

**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**

---

**RESONANCIA EN TUBERIAS  
DE POZOS GEOTERMICOS**



**T E S I S**

**P R E S E N T A D A  
PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
POR**

**PEDRO SANCHEZ UPTON**

**MEXICO, D. F**

**1988**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

PAC .

1	INTRODUCCION	1
2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	8
3	MEDICION DE LA FRECUENCIA DE OSCILACION	20
4	FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACION DE LA TUBERIA	28
	4.1 Deducción de la ecuación que determina la frecuencia natural en una tubería en cantiliver	29
	4.2 Frecuencias naturales de tuberías para diferentes tipos de apoyos	40
	4.3 Determinación de la frecuencia natural de la tubería de vapor simplificada en tramos idealizados	41
	4.4 Resonancia acústica de un gas dentro de un tubo	49
5	FLUJO COMPRESIBLE EN UNA PLACA ORIFICIO	56
	5.1 Idealización del esquema real	57
	5.2 Una placa orificio como tobera	58
	5.3 Descripción del caso de un tubo recto con fricción	59
	5.4 Deducción de las tres ecuaciones básicas en función del número de Mach (M)	61
	5.5 Aplicación sencilla de las tres ecuaciones a una tobera convergente divergente - (TCD) isoentrópica	73
	5.6 Deducción de las propiedades "x", "y" en una onda de choque normal	96
	5.7 Caso tubo adiabático con fricción (Flujo de Fanno)	100

5.8	Modos de operación que pueden darse en una tobera con un tubo con fricción	112
5.9	Programa de computadora	121
6	RESULTADOS	132
6.1	Medición experimental de la frecuencia de las oscilaciones	132
6.2	Cálculo de las frecuencias naturales de los tramos del arreglo considerados como viga elástica	133
6.3	Cálculo de las frecuencias acústicas de algunos tramos	135
6.4	Origen de las perturbaciones periódicas (detección del excitador)	136
6.5	Determinación de la periodicidad de la excitación	146
7	CONCLUSIONES	148
8	AGRADECIMIENTOS	151
9	REFERENCIAS	153

LISTA DE FIGURAS

PAG.

2-1	CURVA CARACTERISTICA DE PRODUCCION DEL POZO A-2	9
2-2	DOS VISTAS DEL POZO A-2 MOSTRANDO SEPARADOR Y LINEA DE ESCAPE DEL VAPOR	10
2-3	ARREGLO ESQUEMATICO Y VISTA EN PLANTA DEL POZO A-2	11
2-4	DIMENSIONES DE LA TUBERIA DE VAPOR	13
2-5	DETALLE DE LA PLACA ORIFICIO Y SU MONTAJE PARA AFORO DEL GASTO DE VAPOR	14
2-6	MONTAJE Y ACCESORIOS PARA ORIFICIO CONTROLADOR DE PRESION	15
2-7	APARATO RUSTICO PARA MEDIR FRECUENCIA Y LUGAR DONDE SE INSTALO	16
2-8	CONO DE ESCAPE	18
3-1	MEDICION DE LA FRECUENCIA DE OSCILACION	22
3-2	INSTALACION DEL FRECUENCIOMETRO	23
3-3	SISTEMA EXPERIMENTAL	24
4-1	TUBERIA EN CANTILIVER CON UNA CARGA AISLADA	30
4-2	TUBERIA CONDUCTORA DE VAPOR	42
4-3	FRENTE DE ONDA	50
5-1	IDEALIZACION DEL ARREGLO REAL	57
5-2	SEMEJANZA ENTRE UNA TOBERA Y UN ORIFICIO	58
5-3	TUBO RECTO CON FRICCION	59
5-4	VOLUMEN DE CONTROL	62
5-5	VOLUMEN DE CONTROL	66
5-6	ONDA DE CHOQUE NORMAL	96

5-7	FLUJO DE FANNO	101
5-8	VOLUMEN DE CONTROL	102
5-8a	LIMITES DE INTEGRACION	107
5-9	TOBERA CONVERGENTE DIVERGENTE TUBERIA	113
5-10	POSIBLES MODOS DE FLUJO EN UN ARREGLO TOBERA TUBO CON FRICCIÓN	115
5-11	ONDA DE CHOQUE EN LA TOBERA	118
5-12	ONDA DE CHOQUE EN TUBERIA	119
6-1	TUBERIA CONDUCTORA DE VAPOR	133
6-2	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	137
6-3	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	139
6-4	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	140
6-5	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	141
6-6	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	142
6-7	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	143
6-8	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	144
6-9	LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA	145

## 1 INTRODUCCION

En el desarrollo de un campo geotérmico intervienen muchísimos aspectos técnicos que van desde la geología y geoquímica para localizar los pozos, la perforación y acabado de pozos hasta la explotación del yacimiento. Para poder llevar a cabo con eficacia cada tarea es indispensable un conocimiento profundo de las ciencias básicas que respaldan cada técnica particular.

En la geotermia, más que en ninguna otra fuente alterna de energía, se debe trabajar con incertidumbres y con suposiciones. Esto obliga a que cualquier fenómeno aparentemente anormal que se encuentre, deba ser analizado exhaustivamente ya que su explicación satisfactoria aportará información muy valiosa en la eliminación de las incertidumbres iniciales.

El caso planteado como tema central de esta tesis tiene su origen precisamente en un fenómeno " raro " observado mientras se probaba un separador en el pozo No. 2 del campo de Los Azufres. - La explicación al fenómeno observado pudo haberse dado a la ligera, para tranquilizar la inquietud del momento, y resolver el problema agregando concreto a los apoyos y terminado el incidente. - Sin embargo, la investigación más profunda y con cierto método, - llevó, como se verá más adelante, a una explicación satisfactoria del origen del problema y de las circunstancias particulares que debieron concurrir para que éste se presentara. Lo anterior permite evitar, mediante un diseño adecuado, resonancias del tipo en contrado en futuros pozos. Pero además, y quizás lo más importan te, es que al haber aprendido a producir y a eliminar el fenómeno de resonancia a voluntad, se podrá en algunos casos inducir inten cionalmente el fenómeno para utilizarlo como una manera de lim--- piar el interior de las tuberías y equipo asociado. Más adelan-- te, incluso se podría extender este método de " resonancia " para la desincrustación y limpieza de pozos. Como corolario de esta - investigación es posible pensar que han quedado resultados experi mentales de suficiente calidad para aquéllos que estudian las os- cilaciones de presión en escurrimientos críticos, ya sea de agua o de aire buscando comprobar la existencia de un número adimensio nal (el de Strouhal) que sea universal.

El problema específico estudiado tuvo su origen en lo si---- guiente: mientras se realizaban pruebas de eficiencia a un sepa-



rador de agua-vapor en el pozo No. 2 de Los Azufres, el vapor separado era descargado a la atmósfera mediante una tubería de unos 20 m de longitud. En el tramo de tubería había válvulas, cambios de diámetro y placas orificio para cuantificar y regular el gasto de vapor.

Este tipo de arreglos es normal en geotermia, sin embargo en esta ocasión, a un gasto y presión bien definidas el chorro de vapor comenzó a producir un fuerte ruido, periódico, de frecuencia fundamental muy clara. (Similar al que produce un camión de carga, con escape libre en una subida).

Al cambiar, ya sea el gasto, la presión o la geometría del arreglo, el fenómeno desaparecía.

Una de las consecuencias de estas vibraciones fué que por el escape salió gran cantidad de polvillo de óxido de fierro. Más tarde cuando se abrió el separador y se examinaron las tuberías se encontró que habían quedado perfectamente limpios.

Antes que se hicieran modificaciones al arreglo para eliminar este alarmante fenómeno, se improvisó un aparato para medir frecuencias que consistió en un fierro ángulo al que se le soldaron varias varillas del material que había disponible en ese instante y se les pusieron en sus extremos libres diferentes pesos. Se soldó una base para este frecuenciómetro rústico al tubo de es

cape, se instaló éste y posteriormente se ajustaron los pesos hasta que una de las varillitas entró francamente en resonancia. El experimento se repitió varias veces hasta que no hubiera duda sobre los resultados, registrándose además las presiones y gastos del vapor. Luego se registró la geometría del arreglo para tener así toda la información necesaria para el posterior estudio del fenómeno sin interferir con los trabajos que apresuradamente se realizaban en el pozo para terminar las pruebas programadas. A los pocos días se modificó el arreglo original y nunca aparecieron las vibraciones.

Aislado el fenómeno observando, se procedió a estudiar el problema como un fenómeno de resonancia. Es decir detectar la presencia de un excitador que alterara la presión en forma periódica y encontrar los elementos pasivos que podrían tener frecuencias naturales semejantes a las del excitador.

Existen trabajos más completos (Ref. 1) que se han ocupado de fenómenos semejantes, en circuitos hidráulicos, poniendo énfasis en la definición y cálculo de la resonancia. En este trabajo donde las mediciones fueron hechas en forma precaria, el problema fue simplificado notablemente tratando de encontrar frecuencias naturales (oscilaciones libres) de cada componente y buscando el origen de la excitación.

Se buscó la frecuencia natural de la tubería que va del sepa-

rador de agua-vapor en el pozo No. 2 de Los Azufres, el vapor separado era descargado a la atmósfera mediante una tubería de unos 20 m de longitud. En el tramo de tubería había válvulas, cambios de diámetro y placas orificio para cuantificar y regular el gasto de vapor.

Este tipo de arreglos es normal en geotermia, sin embargo en esta ocasión, a un gasto y presión bien definidas el chorro de vapor comenzó a producir un fuerte ruido, periódico, de frecuencia fundamental muy clara. (Similar al que produce un camión de carga, con escape libre en una subida).

Al cambiar, ya sea el gasto, la presión o la geometría del arreglo, el fenómeno desaparecía.

Una de las consecuencias de estas vibraciones fué que por el escape salió gran cantidad de polvillo de óxido de fierro. Más tarde cuando se abrió el separador y se examinaron las tuberías se encontró que habían quedado perfectamente limpios.

Antes que se hicieran modificaciones al arreglo para eliminar este alarmante fenómeno, se improvisó un aparato para medir frecuencias que consistió en un fierro ángulo al que se le soldaron varias varillas del material que había disponible en ese instante y se les pusieron en sus extremos libres diferentes pesos. Se soldó una base para este frecuenciómetro rústico al tubo de es

cape, se instaló éste y posteriormente se ajustaron los pesos hasta que una de las varillitas entró francamente en resonancia. El experimento se repitió varias veces hasta que no hubiera duda sobre los resultados, registrándose además las presiones y gastos -- del vapor. Luego se registró la geometría del arreglo para tener así toda la información necesaria para el posterior estudio del fenómeno sin interferir con los trabajos que apresuradamente se realizaban en el pozo para terminar las pruebas programadas. A los pocos días se modificó el arreglo original y nunca más volvieron a aparecer las vibraciones.

Aislado el fenómeno observando, se procedió a estudiar el problema como un fenómeno de resonancia. Es decir detectar la presencia de un excitador que alterara la presión en forma periódica y encontrar los elementos pasivos que podrían tener frecuencias naturales semejantes a las del excitador.

Existen trabajos más completos (Ref. 1) que se han ocupado de fenómenos semejantes, en circuitos hidráulicos, poniendo énfasis en la definición y cálculo de la resonancia. En este trabajo donde las mediciones fueron hechas en forma precaria, el problema fué simplificado notablemente tratando de encontrar frecuencias naturales (oscilaciones libres) de cada componente y buscando el origen de la excitación.

Se buscó la frecuencia natural de la tubería que va del sepa-

rador hasta el escape dividiéndola en tramos y tratándola de varias formas simplificadas. De esta manera se detectaron más de 20 posibles frecuencias naturales (deliberadamente se exageró este cuadro de posibles frecuencias naturales). Luego se eligieron para el análisis, solamente las más cercanas a la medida en el -- frecuenciómetro.

Se calculó la velocidad - relativa y absoluta - de propagación de una perturbación en distintos tramos de la tubería. De acuerdo a esto, se determinaron las frecuencias naturales de oscilación considerando varias alternativas de reflexión de la onda. De esta forma se confeccionó otra Tabla de posibles frecuencias naturales, ahora de oscilaciones acústicas (en este caso se consideró la rigidez de la tubería como infinita dejando solamente al vapor como medio elástico).

La parte más importante de este trabajo radica en la detección del excitador. Para encontrarlo fué necesario el desarrollo completo de las ecuaciones de flujo compresible en régimen adiabático, con y sin fricción. En el capítulo 5 se podrá observar que a pesar de que es difícil cambiar las secuencias de cálculos ya tan establecidas en mecánica de fluidos, se ha hecho un esfuerzo por mostrar con la mayor claridad el origen de cada término, expresando siempre en el desarrollo la forma propia de entender las cosas del autor de esta tesis. Una vez planteados e ilustrados con ejemplos sencillos los casos de tobera ahogada, onda de cho--

que en la parte divergente de la tobera, onda de choque en un tubo con fricción y escape sónico y subsónico se examina lo que puede ocurrir aguas abajo de la última placa orificio, la que en realidad se comprueba está funcionando como una tobera convergente divergente muy corta.

El hallazgo más interesante está en que cuando la presión atmosférica es de 0.73 bar absolutos, tal como el caso de Los Azufres, el flujo de vapor es sónico en la garganta de la placa orificio y luego prosigue supersónico exactamente hasta el labio del tubo de escape. Si la presión de la atmósfera es ligeramente aumentada - a unos 0.80 bar - la onda de choque se retrae hacia el interior del tubo localizándose exactamente en la placa orificio.

Esta observación comprueba que una pequeña variación de la presión en el escape - producida por la propia onda de choque oblicua a la salida - es capaz de colocar la onda dentro del tubo haciéndola viajar periódicamente entre la placa orificio y la boca del tubo.

La determinación de la frecuencia de este fenómeno aún no ha sido posible ( varios investigadores todavía lo estudian sin éxito Ref. 2 ) sin embargo suponiendo la existencia de un número de Strouhal universal, tal como lo postula el Dr. E. Levi de la UNAM ( Ref. 3 ), seleccionando una longitud característica adecuada se encuentra que la frecuencia de este excitador es exactamente la me

dida durante los ensayos.

Finalmente, al comparar esta frecuencia de excitación con las frecuencias naturales de los elementos pasivos, se encuentra que - hay resonancia con un tramo de la tubería en cuanto se considera - como una viga elástica y con el vapor dentro de un tramo de tubo - entre las dos placas orificio considerándolo como un tubo acústico.

El trabajo finaliza con un resumen de las conclusiones, dejando también en claro que el tema no ha sido agotado y que bien valdría la pena, ahora con más recursos, mejores instrumentos (y más tiempo) reexaminar el fenómeno, hacerlo resonar bajo otras geometrías y gastos, y detectar con mayor claridad el origen básico de la frecuencia de la oscilación de presión. Una conclusión exitosa del trabajo de extensión planteado, podría contribuir además a la comprobación de la existencia de un número universal de Strouhal - que unívocamente relaciona el intercambio de energía entre la elástica y la cinética.

## 2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el campo geotérmico de Los Azufres, se encuentra el pozo - No. 2 cuya curva de producción es la que aparece en la Fig. 2-1. Como se puede observar, para una presión en la cabeza de 300 ---- lb/plg<sup>2</sup> produce - a condiciones atmosféricas - 110 (T/H) de vapor y 160 (T/H) de agua.

En la Fig. 2-2 se muestran dos vistas del pozo. En ellas se aprecia el separador de vapor y la línea de descarga a la atmósfera.

En la Fig. 2-3 se indica en forma esquemática el arreglo utilizado. En la misma figura, en una vista en planta, se muestran -



Fig. 2-1 CURVA CARACTERISTICA DE PRODUCCION DEL POZO A-2

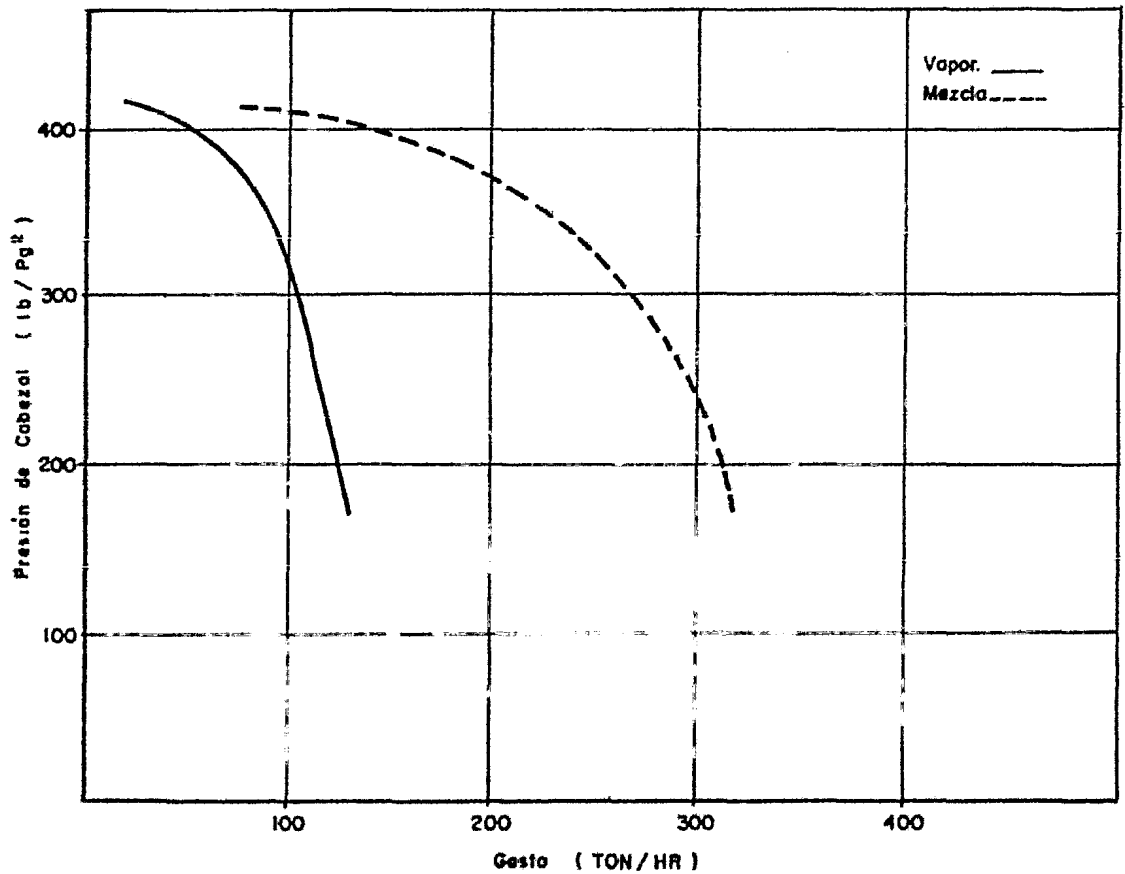


Fig. 2-2. DOS VISTAS DEL POZO A-2 MOSTRANDO SEPARADOR Y LINEA DE ESCAPE DEL VAPOR

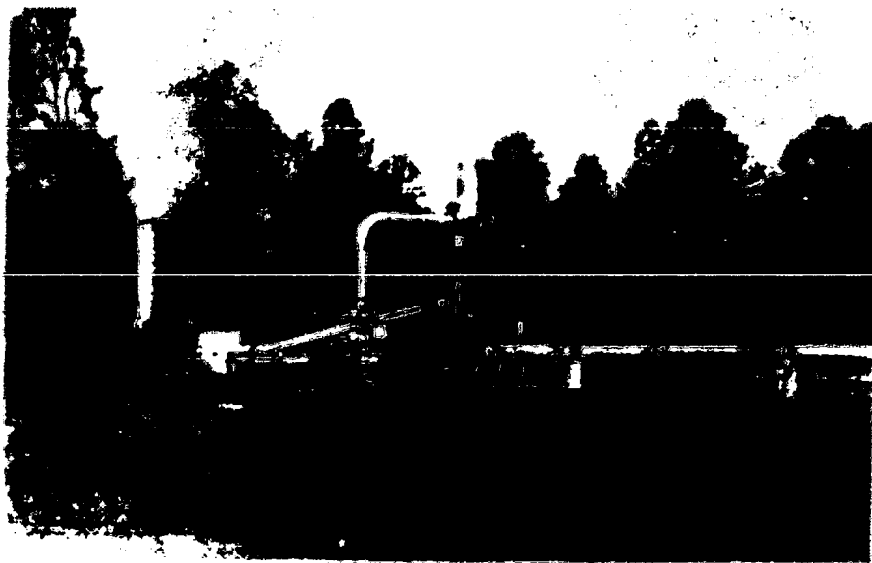
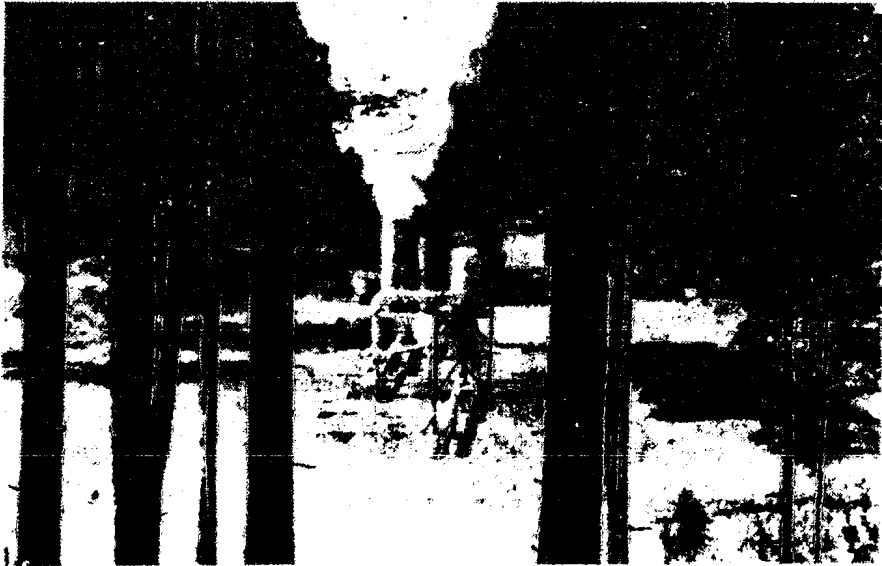
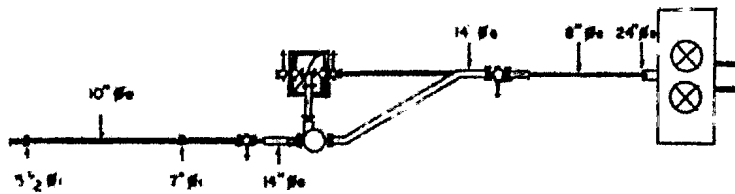
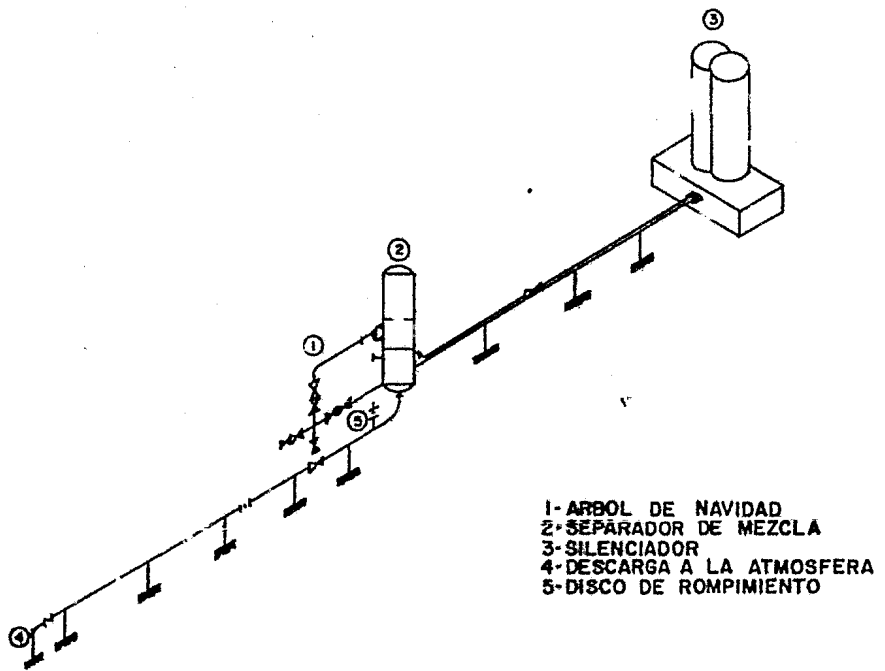


Fig 2-3 ARREGLO ESQUEMATICO Y VISTA EN PLANTA DEL POZO A-2



las medidas de la tubería. En la Fig. 2-4 se muestran detalles -- del arreglo incluyendo fotografías del tubo de vapor y del extre-- mo de escape de la tubería.

En la tubería de vapor se tenía una placa orificio para medir el gasto de vapor en el punto indicado en la Fig. 2-4. Detalles - del montaje de la placa orificio así como del manómetro diferen-- cial se muestran en la Fig. 2-5. En la Fig. 2-6 se muestra la ins-- talación de la reducción para controlar la presión.

Bajo las características descritas, al ir abriendo la válvula superior del pozo y separando el agua del vapor en el separador, - ocurrió que bajo ciertas condiciones muy especiales del flujo se - produjeron fuertes vibraciones del vapor que escapaba a la atmósfe-- ra ocasionando un ruido similar al que produce un camión con esca-- pe libre subiendo una cuesta.

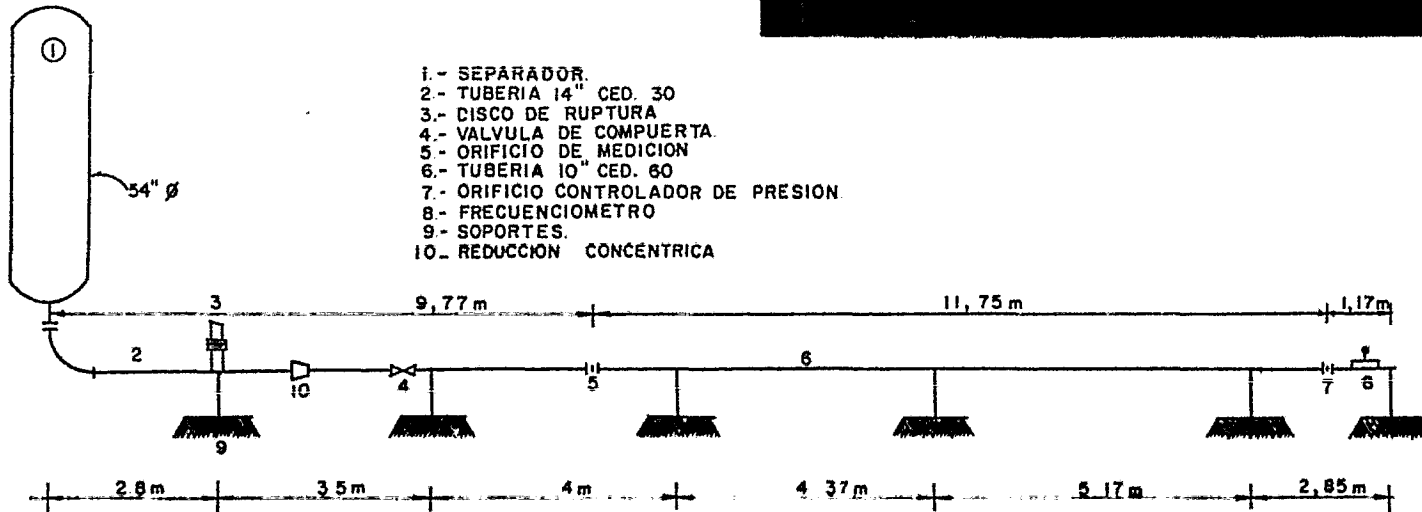
Se hicieron varias pruebas, variando presiones y gastos encon-- trándose que el fenómeno era repetitivo.

Como primera medida se improvisó un aparato rústico para me-- dir frecuencia de las vibraciones tal como se muestra en la Fig. - 2-7.

De los ensayos realizados se obtuvieron los valores de la Ta-- bla 2-1 que corresponden a las condiciones prevaecientes al momen



Fig. 2-4. DIMENSIONES DE LA TUBERIA DE VAPOR



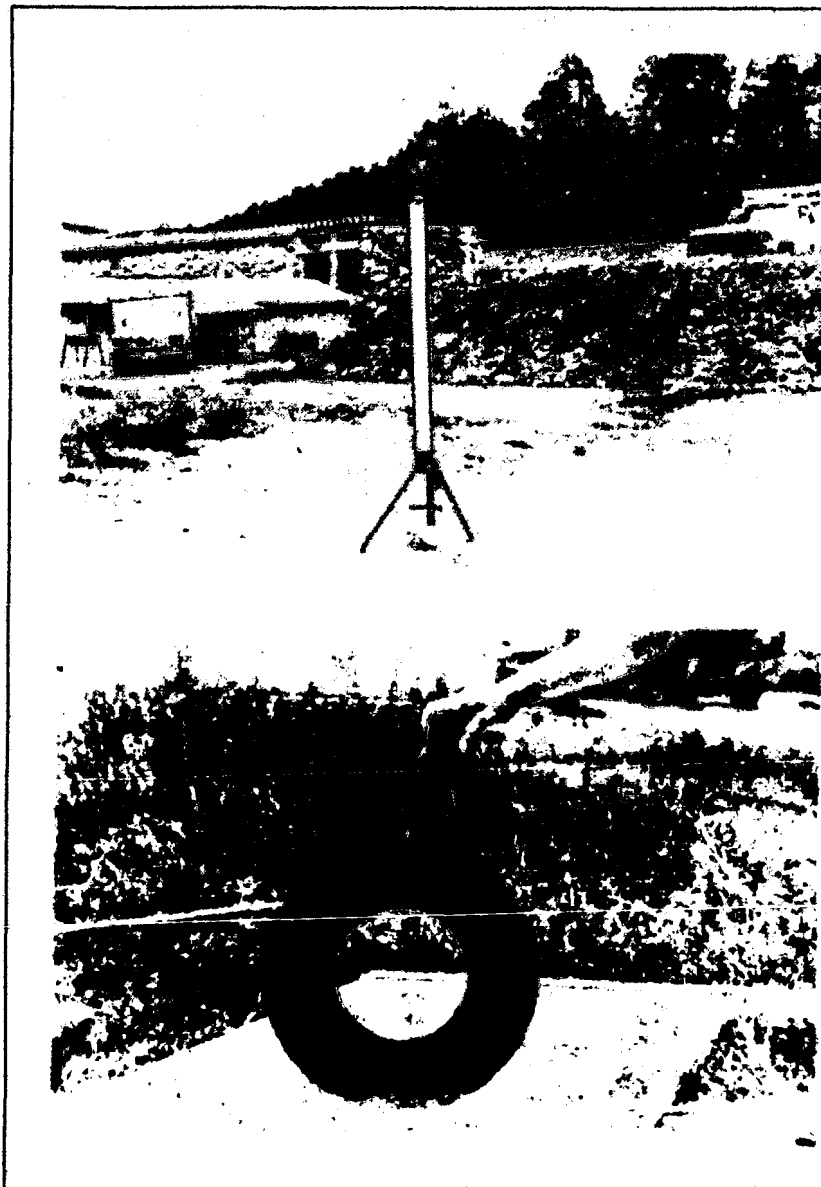
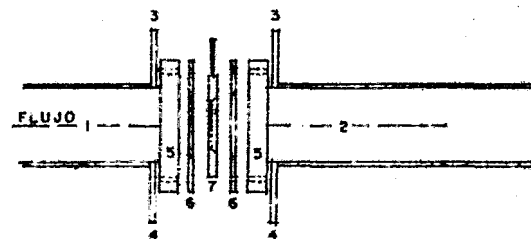
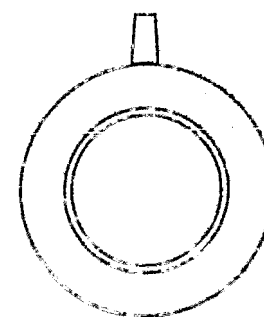
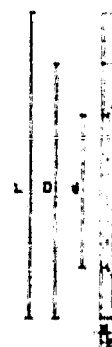


Fig. 2.5 DETALLE DE LA PLACA ORIFICIO Y SU MONTAJE PARA AFORO DEL GASTO DE VAPOR



ACCESORIOS PARA ORIFICIO DE AFORO (VAPOR O AGUA).

- 1-2-TOMAS DE PRES'CN
- 3-VENTEOS
- 4-PURGAS
- 5-BRIDAS
- 6-EMPAQUES
- 7-DISCO DE AFORO



ORIFICIO DE AFORO

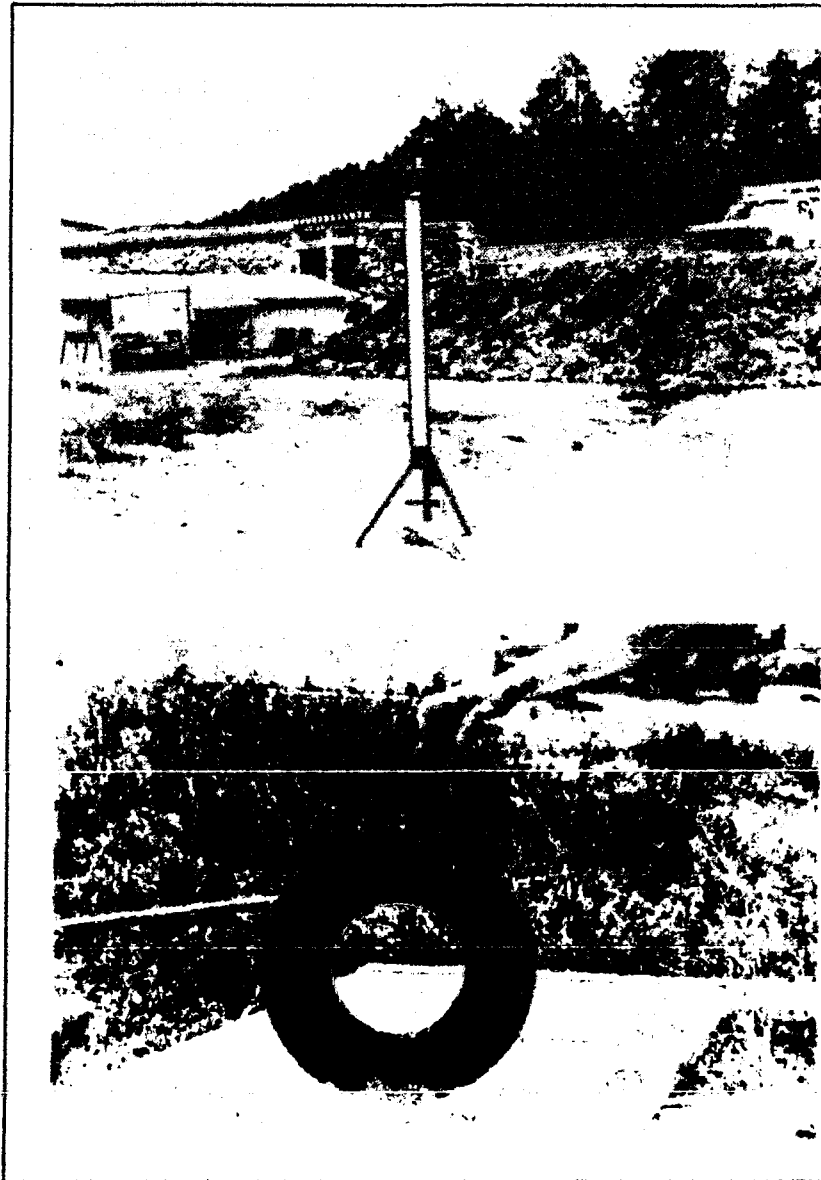
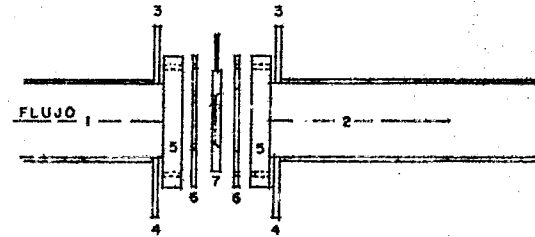
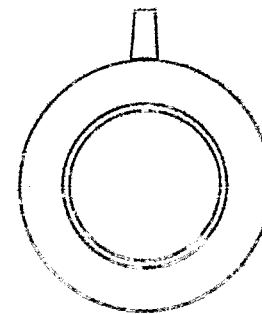
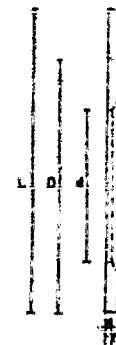


Fig. 2.5 DETALLE DE LA PLACA ORIFICIO Y SU MONTAJE PARA AFORO DEL GASTO DE VAPOR



ACCESORIOS PARA ORIFICIO DE AFORO (VAPOR O AGUA).

- 1y2-TOMAS DE PRESION
- 3-VENTEOS
- 4-PURGAS
- 5-BRIDAS
- 6-EMPAQUES
- 7-DISCO DE AFORO



ORIFICIO DE AFORO

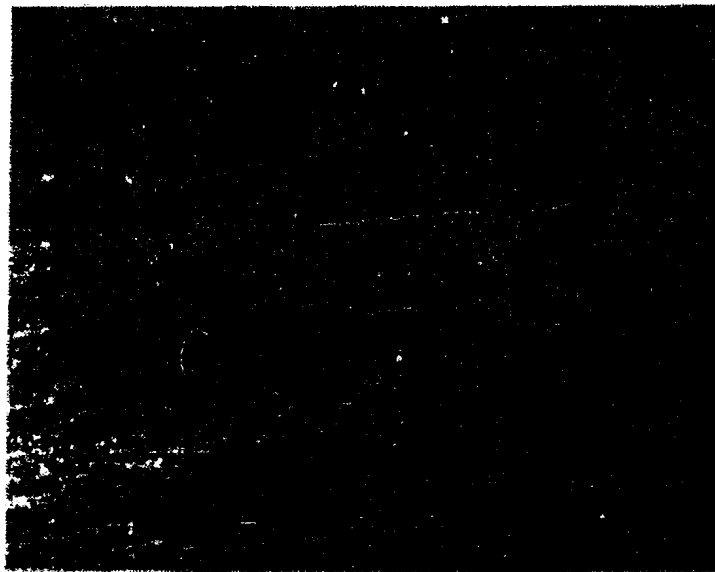
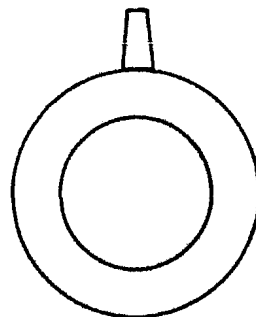
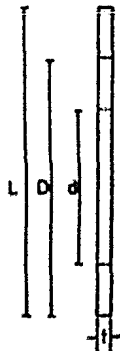
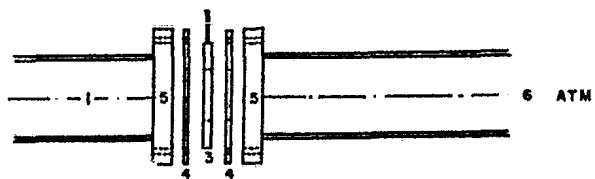


Fig. 2-6 MONTAJE Y ACCESORIOS PARA ORIFICIO CONTROLADOR DE PRESION

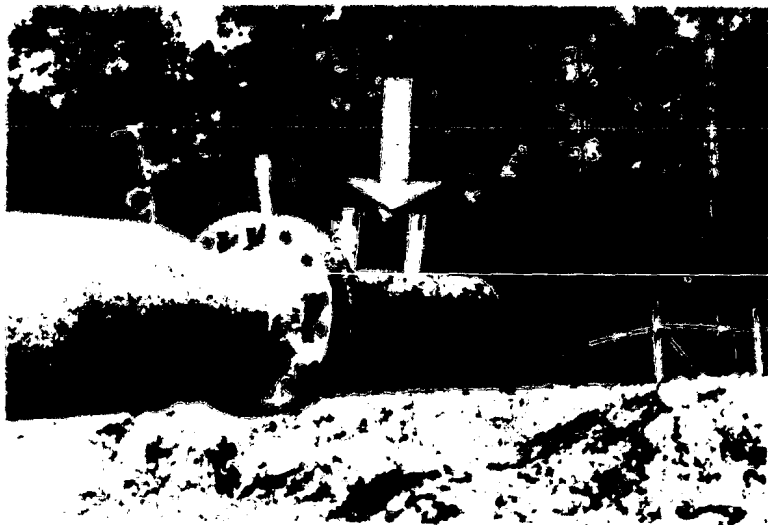
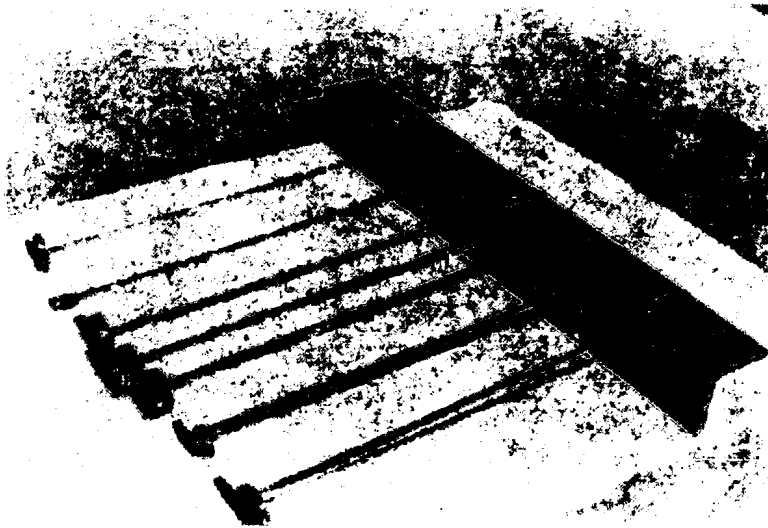
- 1- TOMA DE PRESION
- 2- TUBERIA.
- 3- ORIFICIO.
- 4- EMPAQUES.
- 5- BRIDAS.
- 6- DESCARGA A LA ATMOSFERA



ORIFICIO CONTROLADOR DE PRESION



Fig. 2-7 APARATO RUSTICO PARA MEDIR FRECUENCIA Y LUGAR DONDE SE INSTALO



to de producirse las fuertes vibraciones.

TABLA 2-1 CONDICIONES DURANTE LA VIBRACION DEL ESCAPE.

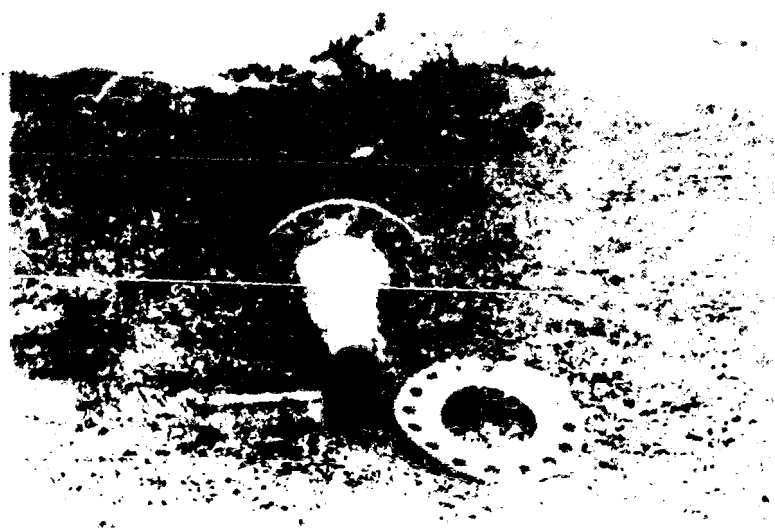
ENSAYO No.	FECHA 1981	P LINEA [psia]	Ø INT. TUBERIA [IN]	Ø ORIF. [IN]	m [T/H]	FREC. [Hz]
1	24-XI	32.6	9.75	5.5	16.7	8.8
2	24-XI	42.2	9.75	5.5	21.7	8.8
3	25-XI	39.7	9.75	5.5	20.4	8.8
4	26-XI	21.2	9.75	6.0	12.9	8.8

Cuando las condiciones de flujo fueron diferente a las indicadas, el fenómeno oscilatorio desaparecía totalmente.

Finalmente como un último ensayo, se decidió cambiar el tubo del extremo del escape por un cono como el que se muestra en la Fig. 2-8. Con este nuevo arreglo, las oscilaciones desaparecieron completamente.

El problema planteado en esta tesis consiste en determinar los fenómenos físicos que ocasionaron las vibraciones con los siguientes objetivos en mente.

Fig. 2-8 CONO DE ESCAPE



- a) Conocer las causas de un fenómeno que puede ocasionar serias perturbaciones en geotermia y así poder anticiparse en los diseños para prevenir su aparición.
- b) Poder inducir voluntariamente estas vibraciones en circunstancias especiales, de manera de utilizarlo como vibrador para remover escamas y oxidaciones de las tuberías y separadores durante los períodos de mantenimiento y limpieza.
- c) Contribuir, con información de prototipo confiable, al estudio de las oscilaciones en flujos transitorios donde se postula la existencia de un número de Strouhal (número adimensional que relaciona la frecuencia con una velocidad y longitud características) universal.

El problema será encarado como un posible fenómeno de resonancia en el que puedan coincidir la frecuencia de algún excitador, que en forma periódica perturba el campo de presiones, y la frecuencia natural de oscilación libre de algún elemento pasivo.

Por ello, se comenzará el análisis determinando la frecuencia natural de cada componente, vista primero la tubería como una viga elástica que se flexa sobre diferentes apoyos idealizados, y luego, como un tubo rígido lleno de un fluido compresible a través del cual se propaga a velocidad del sonido una perturbación que se refleja en diferentes obstáculos idealizados.

### 3 MEDICION DE LA FRECUENCIA DE OSCILACION

Debido a la escasa instrumentación con que se cuenta en el -- campo para determinar un fenómeno como el antes descrito, se ideó la forma de construir un frecuenciómetro rústico con el material - que se disponía.

El frecuenciómetro a fabricar, tenía la finalidad de detectar en forma aproximada la frecuencia de oscilación de la tubería, para que posteriormente se determinara el origen de las posibles --- fuentes de excitación.

De esta manera se fabricó un aparato constituido por una serie de varillas metálicas, de sección transversal circular, empo-- tradas por uno de sus extremos a un fierro ángulo y por el otro se

les instaló pesos previamente determinados y diferentes. (Véase Fig. 3-1).

El frecuenciómetro se instaló sobre una base metálica (hecha del mismo ángulo) que había sido soldada a la tubería (Véase Fig. 3-2). La posición de la base en relación con la de las varillas -- formaban un ángulo recto (90°). Para poder determinar la frecuencia de oscilación de la tubería, hubo necesidad de hacer dos juegos de varillas de diferentes longitudes. El juego uno, con una longitud  $L_1$ , se formó de tal suerte que se pudieran registrar bajas frecuencias (3.5 - 8 Hz), mientras que el segundo con una longitud  $L_2$  para registrar frecuencias de 9-30 Hz aproximadamente.

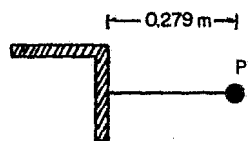
El funcionamiento del frecuenciómetro se basa en la dependencia de la frecuencia de la oscilación de las barras con el peso instalado en sus extremos; es decir

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E I g}{(P + \frac{1}{4} wL) L^3}} \quad ( 3-1 )$$

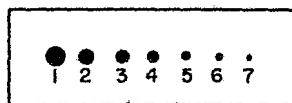
donde

- E = módulo de Young.
- I = momento de inercia.
- g = aceleración de la gravedad.
- P = peso en el extremo de la barra.
- w = peso de la barra por unidad de longitud.
- L = longitud de la barra.
- $f_n$  = frecuencia natural de la varilla

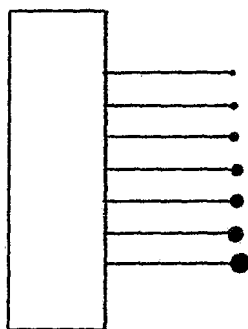
Fig. 3-1 MEDICION DE LA FRECUENCIA DE OSCILACION



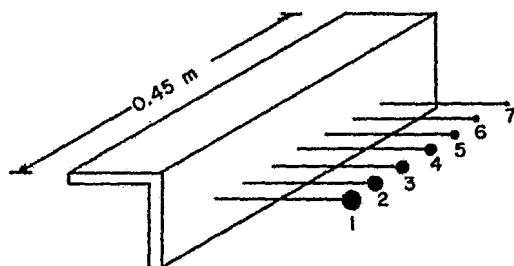
VISTA LATERAL  
(a)



VISTA FRONTAL  
(b)



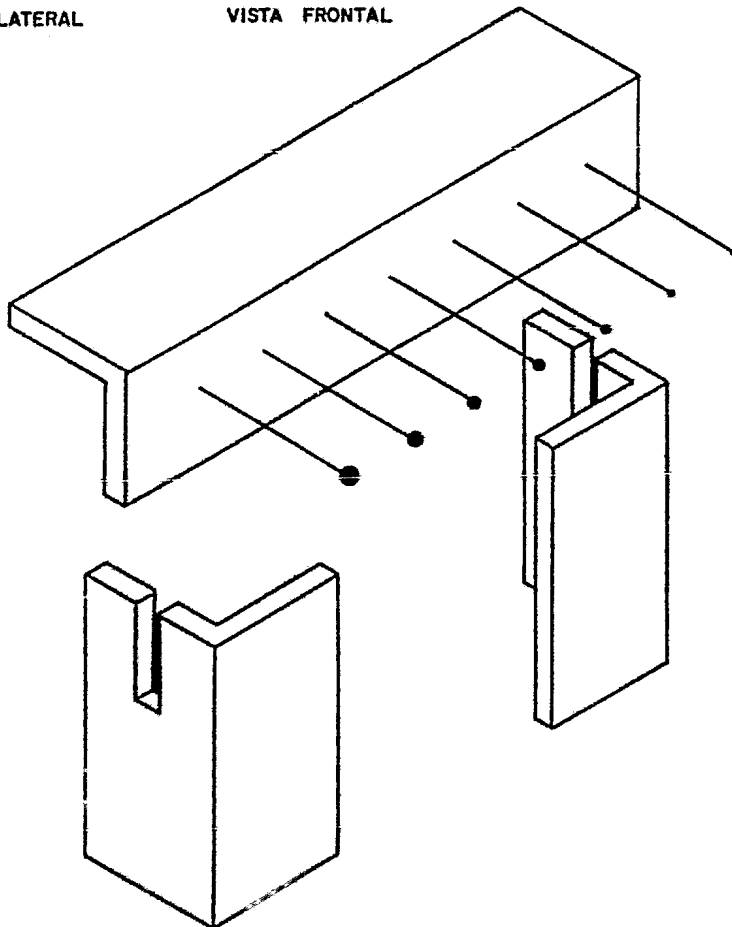
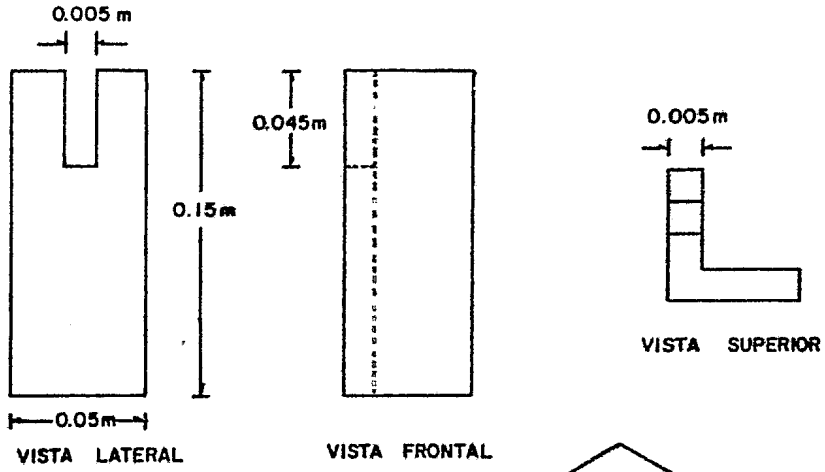
VISTA EN PLANTA  
(c)



ISOMETRICO  
(d)



Fig. 3-2 INSTALACION DEL FRECUENCIOMETRO





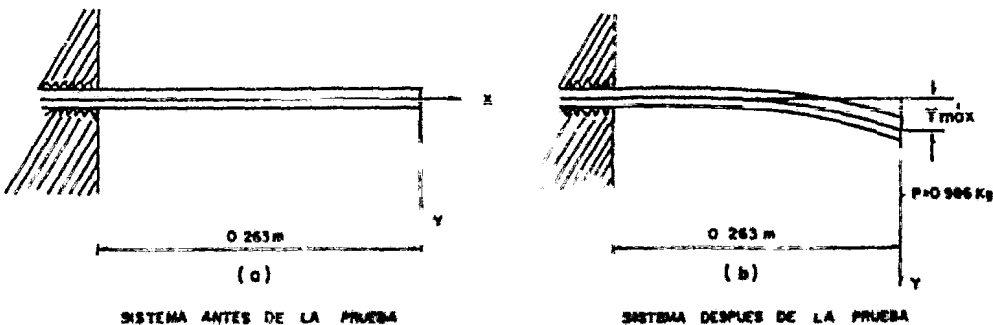
(la deducción de la ecuación 3-1 se llevará a cabo en el capítulo 4).

Como es ya de esperarse, el módulo de elasticidad de las barras era desconocido por lo que se tuvo que evaluar en el campo.

La determinación del módulo de elasticidad fue llevada a cabo de manera experimental, para ello, se empleó una barra muestra de 0.263 m de longitud y de un peso de 0.0255 kgs.

La barra se fijó perfectamente por uno de sus extremos a una prensa de banco, a continuación se instaló un sistema coordenado x-y cuyo origen coincidía con el extremo en cantiliver y el eje x era colineal al eje de la barra. Posteriormente, en el extremo libre de la barra se le colgó un peso de 0.986 kgs. (Fig. 3-3). Por último, se midió la deflexión con un flexómetro convencional.

Fig 3-3 SISTEMA EXPERIMENTAL



Entonces el Módulo de Young se calculó con la siguiente expresión

$$E = \frac{1}{3\delta I} \left[ PL^3 + \frac{1}{4} WL^4 \right] \quad ( 3-2 )$$

(esta ecuación también se deducen en el capítulo 4)

O bien

$$E = \frac{64}{3\delta\pi D^4} \left[ \left( P + \frac{1}{4} W \right) L^3 \right] \quad ( 3-3 )$$

donde:  $D$  = diámetro de la barra (igual a  $39.69 \times 10^{-4}$  m)

$W$  = peso de la barra.

$\delta$  = deflexión medida (igual a 0.027 m)

por lo tanto, empleando las unidades del Sistema Internacional -- se tiene:

$$E = \frac{(64) \left[ \left( (0.986)(9.8) + \frac{1}{4}(0.0255)(9.8) \right) (0.263)^3 \right]}{(3)(\pi)(0.027)(39.69 \times 10^{-4})^4}$$

$$E = 1.793 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

a continuación se muestra la Tabla 3-1 donde aparecen las frecuencias calculadas de las diversas barras. El cálculo se hizo empleando la ecuación 3-1.

TABLA (3-1)  
CARACTERISTICAS DEL FRECUENCIOMETRO

Nº. DE BARRA	LONGITUD DE LA BARRA [m]	PESO DE LA BARRA [N]	PESO AISLADO [N]	FRECUENCIA NATURAL CALCULADA [Hz]
1	0.45	0.428	1.225	3.7
2	0.45	0.428	0.937	4.1
3	0.45	0.428	0.784	4.5
4	0.45	0.428	0.589	5.1
5	0.45	0.428	0.352	6.0
6	0.45	0.428	0.294	6.7
7	0.45	0.428	0.196	7.7
8	0.279	0.255	0.857	8.8
9	0.279	0.255	0.531	10.3
10	0.279	0.265	0.399	12.9
11	0.279	0.265	0.179	17.4
12	0.279	0.265	0.147	18.7
13	0.279	0.265	0.058	24.7
14	0.279	0.265	0.029	27.9

Aparentemente, el fierro ángulo utilizado como soporte del aparato podría llevar a lecturas erróneas de las frecuencias. Sin embargo, basta notar que la frecuencia natural del ángulo soldado es del orden de 1500 Hz. Esta comparada con los 8.8 Hz a los que resonó la tubería produce un error despreciable.

De los ensayos realizados se obtuvieron los siguientes resultados bajo las condiciones de flujo indicadas (Tabla 3-2).

TABLA (3-2) CONDICIONES A LAS QUE VIBRO LA TUBERIA

FECHA	PRESION DE LINEA [PSIA]	DIAMETRO DE LA TUBERIA [IN]	GASTO DE VAPOR [(T/H)]	DIAMETRO DEL ORIFICIO CONTROLADOR DE PRESION [IN]	FRECUENCIA DE VIBRACION DETERMINADA CON EL APARATO [Hz]
24/XI/81	32.6	9 75	16 7	5 5	8 8
	42.2	9 75	21 7	5 5	8 8
25/XI/81	39.7	9 75	20 4	5 5	8 8
26/XI/81	21 2	9 75	12 9	6 0	8 8

#### 4 FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACION DE LA TUBERIA

Una de las formas de responder una tubería a una excitación externa, ya sea permanente o transitoria, es vibrando elásticamente, es decir con deformaciones periódicas.

Para calcular la frecuencia natural a la que oscila una tubería cuando es sacada de su posición de reposo, es necesario conocer la relación fuerzas-deformaciones y la forma en que esté apoyada.

En este capítulo, se deducirá solamente el caso de una tubería en cantiliver, mostrando en detalle cada paso. Para los otros casos de interés, sólo se darán las ecuaciones y las referencias -

de donde fueron obtenidas.

También, al final de este capítulo se deducirán las ecuaciones que lleven al conocimiento de las oscilaciones acústicas que se producen en el vapor contenido en el inferior del tubo.

#### 4.1 Deducción de la ecuación que determina la frecuencia natural en una tubería en cantiliver.

Primero, al tratarse de una tubería, se hará el cálculo del momento de inercia el que luego se empleará en la determinación de la flecha máxima.

Este último valor, será de suma importancia en la determinación de la frecuencia natural.

En la Fig. 4-1, se muestra una tubería de sección transversal constante que se encuentra en cantiliver con una carga aislada "P". Partiendo de las ecuaciones básicas de la resistencia de materiales y de la dinámica de cuerpos elásticos, se tratará de llegar a la ecuación que determina su frecuencia natural.

Empleándose el sistema coordenado mostrado en la Fig. 4-1, el momento de inercia se evalúa con respecto al eje neutro de flexión (X-X') que pasa a través del centroide de la sección transversal y es perpendicular al eje de simetría Z (nótese que la carga aislada

P se encuentra en el plano YZ).

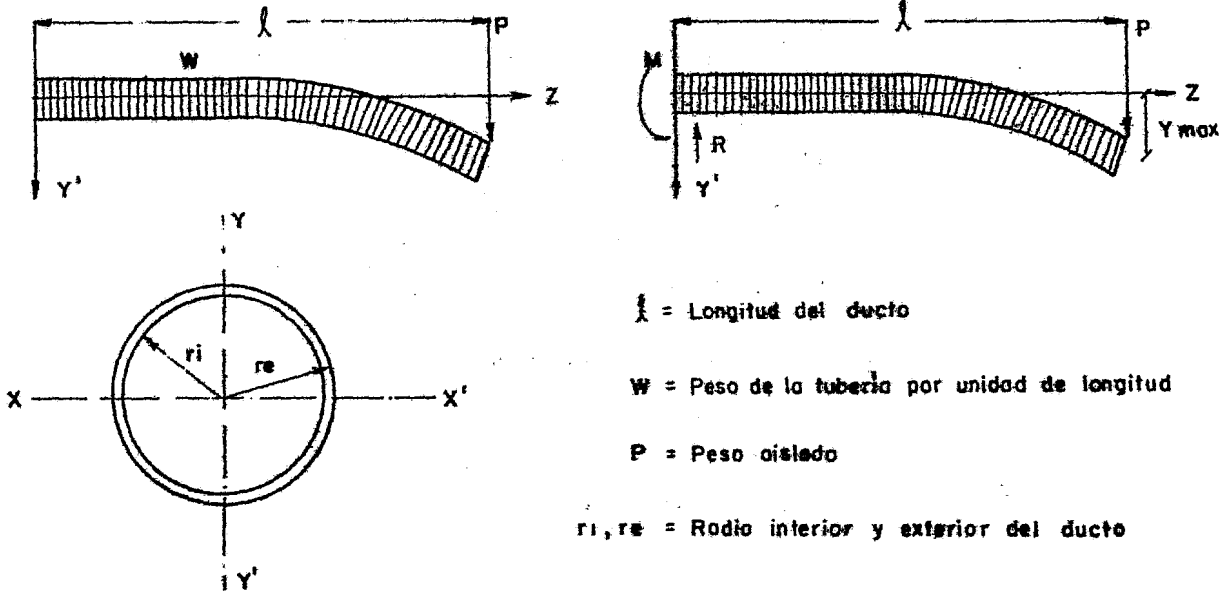


FIG. (4-1) TUBERIA EN CANTILIVER CON UNA CARGA AISLADA P

El momento de inercia de una área plana está dado en forma general por

$$I_x = \int Y^2 dA \quad (4-1)$$

Y empleándose las coordenadas polares, puede reescribirse

$$I_x = \iint \rho^3 \text{Sen}^2\theta d\theta d\rho \quad (4-2)$$

en donde:

$$\rho d\theta d\rho = dA$$

Y

$$\rho^2 \text{ Sen}^2 \theta = Y^2 \quad (\text{Recuérdese que } Y = \rho \text{ Sen } \theta)$$

La ecuación (4-2) como integral definida toma la forma

$$I_x = \int_{r_i}^{r_e} \int_0^{2\pi} \rho^3 \text{ Sen}^2 \theta \, d\theta \, d\rho \quad (4-3)$$

al integrar la ecuación (4-3) con respecto a  $\rho$  da

$$I_x = \frac{\rho^4}{4} \Big|_{r_i}^{r_e} \int_0^{2\pi} \text{ Sen}^2 \theta \, d\theta \quad (4-4)$$

Al efectuar el límite en (4-4) se obtiene:

$$I_x = \frac{1}{4} (r_e^4 - r_i^4) \int_0^{2\pi} \text{ Sen}^2 \theta \, d\theta \quad (4-5)$$

La integral remanente en (4-5) puede evaluarse usando la trigonometría como sigue:

$$\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta \quad (4-6)$$

Y

$$\text{Cos}^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Cos } 2\theta \quad (4-7)$$

Substituyendo (4-7) en (4-6) da:

$$\text{Sen}^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos } 2\theta \quad (4-8)$$

Por un momento, llámese



$$\alpha = \frac{1}{4} ( r e^4 - r_i^4 ) \quad ( 4-9 )$$

Entonces la ecuación (4-5) puede escribirse como

$$I_x = \alpha \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \quad ( 4-10 )$$

descomponiendo

$$I_x = \frac{\alpha}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{\alpha}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \quad ( 4-11 )$$

El primer término a la derecha puede integrarse rápidamente dando

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\alpha}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \alpha\pi \quad ( 4-12 )$$

Y el segundo término es:

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2\theta d(2\theta) \quad ( 4-13 )$$

Por tanto la solución a (4-13) es:

$$\frac{\alpha}{4} \operatorname{Sen} 2\theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{\alpha}{4} \operatorname{Sen} 4\pi = 0 \quad ( 4-14 )$$

Por lo tanto, el momento de inercia está dado por:

$$I_x = \alpha\pi \quad ( 4-15 )$$

Al substituir el valor de  $\alpha$  queda:

$$I_x = \frac{\pi}{4} ( r e^4 - r_i^4 ) \quad ( 4-16 )$$

Esta ecuación, determina el momento de inercia para una tubería de radio exterior  $r_e$  y radio interior  $r_i$ .

Ahora empleando las ecuaciones de equilibrio estático se determinarán las reacciones en el empotramiento.

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{" La suma de las fuerzas verticales es igual a cero "} \quad ( 4-17 )$$

$$\Sigma M = 0 \quad \text{" La suma de momentos con respecto a un punto es igual a cero "} \quad ( 4-18 )$$

Para el sistema mostrado en la Fig. 4-1, aplicando el equilibrio de fuerzas se tiene

$$P + w l - R = 0 \quad ( 4-19 )$$

de donde

$$R = P + w l \quad ( 4-20 )$$

Y la ecuación de los momentos como

$$P l + \frac{w l^2}{2} - M = 0 \quad ( 4-21 )$$

de donde

$$M = P l + \frac{w l^2}{2} \quad ( 4-22 )$$

Para determinar la ecuación de la curva elástica, se empleará el método de la doble integración.

El momento flector en cualquier sección Z de la tubería, esta dado por

$$M_x = ( P + w l ) Z - P l - \frac{w l^2}{2} \quad ( 4-23 )$$

Y la ecuación diferencial ( en coordenadas rectangulares ) - de la curva elástica es

$$- EI_x \frac{d^2 Y}{dZ^2} = M_x = ( P + w l ) Z - P l - \frac{w l^2}{2} \quad ( 4-24 )$$

Integrando por primera vez se tiene

$$- EI_x \frac{dY}{dZ} = ( P + w l ) \frac{Z^2}{2} - P l Z - w l^2 \frac{Z}{2} + C_1 \quad ( 4-25 )$$

El valor de  $C_1$  se obtiene de las condiciones de frontera que son

$$\frac{dY}{dZ} = 0 \quad \text{para } Z = 0 \quad \text{Es decir, la pendiente de la curva es nula en } Z = 0$$

Por lo que  $C_1 = 0$

Integrando nuevamente con  $C_1 = 0$  se tiene

$$- EI_x Y = ( P + w l ) \frac{Z^3}{6} - P l \frac{Z^2}{2} - w l^2 \frac{Z^2}{4} + C_2 \quad ( 4-26 )$$

La nueva constante se evalúa con las condiciones de frontera siguientes

$Y = 0$  para  $Z = 0$  es decir, la flecha es nula para  $Z = 0$   
 Por tanto,  $C_2 = 0$  y la ecuación se escribe como

$$- EIx Y = (P + wL) \frac{Z^3}{6} - P L \frac{Z^2}{2} - wL^2 \frac{Z^2}{4} \quad (4-27)$$

Esta ecuación, puede escribirse como

$$Y = - \frac{1}{3EIx} \left[ (P + wL) \frac{Z^3}{6} - P L \frac{Z^2}{2} - wL^2 \frac{Z^2}{4} \right] \quad (4-28)$$

A esta ecuación se le denomina " Ecuación de la Curva Elástica ".

La flecha máxima ( $Y_{max}$ ) ocurre cuando  $Z = L$  ( véase Fig. 4-1 ) por lo que al substituir  $Z$  por  $L$  en la ecuación (4-28), se obtiene

$$Y_{max} = \frac{1}{3EIx} \left[ PL^3 + \frac{1}{4} wL^4 \right] \quad (4-29)$$

Que es la flecha o deformación máxima de la tubería

Para determinar la frecuencia natural del modo fundamental de la tubería, se procede aplicando la segunda ley de Newton en un sistema que tiene masa y flexibilidad

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \quad (4-30)$$

Si las fuerzas que actúan son fuerzas elásticas  $k ( \delta_{\text{est}} + Y )$  y el peso  $mg$ , la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$m \frac{d^2Y}{dt^2} = k ( \delta_{\text{est}} + Y ) + mg \quad ( 4-31 )$$

Donde la deflexión estática (  $\delta_{\text{est}}$  ) es debida al peso de la masa del sistema, entonces  $mg = k \delta_{\text{est}}$  y la ecuación de movimiento se reduce a

$$m \frac{d^2Y}{dt^2} + kY = 0 \quad ( 4-32 )$$

Esta es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple ( MAS ) sin amortiguamiento su solución es como sigue

Si

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2} \quad ( 4-33 )$$

La ecuación ( 4-32 ) puede escribirse como

$$( D^2 + \frac{k}{m} ) Y = 0 \quad ( 4-34 )$$

Su ecuación auxiliar es

$$\gamma^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad ( 4-35 )$$

Cuya solución será

$$\gamma_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4 \frac{k}{m}}}{2} \quad (4-36)$$

si

$$i^2 = -1$$

se puede escribir

$$\gamma_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4 \frac{k}{m} i^2}}{2} \quad (4-37)$$

y sus raíces

$$\gamma_1 = i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4-38)$$

y

$$\gamma_2 = -i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4-39)$$

Entonces la solución a (4-34) y por lo tanto a (4-32) es

$$Y = C_1 e^{i \sqrt{\frac{k}{m}} t} + C_2 e^{-i \sqrt{\frac{k}{m}} t} \quad (4-40)$$

o bien

$$Y = C_1 (\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + i \operatorname{Sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t) + C_2 (\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - i \operatorname{Sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t) \quad (4-41)$$

Agrupando se tiene

$$Y = (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + (C_1 - C_2) i \operatorname{Sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (4-42)$$

haciendo

$$C_1 + C_2 = C_3 \quad Y, \quad (C_1 - C_2) i = C_4$$

La ecuación se puede reescribir como

$$Y = C_3 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \operatorname{Sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (4-43)$$

Las constantes  $C_3$  y  $C_4$  pueden evaluarse con las condiciones de frontera que son

$$\text{Para } t = 0 \quad ; \quad Y = Y_0 \quad \text{implica que } C_3 = Y_0$$

Derivando (4-43)

$$\frac{dY}{dt} = -C_3 \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{Sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (4-44)$$

y para

$$t = 0 \quad ; \quad \frac{dY}{dt} = 0 \quad \text{implica que } C_4 = 0$$

Por tanto la ecuación puede escribirse como

$$Y = Y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (4-45)$$

Físicamente, esta ecuación representa una vibración libre sin amortiguamiento, en la cual, se produce un ciclo cuando  $\sqrt{\frac{k}{m}} t$  varía  $360^\circ$ ; por tanto

$$\text{Período} = T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (4-46)$$

Y la frecuencia natural

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4-47)$$

Al factor  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  se le denomina frecuencia natural angular y se le representa con la letra griega  $\omega$  (omega) con el subíndice n (de natural), es decir

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4-48)$$

Como se mencionó con anterioridad,  $mg = k \delta_{est}$  entonces

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{est}} \quad (4-49)$$

Introducido esto en la ecuación de frecuencia natural se tiene

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} \quad (4-50)$$



Al substituir ( 4-29 ) en la ecuación ( 4-50 ) se tiene

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 EI_x g}{p^3 + \frac{1}{2} w l^4}} \quad ( 4-51 )$$

La ecuación anterior, determina la frecuencia natural de una tubería en cantiliver con una carga aislada en su extremo.

Como resultará evidente de ( 4-51 ), si la tubería no tiene -- ninguna carga aislada, la ecuación se reduce a

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12 EI_x g}{w l^4}} = \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{12 EI_x g}{w}} \quad ( 4-52 )$$

#### 4.2 Frecuencias naturales de tuberías para diferentes tipos de apoyos.

Este mismo procedimiento, se debería aplicar a los diferentes casos de apoyos que aparecen en la tubería en estudio. Sin embargo, en este trabajo el autor se limita a tomar de la ( Ref. 5 ) -- los resultados correspondientes.

Según la ( Ref. 5 ), la frecuencia natural de una tubería -- ( suponiendo esta como una viga con carga uniformemente repartida ) viene dada por

$$f_n = \Lambda \sqrt{\frac{EI}{WT^3}} \quad ( 4-53 )$$

donde  $\Delta$  = Coeficiente de frecuencia que varía de acuerdo al tipo de apoyos que se tenga, sus dimensiones son

$$\cdot [ (\text{ft/in}) (\text{ft/S}^2)^{1/2} ]$$

$W$  = Peso total en [ lb ]. Incluye el peso de la tubería, el de los aisladores y del fluido que circula a través de ella.

$E$  = Módulo de elasticidad en [ lb/in<sup>2</sup> ]

$I$  = Momento de inercia en [ in<sup>4</sup> ]

$l$  = Longitud de la tubería en [ ft ]

$f_n$  = Frecuencia natural es [ Hz ]

Como se nota de la ecuación ( 4-53 ),  $f_n$  es el producto de la raíz cuadrada de: un factor que depende del tipo de apoyos; de la rigidez de la tubería ( $EI$ ); de factores de transformación de unidades y de la gravedad, por el factor  $1/2\pi$  (nótese la semejanza con la ecuación 4-52). A continuación se muestra en la Tabla 4-1 la tubería con diferentes tipos de apoyos y su respectivo coeficiente  $\Delta$  de frecuencia.

#### 4.3 Determinación de la frecuencia natural de la tubería de vapor simplificada en tramos idealizados.

La tubería de la Fig. 4-2, se dividió en tramos tal como se muestran indicados, luego, aplicando el criterio de la Tabla 4-1 se

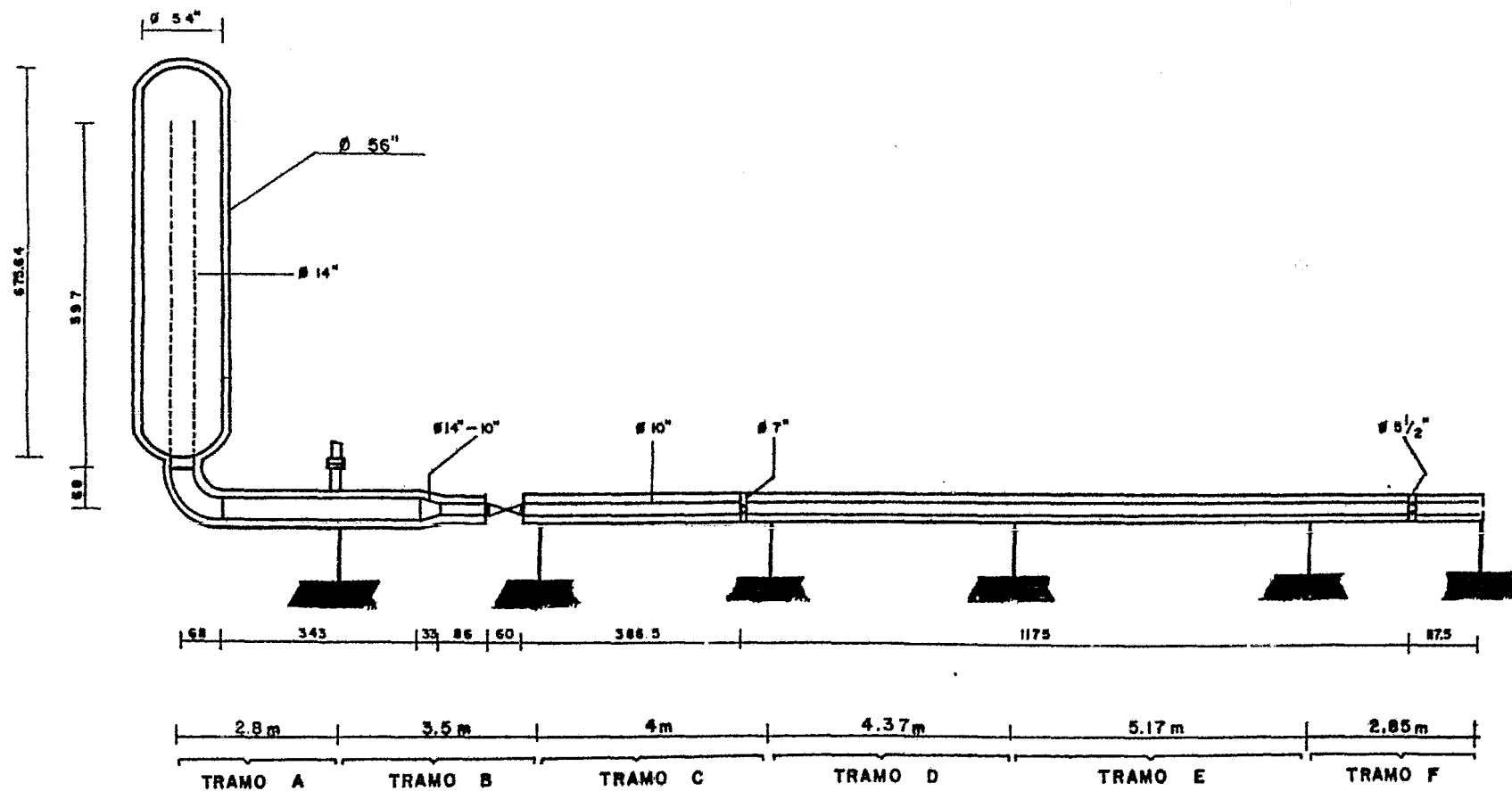


Fig. 4-2 TUBERIA CONDUCTORA DE VAPOR.


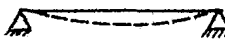
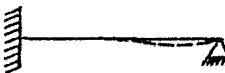

TIPO DE SOPORTE	MODO DE VIBRACION	COEFICIENTE DE FRECUENCIA $\lambda$
CANTILIVER		0 265
SIMPLEMENTE APOYADO EN SUS DOS EXTREMOS		0 745
EMPOTRADO Y SIMPLEMENTE APOYADO		1 160
EMPOTRADO POR AMBOS EXTREMOS		1 690

TABLA (4-1) FRECUENCIA NATURAL DE UNA VIGA CON DIFERENTES APOYOS (REF 5)

procedió a calcular la frecuencia natural de los diferentes tramos idealizados con apoyos simples. También se incluyeron combinaciones de los diferentes segmentos. Esta Tabla de casos simplificados orienta la investigación hacia los casos cuya frecuencia natural se acerca a los 8.8 Hz medidos al resonar la tuberfa (véase Tabla 4-2).

TABLA (4-2) FRECUENCIA NATURAL DE LOS SEGMENTOS DE LA FIG. (4-2) SIMPLIFICADOS EN CUANTO A SUS APOYOS

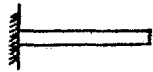
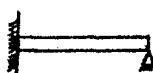
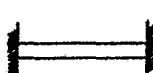
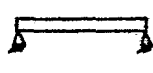
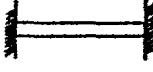
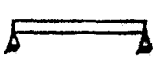
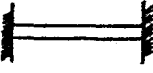

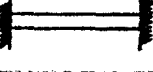
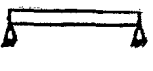
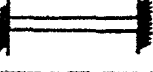
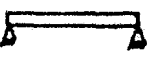
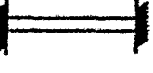
TRAMO	SIMPLIFICACION POR TRAMO	LONGITUD [ft]	PESO TOTAL [Lb]	DIAMETRO NOMINAL Y CEDULA [IN], No.	MOMENTO DE INERCIA [IN <sup>4</sup> ]	COEFICIENTE DE VIBRACION $\lambda$ [ft/IN(H/S <sup>2</sup> ) <sup>1/2</sup> ]	FRECUENCIA NATURAL CALCULADA [Hz]
A		9.18	642.6	14, No. 30	373	0.265	38.5
		"	"	"	"	1.160	168.5
		"	"	"	"	1.690	245.5
B		11.48	803.8	"	"	0.743	69.5
		"	"	"	"	1.690	157.0
		"	"	10, No. 60	212	0.743	53.2
		"	"	"	"	1.690	121.0
C		13.12	879.27	"	"	0.743	40.8
		"	"	"	"	1.690	92.7
D		14.54	950.60	"	"	0.743	34.1
		"	"	"	"	1.690	77.7
E		16.96	1136.45	"	"	0.743	24.4
		"	"	"	"	1.690	55.5

TABLA (4-2) CONTINUACION

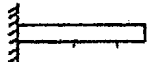
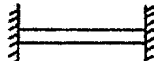
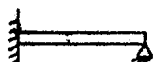
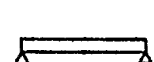
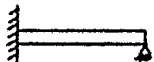
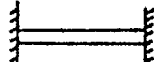
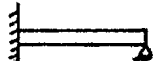
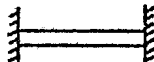
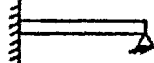
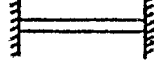
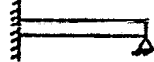
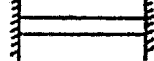
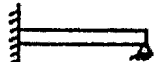

TRAMO	SIMPLIFICACION POR TRAMO	LONGITUD [ft]	PESO TOTAL [Lb]	DIAMETRO NOMI-NAL Y CEDULA [IN, No.]	MOMENTO DE INERCIA [IN <sup>4</sup> ]	COEFICIENTE DE VIBRACION $\Lambda$ [(ft/IN)(ft/S <sup>2</sup> ) <sup>1/2</sup> ]	FRECUENCIA NATURAL CAL-CULADA [Hz]
F		9.4	629.8	10, No. 60	212	0.265	28.3
		"	"	"	"	1.690	180.7
		"	"	"	"	1.160	124.0
		"	"	"	"	0.743	79.4
AB		20.67	1448.20	14, No.30	373	1.160	33.3
		"	"	"	"	1.690	48.5
		"	1384.82	10, No. 60	212	1.160	25.6
		"	"	"	"	1.690	37.4
ABC		33.79	2366.3	14, No. 30	373	1.160	12.4
		"	"	"	"	1.690	18.1
		"	2263.93	10, No. 60	212	1.160	9.6
		"	"	"	"	1.690	14.0
ABCD		48.13	3369.10	14, No. 30	373	1.160	6.1
		"	"	"	"	1.690	8.9

TABLA (4-2) CONTINUACION

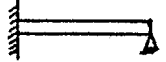
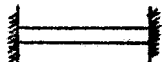
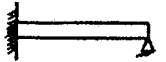
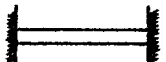
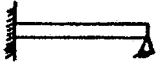
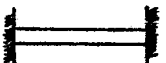
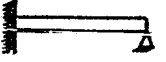
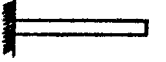
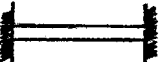
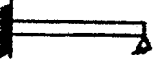
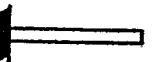

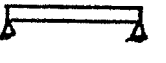
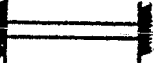
RAMO	SIMPLIFICACION POR TRAMO	LONGITUD [ft]	PESO TOTAL [Lb]	DIAMETRO NOMINAL Y CEDULA [IN], No	MOMENTO DE INERCIA [IN <sup>4</sup> ]	COEFICIENTE DE VIBRACION A [ft/IN)(ft/S <sup>2</sup> ) <sup>1/2</sup> ]	FRECUENCIA NATURAL CALCULADA [Hz]
ABCD		48.13	3224.71	10, No. 60	212	1.160	4.7
		"	"	"	"	1.690	6.9
ABCDE		65.09	4556.43	14, No. 30	373	1.160	3.4
		"	"	"	"	1.690	4.9
		"	4361.03	10, No. 60	212	1.160	2.6
		"	"	"	"	1.690	3.8
ABCDEF		74.50	5215	14, No. 30	373	1.160	2.6
		"	"	"	"	0.265	0.6
		"	"	"	"	1.690	3.7
		"	4991.5	10, No. 60	212	1.160	2.0
		"	"	"	"	0.265	0.5
		"	"	"	"	1.690	2.9
BC		24.60	1722	14, No. 30	373	0.743	15.0
		"	"	"	"	1.690	34.2

TABLA (4-2) CONTINUACION

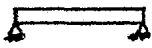

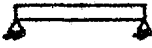
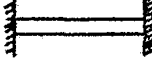
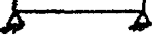
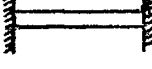

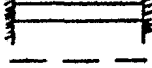

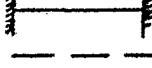


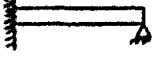
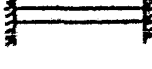
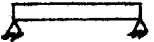
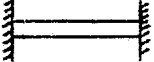
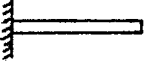
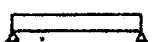
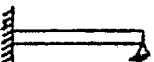

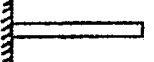

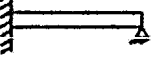
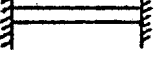
TRAMO	SIMPLIFICACION POR TRAMO	LONGITUD [ft]	PESO TOTAL [Lb]	DIAMETRO NOMINAL Y CEDULA [IN, No.]	MOMENTO DE INERCIA [IN <sup>4</sup> ]	COEFICIENTE DE VIBRACION $\Lambda$ [(ft/IN)/(ft/S <sup>2</sup> ) <sup>1/2</sup> ]	FRECUENCIA NATURAL CALADA [Hz]
BCD		38.94	2725.8	14, No.30	373	0.743	6
		"	"	"	"	1.690	13.7
BCDE		55.9	3913.0	"	"	0.743	2.9
		"	"	"	"	1.690	6.6
BCDEF		65.3	4571.0	"	"	0.743	2.1
		"	"	"	"	1.690	4.9
CD		28.54	1862.4	10, No. 60	212	0.743	8.6
		"	"	"	"	1.690	19.6
CDE		45.5	3048.85	"	"	0.743	3.4
		"	"	"	"	1.690	7.7
CDEF		54.9	3678.3	"	"	0.265	0.8
		"	"	"	"	0.743	2.3
		"	"	"	"	1.160	3.6
		"	"	"	"	1.690	5.3



TABLA (4-2) CONTINUACION

TRAMO	SIMPLIFICACION POR TRAMO	LONGITUD [ft]	PESO TOTAL [Lb]	DIAMETRO NOMINAL Y CEDULA [IN], No	MOMENTO DE INERCIA [IN <sup>4</sup> ]	COEFICIENTE DE VIBRACION A [ft/IN](ft/S <sup>2</sup> ) <sup>1/2</sup>	FRECUENCIA NATURAL CALCULADA [Hz]
DE		31.3	2097.0	10, No. 60	212	0.743	7.2
		"	"	"	"	1.690	16.3
DEF		40.7	2726.9	"	"	0.265	1.5
		"	"	"	"	0.743	4.2
		"	"	"	"	1.160	6.6
		"	"	"	"	1.690	9.6
EF		26.3	1763	"	"	0.265	3.6
		"	"	"	"	0.743	10.1
		"	"	"	"	1.160	15.8
		"	"	"	"	1.690	23.0

#### 4.4 Resonancia acústica de un gas dentro de un tubo.

El término de flujo compresible implica variaciones de densidad a través del campo del fluido, estas variaciones en muchos de los casos son el resultado de cambios de presión de un punto a otro. La razón de cambio de la densidad con respecto a la presión es por tanto un importante parámetro en el análisis de flujo compresible y como se verá, esta relacionada con la velocidad de propagación de pequeños disturbios de presión, es decir con la velocidad del sonido.

Para calcular la velocidad de propagación de una onda de presión plana infinitesimal a lo largo de un tubo de sección transversal constante se tomará como ejemplo el de un ligero movimiento (hacia adelante) de un pistón en el extremo de un tubo ( Ref. 6 ).

En la Fig. (4-3a) se asume la propagación estable de un frente de onda (hacia la derecha) con una velocidad  $c$ .

El fluido a través del cual el frente de onda ha pasado se encuentra a una presión  $(P + dP)$  y tiene una densidad  $(\rho + d\rho)$ , y se mueve a la derecha con una velocidad  $dv$ . El fluido a la derecha del frente de onda se encuentra a una presión  $P$  y a una densidad  $\rho$ , este fluido se encuentra estacionario. Para simplificar el análisis, se reducirá el proceso a uno de movimiento estable imaginando que un observador viaja con la velocidad del frente de onda.

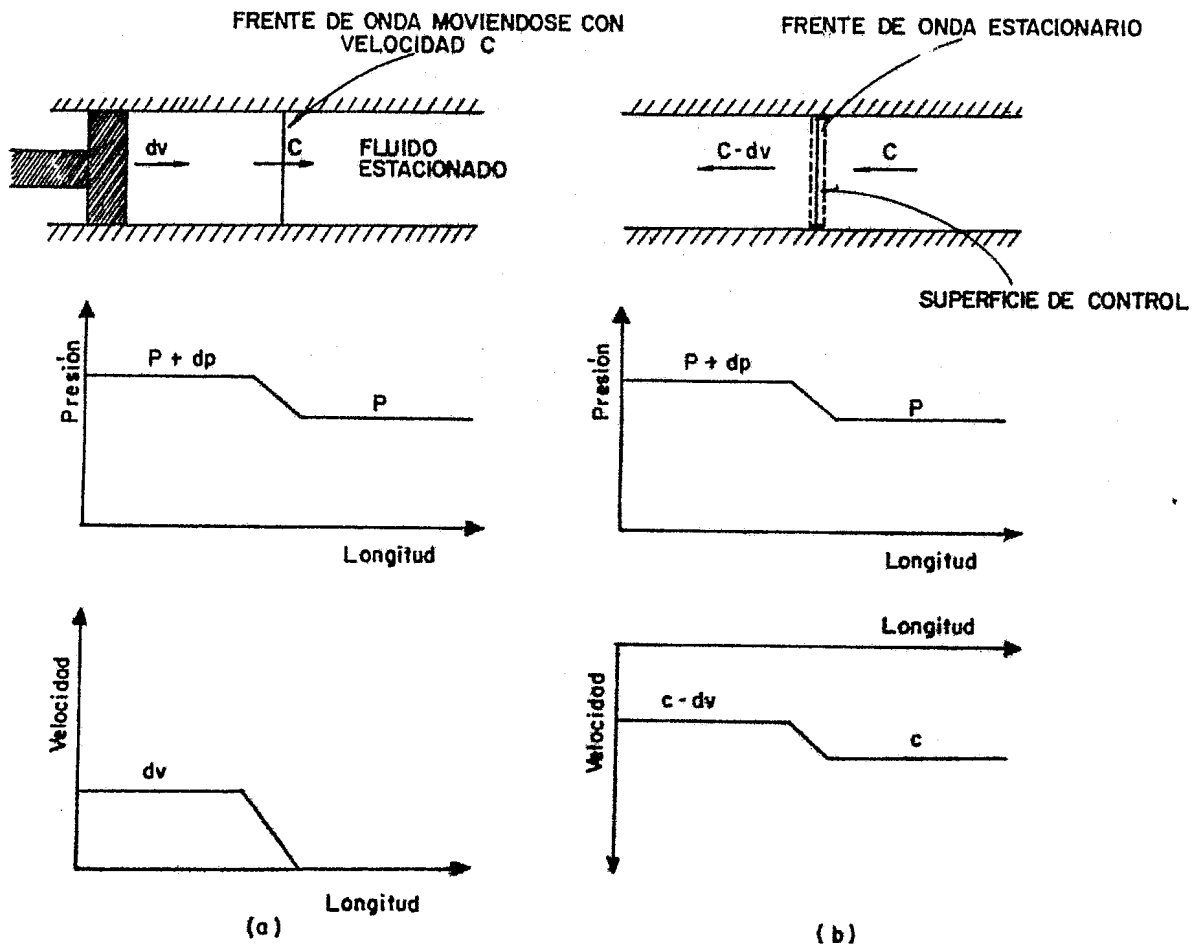


FIG. (4-3) FRENTE DE ONDA

En la Fig. (4-3b) se muestra la apariencia del proceso cuando un observador esta viajando con el frente de onda a la velocidad  $c$ . El fluido viaja establemente de derecha a izquierda y cuando pasa a través del frente de onda, su velocidad es reducida de  $c$  a  $(c-dv)$ , a la vez la presión se incrementa de  $P$  a  $(P + dp)$ , y la densidad de  $\rho$  a  $(\rho + d\rho)$ . Considerando una superficie de control rodeando un frente de onda (ambos estacionarios) como en la Fig. (4-3-b) las fuerzas constantes en este volumen de control son despreciables en

comparación con las fuerzas de presión. La ecuación del Momentum, por lo tanto puede escribirse como

$$A [ P - ( P + dP ) ] = \dot{m} [ ( c - dv ) ] \quad ( 4-54 )$$

Donde A es el área de la presión transversal y  $\dot{m}$  el gasto de fluido.

Desarrollando

$$PA - PA - AdP = \dot{m} [ c - dv - c ] \quad ( 4-55 )$$

Simplificando

$$AdP = \dot{m} \, dv \quad ( 4-56 )$$

Y por continuidad

$$\dot{m} = \rho Ac \quad ( 4-57 )$$

Substituyendo

$$AdP = \rho Ac \, dv \quad ( 4-58 )$$

Entonces

$$dP = \rho c \, dv \quad ( 4-59 )$$

Esta es la ecuación de Euler para un movimiento estable (note

se que  $dv$  es el decremento de velocidad en la dirección del movimiento).

La ecuación de continuidad se escribe para ambos lados del frente de onda ( notando que el área no cambia ) como

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c - dv) \quad ( 4-60 )$$

Desarrollando

$$\rho c = \rho c - cdv + cd\rho - d\rho dv \quad ( 4-61 )$$

Eliminando los terminos de segundo orden y simplificando

$$\rho dc = cd\rho \quad ( 4-62 )$$

La cual puede escribirse como

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dv}{c} \quad ( 4-63 )$$

Substituyendo en ( 4-59 )

$$dP = \rho cc \frac{d\rho}{\rho} \quad ( 4-64 )$$

Entonces

$$dP = c^2 d\rho \quad ( 4-65 )$$

Y

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \quad \text{o} \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} \quad (4-66)$$

La relación  $dP/d\rho$  se escribió en la ecuación (4-66) como derivada parcial a entropía constante, debido a que la variación en presión y temperatura son lo suficiente pequeñas consecuentemente el proceso es reversible. Sin embargo un proceso comparativamente rápido junto con las pequeñas variaciones de temperatura, hace que el proceso sea cuasi-adiabático.

En el límite, para una onda infinitesimal, el proceso puede -- considerarse adiabático y reversible y por tanto isoentrópico.

Resultados idénticos para la propagación de un pequeño disturbio son obtenidos para ondas cilíndricas y para ondas esféricas generadas por una fuente punto.

Para calcular la velocidad del sonido en un gas perfecto se -- parte de la relación entre la presión y la densidad para un proceso isoentrópico, es decir

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{Constante} \quad (4-67)$$

Poniéndola en forma diferencial

$$\frac{dP}{P} = k \frac{d\rho}{\rho} \quad (4-68)$$

Entonces

$$\frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = k \frac{P}{\rho} \quad (4-69)$$

Por lo que la velocidad del sonido resulta ser

$$c = \sqrt{k \frac{P}{\rho}} = \sqrt{kPv} \quad (4-70)$$

donde  $v$  es el volumen específico

Y ya que en un gas perfecto  $Pv = RT$  la ecuación anterior puede escribirse como

$$c = \sqrt{kRT} \quad (4-71)$$

Aplicando los conceptos anteriores a los casos registrados en la Tabla 2-1 se obtiene la Tabla (4-3).

C [m/s]	P [KPa]	$v^*$ [m <sup>3</sup> /kg]	K [Cp/Cv]	$\dot{m}$ [Ton/H]	V [m/s]	C+V [m/s]	C-V [m/s]
499.6	225	0.7933	1.135	16.78	76.7	526.3	372.9
454.6	290	0.6234	"	21.74	78.3	532.9	376.3
451.7	275	0.6578	"	20.43	77.3	529.0	374.4
445.4	145	1.1967	"	12.88	88.8	934.2	356.6

\* Volumen específico a presión de saturación

TABLA (4-3) VELOCIDAD DEL SONIDO EN VAPOR SATURADO SECO A PRESIONES DE TRABAJO INDICADAS

Con referencia a la Fig (4-2) si se considera el tubo comprendido entre las dos placas orificio, de 11.75 m de longitud se le puede calcular su frecuencia natural de vibración acústica como

$$f_n = \frac{c}{4L} \quad (4-72)$$

Obteniéndose aproximadamente

$$f_n = \frac{450}{(4)(11.75)} = 9.6 \text{ Hz}$$

En forma más exacta debió ser

$$T = \frac{2L}{(c - v)} + \frac{2L}{(c + v)} = \frac{2(11.75)}{(450 - 77)} + \frac{2(11.75)}{(450 + 77)}$$

$$T = 0.1085$$

Por tanto

$$f_n = \frac{1}{T} = 9.29 \text{ Hz}$$



## 5 FLUJO COMPRESIBLE EN UNA PLACA ORIFICIO

Para poder esclarecer el comportamiento de una onda de choque en un tubo con fricción, en este capítulo se deduce en forma somera las ecuaciones básicas del comportamiento de un gas en una tobera convergente divergente y luego un gas en un tubo adiabático con fricción. Una vez establecidas las ecuaciones se idealiza la placa orificio utilizada en el pozo A-2 representándola por una tobera sin fricción.

También, se deducen con cierto detalle las ecuaciones que representan las características del fluido aguas abajo de una onda de choque a partir de las de aguas arriba.

## 5.1 Idealización del esquema real

Para los fines que se persiguen en este trabajo, en la Fig. 5-1 se muestra una idealización del arreglo geométrico.

Se ha considerado a la izquierda una cámara donde las propiedades son las de estancamiento, es decir  $V^2/2=0$ , luego una tobera convergente divergente que idealmente representa a la placa orificio. Finalmente un tubo, adiabático, pero con un cierto coeficiente de fricción.

En la sección 5-8 se muestran en detalle los fenómenos que -- pueden ocurrir en un arreglo como éste a medida que se varían algunos parámetros.

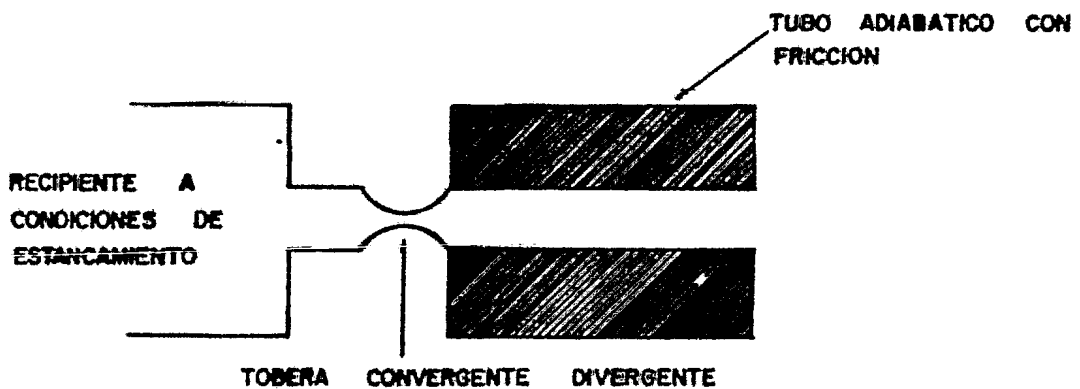


FIG. 5-1 IDEALIZACION DEL ARREGLO REAL

## 5.2 Una placa orificio como tobera

Si se exagera la geometría de una tobera convergente divergente ( TCD ) se puede transformar en una placa orificio. Sin embargo, hay que considerar que al contraerla hasta los extremos plantea dos, el flujo ya será difícilmente isoentrópico por lo brusco de la contracción.

Será necesario entonces, utilizar el concepto de coeficiente de descarga ( Ref. 6 ).

El coeficiente de descarga de una placa de orificio se desvía de la unidad, debido básicamente a la contracción ( vena contracta ) de la corriente después del orificio. El coeficiente de contracción se incrementa sustancialmente como resultado de los efectos de compresibilidad. Se debe notar, que el coeficiente de descarga se basa en un flujo isoentrópico a través de una tobera convergente teniendo la misma área de salida que el orificio ( Fig. - 5-2 ).

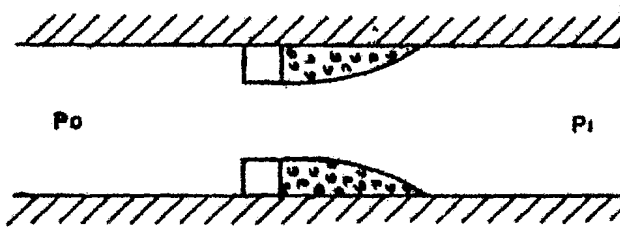


FIG. 5-2 SEMEJANZA ENTRE UNA TOBERA Y UN ORIFICIO

En la Fig. 5-2, se muestra la semejanza entre una placa orificio y una tobera convergente. El orificio es alimentado por un fluido compresible, con una presión de estancamiento  $P_0$  y descarga a una región donde la presión es  $P_1$ .

### 5.3. Descripción del caso de un tubo recto con fricción

Considérese un tubo recto aislado, de longitud ( $L$ ), diámetro ( $D$ ) y rugosidad relativa ( $e/D$ ), conectado a un recipiente de dimensiones infinitas por un extremo, mientras que por el otro extremo está a la atmósfera.

En el tubo se encuentra instalada una válvula reguladora que inicialmente está totalmente cerrada ( Fig. 5-3 ). El fluido contenido en el recipiente y parcialmente en el tubo, es un fluido compresible con propiedades de estancamiento mostradas en la figura.

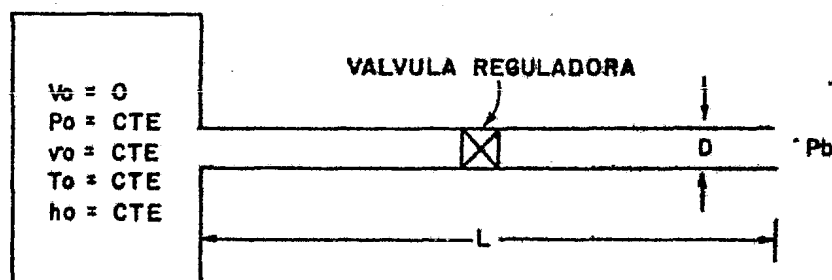


FIG. 5-3 TUBO RECTO CON FRICCIÓN

Asumiendo que las pérdidas por fricción debidas a la válvula son despreciables una vez abierta ésta y que la presión atmosférica (  $P_b$  ) se mantiene constante, se hace la siguiente descripción.

Al abrir totalmente la válvula, la razón de flujo estará gobernada por tres factores, a saber:

- a) Por la presión en el recipiente
- b) Por la fricción presente en el tubo
- c) Por la presión atmosférica

Si la longitud del tubo es lo suficientemente grande, el fluido a la descarga del mismo se encuentra a una presión igual a la atmosférica y lo deja bajo un régimen subsónico. El cambio de propiedades del fluido dentro del tubo es originado básicamente por la fricción presente en el ducto. Partiendo de las propiedades de estancamiento, la presión va decreciendo en función de la longitud, como resultado, el volumen específico del fluido se incrementa induciendo una aceleración al mismo.

De estas mismas consideraciones, se puede demostrar que en un tubo con flujo adiabático, es imposible que se alcance la velocidad del sonido dentro de él y menos todavía que se exceda.

Si ahora, la longitud del tubo se incrementa ( bajo las mismas condiciones ), el gasto disminuye y el régimen permanece subsónico

en la descarga. La presión a la salida de la tubería por lo tanto es igual a la atmosférica.

En el caso contrario, si el tubo se recorta, el gasto aumenta con el consiguiente incremento de velocidad del fluido, llegando al caso que se alcance una velocidad sónica en la descarga. En -- tal caso la presión en el labio del extremo del tubo es todavía igual a la atmosférica.

Si se sigue recortando este tubo, el gasto y la velocidad del fluido seguirán aumentando, apareciendo una vez más un flujo sónico en la descarga y una presión de labio en la misma mayor a la anterior, es decir, mayor a la atmosférica.

Como resultará evidente de lo anterior, el gasto máximo se ob tendrá cuando la longitud (  $L$  ) tienda a cero, o en otras palabras, cuando la fricción en el tubo sea prácticamente nula.

#### 5.4 Deducción de las tres ecuaciones básicas en función del número de Mach ( $M$ )

Las ecuaciones fundamentales de conservación de la masa, de conservación de la cantidad de movimiento y de la conservación de la energía, son deducidas en este capítulo para un flujo en estado permanente ( es decir, en un punto dado, ningún parámetro del - fluido cambia con el tiempo ) de un fluido compresible ideal y su poniendo un flujo unidireccional.

El volumen de control mostrado en la Fig. 5-4, servirá para deducir las tres ecuaciones antes mencionadas.

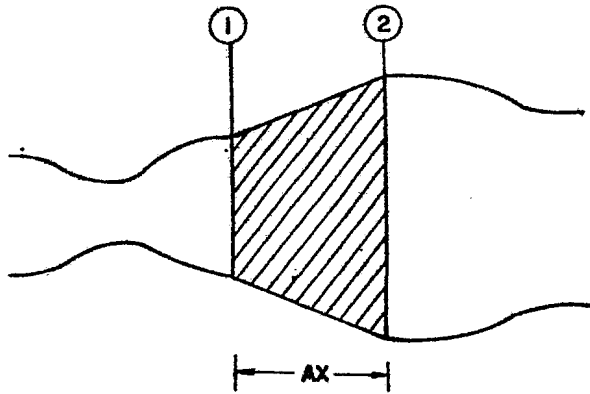


FIG. 5-4 VOLUMEN DE CONTROL

#### 5-4.1 Ecuación de la conservación de la masa.

" En un volumen de control de paredes rígidas, la masa que entra menos la que sale por unidad de tiempo es cero "

En el punto 1 el área transversal es  $A$ , la densidad  $\rho$  y la velocidad  $V$ .

La cantidad de masa que entra por unidad de tiempo a través de 1 es:

$$(\rho AV)_1$$

La que sale por 2 se puede aproximar como:

$$\left( \rho AV \right)_1 + \frac{\partial \rho AV}{\partial X} \Big|_1 \Delta X$$

por tanto

$$\left( \rho AV \right)_1 - \left( \rho AV \right)_1 - \frac{\partial \rho AV}{\partial X} \Big|_1 \Delta X = 0 \quad ( 5-41 )$$

entonces

$$\frac{\partial \rho AV}{\partial X} = 0 \quad ( 5-42 )$$

o bien

$$\rho AV = \text{Constante} \quad ( 5-43 )$$

evidentemente la constante es el gasto  $\dot{m}$

la ecuación ( 5-43 ) se puede reescribir como

$$\dot{m} = \rho AV \quad ( 5-44 )$$

para un gas perfecto se cumple que

$$P = \rho RT \quad ( 5-45 )$$

donde  $P$  es la presión absoluta,  $\rho$  la densidad,  $R$  la constante del gas y  $T$  la temperatura absoluta.

Despejando  $\rho$  de la ecuación ( 5-45 ) se tiene



$$\rho = \frac{P}{R T} \quad ( 5-46 )$$

substituyendo ( 5-46 ) se obtiene

$$\dot{m} = \frac{P}{R T} A V \quad ( 5-47 )$$

multiplicando y dividiendo el segundo miembro de ( 5-47 ) por la relación de calores específicos k se llega a

$$\dot{m} = \frac{k P}{k R T} A V \quad ( 5-48 )$$

la ecuación ( 5-48 ) se puede escribir como

$$\dot{m} = \frac{k P A}{\sqrt{k R T}} \frac{V}{\sqrt{k R T}} \quad ( 5-49 )$$

por otro lado, por definición se sabe que:

$$M = \frac{V}{\sqrt{k R T}} \quad ( 5-50 )$$

donde M es el número de Mach.

Substituyendo ( 5-50 ) en ( 5-49 ) se llega a

$$\dot{m} = \frac{k P}{\sqrt{k R T}} A M \quad ( 5-51 )$$

la ecuación ( 5-51 ) puede expresarse como

$$\dot{m} = P A M \sqrt{\frac{k}{R T}} \quad ( 5-52 )$$

Diferenciando logarítmicamente la ecuación ( 5-52 ) se tiene

$$\frac{dP}{P} + \frac{dA}{A} + \frac{dM}{M} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-53 )$$

La ecuación ( 5-53 ) es la Ecuación de la Conservación de la Masa en función del Número de Mach.

#### 5-4.2 Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento ( Ley del Impulso ).

" La suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son iguales a la razón de cambio de la cantidad de movimiento "

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \quad ( 5-54 )$$

Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control de la Fig. ( 5-4 ) son las de presión, las de fricción y el peso del fluido. Si se desprecia éste último término, la ecuación de la cantidad de movimiento puede escribirse como ( Fig. 5-5 )

$$PA + \left( P + \frac{dP}{2} \right) dA - \left( \bar{P} + dP \right) \left( A + dA \right) - dFr = \rho AV \left( V + dV \right) - \rho AV^2 \quad ( 5-55 )$$

Desarrollando ( 5-55 ) se tiene

$$PA + PdA + \frac{dAdP}{2} - PA - PdA - AdP - dAdP - dFr = \rho AV^2 + \rho AVdV - \rho AV^2 \quad ( 5-56 )$$

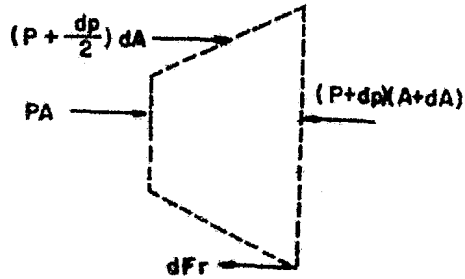


FIG. 5-5 VOLUMEN DE CONTROL

Simplificando y despreciando los términos de segundo orden, la ecuación ( 5-56 ) se expresa como

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{dFr}{\rho A} + V dV = 0 \quad ( 5-57 )$$

ahora, substituyendo  $\rho$  por su equivalente (  $P/RT$  ) en el primer término de ( 5-57 )

$$\frac{dP}{\frac{P}{RT}} + \frac{dFr}{\rho A} + V dV = 0 \quad ( 5-58 )$$

y

$$RT \frac{dP}{P} + \frac{dFr}{\rho A} + V dV = 0 \quad ( 5-59 )$$

multiplicando por  $k$  en el primer término y además dividiendo -- por  $V^2$  todos los miembros en ( 5-59 ) se tiene

$$\frac{kRT}{kV^2} \frac{dP}{P} + \frac{dFr}{\rho AV^2} + \frac{dV}{V} = 0 \quad ( 5-60 )$$

substituyendo el número de Mach por su equivalente se tiene --

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dFr}{\rho AV^2} + \frac{dV}{V} = 0 \quad ( 5-61 )$$

si se diferencia la ecuación ( 5-50 ) se obtiene

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad ( 5-62 )$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad ( 5-63 )$$

substituyendo ( 5-63 ) en ( 5-61 ) se tiene

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dFr}{\rho AV^2} + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-64 )$$

la ecuación ( 5-64 ) es la ecuación de la Conservación de la -  
Cantidad de Movimiento en función del Número de Mach.

Como resultará evidente de ( 5-64 ), si el término debido a la  
fricción es despreciado, la ecuación puede escribirse como

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-65 )$$

#### 5-4.3 Ecuación de la conservación de la energía

" La energía que entra a un volumen de control menos la que --  
sale es cero "

De esta Ley se desprendió la primera Ley de la Termodinámica -  
gracias al descubrimiento de Joule y Thompson del " Equivalente ---

Mecánico del Calor ".

La primera Ley de la Termodinámica dice que: " La energía que entra menos la que sale por unidad de tiempo es igual al trabajo - hecho por el fluido cruzando el volumen de control menos el calor ganado por el mismo atravesando su frontera en esa misma unidad de tiempo ".

Las formas de energía más comunes son:

- a) energía cinética (  $V^2/2$  )  $\dot{m}$
- b) energía potencial (  $gZ$  )  $\dot{m}$
- c) energía interna (  $u$  )  $\dot{m}$

Considérese el volumen de control de la Fig. 5-4. La energía que entra por unidad de tiempo es:

$$\dot{m} \left( \frac{V^2}{2} + gZ + u \right)$$

y sale :

$$\dot{m} \left( \frac{V^2}{2} + gZ + u + \frac{\partial(V^2/2)}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial(gZ)}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial(u)}{\partial X} \Delta X \right)$$

la entrada neta por unidad de tiempo es:

$$\dot{m} \frac{\partial(V^2/2 + gZ + u)}{\partial X} \Delta X$$

Ahora, fijándose en la pared 1 de la Fig. 5-4, el fluido para

entrar ( cruzando el volumen de control ) necesitó que se le aplicara una fuerza  $PA$  para desplazarlo una distancia  $\delta l$  en la unidad de tiempo. Por lo que el trabajo hecho sobre el fluido por unidades de tiempo viene dado por:

$$PA \frac{\delta l}{\delta t} = PAV$$

y en la pared 2 el trabajo por unidad de tiempo es:

$$PAV + \frac{\partial PAV}{\partial X} \Delta X$$

poniendo atención a los signos, se tiene que el trabajo por unidad de tiempo hecho por el fluido es:

$$PAV - ( PAV + \frac{\partial PAV}{\partial X} \Delta X ) = - \frac{\partial PAV}{\partial X} \Delta X$$

recordando que

$$\rho v = 1$$

donde  $v$  es el volumen específico, se tiene:

$$- \frac{\partial PAV}{\partial X} \Delta X = - \frac{\partial P v A \rho V}{\partial X} \Delta X = - \dot{m} \frac{\partial P v}{\partial X} \Delta X$$

ya que  $\dot{m} = \rho AV$

Si no existe transferencia de calor en las paredes y el fluido no efectúa ningún trabajo de flecha, la ecuación de la conservación de la energía puede escribirse como

$$\dot{m} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{V^2}{2} + gZ + u \right) \Delta X = - \dot{m} \frac{\partial Pv}{\partial X} \Delta X \quad ( 5-66 )$$

la cual puede escribirse como

$$\frac{V^2}{2} + gZ + u + Pv = \text{cte} \quad ( 5-67 )$$

al integrarse la ecuación ( 5-66 ).

Por definición la entalpía específica para un gas ideal es

$$h = u + Pv \quad ( 5-68 )$$

al substituir ( 5-68 ) en ( 5-67 ) se obtiene

$$\frac{V^2}{2} + gZ + h = \text{cte} \quad ( 5-69 )$$

ya que para un flujo compresible el término debido a la energía potencial es muy pequeño, éste puede despreciarse y por lo tanto la ecuación ( 5-69 ) se reduce a

$$\frac{V^2}{2} + h = \text{cte} \quad ( 5-70 )$$

y se puede reescribir como

$$\frac{1}{2} ( V_1^2 - V_2^2 ) + ( h_1 - h_2 ) = 0 \quad ( 5-71 )$$

o bien en forma diferencial como

$$dh + d \left( \frac{V^2}{2} \right) = 0 \quad ( 5-72 )$$

y ya que

$$d \left( \frac{V^2}{2} \right) = VdV \quad ( 5-73 )$$

se tiene

$$dh + VdV = 0 \quad ( 5-74 )$$

recordando que

$$dh = C_p dT \quad ( 5-75 )$$

Substituyendo ( 5-75 ) en ( 5-74 ) se obtiene

$$C_p dT + VdV = 0 \quad ( 5-76 )$$

Dividiendo por  $C_p$  da

$$dT + \frac{V}{C_p} dv = 0 \quad ( 5-77 )$$

Multiplicando por  $R = C_p - C_v$  ( diferencia de calores específicos ) se tiene

$$R dT + \frac{C_p - C_v}{C_p} VdV = 0 \quad ( 5-78 )$$

La que se escribe ( recordando que  $k = C_p/C_v$  ) como



$$RdT + \frac{k-1}{k} VdV = 0 \quad ( 5-79 )$$

Multiplicando y dividiendo por T el primer término de ( 5-79 ) se obtiene

$$RT \frac{dT}{T} + \frac{k-1}{k} VdV = 0 \quad ( 5-80 )$$

Dividiendo por RT da

$$\frac{dT}{T} + (k-1) \frac{V}{kRT} dV = 0 \quad ( 5-81 )$$

Multiplicando y dividiendo por V en ( 5-81 ) se tiene

$$\frac{dT}{T} + (k-1) \frac{V^2}{kRT} \frac{dV}{V} = 0 \quad ( 5-82 )$$

Al substituir el número de Mach por su equivalente se llega a

$$\frac{dT}{T} + (k-1) M^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad ( 5-83 )$$

Si ahora se substituye ( 5-63 ) en ( 5-83 ) se tiene

$$\frac{dT}{T} + (k-1) M^2 \left[ \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \right] \quad ( 5-84 )$$

Desarrollando se obtiene

$$\frac{dT}{T} + (k-1) M^2 \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} (k-1) M^2 \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-85 )$$

Agrupando

$$\left[ 1 + \frac{1}{2} (k-1) M^2 \right] \frac{dT}{T} + (k-1) M dM \quad ( 5-86 )$$

Separando variables

$$\frac{dT}{T} + \frac{(k-1) M}{1 + \frac{1}{2} (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-87 )$$

Ordenando

$$\frac{1}{2} \frac{dT}{T} + \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-88 )$$

La ecuación ( 5-88 ) es la ecuación de la energía en términos del número de Mach para un sistema donde la transferencia de calor y el trabajo mecánico son nulos.

Como resultará evidente, las tres ecuaciones se han deducido de acuerdo a las necesidades presentes en este trabajo.

### 5.5 Aplicación sencilla de las tres ecuaciones a una tobera convergente-divergente (TCD) isoentrópica.

Empleándose las tres ecuaciones obtenidas en la sección ante--

rior y partiendo de un estado de estancamiento, se determinarán los parámetros en la garganta y a la descarga de una TCD. A través de esta sección se emplearán los subíndices (o), (g) y (d) para definir: Los parámetros de estancamiento, los de la garganta y a la descarga de la tobera respectivamente. Para ejemplificar lo anterior, en la última parte de esta sección se desarrollará un caso en el cual el fluido de trabajo es un vapor saturado seco.

### 5-5.1 Determinación de los parámetros críticos en una TCD.

La ecuación de la conservación de la masa es

$$\frac{dP}{P} + \frac{dA}{A} + \frac{dM}{M} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-53 )$$

La ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento es

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-65 )$$

La ecuación de la conservación de la energía es

$$\frac{1}{2} \frac{dT}{T} + \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-88 )$$

La ecuación ( 5-88 ) en forma integral es

$$\frac{1}{2} \int \frac{dT}{T} + \int \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-89 )$$

y en forma de integral definida ( de 0 a g ) puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_g} \frac{dT}{T} + \int_{M_0}^{M_g} \frac{(k-1) M}{2+(k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-90 )$$

La integración del primer término de ( 5-90 ) es

$$\frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_g} \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \text{LN } T \Big|_{T_0}^{T_g} = \frac{1}{2} \left| \frac{T_g}{T_0} \right| \quad ( 5-91 )$$

La segunda integral de ( 5-90 ) puede efectuarse como sigue

$$\int_{M_0}^{M_g} \frac{(k-1) M}{2+(k-1) M^2} dM \quad ( 5-92 )$$

Haciendo un cambio de variable se tiene

$$u = 2 + (k-1) M^2 \quad ( 5-93 )$$

Diferenciado ( 5-93 ) da

$$du = 2 (k-1) M dM$$

y

$$dM = \frac{du}{2(k-1) M} \quad ( 5-94 )$$

Substituyendo ( 5-93 ) y ( 5-94 ) en ( 5-92 ) se tiene

$$\int_{M_0}^{Mg} \frac{(k-1) M}{u} \frac{du}{2(k-1) M} = \frac{1}{2} \text{LN} \left| u \right|_{M_0}^{Mg} \quad ( 5-95 )$$

Poniendo la variable original y efectuando el limite de ( 5-95 ) se obtiene que

$$\int_{M_0}^{Mg} \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = \frac{1}{2} \text{LN} \left| \frac{2 + (k-1) Mg^2}{2 + (k-1) M_0^2} \right| \quad ( 5-96 )$$

Por lo que la solución a ( 5-90 ) es

$$\frac{1}{2} \text{LN} \left| \frac{Tg}{T_0} \right| + \frac{1}{2} \text{LN} \left| \frac{2 + (k-1) Mg^2}{2 + (k-1) M_0^2} \right| \quad ( 5-97 )$$

o bien

$$\frac{Tg \left[ 2 + (k-1) Mg^2 \right]}{T_0 \left[ 2 + (k-1) M_0^2 \right]} = 1 \quad ( 5-98 )$$

Ya que  $M_0 = 0$  y  $Mg = 1$  para el flujo crítico ahogado, la ecuación ( 5-98 ) puede simplificarse a

$$\frac{Tg}{T_0} \left[ \frac{k+1}{2} \right] = 1 \quad ( 5-99 )$$

Al despejar Tg de ( 5-99 ) se llega a

$$T_g = \left[ \frac{2}{k+1} \right] T_o \quad ( 5-100 )$$

A la expresión ( 5-100 ) se le denomina " Temperatura crítica " del fluido, ahora igualando ( 5-65 ) y ( 5-88 ) se tiene

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} + \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM \quad ( 5-101 )$$

Pasando todos los términos al primer miembro se tiene

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dM}{M} - \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-102 )$$

Agrupando términos se tiene

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \left[ \frac{1}{M} - \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} \right] dM = 0 \quad ( 5-103 )$$

La ecuación ( 5-103 ) puede escribirse como

$$\frac{dP}{P} + k \left[ \frac{2M}{2 + (k-1) M^2} \right] dM = 0 \quad ( 5-104 )$$

La ecuación ( 5-104 ) en forma de integral definida es

$$\int_{P_o}^{P_g} \frac{dP}{P} + k \int_{M_o}^{M_g} \frac{2M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-105 )$$

Como en el caso anterior, la integración del primer miembro de ( 5-105 ) es

$$\int_{P_0}^{P_g} \frac{dP}{P} = \text{LN} \left| P \right| \Big|_{P_0}^{P_g} = \text{LN} \left| \frac{P_g}{P_0} \right| \quad ( 5-106 )$$

La integración del segundo miembro es

$$k \int_{M_0}^{M_g} \frac{2M}{2 + (k-1) M^2} dM = \frac{k}{k-1} \text{LN} \left| \frac{2 + (k-1) M_g^2}{2 + (k-1) M_0^2} \right| \quad ( 5-107 )$$

Al emplearse ( 5-93 ) y ( 5-94 ) .

Por lo que la solución a ( 5-104 ) es

$$\text{LN} \left| \frac{P_g}{P_0} \right| + \frac{k}{k-1} \text{LN} \left| \frac{2 + (k-1) M_g^2}{2 + (k-1) M_0^2} \right| = 0 \quad ( 5-108 )$$

Efectuado el antilogaritmo se tiene

$$\frac{P_g}{P_0} \left[ \frac{2 + (k-1) M_g^2}{2 + (k-1) M_0^2} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-109 )$$

Como se mencionó con anterioridad  $M_0 = 1$  y  $M_g = 1$  para un flujo ahogado o crítico, entonces la ecuación ( 5-109 ) se reduce a

$$\frac{P_g}{P_0} \left[ \frac{k+1}{2} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-110 )$$

Al despejar  $P_g$  de la ecuación ( 5-110 ) se llega a

$$P_g = P_o \left[ \frac{k+1}{2} \right]^{-k/(k-1)} \quad ( 5-111 )$$

La expresión ( 5-111 ) es llamada " Presión crítica " del fluido.

Los demás parámetros en la garganta pueden evaluarse como sigue

Recordando que se supone un proceso isoentrópico donde se cumple que

$$P_g v_g^k = P_o v_o^k \quad ( 5-112 )$$

o bien

$$\frac{v_g}{v_o} = \left[ \frac{P_o}{P_g} \right]^{1/k} \quad ( 5-113 )$$

y

$$v_g = v_o \left[ \frac{P_o}{P_g} \right]^{1/k} \quad ( 5-114 )$$

La ecuación ( 5-114 ) sirve para evaluar el " Volumen específico crítico " del fluido.

La velocidad del sonido y del fluido en la garganta es

$$c_g = V_g = \sqrt{k P_g v_g} \quad ( 5-115 )$$



La expresión ( 5-115 ) que es la "Velocidad del fluido" se obtuvo a partir de las definiciones dadas en el capítulo 4 y en las primeras secciones de éste.

La entalpía está dada por

$$h_g = h_o - \frac{v_g^2}{2} \quad ( 5-116 )$$

La expresión ( 5-116 ) que es la " Entalpía específica crítica " del fluido puede deducirse fácilmente a partir de la ecuación (5-71)

Por último, el " gasto crítico " de fluido esta dado por

$$\dot{m} = \frac{V_g A_g}{v_g} \quad ( 5-117 )$$

La ecuación ( 5-117 ) se deduce de la ecuación de conservación de la masa ( continuidad ).

Las ecuaciones ( 5-111 ), ( 5-114 ), ( 5-115 ), ( 5-116 ) y -- ( 5-117 ) definen las condiciones en la garganta o bien el estado crítico del fluido. Nótese que en lo anterior, se tomó un coeficiente de descarga igual a la unidad.

#### 5-5.2 Determinación de los parámetros a la salida de una TCD operando bajo flujo ahogado.

Al sumar algebraicamente las ecuaciones ( 5-53 ) y ( 5-88 ) se

tiene

$$\frac{dP}{P} + \frac{dA}{A} + \frac{dM}{M} + \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-118 )$$

La ecuación ( 5-118 ) en forma de integral definida es

$$\int_{P_g}^{P_d} \frac{dP}{P} + \int_{A_g}^{A_d} \frac{dA}{A} + \int_{M_g}^{M_d} \frac{dM}{M} + \int_{M_g}^{M_d} \frac{(k-1) M}{2 + (k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-119 )$$

como se ve de ( 5-119 ), los primeros tres términos pueden integrarse directamente, mientras el cuarto o último debe integrarse - empleando un cambio de variable ( como antes fue notado ). Al emplearse el resultado dado en la ecuación ( 5-96 ) (cambiando el límite de integración), la solución a ( 5-119 ) puede ser escrita como:

$$\text{LN} \left| \frac{P_d}{P_g} \right| + \text{LN} \left| \frac{A_d}{A_g} \right| + \text{LN} \left| \frac{M_d}{M_g} \right| + \frac{1}{2} \text{LN} \left| \frac{(k-1) M}{2+(k-1) M^2} \right| = 0 \quad ( 5-120 )$$

La ecuación ( 5-120 ) puede escribirse como

$$\text{LN} \left[ \frac{(P_d)(A_d)(M_d)}{(P_g)(A_g)(M_g)} \left[ \frac{2+(k-1) M_d}{2+(k-1) M_g} \right]^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad ( 5-121 )$$

Sacando el antilogaritmo de ( 5-121 ) se tiene

$$\frac{(P_d)(A_d)(M_d)}{(P_g)(A_g)(M_g)} \sqrt{\frac{2+(k-1) M_d^2}{2+(k-1) M_g^2}} = 1 \quad ( 5-122 )$$

Ya que para flujo ahogado  $M_g = 1$ , entonces ( 5-122 ) se reduce a

$$\frac{(P_d)(A_d)(M_d)}{(P_g)(A_g)} \sqrt{\frac{2+(k-1) M_d^2}{k+1}} = 1 \quad ( 5-123 )$$

La ecuación ( 5-123 ) presenta dos incógnitas ( $P_d$  y  $M_d$ ). Para su solución se requiere una segunda ecuación la que se obtiene como sigue:

Restando algebraicamente las ecuaciones ( 5-65 ) y ( 5-88 ) se tiene

$$\frac{1}{KM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dM}{M} - \frac{(k-1) M}{2+(k-1) M^2} dM = 0 \quad ( 5-124 )$$

Agrupando términos semejantes y multiplicando por  $KM^2$  se obtiene

$$\frac{dP}{P} + KM^2 \left[ \frac{1}{M} - \frac{(k-1) M}{2+(k-1) M^2} \right] dM = 0 \quad ( 5-125 )$$

Desarrollando y simplificando ( 5-125 ) se tiene

$$\frac{dP}{P} + K \left[ \frac{2M}{2+(k-1)M^2} \right] dM = 0 \quad ( 5-126 )$$

Aplicando los resultados obtenidos con anterioridad, la solución a ( 5-126 ) da

$$L_N \left| \frac{P_d}{P_g} \right| + \frac{k}{k-1} L_N \left| \frac{2+(k-1) M_d}{2+(k-1) M_g} \right| = 0 \quad ( 5-127 )$$

Lo que se reduce a

$$\frac{P_d}{P_g} \left[ \frac{2+(k-1) M_d^2}{2+(k-1) M_g^2} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-128 )$$

Ya que  $M_g = 1$ , la ecuación ( 5-128 ) se reduce a

$$\frac{P_d}{P_g} \left[ \frac{2+(k-1) M_d^2}{k+1} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-129 )$$

o bien

$$\frac{P_d}{P_g} = \left[ \frac{2+(k-1) M_d^2}{k+1} \right]^{-k/(k-1)} \quad ( 5-130 )$$

Ahora, substituyendo ( 5-130 ) en ( 5-123 ) da

$$\frac{(A_d)(M_d)}{A_g} \sqrt{\frac{2+(k-1) M_d^2}{k+1}} \left[ \frac{2+(k-1) M_d^2}{k+1} \right]^{-k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-131 )$$

o bien

$$\frac{(A_d)(M_d)}{A_g} \left[ \frac{2+(k-1) M_d^2}{k+1} \right]^{-(k+1)/(2(k-1))} = 1 \quad ( 5-132 )$$

De la ecuación ( 5-132 ) se obtienen dos valores para  $M_d$ , uno corresponde a un flujo supersónico mientras que el otro a un flujo subsónico. Como se ve de esta misma ecuación, los números de MACH sólo están gobernados por la relación de áreas que se tenga.

La ecuación ( 5-132 ) puede escribirse como

$$Md \left[ \frac{2+(k-1) Md^2}{k+1} \right]^{-(k-1)/2(k-1)} - \frac{Ag}{Ad} = 0 \quad ( 5-133 )$$

La ecuación ( 5-133 ) puede resolverse empleándose el metodo - de Newton - Raphson de la siguiente manera

Llámesese

$$F (0) = Md \left[ \frac{2+(k-1)Md^2}{k+1} \right]^{-(k+1)/2(k-1)} - \frac{Ag}{Ad} \quad ( 5-134 )$$

y

$$F'(0) = F(1) = - Md \left[ \frac{2+(k-1)Md^2}{k+1} \right]^{(-3k+1)/2(k-1)} + \\ + \left[ \frac{2+(k-1)Md^2}{k+1} \right]^{-(k+1)/2(k-1)} \quad ( 5-135 )$$

Entonces

$$Md = Mdi - \frac{F(0)}{F(1)}$$

Donde Mdi es un valor inicial. Con el valor Mdi se calcula F(0) y F(1), si el cociente F(0)/F(1) tiende a cero, el valor Mdi = Md. - Si lo anterior no se cumple, el valor Md calculado sirve como inicial para el siguiente cálculo y así sucesivamente hasta que F(0)/F(1) sea prácticamente cero.

Una vez evaluado Md, los demás parámetros se evalúan como si--

que :

De la ecuación ( 5-130 ) se tiene

$$P_d = P_g \left[ \frac{2 + (k-1) M_d^2}{k+1} \right]^{-k/(k-1)} \quad ( 5-136 )$$

De la ecuación ( 5-112 ) (cambiándose subíndice) se tiene

$$v_d = v_g \left[ \frac{P_g}{P_d} \right]^{1/k} \quad ( 5-137 )$$

La velocidad del sonido es

$$c_d = \sqrt{(k)(P_d)(v_d)} \quad ( 5-138 )$$

La velocidad del fluido es

$$V_d = (c_d) (M_d) \quad ( 5-139 )$$

La temperatura del fluido por

$$\frac{(P_d)(v_d)}{T_d} = \frac{(P_g)(v_g)}{T_g} \quad ( 5-140 )$$

es decir

$$T_d = \frac{(P_d)(v_d)(T_g)}{(P_g)(v_g)} \quad ( 5-141 )$$

Y la entalpía por

$$h_d = h_g + \frac{V_g^2}{2} - \frac{V_d^2}{2} \quad ( 5-142 )$$

Las ecuaciones ( 5-133 ), ( 5-136 ), ( 5-137 ), ( 5-138 ), -- ( 5-139 ), ( 5-141 ) y ( 5-142 ) definen el estado del fluido a la descarga de la TCD.

### 5-5.3 Determinación de los parámetros en la garganta de una TCD - bajo flujo no ahogado.

Con las anteriores ecuaciones, se determinan todos los parámetros en un flujo ahogado, cuando la tobera no está operando bajo flujo ahogado, sus características pueden determinarse al suponer diversos gastos inferiores al gasto crítico. Los parámetros en la garganta pueden evaluarse como sigue:

La ecuación ( 5-109 ) pueden reescribirse como

$$\frac{P_g}{P_o} \left[ \frac{2 + (k-1) M_g^2}{2} \right]^{k/(k-1)} \quad ( 5-143 )$$

Substituyendo el número de MACH remante, por su equivalente  $V_g / \sqrt{(k)(P_g)(v_g)}$

Recordando que  $V_g = \dot{m} v_g / A$  se tiene

$$\frac{P_g}{P_o} \left[ 1 + \frac{(k-1)}{2k} \left( \frac{\dot{m}}{A_g} \right)^2 \frac{v_g}{P_g} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-144 )$$

Al emplearse la ecuación ( 5-114 ), la ecuación ( 5-144 ) da

$$\frac{P_g}{P_o} \left[ 1 + \frac{(k-1)}{2k} \left( \frac{\dot{m}}{A_g} \right)^2 v_o P_o^{1/k} P_g^{(k+1)/k} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-145 )$$

La ecuación ( 5-145 ) puede resolverse para  $P_g$  empleándose el metodo de Newton - Raphson antes mencionado.

Los demás parámetros se evalúan como sigue

$$v_g = v_o \left[ \frac{P_o}{P_g} \right]^{1/k} \quad ( 5-114 )$$

$$c_g = \sqrt{(k)(P_g)(v_g)} \quad ( 5-115 )$$

$$V_g = \frac{\dot{m}}{A} v_g \quad ( 5-146 )$$

$$M_g = \frac{V_g}{c_g} \quad ( 5-147 )$$

De la ecuación ( 5-98 ) se tiene

$$T_g = \frac{2(T_o)}{2+(k-1) M_g^2} \quad ( 5-148 )$$

Y la entalpía con



$$h_g = h_o - \frac{V^2}{2g} \quad ( 5-116 )$$

5-5.4 Determinación de los parámetros a la descarga de una TCD bajo flujo no ahogado.

Reescribiendo las ecuaciones ( 5-122 ) y ( 5-128 )

$$\frac{(Pd)(Ad)(Md)}{(Pg)(Ag)(Mg)} \sqrt{\frac{2 + (k-1) Md^2}{2 + (k-1) Mg^2}} = 1 \quad ( 5-122 )$$

$$\frac{Pd}{Pg} \left[ \frac{2 + (k-1) Md^2}{2 + (k-1) Mg^2} \right]^{k/(k-1)} = 1 \quad ( 5-128 )$$

De la ecuación ( 5-128 ) se tiene

$$\frac{Pd}{Pg} = \left[ \frac{2 + (k-1) Md^2}{2 + (k-1) Mg^2} \right]^{-k/(k-1)} \quad ( 5-149 )$$

Substituyendo ( 5-149 ) en ( 5-122 ) se obtiene

$$\frac{(Ad)(Md)}{(Ag)(Mg)} \left[ \frac{2 + (k-1) Md^2}{2 + (k-1) Mg^2} \right]^{-(k+1)/(2(k-1))} = 1 \quad ( 5-150 )$$

La ecuación ( 5-150 ) puede resolverse para Md empleandose una vez más el metodo de Newton Raphson. Habiéndose calculado Md, los demás parámetros se evaluán como sigue

$$P_d = P_g \left[ \frac{2 + (k-1) \frac{M_d^2}{M_g^2}}{2 + (k-1) \frac{M_d^2}{M_g^2}} \right]^{-k/(k-1)} \quad ( 5-151 )$$

$$v_d = v_g \left[ \frac{P_g}{P_d} \right]^{1/k} \quad ( 5-137 )$$

$$c_d = \sqrt{(k)(P_d)(v_d)} \quad ( 5-138 )$$

$$V_d = (c_d) (M_d) \quad ( 5-139 )$$

$$T_d = \frac{(P_d)(V_d)(T_g)}{(P_g)(v_g)} \quad ( 5-141 )$$

Y la entalpfa como

$$h_d = h_g + \frac{v_g^2}{2} + \frac{V_d^2}{2} \quad ( 5-142 )$$

### 5-5.5 Ejemplo numérico.

Supóngase que una TCD esta siendo alimentada por un vapor saturado seco con una relación de calores específicos  $k = 1.135$ . Los parámetros de estancamientos son:

$h_o = 27093.28$  Joules/Kg. ;  $T_o = 392.9^\circ\text{K}$  ;  $P_o = 199248.16$  Pa y -----  
 $v_o = 0.89$  m<sup>3</sup>/kg.

- a) Calcúlese los parámetros críticos para un flujo ahogado.
- b) Si se desea un flujo subsónico en la descarga de la tobera para el flujo anterior.  
¿ Cuáles son los parámetros del fluido en la descarga ?
- c) Si se desea un flujo supersónico en la descarga de la tobera para el mismo flujo.  
¿ Cuáles son los parámetros del fluido en la descarga ?
- d) Si la tobera no esta ahogada, calcúlese los parámetros en la garganta y a la salida de la tobera para  $\dot{m} = 3 \text{ Kg/s}$ . -  
Los diámetros de la garganta y a la descarga son 0.14 y --  
0.248 m respectivamente

solución

- a) Parámetros críticos

De la ecuación ( 5-100 )

$$T_g = \frac{(2)(392.9)}{(1.135+1)} = 368 \text{ [}^\circ\text{K]}$$

De la ecuación ( 5 -110 )

$$P_g = (199248.16) \left[ \frac{1.135+1}{2} \right]^{-1.135/(1.135-1)} = 115051.94 \text{ [Pa]}$$

De la ecuación ( 5-114 )

$$v_g = 0.89 \left[ \frac{199248.16}{115051.94} \right]^{1/1.135}$$

De la ecuación ( 5-115 )

$$c_g = V_g = \sqrt{(1.135)(115051.94)(1.4439)} = 434.22 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-116 )

$$h_g = 2709328.13 - \frac{(434.22)^2}{2} = 2615054.62 \text{ [J/Kg]}$$

Y de la ecuación ( 5-117 )

$$\dot{m} = \frac{(434.22)(\pi)(0.14)^2}{(4)(1.4439)} = 4.63 \text{ [Kg/s]}$$

b) Parámetros en la descarga ( flujo subsónico )

El valor de  $M_d$  que satisface a la ecuación ( 5-133 ) para un -  
régimen subsónico es

$$M_d = 0.194$$

De la ecuación ( 5-136 )

$$P_d = (115051.94) \left[ \frac{2+(1.135-1)(0.194)^2}{1.135+1} \right]^{-1.135/(1.135-1)}$$
$$= 195044 \text{ [Pa]}$$

De la ecuación ( 5-137 )

$$v_d = 1.4439 \left[ \frac{115051.94}{195044} \right]^{1/1.135} = 0.9069 \text{ [m}^3\text{/Kg]}$$

De la ecuación ( 5-138 )

$$c_d = \sqrt{(1.135)(195044)(0.9069)} = 448 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-139 )

$$V_d = (448)(0.194) = 86.9 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-141 )

$$T_d = \frac{(195044)(0.9069)(368)}{(115051.94)(1.4439)} = 391.8 \text{ [°K]}$$

Y de la ecuación ( 5-142 )

$$h_d = 2615054.62 + \frac{(434.22)^2}{2} - \frac{(86.9)^2}{2} = 2705552.32 \text{ [J/Kg]}$$

c) Parámetro en la descarga ( flujo supersónico )

El valor que satisface a la ecuación ( 5-133 ) para un régimen supersónico es

$$M_d = 2.357$$

De la ecuación ( 5-136 )

$$P_d = (115051.94) \left[ \frac{2+(1.135-1)(2.357)^2}{1.135+1} \right]^{-1.135/(1.135-1)}$$
$$= 13709.65 \text{ [Pa]}$$

De la ecuación ( 5-137 )

$$v_d = 1.4439 \left[ \frac{115051.94}{195044} \right]^{1/1.135} = 0.9069 \text{ [m}^3/\text{Kg]}$$

De la ecuación ( 5-138 )

$$c_d = \sqrt{(1.135)(195044)(0.9069)} = 448 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-139 )

$$V_d = (448)(0.194) = 86.9 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-141 )

$$T_d = \frac{(195044)(0.9069)(368)}{(115051.94)(1.4439)} = 391.8 \text{ [}^\circ\text{K]}$$

Y de la ecuación ( 5-142 )

$$h_d = 2615054.62 + \frac{(434.22)^2}{2} - \frac{(86.9)^2}{2} = 2705552.32 \text{ [J/Kg]}$$

d) Parámetros en la garganta para un flujo no ahogado

El valor de  $P_g$  que satisface a la ecuación ( 5-145 ) es

$$P_g = 179895.49 \text{ [Pa]}$$

De la ecuación ( 5-114 )

$$v_g = 0.89 \left[ \frac{199248.16}{179895.49} \right]^{1/1.135} = 0.9738 \text{ [m}^3/\text{Kg]}$$

De la ecuación ( 5-115 )

$$c_g = \sqrt{(1.135)(179895.49)(0.9738)} = 445 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-146 )

$$V_g = \frac{(3)(0.9738)}{0.0154} = 189.78 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-147 )

$$Mg = \frac{189.78}{445.9} = 0.4256$$

De la ecuación ( 5-148 )

$$T_g = \frac{(2)(392.9)}{2+(1.135-1)(0.4256)^2} = 388.2 \text{ [}^\circ\text{K]}$$

Y la entalpfa con la ecuación ( 5-116 )

$$h_g = 2709328.13 - \frac{(189.78)^2}{2} = 2691319.9 \text{ [J/Kg]}$$

Parámetros a la descarga para un flujo no ahogado

El número de MACH que satisface a la ecuación ( 5-150 ) es

$$M_d = 0.1242$$

De la ecuación ( 5-151 )

$$P_d = 179895.49 \left[ \frac{2+(1.135-1)(0.1242)^2}{2+(1.135-1)(0.4256)^2} \right]^{-1.135/(1.135-1)}$$
$$= 197511.65 \text{ [Pa]}$$

De la ecuación ( 5-137 )

$$v_d = 0.9738 \left[ \frac{179895.49}{197511.65} \right]^{1/1.135} = 0.8969 \text{ [m}^3\text{/Kg]}$$

De la ecuación ( 5-138 )

$$c_d = \sqrt{(1.135)(197511.65)(0.8969)} = 448.39 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-139 )

$$V_d = (448.39)(0.1242) = 55.7 \text{ [m/s]}$$

De la ecuación ( 5-141 )

$$T_d = \frac{(197511.65)(0.8969)(388.2)}{(179895.49)(0.9738)} = 392.56 \text{ [}^\circ\text{K]}$$

Y la entalpfa es

$$h_d = 2691319.9 + \frac{(189.78)^2}{2} - \frac{(55.7)^2}{2} = 2707776.88 \text{ [J/Kg]}$$



5.6 Deducción de las propiedades "x", "y" en una onda de choque normal.

Considérese una onda de choque normal, encerrada por un volumen de control de espesor infinitesimal ( Fig. 5-6 ). Se buscarán las relaciones entre las estaciones "x" e "y" ( aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque respectivamente ).

Ya que el volumen de control es infinitesimal, los cambios de área son despreciables.

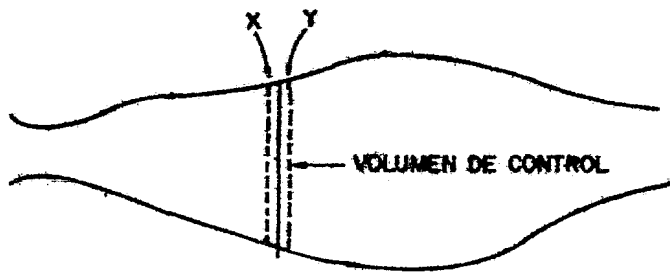


FIG. 5-6 ONDA DE CHOQUE NORMAL

Por tanto, las ecuaciones que gobiernan el flujo premanente -  
son:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho_x V_x = \rho_y V_y \quad \text{" CONTINUIDAD "} \quad ( 5-152 )$$

$$P_x - P_y - \frac{F_r}{A} = \frac{\dot{m}}{A} (V_y - V_x) \quad \text{"MOMENTUM"} \quad (5-153)$$

$$h_x - h_y + \frac{dq/dt}{\dot{m}} = \frac{V_y^2 - V_x^2}{2} \quad \text{"ENERGIA"} \quad (5-154)$$

$$\rho = \rho(P, T) \quad \text{"ESTADO"} \quad (5-155)$$

Ya que la discontinuidad es de espesor infinitesimal, la transferencia de calor y la fricción pueden ser despreciadas para el volumen de control.

De la ecuación (5-88) se tiene

$$\frac{dT}{T} + \frac{2(k-1)M}{2+(k-1)M^2} dM = 0 \quad (5-156)$$

Al integrar entre "x" e "y" ( véase ecuación (5-98) ) se tiene

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2} \quad (5-157)$$

Ahora, reescribiendo (5-152) en términos del número de Mach - se obtiene

$$M_x \frac{P_x}{RT_x} c_x = M_y \frac{P_y}{RT_y} c_y \quad (5-158)$$

Y reemplazando c por su equivalente ( $\sqrt{kRT}$ ) da

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{T_y}{T_x} \frac{M_x}{M_y} \quad (5-159)$$

Substituyendo (5-157) en (5-159) se tiene

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2} \frac{M_x}{M_y} \quad (5-160)$$

Al expresar la ecuación del Momentum para un gas perfecto en términos del número de MACH, se tendrá una ecuación independiente para la relación de presiones.

$$P_x - P_y = \rho_y V_y^2 - \rho_x V_x^2 \quad (5-161)$$

luego

$$P_x - P_y = \frac{P_y}{RT_y} M_y^2 (kRT_y) - \frac{P_x}{RT_x} M_x^2 (kRT_x) \quad (5-162)$$

Entonces

$$P_x (1 + kM_x^2) = P_y (1 + kM_y^2) \quad (5-163)$$

y

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{1 + kM_x^2}{1 + kM_y^2} \quad (5-164)$$

Igualando ( 5-160 ) y ( 5-164 ) se obtiene

$$M_y^2 = \frac{M_x + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1} \quad ( 5-165 )$$

Y entonces la ecuación ( 5-157 ) puede reescribirse como

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{(1 + \frac{k-1}{2} M_x^2) (\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1)}{\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} M_x^2} \quad ( 5-166 )$$

Y la ( 5-164 ) como

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{2k}{k-1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad ( 5-167 )$$

Los demás parámetros pueden evaluarse como sigue

$$v_y = \frac{P_x v_x T_y}{P_y T_x} \quad ( 5-168 )$$

que se obtiene a partir de la ecuación de estado

La velocidad del sonido como

$$c_y = \sqrt{k P_y v_y} \quad ( 5-169 )$$

La velocidad del fluido por

$$V_y = c_y M_y \quad ( 5-170 )$$

Y la entalpfa con

$$h_y = h_x + \frac{V_x^2}{2} - \frac{V_y^2}{2} \quad ( 5-171 )$$

### 5.7 Caso tubo adiabático con fricción ( Flujo de Fanno ).

Si el flujo es adiabático, es decir que no hay pérdidas de calor hacia el exterior de la pared, toda la energía perdida en fricción se transforma en calor.

Este calor producirá un aumento de entropía. La fricción hará que disminuya la presión y por tanto aumenta la velocidad. Al fijarse en la ecuación de la energía donde

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad ( 5-172 )$$

se observa que si aumenta  $V_2$  disminuye  $h_2$ .

En la Fig. ( 5-7 ) se muestra la variación de  $h$  respecto a  $s$  para un fluido con entalpfa de estancamiento  $h_0$  dada.

Estas líneas se denominan " Líneas de Fanno ".

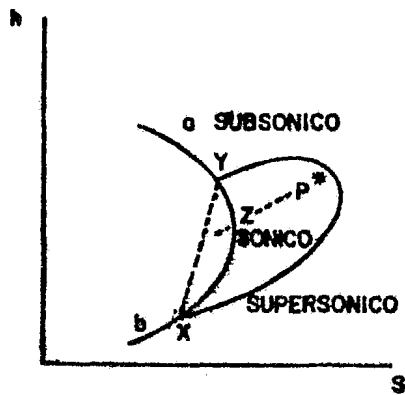


FIG.5-7 FLUJO DE FANNO

Varios tipos de flujo pueden observarse de la figura. Si el flujo es inicialmente subsónico (Punto a en la Fig. ( 5-7 ), la segunda ley de la termodinámica.

Si el flujo es inicialmente supersónico, este puede mantenerse supersónico a través del ducto, su trayectoria sería la representada por bXZ en la Fig. ( 5-7 ). Si el ducto es lo suficientemente largo, una onda de choque ocurrirá y las condiciones variarán bruscamente de acuerdo a la curva representada por la trayectoria bXYZ (de esta misma figura) siempre incrementándose la entropía. El flujo es ahogado cuando ocurren condiciones sónicas a la salida del ducto.

Si el flujo sónico existe a la salida del ducto y la longitud

es incrementada, un reajuste en el flujo ocurre, resultando una reducción del gasto. El flujo resultante se mantiene sónico a la salida. Si se alarga demasiado el tubo, entonces el flujo pasa a ser subsónico incluso a la salida.

5-7.1 Flujo de Fanno de un fluido ideal y deducción de las ecuaciones que gobiernan el flujo de Fanno.

Considerése el volumen de control mostrado en la Fig. ( 5-8 ). Suponiendo que el flujo es estable y que los cambios de altura, la transferencia de calor y el trabajo de flecha son nulos, las ecuaciones gobernantes serán

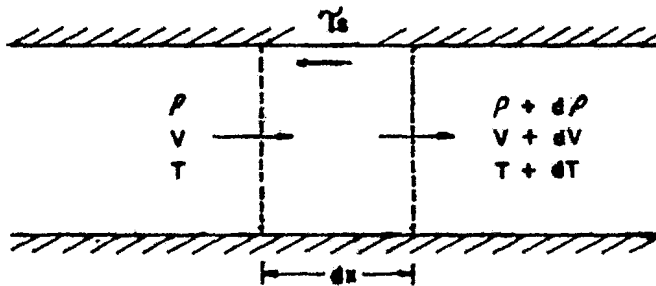


FIG. 5-8 VOLUMEN DE CONTROL

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{" CONTINUIDAD "} \quad ( 5-173 )$$

$$dP + \frac{dFr}{A} + \rho v dv = 0 \quad \text{" MOMENTUM "} \quad ( 5-174 )$$

$$C_p dT + v dv = 0 \quad \text{" ENERGIA "} \quad ( 5-175 )$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{" ESTADO "} \quad ( 5-176 )$$

Si se define el coeficiente de fricción ( $\dot{f}$ ) como 4 veces la -- razón del esfuerzo constante a la presión dinámica, se tiene

$$\dot{f} = \frac{4\tau_s}{\rho V^2 / 2} \quad ( 5-177 )$$

En donde:  $\tau_s$  = esfuerzo constante y  $\rho V^2 / 2$  = presión dinámica

La fuerza de fricción  $dFr$  puede ser escrita en términos del -- factor de fricción y los parámetros del flujo como

$$dFr = \tau_s dA_s = \frac{\dot{f}}{8} \rho V^2 P_e dx \quad ( 5-178 )$$

En donde :  $dA_s = P_e dx$  = área mojada del ducto

$P_e$  = Perímetro mojado

Introduciendo el diámetro hidráulico definido como

$$D_h = \frac{4 A_s}{P_e} \quad ( 5-179 )$$

la ecuación ( 5-178 ) pueda escribirse como

$$dFr = \dot{f} \frac{A}{D_h} \frac{\rho V^2}{2} dx \quad ( 5-180 )$$



Por lo que la ecuación del Momentum ( 5-174 ) llega a ser

$$dP + \frac{f}{D_h} \frac{\rho V^2}{2} dx + VdV = 0 \quad ( 5-181 )$$

El factor 4 (cuatro) en la ecuación ( 5-177 ) fue introducido por conveniencia y por necesidad. Los coeficientes de fricción obtenidos por Nikuradse y Moody pueden ser usados en el flujo de Fanno. Ya que Moody ignoró los efectos del número de Mach, su información solo puede emplearse a números de Mach bajos.

Para facilitar el estudio, se formarán razones de propiedades basadas en un estado de referencia donde el número de Mach sea ---- igual a la unidad. Estas propiedades, es decir donde el número de Mach es uno, aparecerán con un asterisco.

Para ilustrar lo anterior, considérese la relación de temperaturas. Expresando la ecuación ( 5-175 ) en términos del número de Mach (véase ecuación ( 5-88 )) se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{dT}{T} = - \frac{(k-1) M^2}{2+(k-1)M^2} dM \quad ( 5-182 )$$

La solución a ( 5-182 ) es

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2+(k-1)M^2} \quad ( 5-183 )$$

Otras relaciones son

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \frac{k+1}{2+(k-1) M^2} \quad ( 5-184 )$$

La cual se obtiene a partir de las ecuaciones de energía y con  
tinuidad

y

$$\frac{v}{v^*} = \frac{\rho}{\rho^*} = M \frac{k+1}{2+(k-1) M^2} \quad ( 5-185 )$$

Esta, se obtiene de las ecuaciones de continuidad y de estado.

De gran uso en los cálculos de ingeniería es la relación entre el factor de fricción, la longitud del ducto y el número de Mach. Esta relación a continuación se deducirá.

Reescribiendo la ecuación ( 5-64 ) se tiene

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{dFr}{\rho V^2 A} + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-164 )$$

Substituyendo  $dFr$  dado en la ecuación ( 5-180 ) se tiene

$$\frac{1}{kM^2} \frac{dP}{P} + \frac{f}{2D_h} dx + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-186 )$$

Substituyendo ( 5-176 ) da

$$\frac{1}{kM^2} \left[ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \right] + \frac{\dot{f}}{2D_h} dx + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-187 )$$

La cual por continuidad puede reescribirse como

$$\frac{1}{kM^2} \left[ \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \right] + \frac{\dot{f}}{2D_h} dx + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-188 )$$

Al substituir ( 5-63 ) se tiene

$$\frac{1}{2kM^2} \frac{dT}{T} - \frac{1}{kM^2} \frac{dM}{M} + \frac{\dot{f}}{2D_h} dx + \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-189 )$$

Agrupando

$$\frac{\dot{f}}{2D_h} dx + \left[ 1 - \frac{1}{kM^2} \right] \frac{dM}{M} + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2kM^2} \right] \frac{dT}{T} = 0 \quad ( 5-190 )$$

Substituyendo ( 5-88 ) da

$$\frac{\dot{f}}{2D_h} dx + \left[ \frac{kM^2-1}{kM^2} - \frac{(kM^2+1)(k-1)}{k(2+(k-1)M^2)} \right] \frac{dM}{M} = 0 \quad ( 5-191 )$$

Simplificando

$$\frac{\dot{f}}{2D_h} dx + \frac{(2M^2-2)}{kM^2(2+(k-1)M^2)} \frac{dM}{M} = 0 \quad ( 5-192 )$$

la cual en forma integral se expresa como

$$\int \frac{f}{2D_h} dx = \int \frac{2(1-M^2)}{kM^2(2+(k-1)M^2)} \frac{dM}{M} \quad (5-193)$$

Como se ve, la ecuación ( 5-193 ) relaciona el factor de fricción y la longitud de la tubería con el número de Mach.

Para un valor promedio de  $f$ , la ecuación ( 5-193 ) puede integrarse entre dos puntos. Para los fines que se persiguen en este trabajo, es conveniente integral esta ecuación entre un punto cualquiera y el estado de referencia crítico (donde el número de Mach sería unitario). Véase la Fig. ( 5-8 a )

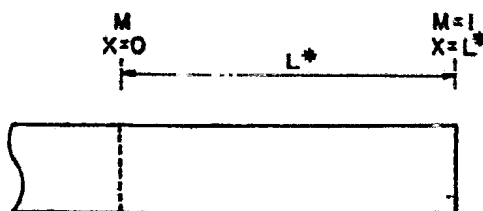


FIG. 5-8a LIMITES DE INTEGRACION.

Tomando en cuenta lo anterior, la integración de la ecuación ( 5-193 ) es como sigue:

La ecuación ( 5-193 ) en forma de integral definida puede es--

cribirse como

$$\int_0^{L^*} \frac{\dot{f}}{D_h} dx = \frac{4}{k} \int_M^{M=1} \frac{(1-M^2) M}{M^k (2+(k-1) M^2)} dM \quad ( 5-194 )$$

En lado izquierdo puede integrarse de la siguiente manera

$$\int_0^{L^*} \frac{\dot{f}}{D_h} dx = \frac{\dot{f}}{D_h} \int_0^{L^*} dx = \frac{\dot{f}}{D_h} x \Big|_0^{L^*} = \frac{\dot{f}}{D_h} L^* \quad ( 5-195 )$$

Mientras que el lado derecho, tiene que solucionarse utilizando un cambio de variable, reescribiendo el lado derecho de ( 5-194 ) se tiene

$$\frac{4}{k} \int_M^{M=1} \frac{(1-M^2) M}{M^k (2+(k-1) M^2)} dM \quad ( 5-196 )$$

Haciendo

$$u = M^2 \quad ( 5-197 )$$

$$du = 2M dM$$

y

$$dM = \frac{du}{2M} \quad ( 5-198 )$$

Substituyendo ( 5-197 ) y ( 5-198 ) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{4}{k} \int_M^{M=1} \frac{(1-M^2) M}{M^4(2+(k-1)M^2)} dM &= \frac{4}{k} \int_M^{M=1} \frac{(1-u) M}{u^2(2+(k-1)u) 2M} du \\ &= \frac{2}{k} \int_M^{M=1} \frac{(1-u)}{u^2(2+(k-1)u)} du \quad (5-199) \end{aligned}$$

La última integral puede resolverse empleando fracciones parciales como sigue

$$\begin{aligned} \frac{(1-u)}{u^2(2+(k-1)u)} &= \frac{A+Bu}{u^2} + \frac{C}{2+(k-1)u} \quad (5-200) \\ &= \frac{(A+Bu)(2+(k-1)u) + Cu^2}{u^2(2+(k-1)u)} \end{aligned}$$

La cual puede reescribirse como

$$\frac{1-u}{u^2(2+(k-1)u)} = \frac{u^2((k-1)B+C) + u((k-1)A+2B) + 2A}{u^2(2+(k-1)u)} \quad (5-201)$$

La ecuación (5-201) se puede reescribir como

$$1-u = u^2((k-1)B+C) + u((k-1)A+2B) + 2A \quad (5-202)$$

Para determinar los coeficientes A, B y C se hace

$$(k - 1) B + C = 0 \quad (5-203)$$

$$(k - 1) A + 28 = -1 \quad (5-204)$$

$$2A = 1 \quad (5-205)$$

Por lo que

$$A = \frac{1}{2} ; \quad B = -\frac{k+1}{4} \quad y \quad C = \frac{(k+1)(k-1)}{4}$$

Substituyendo estos valores en ( 5-200 ) se tiene

$$\frac{1-u}{u^2(2+(k-1)u)} = \frac{1}{2u^2} + \frac{(k+1)}{4u} + \frac{(k+1)(k-1)}{4(2+(k-1)u)} \quad (5-206)$$

Entonces la ecuación ( 5-199 ) puede expresarse como

$$\frac{2}{k} \int_M^{M=1} \frac{(1-u)}{u^2(2+(k-1)u)} du = \frac{2}{k} \int_M^{M=1} \left[ \frac{1}{2u^2} - \frac{(k+1)}{4u} + \frac{(k+1)(k-1)}{4(2+(k-1)u)} \right] du \quad (5-207)$$

Si se descompone la integral, se obtienen tres términos, siguiendo el orden dado en ( 5-207 ) los dos primeros pueden integrarse en forma directa mientras que el último puede resolverse empleando un nuevo cambio variable. Habiéndose hecho lo anterior la solución a ( 5-194 ) es

$$\frac{\dot{f}}{D_h} L^* = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k} L_N \left| \frac{(k+1) M^2}{2+(k-1) M^2} \right| \quad ( 5-208 )$$

La ecuación ( 5-207 ) da el máximo  $fL/D_h$  para cualquier número de Mach inicial.

La longitud de ducto requerida para que el flujo pase de un número de Mach  $M_1$  a otro  $M_2$  puede ser evaluada con la siguiente expresión

$$\frac{\dot{f}}{D_h} L = \left( \frac{\dot{f}}{D_h} L^* \right)_{M_1} - \left( \frac{\dot{f}}{D_h} L^* \right)_{M_2} \quad ( 5-209 )$$

5-7.2 Ejemplo de aplicación sencillo de esto último.

Suponiendo un ducto aislado de sección transversal circular de diámetro  $D_i = 0.248$  m es alimentado de un fluido compresible. El número de Mach a la entrada de este ducto es  $M = 0.194$ , si el coeficiente medio de fricción  $\dot{f} = 0.02$  y la longitud de éste es de 10m ¿Cuál es el número de Mach en su descarga ? tómesese una relación de calores específicos  $k = 1.135$ .

Solución

$$\frac{\dot{f}}{D_h} L = \frac{(0.02)(10)}{(0.248)} = 0.8$$



De la ecuación ( 5-208 )

$$\frac{f}{D_h} L^* = \frac{1-(0.194)^2}{1.135(0.194)^2} + \frac{1.135+1}{2(1.135)} L_N \left| \frac{(1.135)(0.194)^2}{2+(1.135)(0.194)^2} \right|$$

$$= 19.5$$

De la ecuación ( 5-208 ) se tiene

$$\frac{f}{D_h} L^* = \frac{1-M_2^2}{kM_2^2} + \frac{k+1}{2k} L_N \left| \frac{(k+1) M_2^2}{2+(k-1) M_2^2} \right| = 19.5 - 0.8 = 18.7$$

Para determinar  $M_2$  se hace

$$F = \frac{1-M_2^2}{kM_2^2} + \frac{k+1}{2k} L_N \left| \frac{(k+1) M_2^2}{2+(k-1)M_2^2} \right| - 18.7$$

Y

$$F' = \frac{4(M_2^2-1)}{kM_2^3(2+(k-1) M_2^2)}$$

Al aplicarse el método de Newton - Raphson se llega a

$$M_2 = 0.1976$$

## 5.8 Modos de operación que pueden darse en una tobera con un tubo

La Fig. ( 5-9 ) muestra un sistema constituido por un recipiente, una tobera convergente-divergente, un tramo de tubería con fricción y una cámara de contrapresión provista de una válvula reguladora.

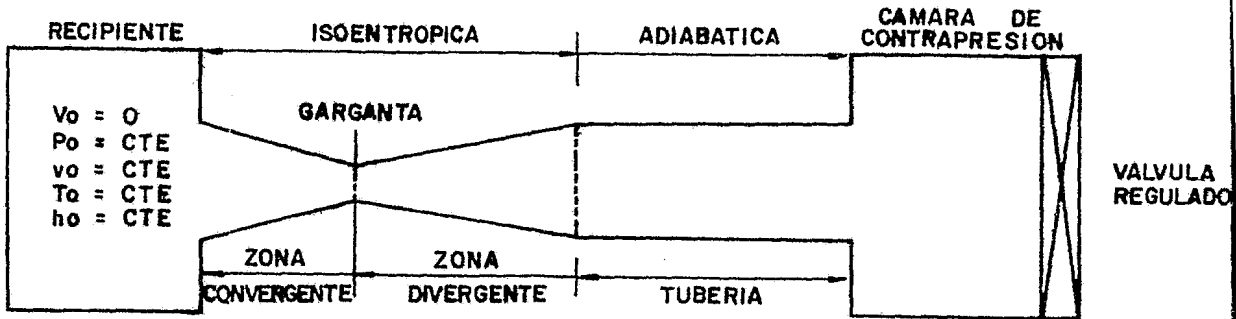


FIG. 5-9 TOBERA CONVERGENTE DIVERGENTE TUBERIA

El funcionamiento de una tobera convergente-divergente (TCD) - operando en serie con una tubería, depende básicamente de seis factores, a saber:

- a) Del fluido que la está alimentando.
- b) De las dimensiones del recipiente.
- c) De las dimensiones de la garganta.
- d) De las dimensiones a la salida de la tobera
- e) De la fricción y longitud de la tubería.
- f) De la presión dentro de la cámara contenedora.

En la posterior descripción del sistema se harán las suposiciones convenientes basadas en los seis puntos arriba señalados:

El fluido que alimenta al sistema es un fluido compresible cuyo comportamiento es el de un gas perfecto, es decir, satisface su ecua-

ción constitutiva de estado; las dimensiones del recipiente son lo suficientemente grandes (en comparación con las de la tobera) de tal suerte que una vez que se opere la válvula reguladora, los parámetros del fluido dentro del mismo se mantengan constantes; las dimensiones de la garganta, a la salida de la tobera y del ducto, son a-priori conocidas y se mantendrán constantes; el flujo es unidimensional; los cambios de altura son despreciables; en la tobera no hay intercambio de energía con el medio ambiente, es decir, no hay transferencia de calor ni se efectúa algún trabajo, la fricción es nula y por lo tanto el coeficiente de descarga es unitario; la tubería se encuentra perfectamente aislada de tal manera que la transferencia de calor al medio sea nula, no se realiza trabajo alguno, el coeficiente de fricción es constante; y por último, se parte de un estado de estancamiento, es decir, la velocidad del fluido un poco antes de entrar a la tobera es nula.

De acuerdo a lo anterior, si la válvula reguladora está inicialmente cerrada, los parámetros a través del sistema son constantes e iguales a los del recipiente y el flujo es nulo.

En la Fig. 5-10 se muestra una secuencia de lo que puede ocurrir dentro del arreglo en estudio al variar las presiones.

Una vez que la válvula es abierta levemente, se producirán cambios en los parámetros del fluido dentro de este sistema (sola-

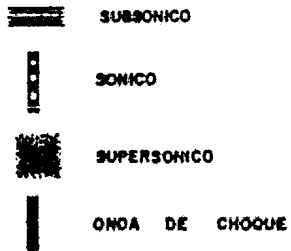
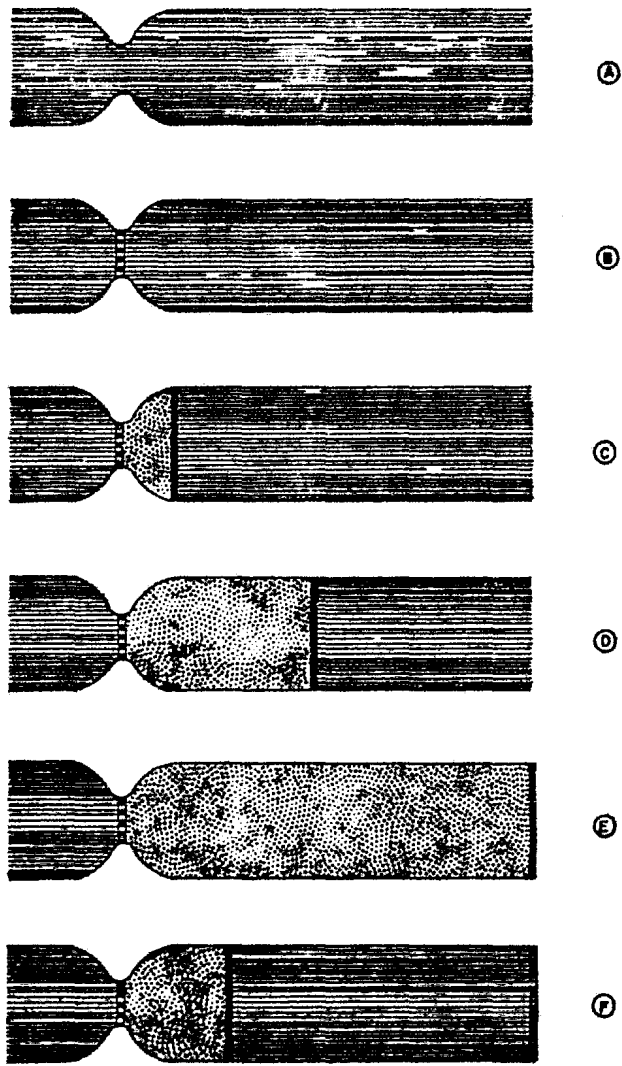


FIG 5-10 POSIBLES MODOS DE FLUJO EN UN ARREGLO TOBERA-TUBO CON FRICCION

mente se mantienen constantes los parámetros llamados de estancamiento dentro del recipiente), teniéndose un flujo subsónico en la totalidad del mismo.

La presión decrece al entrar a la garganta y como consecuencia el volumen específico aumenta, esto induce a que el fluido se acelere. En la zona divergente, sucede lo contrario, la presión va en aumento y el volumen específico disminuye produciendo una desaceleración al fluido. En la tubería debido a la fricción, existe una caída de presión con un aumento del volumen específico, induciendo nuevamente una aceleración al fluido ( Fig. 5-10 a ).

Si se abre la válvula reguladora un poco más, lo anterior se repite aumentándose el gasto. A una determinada apertura, la velocidad en la garganta será igual a la sónica y el flujo estará ahogado, entonces se presentarán tres regímenes de flujo, a saber: un flujo subsónico en la zona convergente de la tobera; en la garganta un flujo sónico; y en la zona divergente y tubería un flujo subsónico ( Fig. 5-10 b ).

Cuando se abre aun más la válvula reguladora, se motiva la presencia de frentes de choque ( como se sabe, constituyen una discontinuidad no isoentrópica) en la zona divergente. El fluido aguas arriba de la onda de choque (y después de la garganta) viaja a una velocidad mayor que la del sonido, mientras que aguas abajo de esta

onda el régimen es subsónico.

En la Fig. 5-11 se han representado las variaciones de la presión, número de Mach, entalpía y volumen específico para un caso -- como éste.

Dentro de la tobera (aguas abajo de la onda de choque) el flujo es desacelerado incrementándose la presión y reduciéndose el volumen específico. Cuando el fluido alcanza la tubería experimenta una aceleración debida a la caída de presión y al incremento de volumen específico motivados por la presencia de fricción.

A una apertura mayor (de la válvula reguladora), la onda de choque se localiza en el plano de salida de la tobera (Fig 5-10c), manteniéndose un flujo supersónico aguas arriba de esta (y después de la garganta) y uno subsónico aguas abajo de la misma. En la tubería sucede lo mismo que lo antes mencionado.

Una apertura posterior (de la válvula reguladora) origina que la onda de choque se localice en la tubería ( Fig. 5-10d ). El flujo a la salida de la tobera se mantendrá con sus parámetros constantes, esto se debe a que el área de salida de la tobera restringe al fluido a cualquier cambio. Como en lo anterior, el flujo aguas --- arriba y aguas abajo de la onda son supersónico y subsónico respectivamente. En la Fig. 5-12 se han graficado los principales paráme

Fig. 5 - II ONDA DE CHOQUE EN LA TOBERA

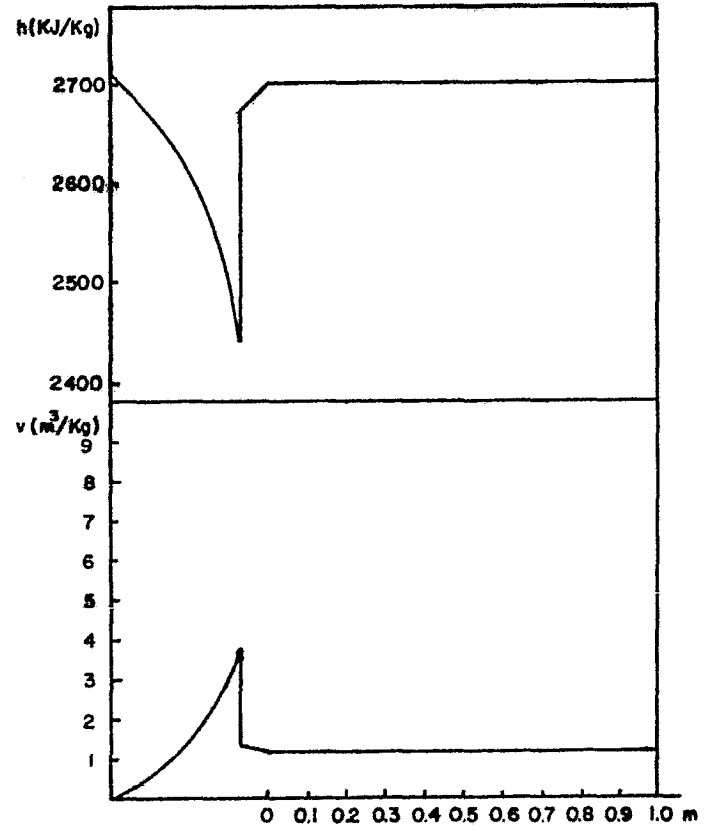
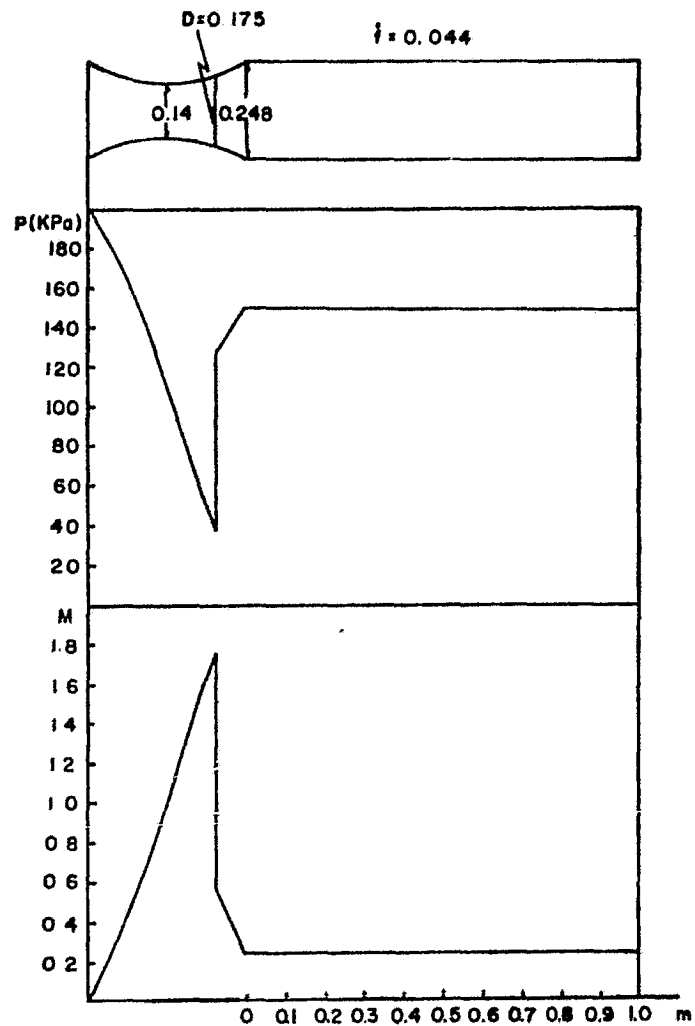
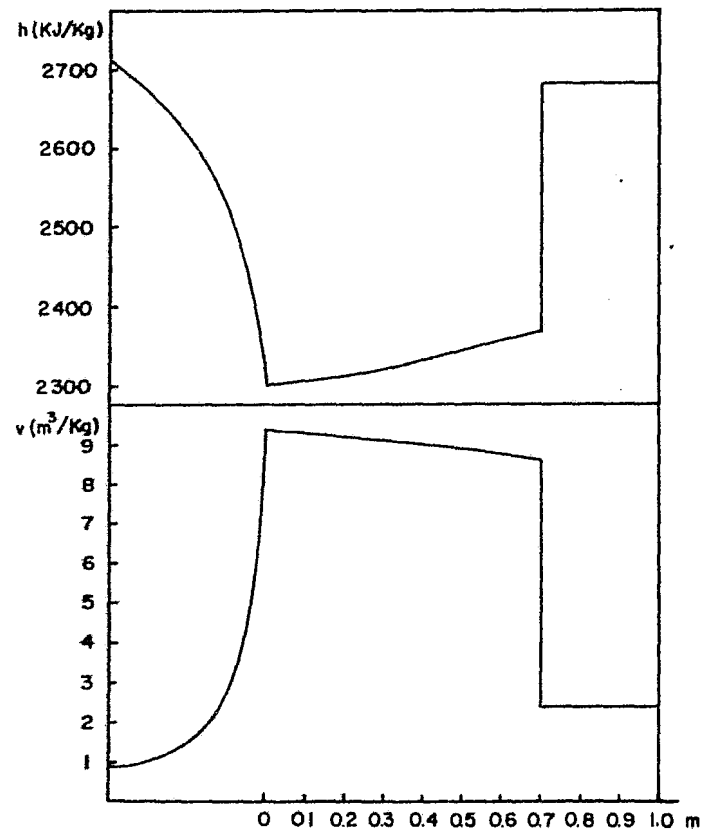
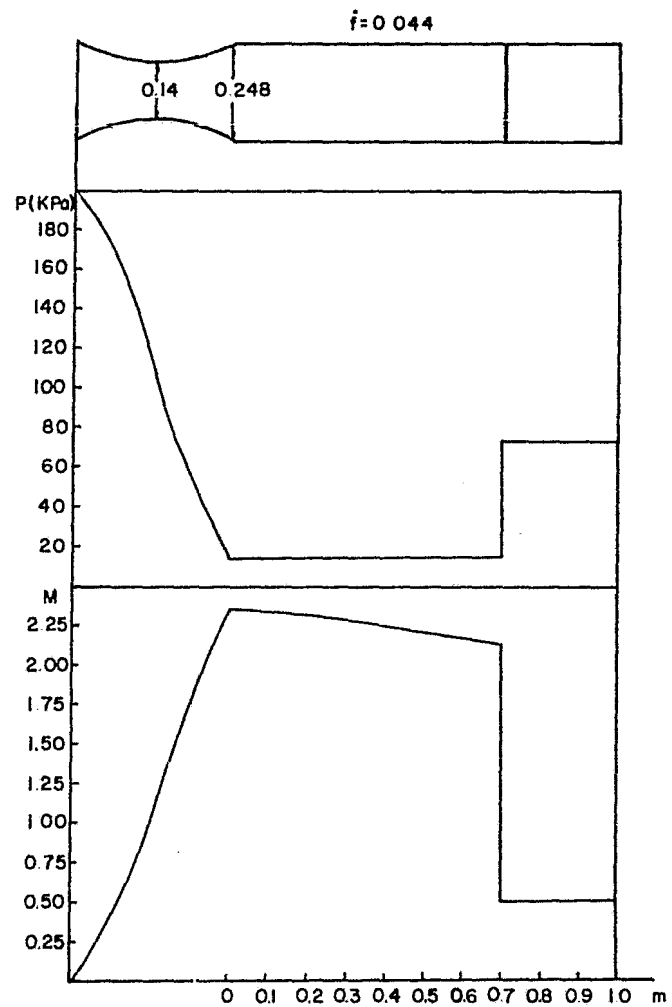


Fig 5-12 ONDA DE CHOQUE EN TUBERIA





tros para una situación como esta.

Cuando el fluido alcanza la tubería en régimen supersónico, se observa un fenómeno algo fuera de lo común; el fluido va desacelerándose, notándose un incremento en la presión y un decremento en su volumen específico (esto es lo contrario a un flujo subsónico entrando a la tubería).

Si se continúa abriendo la válvula la onda de choque puede localizarse en el plano de salida de la tubería ( Fig. 5-10e ).

Cuando se abre un poco más (la válvula reguladora), aparecerán primeramente frentes de choque oblicuos, los cuales son localizados fuera de la tubería. Posteriormente el fluido podrá dejar el ducto en régimen supersónico.

Por último, se presentarán frentes de onda oblicuos también -- fuera de la tubería.

Los primeros frentes oblicuos mencionados arriba son de compresión mientras los segundos son de expansión.

En algunos casos pueden presentarse situaciones como la de la Fig. 5-10f donde a pesar de existir una onda de choque en el tubo, - el fluido vuelve a acelerarse hasta alcanzar la velocidad del sonido

do en la boca del tubo.

### 5.9 Programa de computadora.

Habiéndose planteado en las secciones precedentes las ecuaciones que gobiernan un flujo compresible y habiendo mostrado en la sección 5.8 los modos de operación que se presentan en el caso -- "Tobera - tubo ", a continuación se presenta el programa de computadora que se elaboró para poder resolver los casos estudiados.

El programa tiene como finalidad determinar la ubicación de una onda de choque dentro de un sistema tobera-tubería ocupado por un vapor saturado seco y luego calcular las principales propiedades en algunos puntos de interés.

Este se llevó a cabo, en una computadora HENLETT PACKARD 85, - en él se empleó el Sistema Internacional de unidades (SI). En este sistema, la presión se mide en Pascales absolutos (Pa), la entalpía específica en Joules por kilogramo (J/Kg), la temperatura - en grados Kelvin ( $^{\circ}$ K), las velocidades en metros por segundo (m/s) la viscosidad en kilogramos por metro - segundo (Kg/m-s) y los diámetros y longitudes de tuberías en metros (m).

El programa en su primera etapa, verifica la existencia de un flujo sónico en la garganta del ducto, a partir de las condiciones

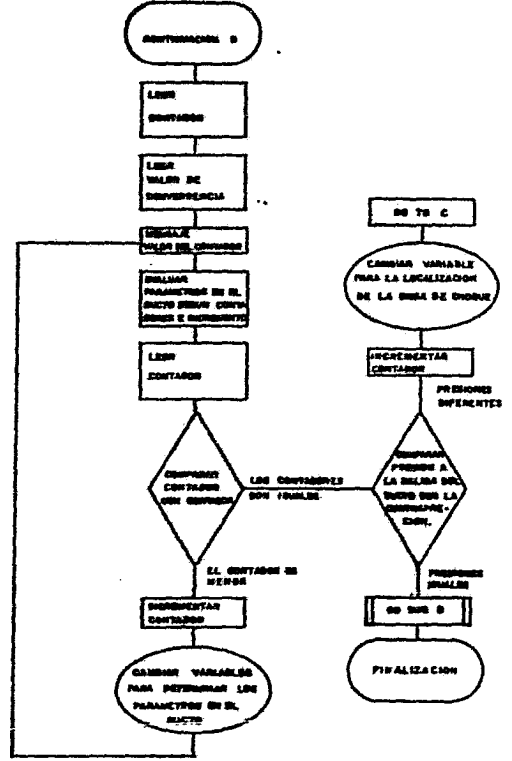
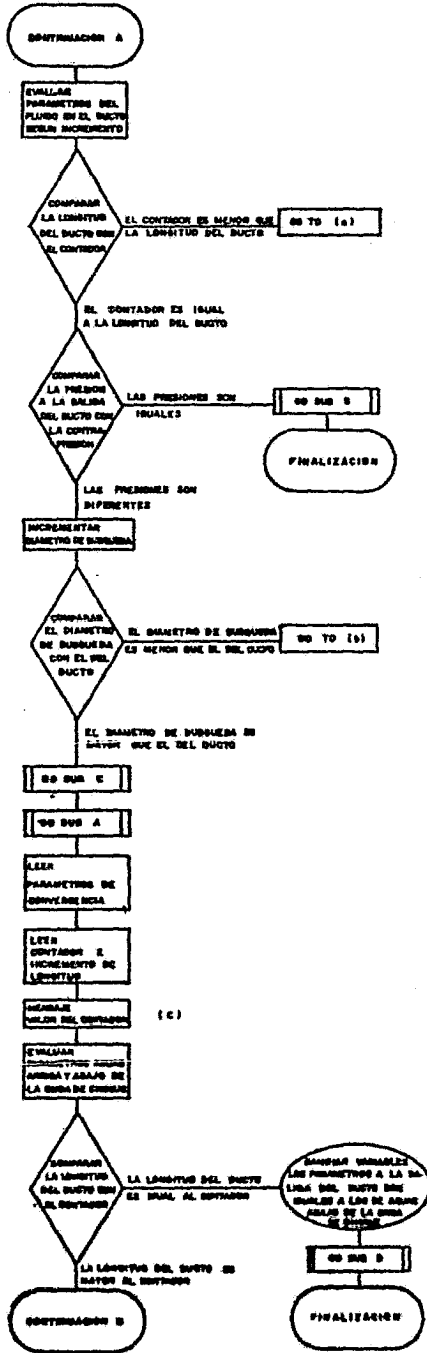
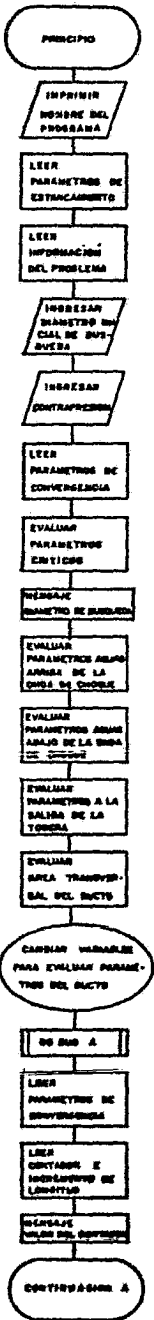
de estancamiento del fluido y de la geometría de la tobera. Posteriormente se le introduce un diámetro inicial para la búsqueda de una onda de choque dentro de la tobera a una presión de escape dada. En este diámetro, la computadora evalúa los siguientes parámetros: aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque y a la salida de la tobera y del ducto. A continuación compara la presión a la salida del ducto calculada con la contrapresión. Si estas presiones son diferentes (de acuerdo a un límite dado a priori), el diámetro inicial es incrementado en una milésima de metro y efectúa nuevos cálculos hasta localizar la onda de choque. En seguida se imprimen los resultados.

Si la onda de choque se localiza en el ducto, los parámetros a la salida de la tobera son constantes y se utilizan como iniciales en la búsqueda de la onda a través de la tubería. Para esto, la computadora va integrando a intervalos de cien milésimas de metro a lo largo del ducto. Es decir, se supone primeramente que la onda está a cien milésimas de metro a partir de la salida de la tobera, de esta manera se conocen los parámetros aguas arriba de la onda y a continuación calcula los parámetros aguas abajo de la onda y a la salida del ducto (recuérdese que la computadora va integrando cada cien milésimas de metro). Una vez más, la computadora compara la presión de descarga calculada con la contrapresión (también existe un límite a priori dado). También en este caso, si las presiones son diferentes, los parámetros aguas arriba de la on

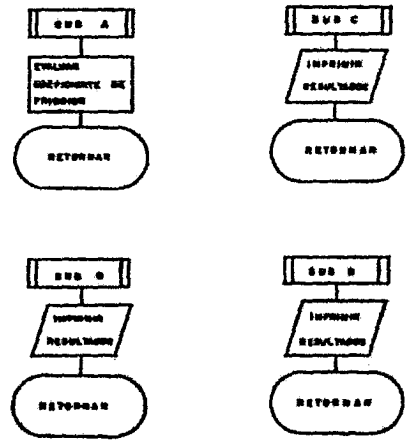
da ( antes calculados ) sirven como iniciales para el siguiente --  
cálculo. Se repite esto hasta que las presiones sean iguales, pos-  
teriormente se le ordena a la máquina a que imprima los resultados.

Como es de esperarse, la última impresión que puede hacer la  
máquina, es cuando la onda de choque se localiza en el plano de sa-  
lida del ducto.

# DIAGRAMA DE FLUJO



## SUBROUTINAS



```

10 PRINT "PROGRAM'S NAME: SHOCK
WAVE IN A PIPE NOZZLE SYSTEM
"
20 READ P0,V0,T0,H0
30 DATA 199248.16,.89,392.9,270
9328.13
40 READ K,E1,D1,D2,L1
50 DATA 1.135,.00004572,.14,.24
8.1
60 DISP "INPUT THE ASSUMED INIT
IAL SHOCK WAVE DIAMETER D5"
@ INPUT D5
70 DISP "INPUT THE BACK PRESSUR
E P4" @ INPUT P4
80 DISP "INPUT THE FRICTION COE
FICIENT Z1" @ INPUT Z1
90 REM "CONVERGENCY PARAMETERS"
100 P5=1000
110 P2=100000
120 T1=2*T0/(K+1)
130 P1=P0*(K+1)/2*(K+1-K)
140 V1=V0*(K+1)/2*(1+(K-1))
150 C1=SOR(K*P1*V1)
160 S1=C1
170 H1=H0-S1^2/2
180 F1=1/V1
190 M1=S1*C1
200 M=P1*D1^2*S1/(4*V1)
210 DISP "D5=";D5
220 F(1)=(P5/P1)^(K-1)/(1+(K-1)
*(D1/D5)^4*(P5/P1)^(K-2)/K)^2-
(K+1)/2
230 F(2)=(K-1)*(P5/P1)^(K-1)/(1
/(P1*K))-(K-1)*(D1/D5)^4*(P5
/P1)^(K-2)/(K+1)/(P1*K)
240 P5=P5-F(1)/F(2)
250 IF ABS(F(1)/F(2))<=.00001 TH
EN 280
260 P5=P5
270 GOTO 220
280 U5=V1*(P1/P5)^(1/K)
290 S5=S1*U5*(D1/D5)^2/V1
300 C5=SOR(K*P5*U5)
310 M5=S5*C5
320 T5=P5*U5*T1/(P1*V1)
330 H5=H1+S1^2/2-S5^2/2
340 R5=1/U5
350 M6=SOR((M5^2+2*(1+(K-1)*M5^2)
/(K+1))*M5^2-1)
360 T6=T5*(2*(1+(K-1)*M5^2)
/(2*(1+(K-1)*M5^2)+1+(K+1)
*(2+M5^2))
370 P6=P5*(2*(1+(K+1)*M5^2)
/(1+(K+1)
*(1+1)
380 U6=P5*U5*T6/(P6*T5)
390 P6=1/U6
400 C6=SOR(K*P6*U6)
410 S6=C6*U6
420 H6=H5+S6^2/2-S5^2/2
430 P2=P2-P6*(1+(K-1)*M6^2)
+1/(2*(1+(K+1)*M6^2)-1)

```

```

440 F(4)=(K-1)*(P2/P6)^(-1/K)*1
      /K*P6-(-(K-1)*(D5/D2)^4*(P2
      /P6)^(-(K+2)/K)*M6^2/(K*P6)
450 P2=P2-F(3)/F(4)
460 IF ABS(F(3)/F(4))<= .0001 THE
      N 490
470 P2=P2
480 GOTO 430
490 V2=V6*(P6/P2)^(1/K)
500 S2=(D5/D2)^2*V2*S6/V6
510 C2=SQR(K*P2*V2)
520 M2=S2/C2
530 T2=P2*V2*T6/(P6*V6)
540 R2=1/V2
550 H2=H6+S6^2/2-S2^2/2
560 A2=PI*D2^2/4
570 P(2)=P2 @ T(2)=T2 @ V(2)=V2
      @ S(2)=S2 @ R(2)=R2 @ H(2)=H
      2 @ M(2)=M2 @ C(2)=C2
580 T=T2-273.16
590 GOSUB 1510
600 F=Z1*F
610 S3=S(2)
620 X=.1
630 L=.1
640 DISP "X=";X
650 F(5)=S3*(F*L/(4*D2)+1-(K-1)/
      (2*K))+1/S3*(P(2)*V(2)+(K-1)
      /((2*K)*S(2)^2)
660 F5=S(2)*(F*L/(4*D2)-1)-P(2)*
      A2/M
670 F6=F(5)+F5
680 F(6)=F*L/(4*D2)+1-(K-1)/(2*K)
      -1/S3^2*(P(2)*V(2)+(K-1)/(2
      *K)*S(2)^2)
690 S3=S3-F6/F(6)
700 IF ABS(F6/F(6))<=.000001 THE
      N 730
710 S3=S3
720 GOTO 650
730 P3=P(2)-M/A2*(S3*(F*L/(4*D2)
      +1)+S(2)*(F*L/(4*D2)-1))
740 V3=S3*A2/M
750 C3=SQR(K*P3*V3)
760 M3=S3/C3
770 T3=P3*V3*T(2)/(P(2)*V(2))
780 R3=1/V3
790 H3=H(2)+S(2)^2/2-S3^2/2
800 IF X=L1 THEN 850
810 IF X<L1 THEN 820
820 X=X+ .1
830 P(2)=P3 @ V(2)=V3 @ S(2)=S3
      @ T(2)=T3 @ H(2)=H3
840 GOTO 630
850 IF ABS(P3/P4)<=1.001 THEN 89
      0
860 D5=D5+.001
870 IF D5>D2 THEN 910
880 GOTO 210
890 GOSUB 1590

```

```

900 END
910 REM "THE NOZZLE EXIT PARAMET
ERS ARE CONSTANTS i.e., THE S
HOCK WAVE IS NOT AT THE NOZZ
LE"
920 GOSUB 2320
930 T=T5-273.16
940 GOSUB 1510
950 F=21#F
960 S7=95
970 Y= 1
980 L= 1
990 DISP "Y=";Y
1000 F17=(S7#F#L*(.4#D2)+1-(F-1)
*(.2#F*(.1+1/S7#(P5#W5+(F-1)
*(.2#(1+.95#2)+.95#F#L*(.4#D2)-1)
)-P5#A2)/M
1010 F18=(F#L*(.4#D2)+1-(F-1)
*(.2#(1+.95#2)+P5#W5+(F-1)
*(.2#(1+.95#2)
1020 S7=S7-F17/F18
1030 IF ABS(F17-F18) <= .000001
THEN 1060
1040 S7=S7
1050 GOTO 1000
1060 P7=P5-M/A2*(S7#F#L*(.4#D2)+
1+.95#(F#L*(.4#D2)-1))
1070 W7=S7#A2/M
1080 C7=SOR(K#P7#W7)
1090 M7=S7/C7
1100 H7=H5+S5^2/2-S7^2/2
1110 T7=P7#W7#T5/(P5#W5)
1120 P7=1/W7
1130 M8=SOR((M7^2+2*(F-1)
*(.2#F*(F-1)#M7^2-1))
1140 T8=T7*(.2*(K-1)#(1+(F-1)
*(.2#M7^2)+.3#K/(F-1)#M7^2-1)
*(F+1)
*(.2#M7^2))
1150 P8=P7*(.2#K/(F+1)
*(M7^2-(F-1)
*(F+1))
1160 U8=P7#W7#T8*(P8#T7)
1170 P8=1/U8
1180 C8=SOR(F#P8#U8)
1190 S8=U8#S7/W7
1200 H8=H7+S7^2/2-S8^2/2
1210 IF Y=L1 THEN 1480
1220 Z= 1
1230 S9=95
1240 DISP "Z=";Z
1250 F19=(S9#F#L*(.4#D2)+1-(F-1)
*(.2#F*(.1+1/S9#(P8#U8+(F-1)
*(.2#(1+.95#2)+.95#F#L*(.4#D2)-1)
)-P8#A2)/M
1260 F10=(F#L*(.4#D2)+1-(F-1)
*(.2#(1+.95#2)+P8#U8+(F-1)
*(.2#(1+.95#2)
1270 S9=S9-F19/F10
1280 IF ABS(F19-F10) <= .000001
THEN 1310
1290 S9=S9

```



```

1300 GOTO 1250
1310 P9=P8-M/A2*(S9*(F*L/(4*D2)+
1) + S8*(F*L/(4*D2)-1))
1320 V9=S9*A2/M
1330 C9=SQR(K*P9*V9)
1340 M9=S9/C9
1350 R9=1/V9
1360 H9=H8+S8^2/2-S9^2/2
1370 T9=P9*V9*T8/(P8*V8)
1380 N=L1-Y
1390 IF Z=N THEN 1440
1400 IF Z<N THEN 1410
1410 Z=Z+.1
1420 P8=P9 @ V8=V9 @ S8=S9 @ H8=
H9 @ T8=T9
1430 GOTO 1240
1440 IF P9/P4<=1.001 THEN 1490
1450 Y=Y+.1
1460 P5=P7 @ V5=V7 @ T5=T7 @ S5=
S7 @ H5=H7
1470 GOTO 990
1480 P9=P8 @ T9=T8 @ V9=V8 @ C9=
C8 @ M9=M8 @ R9=R8 @ H9=H8
@ S9=S8
1490 GOSUB 2580
1500 END
1510 V=.0000001*(.407*T+80.4)
1520 R=4*M/(PI*D2*V)
1530 A=E1/D2
1540 B=.094*A^.225+ 53*A
1550 C=88*A^.44
1560 D=1.62*A^.134
1570 F=B+C*R^(-D)
1580 RETURN
1590 PRINT "THE SHOCK WAVE IS LO
CATED AT NOZZLE DIAMETER."
1600 PRINT "D5=";D5
1610 PRINT "STAGNATION PARAMETER
S"
1620 PRINT "P0=";P0
1630 PRINT "T0=";T0
1640 PRINT "V0=";V0
1650 PRINT "H0=";H0
1660 PRINT "CRITICAL PARAMETERS"
1670 PRINT "P1=";P1
1680 PRINT "T1=";T1
1690 PRINT "V1=";V1
1700 PRINT "S1=";S1
1710 PRINT "C1=";C1
1720 PRINT "R1=";R1
1730 PRINT "H1=";H1
1740 PRINT "M1=";M1
1750 PRINT "M=";M
1760 PRINT "PARAMETERS UP-STREAM
FROM THE SHOCK WAVE"
1770 PRINT "P5=";P5
1780 PRINT "T5=";T5
1790 PRINT "V5=";V5
1800 PRINT "S5=";S5
1810 PRINT "C5=";C5

```

```

1820 PRINT "P5=";P5
1830 PRINT "H5=";H5
1840 PRINT "M5=";M5
1850 PRINT "PARAMETERS DOWN-STRE
AM FROM THE SHOCK WAVE"
1860 PRINT "P6=";P6
1870 PRINT "T6=";T6
1880 PRINT "V6=";V6
1890 PRINT "S6=";S6
1900 PRINT "C6=";C6
1910 PRINT "R6=";R6
1920 PRINT "H6=";H6
1930 PRINT "M6=";M6
1940 PRINT "PARAMETERS AT THE NO
ZZLE EXIT"
1950 PRINT "P2=";P2
1960 PRINT "T2=";T2
1970 PRINT "V2=";V2
1980 PRINT "S2=";S2
1990 PRINT "C2=";C2
2000 PRINT "R2=";R2
2010 PRINT "H2=";H2
2020 PRINT "M2=";M2
2030 PRINT "PARAMETERS AT PIPE E
XIT"
2040 PRINT "P3=";P3
2050 PRINT "T3=";T3
2060 PRINT "V3=";V3
2070 PRINT "S3=";S3
2080 PRINT "C3=";C3
2090 PRINT "R3=";R3
2100 PRINT "H3=";H3
2110 PRINT "M3=";M3
2120 PRINT " I N F O R M A T I O
N "
2130 PRINT "THROAT DIAMETER"
2140 PRINT "D1=";D1
2150 PRINT "NOZZLE EXIT DIAMETER
"
2160 PRINT "D2=";D2
2170 PRINT "PIPE LENGTH"
2180 PRINT "L1=";L1
2190 PRINT "SPECIFIC HEATS RATIO
"
2200 PRINT "F=";F
2210 PRINT "PIPE ROUGHNESS"
2220 PRINT "E1=";E1
2230 PRINT "VISCOSITY"
2240 PRINT "V=";V
2250 PRINT "REYNOLDS NUMBER"
2260 PRINT "P=";P
2270 PRINT "RELATIVE PIPE ROUGHN
ESS"
2280 PRINT "R=";R
2290 PRINT "FRICITION FACTOR"
2300 PRINT "F=";F
2310 PRINT " "
2320 PRINT "PIPE THICKNESS IS AT
THE PIPE"
2330 PRINT "CORROSION PARAMETER
"

```

```

2340 PRINT "P0=";P0
2350 PRINT "T0=";T0
2360 PRINT "V0=";V0
2370 PRINT "H0=";H0
2380 PRINT "CRITICAL PARAMETERS"
2390 PRINT "P1=";P1
2400 PRINT "T1=";T1
2410 PRINT "V1=";V1
2420 PRINT "S1=";S1
2430 PRINT "C1=";C1
2440 PRINT "R1=";R1
2450 PRINT "H1=";H1
2460 PRINT "M1=";M1
2470 PRINT "M=";M
2480 PRINT "PARAMETERS AT THE NOZZLE EXIT"
2490 PRINT "P5=";P5
2500 PRINT "T5=";T5
2510 PRINT "V5=";V5
2520 PRINT "S5=";S5
2530 PRINT "C5=";C5
2540 PRINT "R5=";R5
2550 PRINT "H5=";H5
2560 PRINT "M5=";M5
2570 RETURN
2580 PRINT "PARAMETERS UP-STREAM FROM THE SHOCK WAVE"
2590 PRINT "P7=";P7
2600 PRINT "T7=";T7
2610 PRINT "V7=";V7
2620 PRINT "S7=";S7
2630 PRINT "C7=";C7
2640 PRINT "R7=";R7
2650 PRINT "H7=";H7
2660 PRINT "M7=";M7
2670 PRINT "PARAMETERS DOWN-STREAM FROM THE SHOCK WAVE"
2680 PRINT "P8=";P8
2690 PRINT "T8=";T8
2700 PRINT "V8=";V8
2710 PRINT "S8=";S8
2720 PRINT "C8=";C8
2730 PRINT "R8=";R8
2740 PRINT "H8=";H8
2750 PRINT "M8=";M8
2760 PRINT "PARAMETERS AT PIPE EXIT"
2770 PRINT "P9=";P9
2780 PRINT "T9=";T9
2790 PRINT "V9=";V9
2800 PRINT "S9=";S9
2810 PRINT "C9=";C9
2820 PRINT "R9=";R9
2830 PRINT "H9=";H9
2840 PRINT "M9=";M9
2850 PRINT " I N F O R M A T I O N "
2860 PRINT "THROAT DIAMETER"
2870 PRINT "D1=";D1
2880 PRINT "NOZZLE EXIT DIAMETER"

```

```
2890 PRINT "D2=";D2
2900 PRINT "PIPE LENGHT"
2910 PRINT "L1=";L1
2920 PRINT "SPECIFIC HEATS RATIO
"
2930 PRINT "F=";F
2940 PRINT "PIPE ROUGHNESS"
2950 PRINT "E1=";E1
2960 PRINT "VISCOSITY"
2970 PRINT "W=";W
2980 PRINT "REYNOLDS NUMBER"
2990 PRINT "F=";F
3000 PRINT "RELATIVE PIPE ROUGHN
E"
3010 PRINT "A=";A
3020 PRINT "FRICTION FACTOR"
3030 PRINT "F=";F
3040 PRINT "THE SHOCK WAVE IS LO
CATED AT"
3050 PRINT "Y=";Y
3060 RETURN
```

## 6 RESULTADOS .

De las mediciones y cálculos realizados a lo largo de este - trabajo se pueden resumir los siguientes resultados.

### 6.1 Medición experimental de la frecuencia de las oscilaciones.

Mediante el frecuenciómetro rústico, descrito en el capítulo 3, se pudo determinar que cada vez que se producían las oscilaciones del escape, en el frecuenciómetro vibraba en resonancia la barra No. 8 correspondiente a una frecuencia natural de 8.8 Hz. -- Sin embargo debe hacerse notar que la barra que registraba la frecuencia inmediatamente inferior era la No. 7 con 7.7 Hz y la inmediatamente superior era la No. 9 con 10.3 Hz. Con esto se quiere dejar en claro que al decir que la frecuencia registrada fué ----

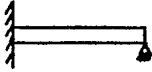
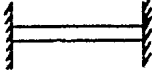
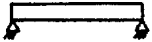
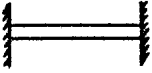
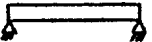
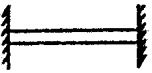
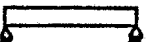
8.8 Hz se debe considerar un margen de por lo menos 10 %. Desgraciadamente las precarias facilidades que se encuentran en un campo geotérmico en exploración, no permiten mediciones más precisas.

## 6.2 Cálculo de las frecuencias naturales de los tramos del arreglo considerados como viga elástica.

En el capítulo 4, se calcularon las frecuencias naturales de todas las posibles simplificaciones que se pudieron hacer al tramo de tubería que va del separador hasta el extremo que descarga a la atmósfera. Teniendo en cuenta la Fig. 4-2, que aquí se reproduce como Fig. 6-1 para pronta visualización de los tramos, y a la Tabla 4-2 se puede extraer el siguiente resumen de tramos y su respectiva frecuencia natural, (mostrados en la Tabla 6-1) seleccionando solamente aquellas con valores cercanos a los 8.8 Hz registrados.



TABLA 6-1  
 FRECUENCIA NATURAL DE ALGUNOS TRAMOS CERCANOS  
 A 8.8 HZ

CASO	TRAMO	SIMPLIFICACION	FRECUENCIA NATURAL
1	ABC		9.6
2	ABCD		8.9
3	CD		8.6
4	CDE		7.7
5	DE		7.2
6	DEF		9.6
7	EF		10.1

Del examen de la Tabla 6-1 se pueden hacer los siguientes comentarios. No existen razones para eliminar alguno de los 7 casos, sin embargo parece que el caso 7 que considera el tubo como viga simplemente apoyada en ambos extremos, es el que más se apega a la realidad. Debe tenerse en cuenta que en la simplificación usada no se consideró el efecto de los pesos adicionales tales como la placa orificio del tramo F cuyo efecto es disminuir ligeramente la frecuencia natural. Por lo tanto para fines de este estudio, concientes de que el problema pudo haberse investigado con más exactitud en el terreno si el tiempo y las circunstancias lo hubieran permitido se tomará como el principal resonador desde el punto de vista elástico, al tramo EF que va entre los dos últimos soportes, con una frecuencia natural de 10 Hz.

### 6.3 Cálculo de las frecuencias acústicas de algunos tramos.

Con referencia a los cálculos del final del capítulo 4 y haciendo referencia a la Fig. 6-1, hay sólo dos longitudes significativas. La primera entre placas orificio que es de 11.75 m y la segunda que es la del tramo final que va después de la segunda placa orificio y que es de 1.2 m. Sumados ambos son 12.95 m.

Considerando una velocidad de propagación de la onda de 450 (m/s) las frecuencias de resonancia acústica serán para:

Tramo de 11.75 m	$f_n = 9.6 \text{ Hz}$
Tramo de 12.95 m	$f_n = 8.7 \text{ Hz}$

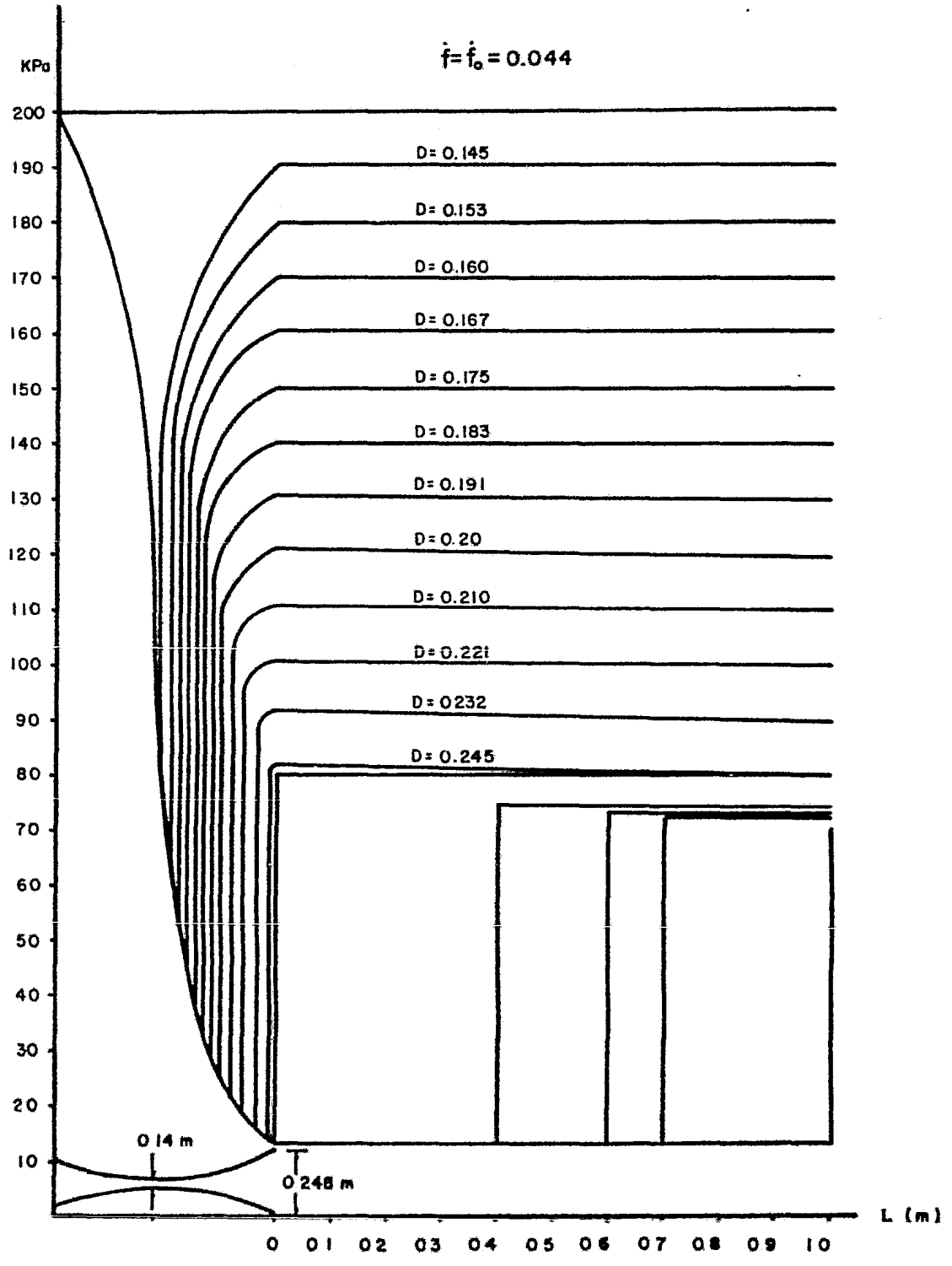


Nuevamente es pertinente hacer la aclaración de que en un sistema complejo donde se producen ondas de choque (que además se desplazan) donde no todo es adiabático ni ideal, no se puede ( -- por lo menos en un trabajo como éste) calcular con mucha precisión una frecuencia de resonancia acústica.

#### 6.4 Origen de las perturbaciones periódicas (detección del excitador).

Parte fundamental de este trabajo ha sido la determinación - del excitador que produce las variaciones periódicas de presión - en el tubo. Aquí se reproducen algunos de los resultados encontrados en el capítulo 5. (En el siguiente punto se analizará la frecuencia de la perturbación, aquí solamente se analiza el fenómeno que la origina). Como base para el análisis considérese la Fig. 6-2 en donde se ha indicado en el eje vertical una escala de presión y en el horizontal la posición en el tubo que va después de la placa orificio. La curva de la Fig. 6-2 (y de todas las -- que siguen) se contruyeron asignando al arreglo tobera-tubo -- con fricción, una presión y un entalpía de estancamiento aguas -- arriba del arreglo. Luego la presión de la atmósfera se hizo disminuir discretamente desde la presión de estancamiento (2 bar en este caso) hasta casi cero. Cuando la presión del extremo de escape es cercana a los 2 bar todo opera en régimen subsónico sin presentar mayor dificultad. A los 1.95 bar aproximadamente se ahoga la garganta de la placa orificio (idealizada aquí como una tobera) regresando luego el flujo a régimen subsónico. Al disminuir más

Fig. 6-2 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA



la presión de escape, la tobera permanece ahogada ( $Mach = 1.0$ ) en la garganta, pero el fluido continúa acelerando. Debido a las condiciones de aguas abajo, la velocidad no puede seguir creciendo y se produce una onda de choque con una recuperación brusca de la presión. (En la gráfica se ha indicado como  $D = 0.175$  el diámetro de la tobera hipotética en el cual se presentaría la onda de choque).

Si se sigue bajando la presión de escape, siempre con referencia a la Fig. 6-2, se observa que al llegar esta a 0.79 bar la onda de choque se presenta justo en la unión tobera-tubo. Al continuar bajando la presión de escape, la onda se desplaza hacia la derecha hasta que a una presión de 0.70 bar ésta se presenta exactamente en la boca de escape. La principal observación y punto medular de este trabajo, es haber encontrado que para las características de flujo donde se detectó el fenómeno de resonancia y para la geometría en estudio, exactamente para presiones de escape entre 0.7 y 0.8 bar se produce una onda de choque (con disipación de energía considerable) en el tramo recto del tubo de escape. Para comprobar la importancia que sobre este hallazgo tienen el coeficiente de fricción, la longitud del tubo, y el diámetro del tubo es que se calcularon y dibujaron las Figs. 6-3 a la 6-9. En ellas se puede observar que estos factores no afectan mayormente al comportamiento descrito. ( Los factores que la afectan son las características de estancamiento y el diámetro del orificio o garganta de la tobera equivalente ).

Fig. 6-3 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA

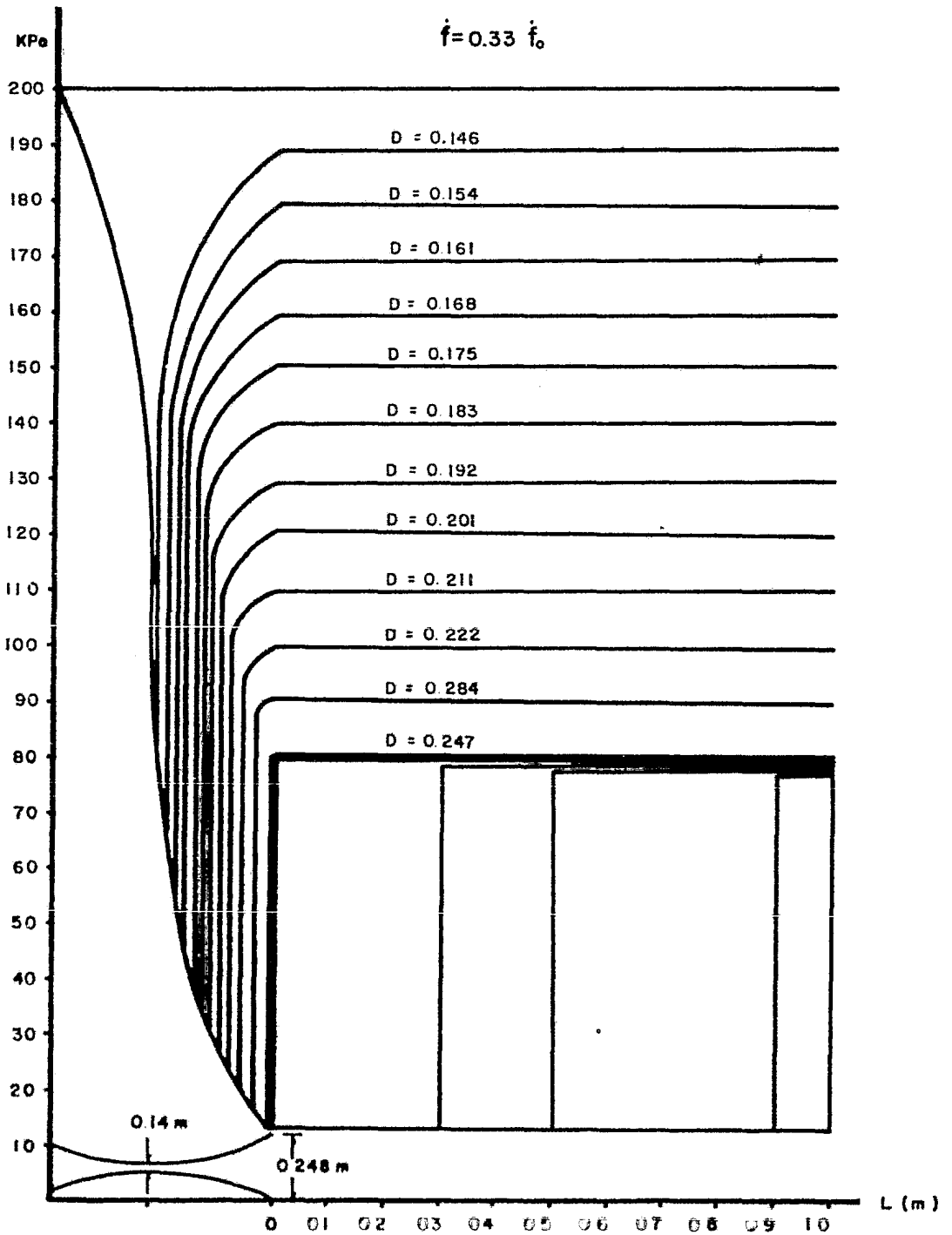


Fig. 6-4 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA

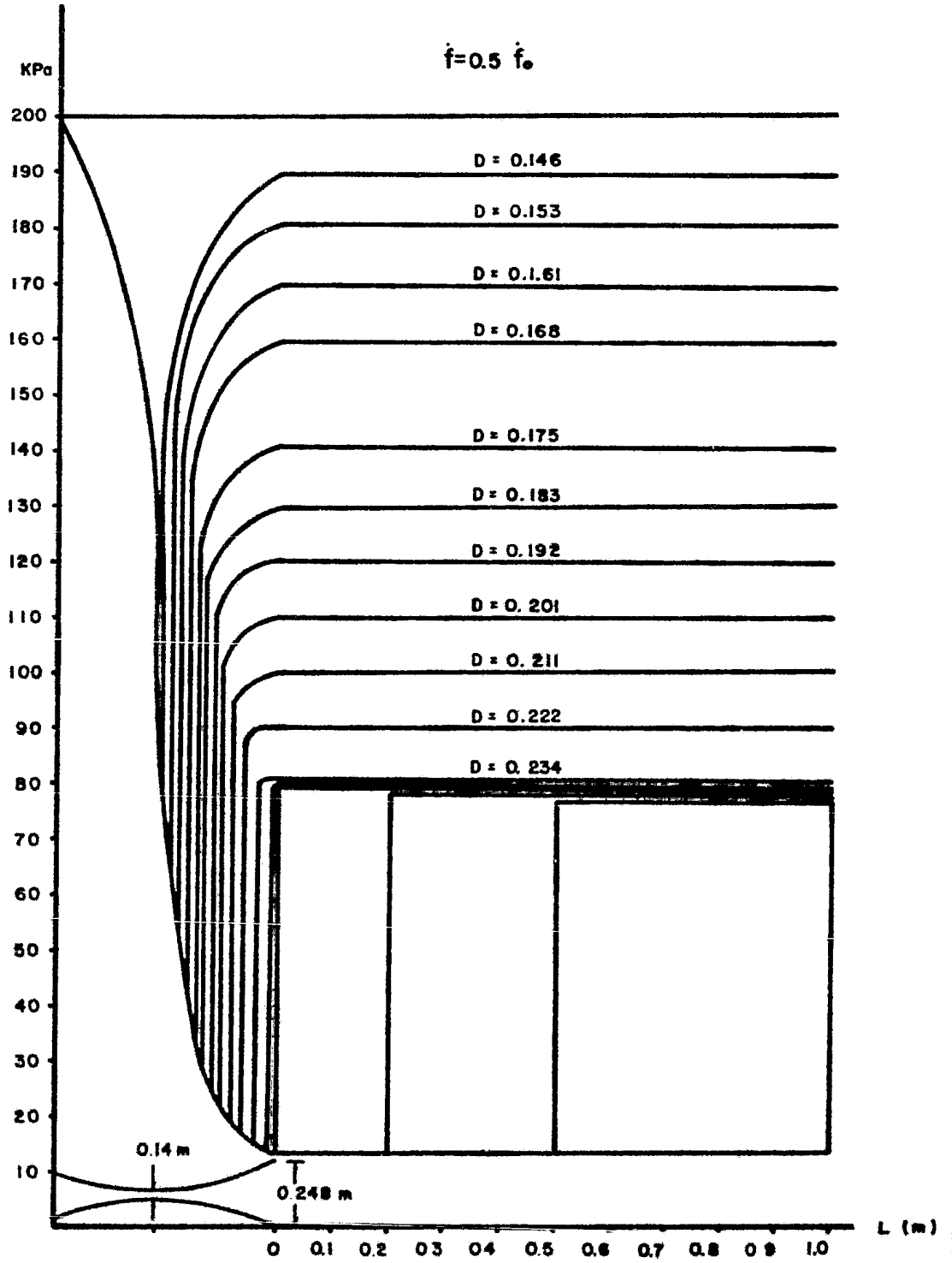


Fig. 6-5 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA

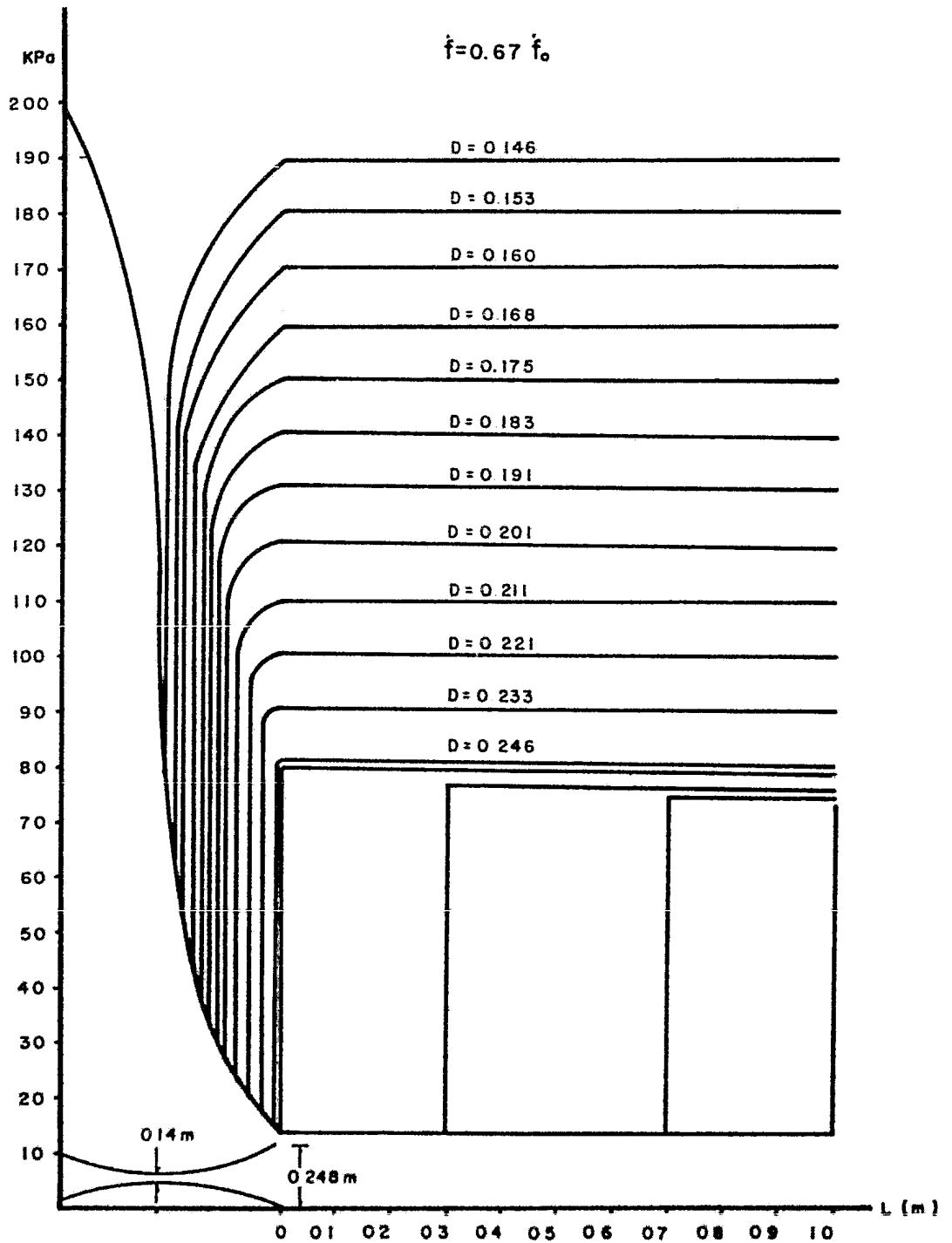


Fig. 6-6 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA

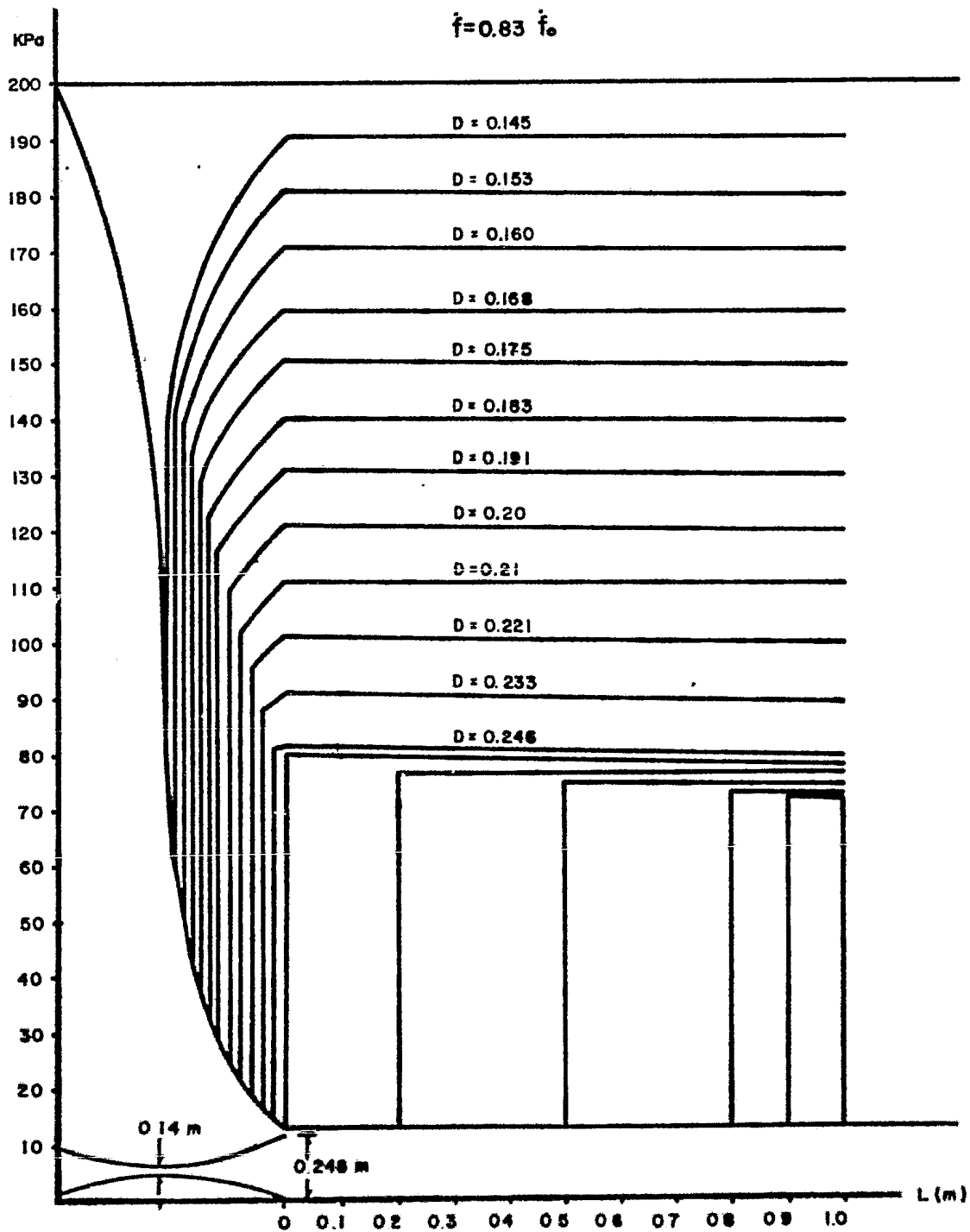


Fig. 6-7 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA

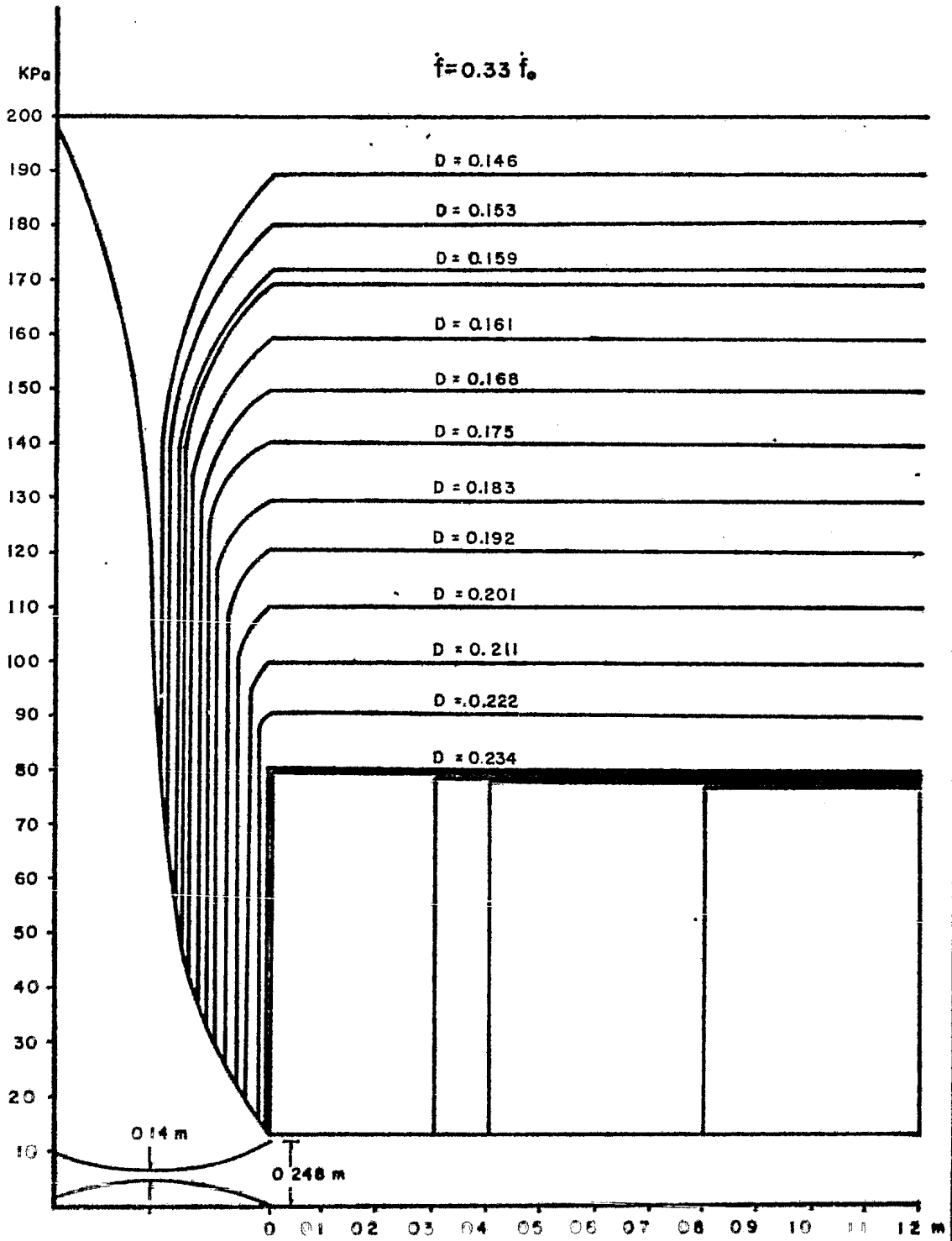




Fig. 6-8 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA

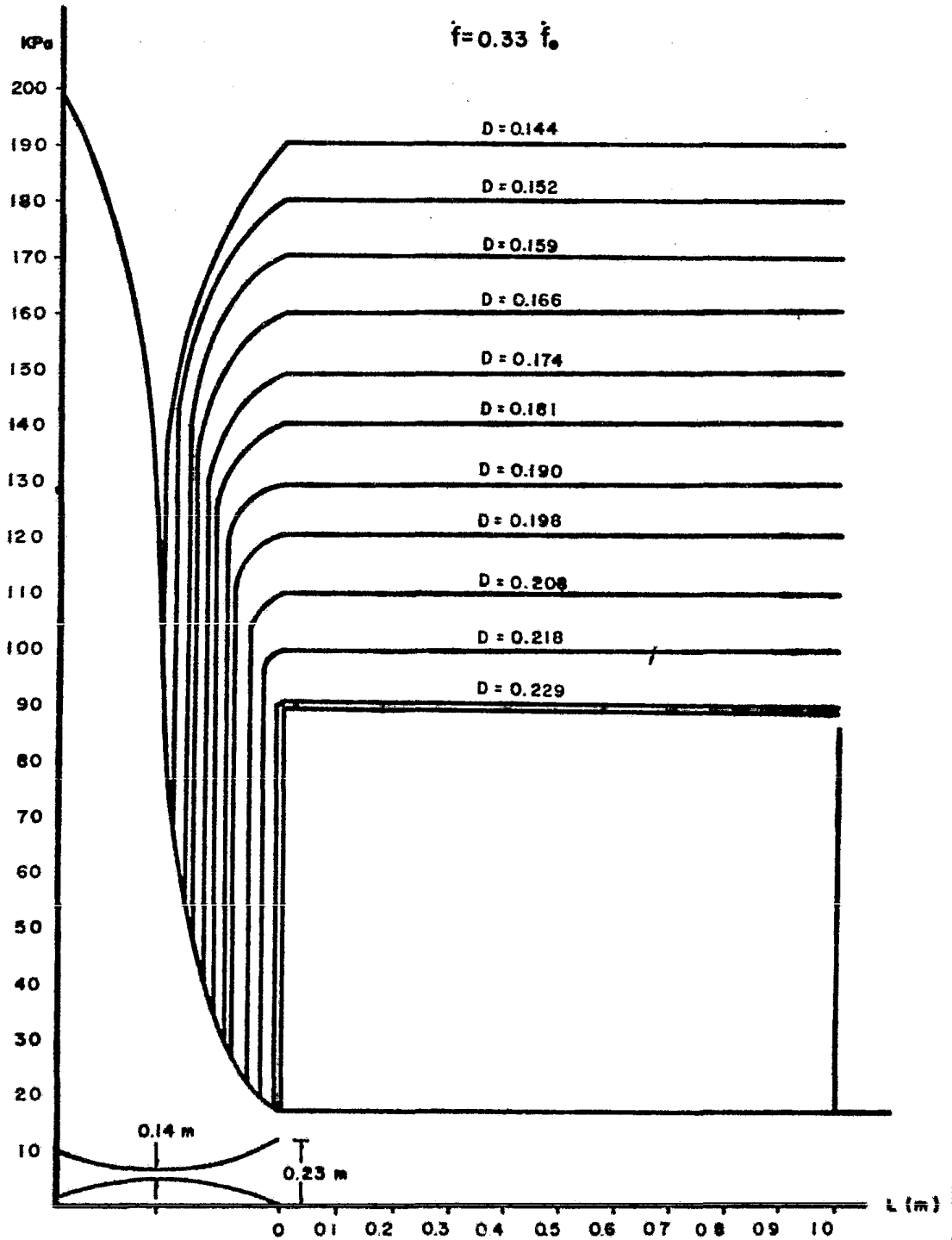
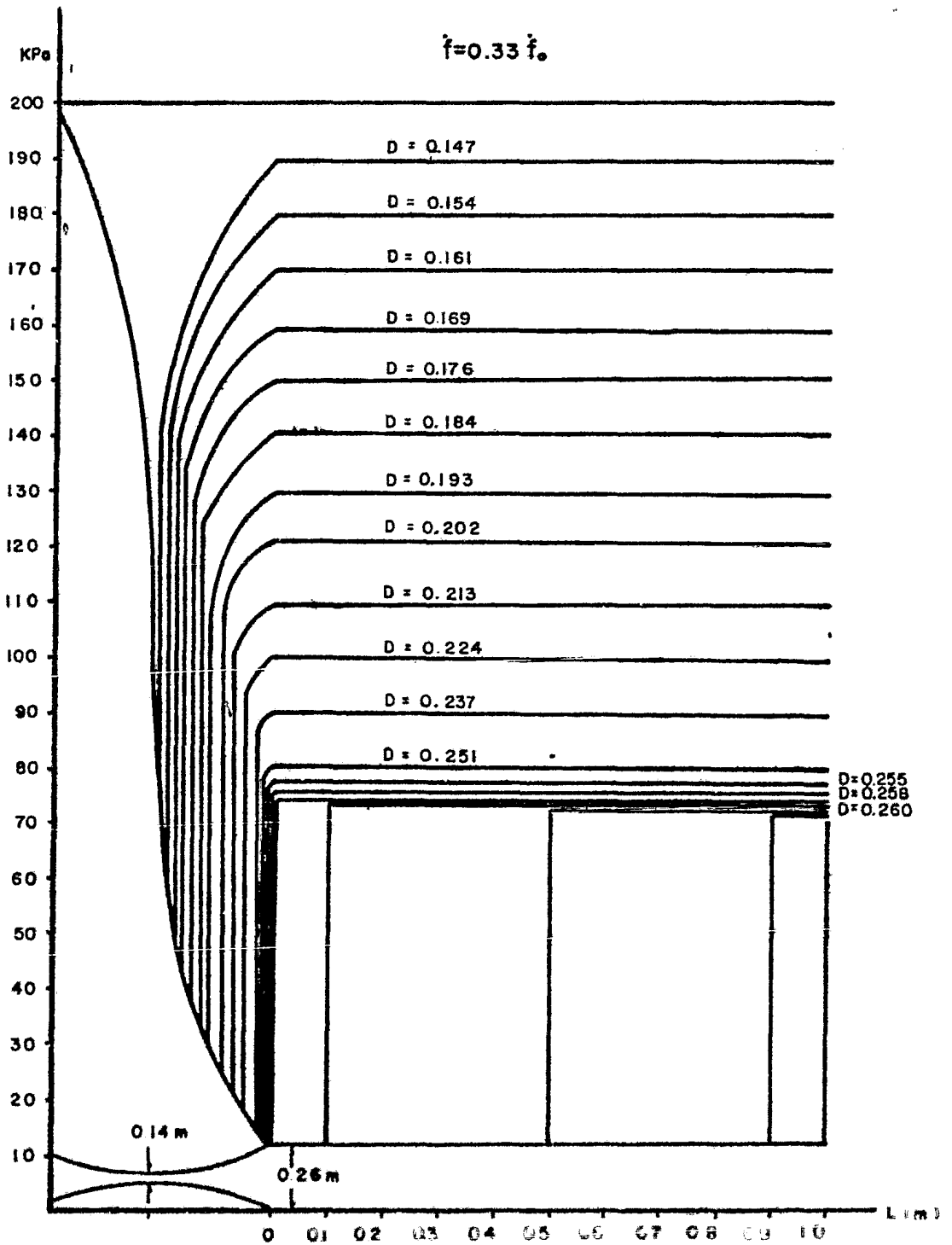


Fig. 6-9 LOCALIZACION DE LA ONDA DE CHOQUE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN EL TUBO Y TOBERA



De lo expresado en este punto se puede establecer que en el tubo que sigue a la placa orificio se presenta una onda de choque que se localiza ora al comienzo ora al final del tubo. Este cambio de posición se debe a pequeñas variaciones en la presión de escape originada por la propia onda de choque que al llegar al extremo del tubo se transforma en un tren de ondas oblicuas que altera el campo de presiones. A este fenómeno, que sólo ocurre bajo las condicio--nes calculadas se le imputa en esta tesis la causa y origen de las fluctuaciones de presión registradas.

#### 6.5 Determinación de la periodicidad de la excitación.

De la simple observación de los registros no se puede identificar cuál debería ser la frecuencia del fenómeno de excitación des--crito en el punto anterior. El origen es bastante complicado y fuera del alcance de este trabajo, por lo tanto se recurrirá a tomar la teoría planteada en la Ref. 3 en cuanto a que en los excitadores de este tipo debe existir una frecuencia adimensional ( o número de Strouhal ) universal que tiene su origen en la consideración de que el intercambio de energía de un oscilador se hace entre la energía mecánica específica  $(2\pi f)^2/2$  y la energía cinética de la corriente  $U^2/2$ , planteado originalmente por Levi Ref. 3.

Si se considera como longitud característica "l" al tramo de tubería de 1.2 m que hay después de la placa orificio y se toma como velocidad característica la de llegada a la placa orificio ---

( energía de la corriente ) ya calculada en la Tabla 4-3 donde se obtuvo  $U = 78$  (m/s) se obtiene que si:

$$2\pi r f = U$$

$$f = \frac{78}{(2)(\pi)(1.2)}$$

$$f = 10.3 \text{ Hz}$$

## 7 CONCLUSIONES

Habiendo examinado el fenómeno de oscilación periódica aparecida en el pozo A-2 al descargar vapor a la atmósfera bajo ciertas condiciones de gasto y de presión, como un caso de resonancia entre un excitador periódico y elementos resonadores pasivos, se llegó a la conclusión de que es posible explicar lo observado como un caso de resonancia. El excitador fué indentificado como una onda de choque viajera que se presenta en el trozo de tubo del escape y los resonadores, uno elástico en el último tramo de tubería y otro acústico en el trozo de tubo comprendido entre ambas placas orificio 11.75 m aparte una de otra.

Estas conclusiones se pueden ordenar como sigue:

- a) En el caso particular de Los Azufres, donde la presión atmosférica es de 0.73 bar abs., se encontró que en el tubo de 1.2 metros, descrito en el texto, se presenta una onda de choque al comienzo del tubo. Pequeñas variaciones de la presión atmosférica hacen que la onda viaje al otro extremo del tubo repitiéndose este fenómeno periódicamente.
- b) Si la periodicidad de una excitación del tipo descrita se encuentra sujeta a un número de Strouhal universal, tal como lo postula Levi de la UNAM, la frecuencia de la oscilación debería ser de 10.3 Hz.
- c) El trozo de tubo de 11.75 m de largo comprendido entre la placa orificio de aforo y la placa orificio reguladora de presión, considerado como resonador acústico tiene una -- frecuencia natural de 9.6 Hz aproximadamente.
- d) El último tramo de tubo considerado idealmente como una viga simplemente apoyada tiene una frecuencia natural de 10.1 Hz lo que se aproxima bastante a la frecuencia de resonancia medida.
- e) Hay otros tramos de tubería que al ser analizados en es-- quemas simplificados producen arreglos con frecuencia natural entre 8 y 10 Hz.
- f) La frecuencia medida de las oscilaciones durante la apa-- rición del fenómeno de resonancia fué de 8.8 Hz, haciendo

la aclaración que dado lo rústico del aparato es conveniente decir que fué mayor que 7.7 y menor que 10.3 Hz.

Por lo tanto, aceptando las pequeñas variaciones de los valores calculados y medidos, propios de las imprecisiones con las que se trabajó, se concluye que la onda de choque dentro del tubo de escape fué el excitador con frecuencia del orden de los 10 Hz y que fueron resonadores pasivos la caja acústica formada por el tubo entre las dos placas orificios y además algunos tramos elásticos de la tubería principalmente el último tramo considerado como viga simplemente apoyada.

## 8 AGRADECIMIENTOS

En el transcurso de las investigaciones que aquí se reportan recibí muchísimo apoyo de mis maestros, jefes y compañeros. A todos ellos les agradezco su ayuda, aunque en particular quisiera -- mencionar a los siguientes:

Ings. Arturo González S., Rafael Molinar C. y José Luis Sanabria M., quienes generosamente me dieron facilidades en mi trabajo para completar la tesis y los trámites asociados.

Ing. Alfredo Molina C. y Rafael López H., representantes sindicales, por el apoyo que brindan para las actividades que nos representan una superación académica.

Dres. José Luis Fernández Z., Jaime Cervantes de G. y Enzo -- Levi de la U.N.A.M. por la revisión del manuscrito y por sus valio



sos comentarios que finalmente enriquecieron el trabajo.

Ings. Ramón Reyes S. y Carlos Miranda M., quienes en el campo geotérmico de Los Azufres me dieron todas las facilidades para realizar los ensayos en prototipo.

Atzimba Franco U. por la mecanografía, Lourdes Ezpinoza y --  
Guadalupe Casimiro por la elaboración de los dibujos y tablas.

Finalmente al Dr. Gerardo Hiriart Le B. por haberme ayudado a la identificación del problema y por su permanente guía durante el transcurso de la investigación.

A todos ellos mis más sinceros agradecimientos.

## 9 REFERENCIAS

- 1 Guarga R., Hiriart G., Verificación experimental de dos métodos de cálculo de la resonancia en una planta hidroeléctrica, Congreso Nacional de Hidráulica, Mérida, Yuc., Mex., (1980)
- 2 Meier G.E.A., Grabitz G., Jungowski W.M., Witezac K.J., Anderson J.S., Oscillations of the supersonic flow downstream of an abrupt increase of duct cross section, Mitt. Max-Planck-institut für Strömungschung, Göttingen, N 65 (1978)
- 3 Levi E., Nuevas consideraciones sobre la periodicidad de estructuras vorticosas, Mem. IX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Mérida, Venezuela, (1980)
- 4 Ketter R.L., Lee G.C., Prawel S.P., Structural analysis and design, Mc Graw-Hill Kogakusha, First Edition, (1979)
- 5 The M.W. Kellogg Company, Design of piping systems, Pullman Power Products, Wiley-Interscience Publication, Second Edition, (1956)
- 6 Shapiro A.H., The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, First Edition, (1953)