



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

263
111

**Distribución Estadística de Fuerzas de Contacto
Medidas en un Modelo de Discos
Fotoelásticos**

T E S I S

Que para obtener el Título de :

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

Carlos Lesser Hiriart

México, D. F.

1984



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

Pág.

I. - INTRODUCCION.	
II. - COMPORTAMIENTO DE LOS SUELOS GRANULARES.	
2.1 Algunos antecedentes en relación con el suelo granular	3
2.2 Objetivos.	7
III. - DISEÑO Y CONSTRUCCION DEL MARCO DE CARGA.	
3.1 Introducción.	10
3.2 Diseño del marco de carga.	11
3.3 Accesorios del marco de carga.	12
IV. - PROCEDIMIENTO Y REALIZACION DE PRUEBAS.	
4.1 Descripción breve del método fotoelástico.	16
4.2 Elección de la granulometría.	18
4.3 Fabricación de los discos.	20
4.4 Conclusiones después de pruebas prelimina- res.	21
4.5 Forma de realizar las pruebas y exposición de placas fotográficas.	22
4.6 Proceso de revelado y amplificación de las placas fotográficas.	24
V. - RESULTADOS OBTENIDOS Y COMPARACION .	
5.1 Interpretación de las fotografías.	27
5.2 Resultados obtenidos.	30
5.3 Comparación de los resultados obtenidos con una teoría.	31
VI. - CONCLUSIONES.	34
APENDICE A Cálculo de un marco de carga utili- zando un tubo ranurado.	37
APENDICE B Cálculo del marco de carga utilizan- do tres anillos planos.	41

	Pág.
APENDICE C Métodos analíticos utilizados para el cálculo de fuerzas perimetrales en un disco.	50
APENDICE D Programa de computación para obtener las fuerzas normal y tangencial actuantes sobre discos fotoelásticos.	59
APENDICE E Forma de obtener la constante fotoelástica.	63
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.	

I. - INTRODUCCION.

La geotecnia en México ha progresado por la necesidad de construir obras cada vez más complejas y usando, por razones económicas, el suelo granular como material de construcción (presas, bordos, pedraplenes, rompeolas, etc.). El comportamiento de los suelos granulares es aún, sin embargo, insuficientemente conocido, estudiado y entendido. Por esta razón, es necesario estudiar mejor este tipo de material.

Se definirá como suelo granular en este trabajo, un conjunto de partículas sometidas a las fuerzas de gravedad, y cuyas fuerzas de atracción o repulsión por efectos físico químicos son despreciables. Así, al hablar de un medio granular se entenderá que se trata de suelos gruesos como arenas, gravas o enrocamientos.

El comportamiento de un suelo granular, sometido a esfuerzos, depende en gran parte, de la magnitud y distribución de las fuerzas interparticulares, así como de las características friccionantes de sus partículas constitutivas. Refiriéndose a las fuerzas interparticulares, resulta prácticamente imposible medirlas en un suelo granular. Para suplir esta deficiencia se han hecho modelos de suelos granulares, tridimensionales con esferas y bidimensionales con discos, tratando de entender mejor su comportamiento.

En este trabajo se presenta el estudio experimental de fuerzas interparticulares determinadas en dos modelos de suelos granulares, formados por conjuntos de discos fotoelásticos con diferentes granulometrías. A cada arreglo se le aplicó un esfuerzo hidrostático, obteniéndose para ambos la distribución estadística de fuerzas interparticulares.

La distribución estadística de fuerzas interparticulares obtenida en este trabajo, adolece del inconveniente de que el modelo además de ser bidimensional está constituido por partículas de forma circular, y las partículas constitutivas de los suelos reales no son desde luego discos perfectos. Sin embargo, aunque idealizar el experimento efectuado permite una aproximación al problema de la distribución de fuerzas interparticulares y la comparación con los resultados de teorías del medio discreto, tratando así de entender y conocer mejor el comportamiento de los suelos granulares.

II. - COMPORTAMIENTO DE LOS SUELOS GRANULARES.

2.1 Algunos antecedentes en relación al comportamiento del suelo granular.

El enfoque clásico utilizado en Mecánica de Suelos, es el de considerar al suelo granular en su conjunto, como si este fuese un medio continuo, sin preocuparse por las características de las partículas individuales. Este enfoque tiene algunas limitaciones, pues supone que el suelo es una masa homogénea e isotrópica y además a menudo elástica. Se ha visto que el suelo en realidad no se comporta en rigor con estas características y en consecuencia la teoría del medio continuo no permite explicar algunos aspectos de su comportamiento tales como: la dilatación del material, los efectos de escaia, la rotura de granos que trae como consecuencia la pérdida de resistencia, deformaciones y una reducción de su permeabilidad, etc.

Conviene, pues tratar de ver al suelo granular en forma más simple; si se toma un poco de arena de playa entre las manos, se verá un conjunto de granos individuales que se apoyan uno sobre otro y tienen relativa libertad de moverse entre ellos; si las partículas están en equilibrio, éstas se apoyarán unas sobre otras, generando fuerzas de contacto interparticulares, como se muestra en la figura 2.1

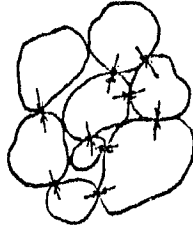
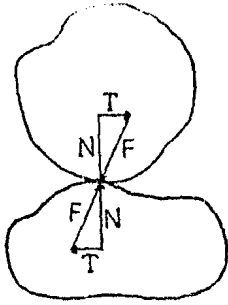
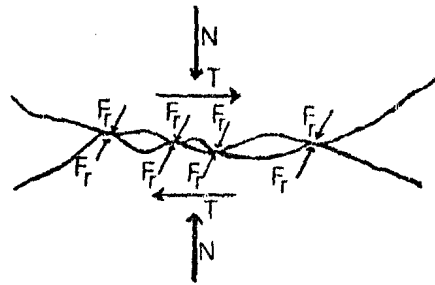


fig. 2.1

En un punto de contacto interparticular existe una fuerza inducida al apoyarse una partícula sobre otra, y una fuerza de reacción igual a la anterior que asegura el equilibrio. Estas fuerzas son iguales en magnitud y dirección, pero de sentido contrario y se pueden descomponer en fuerzas normales y tangenciales (fig. 2.2). Es importante entender que en dicho punto la fuerza tangencial trata de mover a la partícula, pero se asegura el equilibrio por la fricción que existe en el punto de apoyo, es decir, debido a la rugosidad en la superficie de contacto. (fig. 2.3). Además, las fuerzas de contacto generadas por el peso propio de la arena, no se distribuyen uniformemente, debido a que cada partícula tiene diferente forma y tamaño, Esto ocasionará que se generen cadenas de fuerzas, es decir, que existan partículas que toman mucha carga, otras muy poca e inclusive algunas, nada.



T: Fuerza tangencial
 N: Fuerza normal
 fig. 2.2



Fr: Fuerza de fricción
 Fig. 2.3

Si a la misma arena se somete a una prueba triaxial, aplicando primero un esfuerzo hidrostático (σ_h) y luego un esfuerzo axial (σ_v) tal que la relación $\frac{\sigma_v}{\sigma_h}$ se mantenga constante, sucederá lo siguiente, de acuerdo con la magnitud de σ_v .

a) Los esfuerzos σ_v y σ_h son muy pequeños. Las fuerzas normal y tangencial no se distribuyen uniformemente como se mencionó anteriormente. Se generan desplazamientos entre las partículas, debido a que las fuerzas de contacto se incrementan y superan ocasionalmente la fuerza de fricción en un contacto. Dicho desplazamiento ocasiona en toda la masa de suelo una deformación. (fig. 2.4).

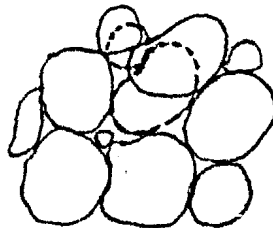


fig. 2.4

b) Al aumentar los esfuerzos σ_v y σ_h se formarán cadenas y proseguirán los desplazamientos entre partículas, pero además se presentarán otros efectos: compresión de las partículas que se achatan en el punto de contacto (fig. 2.5), y flexión en partículas laminares (fig. 2.6).

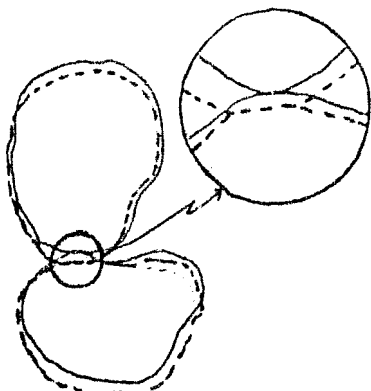


fig. 2.5 Achatamiento en las puntas de contacto

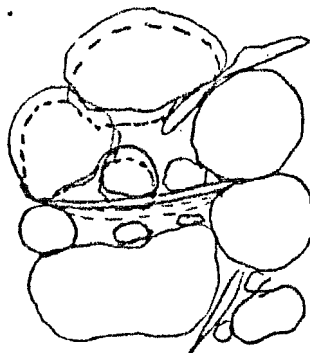


Fig. 2.6 flexión de partículas laminares.

c) Si se aumenta aún más y proporcionalmente el σ_v y el σ_h , además de los efectos anteriormente mencionados, puede ocurrir también rotura de granos cuando se vence la resistencia a la compresión de la partícula, por la concentración de esfuerzos en puntos discretos. Con la rotura se presenta de hecho una transformación en la granulometría del material y por lo tanto de sus propiedades, así como deformaciones al reacomodarse las partículas rotas. Otro problema que se presenta es el cambio de la fuerza de fricción en los puntos de contacto, que pueden ser consecuencia de plastificación en

las superficies de contacto en que al achatarse los puntos de contacto aumenta el área de contacto real aumentando así la fuerza de fricción. Puede ocurrir una exfoliación del material. O la rotura de las asperesas en forma frágil con la consecuente disminución de la fricción.

Un suelo granular tiene un comportamiento que se asemeja al anteriormente descrito. Al combinarse los efectos tales como, distribución de esfuerzos, cambios en el ángulo de fricción y rotura de las partículas, se generan deformaciones y cambios en las propiedades mecánicas del conjunto de partículas. Estos efectos dependen directamente de la magnitud y distribución de las fuerzas interparticulares que son inducidas por la gravedad o por alguna fuerza exterior. De ahí la importancia que tiene el conocer la distribución de fuerzas interparticulares en un suelo granular.

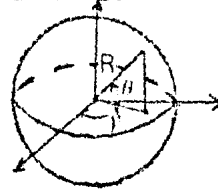
2.2 Objetivos.

Debido a que es prácticamente imposible medir las fuerzas de contacto directamente en un suelo granular, en este trabajo se utilizaron discos fotoelásticos a pesar de las limitaciones que imponen: el estado plano de esfuerzos y la forma circular de las partículas. Este trabajo se hizo con el fin de poder obtener en primera aproximación una distribución estadística de las fuerzas de contacto en este modelo de un sue

no granular. También pretende compararse las fuerzas medidas con las fuerzas estimadas teóricamente en un trabajo desarrollado por J. Alberro en sep. 82 (Ref. 3) que se describirá brevemente a continuación:

En dicho trabajo se considera un conjunto de esferas de radio (R). Se demuestra que al utilizar la expresión (1) para valorar la magnitud de las fuerzas de contacto se asegura el equilibrio del conjunto de partículas.

$$(1) N = \frac{P(1+e_s) R^2 \cos \theta d\theta d\varphi}{N_c f'_\theta f'_\varphi d\theta d\varphi}$$



En la que:

N = fuerza normal actuante en el punto de contacto de la partícula.

P = Esfuerzo normal exterior aplicado al conjunto de partículas.

$R^2 \cos \theta d\theta d\varphi$ = Area elemental de la partícula.

N_c = Número de contactos interparticulares de la partícula considerada.

f'_θ, f'_φ = La densidad probabilística de N_c en términos del azimut θ y de la latitud φ

e_s = Relación de vacíos estructural que es semejante a la relación de vacíos clásica "e", sólo que para definir "e_s" se considera como parte del volumen de vacíos al volumen de sólidos que no ayudan a transmitir el esfuerzo inducido, es decir, al volumen de sólidos "inactivo". Se define, por tanto, como relación de vacíos estructural a la suma del volumen de vacíos con el volumen de partículas "inactivas", dividido entre la resta del volumen de partículas sólidas menos

las no activas, quedando la siguiente expresión:

$$(1') \quad e_s = \frac{V \text{ vacíos} + V \text{ sólidos inactivos}}{V \text{ sólidos} - V \text{ sólidos inactivos}}$$

La expresión anterior (1) es válida para el caso de esferas; para el caso de discos se pasa del espacio al plano: transformando la expresión (1) de la siguiente manera:

$$(2) \quad N = \frac{P (1+e_s) R d\theta}{N_c f'_\theta \Delta\theta}$$

Donde:

N = fuerza normal actuante en un punto de contacto (R, θ) de la partícula.

P = Esfuerzo normal exterior aplicado al conjunto de partículas.

$R d\theta$ = Perímetro elemental de disco.

f'_θ = Densidad probabilística del número de contactos interparticulares.

N_c = Número de contactos interparticulares en el disco considerado.

e_s = Relación de vacíos estructural, sólo que ahora en vez de considerar volúmenes se consideran áreas quedando la expresión (1') de la siguiente forma:

$$(2') \quad e_s = \frac{\text{Área vacíos} + \text{Área de sólidos inactivos}}{\text{Área sólidos} - \text{Área de sólidos inactivos}}$$

Suponiendo que la distribución perimetral de los puntos de contacto obedece al azar, f'_θ tiene la siguiente distribución: $f'_\theta = \frac{1}{2\pi}$ (Ref. 5), quedando la expresión (2), como sigue:

$$(3) \quad N = \frac{2\pi R (1+e_s) P}{N_c} = \frac{DP\pi (1+e_s)}{N_c}$$

III. - DISEÑO Y CONSTRUCCION DEL MARCO DE CARGA.

1. Introducción.

Como se dijo anteriormente medir las fuerzas de contacto en un suelo granular, es prácticamente imposible, por lo que se han hecho modelos de éstos, con discos y esferas; los experimentos son los siguientes:

a) Esferas. Dantu (ref 5) trabajó con esferas que "Congelán las deformaciones". Se les aplica una presión hidrostática introduciéndolas en un globo al que se le aplica el vacío. Se mide la huella dejada en la zona de contacto de una partícula con otra; esta marca tiene relación con la fuerza necesaria para producir dicha huella.

b) Discos fotoelásticos: Se han hecho en México varios intentos por medir las fuerzas de contacto en modelos de suelos granulares utilizando discos fotoelásticos como partículas; Mendoza y Huerta, Márquez (Ref 1 y 2). En ambos casos se han obtenido resultados poco satisfactorios, debido en parte al material fotoelástico utilizado así como a la forma de aplicar las cargas. Se decidió cambiar las dos características mencionadas anteriormente.

3.2 Diseño del marco de carga.

Debido a que en la tesis de Márquez (Ref 2) se observaron

fallas importantes en la forma efectiva de transmitirse las cargas, se procedió a cambiar el sistema de carga. El sistema anterior funcionaba de la siguiente manera: se colocaban los discos sobre una mesa de apoyo y en el interior de un marco de carga constituido por dos lados fijos que impedían el movimiento lateral de los discos, y otros dos móviles que se deslizaban en baleros sobre la mesa de apoyo. Por medio de cadenas de bicicleta y poleas se transmitía una carga al lado móvil del marco, comprimiendo el conjunto de discos contra la pared fija. Este sistema de carga originaba que: las cargas no se transmitieran libremente a los discos próximos a la pared fija, generando una especie de "arqueo" entre las paredes del marco y los discos impidiendo una distribución uniforme de fuerzas entre los discos. A fin de subsanar estos defectos se ideó un marco de carga cuyo elemento esencial era una cámara de bicicleta, cuya expansión perimetral se restringiría, excepto hacia el interior, permitiéndole así desplazarse únicamente hacia la región en donde se colocarían los discos. Al aplicar presión con aire a la cámara ésta transmitiría a los discos una carga hidrostática. Con el fin de permitir la expansión únicamente hacia el centro y considerando que la presión máxima por aplicar sería de 10 kg/m^2 se hicieron los

siguientes dos diseños de cajas donde se colocaría la cámara.

a) Tubo ranurado doblado circularmente. El espesor del tubo necesario para resistir lateralmente es muy grande, y en consecuencia sumamente difícil su construcción. En el Apéndice A se describe el cálculo de este primer marco.

b) La otra posibilidad era la de utilizar tres anillos planos de acero, dos de éstos para evitar la expansión lateral de la cámara de hule, y otra para evitar la radial hacia el exterior. En el apéndice B se describe el cálculo hecho para este marco. Este fue el marco de carga que se utilizó, ver foto 3.3.

3.3 Accesorios del marco de carga.

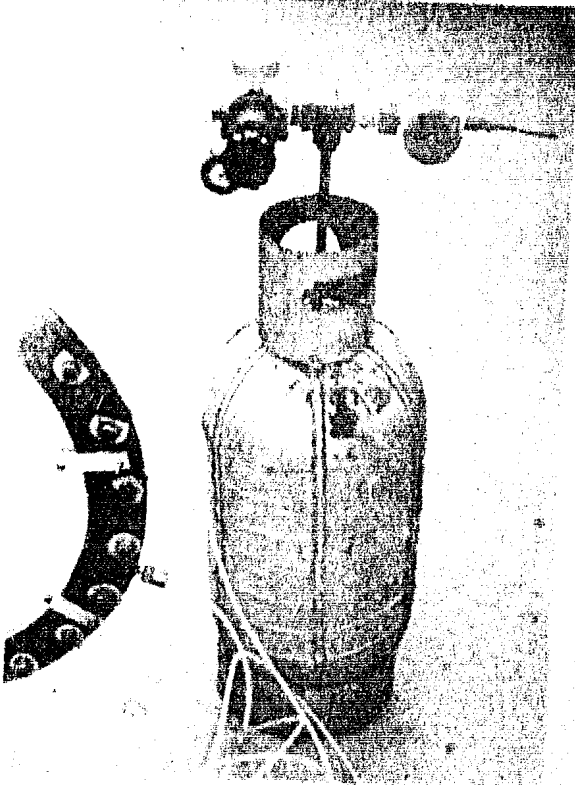
La inyección del aire a la cámara se hace con una manguera conectada a un pequeño tanque. Este se carga a la presión permitida por una entrada especial que se conecta a la compresora; antes de desconectar el tanque de la compresora se cierra una válvula de aguja una vez que éste se llena. El tanque contiene además una salida de aire a presión que se controla con un regulador de sangrado hasta el marco de carga ver (foto 3.1).

La manguera se une al marco por medio de la conexión mostrada en la foto 3.2.

Se construyeron unas tapas de lucita para la parte abier-

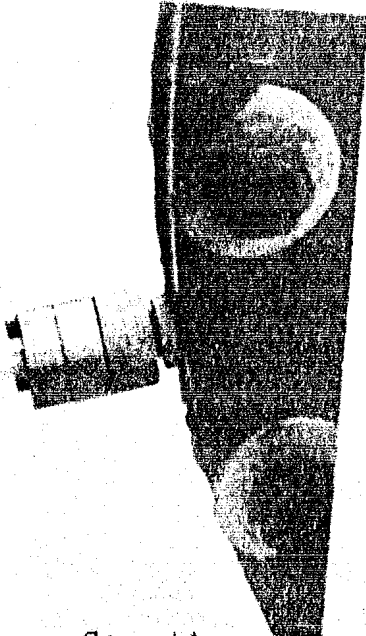
ta del marco con el fin de poder colocar los discos, así como para evitar el pandeo de éstos al aplicarse la carga. Dichas tapas se sujetan por medio de unos brazos atornillados al marco (ver foto 3.3).

También se construyeron separadores perimetrales de lucite de 1/8" con el fin de evitar que la cámara perdiera confinamiento y ocurriese el colapso de ésta (ver fig. 3.1).



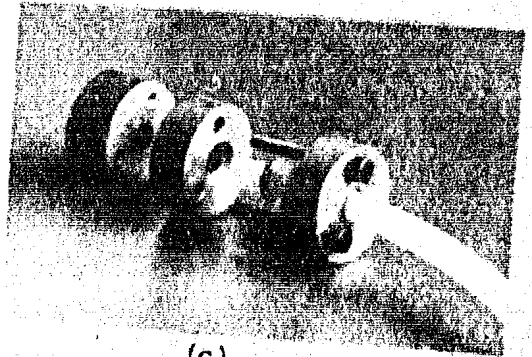
Tanque con aire a presión

foto 3.1



Conexión

(a)



(c)



(c)

foto 3.2 (a, b, c)

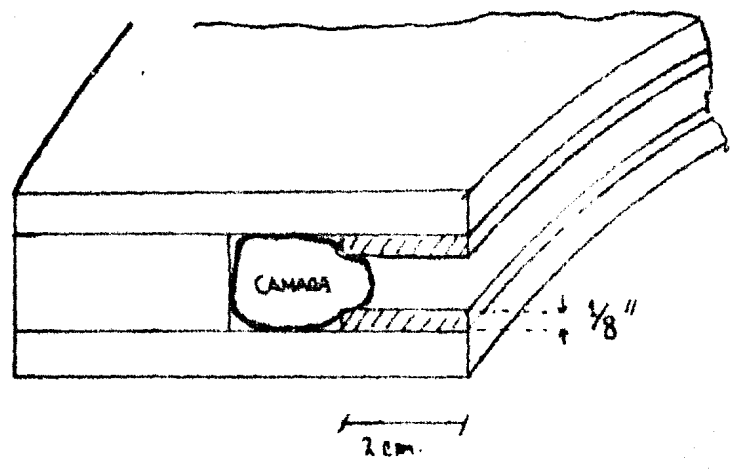
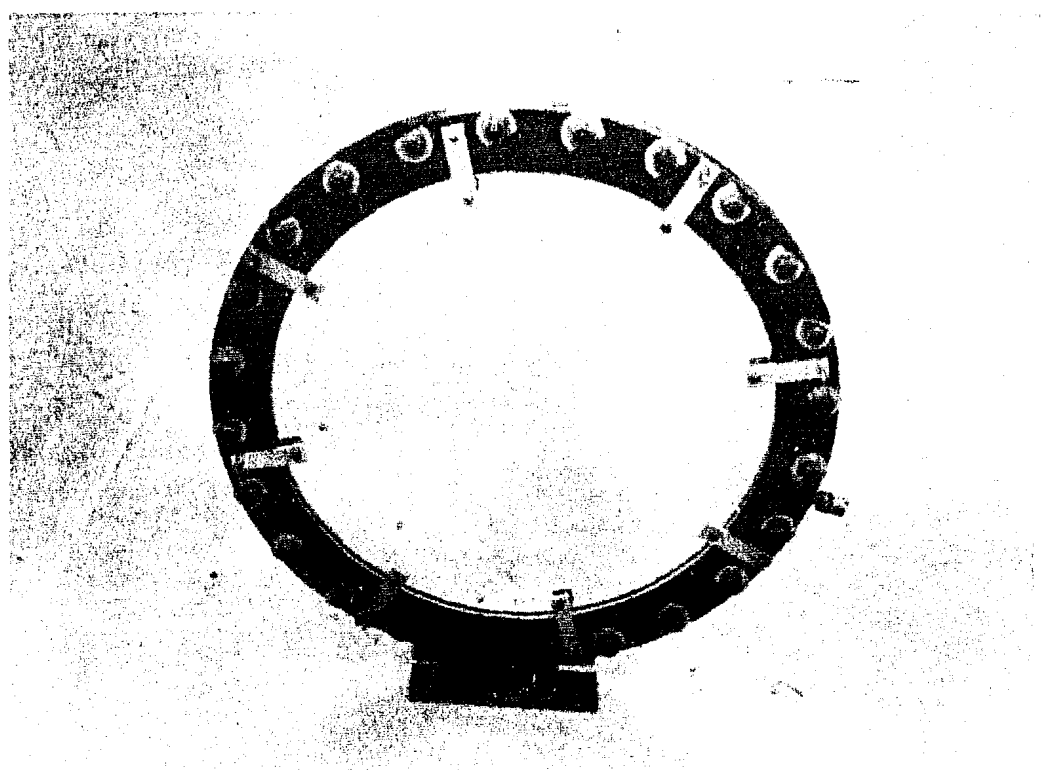


fig. 3.1



Marco de carga con tapas de lucita.

foto 3.3

IV PROCEDIMIENTO Y REALIZACION DE PRUEBAS.

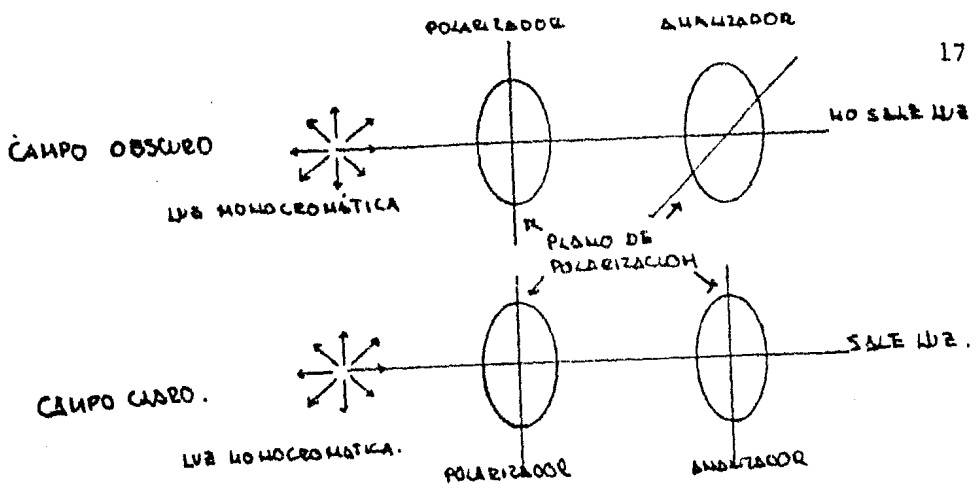
4.1 Descripción breve del método fotoelástico.

Se describirá muy brevemente el método fotoelástico, ya que éste ha sido descrito en trabajos anteriores (Ref. 1 y Ref. 2).

En forma simplista la luz está formada por una serie de ondas electromagnéticas, que viajan formando un rayo. Dependiendo de la longitud de onda visible, se puede clasificar en dos tipos: Luz monocromática y luz policromática. La luz monocromática es la que tiene una sola longitud de onda (o un solo color), en la luz policromática los colores se mezclan.

En este trabajo se utilizó luz monocromática que se hacía pasar por una polaroide para onda plana. Este elemento sólo permite pasar ondas transversales, restringiendo las ondas perpendiculares al pasar por otro polaroide adelante del anterior, formando así un polariscopio.

Al primer polaroide se le llama polarizador y al segundo analizador, los cuales deben tener una orientación determinada, ya que al salir las ondas del polarizador se tendrá un cierto plano de polarización. Si el analizador se coloca en el mismo plano de polarización la luz polarizada pasaría a lo que se llama campo claro: girando el analizador 90° no pasa luz, a esto se le llama campo oscuro, (fig. 4.1).



(fig. 4.1)

Si se coloca un material fotoelástico sin ningún esfuerzo entre el polarizador y el analizador, colocando a éstos en campo oscuro, por el analizador simplemente se observaría que no pasa luz. Pero si el material fotoelástico se somete a esfuerzos al pasar la luz polarizada por el material las ondas sufren desfaseamiento, producido por el diferente retraso de la onda en los planos principales de esfuerzos. En este caso, viendo a través del analizador, se perciben franjas oscuras y claras, llamándose a las franjas oscuras isocromáticas (línea a lo largo de la cual los esfuerzos cortantes son máximos y tienen valor constante). Cuando coinciden los planos principales de esfuerzos en los discos con el plano de polarización la luz no se descompone y aparece una franja negra después del analizador. Estas líneas llamadas "Isoclinas"

son difíciles de distinguir de las franjas isocromáticas (que son las que interesan). Es necesario eliminar las isoclinas colocando dos placas, de un cuarto de longitud de onda entre el material fotoelástico, después del polarizador y antes del analizador. La función de estas placas es la de descomponer la luz polarizada en un plano de polarización con dos componentes perpendiculares, quedando desfasada media longitud de onda una respecto de la otra, dando por resultado lo que se conoce como luz polarizada circular.

Para el campo claro se aplican los mismos principios, sólo que en este caso, el analizador está orientado con el mismo plano de polarización, quedando ahora las líneas que eran negras en campo oscuro, blancas para campo claro.

4.2 Elección de la granulometría.

Terminada la construcción del marco de carga, se procedió a la fabricación del modelo granular (discos fotoelásticos). Se escogieron dos modelos con diferentes granulometrías, una bien graduada y otra uniforme (fig. 4.2). A continuación se muestra cómo se calculó el número aproximado de partículas (discos) necesarios para cada granulometría así como sus curvas granulométricas.

Diámetro del círculo en que se colocan las partículas = $D_m = 66 \text{ cm}$

Área del círculo en que se colocan las partículas = $A_m = 3421.19 \text{ cm}^2$

Suponiendo una relación de vacíos para la granulometría bien graduada " e_{bg} " de .1 y de .16 para la uniforme " e_u " se calcula el área que ocuparían los sólidos:

$$e = \frac{\text{Area vacíos}}{\text{Area sólidos}} = \frac{A_v}{A_s} \therefore A_v = A_s \cdot e$$

y el área que ocuparán los sólidos será:

$$A_s = A_m - A_v = A_m - A_m \cdot e$$

Quedando el área de sólidos para cada granulometría

$$A_{s_{bg}} = A_m - A_m \cdot e_{bg} = 3079.07 \text{ cm}^2 \text{ (Bien graduada).}$$

$$A_{s_u} = A_m - A_m \cdot e_u = 2873.80 \text{ cm}^2 \text{ (Uniforme).}$$

Granulometría	Diam. de la partícula en cm.	Area por partícula en cm. ²	Nº de partículas.	Area en % Retenido	Area en % Pasa
BIEN GRADUADA $A_{s_{bg}} = 3079.07 \text{ cm}^2$	12	113.097	3	11.02	88.98
	11	95.033	4	12.35	76.63
	10	78.540	4	10.20	66.43
	9	63.617	5	10.33	56.10
	8	50.265	5	8.16	47.94
	7	38.484	7	8.75	39.19
	6	28.274	9	8.26	30.93
	5	19.635	15	9.59	21.36
	4	12.566	23	11.43	9.93
3	7.068	43	9.37	-0.06	
UNIFORME $A_{s_u} = 2873.80 \text{ cm}^2$	6	28.274	24	26.61	76.39
	5	19.635	43	29.38	47.01
	4	12.566	85	37.17	9.84
	3	7.068	43	9.87	-0.03

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$$

○ BIEH GRADADA.
x UNIFORME

○ $C_u = \frac{8.5}{3} = 2.83$

x $C_u = \frac{4.5}{3} = 1.5$

○ $C_c = \frac{(4.9)^2}{(8.5)(3)} = .94$

x $C_c = \frac{(3.6)^2}{(4.5)(3)} = .96$

D = Diámetro en "cm"

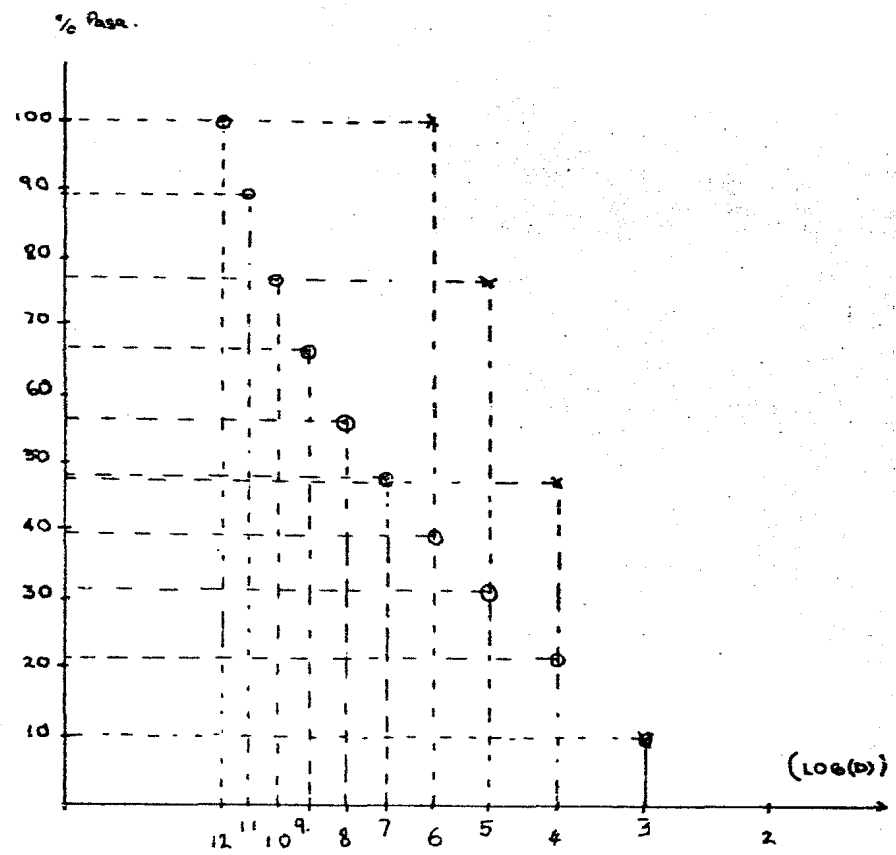


fig.4.2

4.3 Fabricación de los discos.

Se escogió de antemano el material Homalite 100 para fabricar los discos, pues este material era mucho más rígido que el usado por Márquez (Ref. 2), Mendoza y Huerta (Ref.1). En efecto, era deseable trabajar con un material más duro, ya que se observó en estos trabajos que al ser muy blando el material, cuando se aplicaba carga se incrementaba considerablemente la fricción entre partículas, así como en el contacto con la mesa de apoyo de éstas, no permitiendo por estas razones la transmisión correcta de las fuerzas aplicadas.

Los discos se obtuvieron de un pedazo de placa de Homalite 100 de 1.50 x .90 m aproximadamente. Primero se cortó la placa con una sierra caladora para formar discos con un diámetro en exceso de 2.5 mm del nominal evitando así que los esfuerzos residuales inducidos por el corte afectaran la parte perimetral del disco. Una vez cortados en esa forma todos los discos, con unas plantillas hechas en torno del mismo material de los discos se procedió a dar acabado final con un Router de alta velocidad (45000 Rev. minuto). Este aparato ocasiona esfuerzos residuales mínimos en los discos. Además los discos debían ser cortados en un tiempo mínimo, ya que en un lapso de dos meses, comenzaban a aparecer alteraciones

considerables en el borde de los discos por efecto de la humedad ambiental.

4.4 Conclusiones después de pruebas preliminares.

Antes de comenzar las pruebas definitivas, se hicieron algunas pruebas preliminares. En las pruebas preliminares la cámara de bicicleta se rompía al aplicarse la presión máxima de 10 Kg/cm². Esto era debido a que con las granulometrías escogidas, las partículas que estaban en contacto con la cámara dejaban mucho espacio, lo cual permitía a la cámara deformarse demasiado, provocando el colapso de ésta. Debido a esto, se formó con discos de pequeño diámetro un anillo perimetral, dispuesto entre la cámara y el conjunto de discos por probar, formando así una frontera gradual que permitiera a la cámara expandirse sin llegar al colapso y transmitir la carga a la granulometría por analizar. Esto provocó un cambio en el área que ocuparía el conjunto de partículas necesitándose efectuar una corrección al número de partículas que formaban la muestra. El factor correctivo se calcula de la siguiente manera:

A_1 = Área total de la cámara de prueba

D_1 = diámetro de la cámara de prueba = 66 cm

A_2 = Área de la zona de prueba

D_2 = diámetro de la zona de prueba = 42 cm

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \approx .4$$

Las granulometrías corregidas se presentan en la siguiente

tabla:

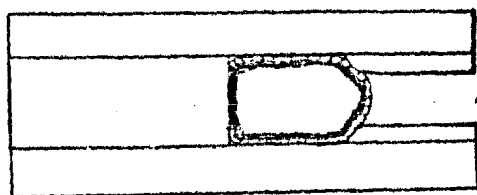
Diam. del disco en cm.	Nº de discos	Material
12	1	Bien graduado
11	2	
10	2	
9	2	
8	2	
7	3	
6	4	
5	6	
4	11	
3	17	
6	10	Uniforme
5	18	
4	34	
3	17	

4.5 Forma de realizar las pruebas y exposición de placas fotográficas.

Las pruebas definitivas se realizaron de la siguiente manera:

a) Se arma el marco de carga colocando y apretando los veinticuatro tornillos.

b) Se coloca la cámara dentro del marco de carga. Debe mencionarse que la cámara llevaba otra cámara superpuesta, con el fin de dar mayor resistencia a ésta a la hora de aplicar la carga. (fig. 4.1).



- ☐ Cámara con presión
- ☐ Cámara superpuesta únicamente

(fig.4.1)

c) Se aplica una presión de 0.07 a 0.35 Kg/cm² (1 a 5 lb/inch²) con el fin de quitar arrugas que se producen al colocar la cámara, revisando con los dedos que no quede ninguna, ya que una arruga podría provocar el colapso de la cámara o bien que no se transmitiera correctamente la presión a los discos.

d) Se pone la tapa de lucita de abajo y se coloca la granulometría que permitiera transmitir los esfuerzos al conjunto de discos por analizar sin dejar colapsar a la cámara.

e) Se coloca la granulometría por analizar ya sea la uniforme o la bien graduada presentando los discos al azar.

f) Se pone la tapa superior de lucita y se aplica una presión de aproximadamente de 2.0 Kg/cm², con el fin de que las partículas entren en contacto para evitar en el momento de mover el marco de carga, movimientos entre los discos debidos a la gravedad.

g) Se levanta el marco de carga y se coloca en posición vertical en el polaroscopio circular.

h) Se coloca el marco de carga a una distancia de 25.5 cm del polarizador y de 25.5 cm del analizador; poniendo el marco de carga lo más paralelo posible del polarizador y el analizador.

i) Se coloca la cámara fotográfica a 2 metros de distancia del analizador; se enfoca el lente de la cámara, revisando que la abertura del diafragma del lente es el adecuado ($f=22$) y se inserta la placa fotográfica en la cámara.

j) Se va aumentando la presión poco a poco hasta llegar a 9.22 Kg/cm^2 . Se expone la primera placa en campo oscuro durante 2 minutos y 30 segundos. Una vez terminada la exposición se coloca otra placa fotográfica y se gira el polarizador 90° , poniendo el polariscopio en campo claro y se toma otra placa con tiempo de exposición 1 minuto y 30 segundos. Terminada la exposición se descarga poco a poco hasta llegar a los 7.04 Kg/cm^2 y se toman otras dos placas en campo claro y oscuro.

k) Una vez tomadas las placas fotográficas se descargan los discos, se coloca en posición horizontal el marco de carga, se quitan los discos, se revisa la cámara y se polvorea con talco para evitar fricción entre ésta y los discos, así como para dar mantenimiento a la cámara.

l) Para una nueva prueba se repiten los pasos anteriores a partir del inciso b).

4.6 Proceso de revelado y amplificación de las placas fotográficas.

El proceso de revelado y amplificado de las placas fotográficas utilizado, se escogió después de varias pruebas tomándose la que logra mejor resolución en la amplificación. A continuación se da una descripción del equipo utilizado, así como del proceso de revelado y amplificado.

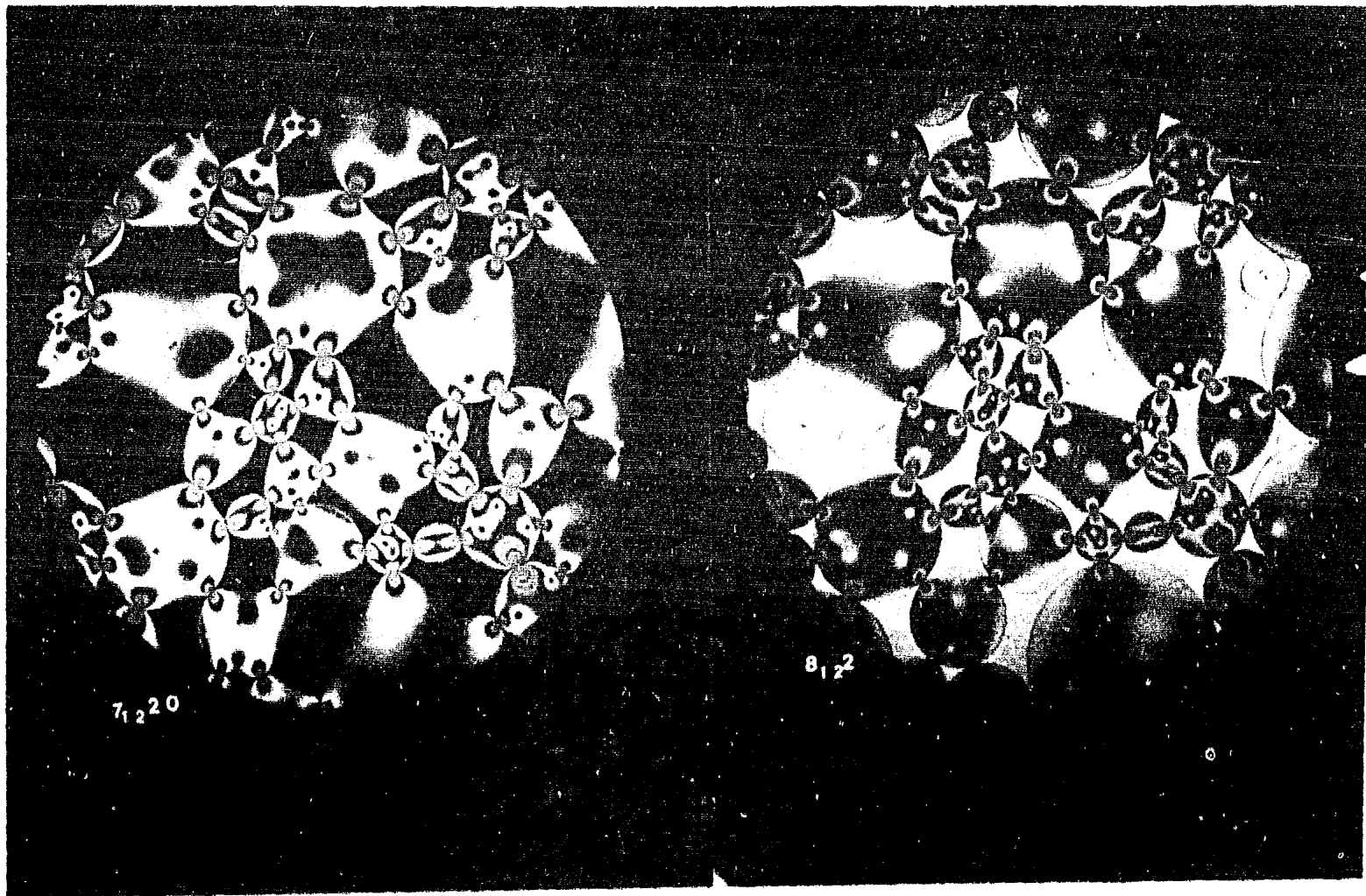
El equipo con el que se contaba era: una cámara fotográfica hecha en el Instituto de Ingeniería para placas fotográficas de (5" x 7"); ésta tenía una lente Nikkor-M de 450 mm y $f=1:9$. Se utilizó también una amplificadora de marca "Solar" en muy mal estado, ya que el vidrio difusor estaba roto, por lo que se adaptó otro con papel albanene, a fin de poder difundir con mayor uniformidad la luz de la amplificadora; en el lente de ésta se colocaba un filtro policontrast de # 2 1/2.

Las placas fotográficas utilizadas tienen un formato de 5" x 7" y película Kodalith Ortho tipo III.

Las placas se revelaron según el siguiente proceso: Como revelador se utilizó Dektol 1 a 10 dejándose dentro de este 1.5 minutos la placa con agitación continua. Luego se sumergía por 20 segundos en baño detenedor. Se lavaba por 10 segundos en agua y se pasaba por 2 minutos al fijador "rápido". Finalmente se lavaba por 10 minutos en agua corriente. Todos

Los líquidos así como el agua deben estar entre 18 y 20°C. Después del lavado se dejaba secar en un tendedero donde no existía polvo.

Para la amplificación se utilizó papel Kodabromide H-3 peso sencillo de 40 x 50 cm. La amplificación se hizo de la siguiente manera: El papel se expuso en la amplificadora por 35 segundos si era campo claro y 40 segundos si era oscuro con diafragma $f=8$. Una vez tomada la exposición en el papel se metía en Dektol 1 a 1 agitando continuamente por 1.5 minutos, después se metía por 10 segundos al baño detenedor, luego al fijador "rápido" por 2 minutos, lavando después por 10 minutos en agua y dejándose secar en el tendedero. La temperatura del agua y los líquidos deben estar entre 18° y 22° C. Se muestra a continuación en las fotografías (4.1 y 4.2), dos fotografías de contacto cada una de campo claro y de campo oscuro obtenidas con el proceso de revelado y amplificado descrito.

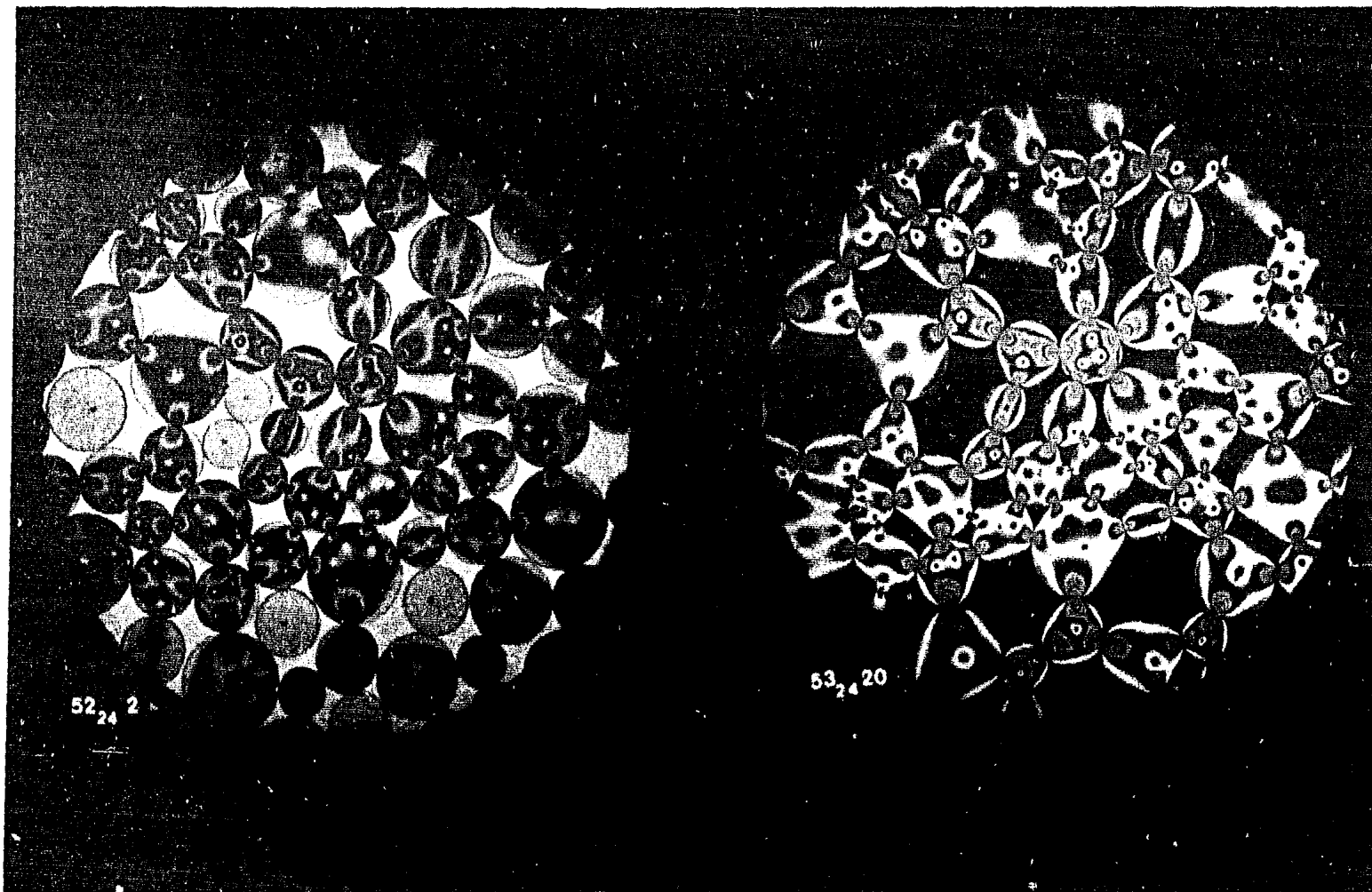


(a)

foto 4.1 GRANULOMETRIA BIEN GRADUADA

(b)

a) campo obscuro b) campo claro.



(a)

foto 4.2 GRANULOMETRIA UNIFORME

(b)

a) campo claro

b) campo obscuro.

V RESULTADOS OBTENIDOS Y COMPARACION.

5.1 Interpretación de las fotografías.

En las fotografías tomadas a través del polariscopio de los arreglos granulométricos, se puede observar un conjunto de discos que muestran una serie de franjas negras ó isocromáticas (foto 5.1). Dichas franjas se presentan con mayor densidad en la cercanía del punto de contacto; la ausencia de franjas significa que el disco no está esforzado; opuestamente aquel que tenga mayor número de franjas se encuentra más esforzado. Burdamente resulta que el número de franjas, es indicativo de la fuerza aplicada en el contacto.

Cada franja representa el lugar geométrico de los puntos en los que el esfuerzo cortante máximo tiene valor constante. Esto permite conocer la distribución de esfuerzos en el interior del disco por efecto de la carga en el contacto.

D. Wu (Ref. 4) analizó la interpretación de las "Isocromáticas", para conocer las fuerzas aplicadas al disco. La hipótesis fundamental del método propuesto por D. Wu es; que las direcciones principales de los esfuerzos inducidos por cada una de las fuerzas exteriores actuantes en el perímetro del disco son las mismas. Esta hipótesis en muchos casos ocasiona errores de consideración, por lo que fue necesario

idear un método de interpretación más preciso. En el Apéndice C se describe el método aproximado de D. Wu y un método de cálculo exacto desarrollado por J. Alberro.

Debido a que los métodos descritos en el Apéndice C, son sumamente laboriosos, en el Instituto de Ingeniería se desarrolló un programa de computadora con el fin de obtener las fuerzas normales y tangenciales interparticulares de cada arreglo con base en el análisis de las fotografías. Dicho programa de computación se ha incluido en el Apéndice D.

Para fines de este trabajo llamaremos método I al propuesto por D. Wu y método II al exacto desarrollado por J. Alberro.

En la referencia 4 se dan ejemplos del método I viéndose que es bastante preciso para obtener las fuerzas normales y tangenciales, de discos donde existan pocos puntos de contacto o cuando las latitudes de los contactos tienen cierta simetría. A continuación, en la tabla 5.1, se dan tres ejemplos de discos con diferentes latitudes y números de contactos, donde se aprecia la aproximación que tienen los métodos I y II, discutidos en el apéndice C. En esta tabla se dan los valores calculados, con los métodos mencionados, de las fuerzas, tanto acción como reacción, normal y tangencial en cada uno de los puntos de contacto de un disco. También se da la variación relativa de las fuerzas entre el método I y el

método II, y se comparan las fuerzas determinadas en el disco bajo estudio con las reacciones de los discos adyacentes, para cada uno de los métodos.

En la tabla 5.1 y con los ejemplos mostrados se justifica la necesidad de idear el método II, en el cual para fuerzas normales la variación relativa entre acción y reacción en un punto de contacto, es en promedio alrededor del 10%, mientras que en el método I, la variación mencionada en promedio varía entre 20% y 25%. Las fuerzas tangenciales tienen una alta variación relativa entre acción y reacción en cada punto de contacto, debido a que las magnitudes de las fuerzas son en general muy pequeñas comparadas con las fuerzas normales; durante la realización del trabajo se observó que para fuerzas comprendidas entre -5 y 5 Kg el error es grande. Este error disminuye al aumentar la magnitud de las fuerzas aplicadas.

Al efectuarse las iteraciones numéricas requeridas en el método II la precisión numérica no varía mucho a partir 10 iteraciones. El error es mayor al extraer los datos necesarios de la fotografía. Por ejemplo si al leer el valor de franja se comete un error de media franja, la variación que puede existir en la magnitud de la fuerza es de ± 7 Kg aproximadamente, error que se suma al error numérico propio de los métodos mencionados.



EJEMPLO N.º	NUMERO DE CONTACTOS	LATITUDES	PUNTO DE CONTACTO	TIPO DE FUERZA N: normal T: tangencial	"ACCION" Kg.		"REACCION" Kg.		VARIACION RELATIVA EXISTENTE ENTRE METODOS.		
					Cálculo de fuerzas de la partícula en estudio para los métodos:		Cálculo de fuerzas de la partícula en estudio para los métodos:		$\frac{(B-A)}{B} \cdot 100$	$\frac{(A-C)}{A} \cdot 100$	$\frac{(B-D)}{B} \cdot 100$
					A "Wu"	B "Exacto"	C "Wu"	D "Exacto"			
1	2	124°	1	N	25.70	25.70	23.80	25.96	0.00	7.40	1.01
		298°	2		25.70	25.70	21.50	24.46	0.00	16.34	4.80
		124°	1	T	1.34	1.34	3.30	-1.20	0.00	-146.60	189.55
		298°	2		-1.34	-1.34	-2.34	-4.60	0.00	75.00	237.80
2	3	25°	1	N	37.84	38.94	25.33	36.12	2.80	33.06	7.24
		154°	2		38.70	38.88	21.77	33.12	0.46	43.75	14.81
		266°	3		18.19	19.50	17.66	24.40	6.70	7.20	25.12
		25°	1	T	8.81	8.12	2.89	5.38	8.50	67.19	33.75
		154°	2		-7.49	-7.35	-3.47	-5.06	1.90	53.70	31.16
		266°	3		-1.32	-7.69	0.50	-1.40	71.60	137.80	82.05
3	5	24°	1	N	27.47	36.35	34.29	34.29	24.43	24.82	5.66
		74°	2		36.21	36.38	33.80	33.31	0.47	6.65	8.44
		120°	3		24.81	29.86	31.41	33.28	16.91	34.14	11.50
		167°	4		28.33	38.34	40.35	38.18	26.10	42.42	0.42
		265°	5		82.99	82.03	76.14	78.14	7.73	8.25	4.74
		24°	1	T	-2.33	3.89	1.49	1.49	159.89	163.95	61.69
		74°	2		6.31	3.06	7.34	8.90	125.49	16.32	190.84
		120°	3		-6.90	1.06	1.86	-0.35	750.90	126.96	133.02
		167°	4		13.18	2.30	3.67	2.70	470.04	72.15	17.40
		265°	5		-10.12	-10.31	-12.23	-13.38	1.35	20.25	29.78

Tabla 5.1

5.2 Resultados obtenidos.

Una vez obtenidas las fuerzas normales y tangenciales de cada partícula, se agruparon con el fin de obtener una distribución estadística de las mismas, para cada granulometría (fig. 4.2). A continuación se muestra una tabla con las características de cada arreglo fotográfico. Donde "e_s" es la relación de vacíos estructural descrita en el capítulo I.

Arreglo fotográfico	Granulometría	Carga hidrostática	Nº de partículas,	$e = \frac{V_v}{V_s}$	$e_s = \frac{V_v - V_{s \text{ inactivos}}}{V_v - V_{s \text{ inactivos}}}$
I			23	0.157	0.205
II	BIEN		24	0.199	0.258
III	GRA-	9.22	25	0.168	0.205
IV	DUADA	Kg/cm	25	0.142	0.159
V	(bg)		23	0.216	0.313
P R O M E D I O S			24	0.176	0.228
VI			41	0.190	0.293
VII	UNI-	9.22	48	0.223	0.260
VIII	FORME	Kg/cm	45	0.165	0.230
IX	(u)		44	0.205	0.310
X			46	0.181	0.215
P R O M E D I O S			44.8	0.193	0.261

Como cada arreglo tenía relativamente pocas partículas se decidió sumar todas las fuerzas normales y tangenciales de cada granulometría, con el fin de tratar de hacer más representativa la distribución estadística de fuerzas normales y tangenciales, (Fig. 5.1 y 5.2). En ambas granulometrías los valores medios de las fuerzas normales fueron muy parecidas con 39.88 (Kg) para la bien graduada (bg) y de 39.49 (kg) para la uni-

forme (u). Sin embargo la dispersión alrededor del valor medio varía siendo notablemente mayor en el caso de granulometría uniforme. (fig. 5.1).

Las gráficas de las fuerzas tangenciales mostrados en (fig. 5.2) son muy parecidas y el valor medio en magnitud de fuerza en ambos arreglos granulométricos (u) y (BG), de sólo observar la gráfica se ve que $\bar{T}=0$. Sólo se nota una pequeña dispersión hacia las fuerzas mayores en la granulometría uniforme.

5.3 COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Las fuerzas normales se compararon también con la teoría de J. Alberro (Ref. 3) y de la expresión (3) anotada en el capítulo II se tiene que:

$$N = \frac{DP\pi(1+e_s)}{N_c}$$

De donde:

$$\frac{NN_c}{D} = P\pi(1+e_s) \quad \therefore \frac{NN_c}{D} = \text{constante}$$

Se calcularon los valores teóricos de la magnitud $\frac{NN_c}{D}$ sustituyendo valores en la expresión anterior. Se tiene:

Para la granulometría uniforme:

$$e_s = .261$$

$$P = 9.22 \text{ kg/cm}^2 \quad \therefore P\pi(1+e_s) = 36.52 \text{ kg/cm.}$$

$$\frac{NN_c}{D} = 36.52 \text{ kg/cm}$$

Para el material bien graduado :

$$e_s = .228 \quad \pi P(1+e_s) = 35.57 \text{ kg/cm}$$

$$P = 9.22 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{NN_c}{D} = 35.57 \text{ kg/cm}$$

El cálculo anterior se hizo también con los datos del experimento, calculándose para cada fuerza normal de contacto interparticular el correspondiente valor de $(N N_c)/(D)$, con lo que se obtuvo la gráfica (5.3). También se valoró el valor medio de la magnitud $(N N_c)/(D)$ para cada granulometría, valor medio que se comparó con el teórico en la (tabla 5.2).

GRANULOMETRIA	VALOR MEDIO $N N_c/D$ kg/cm	
	EXPERIMENTAL	TEORICO
Uniforme	37.33	36.52
Bien graduada	33.52	35.57

Tabla (5.2)

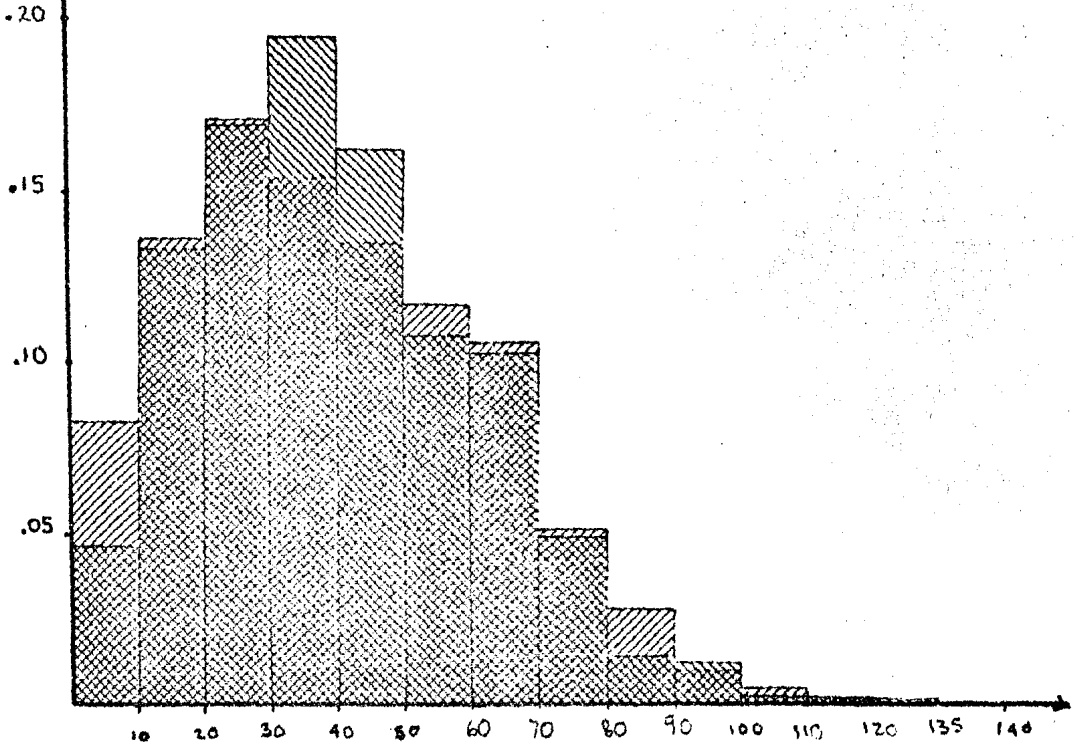
La comparación hecha en la tabla (5.2) indica claramente que en este caso se trata de un experimento limpio sin las restricciones que habían tenido por ejemplo en la referencia 2.

Las fuerzas tangenciales obtenidas no se compararon con la teoría de J. Alberro, ya que como se demostró antes (tabla 5.1), estos valores tienen un error relativo considerable, debido a la pequeña magnitud que presentan estas fuerzas

en la gran mayoría de los puntos de contacto, Como ya se mencionó anteriormente cuando la fuerza de contacto es pequeña el error es relativamente grande debido a que no es prácticamente posible leer el valor de franja para obtener una precisión de ± 1 kg.

Asimismo se obtuvo la distribución estadística de las latitudes de los puntos de contacto interparticulares, para cada granulometría. Esta se muestra en la fig. (5.4).

FRECUENCIA RELATIVA.



FUERZA NORMAL N. (kg)

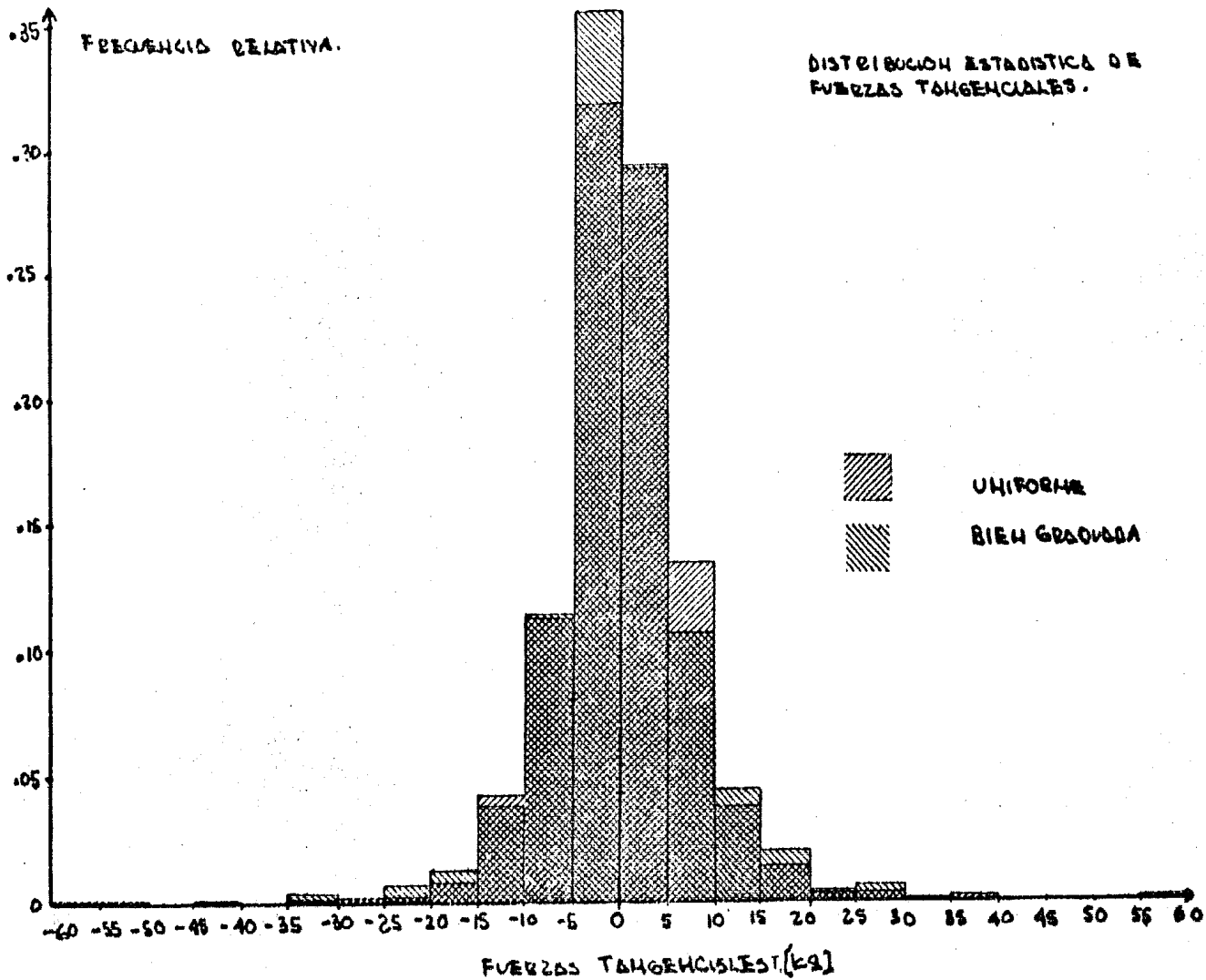
BIEN GERADA

UNIFORME



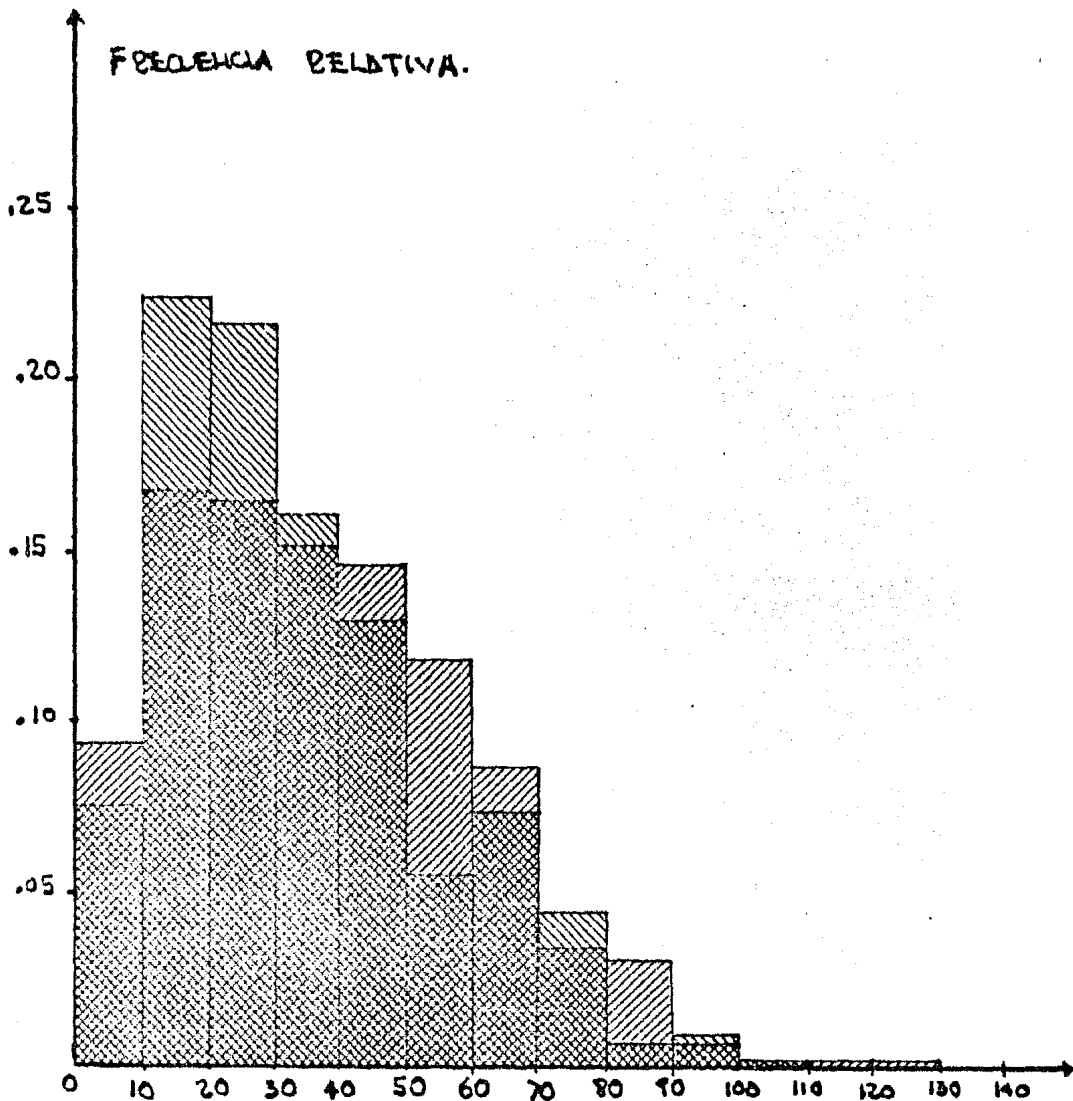
DISTRIBUCION ESTADISTICA DE FUERZAS NORMALES

(fig 5.1)



(Fig. 3.2)

FRECUENCIA RELATIVA.



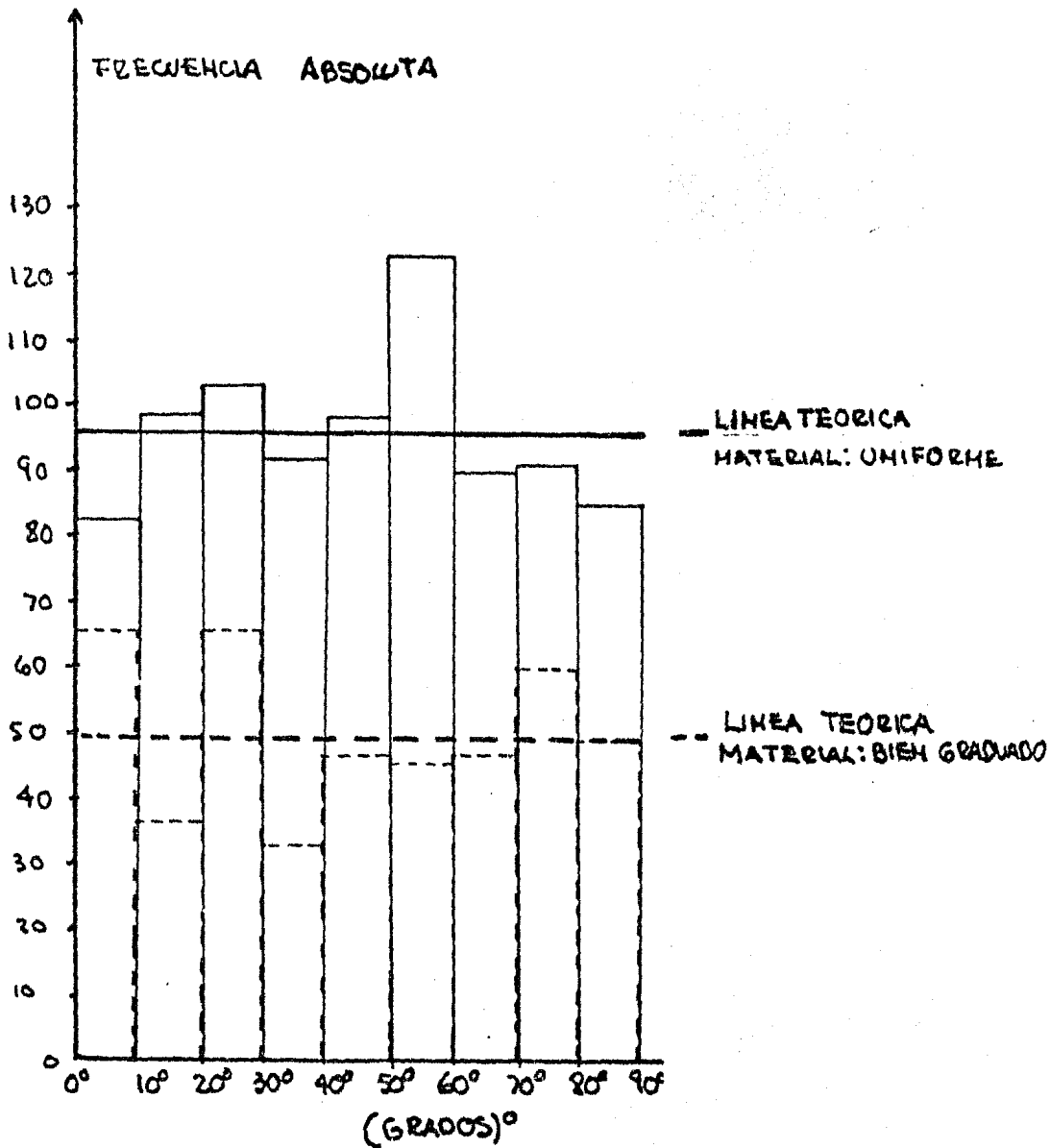
BIEN GRADUADA



UNIFORME



$$\frac{M \cdot N}{D} \cdot \left[\frac{K_0}{C_{m1}} \right]$$



Material: BIEN GRADUADO - DATOS EXPERIMENTALES —

Material: UNIFORME - DATOS EXPERIMENTALES --

DISTRIBUCION DE LAS LATITUDES DE LOS PUNTOS DE CONTACTO.

(Fig. 5.4)

VI CONCLUSIONES.

Las pruebas fotoelásticas efectuadas, midiendo la magnitud de las fuerzas interparticulares en un modelo formado por conjuntos de discos sea de granulometría uniforme o bien graduada comprimidos hidrostáticamente cumplieron su objetivo: determinar la distribución estadística de fuerzas de contacto al aplicar un esfuerzo exterior a un medio granular.

Se concluye que:

a) Al aplicarse un esfuerzo hidrostático, a un medio granular, existen dentro del medio discreto fuerzas tangenciales locales entre partículas. Estas fuerzas tangenciales interparticulares generan deslizamientos en los contactos.

b) Se observó también que para las dos granulometrías Uniforme (u) y bien graduada (bg) el valor medio de las fuerzas normales fue casi igual en ambas (fig. 5.1). En el arreglo (u) se presenta una mayor dispersión de la fuerza normal, existiendo una mayor frecuencia relativa de fuerzas grandes y pequeñas, que en el arreglo (bg).

c) Dentro del medio granular existen gran variedad de magnitudes de las fuerzas, existiendo en algunas partículas fuerzas de contacto bastante grandes. También pueden generarse "cadenas de fuerzas" entre partículas, en las que se

concentra gran parte de la carga aplicada exteriormente.

Las partículas constitutivas de las "cadenas" tienen mayor posibilidad de sufrir, desplazamientos, deformaciones y en caso de material frágil, rotura. También se observaron partículas libres, no sujetas a esfuerzo, o sea inactivas.

De la comparación del experimento hecho con el modelo fotoelástico, con la teoría de J. Alberro (Ref. 3) se vió lo siguiente:

a) La teoría permite valorar adecuadamente el valor medio de la magnitud " $(N N_c)/D$ " (fuerza normal interparticular multiplicado por el número de contactos de la partícula dividido entre el diámetro de la misma) para ambas granulometrías (u) (bg).

b) Se esperaba que la gráfica $(N N_c)/D$, (fig. 5.3) fuera menos dispersa que la obtenida.

c) Se observó que la distribución estadística de latitudes de contacto no fue igual a la teórica, aún cuando fueron muy parecidas. (fig. 5.4).

En lo referente al modelo fotoelástico, fue en su comportamiento general bastante aceptable. En lo que se refiere a la evaluación de las fuerzas de contacto, fue importante mejorar el método de cálculo desarrollado por D. Wu (Ref. 4),

cuya precisión disminuye conforme aumenta el número de contactos interparticulares.

En lo referente a la extracción de datos de las fotografías, a veces la precisión es pobre pues resulta difícil leer con buena aproximación el número de franjas en partículas sometidas a fuerzas de contacto pequeñas. Para el caso de un número grande de partículas fotoelásticas por fotografiar, se recomienda utilizar el proceso de revelado mencionado en este trabajo, ya que con el proceso utilizado anteriormente no era posible leer las franjas cuando el disco tenía un número considerable de ellas.

APENDICE A

CALCULO DE UN MARCO DE CARGA UTILIZANDO UN TUBO RANURADO.

En el cálculo que se muestra más adelante, se vió que el espesor de tubo necesario para resistir la fuerza lateral es muy grande, por lo que su construcción es bastante compleja (figs. A.A.1 y A.A. 2).

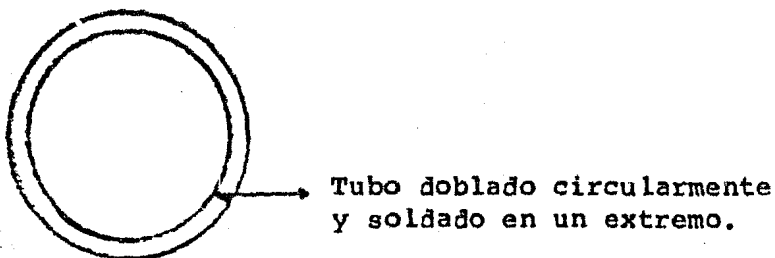


Fig. A.A.1

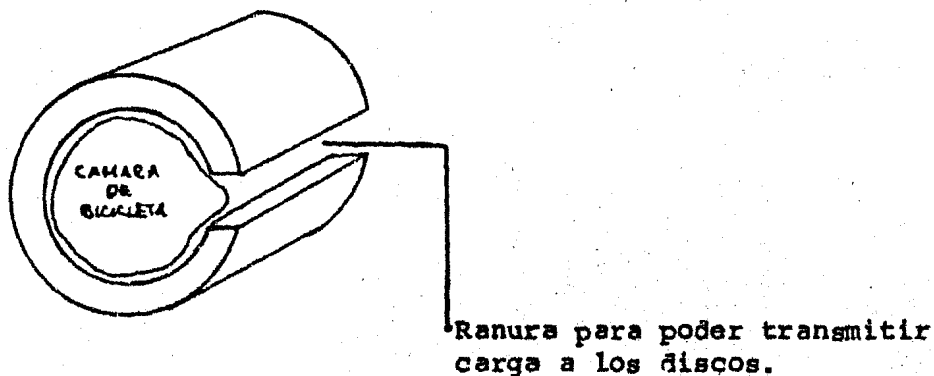


Fig. A.A.2

El cálculo de este marco de carga se muestra a continuación:

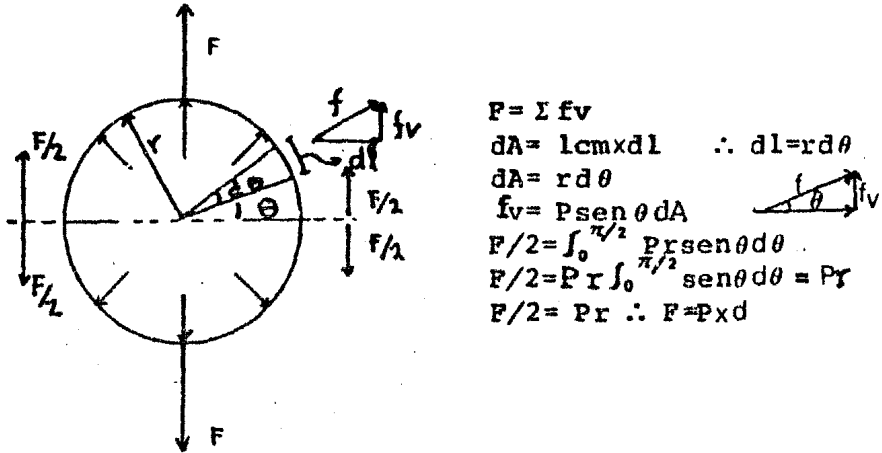


fig.A.A.3

Cálculo del espesor necesario para resistir la fuerza a tensión.

Analizando el tubo ranurado y por equilibrio:

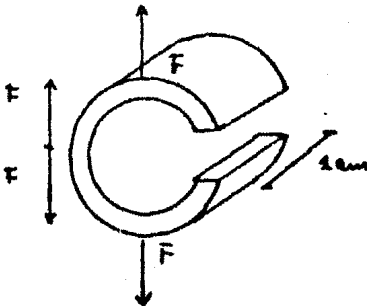


fig. A.A.4

$$\sigma = F / (e \times l \text{ cm})$$

$$\sigma = P d / (e) \dots (1)$$

σ = Resistencia del material a tensión.

d = Diámetro del tubo

P = Presión por aplicarse

e = Espesor del tubo

$\sigma_{\text{acero}} = 1200 \text{ kg/cm}^2$ (tensión)
 $d = 3 \text{ cm}$ (Determinado en función de la cámara de bicicleta por usar)
 $P = 10 \text{ kg/cm}^2$
 De (1)
 $e = \frac{Pd}{\sigma} = \frac{(10) \cdot (3)}{1200} \left[\frac{\text{kg/cm}^2 \cdot \text{cm}}{\text{kg/cm}^2} \right] = 0,025 \text{ cm}$
 $e_{\text{tension}} = .025 \text{ cm}$ (espesor necesario para resistir la tensión)

Revisión por momento flexionante:

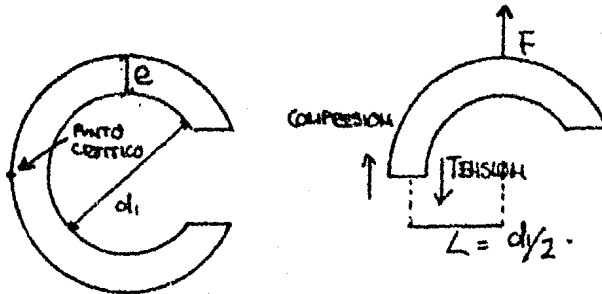


fig (A.A.5)

$\sigma = \frac{M}{I} \gamma$ (Fórmula de la escuadría.)

$M = FL = F(d/2) = F \cdot (1.5)$ pero $F = Pd_1 \cdot (1)$

$M = Pd_1 (1.5) = (1.5) \cdot (3) \cdot (10) = 45 \text{ kg} \cdot \text{cm}$

$\gamma = e/2$

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1(e)^3}{12}$

Sustituyendo valores en la fórmula de la escuadría

$\sigma = \frac{M}{I} \gamma$

$1200 = \frac{(45)}{\frac{e^3}{12}} \frac{e}{2}$

$e = .474 \text{ cm}$

$e_{\text{momento}} = .474 \text{ cm}$ (espesor necesario para resistir el momento)

$$e_{\text{total}} = e_{\text{momento}} + e_{\text{tensión}} = .474 + .025 = .499$$

Como se ve $e_{\text{total}} = .499$ cm es muy grueso y el trabajar un tubo de ese espesor es sumamente difícil, por lo que esta posible solución fue desechada.

APENDICE B

CALCULO DE MARCO DE CARGA UTILIZANDO TRES ANILLOS PLANOS.

Marco de carga hecho con tres anillos planos de acero, dos de estos para evitar la expansión lateral de la cámara de hule y el otro para evitar la radial hacia el exterior. Los cálculos se describen a continuación:

a) Cálculo de espesores y resistencia de tornillos.

Los tres anillos se sujetaron con tornillos como se ilustra en la figura (A.B.1):

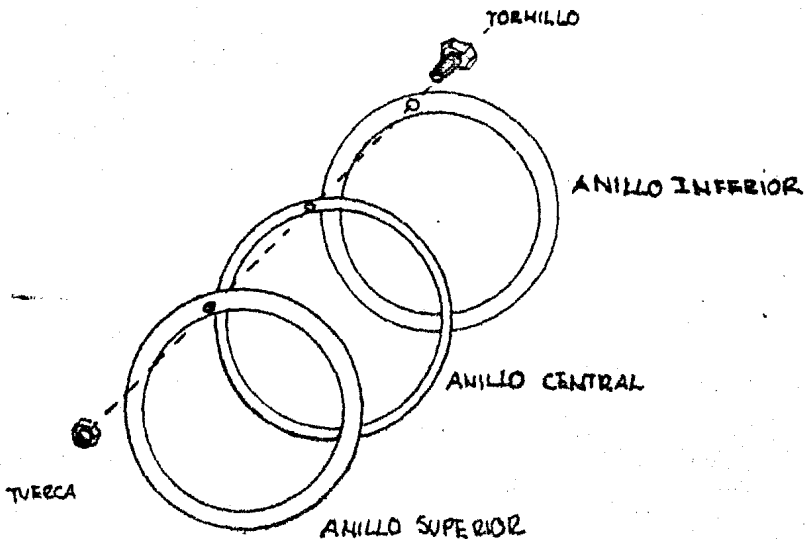


fig. (A.B.1)

El cálculo de los tornillos se hizo con la posibilidad más desfavorable dando a la cámara la mayor expansión posible. El espesor del anillo central se dió de antemano por la geometría de la cámara. También se estimó el tamaño de la caja con el fin de que la cámara de bicicleta pudiese desarrollar bien su función, quedando la caja de las siguientes dimensiones:

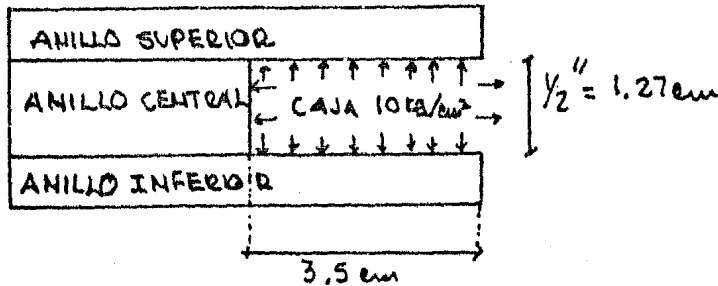


fig. (A.B.2)

$$F = P \cdot A$$

$$P = 10 \text{ kg/cm}^2$$

Área tributaria que resiste el tornillo "A"



$$A = 10 (3.5) = 35 \text{ cm}^2$$

$F = 10 (35) = 350 \text{ kg}$ (Esta es la fuerza más grande que se aplicará en la caja).

Se vieron varias posibilidades para escoger el tamaño del tornillo decidiéndose por el de $5/8''$; a continuación se muestra el cálculo:

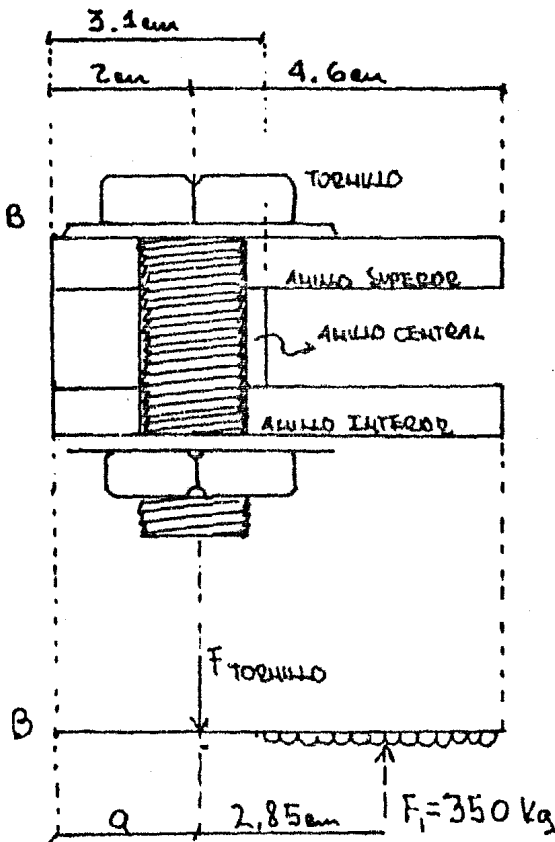


fig. (A.B.3)

$$\sigma_{\text{acero}} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{tornillo}} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$\Sigma M_B = 0$ de la figura A.B.3 se tiene que:

$$\Sigma M_B = 0 \therefore F_1 \times (2.85 + a) = F_{\text{tornillo}} \times (a)$$

$$F_{\text{torn}} = \frac{F_1 \times (2.85 + a)}{a} \quad \text{fuerza inducida por flexión de la placa.}$$

$$F_1 = 350 \text{ kg}$$

fuerza de tensión simple.

$$\sigma_{\text{torn}} = \frac{F_1}{A_{\text{torn}}} + \frac{F_{\text{torn}}}{A_{\text{torn}}}$$

$$\sigma_{\text{torn}} \times A_{\text{torn}} = 350 + 350 \left(\frac{2.85}{a} + 1 \right)$$

$$\sigma_{\text{torn}} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{\text{torn}} = \pi D^2/4$$

$a = 2 \text{ cm}$ (el valor de "a" se escogió después de varias iteraciones)

$$D = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi 1200} \right) \left[350 + 350 \left(\frac{2.85}{a} + a \right) \right]} = 1.28 \text{ cm}$$

$$1.28 < \text{tornillo } 5/8" = 1.59 - 0.3 \text{ "cuerda"} = 1.29 \text{ cm}$$

Diámetro del tornillo 5/8".

b) Cálculo del espesor de la placa.

Considerando una longitud unitaria de 1 cm en el anillo superior e inferior (fig. A.B.4)

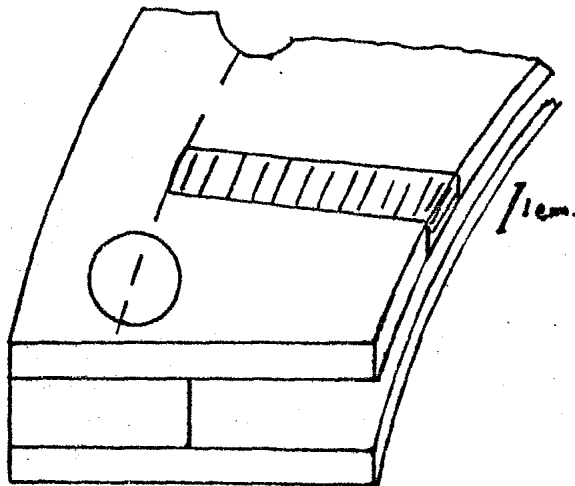


fig. A.B.4

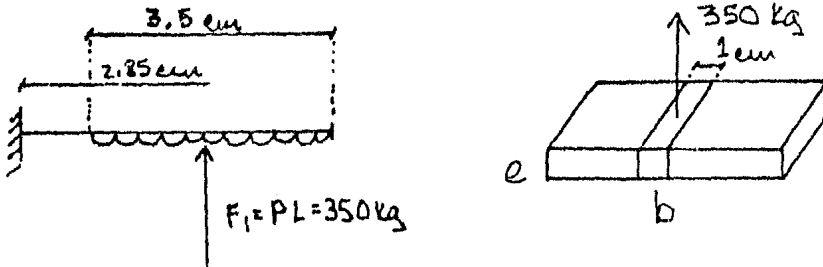


fig. A.B.5

De la fig. A.B.5 se define:

$$\sigma = (M/I) y \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$y = e/2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{be^3}{12} = \frac{e^3}{12}$$

$$M = F(2.85) = b(3.5)P(2.85) = 1(3.5)(10)(2.85) = 97.75 \text{ kg cm}$$

Sustituyendo valores en (1)

$$1200 = \frac{97.75}{e^3/12} \frac{e}{2} \quad \therefore e = .796 \text{ cm}$$

Dentro de los espesores de placa de tipo comercial, más próximo al espesor se tiene: 1/4" (.63 cm) y de 3/8" (.95 cm) se optó por la de 1/4" aún cuando en alguna condición especial alcanzará esfuerzos del orden de:

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{97.75 (12) (.63)}{2 (.63)^3} = 1508 \text{ kg/cm}^2$$

Para este esfuerzo de 1508 kg/cm² en el acero se tiene todavía un comportamiento elástico; ya que el punto elásti-

co del acero utilizado es 2100 kg/cm^2 . Además existen otros factores que no se consideran a favor de la resistencia, como la curvatura que tiene el anillo. De todos modos con el fin de disminuir momentos flexionantes, se decidió colocar roldanas en los tornillos y así disminuir el brazo de palanca. Por otro lado, el caso extremo sólo se presentaría cuando los discos llegaban a descubrir la superficie hasta el borde la placa.

c) Cálculo de flechas y deformaciones.

Se vió cual sería la flecha producida por la presión en la cámara sobre los anillos superior e inferior. A estos anillos se les aumento medio centímetro para asegurar más a la cámara.

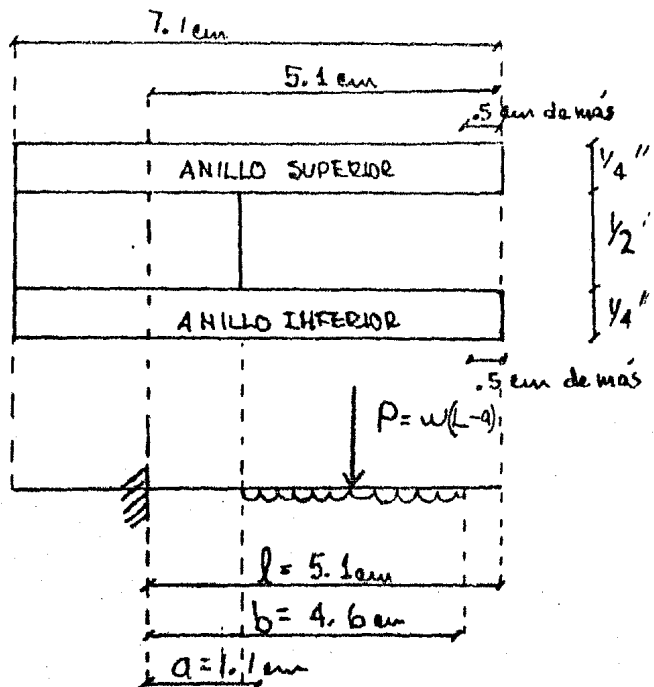


fig. A.B.4

De la fig. A.B.6 tenemos:

$$E_{\text{acero}} = 2(10)^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\lambda = 5.1 \text{ cm}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1(e)^3}{12} = \frac{(0.63)^3}{12} = 0.0208 \text{ cm}^4$$

$$W = WL = P = 10 (1) (3.5) = 35 \text{ kg}$$

(Del libro Roark pag. 100), se tomó la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} Y_{\text{máx}} &= \frac{1}{24} \frac{W}{EI} 4 \left[(a^2 + ab + b^2)\lambda - a^3 - ab^2 - a^2b - b^3 \right] \\ &= \frac{1}{24} \frac{35}{2(10)^6 (0.0208)} \left[4(1.1^2 + (1.1)(4.6) + (4.6)^2)5.1 - \right. \\ &\quad \left. (1.1)^3 - (1.1)(4.6)^2 - (4.6)(1.1)^2 - (4.6)^3 \right] = 0.15 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$Y_{\text{máx}} = 0.15 \text{ mm.}$$

También se podría presentar la siguiente flecha mostrada en la figura A.B.7

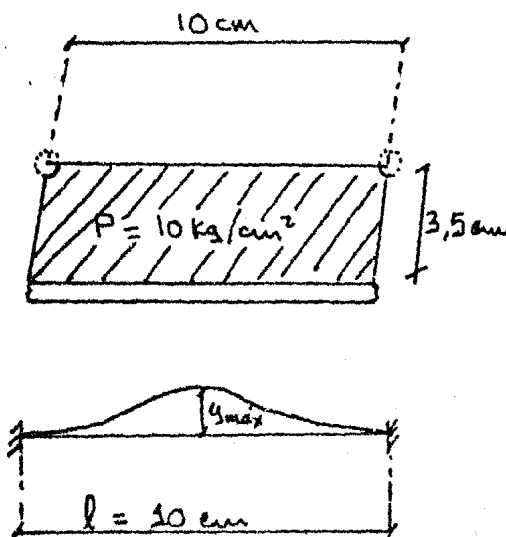


fig. A.B.7

(Del libro Roark pag. 108), se tomó la siguiente fórmula:

$$y_{\text{máx}} = \frac{W \cdot l^4}{384 EI}$$

$$E = 2 (10^6) \text{ kg/cm}^2$$

$$W = P(3.5) = 10 \text{ kg/cm}^2 (3.5) = 35.0 \text{ kg/cm}$$

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$I = bh^3/12 = (10)(e^3)/12 = (10(.635)^3)/12 = .213 \text{ cm}^4$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{35 (10^4)}{384 \cdot (2) \cdot (10^6) \cdot (.213)} = 0.0021 \text{ cm.}$$

Se aceptan las flechas máximas ya que el punto más crítico es cuando se llega a la distancia de 3.5 cm a una presión de 10 kg/cm^2 . Existirá una deformación entre los anillos superior e inferior de $.15 + .15 = .3 \text{ mm.}$, de flecha para la cual es muy difícil que la cámara pueda colapsarse.

También se determinó la deformación radial en el anillo central.

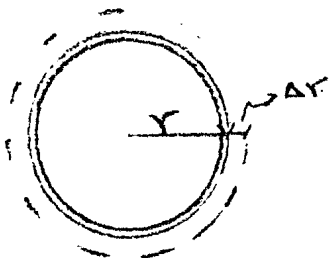


fig A.B.7

$$e = 1/2" = 1.27 \text{ cm.}$$

$$d/2 = r = 35 \text{ cm.}$$

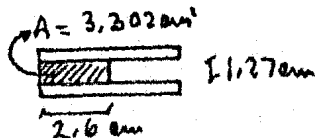
$$L = r = 35 \text{ cm.}$$

$$E = 2(10^6) \text{ kg/cm}^2$$

$$A = (1.27) (2.6) = 3.302 \text{ cm}^2$$

$$\Delta r = \frac{FL}{EA} = \frac{L\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{P \cdot d/2}{e(1)} = F/A$$



$$\sigma = \frac{10 (35)}{3.302} = 105.99 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta r = \frac{(105.99) (35)}{2(10^6)} = \frac{1855}{10^6} = 0.00185 \text{ cm.}$$

$$\Delta r = .01855 \text{ mm.}$$

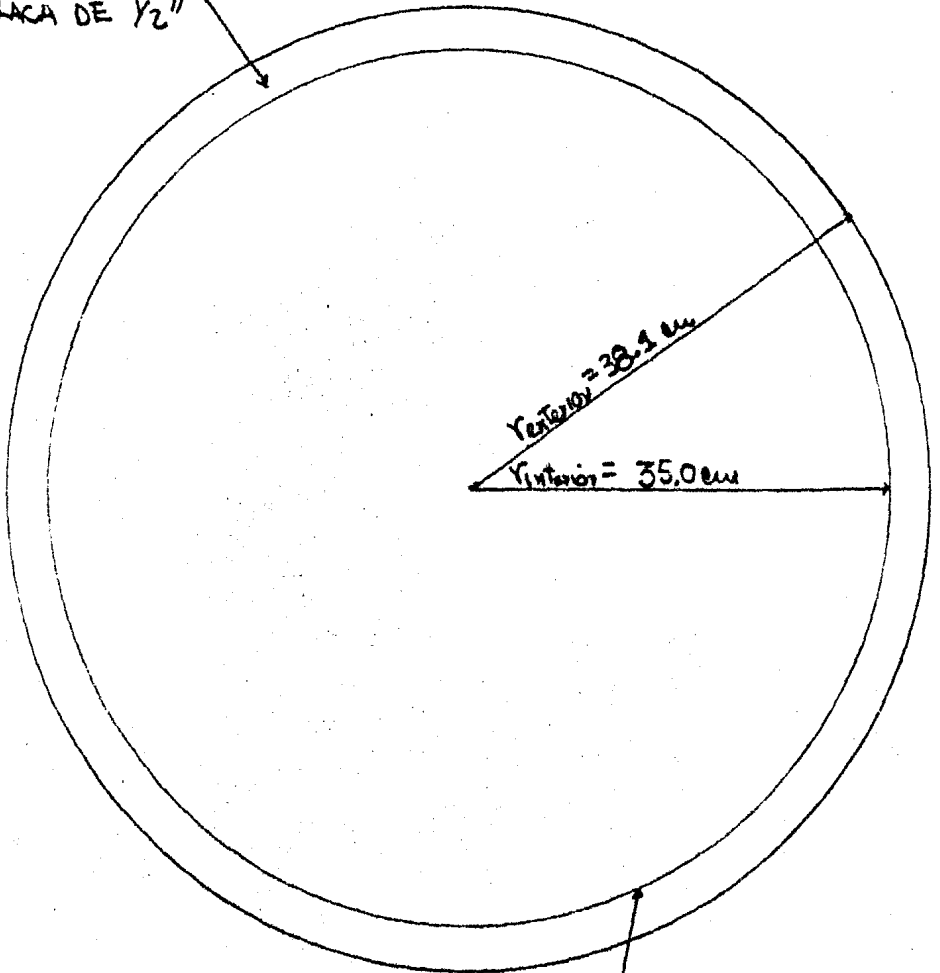
$$\Delta d = .0371 \text{ mm.}$$

Esta deformación es sumamente pequeña quedando bastante sobrada su sección, aún con los taladros para los tornillos.

A continuación se muestran los planos del aparato.

PLACA DE $\frac{1}{2}$ " : Se obtendrá un anillo de 39.1 cm de radio exterior y 35.0 cm de radio interior.

ANILLO SACADO DE PLACA DE $\frac{1}{2}$ "



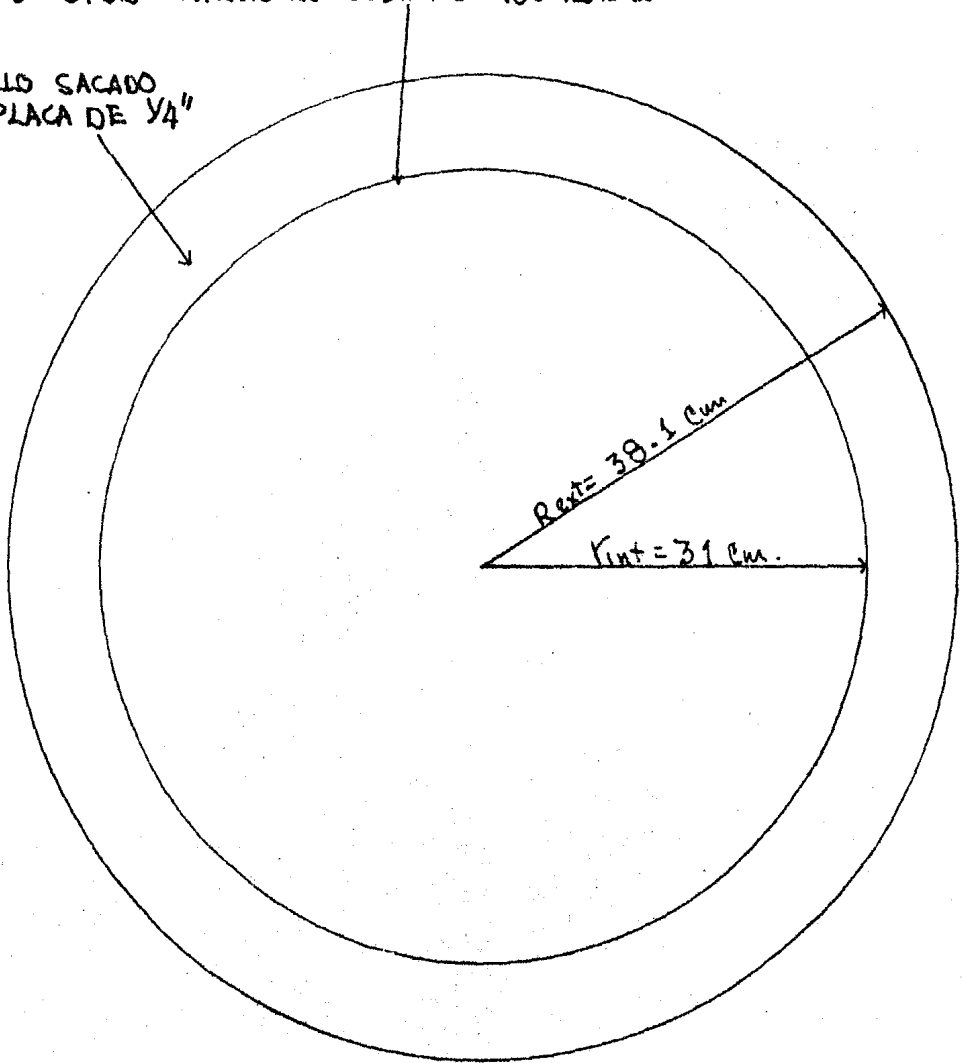
NOTA: LA CARA INTERIOR DEBE IR TORNEADA

ESCALA
10 cm.

2 PLACAS DE $\frac{1}{4}$ " - Se obtendrán dos anillos de las placas con radio interior de 31 cm y un radio exterior de 38,1 cm

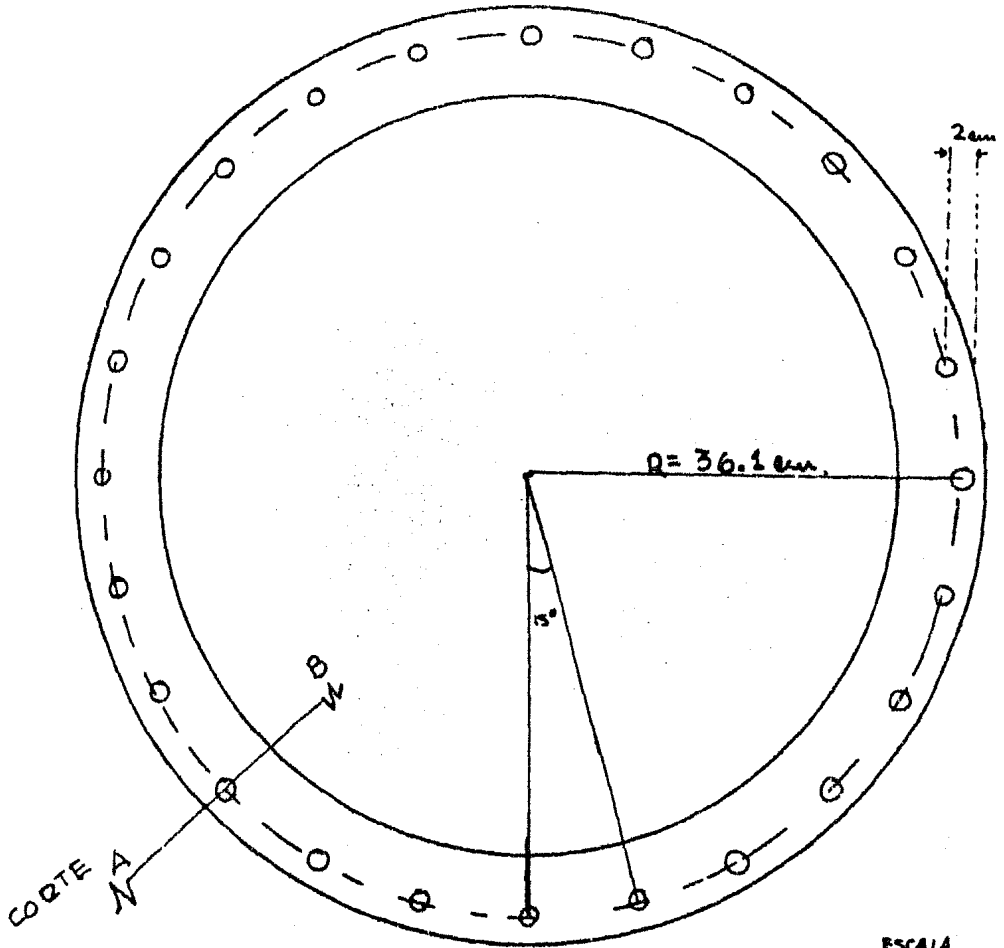
LAS CARAS INTERIORES DEBEN IR TORNEADAS

ANILLO SACADO DE PLACA DE $\frac{1}{4}$ "



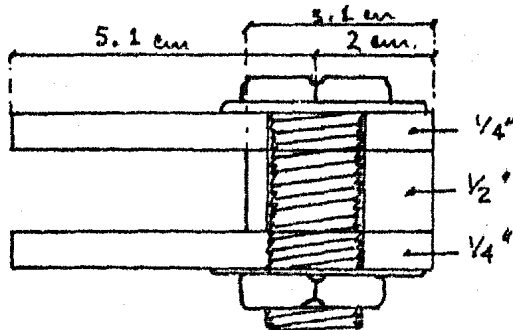
ESCALA
10 cm

CON LOS 3 ANILLOS OBTENIDOS SE ACOMODAN DEJANDO EL ANILLO DE $\frac{1}{2}$ " EN EL CENTRO. LOS 24 TORNILLOS DE $\frac{5}{8}$ " DE \odot 12AH A CADA 15° DESDE EL CENTRO, CON RADIO DE 36.1 cm.



ESCALA 10 cm

CORTE A B



ESCALA 1:1 cm

APENDICE C

MÉTODOS ANALÍTICOS UTILIZADOS PARA EL CÁLCULO DE FUERZAS PERIMETRALES EN UN DISCO.

En este apéndice se describe primero el principio para estudiar los esfuerzos dentro de un disco, luego se presenta el método aproximado de D.Wu (Ref. 4), y a continuación el método "exacto" desarrollado por J. Alberro.

a) Método de cálculo.

La ley básica de la fotoelasticidad es la siguiente, para problemas en el plano:

$$(1) \dots \tau_{\text{máx}} = \frac{(CF) NA(IS)}{t}$$

$\tau_{\text{máx}}$ = Esfuerzo cortante máximo en un punto determinado dentro del disco.

t = espesor del disco.

CF = Constante de franja que depende del material y sus unidades son: kg/cm-franja)

$NA(IS)$ = Valor de orden de las franjas "isocromáticas" del disco en estudio en el punto IS.

Por otro lado, de acuerdo con el problema tratado por Michell la fuerza exterior (F) aplicada en el contorno de un disco en el punto (M) genera sobre el plano (P) que pasa por el punto (S), interno a la partícula, un vector esfuerzo (Ref. 6). (fig. A.C.1)

$$\vec{f} = \frac{2F}{\pi t} \cos \rho \frac{\vec{MS}}{MS} \frac{\vec{n}}{MS} \frac{\vec{MS}}{MS^2}$$

Los esfuerzos normal y cortante sobre tal plano son:

$$V = \vec{f} \cdot \vec{n}$$

$$b = \vec{f} \cdot \vec{t}$$

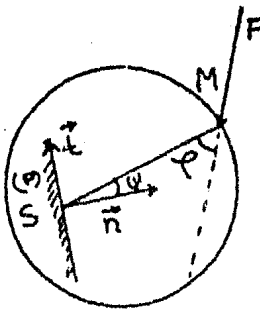


fig. A.C.1

Siendo \vec{n} y \vec{t} los vectores unitarios presentados en la fig. A.C.1.

En consecuencia, el efecto de dos fuerzas aplicadas en los puntos M y N extremos de una cuerda \overline{MN} (fig. A.C.2) es:

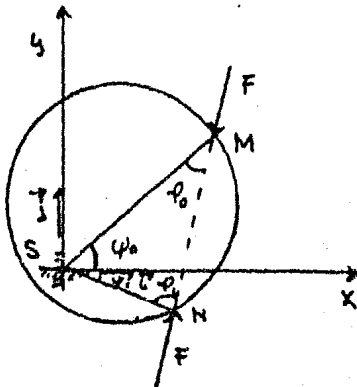


fig. A.C.2

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi t} \left[\cos\phi_0 \cos\phi_0 \frac{\overrightarrow{MS} \cdot \vec{i}}{MS^2} + \cos\phi_1 \cos\phi_1 \frac{\overrightarrow{NS} \cdot \vec{i}}{NS^2} \right]$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi t} \left[\cos\phi_0 \operatorname{sen}\phi_0 \frac{\overrightarrow{MS} \cdot \vec{j}}{MS^2} - \cos\phi_1 \operatorname{sen}\phi_1 \frac{\overrightarrow{NS} \cdot \vec{j}}{NS^2} \right]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi t} \left[\cos\phi_0 \cos\phi_0 \frac{\overrightarrow{MS} \cdot \vec{j}}{MS^2} + \cos\phi_1 \cos\phi_1 \frac{\overrightarrow{NS} \cdot \vec{j}}{NS^2} \right]$$

o sea:

$$\sigma_x = +\frac{2F}{\pi t} \left[\frac{\cos\phi_0 \cos^2\phi_0}{MS} + \frac{\cos\phi_1 \cos^2\phi_1}{NS} \right]$$

$$\sigma_y = +\frac{2F}{\pi t} \left[\frac{\cos\phi_0 \operatorname{sen}^2\phi_0}{MS} + \frac{\cos\phi_1 \operatorname{sen}^2\phi_1}{NS} \right]$$

$$\tau_{xy} = +\frac{2F}{\pi t} \left[\frac{\cos\phi_0 \cos\phi_0 \operatorname{sen}\phi_0}{MS} - \frac{\cos\phi_1 \operatorname{sen}\phi_1 \cos\phi_1}{NS} \right]$$

o bien:

AN (IS, IT)

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{F}{\pi t} \left[\frac{\cos\phi_0 (\cos^2\phi_0 - \operatorname{sen}^2\phi_0)}{MS} + \frac{\cos\phi_1 (\cos^2\phi_1 - \operatorname{sen}^2\phi_1)}{NS} \right]$$

BT (IS, IT)

$$\tau_{xy} = \frac{F}{\pi t} \left[2 \left\{ \frac{\cos\phi_0 (\operatorname{sen}\phi_0 \cos\phi_0)}{MS} - \frac{\cos\phi_1 (\operatorname{sen}\phi_1 \cos\phi_1)}{NS} \right\} \right]$$

o bien:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{1}{\pi t} \left(\text{AN (IS, IT)} \right) \times (F \text{ (IT)}) \dots\dots (2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\pi t} \left(\text{BT (IS, IT)} \right) \times (F \text{ (IT)}) \dots\dots (3)$$

Designando por AN (IS,IT), BT (IS,IT) las matrices que rigen la influencia de las fuerzas exteriores F(IT) de los esfuerzos en el punto (IS), (fig.A.C.3).

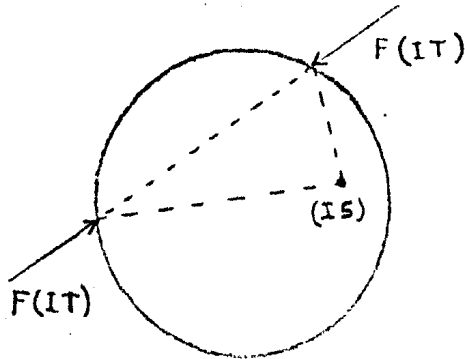


fig. A.C.3

b) Método aproximado de Cálculo D.Wu

Si las direcciones principales de esfuerzos inducidos por cada par de fuerzas F(IT) en el punto (IS) fueran las mismas, entonces:

$$\tau_{\text{máx}} = \Sigma \tau_{\text{máx}}(\text{IT}) \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$(\tau_{\text{máx}}(\text{IT}))^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)_{\text{IT}}^2 + (\tau_{xy})_{\text{IT}}^2 \quad \dots \dots \dots (5)$$

Sustituyendo los valores de $\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)$ y τ_{xy} en 5 queda:

$$\begin{aligned} (\tau_{\text{máx}}(\text{IT}))^2 = & \frac{F^2(\text{IT})}{\pi^2 t^2} \left\{ \frac{\cos^2 \psi_0}{MS^2} (\cos^2 2\psi_0 + \text{sen}^2 2\psi_0) + \right. \\ & \frac{\cos^2 \psi_1}{NS^2} (\cos^2 2\psi_1 + \text{sen}^2 2\psi_1) + \\ & \left. \frac{2 \cos \psi_0 \cos \psi_1}{MS \ NS} (\cos 2\psi_0 \cos 2\psi_1 - \text{sen} 2\psi_0 \text{sen} 2\psi_1) \right\} \end{aligned}$$

De donde:

$$\tau_{\text{máx}}^2 = \frac{F^2(IT)}{\pi^2 t^2} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi_0}{MS^2} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{NS^2} + \frac{2\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos 2(\varphi_0 + \varphi_1)}{MS \cdot NS} \right\}$$

pero $\varphi_0 + \varphi_1 = \pi - (\varphi_0 + \varphi_1)$

$$\cos 2(\varphi_0 + \varphi_1) = \cos 2(\varphi_0 + \varphi_1)$$

$$\tau_{\text{máx}}^2 = \frac{F^2(IT)}{\pi^2 t^2} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi_0}{MS^2} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{NS^2} + \frac{2\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos 2(\varphi_0 + \varphi_1)}{MS \cdot NS} \right\}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{F(IT)}{\pi t} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_0}{MS^2} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{NS^2} + \frac{2\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos 2(\varphi_0 + \varphi_1)}{MS \cdot NS}}$$

Y de acuerdo con la expresión (5), en el punto (IS)

$$\tau_{\text{máx}} = \Sigma \tau_{\text{máx}}(IT) = \frac{1}{\pi t} (C(IS, IT)) \times (F(IT)) \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{con } C(IS, IT) = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_0}{MS^2} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{NS^2} + \frac{2\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos 2(\varphi_0 + \varphi_1)}{MS \cdot NS}}$$

De acuerdo con el valor del número de franjas isocromáticas $N(IS)$ en el punto (IS), sustituyendo (1) en (6) queda:

$$\pi (CF) NA(IS) = C(IS, IT) \times F(IT) \dots \dots \dots (7')$$

$$\therefore F(IT) = \pi (CF) NA(IS) \times C^{-1}(IS, IT) \dots \dots \dots (7)$$

El cálculo de las fuerzas exteriores $F(IT)$ se puede efectuar en primera aproximación con la expresión (7) que es válida únicamente cuando las direcciones de los esfuerzos principales inducidos por los pares de fuerzas $F(IT)$ coinciden. De no ser así es necesario afinar el procedimiento de cálculo de $F(IT)$.

c) Método "EXACTO" de cálculo.

En el círculo de Mohr se tiene:

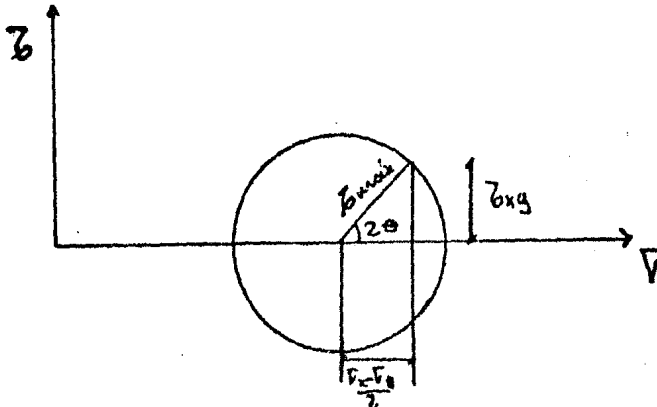


fig. A.C.4

$$\tau_{\text{máx}} \cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$\tau_{\text{máx}} \sin 2\theta = \tau_{xy}$$

De donde de acuerdo con las expresiones (2) y (3)

$$\tau_{\text{máx}} (\cos 2\theta + \sin 2\theta) = \frac{1}{\pi t} \left[AN(IS, IT) + BT(IS, IT) \right] F(IT) \dots 8$$

Utilizando la expresión (1)

$$\pi (CF) NA(IS) [\cos 2\theta + \sin 2\theta] = [AN(IS, IT) + BT(IS, IT)] F(IT)$$

Además:

$$\cos 2\theta = \cos \left(\tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{BT(IS, IT) F(IT)}{AN(IS, IT) F(IT)} \right) \right]$$

$$\sin 2\theta = \sin \left(\tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \sin \left[\tan^{-1} \left(\frac{BT(IS, IT) F(IT)}{AN(IS, IT) F(IT)} \right) \right]$$

Sustituyendo estos valores en (8) tenemos:

$$\begin{aligned} \pi(CF) NA(IS) \cdot \left\{ \cos\left(\frac{\tan^{-1} BT(IS, IT) F(IT)}{AN(IS, IT) F(IT)}\right) + \text{sen}\left(\frac{\tan^{-1} BT(IS, IT) F(IT)}{AN(IS, IT) F(IT)}\right) \right\} = \\ = \left(AN(IS, IT) + BT(IS, IT) \right) F(IT) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

La ecuación (9) es una ecuación implícita en F(IT) por lo que su solución se obtiene mediante iteraciones. Partiendo de los valores de F(IT) dados por la solución aproximada de D.Wu, se introducen esos valores en la primera parte de la ecuación (9) y se soluciona la ecuación, obteniéndose nuevos valores de F(IT) mediante la expresión (10).

$$(10) \quad F(IT) = \pi(CF) NA(IS) \left\{ \left(S(IS) + ST(IS) \right) \cdot \left(AN(IS, IT) + BT(IS, IT) \right) \right\}^{-1}$$

con:

$$S(IS) = \cos\left(\frac{\tan^{-1} BT(IS, IT) F(IT)}{AN(IS, IT) F(IT)}\right)$$

$$ST(IS) = \text{sen}\left(\frac{\tan^{-1} BT(IS, IT) F(IT)}{AN(IS, IT) F(IT)}\right)$$

Unas cuantas iteraciones (por lo general 10) permiten obtener los valores reales de F(IT).

Los datos necesarios para poder obtener las fuerzas de contacto son:

- a) El diámetro del disco en estudio.
- b) El número de contactos en la partícula estudiada.
- c) Las distancias que van del punto de contacto al punto (S) (ver fig. A.C.1). El punto (S) se decidió fijarlo a

una distancia igual al diámetro del disco dividido entre 10 alojado en la cuerda formada entre los puntos de contacto. Esta distancia es la que recomienda D.Wu ref. 4, la cual fue obtenida después de un número considerable de experimentos viéndose que la distancia $D/10$ era la que daba mayor precisión para obtener la fuerza de contacto.

d) El valor de orden de franja $NA(IS)$ del disco en los puntos (S), que se eligieron sobre las cuerdas formadas por un par de puntos de contacto y a una distancia $D/10$ del punto de contacto (fig. A.C.5).

e) Los ángulos formados por las cuerdas entre los puntos de contacto con las rectas que unen los puntos de contacto con cada uno de los puntos (S) ver (fig. A.C.1).

f) La constante de la franja (CF) que es de 13.49 kg/cm-franja. Se describe la forma de obtener ésta en el Apéndice E.

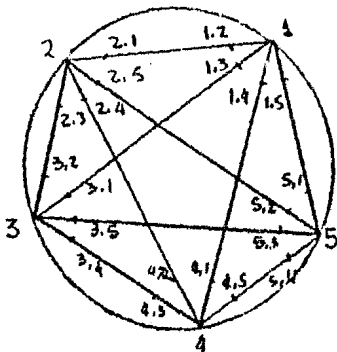


fig. A.C.5.

Siendo $NA(IS) = NA(i, j)$
 Ejemplo en el punto 1 tenemos:
 $NA(1, 2)$
 $NA(1, 3)$
 $NA(1, 4)$
 $NA(1, 5)$

Debido a lo laborioso que resultaría extraer de la fotografía, los datos de los incisos c) y e), se optó por integrar el cálculo de estas magnitudes en el programa presentado en el apéndice D, utilizando los valores del diámetro del disco considerado y de los ángulos polares de los puntos de contacto respecto al eje x.

Los datos de entrada del programa son, por tanto:

- a) Diseño del disco en estudio:
- b) El número de contactos de la partícula en estudio.
- c) El valor de orden de franja $NA(IS)$ del disco en los puntos (S), que se eligieron sobre las cuerdas formadas por un par de puntos de contacto y a una distancia $D/10$ del punto de contacto fig. A.C.5.
- d) La constante de franja CF que es de 13.49 kg/cm franja; la obtención de ésta se presenta en el Apéndice E.
- e) Los ángulos polares de cada punto de contacto, respecto al eje de coordenadas x.

APENDICE D

PROGRAMA DE COMPUTACION PARA OBTENER LAS FUERZAS NORMALES Y TANGENCIALES ACTUANTES SOBRE DISCOS FOTOELASTICOS.

El tratar de evaluar las fuerzas de contacto, con el método descrito en el Apéndice C es prácticamente imposible hacer los cálculos a mano, ya que se tendrían que resolver una serie de matrices para poder obtener las fuerzas normal y tangencial actuantes sobre cada disco. Las matrices varían con el número de contactos y van desde (2×2) hasta (28×28) . Por esta razón en el Instituto de Ingeniería con el fin de simplificar el problema mencionado, se elaboró un programa de computadora que se muestra en este apéndice:

Los datos necesarios para el programa, fueron extraídos de las fotografías. A continuación se enlistan estos datos así como la forma de obtenerlos:

- (CF) Constante de franja que era igual en todas las partículas por ser el mismo material. Su forma de obtención aparece en el Apéndice E.
- (NP) Número de la partícula. Este número sirve para identificar simplemente la partícula estudiada.
- (D) El diámetro de la partícula. Este simplemente se mide directamente de la fotografía.
- (NC) Número de contactos en la partícula.

(ALF(IJ)) Angulo medido desde una horizontal que pasa por el centro del disco al punto de contacto. Su obtención se hacía, primero localizando el centro del disco con una mica transparente, que tenía trazados círculos de diferentes diámetros con el centro de éstos bien definido. Se colocaba la plantilla sobre la fotografía hasta que algún círculo coincidiera con el disco de la fotografía y con un alfiler se marcaba el centro del disco. Por el centro se trazaba una línea que era paralela a todas las líneas semejantes que se trazarían en los discos de la fotografía. Otra mica transparente en forma de transportador, se colocaba en el centro del disco y orientada sobre la línea trazada, se tomaban las medidas de las latitudes de los puntos de contacto.

(NFA(IJ)) Valor de orden de franja a una distancia $D/10$ alojado sobre la cuerda formada entre 2 puntos de contacto. Se obtenía con unas reglillas transparentes que tenían marcada la distancia $D/10$ de cada tamaño de disco. Se escogía la reglilla del diámetro del disco en estudio con su $D/10$ correspondiente. Colocando ésta en su extremo sobre el punto de contacto en la fotografía y viendo el NA(IS) a través de la reglilla donde quedará la marca del $D/10$.

La presentación de los datos se hizo de la siguiente manera:

```

1000  CF, NP, D, NC
2000  ALF (1) ALF (2)..... ALF(n) ..... ALF(NC)
3000  NFA (1, 1), NFA(1, 2) .. NFA(1, n) ,..... NFA(1, NC)
4000  NFA (2, 1), NFA(2, 2) .. NFA(2, n) ..... NFA(2, NC)
5000  .....
.....
.....
.....
.....
..... NFA (NC, 1), NFA(NC, 2) .....NFA(NC, n) ..... NFA(NC, NC)

```

La presentación de resultados es la mostrada en la siguiente hoja; también se ve la diferencia entre el uso del método de Wu y el cálculo exacto.

NOTAS SOBRE EL PROGRAMA:

Este programa puede usarse con discos que no tengan más de siete puntos de contacto.

Si se quiere utilizar para más de siete puntos de contacto se tiene que tomar en cuenta lo siguiente:

Se deben cambiar las dimensiones del programa, es decir, cambiar todos los (50, 25), (25). Según el número de contactos:

# de contactos	Espacios mínimos
8	(56, 28) , (28)
9	(72, 36) , (36)
10	(90, 45) , (45)

Otras notas importantes son:

- + Cambiar número de Iteraciones ver línea (174000)
- + Cambiar precisión en el programa ver línea (166000)
- + Si se quiere que escriba las iteraciones hechas es necesario quitar "C*" de la línea (171000).

```

1000 FILE 5=PROG,6=PRINT,UNIT=11,RECORD=14,BLOCKING=30      00001000
2000 FILE 6=JOB,UNIT=PRINTER,RECORD=100                00002000
3000 FILE 7=H50,UNIT=CRATE,RECORD=12                    00003000
4000 DIMENSION ALFA(0),BT(100,25),ALF(20),UB(200,2)      00004000
5000 DOUBLE PRECISION HUB(50,20),BTR(100),ANA(200),BT(50,25), 00005000
6000 *AR(50,25),PAR(200),OT(25,2),SA(50,100),ST(200),F(20,20),AND(20), 00006000
7000 *TA(20),ANR(20),TBR(20),AC(50,25),RA(25,25),RR(25) 00007000
8000 *CA(25,25),RBA(50),RC(25,25),OBS(48,5)             00008000
9000 REAL NF(20,20),NA(200),NEA(20,20)                 00009000
10000 READ(5,7)CF,NE,D,NC                               00010000
11000 READ(5,7)(ALF(I),I=1,NC)                          00011000
12000 READ(5,7)((NFA(I,J),J=1,NC),I=1,NC)              00012000
13000 PRINT 57,CF,NE,D,NC                               00013000
14000 DO 56 I=1,NC                                      00014000
15000 56 PRINT 58,I,ALF(I)                              00015000
16000 DO 80 I=1,NC                                      00016000
17000 DO 60 J=1,NC                                      00017000
18000 60 PRINT 59,I,J,NFA(I,J)                         00018000
19000 WRITE(6,81)                                       00019000
20000 80 CONTINUE                                       00020000
21000 PI=3.1415927                                       00021000
22000 21 DO 11 I=1,NC                                    00022000
23000 ALFA(I)=ALF(I)*(PI/180.)                          00023000
24000 11 CONTINUE                                       00024000
25000 IS=0                                              00025000
26000 DO 1 I=1,NC                                       00026000
27000 DO 2 J=1,NC                                       00027000
28000 IT=0.                                             00028000
29000 IF(1,CO,J) GO TO 2                                00029000

```


30000	IS=IS+1	00050000
31000	UC(IS,1)=I	00031000
32000	UC(IS,2)=J	00032000
33000	NA(IS)=NFA(I,J)	00033000
34000	DO 3 K=1,(NC-1)	00034000
35000	DO 4 M=(K+1),NC	00035000
36000	IT=IT+1	00036000
37000	UB(IT,1)=K	00037000
38000	UB(IT,2)=M	00038000
39000	A=COS(ALFA(I))-COS(ALFA(K))+(COS(ALFA(J))-COS(ALFA(I)))	00039000
40000	*/(5.*(2.*(1.-COS(ALFA(I)-ALFA(J))))*.5)	00040000
41000	B=SIN(ALFA(I))-SIN(ALFA(K))+(SIN(ALFA(J))-SIN(ALFA(I)))	00041000
42000	*/(5.*(2.*(1.-COS(ALFA(I)-ALFA(J))))*.5)	00042000
43000	C=COS(ALFA(M))-COS(ALFA(K))	00043000
44000	DA=SIN(ALFA(M))-SIN(ALFA(K))	00044000
45000	AA=COS(ALFA(I))-COS(ALFA(M))+(COS(ALFA(J))-COS(ALFA(I)))	00045000
46000	*/(5.*(2.*(1.-COS(ALFA(I)-ALFA(J))))*.5)	00046000
47000	BB=SIN(ALFA(I))-SIN(ALFA(M))+(SIN(ALFA(J))-SIN(ALFA(I)))	00047000
48000	*/(5.*(2.*(1.-COS(ALFA(I)-ALFA(J))))*.5)	00048000
49000	CC=-C	00049000
50000	DB=-DA	00050000
51000	T1=((A*C)+(B*DA))/(((A**2.)+(B**2.))*.5)*	00051000
52000	*(((C**2.)+(DA**2.))*.5)	00052000
53000	IF(ABS(T1).GT.1.) T1=1.*SIGN(1.,T1)	00053000
54000	T2=((AA*CC)+(BB*DB))/(((AA**2.)+(BB**2.))*.5)*	00054000
55000	*(((CC**2.)+(DB**2.))*.5)	00055000
56000	IF(ABS(T2).GT.1.) T2=1.*SIGN(1.,T2)	00056000
57000	R1=(((A**2.)+(B**2.))*.5)*.5*D	00057000
58000	R2=(((AA**2.)+(BB**2.))*.5)*.5*D	00058000
59000	T3=(((A**2.)-(B**2.))*((AA**2.)-(BB**2.))*	00059000

60000	* (4. *ABS(BR*(R2)) / (CUT*(R2.)) * (R2.)) *	00060000
61000	* ((ABS(R2.)) * (CDB*(R2.)))	00061000
62000	IF (ABS(CT2) .GT. 1.) T2=1. *SIGN(1., T2)	00062000
63000	G(1S, IT) = (CUT*(R2.)) / (R1*(R2.)) + (T2**2.) / (R2**2.)	00063000
64000	* + (2. * (T2**2.) / (R1*(R2.))) * (.5) * NAC(1S) / (PI * CF)	00064000
65000	F5AIR = (.5 * A * D) / R1	00065000
66000	F5AIR = (.5 * A * D) / R2	00066000
67000	F5IR = (.5 * B * D) / R1	00067000
68000	F5IR = (.5 * B * D) / R2	00068000
69000	AN(1S, IT) = (T1) * (F5AIR**2.) - (F5IR**2.) / R1 +	00069000
70000	* (T2) * (F5AIR**2.) - (F5IR**2.) / R2	00070000
71000	BT(1S, IT) = (T1) * F5IR * PSIR / R1 + (T2) * F5IR * PSIR / R2 * 2.	00071000
72000	ANP(1S, IT) = (AN(1S, IT) + BT(1S, IT)) * NAC(1S)	00072000
73000	4 CONTINUE	00073000
74000	3 CONTINUE	00074000
75000	2 CONTINUE	00075000
76000	1 CONTINUE	00076000
77000	LL = NC * (NC - 1)	00077000
78000	L = LL / 2.	00078000
79000	DO 51 IS = 1, L	00079000
80000	DO 52 IT = 1, L	00080000
81000	GAC(1S, IT) = 0.	00081000
82000	DO 53 NIP = 1, LL	00082000
83000	GAC(1S, IT) = GAC(1S, IT) + G(NIP, 1S) * G(NIP, IT)	00083000
84000	53 CONTINUE	00084000
85000	52 CONTINUE	00085000
86000	51 CONTINUE	00086000
87000	DO 54 IT = 1, L	00087000
88000	G(C1, IT) = 0.	00088000
89000	DO 55 I = 1, N	00089000

90000	DO 10 I=1, N, 1) (X(I)-X(I-1))/H	00090000
91000	87 CONTINUE	00091000
92000	88 CONTINUE	00092000
93000	CALL SBRN (CG, H, I, 50)	00093000
94000	DO 6 IT=1, I	00094000
95000	I=IBX(IT, I)	00095000
96000	J=JBC(IT, I)	00096000
97000	FAC(IT)=RAC(IT)	00097000
98000	F(I, J)=RAC(IT)	00098000
99000	6 CONTINUE *	00099000
100000	DO 7 K=1, NC	00100000
101000	DO 8 I=1, NC	00101000
102000	F(I, I)=0.	00102000
103000	F(I, I)=F(I, I)	00103000
104000	8 CONTINUE	00104000
105000	7 CONTINUE	00105000
106000	DO 9 I=1, NC	00106000
107000	AND(I)=0.	00107000
108000	TAC(I)=0.	00108000
109000	DO 10 K=1, NC	00109000
110000	RKI=(ALFA(K)-ALFAC(I))/Z.	00110000
111000	IF(RKI.EQ.0.) GO TO 10	00111000
112000	AND(I)=AND(I)+F(I, K)*DSIN(CABS(RKI))	00112000
113000	TAC(I)=TAC(I)+F(I, K)*DCOS(CABS(RKI))*DABS(RKI)/RNT	00113000
114000	10 CONTINUE	00114000
115000	PRINT 20, N, I, AND(I), TAC(I)	00115000
116000	* WRITE(7, 20) N, I, AND(I), TAC(I)	00116000
117000	9 CONTINUE	00117000
118000	WRITE(6, 31)	00118000
119000	K=0	00119000

120000	DO 100 IS=1.0	00120000
121000	DO 101 IT=1.0	00121000
122000	RC(15, IT)=0.	00122000
123000	RA(15, IT)=0.	00123000
124000	DO 102 IPR=1.0	00124000
125000	RC(15, IT)=RC(15, IT)+RNF(MP, IS)*RNF(MP, IT)	00125000
126000	RA(15, IT)=RA(15, IT)+RNF(MP, IS)*RNF(MP, IT)	00126000
127000	102 CONTINUE	00127000
128000	101 CONTINUE	00128000
129000	100 CONTINUE	00129000
130000	33 I=I+1	00130000
131000	DO 27 IS=1.0	00131000
132000	BTA(15)=0.	00132000
133000	ANA(15)=0.	00133000
134000	DO 30 IT=1.0	00134000
135000	BTA(15)=BTA(15)+BT(15, IT)*FA(IT)	00135000
136000	ANA(15)=ANA(15)+AN(15, IT)*FA(IT)	00136000
137000	30 CONTINUE	00137000
138000	IF(ANA(15).EQ.0.) GO TO 40	00138000
139000	OT=DATA(BTA(15)/ANA(15))	00139000
140000	GO TO 39	00140000
141000	40 OT=1.5707963	00141000
142000	39 CS=DABS(DCOS(OT))	00142000
143000	SS=DABS(DSIN(OT))	00143000
144000	IF(ANA(15).EQ.0.) GO TO 41	00144000
145000	IF(BTA(15).EQ.0.) GO TO 42	00145000
146000	S(15)=OT*(BTA(15)+CS*DABS(ANA(15))/ANA(15))	00146000
147000	BT(15)=OT*(BTA(15)+SS*DABS(BTA(15))/BTA(15))	00147000
148000	GO TO 29	00148000
149000	41 S(15)=0.	00149000

150000	ST(15)=CF*PI*GNA(15)+DABS(CHA(15))/PI*G(15)	00150000
151000	GO TO 29	00151000
152000	42 S(15)=CF*PI*NA(15)+DABS(GNA(15))/GNA(15)	00152000
153000	ST(15)=0.	00153000
154000	29 CONTINUE	00154000
155000	DO 31 IS=1,L	00155000
156000	RR(15)=0.	00156000
157000	DO 32 IT=1,L	00157000
158000	RR(15)=(S(IT)+ST(IT))*RNP(IT,IS)+NA(IT)+RR(15)	00158000
159000	32 CONTINUE	00159000
160000	31 CONTINUE	00160000
161000	CALL STOR (RC,RR,L,RO)	00161000
162000	NN=0	00162000
163000	DO 70 IS=1,L	00163000
164000	OR=(FA(15)-RR(15))	00164000
165000	ORABS=DABS(OR)	00165000
166000	IF(ORABS.LT.0.01) GO TO 70	00166000
167000	71 NN=NN+1	00167000
168000	70 CONTINUE	00168000
169000	DO 50 IS=1,L	00169000
170000	FA(15)=(RR(15)+FA(15))*S	00170000
171000	CA PRINT 37,IS,FA(15)	00171000
172000	50 CONTINUE	00172000
173000	IF(NN.LE.0) GO TO 72	00173000
174000	IF(K.LT.100) GO TO 33	00174000
175000	72 DO 34 IT=1,L	00175000
176000	I=UB(IT,1)	00176000
177000	J=UB(IT,2)	00177000
178000	F(I,J)=FA(IT)	00178000
179000	F(J,I)=F(I,J)	00179000

180000	34 CONTINUE	00180000
181000	DO 35 I=1,N	00181000
182000	ANCO(I)=0.	00182000
183000	TAC(I)=0.	00183000
184000	DO 36 R=1,RC	00184000
185000	RRI=(ALFACR)-ALFAC(I)/Z.	00185000
186000	TF(RRI,DR,0.0) GO TO 36	00186000
187000	ANCO(I)=ANCO(I)+RRI*(DABS(RRI))	00187000
188000	TAC(I)=TAC(I)+RRI*(DABS(RRI)+DABS(RRI)/RRI	00188000
189000	36 CONTINUE	00189000
190000	35 CONTINUE	00190000
190500	PRINT 20,K	00190500
191000	DO 38 N=1,NC	00191000
192000	PRINT 20,RP,N,ANCO(N),TAC(N)	00192000
193000	38 CONTINUE	00193000
194000	12 FORMAT(5X,"I=",15,2X,"J=",15,2X,"FC(I,J)=",E12.5,2X,	00194000
195000	"R=",15,2X,"N=",15,2X,"FR(N,N)=",E12.5,2X,"FA(I5)=",E12.5)	00195000
196000	13 FORMAT(5X,"I=",15,2X,"NO(I)=",E12.5,2X,"TA(I)=",E12.5,	00196000
197000	*2X,"R=",15,2X,"TOR(N)=",E12.5,2X,"TR(N)=",E12.5)	00197000
198000	20 FORMAT(5X,"RP=",15,2X,"N=",15,2X,"TOR(N)=",E12.5,2X,"TR(N)=",	00198000
199000	*E12.5)	00199000
200000	37 FORMAT(5X,"I5=",15,2X,"TAC(I5)=",E12.5)	00200000
201000	45 FORMAT(5X,"I5=",15,2X,"IT=",15,2X,"ANCO(I5,IT)=",E12.5,2X,"BT(I5	00201000
202000	*,IT)=",E12.5,2X,"R=",15,2X,"N=",15,2X,"ANP(I5,IT)=",E12.5)	00202000
203000	57 FORMAT(5X,"I5=",15,2X,"R=",15,2X,"D=",15,2X,"NC=",15)	00203000
204000	58 FORMAT(5X,"I=",15,2X,"R(I)=",F7.3)	00204000
205000	59 FORMAT(5X,"I=",15,2X,"R=",15,2X,"NFA(I5)=",F5.3)	00205000
206000	61 FORMAT(5X," ")	00206000
206500	90 FORMAT(5X,"D=",15)	00206500
207000	GO TO EXIT	00207000

208000	END	00208000
209000	SUBROUTINE SIBUL (A, RDEL, IRO)	00209000
210000	DIMENSION IROW(75), JCOL(25)	00210000
211000	DOUBLE PRECISION A(25, 25), PIVOT, RB(25), RA(25, 25)	00211000
212000	DETER=1.	00212000
213000	MAX=L+1	00213000
214000	DO 10 I=1,L	00214000
215000	A(I, MAX)=RB(I)	00215000
216000	10 CONTINUE	00216000
217000	DO 18 K=1,L	00217000
218000	KMI=K-1	00218000
219000	PIVOT=0.	00219000
220000	DO 11 I=1,L	00220000
221000	DO 11 J=1,L	00221000
222000	IF(K.EQ.1) GO TO 9	00222000
223000	DO 8 ISCAN=1, KMI	00223000
224000	DO 8 JSCAN=1, KMI	00224000
225000	IF(I.EQ.IROW(ISCAN)) GO TO 11	00225000
226000	IF(J.EQ.JCOL(JSCAN)) GO TO 11	00226000
227000	8 CONTINUE	00227000
228000	9 IF(DABS(A(I, J)).LE.DABS(PIVOT)) GO TO 11	00228000
229000	PIVOT=A(I, J)	00229000
230000	IROW(K)=I	00230000
231000	JCOL(K)=J	00231000
232000	11 CONTINUE	00232000
233000	13 IROWK=IROW(K)	00233000
234000	JCOLK=JCOL(K)	00234000
235000	DETER=DETER*PIVOT	00235000
236000	DO 14 J=1, MAX	00236000
237000	14 A(IROWK, J)=A(IROWK, J)/PIVOT	00237000

238000	ACTR=ACTR/JCOLI)A(1,7)PVT	00238000
239000	DO 18 I=1,L	00239000
240000	AIJCK=A(1,1)JCOLI)	00240000
241000	IF(I.LE.IROWI) GO TO 18	00241000
242000	A(1,1)JCOLI)=-AIJCK/PVT	00242000
243000	DO 17 J=1,MAX	00243000
244000	17 IF(J.NE.JCOLI) A(I,J)=A(I,J)-AIJCK*A(IROWI,J)	00244000
245000	18 CONTINUE	00245000
246000	DO 20 I=1,L	00246000
247000	IROWI=IROW(I)	00247000
248000	JCOLI=JCOL(I)	00248000
249000	20 RB(JCOLI)=A(IROWI,MAX)	00249000
250000	DO 21 I=1,L	00250000
251000	DO 21 J=1,L	00251000
252000	A(I,J)=R(A(I,J)	00252000
253000	21 CONTINUE	00253000
254000	RETURN	00254000
255000	END	00255000
256000	SUBROUTINE SYNSOL (RC,RR,L)	00256000
257000	DOUBLE PRECISION RR(I),C,RC(L,L)	00257000
258000	DO 269 M=2,L	00258000
259000	RC(1,M)=RC(1,M)/RC(1,1)	00259000
260000	269 CONTINUE	00260000
261000	RR(1)=RR(1)/RC(1,1)	00261000
262000	DO 270 IJ=2,L	00262000
263000	N=IJ	00263000
264000	DO 271 M=N,L	00264000
265000	DO 272 K=1,N-1	00265000
266000	RC(M,N)=RC(M,N)-RC(M,K)*RC(K,N)	00266000
267000	272 CONTINUE	00267000

268000
269000
270000
271000
272000
273000
274000
275000
276000
277000
278000
279000
280000
281000
282000
283000

271 CONTINUE
DO 273 H=H+1
DO 274 F=1,N-1
RC(N,H)= (RC(N,H)-RC(N,H)+RC(N,H))/RC(N,H)
RR(N)= (RR(N)-RC(N,K)+RR(N))/RC(N,H)
274 CONTINUE
275 CONTINUE
276 CONTINUE
DO 278 I=2,N
F=1
DO 279 H=H+1
RC(N,H)= (RC(N,H)-RC(N,H)+RC(N,H))/RC(N,H)
278 CONTINUE
279 CONTINUE
RETURN
END

00268000
00269000
00270000
00271000
00272000
00273000
00274000
00275000
00276000
00277000
00278000
00279000
00280000
00281000
00282000
00283000

00268000
00269000
00270000
00271000
00272000
00273000
00274000
00275000
00276000
00277000
00278000
00279000
00280000
00281000
00282000
00283000

00268000
00269000
00270000
00271000
00272000
00273000
00274000
00275000
00276000
00277000
00278000
00279000
00280000
00281000
00282000
00283000

00268000
00269000
00270000
00271000
00272000
00273000
00274000
00275000
00276000
00277000
00278000
00279000
00280000
00281000
00282000
00283000

APENDICE E

FORMA DE OBTENER LA CONSTANTE DE FRANJA.

La constante fotoelástica del material utilizado se obtuvo de la siguiente manera:

Un disco hecho del material utilizado (Homalite 100) cuyo diámetro era de 14.49 cm, facilitándose así las lecturas, se cargó diametralmente a compresión, con ayuda de un marco como se muestra en la fig. A.E.1. Colocando el conjunto en el polariscopio es posible leer el número de franjas que aparecen en el centro del disco, bajo el efecto de las cargas.

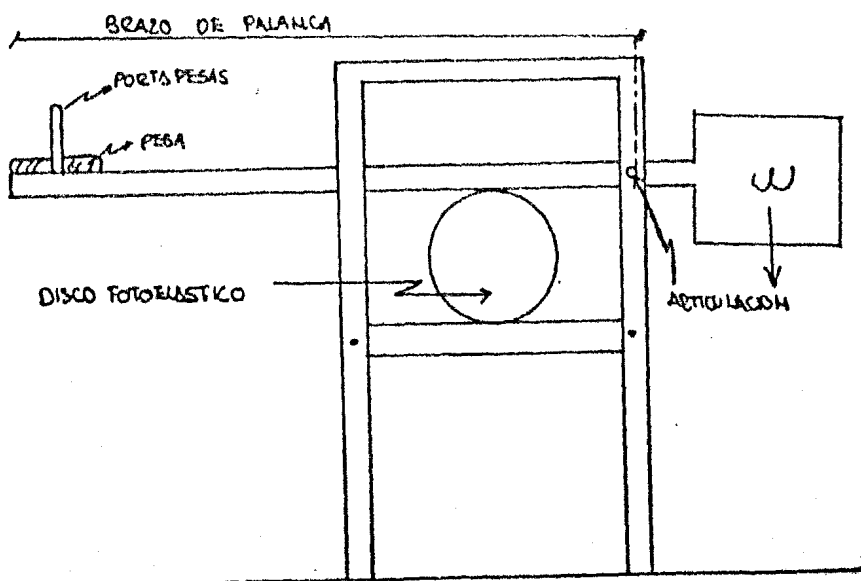


fig. A.E.1.

En este caso el método de Wu (Ref.4) es exacto, ya que se tiene sólo un par de fuerzas exteriores.

Del Apéndice C tomando la ecuación (7'); tenemos que:

$$\pi(CF) \text{ NA(IS)} = (C(\text{IS,IT})) \cdot F(\text{IT}) \dots\dots\dots(7')$$

y que:

$$C(\text{IS,IT}) = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_0}{\overline{MS}^2} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{\overline{NS}^2} + \frac{2 \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos(\varphi_0 + \varphi_1)}{\overline{MS} \cdot \overline{NS}}}$$

Donde:

$$\overline{MS} = \overline{NS} = D/2$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 0^\circ$$

Quedando:

$$C(\text{IS,IT}) = \sqrt{\frac{4}{D^2} + \frac{4}{D^2} + \frac{2}{(D/2)(D/2)}} = \sqrt{\frac{16}{D^2}} = \frac{4}{D}$$

Resultando de la ecuación 7':

$$CF = \frac{4 \cdot F(\text{IT})}{\pi \text{ NA(IS)} \cdot D} \dots\dots\dots (\text{A.E.1})$$

en que:

$F(\text{IT})$ = Es la fuerza aplicada al disco con el marco de carga.

$\text{NA}(\text{IS})$ Es el orden de franja en el centro del disco.

Para obtener la fuerza $F(\text{IT})$ se multiplicó el peso de la pesa colocado en el portapesas por la relación de brazo de palanca 15.807.

El orden de franja NA(1S) se lefa después que la carga actuara durante 2 minutos.

A continuación se da el cálculo de la constante de franja observado para este trabajo apoyándose en la expresión A.E.1.

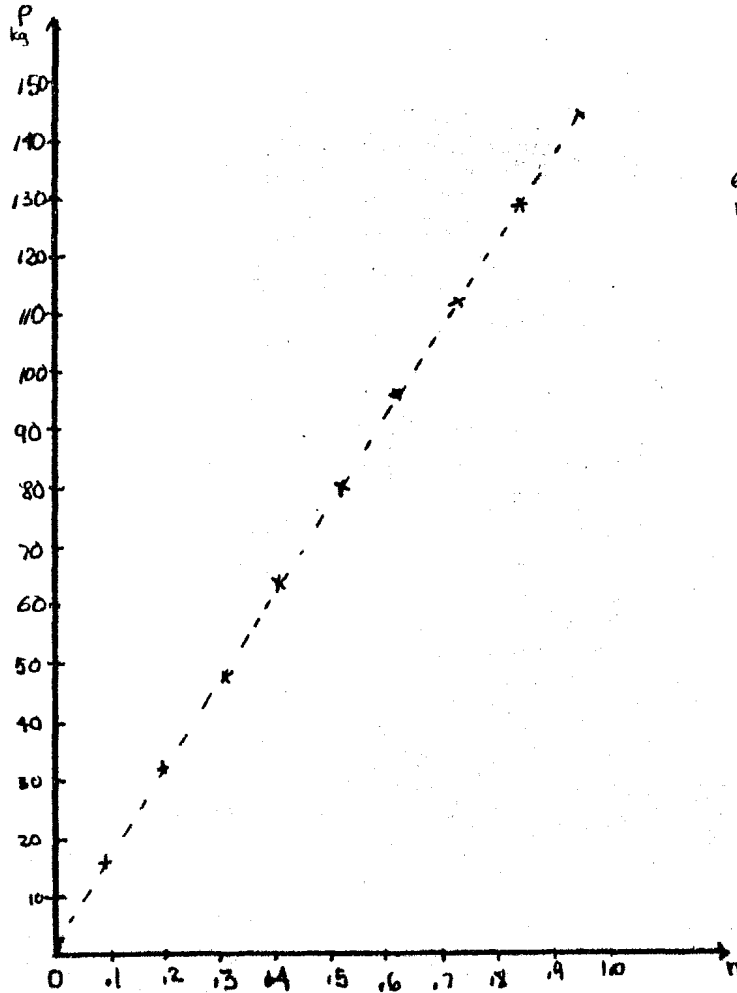
CALIBRACION DEL MATERIAL HOMALITE 100



$$CF = f = \frac{4P}{\pi n D} \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \times \text{franja}$$

espesor = $t = .66 \text{ cm}$

n = orden de franja en el centro del disco



P	n	f
15.77	0.09	15.40
31.70	0.20	13.93
47.62	0.31	13.50
63.52	0.41	13.62
79.49	0.52	13.43
95.42	0.62	13.52
111.34	0.73	13.40
127.22	0.84	13.31
143.22	0.95	13.25

→ NO SE CONSIDERA PARA EL PROMEDIO DE \bar{f}

$$CF = \bar{f} = 13.49 \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}} = \text{franja}$$

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.

1. J.A. Huerta "Estructura y Comportamiento Mecánico de Medios Granulares". Tesis de Licenciatura. UNAM 1978.
2. R. Márquez "Medición de fuerzas de contacto en el modelo fotoelástico de un medio granular". Tesis de Licenciatura. UNAM 1980.
3. J. Alberro "Distribución estadística de las fuerzas de contacto en un Medio Granular". In: Deme Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM 1981.
4. A.J. Durelli, D.Wu "Use of Coefficients of Influence to Solve Some Inverse Problems in Plane Elasticity". Journal of Applied Mechanics, Febrero 1984.
5. Dantu, P. (1968), "Etude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent", Geotechnique, 19, pp 50-55.
6. J. Combon (1957) Resistance des materiaux p 113 Dunod-Paris.
7. Roark "Formulas for Stress and Strain. Third Edition. Mc. Graw-Hill Book Company. (1954).
8. Juárez B. y Rico R. (1980) "Mecánica de Suelos" Tomo I, Tercera edición. Limusa México.
9. Terzaghi y Peck (1980) "Mecánica de Suelos en la Ingeniería práctica". Segunda edición. "El Ateneo". España.
10. Marsal y Reséndiz (1979) "Presas de Tierra y Enrocamiento" Limusa México.
11. Lambe y Whitman (1981) "Mecánica de Suelos" Limusa México.
12. Popov, E. (1976) "Introducción a la Mecánica de Sólidos". Limusa, México.