



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

263  
112

MODIFICACION DE ESPECTROS SISMICOS POR LA  
INFLUENCIA DE LAS CONDICIONES LOCALES.

## TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de  
I N G E N I E R O C I V I L  
P r e s e n t a

X I A N G Y U E L I



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

	Pag.
1. INTRODUCCION	2
2. AMPLIFICACION DE LA RESPUESTA DEL SUELO	
2.1 <i>Descripción del fenómeno</i>	5
2.2 <i>Hipótesis de trabajo</i>	8
2.3 <i>Modelo analítico</i>	9
2.4 <i>Efecto de la disipación de energía</i>	14
3. VARIANZAS DE LAS RESPUESTAS DE UNA ESTRUCTURA UBICADA SOBRE TERRENO DURO Y OTRA SOBRE TERRENO BLANDO	
3.1 <i>Nota introductoria</i>	18
3.2 <i>Varianzas de las respuestas</i>	20
4. FACTOR DE AMPLIFICACION DE ESPECTROS SISMICOS	
4.1 <i>Definición</i>	25
4.2 <i>Limitaciones y corrección</i>	27
5. CASOS ESTUDIADOS	30
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	32

	Pag.
7. REFERENCIAS	34
8. FIGURAS	36
APENDICE A	
RESPUESTA DINAMICA DE UNA EXCITACION ARBITRARIA	46
APENDICE B	
VARIANZA DE LA RESPUESTA	50

## 1. INTRODUCCION

La influencia de las condiciones locales del sitio en donde se encuentre una obra civil, debe de tomarse en cuenta para el análisis sísmico de ésta.

Durante los años cincuenta y sesenta, algunos investigadores observaron dicha influencia, por lo que se interesaron en estudiar dicho fenómeno (ref 12). Actualmente se reconoce que las características de los movimientos sísmicos pueden variar de las que se tendrían si no influyeran las condiciones locales en un sitio de interés. Por ejemplo, tal influencia se hace muy notable en el centro de la ciudad de México (ref 4), en donde se encuentra un depósito de suelo muy blando de gran espesor. En el espectro de respuesta de dicho sitio aparece un pico pronunciado cuando

el periodo es de 2.5 segundos, el cual coincide prácticamente con el período natural de vibración del suelo. En la zona de la Cd. de México en donde se encuentra terreno firme, como en la ciudad universitaria, no sucede este fenómeno, ya que ahí no existe un estrato de suelo blando.

En general, la influencia de las condiciones locales de un sitio en las características de los temblores, se relaciona con los siguientes aspectos (ref 10):

- . Topografía de la superficie del terreno
- . Relación de impedancia entre el manto superficial blando y el estrato firme que lo soporta
- . Geología del sitio
- . Continuidad del medio
- . Comportamiento del suelo ante cargas sísmicas

En este trabajo sólo se trata el inciso correspondiente a las ca racterísticas del movimiento en la superficie de un manto blando aproximadamente horizontal apoyado sobre otro firme excitado por sismo.

Los estudios sobre la influencia de las condiciones locales pueden llevarse a cabo mediante instrumentación, sin embargo, los re

gistros obtenidos son escasos debido a razones económicas, salvo en algunos sitios como la parte suroeste de E.E.U.U. Los estudios con procedimientos analíticos son en general más comunes.

En los procedimientos analíticos se utilizan hipótesis referentes a las características del sismo, a las condiciones de frontera del modelo analítico, a las ecuaciones constitutivas del suelo, ángulo de incidencia de ondas sísmicas, etc. El modelo analítico que se seleccione para este estudio de un caso particular debe de ser congruente con las condiciones locales y sobre la excitación, así como estar consciente de sus limitaciones y alcances. En las refs 2, 10, 11 y 12 se mencionan algunos estudios analíticos hechos sobre este tema.

El estudio de la influencia de las condiciones locales del sitio en las características de la respuesta sísmica puede efectuarse de forma aproximada, para el diseño y análisis de estructuras de poca importancia y cuyas consecuencias de falla son poco importantes; sin embargo, para el caso en que dichas consecuencias son muy importantes (como es el caso de plantas nucleares, grandes presas, etc) el estudio debe realizarse en la forma más precisa posible.

En este trabajo, se estudia la influencia de las condiciones lo

cales del sitio en las características de la respuesta sísmica mediante el siguiente planteamiento unidimensional: Dado un es pectro de respuesta correspondiente a terreno duro en una región y dadas las características de un estrato de suelo blando aproximadamente horizontal y homogéneo en la misma región, suponiendo que la fuente sísmica está a una distancia moderada del sitio de modo que las ondas sísmicas de cortante llegan a éste verticalmente, determinar el espectro de respuesta en las superficie del terreno blando mediante un factor de amplificación, el cual modifique al espectro asociado a terreno duro para dar lugar al de terreno blando.

Para resolver lo anterior, este trabajo se divide en las siguientes partes: en la siguiente sección se presenta la formulación del modelo matemático para encontrar la respuesta dinámica del suelo, en la 3 se calculan las varianzas de dos sistemas simples, uno ubicado en terreno blando y otro sobre terreno duro, dichas varianzas sirven para definir el factor de amplificación. En la 4 se modifica dicho factor para excitaciones diferentes a un ruido blanco y posteriormente se presentan algunos ejemplos de casos típicos y discusión de los resultados obtenidos.

## 2. AMPLIFICACION DE LA RESPUESTA DEL SUELO

### 2.1 *Descripción del fenómeno*

La transmisión de ondas sísmicas (fig 1) desde su fuente hasta la estación de registro, puede estudiarse como un proceso de propagación de ondas elásticas de diversos tipos (de compresión (P), de cortante (S), superficiales (Rayleigh, Love)). Durante este proceso ocurren fenómenos tales como reflexión, refracción, atenuación, ampliación del frente de onda, etc. La influencia del suelo local tiene lugar al final de dicho proceso. La respuesta sísmica del suelo puede diferir de un punto a otro ubicado en la misma región o de uno ubicado a diferentes profundidades medidas desde la superficie del terreno.

Al fenómeno de modificación de la respuesta dinámica del suelo cuan

do este se encuentra en condiciones estables (que no se presente el fenómeno de licuación, que no haya compactación por vibración, pérdida al esfuerzo cortante, etc) se le llama AMPLIFICACION o ATENUACION.

El fenómeno de amplificación o atenuación implica modificaciones en la respuesta sísmica bajo determinada condición local del suelo. Es decir puede haber:

i) Modificación en la amplitud de la respuesta (aceleración, velocidad, desplazamiento, etc)

ii) Modificación en el contenido de frecuencias (Respuesta evolutiva en el dominio de la frecuencia).

El proceso de propagación de ondas sísmicas es un problema tridimensional. Sin embargo, por simplicidad analítica este puede estudiarse dentro de un marco bidimensional o unidimensional.

El planteamiento unidimensional es el más simple de los mencionados, en este se supone por lo general que las ondas incidentes en el sistema en estudio, son planas e inciden verticalmente al sistema (ondas de cortante para la componente horizontal o de compresión para la vertical). Con este tipo de planteamiento no se puede tomar en cuenta la influencia del ángulo de incidencia en un sistema (ref 8), sin embargo esto sí es posible hacerlo si se trata el problema dentro de un marco bi-ó-tridimen-

sional. Dentro de estos últimos también es posible analizar la influencia de las irregularidades topográficas en la respuesta sísmica del sitio (ref 11).

El problema unidimensional se puede plantear a través de la solución continua de la ecuación diferencial del movimiento correspondiente al problema de propagación unidimensional de onda; también es posible resolverlo discretizando los estratos del suelo como un sistema de  $n$  grados de libertad. Estas dos soluciones son convencionales en el análisis dinámico estructural; en ellas generalmente se hace la hipótesis de que la roca subyacente al manto blando de suelo es un semi-espacio homogéneo y que los estratos superiores y la roca están formados por materiales viscoelásticos lineales. Para resolver el problema bi-y-tridimensional se puede recurrir a métodos tales como: elementos finitos, diferencias finitas, difracción de ondas, etc.

En los métodos analíticos generalmente se idealiza al suelo como un medio constituido por un material linealmente elástico o viscoelástico. Esto dista de la realidad, excepto en el intervalo de deformaciones pequeñas. El comportamiento esfuerzo-deformación-tiempo del suelo es bastante complicado y más aún bajo cargas dinámicas, como son las sísmicas. Varios investigadores han intentado encontrar ecuaciones constitutivas del suelo bajo este tipo de cargas (sísmicas), para utilizarlas en análisis

sis de amplificación. Por ejemplo, Idriss y Seed (ref 5) utilizaron los modelos bilineal y lineal equivalente para representar las propiedades no lineales e inelásticas del suelo. Con estos dos modelos calcularon el espectro de respuesta de aceleración en la superficie de un suelo blando soportado por roca. También encontraron los esfuerzos cortantes asociados en profundidades dadas a partir de la superficie libre del terreno.

En este trabajo se analiza el problema de amplificación de la respuesta del suelo unidimensionalmente, en suelos constituidos por materiales viscoelásticos.

## 2.2 *Hipótesis de trabajo*

El modelo analítico aquí empleado se basa en las siguientes hipótesis:

1) Se idealiza al estrato de depósito del suelo blando mediante una viga de cortante, unidimensional, con las siguientes condiciones de frontera: empotramiento en la base y libre de giro y de traslación en la parte superior (superficie libre del terreno) (Fig 3).

2) Se supone que el suelo está constituido por un material viscoelástico en el intervalo lineal con parámetros constantes;

3) Las ondas sísmicas incidentes son planas de tipo SV, esto es, las ondas son de cortante e inciden verticalmente;

4) Las superficies superior e inferior del estrato son planas horizontales, y estas se extienden horizontalmente hacia el infinito;

5) No se toma en cuenta el efecto de interacción suelo-estructura.

### 2.3 Modelo analítico

Aceptando las hipótesis citadas en la sección anterior, ignorando el efecto de la disipación de energía en la interfase de suelo y roca (que se introducirá en la siguiente sección), y suponiendo que la base del suelo está sujeta a una aceleración en sentido horizontal  $\ddot{U}_0(t)$  (Fig 3), la ecuación diferencial que gobierna el movimiento es:

$$G \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial t} = \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \ddot{U}_0 \right) \rho \quad (2.1)$$

donde:  $x = x(z, t)$  es el desplazamiento relativo del suelo, en dirección horizontal,

$t =$  tiempo

$z =$  coordenada del eje vertical

$G =$  módulo de rigidez al cortante del suelo,

$\eta$  = coeficiente de viscosidad del suelo,

$\rho$  = densidad de masa del suelo,

$\partial(\cdot)$  = diferencial parcial.

Para resolver esta ecuación diferencial parcial, se utiliza el método de separación de variables.

Se supone que la solución de la ec (2.1) está dada por

$$x(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$$

En donde Z es una función que depende de la forma y T, del tiempo. Sustituyendo esta solución en la ec.(2.1), se tiene

$$\rho Z \ddot{T} = GZ''T + \eta Z'' \dot{T} - \rho \ddot{u}_0$$

Suponiendo  $\ddot{u}_0 = 0$  y ordenando los términos,

$$\frac{\ddot{T}}{T + \frac{\eta}{G} \dot{T}} = \frac{GZ''}{\rho Z} = -\omega^2 = \text{constante}$$

Así, se obtienen dos ecuaciones diferenciales:

$$Z'' + \frac{\rho}{G} \omega^2 Z = 0 \quad (2.2a)$$

$$\ddot{T} + \frac{\eta}{G} \omega^2 \dot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2.2b)$$

Sea  $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = c$  = velocidad de propagación de una onda transversal.

La solución de la ec (2.2a) está dada por

$$Z(z) = c_1 \cos \frac{\omega}{c} z + c_2 \sin \frac{\omega}{c} z$$

en donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Las condiciones de frontera que se imponen son las siguientes:

$$x(0,t) = 0 \quad \text{por lo que} \quad Z(0) = 0$$

$$x'(H,t) = 0 \quad \text{por lo que} \quad Z'(H) = 0$$

donde  $H$  = espesor del estrato.

De aplicar las condiciones de frontera, se obtiene  $c_1 = 0$  y  $\cos \frac{\omega}{c} H = 0$ . Así, se tiene que las frecuencias modales son iguales a

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H} c \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

y la solución de la ec (2.2a) para cada "n" está dada por

$$Z_n(z) = \sin \frac{\omega_n}{c} z = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z$$

Dado que la solución de la ec (2.1) se supone que tiene la siguiente forma:

$$x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_n(t)$$

La ec (2.1) se convierte en

$$\rho \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \ddot{T}_n(t) = -G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{c^2} Z_n(z) T_n(t) - \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{c^2} Z_n(z) \dot{T}_n(t) - \rho \ddot{U}_0(t)$$

Ordenando los términos se llega a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{T}_n(t) + \frac{\eta \omega_n^2}{\rho c^2} \dot{T}_n(t) + \frac{G \omega_n^2}{\rho c^2} T_n(t) \right] Z_n(z) = -\ddot{U}_0$$

Si

$$\phi_n(t) = \ddot{u}_n(t) + \frac{\eta\omega_n^2}{\rho c^2} \dot{T}_n(t) + \frac{G\omega_n^2}{\rho c^2} T_n(t) \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) z_n(z) = -\ddot{u}_0$$

La ortogonalidad de la función  $z_n(z)$  implica que

$$\int_0^H z_i(z) z_j(z) dz = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{H}{2} & i = j \end{cases}$$

De esto se obtiene la función  $\phi_n(t)$

$$\phi_n(t) = -\frac{4}{(2n-1)\pi} \ddot{u}_0 = -a_n \ddot{u}_0 \quad (2.5)$$

donde:  $a_n = \frac{4}{(2n-1)\pi}$  = coeficiente de participación de n-ésimo modo

Sea  $\xi_n = \frac{\eta\omega_n}{2\rho c^2}$  factor de amortiguamiento del n-ésimo modo; considerando las ecs (2.4) y (2.5) y cambiando  $T_n(t)$  por  $x_n(t)$ , se tiene

$$\ddot{x}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{x}_n(t) + \omega_n^2 x_n(t) = -a_n \ddot{u}_0(t) \quad (2.6)$$

La anterior es la ecuación diferencial de la configuración deformada del suelo para cada modo natural "n".

La solución de la ec (2.6) puede representarse mediante la Integral de Duhamel (Apéndice A).

La respuesta dinámica ante un impulso unitario del sistema representado por la ec (2.6), correspondiente al modo natural "n" es

$$h_n(t) = -\frac{a_n}{\omega_{\xi n}} \exp(-\xi_n \omega_n t) \operatorname{sen}(\omega_{\xi n} t) \quad ; \quad t > 0$$

$$h_n(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$
(2.7)

en que  $\omega_{\xi n} = \omega_n \sqrt{1-\xi_n^2}$  frecuencia amortiguada del n-ésimo modo.

Análogamente, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de un oscilador simple está dada por

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \ddot{Y}_0(t)$$

donde:  $x(t)$  = el desplazamiento del oscilador,  $\omega$  = frecuencia natural,  $\xi$  = factor de amortiguamiento,  $\ddot{Y}_0(t)$  = excitación que actúa sobre el oscilador.

La respuesta dinámica del oscilador simple ante un impulso unitario es

$$h_0(t) = \frac{-1}{\omega \xi} \exp(-\xi \omega t) \operatorname{sen}(\omega \xi t) \quad ; \quad t > 0$$

$$h_0(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$
(2.8)

donde:  $\omega_{\xi} = \omega \sqrt{1-\xi^2}$  frecuencia amortiguada

La superposición de  $h_n(t)$ , ec (2.7), constituye la respuesta dinámica de un sistema de  $n$  grados de libertad. Si el número de modos  $n$  tiene a infinito, como es el caso de un medio continuo, la superposición de  $h_n(t)$  presenta la respuesta dinámica total que define el movimiento del terreno. Si sólo se consideran los s primeros modos, se tiene

$$h(t) = \sum_{n=1}^s h_n(t)$$
(2.9)

donde  $h_n(t)$  está dada por la ec (2.7).

Por facilidad del cálculo numérico y para fines prácticos, se pueden calcular solamente los primeros modos, siempre y cuando los modos superiores no influyan de manera decisiva en la respuesta total.

## 2.4 Efecto de la disipación de energía

En la formulación analítica presentada en el inciso anterior, se supuso que la base era infinitamente rígida. En realidad la base es deformable y, además, las ondas sufren reflexiones y refracciones en la interfase de los dos medios. Por lo anterior se debe de tomar en cuenta la pérdida de energía debida a la deformabilidad de la base y la refracción parcial de ondas que regresan a la roca.

A fin de estimar estos efectos Rosenblueth y Elourdy (ref 9); y Tani (ref 12) propusieron considerar un amortiguamiento por radiación en la interfase de suelo blando y roca; mientras Roesset y Whitman (ref 7) introdujeron un amortiguamiento equivalente en el suelo blando.

En la fig 2 se muestra el mecanismo del amortiguador de radiación (ref 9). De hecho la aplicación instantánea de un esfuerzo cortante  $\tau$  en la interfase provoca una deformación uniforme de corte  $\tau/G_r$  en donde  $G_r$  representa el módulo de rigidez cortante en la roca. La interfase se mueve con una velocidad igual a  $C_r \tau/G_r = \tau/\sqrt{G_r \rho_r}$ , donde  $C_r$  es la velocidad de propagación de las ondas transversales en la roca, y  $\rho_r$  es la densidad de masa de la roca. Este comportamiento equivale a que en la interfase se incluya un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es

igual a  $\sqrt{G_r \rho_r}$ .

Roesset y Whitman estudian un modelo unidimensional con propiedades viscoelásticas del suelo para obtener las funciones de amplificación  $|A|$  en la superficie. Ellos obtienen para una excitación armónica con frecuencia  $\Omega$  lo siguiente:

i) Caso en que la base del suelo se considera infinitamente rígida. Para el n-ésimo modo:

$$|A_1(\Omega)| = \frac{4}{(2n-1)\pi \frac{\eta\Omega}{G}} \quad (2.10)$$

ii) Caso en que la base del suelo se considera elástica. Para el n-ésimo modo:

$$|A_2(\Omega)| = \frac{\gamma_r C_r}{\gamma C} \frac{4}{1 + \frac{\gamma_r C_r}{\gamma C} \frac{(2n-1)\eta}{4} \frac{\eta\Omega}{G}} \quad (2.11)$$

donde:  $\gamma$  = el peso específico del suelo,

$\gamma_r$  = el peso específico de la roca,

$C_r$  = la velocidad de propagación de las ondas transversales en la roca

Los demás símbolos tienen el mismo significado que en la sección anterior.

La diferencia entre los dos casos anteriores es que el caso en que la base del suelo se considera elástica existe el efecto de disipación de energía en la interfase, mientras que en el primero no. Con el fin de tomar en cuenta este efecto, en el caso en el que la base del suelo se considera rígida, se hace que el coeficiente de amortiguamiento  $\eta$  en la ec (2.10) sea igual al del

amortiguador agregado al suelo artificialmente como se mencionó antes. Así pues, las dos ecuaciones (2.10) y (2.11) son equivalentes. Aceptando que el término  $\frac{\eta \Omega}{G}$  en la ec (2.11) es pequeño y  $\Omega = \omega_n$  = frecuencia natural del suelo, se tiene:

$$\frac{4}{(2n-1)\pi \frac{(\eta_a)_n \omega_n}{G}} = \frac{\gamma_r c_r}{\gamma c}$$

Despejando  $(\eta_a)_n$ :

$$(\eta_a)_n = \frac{4G}{(2n-1)\pi \omega_n} \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r} \quad (2.12a)$$

De la ec (2.3) se tiene que

$$\frac{c}{\omega_n} = \frac{2H}{(2n-1)\pi}$$

Sustituyéndola en la ec (2.12a):

$$(\eta_a)_n = \frac{8H}{(2n-1)^2 \pi^2} \frac{\gamma G}{\gamma_r c_r} \quad (2.12b)$$

Pero

$$\gamma = \rho g, \quad \gamma_r = \rho_r g \quad \text{y} \quad c_r = \sqrt{\frac{G_r}{\rho_r}}$$

donde  $g$  = aceleración de la gravedad,

$\rho_r$  = densidad de masa de la roca,

$\rho$  = densidad de masa del suelo,

$G_r$  = módulo de rigidez al cortante de la roca

Finalmente, el coeficiente de amortiguamiento agregado al suelo

para el  $n$ -ésimo modo está dado por

$$(\eta_a)_n = \frac{8H}{(2n-1)^2 \pi^2} \frac{\rho G}{\sqrt{\rho_r G_r}} \quad (2.12c)$$

De la ecuación anterior se observa que a medida que  $\rho_r G_r$  aumenta, o sea la rigidez de roca aumenta,  $(\eta_a)_n$  disminuye; si  $\rho_r G_r$  tiende al infinito, esto es, si la base del suelo es infinitamente rígida,  $(\eta_a)_n$  tiende a ser nulo.

Teniendo en cuenta lo anterior, el término de  $\xi_n$  en la ec (2.7) debe calcularse como sigue:

$$\xi_n = \frac{|\eta + (\eta_a)_n|}{2\rho c^2} \omega_n^2 \quad (2.13)$$

Así pues, el amortiguamiento del suelo considerado en el análisis anterior está compuesto por el amortiguamiento propio del suelo (con coeficiente de amortiguamiento  $\eta$ ), más el agregado artificialmente al suelo (con coeficiente de amortiguamiento  $(\eta_a)_n$ ). De esta manera, puede incluirse en un análisis de amplificación de respuesta sísmica del suelo el efecto de la dissipación de energía en la interfase de suelo y roca.

### 3. VARIANZAS DE LAS RESPUESTAS DE UNA ESTRUCTURA UBICADA SOBRE TERRENO DURO Y OTRA SOBRE TERRENO BLANDO

#### 3.1 *Nota introductoria*

Como se había mencionado en la sección 2.1, las ondas sísmicas se transmiten desde su fuente hasta la superficie del terreno por un proceso aleatorio muy complicado. Debido a las características aleatorias del movimiento del terreno ante un sismo, una de las mayores incertidumbres en el análisis de la respuesta sísmica es la definición de la excitación. La excitación sísmica puede determinarse mediante dos procedimientos: Determinístico o Probabilístico.

En un estudio determinístico, la excitación se especifica mediante la historia de movimiento, por ejemplo, de aceleración. Esta historia de movimiento satisface a un determinado espectro de diseño. Pero, un espectro de diseño no define únicamente a una historia de movimiento, por consiguiente, se necesitan analizar muchas historias que están definidas por un sólo espectro de di

seño. En el análisis probabilístico, se considera a un movimiento sísmico como un proceso estocástico (por ejemplo, un proceso estocástico gaussiano), el cual está caracterizado completamente por su densidad espectral.

El estudio determinístico algunas veces resulta ser antieconómico e ineficiente (ref 3), por lo tanto suele considerarse que el estudio probabilístico es, en algunos casos, más conveniente y éste último cada día gana más popularidad que aquél. Sin embargo los registros de aceleración de sismos grandes son pocos; y con un número pequeño de muestreos difícilmente se puede hacer un análisis estadístico para establecer un modelo probabilístico. Varios investigadores han intentado proponer modelos y verificarlos con registros de sismos reales. Entre ellos, Housner en 1947 (ref 3), idealizó por primera vez los acelerogramas como una serie de pulsos de cierta magnitud localizada en el dominio del tiempo; poco después (ref 3), consideró que los acelerogramas podían representarse como sumas de pulsos senoidales distribuidos aleatoriamente en el dominio de tiempo. Posteriormente otros investigadores como Hudson, Bycroft y Rosenblueth (ref 3) modelaron acelerogramas de sismos mediante ruido blanco. En realidad, el ruido blanco ideal físicamente es imposible; sin embargo en un segmento de duración finita de tiempo, donde se registran los mayores aceleraciones de un sismo, la densidad espectral puede considerarse constante como la del ruido blanco (ref 1). Por la simplicidad matemática en este estudio se considera al movimiento sísmico como un proceso estocástico cuya densidad espectral es un ruido blanco ideal.

El ruido blanco ideal es un proceso que puede caracterizarse por una densidad espectral cuyas ordenadas son constantes, es decir:

$$S_{u_0}(\omega) = S_0 \quad -\infty < \omega < \infty \quad (3.1a)$$

Su función de autocorrelación es como sigue:

$$R_{\ddot{u}_0}(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$$

en donde  $S_0 = \text{constante}$

$\delta(\tau) = \text{función delta de Dirac}$

En el siguiente inciso se calculan las varianzas de los dos sistemas lineales de interés para este trabajo.

### 3.2 Varianzas de las respuestas

Considérese un sistema primario que corresponde a una viga de cortante (fig 4) y un sistema secundario que es un oscilador simple. Ambos sistemas están relacionados de tal forma que la respuesta del primario en la superficie libre del suelo (o sea la parte superior de la viga) es la excitación,  $\ddot{x}(t)$ , en la base del sistema secundario. Este sistema combinado se considera aquí como el modelo de una estructura cimentada sobre terreno blando. Las características de las respuestas dinámicas de un oscilador simple y de una viga de cortante se estudiaron anteriormente. Aquí se calculan sus varianzas.

Según la definición de la integral de Duhamel (Apéndice A, ec A.4) si la excitación en la base del estrato de suelo es  $\omega(t) = \ddot{u}(t)$ , la respuesta del movimiento del sistema primario (suelo) en su superficie está dada por

$$x(t) = \int_0^t h(t-\phi) \omega(\phi) d\phi \quad (3.2a)$$

o bien

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\phi) \omega(\phi) d\phi \quad (3.2b)$$

y

$$\ddot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{h}(t-\phi) \omega(\phi) d\phi \quad (3.2c)$$

donde  $h(t)$  está expresada por la ec (2.9), que es la respuesta dinámica ante un impulso unitario del sistema primario.

A su vez,  $\ddot{x}(t)$  es la excitación del sistema secundario; por lo tanto, la respuesta  $y(t)$  (desplazamiento) de este sistema se obtiene como sigue:

$$y(t) = \int_0^t h_0(t-\psi) \ddot{x}(\psi) d\psi \quad (3.3a)$$

o bien

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-\psi) \ddot{x}(\psi) d\psi \quad (3.3b)$$

donde  $h_0(t)$  está dada por la ec (2.8), que es la respuesta dinámica ante un impulso unitario del sistema secundario. Sustituyendo la ec (3.2c) en la ec (3.3b), se tiene

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-\psi) \ddot{h}(\psi-\phi) \omega(\phi) d\psi d\phi \quad (3.4a)$$

llamando

$$h^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-\psi) \ddot{h}(\psi) d\psi \quad (3.5)$$

la ec (3.4a) resulta

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t-\phi) \omega(\phi) d\phi \quad (3.4b)$$

En la ecuación anterior,  $h^*(t)$  representa la respuesta dinámica ante un impulso unitario de todo el sistema (primario y secundario).

Según A.11 (Apéndice A), y de acuerdo con la ec (3.4b), la función de autocorrelación de respuesta de todo el sistema está da

da por:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda_1) h^*(\lambda_2) R_{\omega}(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (3.6)$$

Haciendo  $\tau = 0$ , se tiene la variancia  $\sigma_y^2$  (A.13, Apéndice A):

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E [y^2(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda_1) h^*(\lambda_2) R_{\omega}(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si se considera que la excitación tiene una densidad espectral correspondiente a un ruido blanco, entonces:

$$R_{\omega}(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\pi S_0 \delta(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (3.8)$$

Al sustituir esta última en la ec (3.7) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda_1) h^*(\lambda_2) (2\pi S_0) \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= 2\pi S_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda_1) d\lambda_2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda_2) \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_2 \right) \\ &= 2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda_1) h^*(\lambda_1) d\lambda_1 = 2\pi S_0 \int_{-\infty}^{\infty} [h^*(t)]^2 dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

La obtención de la variancia de  $y$  se detalla en el Apéndice B.

Ahora, considérese otro sistema que consiste en un oscilador simple, el cual se considera aquí como el modelo de una estructura ubicada en terreno firme (fig 4). La excitación de este sistema se supone que es la misma que la del sistema anteriormente estudiado, o sea la de la base del terreno blando, igual a  $\omega(t) = \ddot{U}_0(t)$ . Rigurosamente esto no es cierto, sin embargo es una aproximación aceptable dada la rigidez y la continuidad

del terreno firme.

Si  $y_o(t)$  es la respuesta del oscilador simple considerado, según (A.6a) se tiene:

$$y_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t-\phi) \omega(\phi) d\phi \quad (3.10)$$

donde  $h_o(t)$  está dada por la ec (2.8), y  $y_o(t)$  representa el desplazamiento del oscilador. La función de autocorrelación de  $y_o(t)$ , según (A.12) resulta:

$$R_{y_o}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(\lambda_1) h_o(\lambda_2) R_{\omega}(\delta + \lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (3.11)$$

Haciendo  $\tau = 0$ , se tiene la variancia de la respuesta  $y_o(t)$  del oscilador simple:

$$\begin{aligned} \sigma_o^2 &= E [ y_o^2(t) ] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_o(\lambda_1) h_o(\lambda_2) R_{\omega}(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si la función  $R_{\omega}(\lambda_1 - \lambda_2)$  es la misma que la dada por la ec (3.8), la ecuación anterior resulta:

$$\sigma_o^2 = 2\pi S_o \int_{-\infty}^{\infty} [ h_o(t) ]^2 dt \quad (3.13)$$

Sustituyendo la ec (2.8) en la ecuación anterior, se tiene:

$$\sigma_o^2 = 2\pi S_o \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2} \exp(-2\xi\omega t) \sin^2(\omega_c t) dt$$

Realizando esta integral, se llega a la expresión:

$$\sigma_o^2 = \frac{\pi S_o}{2\xi\omega_c^3}$$

En la que  $\sigma_0^2$  representa la varianza del desplazamiento relativo del oscilador simple. Los parámetros  $\omega$ ,  $\xi$  y  $S_0$  tienen el mismo significado antes definido.

Hasta aquí, se ha calculado las varianzas de los desplazamientos relativos de dos sistemas que representan a dos estructuras: una ubicada en terreno firme y otra en terreno blando. Con ellas es posible calcular el factor de amplificación de la respuesta, El cual se define a continuación.

## 4. FACTOR DE AMPLIFICACION DE ESPECTROS SISMICOS

### 4.1 Definición

Para el diseño sísmico estructural interesa conocer los valores numéricos de las respuestas máximas. En un análisis de tipo probabilístico es deseable conocer las probabilidades de excedencia a un límite dado de las respuestas máximas de las estructuras. La función de densidad de probabilidades (f.d.p.) de la respuesta máxima para una duración de la excitación dada, es de tipo Rayleigh (Ref 1). La fig 5 muestra dicha función cuando la excitación es un proceso estacionario cuya densidad espectral es ruido blanco. En dicha figura  $y^*$  y  $y_0^*$  representan las respuestas máximas con una misma probabilidad de excedencia  $p$  de un oscilador simple y otro ubicado sobre terreno blando. El factor de amplificación se define como la relación de  $y^*$  entre  $y_0^*$  es decir

$$\text{Factor de Amplificación} = \frac{y^*}{y_0^*} = F_{a_M}$$

En donde  $y^*$  y  $y_0^*$  tienen la misma probabilidad de excedencia. Así es posible obtener el Factor de Amplificación de las respuestas máximas. Sin embargo, por simplicidad, en este trabajo se obtiene un factor de amplificación de la respuesta instantánea, para cualquier tiempo, según se explica en los siguientes párrafos.

Los movimientos sísmicos pueden representarse mediante procesos estocásticos gaussianos (Ref 6). Si los sistemas en estudio son lineales, la f.d.p. de sus respuestas también es gaussiana o normal. Suponiendo que la fig 6 muestra la f.d.p. normal de dicha respuesta en un instante dado para cada uno de los dos sistemas que hemos venido tratando, entonces para una probabilidad de excedencia  $p$ , las respuestas  $y$  y  $y_0$  de tales sistemas son

$$y = n \sigma_y \quad (4.2a)$$

$$y_0 = n \sigma_{y_0} \quad (4.2b)$$

En donde  $\sigma_y$  y  $\sigma_{y_0}$  representan las desviaciones estándar de las respuestas  $y$  y  $y_0$  respectivamente; y  $n$  es una constante que depende de la probabilidad de excedencia,  $p$ . Debe notarse que la media de ambas variables aleatorias es nula.

Para este caso el factor de amplificación es igual a

$$F_{a_1} = \frac{n \sigma_y}{n \sigma_{y_0}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{y_0}} \quad (4.3)$$

Con el factor de amplificación definido en la ec. 4.3 se puede calcular el efecto de la amplificación sísmica de las respuestas estructurales en un instante dado o al final del movimiento.

## 4.2 Limitaciones y corrección

Con el fin de simplificar el desarrollo analítico se ha supuesto que la excitación sísmica en la base del estrato del suelo blando tiene una densidad espectral tipo ruido blanco ideal. En este caso (fig 7a) dicha densidad,  $S_{\ddot{u}_0}(\omega)$ , es constante en todo el dominio de las frecuencias. Sin embargo un sismo real no tiene tales características sino que su densidad espectral varía con la frecuencia, como se muestra en la fig 7b. En esta

$$S_{\ddot{u}_0}(\omega_s) = S_s \quad \text{y} \quad S_{\ddot{u}_0}(\omega_0) = S_0$$

En donde  $\omega_s$  y  $\omega_0$  representan las frecuencias del oscilador ubicado sobre suelo blando y del oscilador simple, respectivamente.

Debido a lo anterior el factor de amplificación definido en la ec (4.3) debe corregirse por un coeficiente que tome en cuenta la variación  $S_s$  y  $S_0$ . Dicho coeficiente es igual a  $\sqrt{S_s/S_0}$ .

Por otro lado, la densidad espectral es proporcional al cuadrado del espectro de respuesta de pseudovelocidad,  $V$ , esto es:

$$\frac{S_s}{S_0} = \left(\frac{V_s}{V_0}\right)^2 \quad (4.4)$$

Pero, si  $A$  es el espectro de respuesta de pseudoaceleración, se tiene

$$A = \omega V \quad (4.5)$$

Sustituyendo la ec (4.5) en la ec (4.4), se obtiene

$$\frac{S_S}{S_O} = \left( \frac{A_S \omega_O^2}{A_O \omega_S} \right)$$

o bien

$$\sqrt{\frac{S_S}{S_O}} = \frac{A_S \omega_O}{A_O \omega_S} = \frac{A_S T_S}{A_O T_O}$$

Sustituyendo las siguientes expresiones en la ecuación anterior

$$A_S = A(T_S), \quad A_O = A(T), \quad T_O = T$$

se tiene

$$\sqrt{\frac{S}{S_O}} = \frac{A(T_S)}{A(T)} \frac{T_S}{T}$$

donde  $A(T)$  = ordenada de espectro de pseudoaceleración en terreno firme,

$T$  = periodo de sistema estructural simple

$T_S$  = periodo natural del sistema suelo blando-oscilador

Finalmente, el factor de amplificación es igual a

$$F_{ac}(T) = \left( \frac{\sigma_Y T_S}{\sigma_{Y_O} T} \right) \frac{A(T_S)}{A(T)} \quad (4.6)$$

La ecuación anterior elimina la restricción de que la excitación deba serruido blanco y toma en cuenta en forma aproximada la densidad espectral real de una excitación y su correspondiente espectro de pseudoaceleración. Además, con la modificación anterior se puede eliminar el caso en el que cuando  $T$  tiende a cero el factor de amplificación definido en la ec. (4.3) tiende a cero, lo cual

no es aplicable en la práctica. De hecho, el término  $\left(\frac{\sigma_y T}{\sigma_{y_0} T}\right)$  tiende a un valor definido diferente de cero cuando  $T$  tiende a cero.

Dadas las propiedades mecánicas de un depósito de suelo blando, se pueden calcular la varianza de la respuesta de un oscilador simple ubicado sobre este ( $\sigma_y^2$ ). Obviamente las propiedades mecánicas del suelo están consideradas implícitamente en el cálculo de  $\sigma_y^2$ . Así pues, el valor de  $\frac{\sigma_y}{\sigma_{y_0}}$  varía con las características del suelo para un periodo y un amortiguamiento dados del oscilador. Si el espectro de pseudoaceleración en terreno firme es conocido, se puede calcular el factor de amplificación dado por la ec. (4.6).

De esta forma mediante dicho factor se puede estudiar la influencia de las características del suelo en las características del movimiento del terreno. Según lo discutido en la sección 2.4, el efecto de la disipación de energía en la interfase de roca y suelo también debe de incluirse en el estudio.

## 5. CASOS ESTUDIADOS

El factor de amplificación de los espectros sísmicos es función de periodo  $T$  del oscilador simple. Para un depósito de suelo dado se puede obtener la variación de dicho factor de amplificación con el periodo.

En la fig 8 aparecen tres curvas que representan el factor de amplificación  $F_{a_1}$  (ec. (4.3)) para tres tipos de suelo, ignorando el factor de corrección dado en la ec (4.6). Los suelos en cuestión tienen diferentes velocidades de propagación de ondas transversales, indicadas en la misma figura. En el cálculo, se tomaron el factor de amortiguamiento del suelo igual a 2% para el modo fundamental y el factor de amortiguamiento del oscilador simple igual a 0.5%. El espesor del estrato del suelo en esos casos es igual a  $H=25m$ . Se observa en la figura que cuando  $T$  tiende al infinito,  $F_{a_1}$  tiene a una constante que es igual a la suma de los coeficientes de participación de los modos considerados en el cálculo, esto implica que conforme se incrementa el periodo lo que determina el factor  $F_{a_1}$  es sólo el suelo. Cuando  $T$  tiende a cero,  $F_{a_1}$  tiende a cero también; esto es congruente con el hecho

de que la energía de un sistema disipativo, en este caso, la del suelo blando se reduce al aumentar la frecuencia, y tiende a cero si la frecuencia tiende a infinito. Sin embargo, según lo explicado anteriormente, el factor de amplificación así obtenido no tiene un sentido físico práctico para períodos muy cercanos o iguales a cero. Por tanto, se debe modificar este factor de amplificación mediante el coeficiente  $\frac{T_s}{T}$ , donde  $T_s$  el periodo fundamental del suelo y  $T$  es el del oscilador simple. Cuando  $T$  tiende a cero  $F_a = \frac{\sigma_y T_s}{\sigma_{y_0} T}$  tiende a un límite igual a  $(\sum_n a_n \omega_n \xi_n) T_s \sqrt{1+4\xi^2}$ , cada uno de estos términos se definieron anteriormente. En la fig 9, se presentan tres curvas de variación  $\frac{\sigma_y T_s}{\sigma_{y_0} T} = F_a$ , con los mismos parámetros utilizados en el cálculo de la fig 8. Se debe notar que el factor de amplificación obtenido aquí se refiere a los desplazamientos relativos de un oscilador ubicado en terreno blando respecto a otro en terreno duro, ante una excitación estacionaria.

En la fig 10 se puede observar la influencia del espesor del estrato del suelo ( $H$ ). En este caso la velocidad de propagación de ondas transversales del suelo es igual a 30 m/s. Se observa que los valores máximos de factores de amplificación prácticamente no varían con los espesores del estrato, pero los períodos correspondientes aumentan a medida que los espesores aumentan.

En la fig 11 se presentan dos curvas. Una corresponde a un estrato cuya base se apoya en suelo elástico, y otra a un estrato cuya base es infinitamente rígida. En dicha figura se observa el efecto de la disipación de energía en la interfase de suelo y roca. La velocidad de ondas transversales del suelo en este caso es igual a 63 m/s, y el espesor del estrato es igual a 29 m.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Un análisis como el que aquí se propone sirve para obtener factores de amplificación aplicables directamente a espectros de respuesta que corresponden a probabilidades dadas de excedencia. Si se tiene un espectro de respuesta para terreno firme el espectro para terreno blando puede obtenerse mediante el uso de factores de amplificación a fin de tomar en cuenta la influencia de las condiciones locales del suelo.

El análisis que se presenta en este trabajo tiene limitaciones además de aquellas que se suelen citar en la literatura, tales como: *i*) se desprecia la interacción entre el oscilador simple y el suelo blando (sistemas primario y secundario); *ii*) la excitación que se supone es un proceso estocástico estacionario; *iii*) el modelo se limita a mantos de suelo aproximadamente horizontales, apoyados sobre roca también horizontal ubicada a una profundidad dada; *iv*) la incidencia de las ondas se supone vertical en la interfase entre suelo blando y roca. Sin embargo a pesar de sus limitaciones, este trabajo proporciona un cri

terio de análisis de amplificación de espectros sísmicos tomando en cuenta la influencia de condiciones locales.

Es deseable hacer una amplificación a este trabajo que considere la influencia de la no-estacionariedad en la excitación, así como incorporar modelos matemáticos que tomen en cuenta irregularidades topográficas en la localidad, leyes constitutivas más realistas del suelo, etc.

## 7. REFERENCIAS

1. Clough, R. W., y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Inc. (1975)
2. Faccioli, E., y Reséndiz, D., "Soil dynamics behavior including liquefaction", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, E-15, (1975)
3. Housner, G.W., y Jennings, P.C. "Generation of artificial earthquake", ASCE, *J. Engineering Mechanics Division*, Febrero, (1964)
4. Housner, G.W., "Strong Ground Motion", Capítulo 4 del libro *Earthquake Engineering*, Wiegel, R.L. ed., Prentice-Hall, Inc. (1970)
5. Idriss, I.M., y Seed, H.B., "Seismic response of horizontal soil layers", ASCE, *J. Soil Mechanics and Foundation Division*, Julio, (1968)
6. Newmark, N.M., y Rosenblueth, E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice-Hall (1977)

7. Roesset, J.M., y Whitman, R.V., "Theoretical background for soil amplification studies", Report R69-15, Dept. of Civil Engineering, MIT Cambridge, Massachusetts. (1969)
8. Roesset, J.M., "Efectos del suelo en la respuesta sísmica de estructuras", *Ingeniería Sísmica*, 25, México, D.F., Dic. (1981)
9. Rosenblueth, E., y Elorduy, J., "Características de los temblores en la arcilla de la ciudad de México y Proyecto Texcoco", contribución del Proyecto Texcoco al VIII ICSMFE, Secretaría de Hacienda y Crédito Público, Nacional Financiera, S.A., México, D.F., (1969)
10. Ruiz, S.E., "Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos", *Instituto de Ingeniería*, UNAM, 387, (1977)
11. Sánchez-Sesma, F.J., " Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities", *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol.73, No.6, Dic. (1983)
12. Tsai, N., "Influence of local geology on earthquake motion", Tesis doctoral, *California Institute of Technology* Pasadena, Cal., (1969)
13. Vanmarcke, E.H., " Structural response to earthquakes", Cap. 8 del libro *Seismic risk and engineering decisions*, Ed. C. Lomnitz y E. Rosenblueth, Elsevier, Amsterdam, (1976)

## 8. FIGURAS

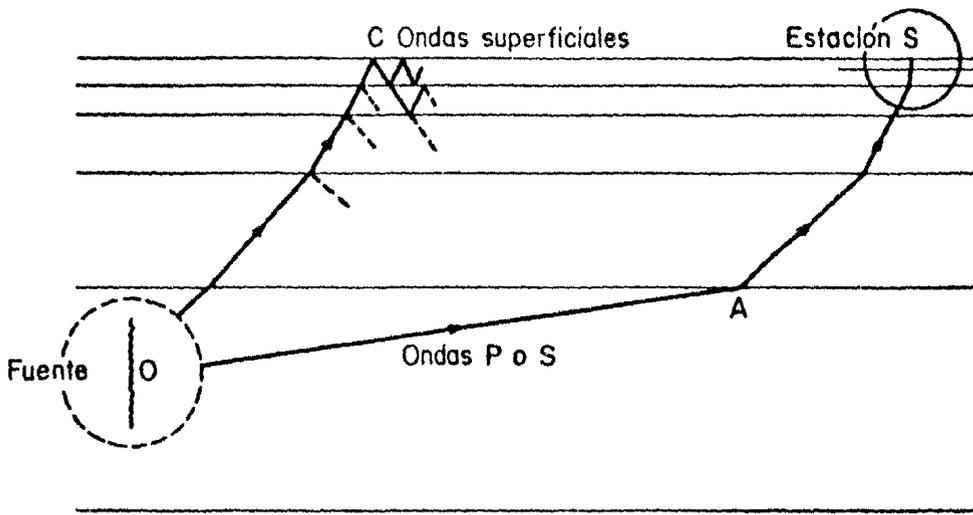


Fig 1. Idealización del proceso de transmisión de ondas sísmicas (ref 10)

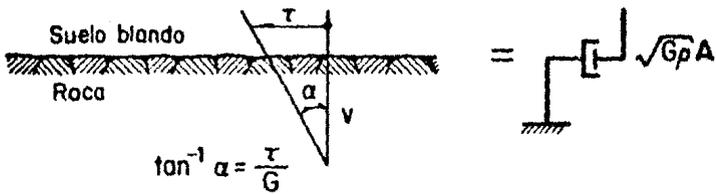


Fig 2. Equivalencia del efecto de disipación de energía en la interfase (ref 9)

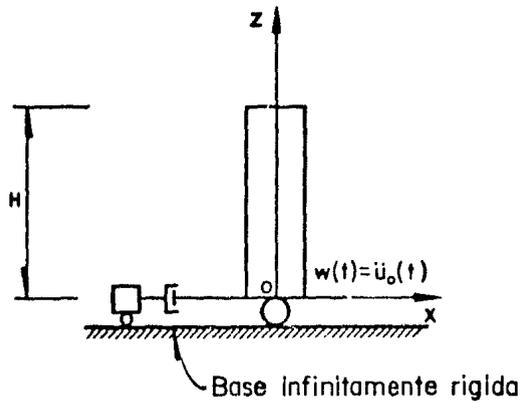


Fig 3. Modelo del suelo como una viga de cortante

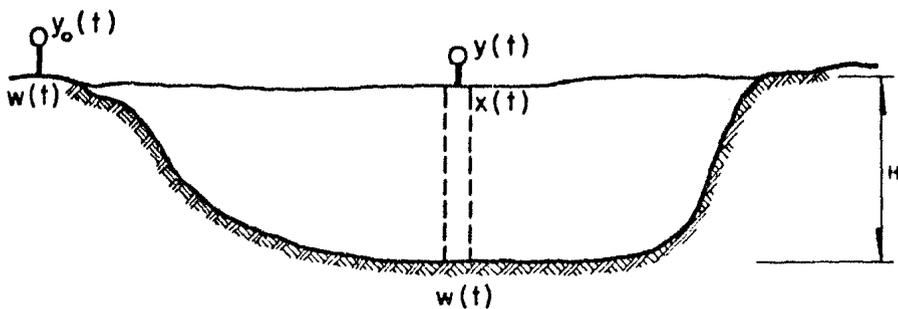


Fig 4. Oscilador simple y oscilador simple ligado a una viga de cortante

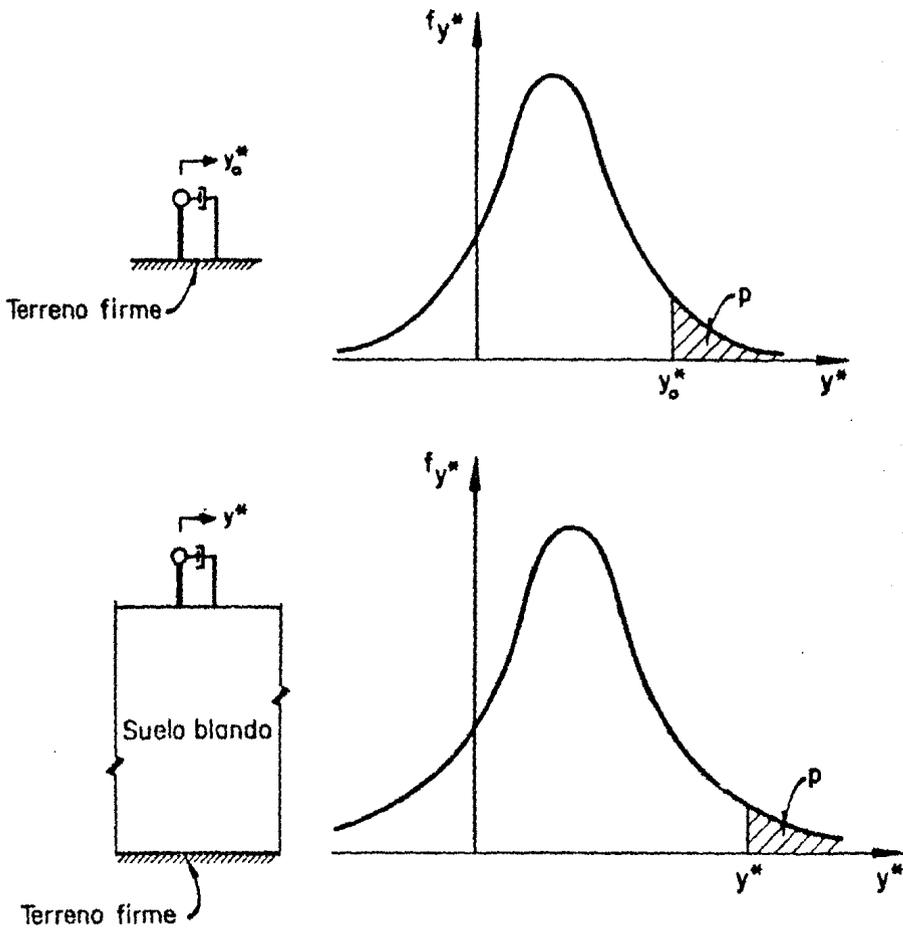


Fig 5. Función de densidad de probabilidades de respuestas máximas

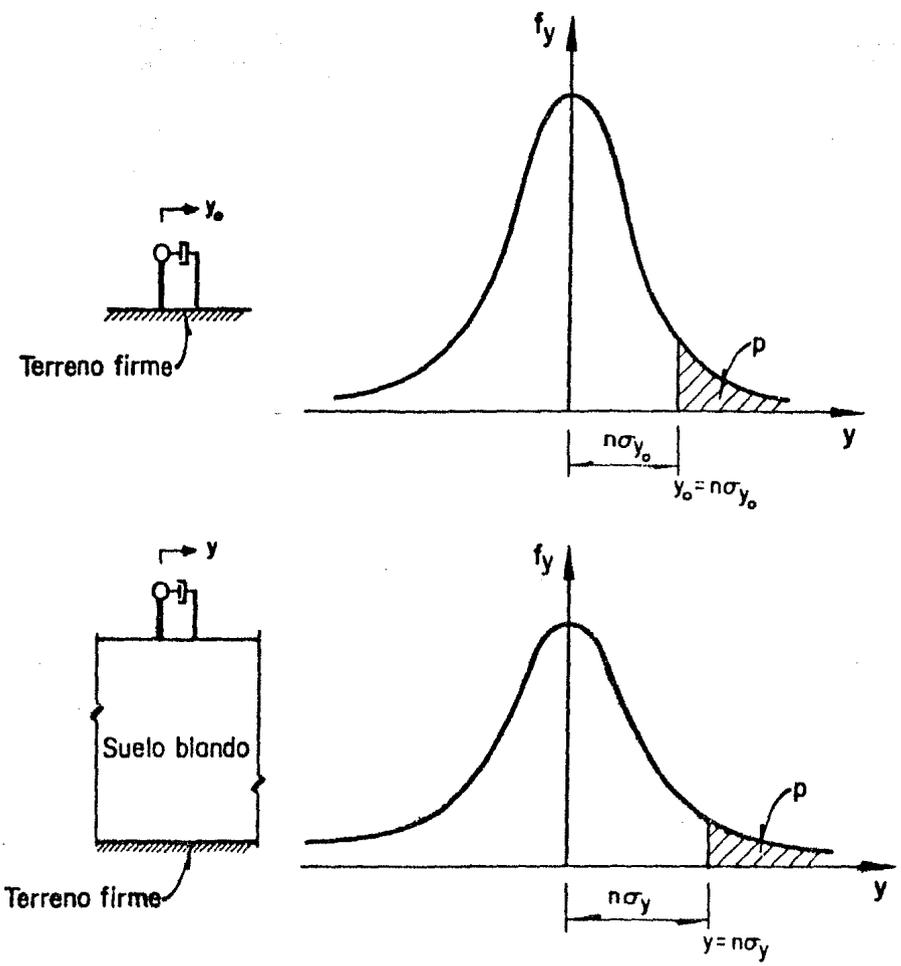
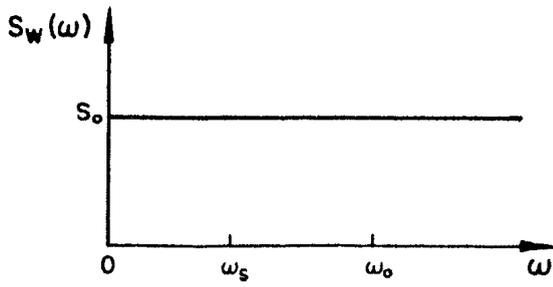
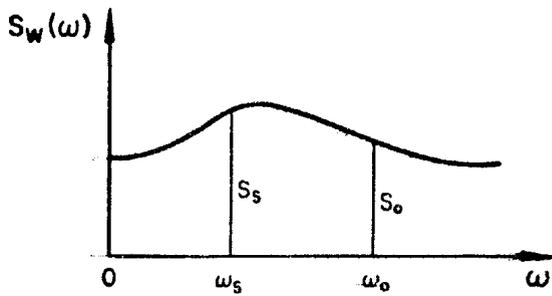


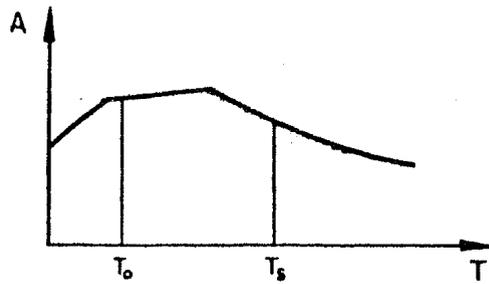
Fig 6. Función de densidad de probabilidad de respuestas en un instante dado



(a)



(b)



(c)

Fig 7. Densidades espectrales a) de ruido blanco ideal, b) de un caso real; c) espectro de respuesta del caso real

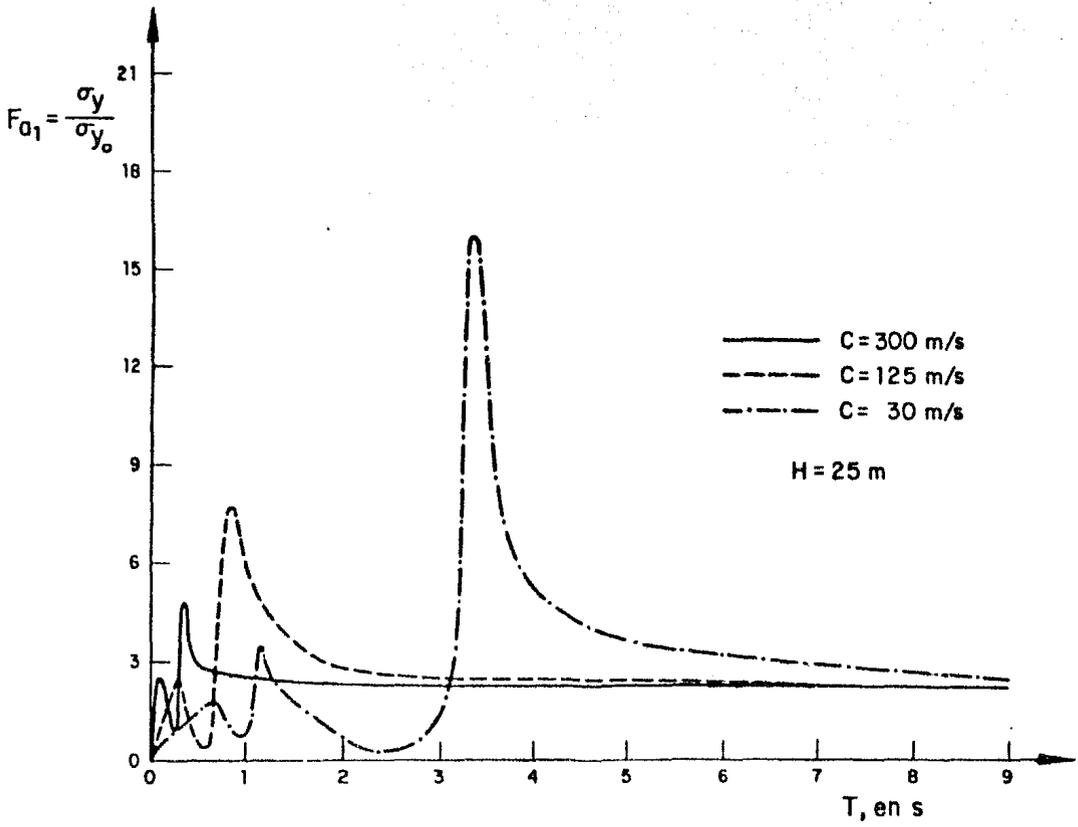


Fig 8. Factor de amplificación para tres tipos de suelo

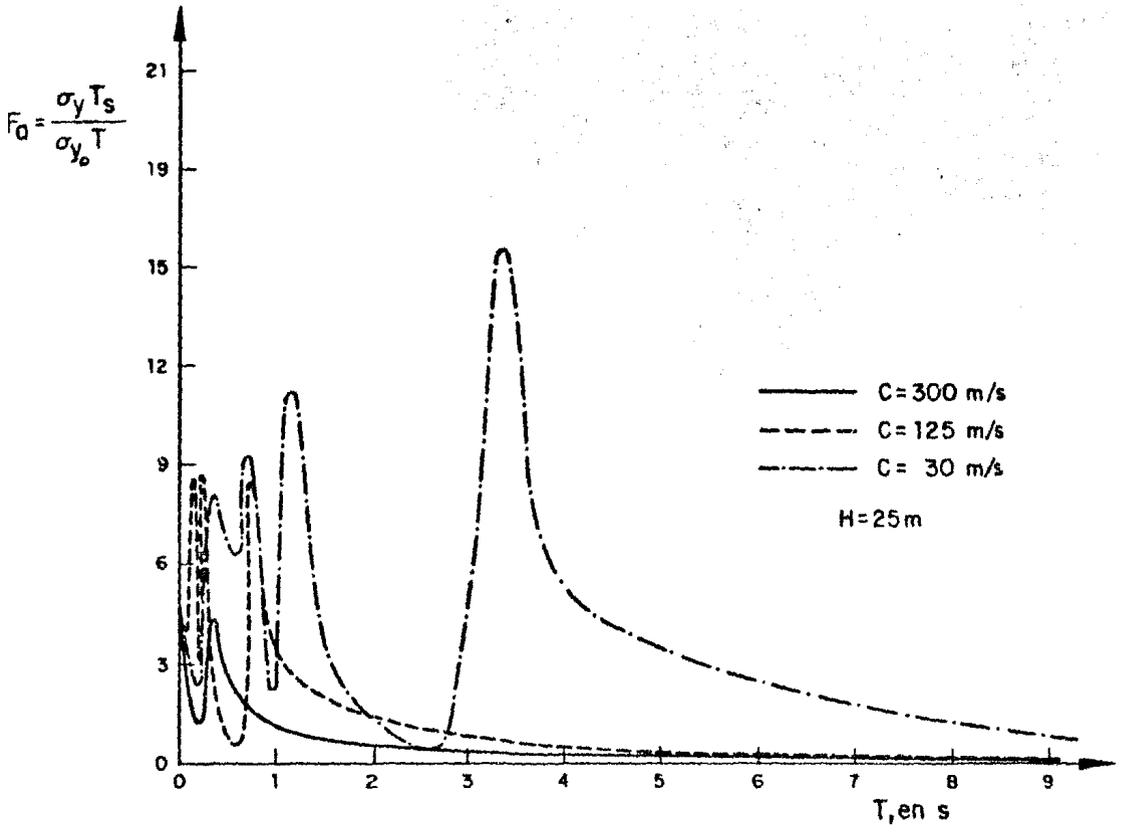


Fig 9. Factor de amplificación corregido

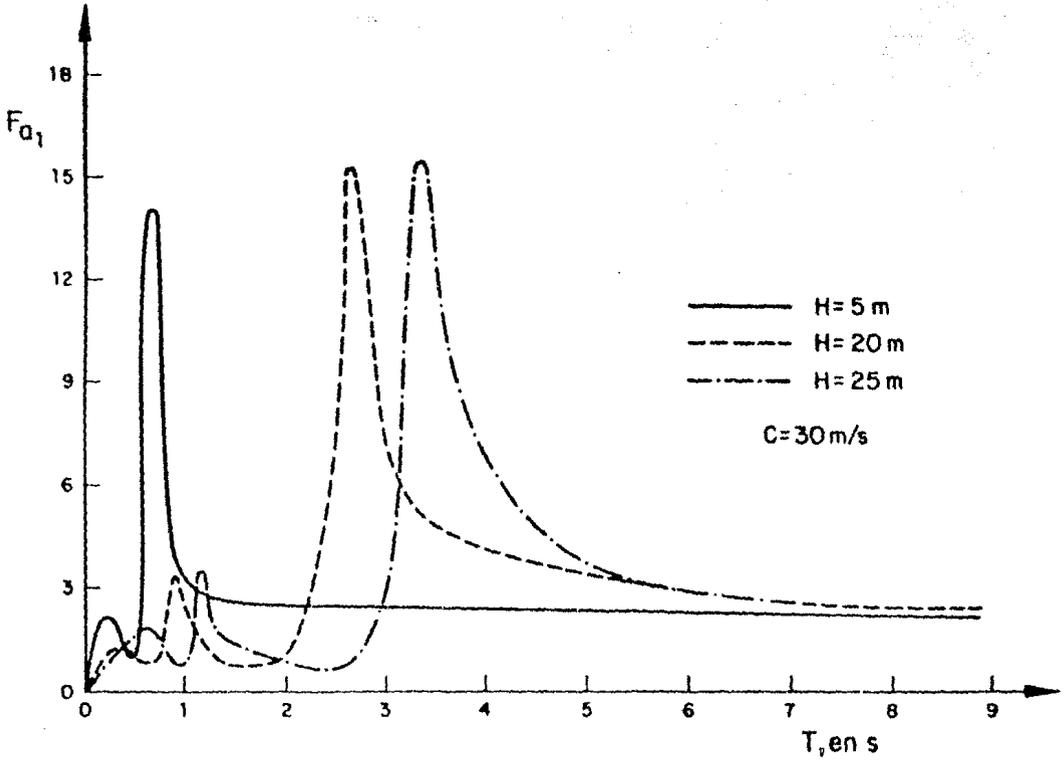


Fig 10. Factor de amplificación para diferentes espesores del estrato de suelo

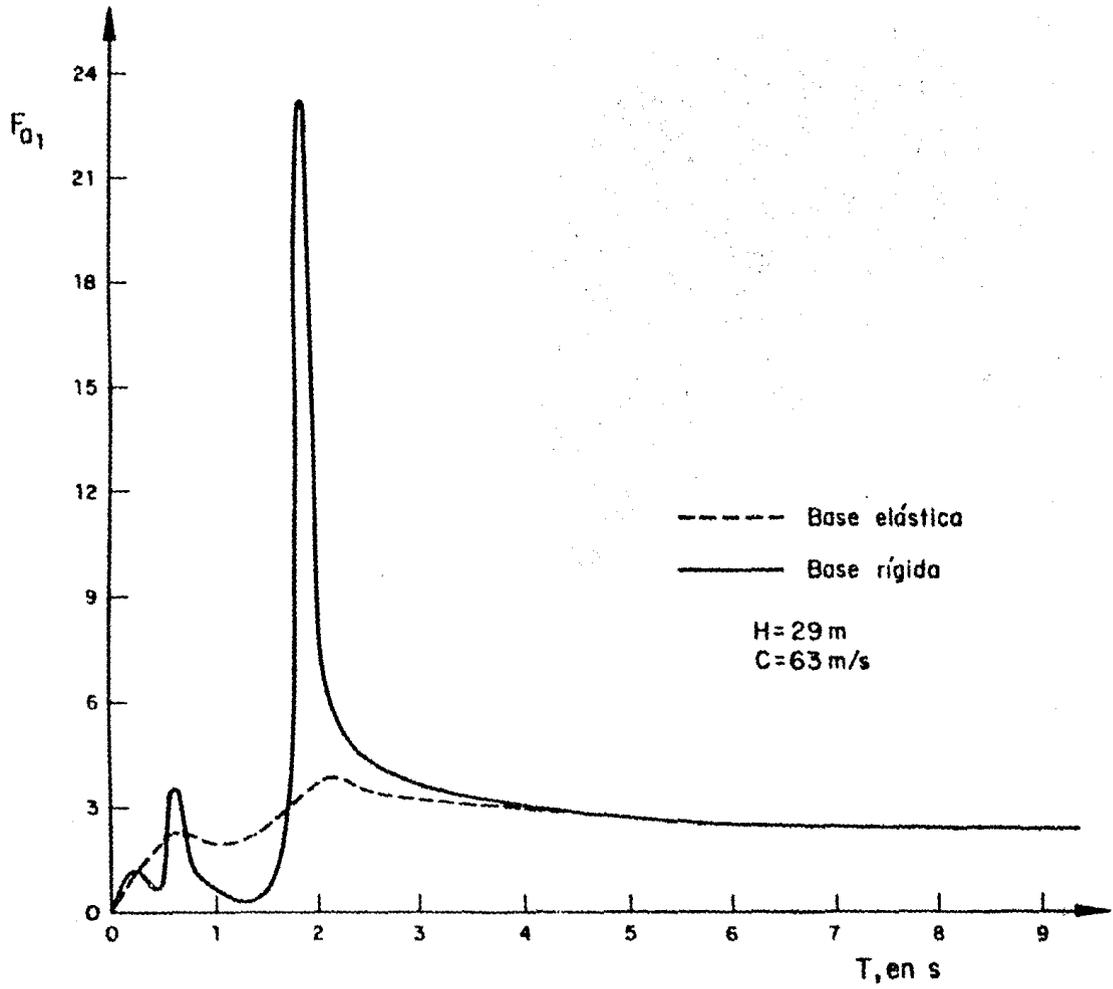


Fig 11. Factor de amplificación con bases rígida y elástica

APENDICE A  
RESPUESTA DINAMICA DE UNA EXCITACION ARBITRARIA

Sea  $p(t)$  una función de excitación arbitraria. Esta puede considerarse como un tren de impulsos de magnitud variable. Para un tiempo arbitrario  $t = \gamma$ , se tiene un impulso de magnitud  $p(\gamma)\Delta\gamma$  correspondiente al incremento de tiempo  $\Delta\gamma$ ; la fuerza asociada es  $p(\gamma)\Delta\gamma\delta(t-\gamma)$ , donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac. Si la respuesta de un sistema lineal ante un impulso unitario  $\delta(t-\gamma)$  en  $t=\gamma$  es  $h(t-\gamma)$ , la respuesta en el tiempo  $t$  es

$$\Delta x(t, \gamma) = p(\gamma)\Delta\gamma h(t-\gamma) \quad (\text{A.1})$$

de manera que la respuesta total es

$$x(t) \approx \sum p(\gamma)h(t-\gamma)\Delta\gamma \quad (\text{A.2})$$

Cuando  $\Delta\gamma \rightarrow 0$ ,

$$x(t) = \int_0^t p(\gamma) h(t-\gamma)d\gamma \quad (\text{A.3})$$

Haciendo cambio de variables entre  $\gamma$  y  $t-\gamma$ , se tiene:

$$x(t) = \int_0^t h(\gamma) p(t-\gamma)d\gamma \quad (\text{A.4})$$

A la integral así definida se le llama integral de Duhamel.

En la ec (A.3),  $p(t)$  sólo está definida para  $t>0$  y es igual a cero para  $t<0$ , por lo tanto, el límite inferior de la integral

de la ec (A.3) se puede extender a  $-\infty$ , esto es

$$x(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{A.5}$$

No obstante,  $h(t-\tau)$  es cero para  $t < \tau$ ,  $\tau$  puede tender a  $\infty$  sin afectar al resultado de la integral; por lo tanto, el límite superior de la integral se puede extender a  $\infty$  quedando

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)p(\tau)d\tau \tag{A.6a}$$

o bien

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)p(t-\tau)d\tau \tag{4.6b}$$

### Función de autocorrelación

Si  $|x(t)|$  es un proceso aleatorio, la función de autocorrelación se define como

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \tag{4.7}$$

la cual indica la dependencia del valor de  $x(t)$  en un tiempo  $t$  al valor de  $x(t)$  en otro tiempo  $t+\tau$ .

La función de densidad espectral para la función  $f(t)$  de un proceso ergódico  $|f(t)|$  está dada por la transformada de Fourier de su función de autocorrelación:

$$S_f(\omega) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right\} \frac{1}{2\pi} \tag{A.8}$$

y la transformada inversa de Fourier de  $S_f(\omega)$  define a  $R_f(\tau)$  como sigue:

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{A.9})$$

Considérese un sistema cuyas respuestas en  $t$  y  $t+\tau$  están dadas por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) p(t-\lambda_1) d\lambda_1$$

$$x(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) p(t+\tau-\lambda_2) d\lambda_2$$

Su función de autocorrelación puede calcularse de la siguiente forma:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) p(t-\lambda_1) d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) p(t+\tau-\lambda_2) d\lambda_2\right]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) h(\lambda_2) p(t-\lambda_1) p(t+\tau-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) h(\lambda_2) E[p(t-\lambda_1) p(t+\tau-\lambda_2)] d\lambda_1 d\lambda_2$$

(A.10)

Si  $|p(t)|$  se supone estacionario, se tiene

$$E[p(t-\lambda_1) p(t+\tau-\lambda_2)] = E[p(t) p(t+\tau+\lambda_1-\lambda_2)]$$

$$= R_p(\tau+\lambda_1-\lambda_2)$$

donde  $R_p(\tau+\lambda_1-\lambda_2)$  es la función de autocorrelación del proceso de excitación. Por lo tanto, la función de autocorrelación de la respuesta dada por la ec (A.10) se reduce a

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) h(\lambda_2) R_p(\tau+\lambda_1-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (\text{A.11})$$

Además, de la primera igualdad de la ec (A.10), haciendo  $\tau=0$ , se tiene

$$R_x(0) = E \left[ \{x(t)\}^2 \right] \quad (\text{A.12})$$

Para un proceso estocástico, en el cual,  $E[x(t)] = 0$ , la varianza está dada por

$$\text{var}(x(t)) = \sigma_x^2 = E \left[ \{x(t)\}^2 \right] = R_x(0) \quad (\text{A.13})$$

APENDICE B  
VARIANZA DE LA RESPUESTA

La respuesta dinámica (de desplazamiento) ante un impulso unitario del sistema que representa una estructura ubicada en terreno blando es:

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n}{\omega_{\xi n}} e^{-\xi_n \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_{\xi n} t, \quad t > 0$$

Por consiguiente, la respuesta dinámica (de aceleración) es

$$\ddot{h}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{h}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n}{\omega_{\xi n}} e^{-\xi_n \omega_n t} (\alpha_n \operatorname{sen} \omega_{\xi n} t - \beta_n \cos \omega_{\xi n} t) \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\alpha_n = (\xi_n \omega_n)^2 - \omega_{\xi n}^2$$

$$\beta_n = 2\xi_n \omega_n \omega_{\xi n}$$

Sustituyendo las ecs (B.1) y (2.8) en la ec (3.5), se tiene:

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-\phi) \ddot{h}(\phi) d\phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\omega_{\xi}} e^{-\xi \omega (t-\phi)} \operatorname{sen} |\omega_{\xi} (t-\phi)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n}{\omega_{\xi n}} e^{-\xi_n \omega_n \phi} (\alpha_n \operatorname{sen} \omega_{\xi n} \phi - \\ &\quad \beta_n \cos \omega_{\xi n} \phi) | d\phi \end{aligned}$$

Suponiendo que el integral y la sumatoria son intercambiables

$$h^*(t) = e^{-\xi\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_{\xi n} \omega_{\xi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi_n \omega_n \xi \omega) \phi} \sin[\omega_{\xi}(t-\phi)] (\alpha_n \sin \omega_{\xi} \phi - \beta_n \cos \omega_{\xi n} \phi) d\phi \right\} \quad (B.2)$$

De acuerdo con lo discutido en el Apéndice A, la variable el límite inferior de la integral del lado derecho en la expresión anterior puede cambiarse de  $-\infty$  a cero. Recordando las siguientes fórmulas de integrales:

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin bt = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad (a > 0)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad (a > 0)$$

se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-(\xi_n \omega_n - \xi \omega) \phi} \sin |\omega_{\xi}(t-\phi)| (\alpha_n \sin \omega_{\xi n} \phi - \beta_n \cos \omega_{\xi n} \phi) d\phi = A_n \sin \omega_{\xi} t + B_n \cos \omega_{\xi} t \quad (B.3)$$

$$\text{donde } A_n = \frac{\alpha_n}{2} \left( \frac{\xi_n \omega_n - \xi \omega}{X_n} - \frac{\xi_n \omega_n - \xi \omega}{Y_n} \right) + \frac{\beta_n}{2} \left( \frac{\omega_{\xi} - \omega_{\xi}}{X_n} - \frac{\omega_{\xi n} + \omega_{\xi}}{Y_n} \right)$$

$$B_n = -\frac{\alpha_n}{n} \left( \frac{\omega_{\xi n} - \omega_{\xi}}{X_n} + \frac{\omega_{\xi n} + \omega_{\xi}}{Y_n} \right) + \frac{\beta_n}{2} \left( \frac{\xi_n \omega_n - \xi \omega}{Z_n} + \frac{\xi_n \omega_n - \xi}{Y_n} \right)$$

$$X_n = (\xi_n \omega_n - \xi \omega)^2 + (\omega_{\xi n} - \omega_{\xi})^2$$

$$Y_n = (\xi_n \omega_n - \xi \omega)^2 + (\omega_{\xi n} + \omega_{\xi})^2$$

Sustituyendo la ec (B.3) en la ec (B.2), se tiene

$$h^*(t) = e^{-\xi\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_{\xi} \omega_{\xi}} (A_n \sin \omega_{\xi} t + B_n \cos \omega_{\xi} t)$$

llamando

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_{\xi n} \omega_{\xi}} A_n$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_{\xi n} \omega_{\xi}} B_n$$

$$h^*(t) = e^{-\xi \omega t} (A \operatorname{sen} \omega_{\xi} t + \beta \cos \omega_{\xi} t) \quad (\text{B.4})$$

Con la ec. (3.9) se puede calcular la variancia de la respuesta del sistema, esto es

$$\operatorname{var} \{ y \} = K \int_{-\infty}^{\infty} [h^*(h)]^2 dt \quad (\text{B.5})$$

En que  $K = 2\pi S_0$

Sustituyendo la ec (B.4) en la ec (B.5) se obtiene

$$\operatorname{var} \{ y \} = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi \omega t} \left[ \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{AB}{2} \operatorname{sen} 2\omega_{\xi} t + \frac{B^2 - A^2}{2} \cos 2\omega_{\xi} t \right] dt$$

Evaluando el integral finalmente queda

$$\sigma_y^2 = \operatorname{var} \{ y \} = \frac{A^2(1+\xi^2) + B^2(1-\xi^2) + 2AB \xi \sqrt{1-\xi^2}}{2\xi\omega} \pi S_0 \quad (\text{B.5})$$

A continuación, se anexa el programa que se utilizó para calcular los factores de amplificación  $\Gamma_{a1}$  y  $\Gamma_a$ .

## PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL CALCULO

DE  $F_{al}$  Y  $F_a$ 

```

*****
**RESET FREE
**FILE 5=LEE,UNIT=REMOTE
**FILE 6=ESC,UNIT=PRINTER
*****
                CALCULO DE FACTOR DE AMPLIFICACION
*****

****
DATOS
*****
1. PS=DENSIDAD DE MASA DEL SUELO EN T/M**3
   PR=DENSIDAD DE MASA DE ROCA EN T/M**3
   GS=MODULO DE CORTANTE DE ROCA EN T/M**2
   OS=MODULO DE CORTANTE DEL SUELO EN T/M**2
   NS=COEFICIENTE DE VISCOSIDAD DEL SUELO EN T-SEG/M**3
   H =ESPESOR DEL SUELO EN M

2. XC=FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO DE OSCILADOR

3. T(1)=PERIODO INICIAL QUE SE VA A CALCULAR EN SEG
   DT=INTERVALO DE PERIODO EN SEG
   NT=NUMERO DE INTERVALOS

*****
PROGRAMA
*****
DIMENSION WX(10),ALFA(10),BETA(10),X(10),W(10),A(10),F(202),
*AC(10),B(10),P(202),Q(202),PP(202)
REAL NE(10),NS,T(202),BC(10),K,S,C(10)
PI=3.141591653579793
3 WRITE(6,*) " PS, PR, GR, OS, NS, H "
  READ(5,/) PS,PR,GR,OS,NS,H
2 FORMAT (5X,"PS,PR,GR,OS,NS,H=",6F10.4,/)
  GS=SQRT(OS/PS)
  DO 10 N=1,10
    AC(N)=4.7/(PI*(2.*N-1.))
    W(N)=PI*.5*(2.*N-1.)*GS/H
    NE(N)=8.*H*PS*OS/(((2.*N-1.)*PI)**2*SQRT(GR*PR))
    X(N)=PI*(2.*N-1.)*(NS+NE(N))/(4.*H*SQRT(PS*OS))
    WX(N)=W(N)*SQRT(1.-X(N)**2)
    ALFA(N)=(X(N)*W(N))**2-WX(N)**2
    BETA(N)=2.*X(N)*W(N)*WX(N)
10 CONTINUE
15 WRITE(6,*) "XC"
  READ(5,/)XC
  WRITE(6,*) "T(1),DT,NT"
  READ(5,/) T(1),DT,NT
  WRITE(6,6) XC,DT
6 FORMAT("      KSI=",F5.3,"      INCREMENTO DE PERIODO =",F5.3)
  WRITE(6,*) "      T      W      FA1      FA"
  WRITE(6,*) "-----"
  Q=0.
  DO 30 I=1,NT
    T(I+1)=T(I)+DT
    WC=2.*PI/T(I)
    WXC=WC*SQRT(1.-XC**2)
  DO 20 N=1,10

```

```

C1=(X(N)*W(N)-XC*WC)**2+(WX(N)-WXC)**2
C2=(X(N)*W(N)-XC*WC)**2+(WX(N)+WXC)**2
A1=(X(N)*W(N)-XC*WC)/C1
A2=(X(N)*W(N)-XC*WC)/C2
A3=(WX(N)-WXC)/C1
A4=(WX(N)+WXC)/C2
A(N)=(ALFA(N)/2.*(A4+A3)-BETA(N)/2.*(A2+A1))/WX(N)*AC(N)
B(N)=(ALFA(N)/2.*(A2-A1)+BETA(N)/2.*(A4-A3))/WX(N)*AC(N)
20 CONTINUE
F(1)=0.
F(1)=0.
G(1)=0.
DO 51 N=1,10
F(1)=F(1)+A(N)
G(1)=G(1)+B(N)
51 CONTINUE
WW=F1*.5*CS/H
F(1)=((F(1)**2+G(1)**2)+(G(1)**2-P(1)**2)*XC**2+2.*P(1)*G(1)*
*XC*SQRT(1.-XC**2))/(1.-XC**2)
FF(1)=F(1)*WC**2/WW**2
FA(1)=SQRT(FF(1))
FA(1)=SQRT(FF(1))
WRITE(6,25) T(1),WE,FA(1),FA(1)
25 FORMAT(5X,F6.3,5X,F7.3,8X,F10.3,5X,F10.3)
30 CONTINUE
WRITE(6,40)
40 FORMAT(5X,"-----",//)
K=0.
DO 35 N=1,10
K=K+AC(N)*BETA(N)/(WX(N)*WW)*SQRT(1.+4*XC**2)
35 CONTINUE
WRITE(6,50) K
50 FORMAT(10X," K= ",F10.3)
100 CALL EXIT
END

```