



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

101

PRESIONES HIDRODINAMICAS GENERADAS POR  
SISMO EN PRESAS CON PARAMENTO NO  
VERTICAL

T E S I S

Que para obtener el Título de

I N G E N I E R O C I V I L

P r e s e n t a

HAN PING HONG

México, D. F.

Mayo de 1984



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

### ABSTRACT

### RESUMEN

1.	INTRODUCCION	1
2.	ANTECEDENTES	3
2.1	<i>El estudio de Westergaard</i>	3
2.2.	<i>Uso de la idea de Von Kármán</i>	5
2.3	<i>Solución con un método aproximado</i>	8
2.4	<i>Solución analítica</i>	9
3.	FORMULACION DEL PROBLEMA	12
3.1	<i>Hipótesis</i>	12
3.2	<i>Ecuación que gobierna el fenómeno</i>	12
3.3	<i>Condiciones de frontera</i>	14
4.	METODO DE SOLUCION	16
5.	RESULTADOS	23
5.1	<i>Condiciones para los cálculos</i>	23
5.2	<i>Cortina con una sola inclinación</i>	24
5.3	<i>Comparación con otros resultados</i>	25
6.	CONCLUSIONES	27

7.	RECONOCIMIENTOS	28
8.	REFERENCIAS	29
	FIGURAS	30
	APENDICE	33

## ABSTRACT

The hydrodynamic pressures on the two-slopes upstream face of a rigid dam are studied in this work for horizontal motion of the dam-reservoir system. An analytical solution is obtained by means of the Schwarz-Christoffel transformation in the complex plane. Some numerical results were obtained which validate the ones obtained with numerical methods.

## RESUMEN

En este trabajo se estudia el problema de presiones hidrodinámicas generadas por el movimiento horizontal de una presa rígida con paramento aguas arriba de dos inclinaciones. Se obtiene una solución analítica mediante el uso de la transformación de Schwarz-Christoffel en el plano complejo. Se obtuvieron algunos resultados numéricos que validan los obtenidos con métodos numéricos.

## 1. INTRODUCCION

En presas construidas en zona sísmica es necesario estudiar el comportamiento dinámico del fluido almacenado ante una excitación sísmica con el objeto de tener diseños óptimos, esto es, abatir los costos y mantener los riesgos en niveles aceptables.

En este trabajo se estudia la presión hidrodinámica generada por sismo en presas con paramento de una o dos inclinaciones. Este tema ya ha sido estudiado por diversos investigadores, en el capítulo 2 se presentan algunos de los resultados obtenidos por ellos, tales como los de Westergaard, los de Yang *et al.*, el método aproximado de Avilés *et al.*, y la solución analítica de Chwang. La formulación se hace en el capítulo 3. Ahí se presentan las hipótesis que se establecen para el proble

ma, la ecuación que gobierna el fenómeno y se definen las condiciones de frontera. En el capítulo 4 se presenta el método de solución y, con base en la teoría de variable compleja, se obtiene una expresión exacta para la presión hidrodinámica (que es función de la geometría de la cortina) generada por aceleración horizontal. Finalmente en el capítulo 5 se presenta el procedimiento para calcular el coeficiente de presión hidrodinámica en función de la altura normalizada, y dos ejemplos. Para estos dos casos se calcula el coeficiente de presión hidrodinamica y se compara con el obtenido con un método numérico. La concordancia es excelente.

Este trabajo fue motivado por la necesidad de validar los resultados obtenidos con métodos aproximados.



## 2. ANTECEDENTES

### 2.1 *El estudio de Westergaard*

En el estudio hecho por Westergaard (1), se supone que los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones de la presa. La cortina se considera con paramento vertical aguas arriba y el fondo horizontal; ambos son infinitamente rígidos.

Con base en la teoría de la elasticidad y usando el principio de D'Alambert, las fuerzas dinámicas que actúan en un elemento diferencial de volúmen pueden expresarse en términos de la presión hidrodinámica  $p$ . Así, se obtiene que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

donde:

$u$  = desplazamiento en la dirección  $x$ ,

$v$  = desplazamiento en la dirección  $y$ , y

$\rho$  = densidad de masa del fluido

Estas ecuaciones representan el equilibrio en el fluido en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente

Debido a que se está estudiando un problema con desplazamientos sólo en el plano  $x$ - $y$ , la ecuación de movimiento en la dirección  $z$  es simplemente  $\partial p / \partial z = 0$ , lo cual indica que  $p$  no varía con dicha coordenada.

La presión  $p$  en las ecs 2.1 y 2.2 se expresa como

$$p = ke \quad (2.3)$$

donde:

$k$  = módulo de elasticidad de volúmen, y

$e$  = cambio volumétrico por unidad de volúmen =  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

Con base en las ecs 2.1, 2.2 y 2.3, Westergaard obtuvo la solu

ción, expresada como la suma de una serie, para líquido compresible e incompresible. Dicha solución da distribuciones para la presión hidrodinámica que pueden aproximarse al cuadrante de una elipse, o mejor a una parábola. Sin embargo, con este mismo método sería muy difícil obtener la solución para la cortina en el caso en que se tengan paramentos inclinados. Esto se debe a que los coeficientes de la serie no tienen expresiones analíticas en este caso.

Muchos autores han discutido la solución de Westergaard. Entre ellos se encuentra Von Kármán (1), quien en su discusión sugiere una idea que permite obtener la presión hidrodinámica bajo la hipótesis de que la cortina tiene paramento inclinado. Posteriormente se discutirá con más detalle la solución propuesta por Von Kármán. Aquí debe mencionarse que las diferencias entre las soluciones de Von Kármán y de Westergaard son menores de cinco por ciento.

## 2.2 *Uso de la idea de Von Kármán*

C. Y. Yang, *et al* (2) propusieron las siguientes hipótesis para la cortina con paramento inclinado.

- a) La cortina es infinitamente rígida e impermeable
- b) El problema se considera bidimensional y el vaso es de extensión seminfinite
- c) La excitación es producida por un movimiento horizontal

- d) El agua es incompresible y los desplazamientos son pequeños comparados con la dimensión de la cortina
- e) Los efectos de la superficie del agua (oleaje) son despreciables.

Utilizando estas hipótesis y la idea sugerida por Von Kármán, que consiste en considerar una parte de agua en reposo y otra parte adherida a la cortina, se establece como incógnita la curva que limita ambas regiones. Esta curva está definida por  $x = b(y)$ . Se consideran las siguientes condiciones:

- 1) Continuidad del fluido

$$y a_x = b a_y$$

donde:

$y$  = altura medida desde el fondo del vaso,  $0 \leq y \leq h$

$h$  = altura sumergida total de la cortina

$b$  = ancho en la altura  $y$  de la porción de agua adherida a la cortina

$a$  = aceleración en la dirección  $x$ ,  $y$

$a_y$  = aceleración en la dirección  $y$ .

- 2) Equilibrio entre la presión y la fuerza de masa horizontal

$$p = \rho b a_x \xi \quad (2.5)$$

donde:

$p$  = presión hidrodinámica sobre la presa

$a_{x_f}$  = aceleración horizontal

$\rho$  = densidad de masa de agua

3) Equilibrio entre la presión y la fuerza de masa vertical;

$$p \cot \theta - \frac{d}{dy} (pb) = \rho b a_y \quad (2.6)$$

donde:

$\theta$  = ángulo entre la superficie del fondo y la superficie de la cortina sumergida

Usando las ecs 2.4 y 2.6 se puede obtener que

$$C = (v^2 + \alpha v + 2)^{-1/2} \exp \left| -\frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2v + \alpha}{\beta} \right) \right| \quad (2.7)$$

donde

$$\alpha = \cot \theta,$$

$$\beta = (8 - \alpha)^{1/2}$$

$$v = \frac{y}{h} \cdot \frac{1}{C}, \quad y$$

$$C = p / \rho h a_x = \text{coeficiente de presión}$$

Para calcular la presión hidrodinámica, se aplica la ec 2.7 y la definición de  $v$ . En el caso de que  $\theta = 90^\circ$  se lle

ga a la solución de Von Kármán (1), dada por

$$C = (v^2 + 2)^{-1/2} \quad (2.8)$$

donde  $v$  está definida anteriormente.

### 2.3 Solución con un método aproximado

En el artículo de J. Avilés *et al.* (3) se presentaron dos métodos de frontera y uno de dominio para valuar presiones hidrodinámicas en presas con paramento no vertical aguas arriba sometidas a excitación horizontal. Las hipótesis son las mismas que consideraron C. Y. Yang *et al.* (2).

Uno de los métodos de frontera es el de Trefftz el cual es un procedimiento de mínimos cuadrados. La solución se genera mediante una serie de funciones que satisfacen la ecuación que gobierna el problema así como las condiciones de frontera excepto en el paramento. Los coeficientes indeterminados de dicha serie se determinan haciendo que la integral del error cuadrático en las condiciones de frontera tomada a lo largo del paramento mojado sea mínima.

El otro método de frontera aplicado es el de las ecuaciones integrales de frontera. Con este método la solución se genera mediante la transformación de la ecuación de dominio que gobierna el problema en una ecuación integral de frontera emplean

do el teorema de la divergencia y la solución fundamental, función de Green, del problema.

El método de dominio es el de los elementos finitos. Se fundamenta en la extremización de la funcional de energía asociada a las ecuaciones que gobiernan el problema. Al proponer una solución global formada por aproximaciones locales sobre elementos, la extremización conduce a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas cuya solución se obtiene con la ayuda de un ordenador digital.

Los resultados que se obtuvieron para las presiones al compararse entre sí, dan diferencias que son prácticamente nulas. Debe mencionarse que en la comparación de esos resultados con la solución experimental (3,4) hay discrepancias que, aparentemente se deben a errores experimentales.

#### 2.4 *Solución analítica*

La solución analítica para una presa con paramento inclinado aguas arriba fue desarrollada por A.T. Chwang (5). A continuación se presentan las hipótesis y la forma de desarrollar dicha solución.

Si se considera que el agua es incompresible, entonces, la ecuación que gobierna el problema de presión hidrodinámica

se escribe como

$$\nabla^2 p = 0$$

donde  $p$  es la presión hidrodinámica.

Si se aplica la transformación de Schwarz-Christoffel a la geometría de la cortina, se transforma el dominio del problema a un semiplano superior, y es posible construir una función tal que

$$\delta = p + iq \quad (2.10)$$

donde  $q$  es la función conjugada compleja de la función  $p$  e  $i = \sqrt{-1}$ .

Utilizando la teoría de Cauchy-Riemann se obtienen las condiciones de frontera para el plano transformado. Por lo tanto, el problema de presión hidrodinámica puede resolverse en dicho plano y se obtiene que

$$p(\xi) = \rho a_0 h \left[ \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\xi}{\xi + \tan^2 \theta} \right)^\alpha \frac{\theta d\theta}{\sin \theta \cos \theta} - c \tan \alpha \pi + \frac{c \cos \alpha \pi}{h} S(\xi) \right] \quad (2.11)$$

donde



$$S(\xi) = \frac{h}{\pi} \int_{\xi}^1 \left( \frac{t}{1-t} \right)^{\alpha} \frac{dt}{t}$$

$h$  = altura total de la cortina sumergida aguas arriba y,

$\alpha\pi$  = ángulo formado por el plano horizontal y el plano inclinado de la cortina aguas arriba

Si se definen

$$C = p/\rho a_0 h = \text{coeficiente de presión} \quad (2.12)$$

$$y/h = S \operatorname{sen} \alpha\pi/h = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_{\xi}^1 \left( \frac{t}{1-t} \right)^{\alpha} \frac{dt}{t} \text{ altura normalizada} \quad (2.13)$$

y dado que  $\xi \in (0, 1)$  entonces, utilizando las expresiones anteriores, se obtiene una curva de coeficiente de presión  $vA$ , altura normalizada.

En este trabajo se desarrollará una solución para encontrar la presión hidrodinámica, en una presa con paramento inclinado y quebrado en la cortina. Para ello, se utiliza el método empleado en esta sección.

### 3. FORMULACION DEL PROBLEMA

#### 3.1 *Hipótesis*

Las hipótesis que se consideran en la formulación del problema son las siguientes:

- a) El problema se considera bidimensional y el vaso de extensión seminfinita
- b) El líquido es irrotacional sin viscosidad e incompresible
- c) No se generan ondas de gravedad en la superficie libre de líquido
- d) La cortina y el fondo del vaso son infinitamente rígidos

#### 3.2 *Ecuación que gobierna el fenómeno*

Se considera que la presión en el interior de un fluido

es función de la posición y del tiempo, esto es

$$p = p(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

donde  $x$ ,  $y$ , y  $z$  son las coordenadas cartesianas y  $t$  = tiempo.

En ausencia de fuerzas de cuerpo, se puede demostrar (6) que las ecuaciones de equilibrio están dadas por la siguiente ecuación vectorial

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = - \text{grad } p \quad (3.2)$$

donde  $\rho$  = densidad de masa del fluido

$\bar{u}$  = vector de desplazamiento con los componentes  $u$ ,  $v$  y  $w$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente y

$\text{grad}$  = operador gradiente

Supóngase por ahora que el fluido es compresible, entonces, si se acepta que existe una condición de linealidad entre presión y cambio de volumen, puede escribirse que

$$p = -\lambda \text{div } \bar{u}$$

donde  $\lambda$  = constante proporcional al módulo de compresibilidad,  
y

$\text{div}$  = operador divergencia

Aplicando el operador divergencia a la ec 3.2 se tiene

que

$$\operatorname{div} \left( \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) = - \operatorname{div} (\operatorname{grad} p) \quad (3.4)$$

Se sabe que  $\operatorname{div} (\operatorname{grad} \cdot) = \nabla^2 \cdot$ , donde  $\nabla^2 =$  operador Laplaciano; considerando que la densidad de fluido es constante y teniendo en cuenta las ecs 3.3 y 3.4 se obtiene que

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

donde  $C = \sqrt{\lambda/\rho} =$  velocidad de propagación del sonido en el fluido. Si ahora se toma en cuenta la hipótesis que establece que el fluido es incompresible, se tiene que

$$\nabla^2 p = 0 \quad (3.6)$$

siendo esta la ecuación que gobierna el fenómeno.

### 3.3 Condiciones de frontera

Se ha aceptado que se desprecian las ondas de gravedad en la superficie libre del agua, entonces, en la superficie libre la presión hidrodinámica debe ser nula, esto es

$$p = 0 \quad (3.7)$$

En la interfase con el sólido, la ec 3.2 y la hipótesis de líquido irrotacional y sin viscosidad permiten escribir que

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n \quad (3.8)$$

donde  $n$  = coordenada normal a la interfase y

$a_n$  = aceleración normal a la interfase

#### 4. METODO DE SOLUCION

Considérese la presa mostrada en la fig 1. Con base en la transformación de Schwarz-Christoffel (ver Apéndice), se transforma el plano  $Z$  de esta figura en el plano  $\zeta$  que se muestra en la fig 2. Dicha transformación está dada por

$$Z = \alpha \int_0^{\zeta} (\zeta+1)^{-\theta_1} \zeta^{\theta_1+\theta_3-1} (\zeta-b)^{-\theta_3} d\zeta + \beta \quad (4.1)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_3$  son los coeficientes del ángulo que se muestra en la fig 1 y  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $b$  son constantes que se determinan usando las propiedades geométricas; estas son

$$Z(A) = \ell_1 e^{i\theta_1\pi} \quad \ell_1 = |AC| = \text{distancia de A a C} \quad (4.2a)$$

$$Z(C) = 0 \quad (4.2b)$$

$$Z(B) = \ell_2 e^{-i\theta_3\pi} \quad \ell_2 = |BC| = \text{distancia de B a C} \quad (4.2c)$$

donde A, B y C son los puntos que se muestran en la fig 1. Así, de la ec 4.1 se tiene que

$$Z(A) = \alpha \int_0^{-1} (\xi+1)^{-\theta_1} \xi^{\theta_1+\theta_3-1} (\xi-b)^{-\theta_3} d\xi + \beta = \ell_1 e^{i\pi\theta_1} \quad (4.3a)$$

$$Z(C) = \alpha \int_0^b (\xi+1)^{-\theta_1} \xi^{\theta_1+\theta_3+1} (\xi-b)^{-\theta_3} d\xi + \beta = 0 \quad (4.3b)$$

$$Z(B) = \alpha \int_0^b (\xi+1)^{-\theta_1} \xi^{\theta_1+\theta_3+1} (\xi-b)^{-\theta_3} d\xi + \beta = \ell_2 e^{-i\pi\theta_3} \quad (4.3c)$$

Haciendo algunos cambios en los límites de las integrales se obtiene

$$\ell_1 = \alpha \int_0^1 t^{\theta_1+\theta_3-1} (1-t)^{-\theta_3} dt \quad (4.4a)$$

$$\ell_2 = \alpha \int_0^1 t^{\theta_1+\theta_3-1} (1-t)^{-\theta_1} dt \quad (4.4b)$$

$$\beta = 0 \quad (4.4c)$$

Si se toma  $\ell_1 = n \ell_2$ , donde  $n =$  constante de proporcionalidad de longitud  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , y se consideran las ecs 4.4 es posible calcular  $b$  en función de  $n$ . Para ello de la ec 4.4a menos la ec 4.4b al multiplicar por un factor  $n$ , se obtiene que

$$\int_0^1 t^{\theta_1+\theta_3-1} \left[ (1-t)^{-\theta_1} (b+t)^{-\theta_3} - n(1-t)^{-\theta_3} (b+t)^{-\theta_1} \right] dt = 0 \quad (4.5)$$

Utilizando la ecuación anterior puede calcularse numéricamente el valor  $b$ . Conocida  $b$ , su valor se sustituye en la ec 4.4a o en la ec 4.4b para determinar  $\alpha$ , que es proporcional a  $l_1$  o a  $l_2$ .

Como se presentó en el capítulo anterior, la ecuación que gobierna el fenómeno (ec 3.6) es la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 p = 0$ , si se introduce una función compleja-conjugada  $q$  respecto a  $p$ , se puede construir la función analítica (ver Apéndice)  $f$  tal que

$$f(z) = p + iq \quad (4.6)$$

la que también es analítica

La superficie libre (EA) corresponde a la parte del eje real comprendido entre  $-\infty$  y  $-1$ , en el plano  $\zeta$ , allí la presión es nula. En el fondo del vaso (BF), correspondiente a  $\xi > b$  en el eje real del plano  $\zeta$ , se tiene  $\partial p / \partial n = 0$ , (solamente se está considerando excitación horizontal), según la condición de Cauchy-Riemann (ver Apéndice), lo cual implica que  $q$  es constante; sin perder generalidad se supondrá que  $q = 0$ . Por contraste, en la superficie inclinada de la cortina  $\partial p / \partial n$  tiene un valor constante dado por  $-\rho a_0 \delta \sin \theta_1 \pi$  y que es igual a  $-\rho a_0 \delta \sin \theta_1 \pi$  y  $-\rho a_0 \delta \sin \theta_3 \pi$  en AC y CB respectivamente. Ahora, si  $S$  representa la distancia desde el punto B en la base de la presa, la condición de Cauchy-Riemann (ver Apéndice) nos da  $q = -\rho a_0 S \delta \sin \theta_1 \pi$



a lo largo de la superficie inclinada sumergida, lo cual corresponde al segmento lineal  $-1 < \zeta < b$  en el plano  $\zeta$ , en el eje real. Por lo tanto a lo largo del eje real en el plano  $\zeta$ , las condiciones de frontera son:

$$\operatorname{Re} f(\zeta) = 0 \quad -\infty < \zeta < -1 \quad (4.7a)$$

$$\operatorname{Im} f(\zeta) = -\rho a_0 S \operatorname{sen} \theta \pi \quad -1 < \zeta < b \quad (4.7b)$$

$$\operatorname{Im} f(\zeta) = 0 \quad b < \zeta < \infty \quad (4.7c)$$

donde  $\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Im}$  representan la parte real y la parte imaginaria de la función respectivamente.

Con las ecs 4.7 se establece la condición de frontera mixta para  $f(\zeta)$  mediante

$$q(\zeta) = (\zeta+1)^{-1/2} f(\zeta) \quad (4.8)$$

entonces, para la función  $g(\zeta)$  se tiene una condición no mixta

$$\operatorname{Im} g(\zeta) = \begin{cases} -\rho a_0 S (\zeta+1)^{-1/2} \operatorname{sen} \theta \pi & -1 < \zeta < b \\ 0 & -\infty < \zeta < -1 \text{ y } b < \zeta < \infty \end{cases} \quad (4.9)$$

donde  $\zeta$  toma valores en el eje real.

Considerando ahora la fórmula integral de Poisson

$$g(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } g(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi \quad (4.10)$$

y sustituyendo las ecs 4.9 y 4.10 en la ec 4.8, se tiene que

$$f(\zeta) = \frac{(\zeta+1)^{1/2}}{\pi} \int_{-1}^b \frac{-\rho a_0 S \text{ sen } \theta \pi}{(\xi+1)^{1/2} (\xi-\zeta)} d\xi \quad (4.11)$$

Con esta expresión puede calcularse la presión hidrodinámica, ya que la parte real de la función  $f$  es dicha presión. Antes de hacerlo se analizará la influencia de la variable  $S$ . En la fig 3 se aprecia que  $S$  representa el vector dirigido del punto  $B$  a cualquier punto sobre la superficie de la cortina sumergida, esto es

$$\bar{S} = Z - Z(B) = \alpha \int_b^{\xi} (\zeta+1)^{-\theta_1} \zeta^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (\zeta-b)^{-\theta_3} d\zeta \quad (4.12)$$

Como se está considerando que  $\zeta$  toma los valores en el eje real en el intervalo  $0 < \xi < b$ , entonces, de la ec 4.12 se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \alpha \int_b^{\xi} (t+1)^{-\theta_1} t^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (t-b)^{-\theta_3} dt \\ &= \alpha \int_{\xi}^b (t+1)^{-\theta_1} t^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (b-t)^{-\theta_3} dt e^{i(1-\theta_3)\pi} \quad (4.13) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $S$  para  $\xi \in (0, b)$  y de la ec 4.13 resulta ser

$$S = \bar{S} \cdot \bar{n}_3 = \alpha \int_{\xi}^b (1+t)^{-\theta_1} t^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} dt, \xi \in (0, b) \quad (4.14)$$

si  $\xi \in (-1, 0)$ , de la ec 4.12 se tiene

$$S = \alpha \int_{\xi}^0 (1+t)^{-\theta_1} (-t)^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} dt + \ell_2 e^{i\pi(1-\theta_3)} \quad (4.15)$$

pero de acuerdo con la geometría del problema (fig 3):

$$\ell_2 e^{i\pi(1-\theta_3)} = |BB''| e^{i\pi\theta_1} + |BB'| e^{-i\pi(\theta_1-1/2)} \quad (4.16)$$

donde  $|BB''| = \ell_2 \operatorname{sen}(\theta_3 + \beta_1)\pi$ ,  $|BB'| = \ell_2 \operatorname{cos}(\theta_3 + \beta_1)\pi$  y  $\beta_1$  se muestra en la fig 3; además, se puede ver que  $|BB'| e^{-i\pi(\theta_1-1/2)}$  tiene proyección nula en la dirección del vector  $e^{i\pi\theta_1}$ , por lo tanto si  $\xi \in (-1, 0)$ , de las ecs 4.15 y 4.16 resulta que

$$S = \alpha \int_{\xi}^b (1+t)^{-\theta_1} (-t)^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} dt + |BB''|, \xi \in (-1, 0) \quad (4.17)$$

sustituyendo las ecs 4.14 y 4.17 en la ec 4.11 se obtiene

$$\begin{aligned} f(\zeta) = & \frac{1}{\pi} (-\rho a_0 \operatorname{sen} \theta_1 \pi |BB''|) \operatorname{Ln} \left| \frac{1 - \sqrt{\zeta+1}}{1 + \sqrt{\zeta+1}} \right| \\ & + \frac{-\rho a_0 \operatorname{sen} \theta_1 \pi}{\pi} \alpha \int_{-1}^0 (1+t)^{-\theta_1} t^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{t+1} + \sqrt{\zeta+1}} \right| dt \\ & + \frac{-\rho a_0 \operatorname{sen} \theta_3 \pi}{\pi} \alpha \int_0^b (1+t)^{-\theta_1} t^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{t+1} + \sqrt{\zeta+1}} \right| dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

La presión hidrodinámica sobre la presa está dada por la parte real de  $f(\zeta)$  tal que  $-1 < \zeta < b$ , con  $\zeta$  en el eje real. Así se obtiene

$$\begin{aligned}
 p(\xi) = & \frac{\rho_2 \rho a_0}{\pi} [\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_3 - 1/2)\pi \operatorname{sen} \theta_1 \pi - \operatorname{sen} \theta_3 \pi] \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sqrt{\xi+1}}{1 - \sqrt{\xi+1}} \right| \\
 & + \frac{\rho a_0 \operatorname{sen} \theta_1 \pi}{\pi} \alpha \int_{-1}^0 (1+t)^{-\theta_1} (-t)^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (b-t)^{-\theta_3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{t+1} + \sqrt{\xi+1}}{\sqrt{t+1} - \sqrt{\xi+1}} \right| dt \\
 & + \frac{\rho a_0 \operatorname{sen} \theta_3 \pi}{\pi} \alpha \int_0^b (1+t)^{-\theta_1} t^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (b-t)^{-\theta_3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{t+1} + \sqrt{\xi+1}}{\sqrt{t+1} - \sqrt{\xi+1}} \right| dt
 \end{aligned}$$

(4.19)

Esta ecuación es la solución formal del problema, sin embargo, presenta dificultades de cálculo numérico, pues las integrales tienen puntos singulares. A pesar de ello es posible la integración numérica.



## 5. RESULTADOS

### 5.1 Condiciones para los cálculos

En el capítulo anterior se presentó la solución del problema (ec 4.19). En los resultados que se presentan en las figs 4 y 5 el eje vertical representa el cociente  $y/h$  donde  $y$  es la altura que se esta considerando y  $h$  es la altura total de la cortina aguas arriba, ambas se miden desde el fondo de la presa; en el eje horizontal se representa el coeficiente de presión hidrodinámica ( $c = p/h\rho a_0$ ). Usando las ecs 4.14 y 4.17 se tiene

$$y(\xi)/h = \frac{\alpha \operatorname{sen} \theta_3 \pi}{h} \int_0^b (t+1)^{-\theta_1} t^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (b-t)^{-\theta_3} dt, \quad \xi \in (0, b) \quad (5.1a)$$

$$y(\xi)/h = \frac{\alpha \operatorname{sen} \theta_1 \pi}{h} \int_{\xi}^0 (t+1)^{-\theta_1} (-t)^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} dt + \frac{\ell_2 \operatorname{sen} \theta_3 \pi}{h},$$

$$\xi \in (-1, 0) \quad (5.1b)$$

es claro que  $h = \ell_1 \operatorname{sen} \theta_1 \pi + \ell_2 \operatorname{sen} \theta_3 \pi = \ell_1 (\operatorname{sen} \theta_1 \pi + n \operatorname{sen} \theta_3 \pi)$ .  
 Con base en la ec 4.19, el coeficiente de presión hidrodinámica resulta ser

$$C(\xi) = \frac{p(\xi)}{\rho \alpha_0 h} = \frac{\ell_2 \rho \alpha_0}{\pi h} \left[ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_3 - \frac{1}{2})\pi \operatorname{sen} \theta_1 \pi - \operatorname{sen} \theta_3 \pi \right] \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 + \xi}}{1 - \sqrt{1 + \xi}} \right|$$

$$+ \frac{\alpha \rho \alpha_0 \operatorname{sen} \theta_1 \pi}{\pi h} \int_{-1}^0 (t+1)^{-\theta_1} (-t)^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{1+\xi}} \right| dt$$

$$+ \frac{\alpha \rho \alpha_0 \operatorname{sen} \theta_3 \pi}{\pi h} \int_0^b (t-1)^{-\theta_1} t^{\theta_1+\theta_3-1} (b-t)^{-\theta_3} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{1+\xi}} \right| dt$$

(5.2)

## 5.2 Cortina con una sola inclinación

Si se considera que la distancia del punto C al punto B es cero (fig 1) y que el ángulo  $\theta_3$  también es nulo, entonces,  $b=0$ . Por lo tanto las ecuaciones anteriores quedan como

$$y(\xi)/h = \frac{\operatorname{sen} \theta_1 \pi}{\pi} \int_{\xi}^0 \left( \frac{1+t}{-t} \right)^{1-\theta_1} \frac{dt}{1+t} \quad \xi \in (-1, 0) \quad (5.3a)$$

$$C(\xi) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1+\xi}{1+\xi+\tan^2\theta} \right)^{1-\theta} \frac{\theta d\theta}{\text{sen } \theta \text{ cos } \theta} + c \tan \theta_1 \pi - \frac{\text{cos } \theta_1 \pi}{h} s(\xi) \quad (5.3b)$$

donde

$$s(\xi) = \frac{h}{\pi} \int_{\xi}^0 \left( \frac{1+t}{-t} \right)^{1-\theta_1} \frac{dt}{1+t} . \text{ Los valores } y/h \text{ vs } c \text{ se}$$

muestran en la fig 4 (5) para seis diferentes inclinaciones.

### 5.3 Comparación con otros resultados

Para algunas geometrías de la presa es posible comparar los resultados de este trabajo con los que se obtuvieron con otros métodos. En los cálculos se sigue el siguiente procedimiento:

- 1) De los datos de geometría tenemos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $n$ , sustituyéndolos en la ec 4.5 se obtiene  $b$
- 2) Conocida  $b$ , su valor se sustituye en la ec 4.4a para determinar  $\alpha$  que es proporcional a  $\ell_1$
- 3) Calcúlese  $h = \ell_1 (\text{sen } \theta_1 \pi + n \text{ sen } \theta_3 \pi)$ , que también es proporcional a  $\ell_1$
- 4) Dado que  $\xi \in (-1, b)$  y usando las ecs 5.1a ó 5.1b y 5.2 se obtiene la curva de altura normalizada vs el coeficiente de presión hidrodinámica.

Usando el procedimiento descrito se analizaron dos ejem

plos en los que  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_3 = 63.5^\circ$ ,  $n = 0.4462$  y  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_3 = 76.0^\circ$ ,  $n = 0.7258$  respectivamente. Se obtuvieron las curvas del coeficiente de presión respectivas; ambas se presentan en la fig 5. Comparadas con las obtenidas por J. Avilés *et al.* (3), se ve que el acuerdo es excelente.



## 6. CONCLUSIONES

Usando el método de análisis de variables complejas (transformación de Schwarz-Christoffel) puede obtenerse una expresión analítica exacta para el coeficiente de presión para presas inclinadas con paramento quebrado. Pero como las integrales no pueden expresarse en forma explícita, la solución no es aplicable para fines prácticos, ya que para valuar las integrales se requiere mucho tiempo de la computadora digital. Sin embargo la solución exacta permite validar resultados obtenidos con métodos numéricos.

## 7. RECONOCIMIENTOS

Se agradece a F. J. Sánchez-Sesma la dirección de este trabajo así como su continuo aliento y colaboración. Se agradecen a A. Arias y G. A. Ayala sus comentarios y sugerencias y a R. Gómez y J. Avilés la lectura crítica del manuscrito. La cuidadosa transcripción del texto y ecuaciones se debe a C. Juárez. Este trabajo se desarrolló en el Instituto de Ingeniería dentro del Proyecto 3750.

## 8. REFERENCIAS

1. Westergaard, M H., "Water pressures on dams during earthquakes", *Trans, ASCE*, 98 (1933), 418-472
2. Yang, C. Y., Chen, S. S., Wang, H. y Sánchez-Sesma, F.J., "Hydrodynamic pressure on dams with in inclined face", *Proc ASCE*, agosto, 1979
3. Aviles, J, Sánchez-Sesma, F. J. y Ayala, G.A., "Presiones hidrodinámica en presas con paramento no vertical". *Memorias VI Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Puebla, México, noviembre 1983, 291-299
4. Zangar, C.N., "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake effects", *Bureau of Reclamation, Engineering Monograph*, Denver, Colorado, No. 11, 1952
5. Chwang, T.A., "Hydrodynamic pressure on sloping dams during earthquakes", *J. of fluid mechanics*, Vol, 87 No. 2 (1978) 343-348

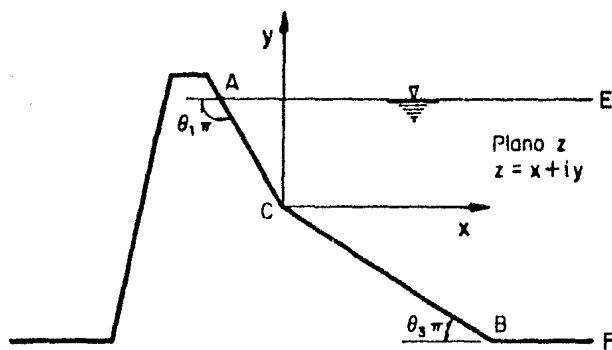


Fig. 1 Presa rígida con paramento inclinado y quebrado aguas arriba

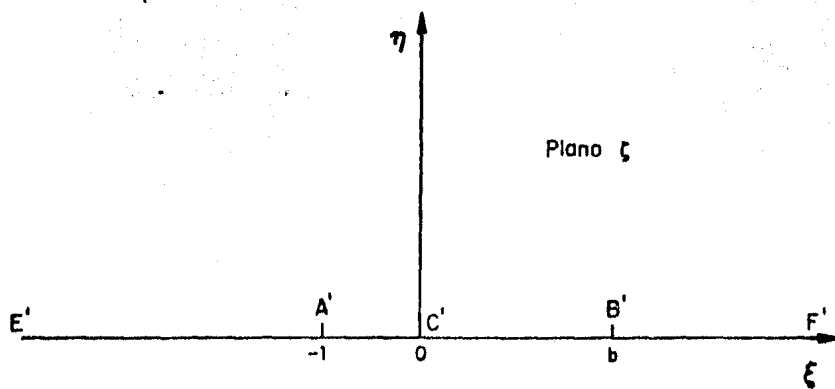


Fig. 2 Frontera del dominio del problema transformado con la transformación de Schwarz-Christoffel

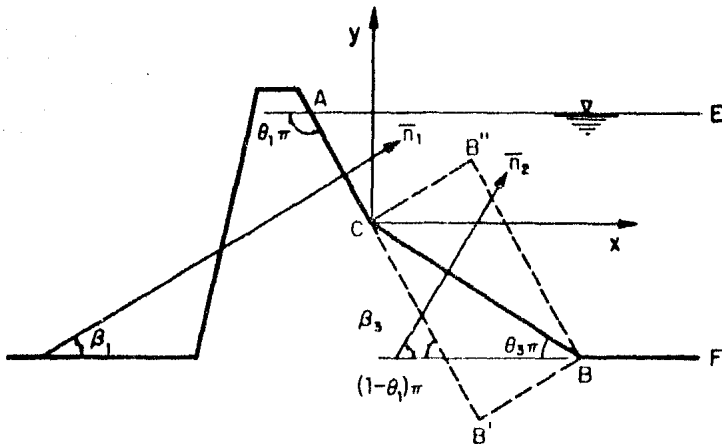


Fig. 3 Algunos aspectos geométricos del problema

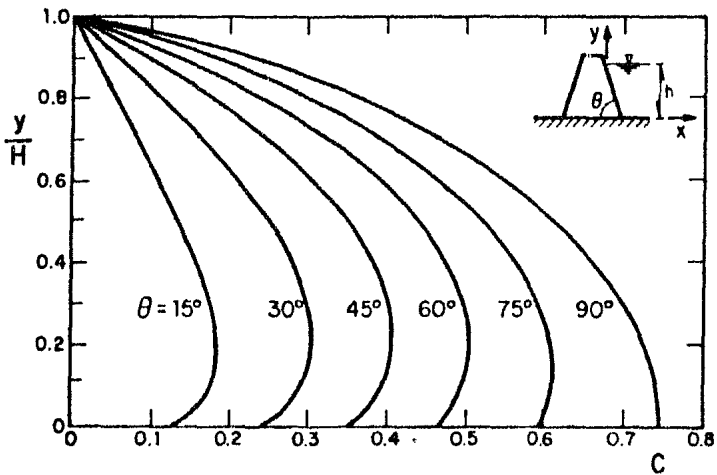


Fig. 4 Coeficiente de presión hidrodinámica para paramento inclinado (5)

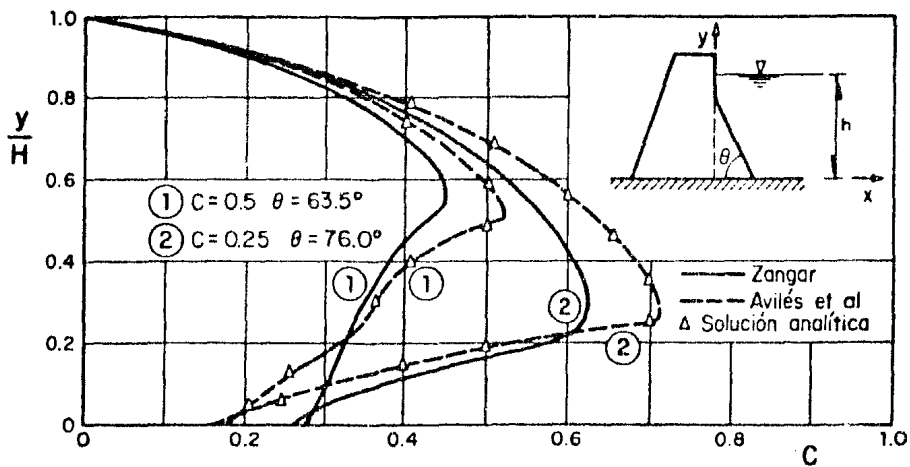


Fig. 5 Coeficientes de presión hidrodinámica para paramento quebrado  
 Comparación con una solución experimental y la solución numérica de Avilés *et al.* (3)

## A P E N D I C E

## 1. FUNCIONES ANALITICAS Y CONDICION DE CAUCHY-RIEMANN

## Definición de función analítica

Sea  $f(z)$  una función de variable compleja, si la derivada  $f'(z)$  existe en todos los puntos  $z$  de una región  $R$ , entonces se dice que  $f(z)$  es analítica en  $R$  y nos referiremos a ella como una función analítica en  $R$ .

## Condición de Cauchy-Riemann

Una condición necesaria para que  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  sea analítica en una región  $R$  es que,  $u$  y  $v$  satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicha región, estas son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (A1)$$

Además, si las derivadas parciales en la ec A1 son continuas en  $R$ , entonces, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones suficientes para que  $f(z)$  sea analítica en  $R$ .

## Demostración del teorema anterior

a) Necesidad: Para que  $f(z)$  sea analítica, el límite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[ \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} - \frac{u(x, y) + i v(x, y)}{\Delta x + i \Delta y} \right] \quad (A2)$$

debe existir independientemente de la manera como  $\Delta z$  ( $\Delta x$  y  $\Delta y$ ) tiende a cero.

Se consideran dos aproximaciones posibles

1)  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ . En este caso la ec A2 se convierte en

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (A3)$$

2)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ . En este caso la ec A2 se convierte en

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i \Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (A4)$$

Las dos aproximaciones anteriores no garantizan que  $f(z)$  sea analítica, a menos que esos dos límites sean iguales, esto es:



$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \circ \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Estas relaciones representan una condición necesaria para que  $f(z)$  sea analítica.

b) Suficiencia: Puesto que  $\partial u/\partial x$  y  $\partial u/\partial y$  son continuas, entonces se puede escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon_2\right)\Delta y = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \end{aligned} \quad (A6)$$

donde, si  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  implica  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ .

Similarmente, puesto que  $\partial v/\partial x$  y  $\partial v/\partial y$  son continuas, se tiene que

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_2 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (A7)$$

donde, si  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  implica  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ . Entonces de acuerdo con las ecs A6 y A7, se tiene que

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \epsilon\Delta x + \eta\Delta y \quad (A8)$$

donde  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \rightarrow 0$  y  $\eta = \eta_1 + i\eta_2 \rightarrow 0$ , cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Empleando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\varepsilon \Delta x + i \eta \Delta y) \quad (A9)$$

la cual, cuando  $\Delta z \rightarrow 0$  conduce a la siguiente relación

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Por lo anterior, la derivada de  $w$  existe y además es única, es decir  $f(z)$  es analítica en  $R$ .

## 2. TRANSFORMACION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

### 1) Transformación

El conjunto de ecuaciones

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

(A.11)

define, en general, una transformación o aplicación la cual establece una correspondencia entre los puntos de plano  $x-y$  y el plano  $u-v$ . Estas ecuaciones se conocen en la literatura como ecuaciones de transformación.

## 2) La transformación de Schwarz-Christoffel

Considérese un polígono (fig A-1) en el plano  $w$  con vértices en  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  y  $w_1, w_2, \dots, w_n$  se aplican respectivamente en los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sobre el eje real del plano  $Z$  (fig A-2).

Una transformación que aplica el interior  $R$  del polígono del plano  $w$  sobre el semi-plano superior  $R^+$  del plano  $Z$  y la frontera del polígono sobre el eje real, está dada por

$$\frac{dw}{dz} = A (Z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1} \dots (Z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1} \quad (A12)$$

o

$$w = A \int (Z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1} \dots (Z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1} + B \quad (A13)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes complejas.

Para aplicar la transformación de Schwarz-Christoffel, se

debe tener en cuenta lo siguiente:

- a) Tres de los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se puede elegir arbitrariamente.
- b) Las constantes  $A$  y  $B$  determinan el tamaño, orientación y posición del polígono
- c) Es conveniente escoger un punto, digamos  $x_n$ , en el infinito, en cuyo caso el último factor de la ec A13 donde intervienen  $x_n$  no desaparece.
- d) Un polígono abierto en el infinito se puede considerar como caso límite de un polígono cerrado.

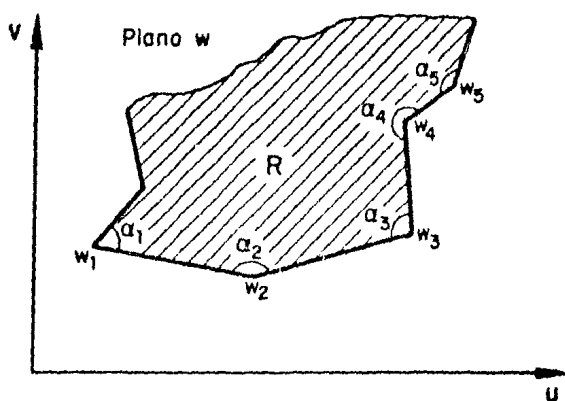


Fig. A-1 Polígono de la región  $R$  en el plano complejo  $w$ .

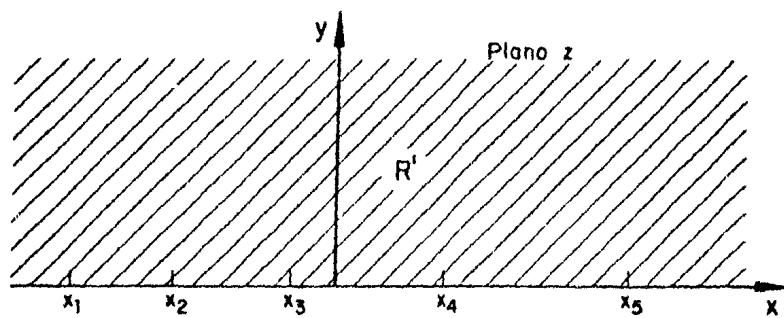


Fig. A-2 Región transformada  $R'$  en el semiplano  $z$  superior