))+F31)*#SUN(F#13, F30)
P31: (F2) (HL30*H31)*H31/2
R31: (F2) ((+HL30*H31)*H31/2)*(-((2*H31)+L30)/(L31+L30)*(H31/3))+#SUN(H#13, H30)
Z31: (F2) ((+V31*H30)*(X31/2))*(-((2*V31)+V30)/(V31+V30)*(X31/3))+#SUN(X#13, X30))+ (AG#15#12)
H32: (F2) ((+B31+B32)*F32/2)*(-((2*B32)+B31)/(B32+B31)*(F32/3))+F32)*#SUN(F#13, F31)
P32: (F2) (HL31*H32)*H32/2
R32: (F2) ((+HL31*H32)*H32/2)*(-((2*H32)+L31)/(L32+L31)*(H32/3))+#SUN(H#13, H31)
Z32: (F2) ((+V32*H31)*(X32/2))*(-((2*V32)+V31)/(V32+V31)*(X32/3))+#SUN(X#13, X31))+ (AG#15#12)
H33: (F2) ((+B32+B33)*F33/2)*(-((2*B33)+B32)/(B33+B32)*(F33/3))+F33)*#SUN(F#13, F32)
P33: (F2) (HL32*H33)*H33/2
R33: (F2) ((+HL32*H33)*H33/2)*(-((2*H33)+L32)/(L33+L32)*(H33/3))+#SUN(H#13, H32)
Z33: (F2) ((+V33*H32)*(X33/2))*(-((2*V33)+V32)/(V33+V32)*(X33/3))+#SUN(X#13, X32))+ (AG#15#12)
H34: (F2) ((+B33+B34)*F34/2)*(-((2*B34)+B33)/(B34+B33)*(F34/3))+F34)*#SUN(F#13, F33)
P34: (F2) (HL33*H34)*H34/2
R34: (F2) ((+HL33*H34)*H34/2)*(-((2*H34)+L33)/(L34+L33)*(H34/3))+#SUN(H#13, H33)
H35: (F2) ((+B34+B35)*F35/2)*(-((2*B35)+B34)/(B35+B34)*(F35/3))+F35)*#SUN(F#13, F34)
P35: (F2) (HL34*H35)*H35/2
R35: (F2) ((+HL34*H35)*H35/2)*(-((2*H35)+L34)/(L35+L34)*(H35/3))+#SUN(H#13, H34)
Z35: (F2) ((+V35*H34)*(X35/2))*(-((2*V35)+V34)/(V35+V34)*(X35/3))+#SUN(X#13, X34))+ (AG#15#12)
H36: (F2) ((+B35+B36)*F36/2)*(-((2*B36)+B35)/(B36+B35)*(F36/3))+F36)*#SUN(F#13, F35)
P36: (F2) (HL35*H36)*H36/2
R36: (F2) ((+HL35*H36)*H36/2)*(-((2*H36)+L35)/(L36+L35)*(H36/3))+#SUN(H#13, H35)
P37: (F2) (HL36*H37)*H37/2
R37: (F2) ((+HL36*H37)*H37/2)*(-((2*H37)+L36)/(L37+L36)*(H37/3))+#SUN(H#13, H36)
Z37: (F2) ((+V37*H36)*(X37/2))*(-((2*V37)+V36)/(V37+V36)*(X37/3))+#SUN(X#13, X36))+ (AG#15#12)
H38: (F2) ((+B36+B38)*F38/2)*(-((2*B38)+B36)/(B38+B36)*(F38/3))+#SUN(F#13, F37)
P38: (F2) (HL37*H38)*H38/2
R38: (F2) ((+HL37*H38)*H38/2)*(-((2*H38)+L37)/(L38+L37)*(H38/3))+#SUN(H#13, H37)
Z38: (F2) ((+V38*H37)*(X38/2))*(-((2*V38)+V37)/(V38+V37)*(X38/3))+#SUN(X#13, X37))+ (AG#15#12)
P39: (F2) (HL38*H39)*H39/2
R39: (F2) ((+HL38*H39)*H39/2)*(-((2*H39)+L38)/(L39+L38)*(H39/3))+#SUN(H#13, H38)
Z39: (F2) ((+V39*H38)*(X39/2))*(-((2*V39)+V38)/(V39+V38)*(X39/3))+#SUN(X#13, X38))+ (AG#15#12)
H40: (F2) ((+B38+B40)*F40/2)*(-((2*B40)+B38)/(B40+B38)*(F40/3))+F40)*#SUN(F#13, F39)
P40: (F2) (HL39*H40)*H40/2
R40: (F2) ((+HL39*H40)*H40/2)*(-((2*H40)+L39)/(L40+L39)*(H40/3))+#SUN(H#13, H39)
Z40: (F2) ((+V40*H39)*(X40/2))*(-((2*V40)+V39)/(V40+V39)*(X40/3))+#SUN(X#13, X39))+ (AG#15#12)
H41: (F2) ((+B40+B41)*F41/2)*(-((2*B41)+B40)/(B41+B40)*(F41/3))+#SUN(F#13, F40)
Z41: (F2) ((+V41*H40)*(X41/2))*(-((2*V41)+V40)/(V41+V40)*(X41/3))+#SUN(X#13, X40))+ (AG#15#12)
H42: (F2) ((+B41+B42)*F42/2)*(-((2*B42)+B41)/(B42+B41)*(F42/3))+F42)*#SUN(F#13, F41)
P42: (F2) (HL40*H42)*H42/2
R42: (F2) ((+HL40*H42)*H42/2)*(-((2*H42)+L40)/(L42+L40)*(H42/3))+#SUN(H#13, H41)
Z42: (F2) ((+V42*H41)*(X42/2))*(-((2*V42)+V41)/(V42+V41)*(X42/3))+#SUN(X#13, X41))+ (AG#15#12)
H43: (F2) ((+B42+B43)*F43/2)*(-((2*B43)+B42)/(B43+B42)*(F43/3))+#SUN(F#13, F42)
Z43: (F2) ((+V43*H42)*(X43/2))*(-((2*V43)+V42)/(V43+V42)*(X43/3))+#SUN(X#13, X42))+ (AG#15#12)
H44: (F2) ((+B43+B44)*F44/2)*(-((2*B44)+B43)/(B44+B43)*(F44/3))+F44)*#SUN(F#13, F43)
P44: (F2) (HL41*H44)*H44/2
R44: (F2) ((+HL41*H44)*H44/2)*(-((2*H44)+L41)/(L44+L41)*(H44/3))+#SUN(H#13, H43)
Z44: (F2) ((+V44*H43)*(X44/2))*(-((2*V44)+V43)/(V44+V43)*(X44/3))+#SUN(X#13, X43))+ (AG#15#12)

H45: (F2) $((+D44+D45)*F45/2)*(((2* D45)+D44)/(D45+D44))*(F45/3)+\text{PSUM}(F\#13, F44)$
 P45: (F2) $(+J44+J45)*N45/2$
 R45: (F2) $((+J44+J45)*N45/2)*(-((2*J45)+J44)/(J45+J44))*(N45/3)+N45+\text{PSUM}(N\#13, N44)$
 Z45: (F2) $((+T44+T45)*X45/2)*(-((2* T45)+T44)/(T45+T44))*(X45/3)+X45+\text{PSUM}(X\#13, X44)+\{AG\#15\#12\}$
 H46: (F2) $((+D45+D46)*F46/2)*(((2* D46)+D45)/(D46+D45))*(F46/3)+\text{PSUM}(F\#13, F45)$
 P46: (F2) $(+J45+J46)*N46/2$
 R46: (F2) $((+J45+J46)*N46/2)*(-((2*J46)+J45)/(J46+J45))*(N46/3)+N46+\text{PSUM}(N\#13, N45)$
 Z46: (F2) $((+T45+T46)*X46/2)*(-((2* T46)+T45)/(T46+T45))*(X46/3)+X46+\text{PSUM}(X\#13, X45)+\{AG\#15\#12\}$
 P47: (F2) $(+J46+J47)*N47/2$
 R47: (F2) $((+J46+J47)*N47/2)*(-((2*J47)+J46)/(J47+J46))*(N47/3)+N47+\text{PSUM}(N\#13, N46)$
 P48: (F2) $(+J47+J48)*N48/2$
 R48: (F2) $((+J47+J48)*N48/2)*(-((2*J48)+J47)/(J48+J47))*(N48/3)+N48+\text{PSUM}(N\#13, N47)$
 P49: (F2) $(+J48+J49)*N49/2$
 R49: (F2) $((+J48+J49)*N49/2)*(-((2*J49)+J48)/(J49+J48))*(N49/3)+N49+\text{PSUM}(N\#13, N48)$
 P50: (F2) $(+J49+J50)*N50/2$
 R50: (F2) $((+J49+J50)*N50/2)*(-((2*J50)+J49)/(J50+J49))*(N50/3)+N50+\text{PSUM}(N\#13, N49)$
 P51: (F2) $(+J50+J51)*N51/2$
 R51: (F2) $((+J50+J51)*N51/2)*(-((2*J51)+J50)/(J51+J50))*(N51/3)+N51+\text{PSUM}(N\#13, N50)$
 P52: (F2) $(+J51+J52)*N52/2$
 R52: (F2) $((+J51+J52)*N52/2)*(-((2*J52)+J51)/(J52+J51))*(N52/3)+N52+\text{PSUM}(N\#13, N51)$
 P53: (F2) $(+J52+J53)*N53/2$
 R53: (F2) $((+J52+J53)*N53/2)*(-((2*J53)+J52)/(J53+J52))*(N53/3)+N53+\text{PSUM}(N\#13, N52)$
 P54: (F2) $(+J53+J54)*N54/2$
 R54: (F2) $((+J53+J54)*N54/2)*(-((2*J54)+J53)/(J54+J53))*(N54/3)+N54+\text{PSUM}(N\#13, N53)$
 P55: (F2) $(+J54+J55)*N55/2$
 R55: (F2) $((+J54+J55)*N55/2)*(-((2*J55)+J54)/(J55+J54))*(N55/3)+N55+\text{PSUM}(N\#13, N54)$
 P57: (F2) $(+J55+L57)*N57/2$
 R57: (F2) $((+J55+L57)*N57/2)*(((2* L57)+J55)/(L57+J55))*(N57/3)+\text{PSUM}(N\#13, N56)$
 P59: (F2) $(+L57+L59)*N59/2$
 R59: (F2) $((+L57+L59)*N59/2)*(((2* L59)+L57)/(L59+L57))*(N59/3)+\text{PSUM}(N\#13, N58)$
 P60: (F2) $(+L59+L60)*N60/2$
 R60: (F2) $((+L59+L60)*N60/2)*(((2* L60)+L59)/(L60+L59))*(N60/3)+\text{PSUM}(N\#13, N59)$
 P61: (F2) $(+L60+L61)*N61/2$
 R61: (F2) $((+L60+L61)*N61/2)*(((2* L61)+L60)/(L61+L60))*(N61/3)+\text{PSUM}(N\#13, N60)$
 P62: (F2) $(+L61+L62)*N62/2$
 R62: (F2) $((+L61+L62)*N62/2)*(((2* L62)+L61)/(L62+L61))*(N62/3)+\text{PSUM}(N\#13, N61)$
 P63: (F2) $(+L62+L63)*N63/2$
 R63: (F2) $((+L62+L63)*N63/2)*(((2* L63)+L62)/(L63+L62))*(N63/3)+\text{PSUM}(N\#13, N62)$
 P64: (F2) $(+L63+L64)*N64/2$
 R64: (F2) $((+L63+L64)*N64/2)*(((2* L64)+L63)/(L64+L63))*(N64/3)+\text{PSUM}(N\#13, N63)$
 P65: (F2) $(+L64+L65)*N65/2$
 R65: (F2) $((+L64+L65)*N65/2)*(((2* L65)+L64)/(L65+L64))*(N65/3)+\text{PSUM}(N\#13, N64)$
 P66: (F2) $(+L65+L66)*N66/2$
 R66: (F2) $((+L65+L66)*N66/2)*(((2* L66)+L65)/(L66+L65))*(N66/3)+\text{PSUM}(N\#13, N65)$
 P67: (F2) $(+L66+L67)*N67/2$
 R67: (F2) $((+L66+L67)*N67/2)*(((2* L67)+L66)/(L67+L66))*(N67/3)+\text{PSUM}(N\#13, N66)$
 P68: (F2) $(+L67+L68)*N68/2$
 R68: (F2) $((+L67+L68)*N68/2)*(((2* L68)+L67)/(L68+L67))*(N68/3)+\text{PSUM}(N\#13, N67)$
 P69: (F2) $(+L68+L69)*N69/2$
 R69: (F2) $((+L68+L69)*N69/2)*(((2* L69)+L68)/(L69+L68))*(N69/3)+\text{PSUM}(N\#13, N68)$
 P70: (F2) $(+L69+L70)*N70/2$
 R70: (F2) $((+L69+L70)*N70/2)*(((2* L70)+L69)/(L70+L69))*(N70/3)+\text{PSUM}(N\#13, N69)$

PROGRAMA PARA EL CALCULO DE MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS AL

TRAMO 1 (0 → i)				TRAMO 2 (i → j)				TRAMO 3 (j → k)				
ordenados de a -	ordenados de a +	ancho(dx) in	Momento estático	ordenados de a -	ordenados de a +	ancho(dx) in	(A)	Momento estático	ordenados de a -	ordenados de a +	ancho(dx) in	Momento estático
	0.000			12.0					12.000			
	-1.320	24.0	-791.84	11.9		12.0	143.58	862.32	11.500		24.0	159632.00
	-2.880	24.0	-1964.08	11.7		12.0	141.90	256.72	10.800		24.0	174406.00
	-4.080	24.0	-5068.80	11.4		12.0	138.60	412.08	8.050		24.0	142822.40
	-5.120	24.0	-9323.52	10.9		12.0	133.68	5820.32	6.220		24.0	108820.80
	-6.000	24.0	-14453.76	10.3		12.0	127.08	6887.76	4.500		24.0	78451.12
	-6.720	24.0	-20183.04	9.5		12.0	118.86	7853.76	2.880		24.0	51995.52
	-7.280	24.0	-26234.08	8.6		12.0	109.02	8514.24	1.380		24.0	28759.68
	-7.680	24.0	-32332.80	7.6		12.0	97.50	8787.36				
	-7.920	24.0	-38206.32	6.6		9.0	64.62	4500.12		0.000	24.0	8876.16
	-8.000	24.0	-43560.96	5.3		15.0	90.23	10177.88				
				3.1		24.0	99.96	13301.76		-1.270	24.0	-7802.88
	-7.940	24.0	-48205.44	1.0		24.0	48.36	7641.52		-2.440	24.0	-21847.68
				0.0		12.0	5.88	1034.68		-3.500	24.0	-33308.16
										-4.440	24.0	-42579.20
	-7.770	24.0	-52039.68							-5.270	24.0	-48898.56
	-7.500	24.0	-54984.96	-0.9	12.0	-5.64	-1060.32			-6.000	24.0	-53200.00
	-7.110	24.0	-58222.40							-6.410	24.0	-56211.74
	-6.610	24.0	-61818.72	-2.7	24.0	-43.68	-8995.20			-7.110	24.0	-60270.72
	-6.000	24.0	-66320.32	-4.3	24.0	-64.24	-12984.48			-7.500	24.0	-64784.96
	-5.270	24.0	-71590.08	-5.8	24.0	-121.20	-30112.48			-7.770	24.0	-69579.04
	-4.840	24.0	-76578.72	-7.1	24.0	-181.32	-42684.72			-7.940	24.0	-74823.56
	-3.500	24.0	-82348.44	-8.2	24.0	-183.72	-55171.20					
	-2.440	24.0	-83409.92	-9.2	24.0	-209.52	-67732.40					
	-1.270	24.0	-81960.00	-10.1	24.0	-231.72	-80679.36					
	0.000	24.0	-7924.80	-10.8	24.0	-250.20	-93107.52					
				-11.3	24.0	-264.84	-104809.32	-7.960	24.0	-43668.48		
	1.380	24.0	9008.64	-11.7	24.0	-275.88	-115888.32	-7.690	24.0	-38298.24		
				-11.9	24.0	-283.32	-125805.12	-7.280	24.0	-32318.52		
				-12.0	24.0	-287.04	-134336.56	-6.720	24.0	-26181.12		
								-6.000	24.0	-20113.92		
	2.880	24.0	28903.68					-5.170	24.0	-14348.48		
	4.320	24.0	52151.04	-11.7	24.0	-283.32	-146204.16	-4.880	24.0	-27217.68		
	6.220	24.0	78810.24	-11.3	24.0	-275.88	-148993.92	-2.880	24.0	-19536.00		
	8.050	24.0	108976.48	-10.8	24.0	-264.84	-149395.20	-1.540	24.0	-10451.12		
	10.000	24.0	143049.60	-10.1	24.0	-250.20	-147150.72	0.000	24.0	-1477.84		
	11.500	24.0	176244.00	-9.2	24.0	-211.72	-141853.44					
	12.000	24.0	199680.00	-8.2	24.0	-209.52	-133302.72					
				-7.1	24.0	-183.72	-121310.40					
				-5.8	24.0	-154.32	-105417.28					
				-4.3	24.0	-121.20	-85979.68					
				-2.7	24.0	-84.24	-61741.44					
				-0.9	24.0	-43.68	-33106.56					
				0.0	12.0	-5.64	-4376.64					
					1.0	12.0	5.88	4833.44				
					3.1	24.0	48.36	38980.80				
					6.6	24.0	99.96	82873.92				
					10.9	15.0	90.23	76493.25				
					10.9	9.0	64.62	53246.70				
					9.5	12.0	97.50	84809.36				
					9.5	12.0	109.02	94166.52				
					10.3	12.0	118.86	106269.84				
					10.9	12.0	127.08	115141.92				
					11.4	12.0	133.68	122784.00				
					11.7	12.0	138.60	128902.08				
					11.9	12.0	141.70	133672.32				
					12.0	12.0	143.58	136976.16				

TOTALES	71623.68	TOTALES	-1033488.71	TOTALES	71623.68
---------	----------	---------	-------------	---------	----------

CONVERSION	41.47	CONVERSION	-598.44	CONVERSION	41.47
------------	-------	------------	---------	------------	-------

(M. ESTADÍSTICA DE PFZO. POR EI) / L	456.21	(M. ESTADÍSTICA DE PFZO. POR EI) / L	-4937.17	(M. ESTADÍSTICA DE PFZO. POR EI) / L	456.21
--------------------------------------	--------	--------------------------------------	----------	--------------------------------------	--------

MOMENTO ESTADISTICO DE j → i = -4932.62

(Es necesario cuando la viga es asimétrica)

Además de los datos de las ordenadas y abscisas del cable, se requieren también en la misma hoja electrónica los siguientes :

Longitud tramo 1 ; Longitud tramo 2 Longitud tramo n
Fuerza de presfuerzo.

Finalmente se requieren las flexibilidades segmentales de cada tramo de acuerdo a las condiciones de apoyo, las cuales se obtienen en forma similar al problema anterior.

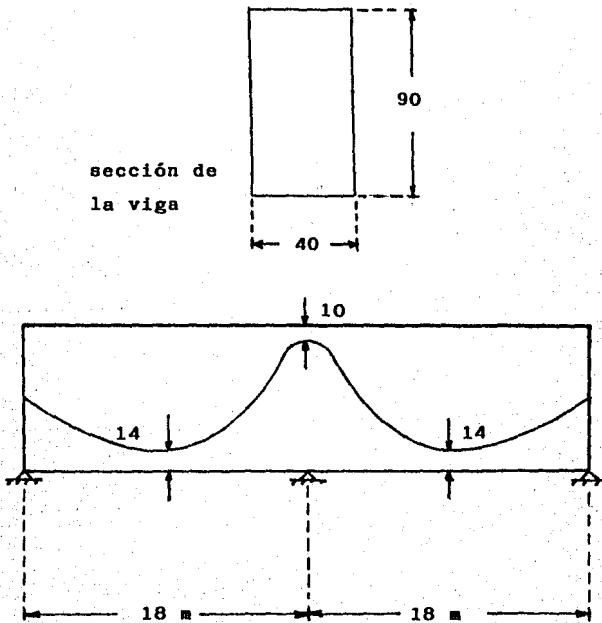
Para manejar de una manera más práctica estos valores de las flexibilidades es recomendable diseñar una hoja electrónica por cada cantidad de claros que se pueda manejar, lo cual no es muy problemático, ya que este paquete contiene una serie de comandos de gran versatilidad, que permiten copiar toda una tabla o partes de ella casi instantaneamente, y así manejar tablas para diferente número de claros en el mismo archivo de información.

La siguiente parte corresponde a los problemas de aplicación, los cuales dan una clara idea del manejo y la versatilidad antes mencionada de este programa, para tal fin se proponen cuatro problemas con diferente número de claros, partiendo desde 2 hasta 4 claros con longitudes diversas respecto a la geometría general de las vigas hiperestáticas.

EJEMPLOS DE APLICACION

Para los cuatro problemas siguientes, obtener los momentos hiperestáticos debidos al presfuerzo de acuerdo a las figuras que se muestran en cada uno de estos, así como los datos respectivos.

EJEMPLO No. 1) Viga simétrica de dos tramos, longitud de cada tramo 18 metros, fuerza de presfuerzo = 500 Ton.



TRAMO 1: (0 ---> i)				
(Viga simétrica - 2 tramos)				
ordenadas de + a -	ordenadas de - a +	ancho (dx) (mts)	Area	Momento estático
	0.000			
	-0.050	0.50	-0.0125	-0.0042
	-0.100	0.50	-0.0375	-0.0292
	-0.140	0.50	-0.0600	-0.0758
	-0.175	0.50	-0.0788	-0.1385
	-0.202	0.50	-0.0943	-0.2126
	-0.235	0.50	-0.1093	-0.3011
	-0.240	0.50	-0.1238	-0.4027
	-0.270	0.50	-0.1325	-0.4971
	-0.287	0.50	-0.1393	-0.5922
	-0.295	0.50	-0.1455	-0.6913
	-0.307	0.50	-0.1505	-0.7904
	-0.310	0.50	-0.1543	-0.8870
-0.300		0.50	-0.1525	-0.8771
-0.290		0.50	-0.1475	-0.9221
-0.285		0.50	-0.1438	-0.9704
-0.275		0.50	-0.1400	-1.0152
-0.270		0.50	-0.1363	-1.0560
-0.258		0.50	-0.1320	-1.0893
-0.245		0.50	-0.1258	-1.1006
-0.235		0.50	-0.1200	-1.1102
-0.210		0.50	-0.1113	-1.0852
-0.199		0.50	-0.1023	-1.0483
-0.180		0.50	-0.0948	-1.0190
-0.165		0.50	-0.0863	-0.9706
-0.135		0.50	-0.0750	-0.8819
-0.115		0.50	-0.0625	-0.7660
-0.080		0.50	-0.0488	-0.6223
-0.050		0.50	-0.0325	-0.4313
-0.020		0.50	-0.0175	-0.2413
0.000		0.20	-0.0020	-0.0283
	0.035	0.30	0.0053	0.0756
	0.090	0.50	0.0313	0.4621
	0.145	0.50	0.0588	0.8971
	0.225	0.50	0.0925	1.4585
	0.310	0.50	0.1338	2.1752
	0.340	0.50	0.1625	2.7225
	0.350	0.50	0.1725	2.9758
		18.00	-2.3120	-9.090

Flexibilidades

$$L/3EI = 18/3EI = 6/EI$$

Momento Estático

$$-9.090 * (FZA. DE PFZO.) * EI / L$$

$$\text{Momento Estático} = -252.5 \text{ T/m}$$

Solución

$$\delta(X_i) + (-252.5) = 0$$

$$X_i = 225.5 / 6$$

$$X_i = 42.083 \text{ T-m}$$

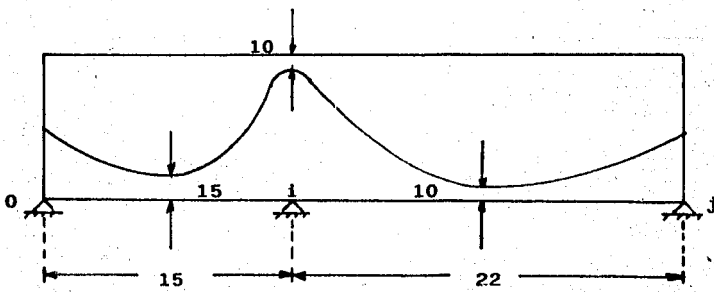
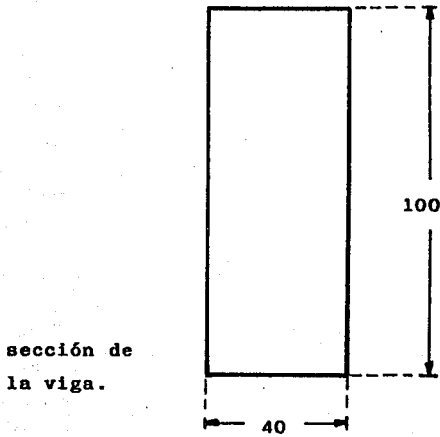
EJEMPLO No. 2) Viga asimétrica de dos claros

Longitud tramo 1 = 15 m.

Longitud tramo 2 = 22 m.

Fuerza de presfuerzo = 500 ton.

Las ordenadas del cable son a cada 0.50 m. según la tabla del programa.



TRAMO 1				TRAMO 2				
(0 → i)				(i → j)				
ordenados	ordenados	ancho(dx)	Momento	ordenados	ordenados	ancho(dx)	Momento	
de + a -	de - a +	(mts)	estático	de + a -	de - a +	(mts)	estático	
Area	Area			Area	Area			
	0.000			0.400				
	-0.070	0.50	-0.0175	-0.0058	0.389	0.50	0.1973	4.3890
	-0.131	0.50	-0.0503	-0.0390	0.360	0.50	0.1873	4.0733
	-0.188	0.50	-0.0798	-0.1009	0.310	0.50	0.1675	3.5604
	-0.230	0.50	-0.1045	-0.1838	0.250	0.50	0.1400	2.9063
	-0.265	0.50	-0.1238	-0.2792	0.198	0.50	0.1120	2.2691
	-0.293	0.50	-0.1395	-0.3842	0.145	0.50	0.0858	1.6947
	-0.318	0.50	-0.1528	-0.4970	0.095	0.50	0.0600	1.1560
	-0.332	0.50	-0.1625	-0.6097	0.050	0.50	0.0363	0.6806
	-0.342	0.50	-0.1685	-0.7163	0.000	0.50	0.0125	0.2292
	-0.350	0.50	-0.1730	-0.8219				
					-0.040	0.50	-0.0100	-0.1767
	-0.349	0.50	-0.1748	-0.8301				
					-0.080	0.50	-0.0300	-0.5167
	-0.343	0.50	-0.1730	-0.9084	-0.120	0.50	-0.0500	-0.8367
	-0.340	0.50	-0.1708	-0.9819	-0.158	0.50	-0.0695	-1.1286
	-0.331	0.50	-0.1678	-1.0486	-0.195	0.50	-0.0883	-1.3892
	-0.322	0.50	-0.1633	-1.1021	-0.226	0.50	-0.1053	-1.6044
	-0.310	0.50	-0.1580	-1.1458	-0.260	0.50	-0.1215	-1.7914
	-0.296	0.50	-0.1515	-1.1744	-0.289	0.50	-0.1373	-1.9552
	-0.275	0.50	-0.1428	-1.1781	-0.315	0.50	-0.1510	-2.0757
	-0.250	0.50	-0.1313	-1.1490	-0.339	0.50	-0.1635	-2.1659
	-0.218	0.50	-0.1170	-1.0829	-0.357	0.50	-0.1740	-2.2181
	-0.178	0.50	-0.0990	-0.9661	-0.371	0.50	-0.1820	-2.2292
	-0.127	0.50	-0.0763	-0.7826	-0.383	0.50	-0.1885	-2.2146
	-0.070	0.50	-0.0493	-0.5306	-0.393	0.50	-0.1940	-2.1823
	0.000	0.50	-0.0175	-0.1983	-0.400	0.50	-0.1983	-2.1310
	0.080	0.50	0.0200	0.2367	-0.399	0.50	-0.1998	-2.0475
	0.177	0.50	0.0643	0.7891	-0.392	0.50	-0.1978	-1.9282
	0.300	0.50	0.1193	1.5230	-0.390	0.50	-0.1955	-1.8084
	0.370	0.50	0.1675	2.2298	-0.380	0.50	-0.1925	-1.6846
	0.392	0.50	0.1905	2.6198	-0.370	0.50	-0.1875	-1.5471
	0.400	0.50	0.1980	2.8217	-0.355	0.50	-0.1813	-1.4050
					-0.339	0.50	-0.1735	-1.2582
					-0.320	0.50	-0.1648	-1.1125
					-0.300	0.50	-0.1550	-0.9692
					-0.278	0.50	-0.1445	-0.8313
					-0.255	0.50	-0.1333	-0.7000
					-0.230	0.50	-0.1213	-0.5765
					-0.206	0.50	-0.1090	-0.4638
					-0.180	0.50	-0.0965	-0.3624
					-0.150	0.50	-0.0825	-0.2688
					-0.122	0.50	-0.0680	-0.1876
					-0.092	0.50	-0.0535	-0.1210
					-0.060	0.50	-0.0380	-0.0672
					-0.029	0.50	-0.0223	-0.0285
					0.000	0.50	-0.0073	-0.0060
		15.00	-2.205	-6.506		22.00	-3.388	-21.031

* SOLUCION *

FLEXIBILIDADES:

$$f_{ii} \text{ (izq)} + f_{ii} \text{ (der)} = F_i$$

$$\frac{15}{3EI} + \frac{22}{3EI} = \frac{37}{3EI}$$

Momento estático:

$$-\frac{6.506}{EI} * \frac{550 EI}{15} + \left(-\frac{19.353}{EI} * \frac{550 EI}{22} \right)$$

$$\text{Momento estático} = - 238,55 - 483,825$$

$$\text{Momento estático} = - 722,37 \text{ T - m.}$$

Solución:

$$\frac{37}{3EI} (X_i) + (- 722,37) = 0$$

$$X_i = \frac{722,37 * 3}{37} = 58,57 \text{ T - m.}$$

$$\text{Momento hiperestático} = 58,57 \text{ T - m.}$$

EJEMPLO No. 3) Viga asimétrica de tres claros

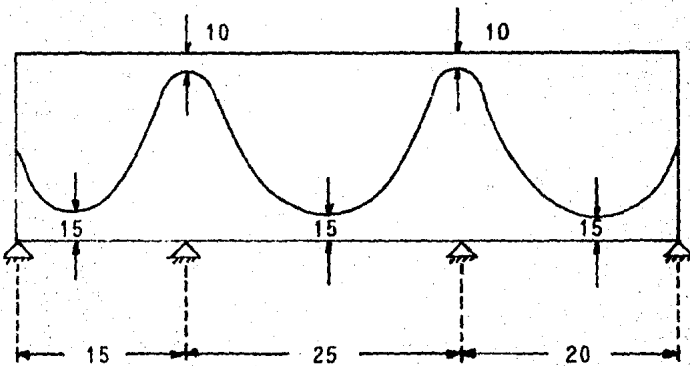
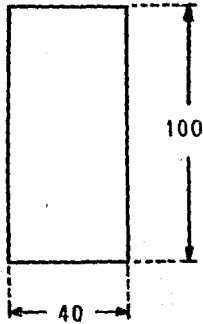
Longitud tramo 1 = 15 m.

Longitud tramo 2 = 25 m.

Longitud tramo 3 = 20 m.

Fuerza de presfuerzo = 500 Ton.

sección de
la viga.



PROGRAMA PARA EL CALCULO DE MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS

TRAMO 1 (0 ---> i)				TRAMO 2 (i ---> j)				TRAMO 3 (j ---> K)				
ordenados de f a -	ordenados de a f	ancho(dx) in	Momento estático	ordenados de f a -	ordenados de a f	ancho(dx) in	Momento estático (A)	ordenados de f a -	ordenados de a f	ancho(dx) in	Momento estático	
	0.000			0.385				0.400				
	-0.070	0.5	-0.01	0.330				0.370			0.15	
	-0.125	0.5	-0.04	0.268		0.5	0.18	0.05		0.5	0.14	
	-0.185	0.5	-0.10	0.200		0.5	0.12	0.15		0.5	0.22	
	-0.220	0.5	-0.18	0.140		0.5	0.09	0.15		0.5	0.28	
	-0.265	0.5	-0.27	0.098		0.5	0.06	0.13		0.5	0.31	
	-0.295	0.5	-0.39	0.045		0.5	0.04	0.10		0.5	0.31	
	-0.320	0.5	-0.50	0.000		0.5	0.01	0.04		0.5	0.30	
	-0.335	0.5	-0.61							0.5	0.28	
	-0.348	0.5	-0.73		-0.050	0.5	-0.01	-0.05		0.5	0.25	
	-0.350	0.5	-0.83							0.5	0.18	
	-0.346	0.5	-0.91		-0.094	0.5	-0.04	-0.15				
					-0.130	0.5	-0.06	-0.27				
					-0.175	0.5	-0.08	-0.40		0.000	0.5	0.23
					-0.200	0.5	-0.09	-0.54				
					-0.225	0.5	-0.11	-0.66		-0.050	0.5	-0.08
	-0.344	0.5	-0.99		-0.260	0.5	-0.12	-0.82		-0.077	0.5	-0.21
	-0.340	0.5	-1.07		-0.280	0.5	-0.14	-0.98		-0.110	0.5	-0.34
	-0.335	0.5	-1.14		-0.300	0.5	-0.15	-1.12		-0.135	0.5	-0.48
	-0.325	0.5	-1.20		-0.318	0.5	-0.15	-1.27		-0.165	0.5	-0.62
	-0.320	0.5	-1.25		-0.325	0.5	-0.16	-1.41		-0.200	0.5	-0.80
	-0.305	0.5	-1.29		-0.330	0.5	-0.16	-1.51		-0.230	0.5	-1.00
	-0.295	0.5	-1.32		-0.345	0.5	-0.17	-1.65		-0.250	0.5	-1.17
	-0.290	0.5	-1.28		-0.350	0.5	-0.17	-1.78		-0.275	0.5	-1.35
	-0.280	0.5	-1.23							-0.300	0.5	-1.55
	-0.270	0.5	-1.16							-0.320	0.5	-1.74
	-0.170	0.5	-1.04		-0.348	0.5	-0.09	-0.93		-0.335	0.5	-1.93
	-0.158	0.5	-0.96							-0.342	0.5	-2.07
	-0.148	0.5	-0.89		-0.346	0.5	-0.17	-1.95				
	-0.140	0.5	-0.82		-0.343	0.5	-0.17	-2.02				
	0.000	0.5	-0.22		-0.338	0.5	-0.17	-2.09		-0.350	0.5	-2.21
					-0.330	0.5	-0.17	-2.13				
					-0.318	0.5	-0.16	-2.15		-0.346	0.5	-2.31
					-0.300	0.5	-0.15	-2.12		-0.340	0.5	-2.36
					-0.288	0.5	-0.15	-2.10		-0.330	0.5	-2.39
					-0.270	0.5	-0.14	-2.06		-0.315	0.5	-2.38
					-0.250	0.5	-0.13	-1.98		-0.300	0.5	-2.35
					-0.220	0.5	-0.12	-1.85		-0.275	0.5	-2.27
					-0.200	0.5	-0.11	-1.71		-0.258	0.5	-2.17
					-0.165	0.5	-0.09	-1.53		-0.225	0.5	-2.03
					-0.140	0.5	-0.08	-1.32		-0.200	0.5	-1.84
					-0.100	0.5	-0.06	-1.07		-0.164	0.5	-1.62
					-0.070	0.5	-0.04	-0.78		-0.130	0.5	-1.34
					-0.038	0.5	-0.03	-0.51		-0.095	0.5	-1.04
					0.000	0.5	-0.01	-0.18		-0.048	0.5	-0.64
										0.000	0.5	-0.24
					0.045	0.5	0.01	0.22				
					0.090	0.5	0.03	0.68				
					0.135	0.5	0.06	1.17				
					0.184	0.5	0.08	1.70				
					0.235	0.5	0.11	2.29				
					0.300	0.5	0.13	2.97				
					0.342	0.5	0.18	3.65				
					0.370	0.5	0.18	4.14				
					0.393	0.5	0.19	4.53				
					0.400	0.5	0.20	4.81				
TOTALES			-15.20	TOTALES			-14.18	TOTALES			-22.24	

CALCULO DE MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS AL PRESFUERZO

TRAMO 2 (i --> j)				TRAMO 3 (j --> k)			
ordenadas de - a -	ancho(dx) in	Momento estático (A)	Momento estático	ordenadas de - a -	ordenadas de - o - t	ancho(dx) in	Momento estático
	0.5	0.18	0.05	0.400		0.5	0.15
	0.5	0.15	0.11	0.390		0.5	0.14
	0.5	0.12	0.15	0.370		0.5	0.12
	0.5	0.09	0.15	0.332		0.5	0.28
	0.5	0.06	0.13	0.295		0.5	0.31
	0.5	0.04	0.10	0.250		0.5	0.31
	0.5	0.01	0.04	0.205		0.5	0.30
				0.165		0.5	0.28
0.050	0.5	-0.01	-0.05	0.135		0.5	0.25
				0.100		0.5	0.19
				0.060		0.5	0.11
				0.022		0.5	0.11
0.094	0.5	-0.04	-0.15		0.000	0.5	0.23
0.130	0.5	-0.04	-0.27				
0.175	0.5	-0.08	-0.40				
0.200	0.5	-0.09	-0.54				
0.225	0.5	-0.11	-0.66	-0.050	0.5	-0.08	-0.08
0.260	0.5	-0.12	-0.82	-0.077	0.5	-0.21	-0.21
0.280	0.5	-0.14	-0.98	-0.110	0.5	-0.34	-0.34
0.300	0.5	-0.15	-1.12	-0.135	0.5	-0.48	-0.48
0.318	0.5	-0.15	-1.27	-0.165	0.5	-0.62	-0.62
0.325	0.5	-0.16	-1.41	-0.200	0.5	-0.80	-0.80
0.330	0.5	-0.16	-1.51	-0.230	0.5	-1.00	-1.00
0.345	0.5	-0.17	-1.65	-0.250	0.5	-1.17	-1.17
0.350	0.5	-0.17	-1.78	-0.278	0.5	-1.35	-1.35
				-0.300	0.5	-1.55	-1.55
	0.5	-0.09	-0.93	-0.320	0.5	-1.74	-1.74
				-0.335	0.5	-1.92	-1.92
				-0.342	0.5	-2.07	-2.07
	0.5	-0.17	-1.95				
	0.5	-0.17	-2.02				
	0.5	-0.17	-2.09	-0.350	0.5	-2.21	-2.21
	0.5	-0.17	-2.13				
	0.5	-0.16	-2.15	-0.346	0.5	-2.31	-2.31
	0.5	-0.15	-2.12	-0.340	0.5	-2.36	-2.36
	0.5	-0.15	-2.10	-0.330	0.5	-2.39	-2.39
	0.5	-0.14	-2.06	-0.315	0.5	-2.38	-2.38
	0.5	-0.13	-1.99	-0.300	0.5	-2.35	-2.35
	0.5	-0.12	-1.89	-0.278	0.5	-2.27	-2.27
	0.5	-0.11	-1.71	-0.259	0.5	-2.17	-2.17
	0.5	-0.09	-1.53	-0.228	0.5	-2.03	-2.03
	0.5	-0.08	-1.32	-0.200	0.5	-1.84	-1.84
	0.5	-0.06	-1.07	-0.164	0.5	-1.62	-1.62
	0.5	-0.04	-0.78	-0.130	0.5	-1.34	-1.34
	0.5	-0.03	-0.51	-0.095	0.5	-1.06	-1.06
	0.5	-0.01	-0.18	-0.048	0.5	-0.69	-0.69
				0.000	0.5	-0.24	-0.24
0.045	0.5	0.01	0.22				
0.090	0.5	0.03	0.68				
0.135	0.5	0.06	1.17				
0.186	0.5	0.08	1.70				
0.235	0.5	0.09	2.29				
0.300	0.5	0.11	2.97				
0.360	0.5	0.12	3.65				
0.342	0.5	0.14	3.65				
0.370	0.5	0.18	4.14				
0.393	0.5	0.19	4.53				
0.400	0.5	0.20	4.81				
T O T A L E S :			-14.18	T O T A L E S :			-22.20
			-283.52				-555.08

DATOS :

LONGITUD TRAMO 1 = 15.0
 LONGITUD TRAMO 2 = 25.0
 LONGITUD TRAMO 3 = 20.0
 FUERZA DE PRESFUERZO = 500.0

FLEXIBILIDADES :

Fii(izq)= 5.0 / EI Fjj(der)= 6.7 / EI
 + +
 Fii(der)= 8.3 / EI Fjj(izq)= 8.3 / EI

F i = 13.3 F j = 15.0
 F i j = 4.2 F j i = 4.2

SISTEMA MATRICIAL :

13.3 4.2 X1 -790.3
 + = 0
 4.2 15.0 Xj -838.6

! A !
 0.073004 -0.02281 790.3 X1
 =
 -0.02281 0.082129 838.6 Xj

MOMENTO HIPERESTATICO EN i = Xi = 38.6 T-m

MOMENTO HIPERESTATICO EN j = Xj = 50.8 T-m

EJEMPLO No 4) Viga asimétrica de cuatro claros

Longitud tramo 1 = 10 m.

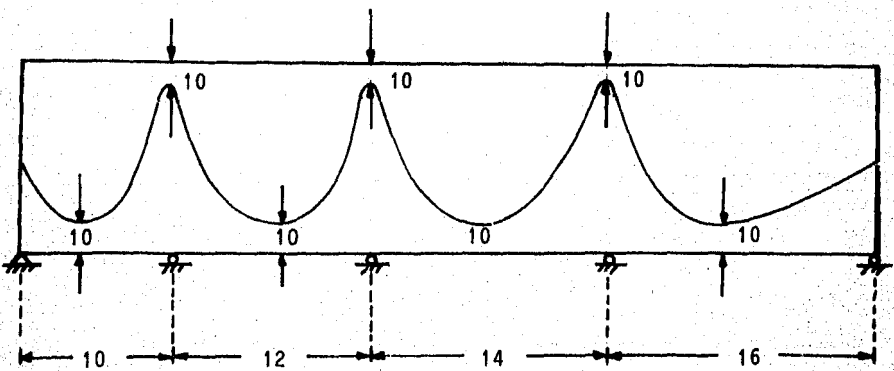
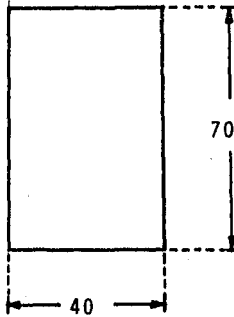
Longitud tramo 2 = 12 m.

Longitud tramo 3 = 14 m.

Longitud tramo 4 = 16 m.

Fuerza de presfuerzo = 500 Ton.

sección de
la viga



PROGRAMA PARA EL CALCULO DE MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS AL PR

TRAMO 1 (0 → i)				TRAMO 2 (i → j)				TRAMO 3 (j → k)						
ordenados de i a j	ordenados de a a b	anchos (dx)	Momento estático	ordenados de i a j	ordenados de a a b	anchos (dx)	(A)	Momento estático	ordenados de j a k	ordenados de a a b	anchos (dx)	(A)	Momento estático	ordenados de i a j
0.000				0.250					0.250					0.225
-0.065	0.5	-0.01		0.160			0.10	0.03	0.240			0.5	0.12	0.03
-0.105	0.5	-0.03		0.070			0.05	0.05	0.200			0.5	0.11	0.08
-0.150	0.5	-0.08		0.000			0.05	0.02	0.140			0.5	0.09	0.11
-0.190	0.5	-0.15						-0.04	0.085			0.5	0.05	0.09
-0.220	0.5	-0.23			-0.090	0.5	-0.02	-0.04	0.080			0.5	0.02	0.04
-0.240	0.5	-0.32												0.050
-0.248	0.5	-0.40			-0.150	0.5	-0.06	-0.13		-0.075	0.5	-0.02	-0.05	0.020
-0.250	0.5	-0.47			-0.195	0.5	-0.09	-0.24						0.000
					-0.225	0.5	-0.11	-0.34		-0.125	0.5	-0.05	-0.16	
					-0.246	0.5	-0.12	-0.44		-0.165	0.5	-0.07	-0.27	
					-0.250	0.5	-0.12	-0.53		-0.200	0.5	-0.09	-0.39	
-0.247	0.5	-0.53			0.200	0.5	-0.09	-0.24		-0.218	0.5	-0.10	-0.50	
										-0.240	0.5	-0.11	-0.60	
-0.238	0.5	-0.58								-0.247	0.5	-0.12	-0.70	
-0.217	0.5	-0.60			-0.249	0.5	-0.12	-0.59		-0.250	0.5	-0.12	-0.70	
-0.190	0.5	-0.59												
-0.150	0.5	-0.53			-0.248	0.5	-0.12	-0.65		-0.249	0.5	-0.12	-0.84	
-0.120	0.5	-0.46			-0.235	0.5	-0.12	-0.69		-0.240	0.5	-0.12	-0.89	
-0.070	0.5	-0.35			-0.220	0.5	-0.11	-0.71		-0.230	0.5	-0.12	-0.91	
0.000	0.5	-0.14			-0.180	0.5	-0.10	-0.68		-0.210	0.5	-0.11	-0.91	
					-0.160	0.5	-0.09	-0.62		-0.185	0.5	-0.10	-0.86	
					-0.100	0.5	-0.07	-0.51		-0.160	0.5	-0.09	-0.80	
					-0.070	0.5	-0.04	-0.35		-0.140	0.5	-0.07	-0.68	
					0.000	0.5	-0.02	-0.15		-0.120	0.5	-0.05	-0.51	-0.247
										-0.078	0.5	-0.03	-0.32	-0.241
										-0.078	0.5	-0.01	-0.11	-0.230
														-0.220
														0.000
0.070	0.5	0.15			0.060	0.5	0.02	0.14		0.070	0.5	0.02	0.20	-0.196
														-0.172
0.150	0.5	0.48			0.140	0.5	0.05	0.49		0.150	0.5	0.06	0.67	-0.150
0.230	0.5	0.88			0.200	0.5	0.09	0.67		0.245	0.5	0.11	1.51	-0.125
0.250	0.5	1.17			0.230	0.5	0.11	1.16		0.250	0.5	0.12	1.70	-0.096
					0.250	0.5	0.12	1.35						-0.053
														0.000
TOTALES			-2.76	TOTALES			-0.75	-2.58	TOTALES			-1.11	-9.72	
Longitud 10.00				Longitud 12.00					Longitud 14.00					Longitud
				momento estático de i a j = -2.58					momento estático de j a k = -9.72					
				momento estático de j a i = -6.47					momento estático de k a j = -5.87					

FUERZA DE PRESFUERZO = 500.0

FLEXIBILIDADES

$$F_i = F_{ii}(zq) + F_{ii}(der)$$

$$F_i = 10/3EI + 12/3EI = 22/3EI$$

$$F_j = 12/3EI + 14/3EI = 26/3EI$$

$$F_k = 14/3EI + 16/3EI = 30/3EI$$

$$F_{ij} = F_{ji} = 12/6EI$$

$$F_{jk} = F_{kj} = 14/6EI$$

SISTEMA MATRICIAL

7.33333	2.00000	0.00000	Xi		-245.283
2.00000	8.66667	2.33333	Xj	+	-616.815
0.00000	2.33333	10.00000	Xk		-822.929

OBTENCION DE LA INVERSA

DETERMINANTE |A| = 555.6

MOMENTO HIPERESTATICO EN i = 13.66
 MOMENTO HIPERESTATICO EN j = 47.24
 MOMENTO HIPERESTATICO EN k = 69.21

PARA EL CALCULO DE MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS AL PRESFUERZO

TRAMO 2 (i → j)				TRAMO 3 (j → k)				TRAMO 4 (k → l)								
ordenados de + a -	ordenados de - a +	anchos (dx) in	(A)	Momento estático	ordenados de + a -	ordenados de - a +	anchos (dx) in	(A)	Momento estático	ordenados de + a -	ordenados de - a +	anchos (dx) in	Momento estático			
0.250					0.250					0.225						
0.160		0.5	0.10	0.03	0.240		0.5	0.12	0.03	0.190		0.5	0.08			
0.070		0.5	0.06	0.05	0.200		0.5	0.11	0.08	0.140		0.5	0.06			
0.000		0.5	0.02	0.02	0.140		0.5	0.09	0.11	0.095		0.5	0.07			
					0.065		0.5	0.05	0.09	0.050		0.5	0.06			
					0.000		0.5	0.02	0.04	0.020		0.5	0.04			
	-0.090	0.5	-0.02	-0.04						0.000		0.25	0.01			
	-0.150	0.5	-0.06	-0.13		-0.075	0.5	-0.02	-0.05			-0.022	0.25	-0.01		
	-0.195	0.5	-0.09	-0.24		-0.125	0.5	-0.05	-0.16							
	-0.225	0.5	-0.11	-0.34		-0.165	0.5	-0.07	-0.27			-0.050	0.5	-0.06		
	-0.246	0.5	-0.12	-0.44		-0.200	0.5	-0.09	-0.39			-0.078	0.5	-0.12		
	-0.250	0.5	-0.12	-0.53		-0.218	0.5	-0.10	-0.50			-0.110	0.5	-0.20		
					-0.249		0.5	-0.11	-0.60			-0.135	0.5	-0.29		
	-0.249	0.5	-0.12	-0.59		-0.240	0.5	-0.12	-0.70			-0.160	0.5	-0.39		
						-0.247	0.5	-0.12	-0.78			-0.175	0.5	-0.48		
	-0.248	0.5	-0.12	-0.65		-0.250	0.5	-0.12	-0.78			-0.197	0.5	-0.58		
	-0.235	0.5	-0.12	-0.69								-0.216	0.5	-0.69		
	-0.220	0.5	-0.11	-0.71	-0.249		0.5	-0.12	-0.84			-0.223	0.5	-0.80		
	-0.190	0.5	-0.10	-0.68								-0.236	0.5	-0.89		
	-0.160	0.5	-0.09	-0.62	-0.240		0.5	-0.12	-0.89			-0.242	0.5	-0.99		
	-0.100	0.5	-0.07	-0.51	-0.230		0.5	-0.12	-0.91			-0.248	0.5	-1.07		
	-0.070	0.5	-0.04	-0.35	-0.210		0.5	-0.11	-0.91							
	0.000	0.5	-0.02	-0.15	-0.185		0.5	-0.10	-0.86							
					-0.160		0.5	-0.09	-0.80			-0.250	0.5	-1.15		
	0.060	0.5	0.02	0.14	-0.120		0.5	-0.07	-0.68							
					-0.078		0.5	-0.05	-0.51	-0.247		0.5	-1.21			
	0.140	0.5	0.05	0.49	-0.040		0.5	-0.03	-0.32	-0.241		0.5	-1.25			
	0.200	0.5	0.09	0.87	0.000		0.5	-0.01	-0.11	-0.230		0.5	-1.27			
	0.230	0.5	0.11	1.16						-0.220		0.5	-1.27			
	0.250	0.5	0.12	1.35						-0.210		0.5	-1.26			
						0.070	0.5	0.02	0.20	-0.196		0.5	-1.24			
										-0.172		0.5	-1.17			
						0.150	0.5	0.06	0.67	-0.150		0.5	-1.07			
						0.210	0.5	0.09	1.15	-0.125		0.5	-0.95			
						0.245	0.5	0.11	1.51	-0.096		0.5	-0.79			
						0.250	0.5	0.12	1.70	-0.055		0.5	-0.50			
										0.000		0.5	-0.21			
T O T A L E S				-0.75	-2.58	T O T A L E S				-1.11	-9.72	T O T A L E S				-19.63
Longitud 12.00				Longitud 14.00				Longitud 16.00								
momento estático de j a i = -2.58				momento estático de j a k = -9.72												
momento estático de j a i = -6.47				momento estático de k a j = -5.87												

FUERZA DE PRESFUERZO = 500.0

OBTENCION DE LA INVERSA

SISTEMA MATRICIAL

DETERMINANTE |A| = 555.6296

$$\begin{bmatrix} 7.33333 & 2.00000 & 0.00000 \\ 2.00000 & 8.64667 & 2.33333 \\ 0.00000 & 2.33333 & 10.00000 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix} -245.283 \\ -616.815 \\ -822.929 \end{bmatrix}
 = 0
 \quad ; \quad
 A^{-1} =
 \begin{bmatrix} 0.14618 & -0.03599 & 0.00000 \\ -0.03599 & 0.13198 & -0.03079 \\ 0.00000 & -0.03079 & 0.10719 \end{bmatrix}$$

MOMENTO HIPERESTATICO EN i = 13.66

MOMENTO HIPERESTATICO EN j = 47.24

MOMENTO HIPERESTATICO EN k = 69.21

CONCLUSIONES

ERRORES

El cálculo de los momentos hiperestáticos por medio de un programa de computadora permite manejar los errores de aproximación hasta el grado deseado y reduce prácticamente a cero la probabilidad de errores en el cálculo. Es muy importante tener siempre presentes los conceptos básicos, para que de esta manera se pueda evitar un error simple, el cual si puede aportar consecuencias notables, uno de los errores más comunes se presenta en el manejo de unidades donde hay que procurar siempre unificarlas, ya que de esta manera se evitan los factores de conversión y se puede tener una idea más clara acerca de la veracidad del resultado.

VENTAJAS

Como puede observarse en el desarrollo de la tesis, el manejar las soluciones de ingeniería por medio de programación, permite al diseñador una mayor capacidad comparativa entre diferentes soluciones, así como optimizar el tiempo ya que no tiene que preocuparse por revisar la parte aritmética y algebraica, las cuales suelen ocupar gran parte del tiempo del diseñador.

Otra de las ventajas es la factibilidad actual de utilización de microcomputadoras y programas para estas, lo que está produciendo un cambio radical en los procesos de análisis y diseño en todas las ramas de la ingeniería y la ciencia en general. La utilización de programas como el de esta tesis pretende formar parte de este proceso de cambio que esta actualmente muy al alcance del profesionista. En el caso del concreto presforzado, es aún mayor la aplicación de computadores, debido a la tendencia a estandarizar que se tiene en este tipo de estructuras.

TEORIA

El desarrollo de este tipo de trabajos, permite profundizar en el estudio teórico general, buscando el objetivo común en ingeniería que es la optimización en todo el sentido de la palabra. En este caso se ha buscado desarrollar un programa especialmente para vigas, pero con el mayor alcance posible, facilitando el análisis para cualquier perfil del tendón de presfuerza, teniendo de esta manera mayor oportunidad de diseñar empleando para varias alternativas el menor tiempo.

Para lograr ubicarse en el campo teórico es necesario determinar los alcances del trabajo realizado ya que de esta manera tendrá una utilización específica y a pesar de no abarcar todos los casos prácticos, puede servir como modelo para otro tipo de cálculos muy comunes en la práctica profesional.

Uno de los aspectos teóricos que cabe reafirmar es la utilización de los métodos de rigideces y flexibilidades, la que depende del problema particular a resolver en cuanto al tipo de indeterminación que pueda presentar. Aquí sólo se desarrollo ampliamente el uso del método de flexibilidad en forma matricial, pero no dejando de reconocer la necesidad de utilización del método de rigidez en muchos de los casos probables a resolver.

Como último comentario respecto a la teoría de este trabajo quisiera señalar en forma especial, la importancia que tiene para el estudiante de ingeniería visualizar la gran diferencia que debemos afrontar entre la aplicación teórica ante un problema didáctico y un problema práctico, en este caso se

pudo apreciar claramente en la geometría del cable sobre los apoyos intermedios al aplicar el método de las cargas equivalentes.

GENERAL

Finalmente, solo me queda desear que este trabajo aporte algunas bases para el mayor conocimiento e integración en el uso de vigas continuas de concreto presforzado, las cuales han demostrado ventajas notables respecto a las vigas simples de concreto reforzado en varios aspectos como son: vanos mayores; economía en materiales en función de la calidad del diseño; rigidez y resistencia así como ductibilidad y resistencia. Estas ventajas dependerán directamente del estudio y desarrollo de técnicas que permitan la posibilidad de calcular elementos continuos de una forma más eficiente y así poder valorizar las diferentes alternativas para un mismo problema a resolver, lo que hasta ahora ha significado la labor más importante del ingeniero.

BIBLIOGRAFIA

- 1) NILSON ARTHUR H. Diseño de estructuras de concreto presforzado
Ed. Limusa, México, 1982.

- 2) KHACHATURIAN N. Concreto presforzado.
GURFINKEL G. Ed. Diana, México, 1979.

- 3) GHALI A. Análisis estructural.
NEVILLE A.M. Ed. Diana, México, 1983.

- 4) CASTILLO M.H. Análisis y diseño estructural.
Ed. Representaciones y servicios de
ingeniería, S.A., México, 1973.

- 5) TUMA J. Análisis estructural.
Ed. Mc.Graw.Hill, México, 1973.

- 6) TUMA J. Análisis estructural avanzado.
MUNSHI R.K. Ed. Mc.Graw.Hill, México, 1974.