



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

29
40

**ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A
COMPRESION AXIAL**

Tesis Profesional

**Que para obtener el Título de
INGENIERO CIVIL**

p r e s e n t a

ISMAEL CERVANTES PEREZ

México, D. F.

1984



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	página
OBJETIVOS	IV
INTRODUCCION	V
1. Introducción al Problema de Estabilidad	1
1.1 Equilibrio	2
1.1.1 Equilibrio Estable	2
1.1.2 Equilibrio Indiferente	3
1.1.3 Estado Inestable o de Desequilibrio	4
1.2 Conceptos de Carga Crítica	5
2. Carga Crítica	7
2.1 Carga Crítica en Columnas Elásticas Sujetas a Carga Axial	24
2.2 Efecto de las Condiciones de Apoyo	36
2.2.1 Longitud Efectiva de Pandeo	38
2.2.2 Longitudes Efectivas en Columnas de Estructuras Reales	38
3. Fórmula de Euler	49
3.1 Limitaciones de la Fórmula de Euler	55
3.2 Generalización para el Rango Inelástico	63
4. Diseño de Columnas Sujetas a Compresión Axial	70
4.1 Dimensionamiento y Revisión de Columnas de Acero	78
4.2 Dimensionamiento y Revisión de Columnas de Madera	107
CONCLUSIONES	124
REFERENCIAS	127

OBJETIVOS

Conocer el comportamiento real de los elementos sujetos a carga axial,-- basado en los resultados empíricos y del análisis matemático, y contar con una metodología para su dimensionamiento y revisión.

INTRODUCCION

Tomando en consideración tanto los factores que interviene en el fenómeno de estabilidad como los conceptos que serán útiles para este estudio; el tratamiento matemático y las pruebas de laboratorio conducen directamente a la fórmula de Euler, considerando sus limitaciones y su generalización para el rango inelástico.

La fórmula de Euler es una expresión que representa la carga axial que provoca la deformación de un elemento (el eje longitudinal de éste deja de ser recto), produciendo inestabilidad en él; a ésta carga se le llama carga crítica de Euler. Posteriormente se establecen las metodologías para el dimensionamiento y revisión de elementos de acero y madera sujetos a carga de compresión axial.

Los métodos utilizados son: El CRC (Column Research Council) y AISC (American Institute of Steel Construction) para el acero, y para la madera el reglamento de construcciones para el Distrito Federal.

INTRODUCCION AL PROBLEMA DE ESTABILIDAD

Una pieza corta que se somete a una carga de compresión axial, fallará cuando la carga aplicada sea igual al valor correspondiente a la resistencia última del material, o sea, f_y en el acero y f'_c en el concreto.

Por analogía se podría pensar que este comportamiento de una pieza corta, sería aplicable a todas las columnas, sin importar su longitud pero, como se sabe esto no ocurre.

Cuando un elemento largo se carga axialmente, y esta carga se incrementa paulatinamente sin impacto, llega un momento en que la pieza se flexiona y de inmediato sucede el colapso. Por otra parte, si se compara la carga que produjo la falla, con la carga de resistencia última del material de la pieza, se observa que la primera es mucho menor, de lo que se deduce que el problema no es de resistencia, sino de estabilidad.

Este fenómeno se conoce como pandeo; a la carga con la que se inicia la falla se designa como carga crítica, (P_{cr}); y a la falla en sí se le dá el nombre de falla por pandeo.

1.1 EQUILIBRIO

Es el estado en que se encuentra un elemento dentro del sistema al cual corresponde y puede ser: Equilibrio Estable, Inestable y Estado Inestable o Desequilibrio.

1.1.1 EQUILIBRIO ESTABLE

Si la carga P de la fig. 1.1 es menor que la carga crítica, P_{cr} ; teóricamente no habrá pandeo, lo que quiere decir que $\delta = 0$. Si se aplica una carga horizontal Q , la columna se deforma un valor δ el cual retorna a $\delta = 0$ cuando cesa la aplicación de la carga Q .

En estas condiciones la columna se encuentra en estado de equilibrio estable, como se muestra en la figura 1.1

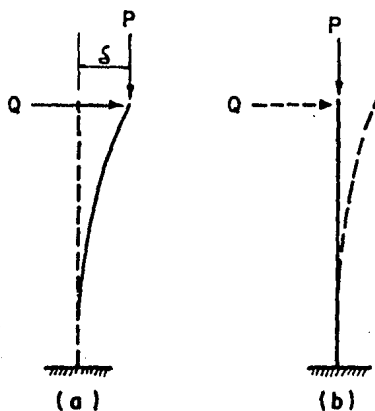


Fig. 1.1 Condición de equilibrio estable
 a)- Deformación horizontal, δ , debida a Q .
 b)- δ , desaparece cuando se retira Q .

Si $Q \neq 0$
 $0 < P < P_{cr}$
 entonces $\delta \neq 0$

y al suprimir las cargas:

$$Q = 0$$

$$0 < P < P_{cr}$$

entonces $\xi = 0$

La columna recupera su posición original vertical de eje recto. Su representación gráfica será:



1.1.2 EQUILIBRIO INDIFERENTE

Si la carga P , es igual a la carga crítica, P_{cr} , o ligeramente menor (figura 1.2), la columna no se colapsa aún si se aplica una carga horizontal Q , se produce una deformación ξ que no se recupera si se retira la carga horizontal Q . Bajo estas condiciones se dice que la columna está en equilibrio indiferente.

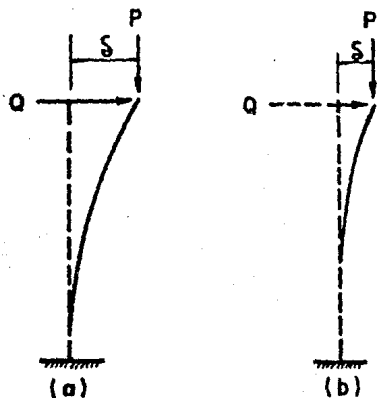


Fig. 1.2 Condición de equilibrio indiferente
a)-Deformación horizontal, ξ , debida a Q .
b)- ξ , permanece aún después de retirar Q .

Si $P \doteq P_{cr}$
 $Q \neq 0$;
 entonces $\delta \neq 0$
 y al suprimir la carga Q :
 $P \doteq P_{cr}$
 $Q = 0$;
 entonces $\delta \neq 0$

La representación gráfica de este estado de equilibrio es:



1.1.3 ESTADO INESTABLE O DE DESEQUILIBRIO

Si la carga, P , excede el valor de la carga crítica (P_{cr}), la flecha crece indefinidamente, $\delta \rightarrow \infty$, independientemente de la aplicación de la carga Q , entonces la columna falla por efecto de pandeo, como se muestra en la figura 1.3

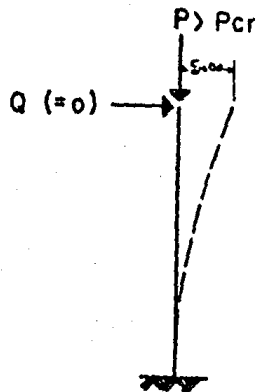


Fig. 1.3 Estado inestable o de desequilibrio

Si $P \geq P_{cr}$
 $Q = (\neq 0)$
 entonces $\xi \rightarrow \infty$

Como $\xi \rightarrow \infty$ se provocará el colapso del elemento, aún sin que exista la carga horizontal Q .

Su representación gráfica es:



1.2 CONCEPTOS DE CARGA CRITICA

La fuerza axial P , aplicada a una columna (independientemente del sistema de apoyos), que provoca su pandeo (figura 1.4), se le llama carga crítica de Euler, P_{cr} (referencia 1.1). Dicha carga es importante conocerla para el buen diseño y revisión de estos elementos estructurales, ya que forman parte importante de cualquier estructura.

Si dentro de una estructura se encuentra una columna mal diseñada (escasa), aunque el resto de los elementos que conforman a aquella tengan buen diseño, estarán sujetos a esfuerzos que no habían sido considerados y muy probablemente fallará en conjunto. La importancia de las columnas, como elementos estructurales, hace interesante su estudio dentro de la mecánica de materiales. Por ello existen institutos dedicados específicamente a la investigación de columnas (referencia 1.2).

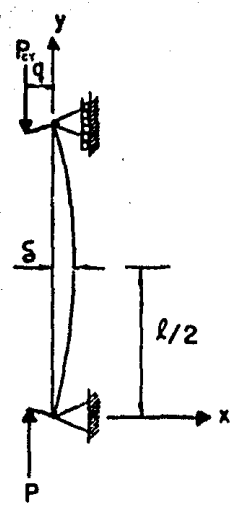


Fig. 1.4 Column doblemente articulada con flecha máxima al centro del claro.

CARGA CRITICA

Para obtener la carga crítica, se considera una columna ideal, como se muestra en la figura 2.1, la cual está articulada en sus extremos, bajo una carga excéntrica. La excentricidad, q , se mide desde el centroide de la sección transversal al eje de acción de las fuerzas axiales. La carga crítica que se obtenga, será representativa únicamente para las columnas que tengan las condiciones de apoyo antes mencionadas. Para miembros en condiciones de apoyo diferentes, se les tratará en el subcapítulo 2.1 .

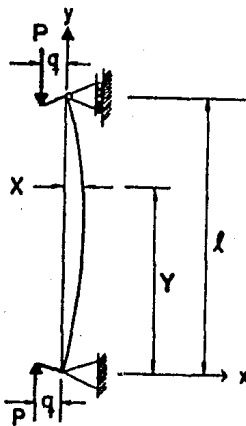


Fig. 2.1 Columna con fuerza excéntrica.

Donde:

- l , es la longitud de la columna,
- P , es la carga actuante y
- q , es la excentricidad de la carga.

El momento flexionante en la columna a la distancia "Y" del extremo inferior es:

$$M = Pq + P X$$

siendo X la flecha lateral de la columna en el mismo sentido de q

$$M = P (q + X) \quad (2.1)$$

y la ecuación diferencial de la elástica (referencia 2.1) es de la forma

$$X'' = - \frac{M}{E I} \quad (2.2)$$

Donde:

- E, es el módulo de elasticidad del material
- I, es el momento de inercia de la sección transversal

si se sustituye la ecuación (2.1) en (2.2), se tiene:

$$X'' = - \frac{P (q + X)}{E I}$$

se arregla la siguiente ecuación diferencial:

$$X'' = - \frac{Pq}{EI} - \frac{PX}{EI}$$

$$X'' + \frac{P}{EI} X = - \frac{P}{EI} q \quad (2.3)$$

Como se conoce tanto la carga a la que está sujeta la columna como el material de ésta y su sección transversal, resulta que; $P = \text{cte.}$, $E = \text{cte.}$ e $I = \text{cte.}$

Si se llama:

$$K^2 = \frac{P}{EI} = \text{cte.} \quad (2.4)$$

y se sustituye en la ecuación (2.3), entonces:

$$X'' + K^2 X = - K^2 q \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y no homogénea, cuya solución representa la curva elástica de la columna.

La solución general de la ecuación (2.5) se compone de dos partes: la primera es la solución de la ecuación homogénea correspondiente, que se obtiene sustituyendo por cero el segundo miembro; y la segunda, es la solución particular que corresponde al verdadero valor del segundo miembro. Para resolver la ecuación (2.5) se empleará el método de coeficientes indeterminados (referencia 2.2).

a) Solución de la ecuación homogénea.

De la ecuación (2.5), la ecuación homogénea es:

$$X'' + K^2 X = 0$$

que puede representarse mediante operadores por la siguiente expresión:

$$(aD^2 + bD^1 + cD^0) X = 0$$

en la que

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = K^2$$

por lo tanto

$$(D^2 + K^2) X = 0 \tag{2.6}$$

la ecuación algebraica característica de (2.6) es:

$$D^2 + K^2 = 0$$

de donde

$$D^2 = -K^2$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 0 + Ki$$

$$D_2 = 0 - Ki$$

por lo tanto su solución es de la forma:

$$X_h = KY e^{(0 + Ki) Y} + KY e^{(0 - Ki) Y}$$

si se representa la ecuación anterior en la forma polar de Euler se obtiene:

$$X_h = C_1 e^{oY} \text{Cos } KY + C_2 e^{oY} \text{Sen } KY$$

por lo que la solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$X_h = C_1 \text{Cos } KY + C_2 \text{Sen } KY \quad (2.7)$$

b) Determinación de la solución particular

La ecuación (2.5) es de la forma

$$P(D) X = Q(X) \quad (2.8)$$

Donde:

$$P(D) X = (D^2 + K^2) X \quad (a)$$

$$Q(X) = -K^2 q \quad (b)$$

Si se forman los conjuntos S , linealmente independientes de la ecuación (b) se tiene:

$$S = \{ 0 \}$$

por lo que la solución particular es de la forma

$$-K^2 q = S e^{oY} \quad (2.9)$$

y su representación mediante el operador $f(D)$ es

$$(D - 0) X = 0 \quad (2.10)$$

si se aplica la ecuación (2.10) a (2.5) se obtiene

$$(D - 0)(D^2 X + K^2 D^0 X) = 0 \quad (2.11)$$

$$(D - 0)(D^2 + K^2) X = 0 \quad (2.12)$$

su ecuación característica es

$$(D - 0)(D^2 + K^2) = 0 \quad (2.13)$$

se encuentra que sus raíces son:

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = 0 + Ki$$

$$D_3 = 0 - Ki$$

por lo que la solución general es de la forma

$$X_G = S e^{oY} + C_1 \text{Cos} KY + C_2 \text{Sen} KY \quad (2.14)$$

la solución particular es

$$X_p = X_G - X_h$$

por lo que:

$$X_p = S e^{oY}$$

$$X_p = S \quad (2.15)$$

para evaluar la solución particular, se sustituye la ecuación (2.15) en (2.5)

$$D^2 S + K^2 D^0 S = -K^2 q$$

$$K^2 S = -K^2 q$$

$$S = -q$$

y entonces

$$X_p = -q \quad (2.16)$$

por lo que, la solución general de la ecuación (2.5) es:

$$X_G = C_1 \cos KY + C_2 \operatorname{Sen} KY - q \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) es la ecuación de la curva elástica.

- Determinación de las constantes C_1 y C_2 .

Para conocer las constantes C_1 y C_2 , podemos recurrir a las siguientes condiciones de frontera:

1) Si $Y = 0$, se tiene $X = 0$

2) Si $Y = l$, se tiene $X = 0$

De la primera condición, en la ecuación (2.17) se obtiene:

$$0 = C_1 + 0 - q$$

$$C_1 = q \quad (2.18)$$

De la segunda condición, en la ecuación (2.17) se obtiene:

$$0 = q \cos Kl + C_2 \operatorname{Sen} Kl - q$$

$$C_2 \operatorname{Sen} Kl = q - q \cos Kl$$

$$C_2 = \frac{q - q \cos Kl}{\operatorname{Sen} Kl}$$

$$C_2 = \frac{q (1 - \cos Kl)}{\operatorname{Sen} Kl} \quad (2.19)$$

La expresión trigonométrica

$$\frac{1 - \cos Kl}{\operatorname{Sen} Kl}$$

es de la forma:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{Sen} \alpha}$$

en que:

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{Sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{Sen} \alpha = 2 \operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

entonces;

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{Sen} \alpha} = \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2}$$

por lo tanto:

$$C_2 = q \operatorname{Tg} \frac{Kl}{2} \quad (2.20)$$

La solución general queda:

$$X_G = q \left[\operatorname{Cos} KY + \operatorname{Tg} \frac{Kl}{2} \operatorname{Sen} KY - 1 \right] \quad (2.21)$$

Por las condiciones de apoyo y de carga, se sabe que la flecha máxima, ζ , se presenta en el punto medio, donde $Y = l/2$; y ζ se obtiene sustituyendo $Y = l/2$ en la ecuación (2.21)

$$\zeta = q \left[\operatorname{Cos} \frac{Kl}{2} + \operatorname{Tg} \frac{Kl}{2} \operatorname{Sen} \frac{Kl}{2} - 1 \right]$$

se ve que la expresión trigonométrica

$$\operatorname{Cos} \frac{Kl}{2} + \operatorname{Tg} \frac{Kl}{2} \operatorname{Sen} \frac{Kl}{2}$$

es de la forma:

$$\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Tg} \alpha \operatorname{Sen} \alpha = \operatorname{Cos} \alpha + \frac{\operatorname{Sen}^2 \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}$$

$$\frac{\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Sen}^2 \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{Cos} \alpha}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} \alpha} = \operatorname{Sec} \alpha$$

entonces:

$$\text{Sec } \alpha = \text{Sec } \frac{Kl}{2}$$

por lo tanto

$$\delta = q \left(\text{Sec } \frac{Kl}{2} - 1 \right) \quad (2.22)$$

se observa en la ecuación (2.22) que:

- 1) $\delta = 0$ si $K = 0$, o sea cuando $P = 0$,
- 2) $\delta = 0$ si $q = 0$.
- 3) si $\frac{Kl}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$; entonces $\text{Sec } \frac{Kl}{2} \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow \infty$, cuya condición es la crítica.

Ahora, si:

$$\frac{Kl}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$Kl = \pi$$

si se eleva al cuadrado la expresión anterior

$$K^2 l^2 = \pi^2$$

$$K^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

de la ecuación (2.4) se sabe que:

$$K^2 = \frac{P}{E I}$$

asi:

$$\frac{P}{E I} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

por lo que

$$P = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

Como estamos en la condición crítica, el valor anterior de P es precisamente la P_{cr} (Carga Crítica de Euler).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \quad (2.23)$$

Aún cuando $q = 0$ (excentricidad nula) pero $Kl/2 \rightarrow \pi/2$, la $\text{Sec } Kl/2 \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\xi \rightarrow \infty$, por lo que el valor de P_{cr} dado en la ecuación (2.23) es cierto también en la columna con carga axial.

Veamos, en un ejemplo, el comportamiento de la columna mostrada en la figura 2.2 en una gráfica (ξ, P), considerando 3 excentricidades diferentes q_1, q_2 y q_3 , siendo:

$$q_1 < q_2 < q_3$$

$$q_1 = 0.0001 \text{ cm}$$

$$q_2 = 0.0005 \text{ cm}$$

$$q_3 = 0.001 \text{ cm}$$

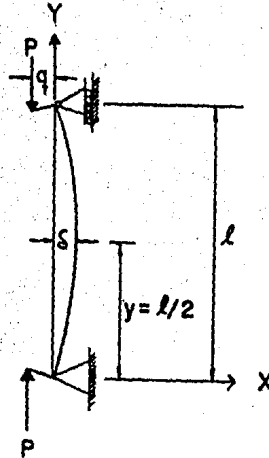
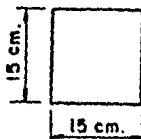


Fig. 2.2 Columna con fuerza excéntrica y flecha máxima al centro del claro.

Sección Transversal



$$A = 225 \text{ cm}^2$$

$$l = 600 \text{ cm.}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

P es variable

Solución.

Para el análisis se requiere de la ecuación (2.22), que da la flecha, δ , en función de la carga P. La carga P se hará variar para cada excentricidad dada en el rango de valores de cero ($P = 0$), al valor crítico (P_{cr}). Para definir el límite superior del rango se emplea la ecuación (2.23).

Se sabe que el momento de inercia para la sección es:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$I = \frac{15(15)^3}{12}$$

$$I = 4218.80 \text{ cm}^4$$

La carga crítica para la columna esta dada por la ecuación (2.23):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$P_{cr} = \frac{(3.1415)^2 (2)(10^6)(4218.80)}{(600)^2}$$

$$P_{cr} = 231.32 \text{ Tn}$$

Los valores de δ y P para las excentricidades dadas se muestran en la tabla 2.1

P (ton.)	Valores de q y δ , en cm.			
	$q=0$ δ	$q=0.0001$ δ	$q=0.0005$ δ	$q=0.001$ δ
10	0	0.000006	0.000028	0.000056
60	0	0.000044	0.000217	0.000435
100	0	0.000095	0.000476	0.000952
160	0	0.000283	0.001413	0.002830
200	0	0.000809	0.004046	0.008092
220	0	0.002470	0.012350	0.024700
$P_{cr}=231.32$	$\delta \rightarrow \infty$	$\delta \rightarrow \infty$	$\delta \rightarrow \infty$	$\delta \rightarrow \infty$

Tabla 2.1 Valores de la flecha, δ , para diferentes valores de carga, P , y excentricidad q .

Si se representan los valores de la tabla anterior, (obtenidos de la ecuación (2.22)), en una gráfica $\delta - P$ como se muestra en la figura 2.3, se observa que:

si en la ecuación (2.22), P es igual a cero ($P = 0$),

entonces $K = 0$, y por lo tanto $\text{Sec } K l / 2 = 1$, por lo que la flecha, δ , es igual a cero ($\delta = 0$).

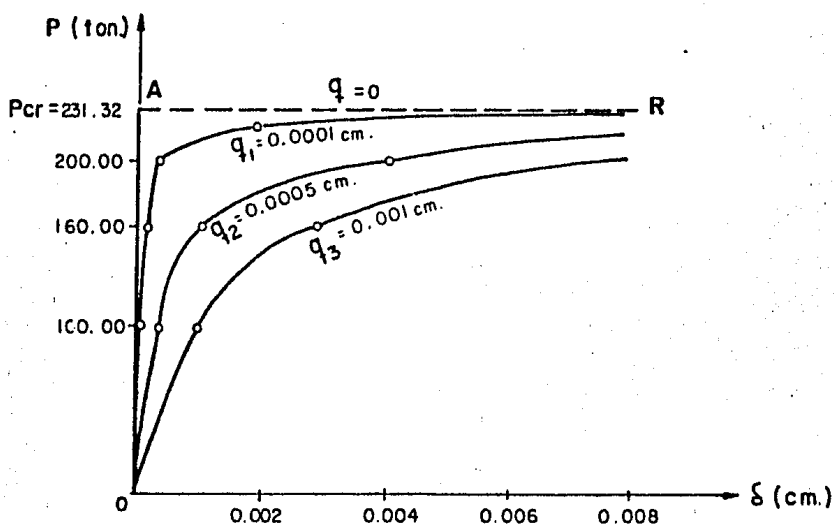


Fig. 2.3 Gráfico $\delta - P$ de la columna de la fig. 2.2 cargada excéntricamente

Por el trazo de las curvas correspondientes a q_1, q_2 y q_3 se denota que la flecha, δ , aumenta sin límite a medida que la carga P , tiende al valor crítico (P_{cr}).

Esto mismo sucede cuando se obtiene la carga crítica para el caso en que la excentricidad sea cero, $q = 0$. Esto

es, la flecha, δ , es cero para todos los valores de $Kl/2$ menores a $\pi/2$, lo cual significa que la flecha δ permanece nula para cualquier valor de P menor que P_{cr} . Pero si $P = P_{cr}$, entonces $Kl/2 = \pi/2$ y la flecha resulta indefinida y puede tomar cualquier valor; la representación de estas condiciones se encuentra en la figura 2.3 por las rectas OA - AR para $q = 0$.

Como no hay proporcionalidad entre la carga P y la flecha que produce, y aunque las flechas permanezcan pequeñas y el material siga siendo linealmente elástico, no es aplicable el principio de superposición, ya que si se considera que las cargas indicadas en la figura 2.2 son equivalentes a cargas axialmente aplicadas, P , mas pares, Pq , que actúan en los extremos. Si únicamente actuaran los pares Pq , producirían flechas que se pueden hallar de la forma típica para la flexión de vigas (referencia 2.3). En este caso, la presencia de pequeñas flechas en las vigas no cambia la acción de las cargas, y los momentos flexionantes en ella se pueden calcular sin la consideración de la flecha o deflexión de la viga. Pero, cuando además existe una carga axial sobre la columna, la flecha producida por los pares Pq hacen que la fuerza axial tenga una acción flexionante además de un efecto de compresión. Tal acción flexionante de la fuerza axial produce flechas adicionales que a su vez influyen en los momentos de flexión. Así pues, el momento flexionante no se puede hallar independientemente de la flecha, y existirá una relación no lineal entre la carga axial y la deflexión.

Con lo visto anteriormente es posible obtener el momento flexionante máximo de la columna cargada excéntricamente de la figura 2.2 :

$$M \text{ máx.} = P (q + \delta) \quad (2.24)$$

que será al centro de la columna, y por la ecuación (2.22):

$$\delta = q (\text{Sec } K l / 2 - 1)$$

si se sustituye la ecuación (2.22) en la ecuación (2.24)

$$M \text{ máx.} = P (q + q \text{ Sec } K l / 2 - q)$$

y por lo tanto el momento flexionante máximo es:

$$M \text{ máx.} = P q \text{ Sec } K l / 2 \quad (2.25)$$

Si se hace:

$$\frac{M \text{ máx.}}{P q} = \text{Sec } K l / 2$$

y se grafican los valores de $(P, M \text{ máx.}/P q)$ mostrados en la tabla 2.2 (para $q = 0.0001 \text{ cm}$) se obtiene la gráfica que se

P (ton.)	para $q = 0.0001 \text{ cm.}$				
	$K l / 2$ (rad)	$\text{sec } K l / 2$	$P q$ Kg · cm.	M máx. Kg · cm.	$\frac{M \text{ máx.}}{P q}$
10	0.104π	1.06	1.00	1.06	1.06
60	0.255π	1.44	6.00	8.61	1.44
100	0.329π	1.95	10.00	19.52	1.95
160	0.416π	3.83	16.00	61.22	3.82
200	0.465π	9.09	20.00	181.84	9.09
220	0.488π	25.70	22.00	565.38	25.70
$P_{cr} = 231.32$	$\pi / 2$	$\text{sec } K l / 2 \rightarrow \infty$	23.13	$M \text{ máx.} \rightarrow \infty$	$\frac{M \text{ máx.}}{P q} \rightarrow \infty$

Tabla 2.2 Valores del momento flexionante máximo en la columna entre el momento actuante ($M \text{ máx.}/P q$), para una excentricidad dada ($q = 0.0001 \text{ cm.}$)

muestra en la figura 2.4

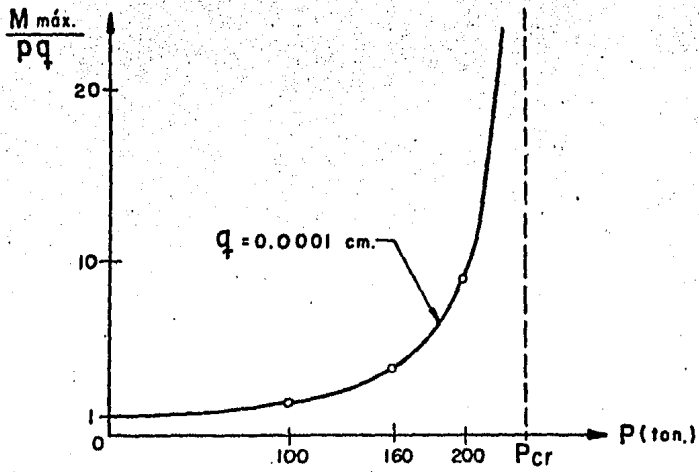


Fig. 2.4 Gráfica ($P, M_{\text{máx.}}/pq$) de la columna de la Fig 2.2 con una excentricidad $q = 0.0001 \text{ cm.}$

$$\text{Sec } K l/2 = \frac{1}{\text{Cos } K l/2}$$

Si;

$$K = 0;$$

$$\text{Cos } 0^\circ = 1,$$

entonces;

$$\text{Sec } K l/2 = 1$$

De ésta se observa que para valores muy pequeños de P , el momento flexionante máximo es $P q$, cuyo valor es el momento de flexión en la columna cuando se desprecia el efecto de las flechas. Conforme P aumenta, el momento flexionante crece en forma no lineal y llega a ser muy grande cuando P se acerca a su valor crítico (P_{cr}).

2.1 CARGA CRITICA EN COLUMNAS ELASTICAS SUJETAS A CARGA AXIAL

En este subcapítulo se obtendrá la carga crítica para las columnas fundamentales, como son la columna: cantiliver, doblemente restringida contra el giro en los extremos, empotrada en uno de los extremos y articulada en el otro, y doblemente articulada que se estudió en el capítulo 2. El análisis considera las siguientes hipótesis:

- a) El material del cual se constituye el elemento se comporta elásticamente.
- b) El elemento es totalmente homogéneo.
- c) El sistema de apoyos es ideal.

- Carga crítica de una columna empotrada en su base y libre en su extremo superior (columna cantiliver).

En la figura 2.5 se muestra la columna cantiliver ideal que servirá para la deducción de la carga crítica.

El momento flexionante en la columna a la distancia Y del extremo inferior es

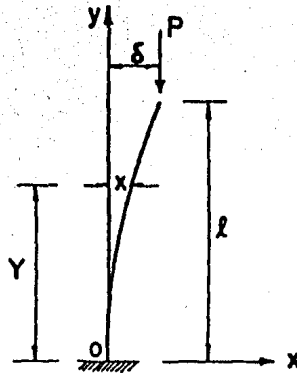


Fig. 2.5 Columna ideal empotrada en la base y libre en su extremo superior.

$$Mx = -P(\delta - x) \quad (2.26)$$

y la ecuación diferencial de la elástica esta dada por (2.2)

$$x'' = \frac{d^2 x}{dY^2} = -\frac{M}{EI}$$

Sustituyendo (2.26) en (2.2), se tiene:

$$x'' = -\frac{-P(\delta - x)}{EI} \quad (2.27)$$

$$x'' = \frac{P}{EI} \delta - \frac{P}{EI} x \quad (2.28)$$

$$x'' + \frac{P}{EI} x = \frac{P}{EI} \delta \quad (2.29)$$

llamando nuevamente a la igualdad (2.4)

$$K^2 = \frac{P}{E I}$$

para facilitar el tratamiento matemático, y sustituyendo la ecuación (2.4) en (2.29) se tiene:

$$X'' + K^2 X = K^2 \delta \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y no homogénea, cuya solución general se obtiene en forma similar a la solución de la ecuación (2.5) y es:

$$X = C_1 \cos KY + C_2 \operatorname{Sen} KY + \delta \quad (2.31)$$

para conocer las constantes C_1 y C_2 , se recurre a las siguientes condiciones de frontera:

$$1) \text{ si } Y = 0, X = 0$$

$$2) \text{ si } Y = 0, X' = 0$$

De la condición (1) en la ecuación (2.31)

$$0 = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{Sen}(0) + \delta$$

por lo tanto:

$$C_1 = -\delta \quad (2.32)$$

obteniendo la primera derivada de la ecuación (2.31)

$$X' = -K C_1 \operatorname{Sen} KY + K C_2 \cos KY \quad (2.33)$$

sustituyendo el valor de C_1 en la ecuación anterior

$$X' = K \delta \operatorname{Sen} KY + K C_2 \operatorname{Cos} KY \quad (2.34)$$

De la condición (2) en la ecuación (2.34)

$$0 = K \delta \operatorname{Sen} (0) + K C_2 \operatorname{Cos} (0)$$

$$0 = K C_2$$

por lo tanto:

$$C_2 = 0, \text{ y}$$

$$X = -\delta \operatorname{Cos} KY + \delta$$

$$X = \delta [1 - \operatorname{Cos} KY] \quad (2.35)$$

si se analiza la forma del pandeo se puede observar que:

$$\text{si } Y = l, X = \delta$$

sustituyendo en la ecuación (2.35), el valor de X e Y.

$$\delta = \delta [1 - \operatorname{Cos} Kl]$$

$$\delta = \delta - \delta \operatorname{Cos} Kl$$

$$0 = -\delta \operatorname{Cos} Kl \quad (2.36)$$

como $\delta \neq 0$, se debe cumplir que:

$$\operatorname{Cos} Kl = 0,$$

por lo tanto

$$Kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots, \frac{n}{2}\pi$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$

Cuyo valor de interés es $Kl = \pi/2$, con el cual se obtiene el modo fundamental de pandeo y el valor mínimo de la carga crítica.

Si se eleva al cuadrado la igualdad anterior

$$K^2 l^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

despejando K^2

$$K^2 = \frac{\pi^2}{4 l^2} \quad (2.37)$$

del inicio del análisis sabemos que por la igualdad (2.4)

$$K^2 = \frac{P}{EI}$$

igualando las K^2 se obtiene:

$$\frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{4 l^2}$$

si se despeja P de la igualdad anterior, y encontrándonos en la condición crítica, la carga P resultante, será la carga crítica, P_{cr} , para la columna cantiliver.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2} \quad (2.38)$$

la ecuación (2.38) es la carga crítica para una columna empotrada en su base y libre en su extremo superior.

- Determinación de la carga crítica para una columna empotrada en la base y articulada en su extremo superior.

Como se aprecia en la figura 2.6, la deflexión en la elástica es una función de:

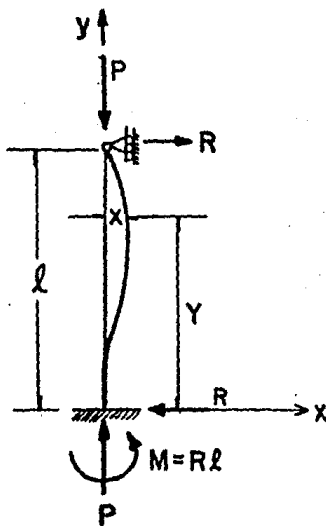


Fig. 2.6 Columna ideal empotrada y articulada con fuerza axial.

$$x = f(Y, l) \quad (2.39)$$

El momento flexionante a la distancia Y del empotramiento es:

$$M(Y) = PY - R(l - Y) \quad (2.40)$$

$$M(Y) = PX + RY - Rl \quad (2.41)$$

La ecuación diferencial de la curva elástica es (2.2):

$$X'' = - \frac{M}{EI}$$

sustituyendo (2.41) en (2.2)

$$X'' = - \frac{PX + RY - Rl}{EI}$$

$$X'' = - \frac{P}{EI} X - \frac{R}{EI} Y + \frac{R}{EI} l \quad (2.42)$$

recordando que, por la igualdad (2.4)

$$K^2 = \frac{P}{EI}$$

y se sustituye la ecuación anterior en la (2.42) se tiene

$$X'' = - K^2 X - \frac{R}{EI} Y + \frac{R}{EI} l \quad (2.43)$$

arreglando la ecuación (2.43) se tiene

$$X'' + K^2 X = \frac{R}{EI} (l - Y) \quad (2.44)$$

multiplicando y dividiendo por K^2 el segundo miembro de la ecuación (2.44):

$$X'' + K^2 X = \frac{K^2 R}{\frac{P}{EI} EI} (l - Y)$$

por lo tanto:

$$X'' + K^2 X = K^2 \frac{R}{P} (\ell - Y) \quad (2.45)$$

La igualdad (2.45) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea, que tiene la misma forma que la ecuación (2.5). Por lo tanto la solución de la ecuación (2.45) se obtiene en forma similar a la solución de la ecuación (2.5) y es:

$$X = C_1 \cos KY + C_2 \operatorname{Sen} KY + \frac{R}{P} (\ell - Y) \quad (2.46)$$

Para obtener el valor de las constantes C_1 y C_2 se recurre a las condiciones de frontera, las cuales son:

1) si $Y = 0$; $X = 0$

2) si $Y = \ell$; $X' = 0$

3) si $Y = \ell$; $X = 0$

Obtención de X'

$$X' = -K C_1 \operatorname{Sen} KY + K C_2 \operatorname{Cos} KY - \frac{R}{P} \quad (2.47)$$

si se aplica la primera condición en la ecuación (2.46)

$$0 = C_1 + 0 + \frac{R}{P} \ell$$

$$C_1 + \frac{R}{P} \ell = 0 \quad (2.48)$$

si se aplica la segunda condición en la ecuación (2.46)

$$0 = 0 + K C_2 - \frac{R}{P}$$

por lo tanto:

$$C_2 K - \frac{R}{P} = 0 \quad (2.49)$$

aplicando la tercera condición a la ecuación (2.46)

$$0 = C_1 \cos Kl + C_2 \operatorname{Sen} Kl + \frac{R}{P} (l - l)$$

ordenando:

$$C_1 \cos Kl + C_2 \operatorname{Sen} Kl = 0 \quad (2.50)$$

Las ecuaciones (2.48), (2.49) y (2.50) forman un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas: C_1 , C_2 y R , cuya primera solución es la trivial, en que $C_1 = C_2 = R = 0$. En este caso, por la ecuación (2.46), la de formación X resulta nula, lo que representa que no hay pandeo, lo cual carece de interés.

El sistema de ecuaciones (2.48), (2.49) y (2.50) se puede escribir en la forma:

$$\left. \begin{aligned} (1) C_1 + (0) C_2 + (l/P) R &= 0 \\ (0) C_1 + (K) C_2 - (1/P) R &= 0 \\ (\cos Kl) C_1 + (\operatorname{Sen} Kl) C_2 + (0) R &= 0 \end{aligned} \right\} (J)$$

Para que exista solución diferente a la trivial, el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones (J) debe ser igual a cero, o sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{l}{P} \\ 0 & K & -\frac{1}{P} \\ \cos Kl & \sin Kl & 0 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante:

$$-\frac{K}{P} l \cos Kl + \frac{1}{P} \sin Kl = 0$$

dividiendo entre $\cos Kl$ y multiplicando por P :

$$-Kl + \tan Kl = 0$$

de donde

$$\tan Kl = Kl \quad (2.51)$$

Si en una gráfica (Kl , $\tan Kl$), se representa la ecuación (2.51), se observa que el valor mínimo que la satisface es; como se observa en la figura 2.7 .

$$Kl = 4.493$$

elevando al cuadrado

$$K^2 l^2 = (4.493)^2$$

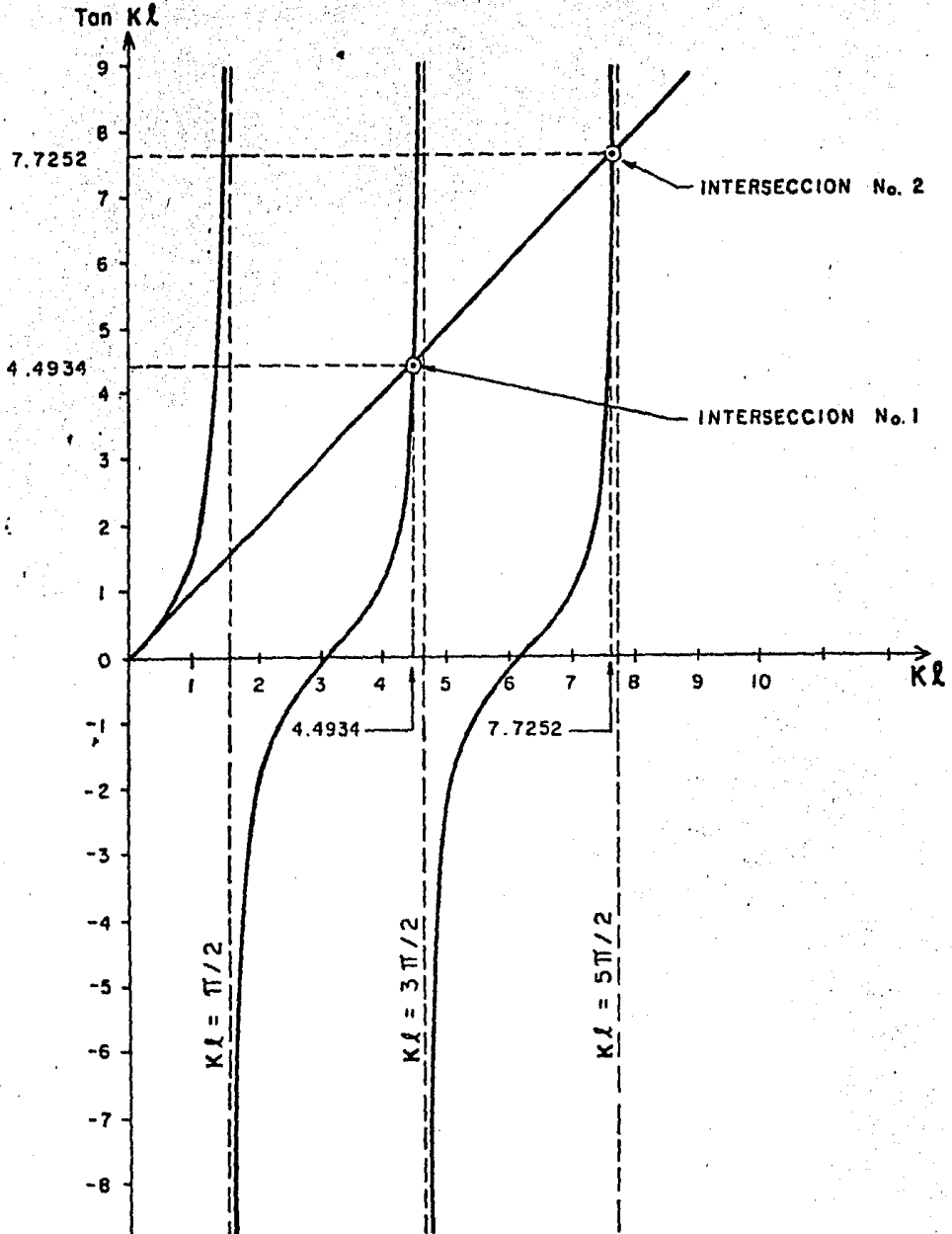


Fig. 2.7 Gráfico $(K\lambda, \text{Tg } K\lambda)$. Determinación de los intersecciones.

entonces:

$$K^2 = \frac{20.19}{l^2} \quad (2.52)$$

por la ecuación (2.4):

$$K^2 = \frac{P}{E I}$$

si se sustituye la ecuación (2.4) en (2.52) se tiene

$$\frac{P}{E I} = \frac{20.19}{l^2}$$

Como el análisis se ha hecho para la condición crítica, la expresión resultante de la carga, será la carga crítica, P_{cr} , para esta columna

$$P_{cr} = \frac{20.19 E I}{l^2}$$

teniendo en cuenta que $20.19 = \pi^2 / (0.7)^2$, entonces

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(0.7l)^2} \quad (2.53)$$

Sustituyendo las constantes C_1 y C_2 en la ecuación (2.46)

$$X = -\frac{R}{P} l \cos KY + \frac{R}{P K} \operatorname{Sen} KY + \frac{R}{P} \left(l - Y \right) \quad (2.54)$$

dándole una forma más ordenada a la ecuación (2.54)

$$X = \frac{R}{P K} \left[\operatorname{Sen} KY - K l \cos KY + K l \left(1 - \frac{Y}{l} \right) \right] \quad (2.55)$$

en la ecuación (2.55); $P = P_{cr}$ y R es la reacción, la cual queda indeterminada.

2.2 EFECTO DE LAS CONDICIONES DE APOYO

Es posible observar que las columnas: cantiliver, doblemente restringida contra giro y empotrada y articulada (figuras 2.8 b, c y d respectivamente) se comportan en forma similar a la columna doblemente articulada (figura 2.8a), así pues, la columna cantiliver se comporta como la mitad de la columna doblemente articulada, la columna doblemente empotrada se comporta en el tramo intermedio (limitado por los puntos de inflexión A' y B'), como una columna doblemente articulada y la empotrada y articulada como una fracción de la doblemente articulada.

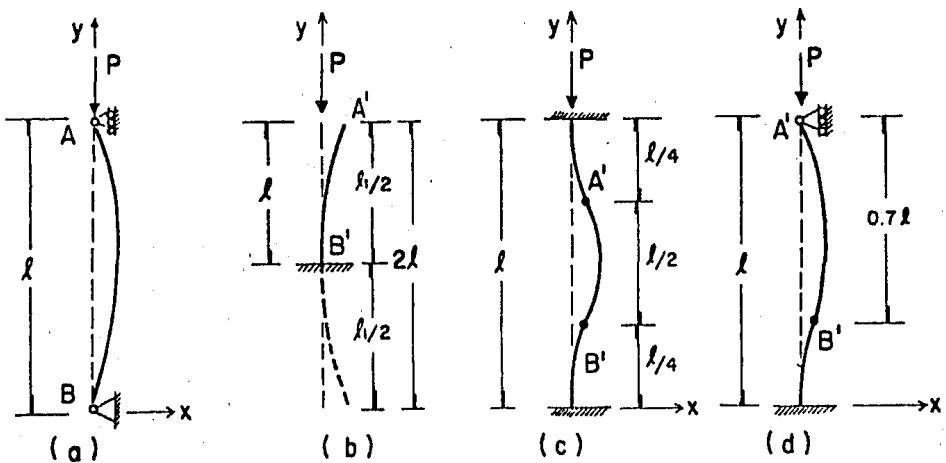


Fig. 2.8 Columnas fundamentales: a)-doblemente articulada, b)-empotrada en la base y libre en su extremo superior, c)-doblemente empotrada y d)- empotrada en la base y articulada en su extremo superior.

Para reforzar lo que se mencionó anteriormente, se recurre a las ecuaciones correspondientes a la carga crítica de cada columna, es decir, si en la ecuación de la carga crítica para la columna doblemente articulada (ecuación 2.23), se sustituye l por $2l$, se debe obtener la carga crítica para la columna cantiliver (ecuación 2.38), esto es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

si $l = 2l$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$$

De forma análoga, si se sustituye a l de la ecuación (2.23) por $l/2$, se obtiene la carga crítica para la columna doblemente empotrada (ecuación 2.56), como sigue:

si $l = l/2$

$$P_{cr} = \frac{4 \pi^2 E I}{l^2} \quad (2.56)$$

así también, si l de la ecuación (2.23) es sustituido por $0.7l$, se llega a la expresión de la carga crítica para la columna empotrada y articulada (ecuación 2.53), es decir:

si $l = 0.7l$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(0.7l)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{20.19 E I}{l^2}$$

Para ilustrar los resultados anteriores, se establece en el siguiente subcapítulo (subcapítulo 2.2.1) el concepto de longitud efectiva de pandeo.

2.2.1 LONGITUD EFECTIVA DE PANDEO

Es importante notar las características de la forma de la elástica de la columna al momento del pandeo, como se muestra en las figuras 2.8a, b, c y d; se observa que en la columna doblemente articulada (figura 2.8a), los puntos A y B son puntos de inflexión, así como también los puntos A' y B' de las columnas mostradas en las figuras 2.8b, c y d.

Entonces, se define como longitud efectiva de pandeo a la distancia que existe entre dos puntos de inflexión en la elástica de la columna, y depende del sistema de apoyos, cargas y de los desplazamientos horizontales.

Resumiendo lo visto anteriormente, se llega a la fórmula general de la carga crítica en columnas (ecuación 2.57) si se toma en cuenta el valor del factor de longitud efectiva de pandeo, k , para cada caso, esto es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(k l)^2} \quad (2.57)$$

en la figura 2.9 se muestra el valor del factor de longitud efectiva de pandeo, k , y la expresión de la carga crítica para las columnas fundamentales.

2.2.2 LONGITUDES EFECTIVAS EN COLUMNAS DE ESTRUCTURAS REALES


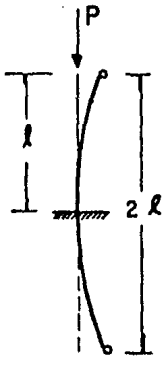
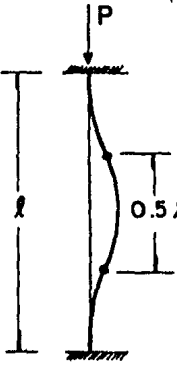
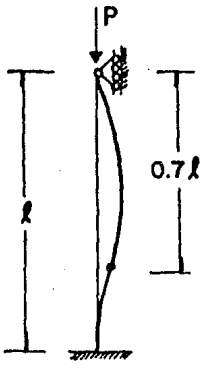
C O L U M N A			
DOBLEMENTE ARTICULADA	EMPOTRADA Y LIBRE (CANTILIVER)	DOBLEMENTE EMPOTRADA	EMPOTRADA Y ARTICULADA
			
1	2	3	4
$k = 1$	$k = 2$	$k = 0.5$	$k = 0.7$
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$

Fig. 2.9 Valor del factor de longitud efectiva de pandeo k para las columnas fundamentales.

Las columnas antes mencionadas son ideales en su comportamiento y sistema de apoyo, así por ejemplo, la columna doblemente articulada, su sistema de apoyo se comporta al 100% de articulación. En estructuras reales esto no sucede, pues se tendrá una combinación de empotramiento y articulación, es decir; se trata de obtener la interacción que ejercen sobre el elemento en estudio; las rigideces de travesaños, losas y columna que concurren al extremo del elemento en cuestión; por ejemplo, si las rigideces de travesaños, losas, y columna que concurren a uno de los nudos del elemento son grandes, dicho nudo tenderá a ser un empotramiento mientras mayor sean las rigideces de los elementos concurrentes.

Entonces, para tal fin (obtener el factor de longitud efectiva de pandeo en columnas de estructuras reales), se construyeron nomogramas que contemplan dos casos:

CASO 1. Nomograma para determinar el factor, k , de longitud efectiva de pandeo, de columnas que forman parte de marcos contraventeados (figura 2.10).

CASO 2. Nomograma para determinar el factor, k , de longitud efectiva de pandeo, de columnas que forman parte de marcos no contraventeados (figura 2.11).

Para ambos casos:

$$r'_a = \frac{\sum (I/L)_c}{\sum (I/L)_p} , \quad y$$

$$r'_b = \frac{\sum (I/L)_c}{\sum (I/L)_p}$$

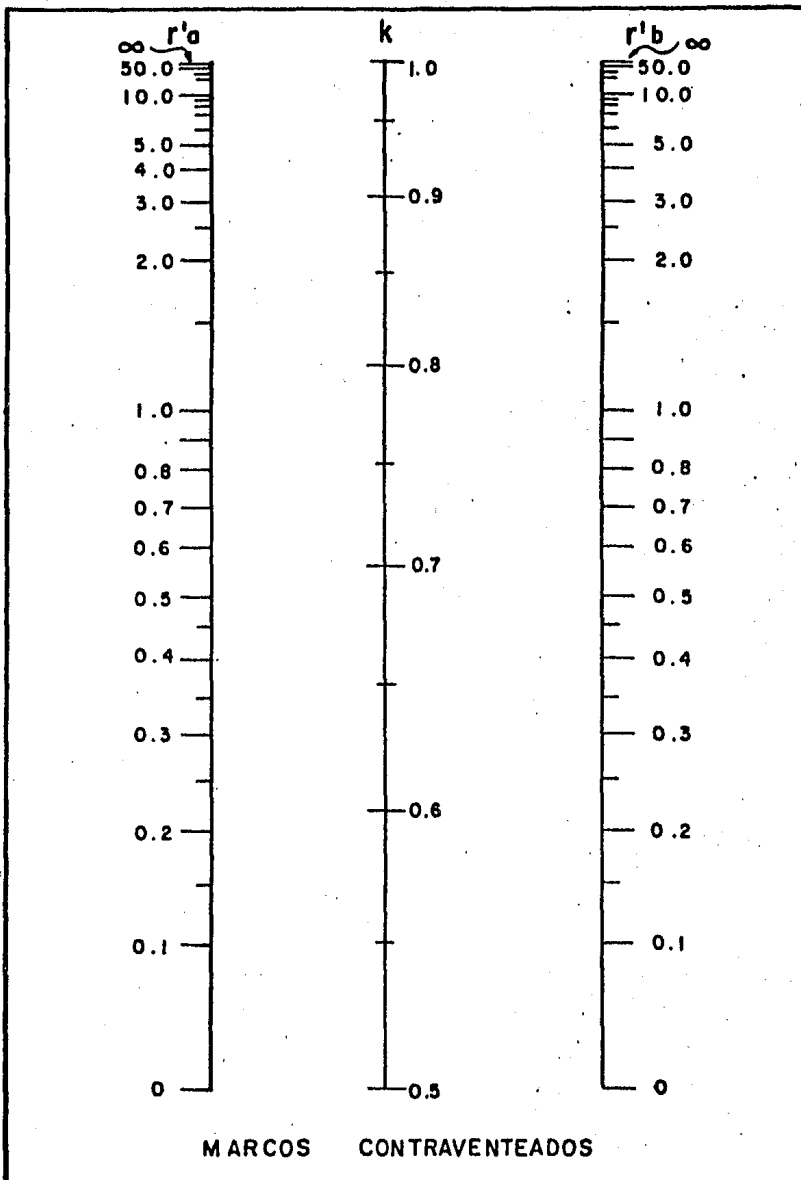


Fig. 2.10 Nomograma para determinar el factor k de longitud efectiva de pandeo de columnas que forman parte de marcos contraventados.

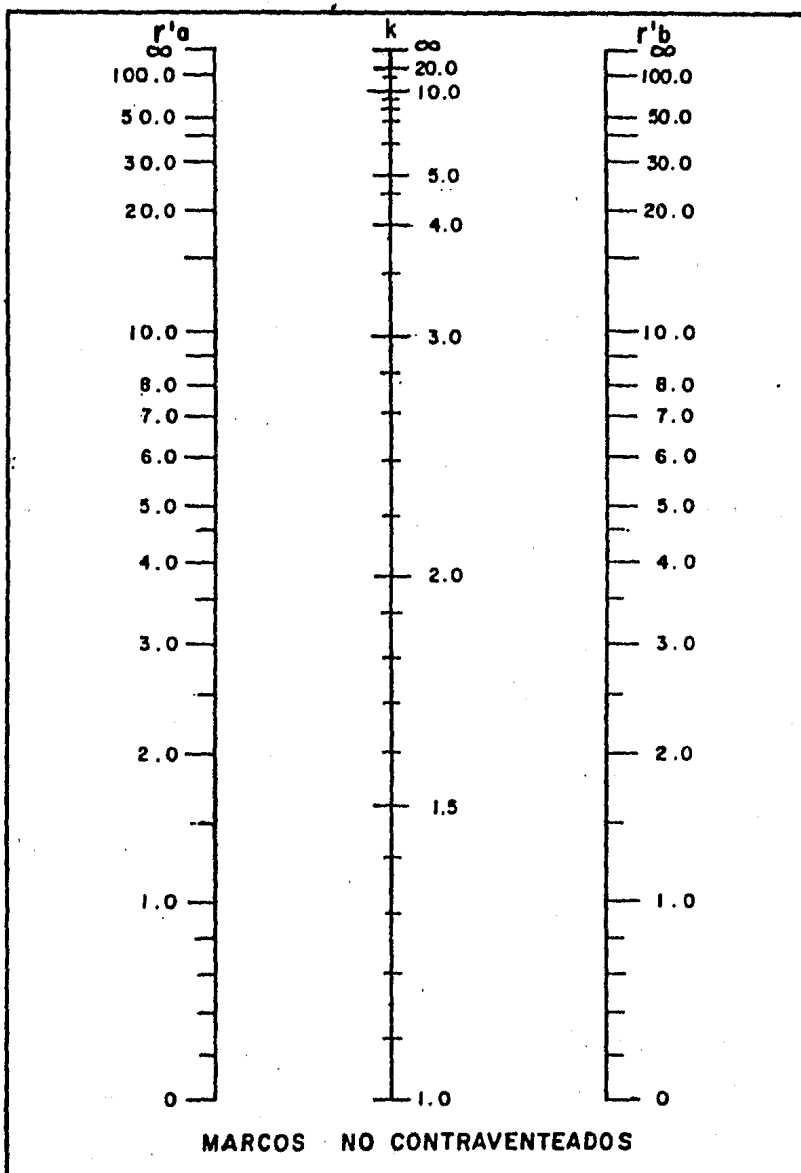


Fig.2.11 Nomograma para determinar el factor k de longitud efectiva de pandeo de columnas que forman parte de marcos no contraventados.

donde

r'_a = factor de rigidez en el nudo inferior.

r'_b = factor de rigidez en el nudo superior.

$\Sigma(I/L)_c$ suma de las rigideces relativas de las columnas que concurren al nudo.

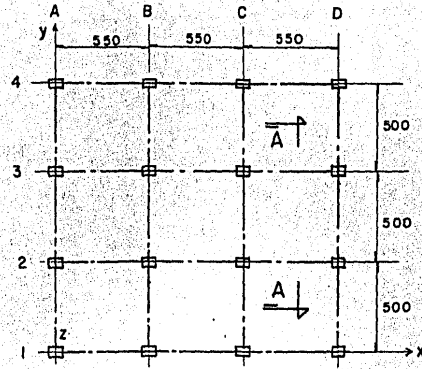
$\Sigma(I/L)_p$ es la suma de las rigideces relativas de piso, y se obtiene sumando las rigideces relativas de traves, vigas y losas que concurren al nudo, en el plano de flexión por pandeo.

Obtenidos r'_a y r'_b , se escoge el nomograma adecuado según el caso (marcos contraventeados o no contraventeados); localizados los valores de r'_a y r'_b en el nomograma correspondiente, se unen estos por medio de una línea recta que cruza el eje de las k ; el punto de intersección entre la recta de unión con el eje de las k , es el valor del factor de longitud efectiva de pandeo.

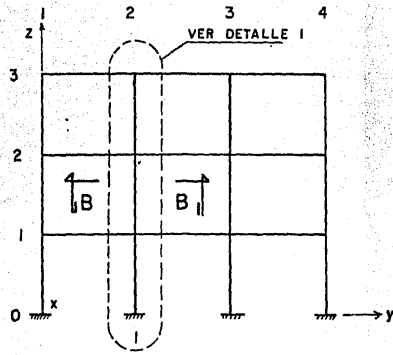
En el siguiente ejemplo se presenta la secuela para el uso de los nomogramas.

Ejemplo 2.2

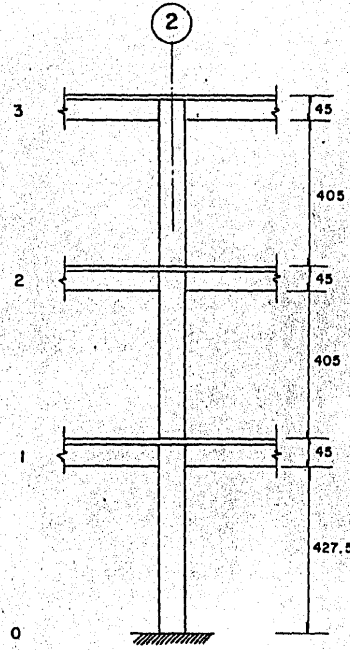
Se tiene un edificio formado con marcos en dos direcciones "X" y "Y" perpendiculares entre sí, y se desea calcular el factor de longitud efectiva de pandeo para la columna BC que se encuentra en la intersección de los ejes 2 y C de la estructura de concreto reforzado, que se muestra en la figura (2.12).



(a)
PLANTA

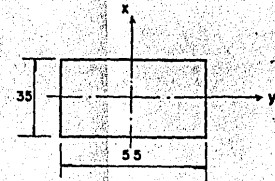


(b)
PERFIL

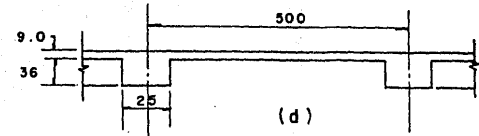


(c)
DETALLE I

Concreto $f'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$
Acero $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$



(e)
CORTE B-B



(d)
CORTE A-A

Fig. 2.12 Estructura formada por marcos : a)-planta, b)-perfil, c)-detalle I, d)-corte A-A y e)-corte B-B.

La estructura no tiene desplazamientos laterales y es analizada en la dirección OX.

a) Determinación de r'_a correspondiente al nudo B de la columna.

a.1) Cálculo de la rigidez relativa de las columnas.

esto es:

I/l col (0 - 1), (1 - 2) y (2 - 3)

$$I_{col} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{col} = \frac{35(55)^3}{12}$$

$$I_{col} = 485,260.4 \text{ cm}^4$$

$$I/l \text{ col (0 - 1)} = \frac{I_{col}}{l_{0-1}}$$

$$I/l \text{ col (0 - 1)} = \frac{485,260.4}{427.5}$$

$$I/l \text{ col (0 - 1)} = 1135.11 \text{ cm}^3$$

$$I/l \text{ col (1 - 2)} = \frac{I_{col}}{l_{1-2}}$$

$$I/l \text{ col (1 - 2)} = \frac{485,260.4}{405}$$

$$I/l \text{ col (1 - 2)} = 1198.2 \text{ cm}^3$$

$$I/l \text{ col } (2 - 3) = \frac{I_{\text{col}}}{l_{2-3}}$$

$$I/l \text{ col } (2 - 3) = \frac{485,260.4}{405}$$

$$I/l \text{ col } (2 - 3) = 1198.2 \text{ cm}^3$$

$$(I/l \text{ col})_1 = I/l \text{ col } (0 - 1) + I/l \text{ col } (1 - 2)$$

$$(I/l \text{ col})_1 = 2,333.31 \text{ cm}^3$$

a.2) Cálculo de la rigidez de piso.

Para determinar el momento de inercia de la trabe y parte de la losa, es necesario determinar el eje centroidal del área formada por el patín y el alma (figura 2.13)

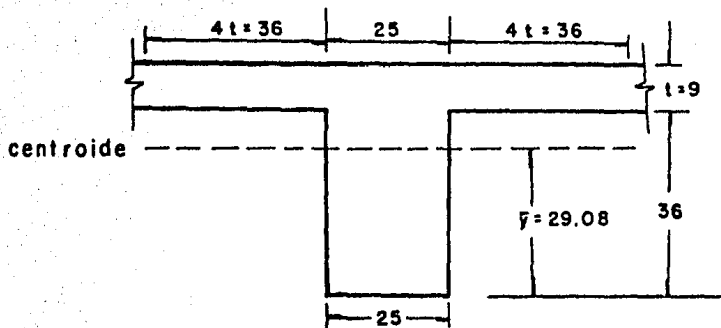


Fig. 2.13 Sección formada por la trabe y parte de la losa.

$$\bar{Y} = \frac{\sum Q}{\sum A}$$

donde:

\bar{Y} , eje centroidal con respecto a la base

Q, momento estático del área

A, área total

$$\bar{Y} = \frac{97(9)40.5 + 25(36)18.0}{97(9) + 25(36)}$$

$$\bar{Y} = 29.08 \text{ cm}$$

$$I_T = I_{\text{patín}} + I_{\text{alma}}$$

$$I_T = \frac{97(9)^3}{12} + 97(9)(11.4)^2 + \frac{25(36)^3}{12} + 25(36)(11.08)^2$$

$$I_T = 5,892.75 + 113,455.08 + 97,200.00 + 110,489.76$$

$$I_T = 327,037.6 \text{ cm}^4$$

$$l_{\text{trabe}} = 550 \text{ cm}$$

$$I/l_{\text{trabe}} = \frac{327,037.6}{550}$$

$$I/l_{\text{trabe}} = 594.6 \text{ cm}^3$$

$$(I/l_{\text{trabe}})_1 = 2(594.6)$$

$$(I/l_{\text{trabe}})_1 = 1189.2$$

$$r'_a = \frac{2333.31}{1189.2}$$

$$r'_a = 1.962$$

$$r'_b = \left(\frac{\sum I/l \text{ col}}{\sum I/l \text{ piso}} \right)_2$$

$$(I/l \text{ col})_2 = 2(1198.2)$$

$$(I/l \text{ col})_2 = 2396.4$$

$$(I/l \text{ piso})_2 = 2(594.6)$$

$$(I/l \text{ piso})_2 = 1189.2$$

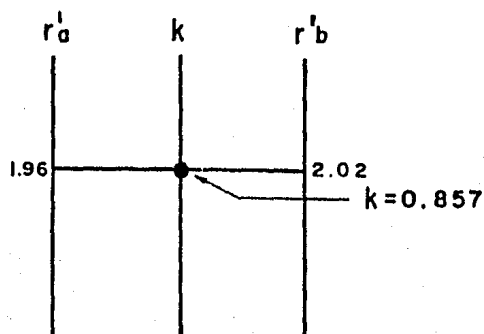
$$r'_b = \frac{2396.4}{1189.2}$$

$$r'_b = 2.015$$

Con los valores de r'_a y r'_b se entra al nomograma de marcos contraventeados (por no tener desplazamientos laterales), para obtener el factor k (factor de longitud efectiva de pandeo).

$$k = 0.857$$

Ejemplificando:



FORMULA DE EULER

En una columna sometida a fuerza excéntrica, la flecha aumenta con mucha rapidez cuando la carga axial se aproxima al valor crítico, o sea, cuando P se acerca a P_{cr} . La ecuación de la flecha y del momento flexionante para la columna doblemente articulada (ecuación (2.22) y (2.24) respectivamente) dan valores que tienden a infinito cuando la carga P tiende a P_{cr} .

Del capítulo anterior, la expresión de la carga crítica para la columna doblemente articulada (ecuación(2.23)) resultó:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

cuyo valor sólo depende de las dimensiones de la columna y del módulo de elasticidad del material. A la carga crítica de una columna elástica ideal se le llama también carga de Euler (referencia 3.1) .

En la ecuación anterior se observa que la carga crítica para una columna es directamente proporcional a su rigidez flexional, $E I$, e inversamente proporcional al cuadrado

de su longitud, así como también, independiente de la resistencia a la compresión del material. Por tanto, la carga crítica de una columna no aumenta si se emplean materiales con mayor resistencia, por ejemplo; acero con mayor esfuerzo de fluencia. Para aumentar la carga, se procede a incrementar el momento de inercia, I , de la sección transversal, distribuyendo el material lo más lejos posible del centroide de dicha sección. Esto hace que los miembros tubulares resulten ser más económicos que los macizos con la misma área transversal y que su empleo como columnas sea más generalizado, lo cual se logra si se reduce el grueso de pared de la sección y aumentando su dimensión transversal ya que el momento de inercia, I , se incrementa, así como la estabilidad del elemento.

La disminución de los espesores de pared debe hacerse bajo criterios fundamentados, pues la propia pared puede llegar a ser inestable y en lugar de producirse el pandeo en conjunto del elemento se provocará un pandeo localizado de la pared. A dicho fenómeno se le conoce como pandeo local* y se presenta en forma de abolladuras en la pared (referencia 3.2) .

Por la ecuación (2.35) del capítulo anterior tenemos:

$$X = \delta (1 - \cos K Y)$$

en la que la flecha, δ , aún está indeterminada. Para mayor información de ésta, se recurre a la siguiente condición:

$$\text{Si } Y = l, X = \delta$$

* Este fenómeno de pandeo local requiere de una investigación más a detalle, que no está al alcance de este trabajo.

para el extremo superior de la columna, ya que se trata de una columna empotrada en su base y libre en el extremo superior (columna cantiliver).

Si se sustituye la condición anterior en la ecuación (2.35) se obtiene que:

$$\xi \cos Kl = 0 \quad (3.1)$$

de donde se desprenden dos posibilidades: a) que $\xi = 0$ o b) que $\cos Kl = 0$. Si se cumple la primera ($\xi = 0$), no existe flecha en la barra, y por tanto no hay pandeo (figura 3.1a). En este caso K puede tomar cualquier valor y la ecuación (3.1) se satisface. Por consiguiente la carga, P , también podrá tomar cualquier valor. Este resultado se representa en la figura 3.2 por el eje vertical.

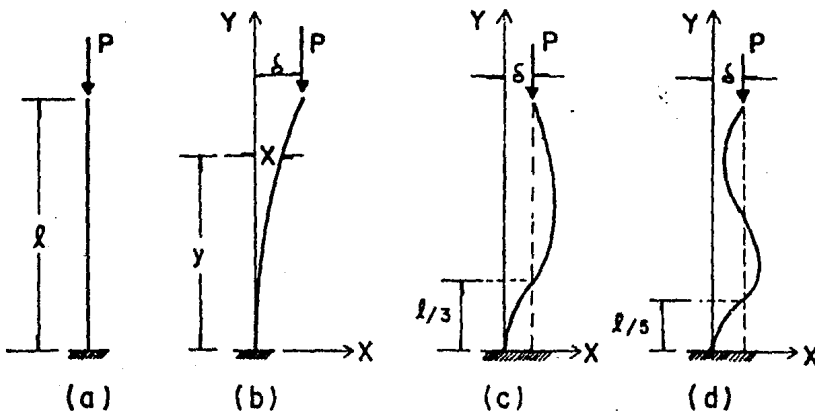


Fig. 3.1 Columna ideal empotrada en la base y libre en su extremo superior: a).-anterior al pandeo b).-modo fundamental del pandeo, $n=1$, c).-primer modo superior del pandeo, $n=3$ y d).-segundo modo superior del pandeo, $n=5$.

La otra posibilidad es que $\cos Kl = 0$, en tal caso se observa por la ecuación (3.1) que δ , puede tener cualquier valor diferente de cero.

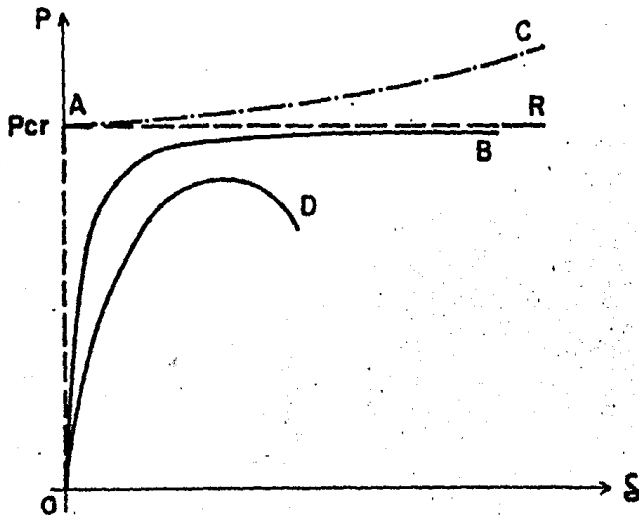


Fig. 3.2 Gráficas deformación total-carga para columnas.

Para que $\cos Kl = 0$, requiere que

$$Kl = n \pi / 2 \quad (3.2)$$

donde: $n = 1, 3, 5, \dots$

si se toma $n = 1$, se obtiene el mínimo valor de la carga P , expresado por la igualdad (2.38), esto es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$$

Esta expresión, da la carga crítica mínima con la cual la columna se mantiene en forma ligeramente flexionada, produciéndose esta deformación respecto al eje principal correspondiente al menor momento de inercia.

Para determinar la forma de la curva elástica se observa que $K = \pi/2l$ y, por tanto, la cantidad KY de la ecuación (2.35) varía desde cero hasta $\pi/2$, entonces la elástica, es la representada en la figura 3.1b. Para esta solución la magnitud de la flecha permanece indeterminada y esta condición se representa por la recta horizontal \overline{AR} ($P = P_{cr}$) de la figura 3.2. Debe tomarse en cuenta que las flechas son pequeñas en este análisis idealizado.

Si en la ecuación (2.38) se toman valores mayores de n , se obtienen infinidad de cargas críticas, por lo que, la expresión general de la carga crítica para la columna de la figura 3.1a, es:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 E I}{4 l^2} \quad (3.3)$$

Para la misma columna, la ecuación de la curva elástica es

$$X = \xi \left(1 - \cos \frac{n \pi Y}{2} \right) \quad (3.4)$$

si se observa la ecuación anterior, se deduce que cuando el índice n aumenta, la elástica de la columna tiene cada vez más ondas. Cuando n toma el valor de uno, la curva tiene una semionda, como se muestra en la figura 3.1b. Cuando $n = 3$, se obtiene:

$$P_{cr} = \frac{9 \pi^2 E I}{4 l^2}, \text{ y}$$

$$X = \delta \left(1 - \cos \frac{3 \pi Y}{2 l} \right)$$

y para $n = 5$

$$P_{cr} = \frac{25 \pi^2 E I}{4 l^2}, \text{ y}$$

$$X = \delta \left(1 - \cos \frac{5 \pi Y}{2 l} \right)$$

En la figura 3.1c y d se muestran las curvas elásticas para los dos casos anteriores, respectivamente. A pesar de que son modos de pandeo teóricamente posibles para el elemento, no son de interés práctico, pues la columna se pandeará mediante el primer modo (modo fundamental del pandeo), cuando la carga P alcance el valor dado por la ecuación (2.38). Por lo tanto, se puede considerar la carga crítica como la carga última para el elemento, y para el proyecto práctico se introduce un factor de seguridad, por lo que la carga admisible se considera mucho menor que la carga crítica.

En la deducción de la ecuación para la curva elástica (ecuación(2.35)), la flecha máxima, δ , permanece indefinida. Se intuye que cuando $P = P_{cr}$, la columna podría tener una pequeña flecha, condición que está representada por la recta horizontal \overline{AR} de la figura 3.2. Esta teoría se limita a considerar pequeñas flechas pues se utilizó la expresión aproximada, X'' , para la curvatura de la columna en lugar de su expresión exacta (referencia 3.3).

La solución de la ecuación diferencial exacta ha sido obtenida para varios casos, y muestra que no existe ninguna indeterminación en el valor de la flecha. Por el contrario, se encuentra para el caso de una columna elástica ideal, que la gráfica deformación total-carga es la representada en la figura 3.2 por la línea \overline{AC} .

En experimentos con columnas elásticas, la gráfica de formación total-carga se asemeja mucho a la curva B de la figura 3.2. Debido a que existen variaciones no deseadas en la carga y en la construcción de la columna; aparecerán deflexiones o flechas laterales con cargas menores a P_{cr} , las cuales aumentan a medida que las cargas se aproximan a la crítica. Entre mejor se construya y se cargue al elemento, más se aproximará la curva B a los resultados teóricos: dos rectas, una vertical y otra horizontal, o sea las rectas \overline{OA} y \overline{AR} . Si en la columna, los esfuerzos llegaran a exceder del límite de proporcionalidad a cargas inferiores a P_{cr} , la gráfica deformación total-carga, será semejante a la curva D cuyo punto máximo representa la carga de pandeo teórico correspondiente al pandeo inelástico de la columna, y tal carga es menor que la de Euler para la misma columna.

3.1 LIMITACIONES DE LA FORMULA DE EULER

En una columna con fuerza aplicada axialmente, si se considera que la fuerza es igual a la carga crítica, P_{cr} , el esfuerzo crítico medio de compresión es:

$$f_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \quad (3.5)$$

La expresión general de la carga crítica se obtuvo en

el capítulo anterior (ecuación 2.57), en la cual, $k = 1$, para la columna doblemente articulada de la figura 3.3, esto es:

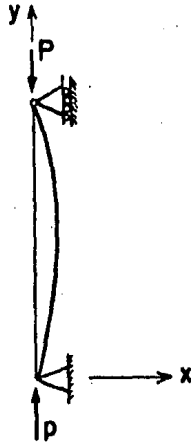


Fig. 3.3 Columna doblemente articulada con fuerza axial de compresión.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

si se sustituye la ecuación (3.5) en la igualdad anterior (2.23), se tiene:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2 A} \quad (3.6)$$

y, por otro lado, el radio de giro, r , de la sección es:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.7)$$

donde: r = radio de giro.

I = momento de inercia de la sección transversal.

A = Area de la sección transversal.

Sustituyendo la ecuación (3.7) en (3.6) resulta:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad (3.8)$$

donde: l/r = la relación de esbeltez de la columna.

La ecuación (3.8), es la fórmula de Euler, que da el esfuerzo crítico para la columna doblemente articulada.

Si se grafica (l/r , P/A) se obtiene la curva \overline{ABC} que se le llama curva de Euler como se muestra en la figura 3.4 . Para que la ecuación sea válida, el esfuerzo debe permanecer siempre menor al esfuerzo del límite de proporcionalidad.

Esto hace que la aplicación de la curva sea válida sólo en la región \overline{BC} , donde f_{cr} es menor al límite de proporcionalidad, f_{lp} . Para encontrar el punto B, cuyo valor es el límite por encima del cual se aplica la fórmula de Euler, se iguala el esfuerzo crítico, f_{cr} , con el límite de proporcionalidad, f_{lp} . Esto es, si se hace $f_{cr} = f_{lp}$ en la ecuación(3.8):

$$f_{lp} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2}$$

despejando el valor de l/r

$$l/r = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{lp}}} \quad (3.9)$$

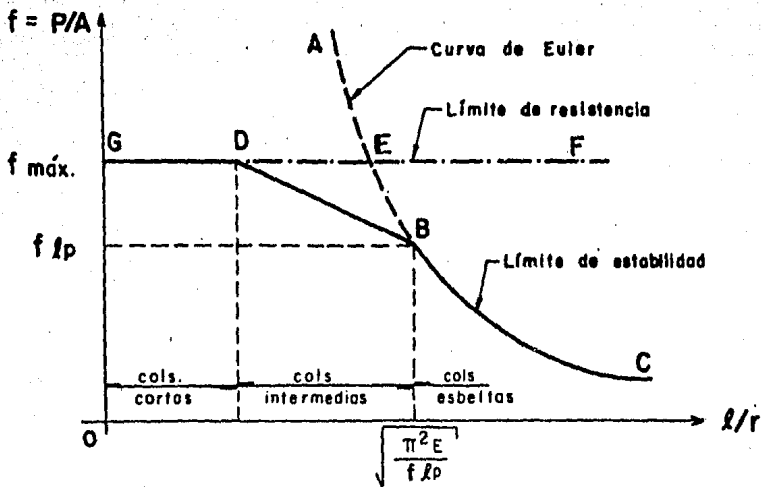


Fig. 3.4 Curva de esfuerzos de compresión axial en función de la relación de esbeltez (l/r , P/A).

Considerando acero estructural de límite de proporcionalidad, $f_{lp} = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ y 2530 Kg/cm^2 y $E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$, se encuentra que el valor mínimo de aplicación de la relación de esbeltez que corresponde al punto B es $l/r = 70.60$ y $l/r = 91$ respectivamente. Por tanto, para valores menores de l/r , según el caso, el esfuerzo medio de compresión en una columna de acero ideal simplemente apoyada alcanzará el límite de proporcionalidad antes de que ocurra el pandeo; en consecuencia, la fórmula de Euler para la carga crítica es inaplicable en este caso y da valores que son muy altos; y para valores mayores, según el caso, la columna fallará por pandeo elástico y se puede utilizar la fórmula de Euler.

Para una columna con relación de esbeltez muy baja, el comportamiento esperado sería la falla por resistencia del material, en forma de aplastamiento del hormigón o concreto;

o bien, la fluencia tratándose del acero estructural. Debido a lo anterior, se establece un esfuerzo máximo de compresión P/A , correspondiente al límite de resistencia del material, - como se muestra en la figura 3.4 por la recta horizontal \overline{DEF} que se traza a partir del punto de esfuerzo máximo, $f_{máx.}$, el cual representa el límite de resistencia para la columna.

De la misma gráfica se observa que existe una zona de transición entre las columnas cortas y largas o esbeltas, que se designan como columnas intermedias, estas columnas deben tratarse en forma especial, ya que no gobierna el criterio - de estabilidad ni el de resistencia, y su pandeo es inelástico. En la práctica, muchas veces basta con trazar una recta que una los puntos B y D como se muestra en la figura 3.4 y considerar que ésta representa los esfuerzos críticos para las columnas intermedias. De esta forma se obtiene la curva quebrada \overline{GDEC} que sirve como base para diseñar columnas de - cualquier longitud, la cual se muestra en la figura 3.4 .

Por lo anterior se distinguen dos tipos de pandeo:

- a) Pandeo elástico
- b) Pandeo inelástico

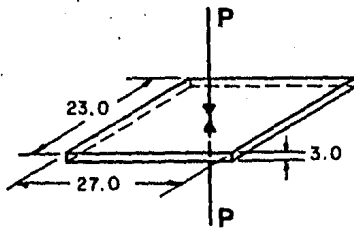
Se define como pandeo elástico, cuando los esfuerzos que se presentan en una columna son menores que el límite de proporcionalidad en el proceso de carga, y en el momento del pandeo el esfuerzo en la columna es igual o menor al límite de proporcionalidad.

Se define como pandeo inelástico, cuando al llegar la carga al valor crítico ($P = P_{cr}$), se inicia el pandeo, pero

los esfuerzos máximos en una sección de la columna han llegado o rebasan el esfuerzo del límite de proporcionalidad. Esto se debe a que la columna tiene una relación de esbeltez menor que la obtenida por la ecuación (3.9), o simplemente son de materiales no elásticos como el concreto en los que el límite de proporcionalidad no está definido.

Ejemplo 3.1

Se tiene un elemento corto sometido a una carga de compresión axial como se muestra en la figura 3.5. Analizar su posible comportamiento.



$$l = 3.0 \text{ cm.}$$

$$A = 621 \text{ cm}^2$$

$$I_{\min} = 27,375.8 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.0 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{lp} = 2,100 \text{ Kg/cm}^2$$

Fig. 3.5 Elemento corto sujeto a fuerza de compresión axial.

Analizándola como una columna doblemente articulada:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$r = 6.64 \text{ cm}$$

$$f_{cr} = \frac{(3.1416)^2 \cdot 2 \times 10^6}{(3.0/6.64)^2}$$

$$f_{cr} = 96,699,765.0 \text{ Kg/cm}^2 \gg f_{lp}$$

eso significa que

$$P_{cr} = 6.00505 \times 10^{10} \text{ Kg}$$

Por los resultados anteriores, podemos concluir que esta columna no tendrá problemas de pandeo; si falla, se deberá a falta de resistencia, pero no por pandeo, por ser una columna corta (muy corta) y el esfuerzo crítico teóricamente tiende al infinito ya que l es muy pequeña, A es grande e I también lo es comparado con l , y como este valor es muy pequeño $(l/r)^2$ es aún menor. Ahora $\pi^2 E$ dividido por el valor de $(l/r)^2$ obtendremos un esfuerzo crítico de pandeo que tiende al infinito. En este caso para estas columnas cortas nos damos cuenta que no tiene sentido hablar de pandeo ya que éstas sólo fallarán por aplastamiento del concreto, o por la fluencia del acero.

La ecuación (3.8) se puede emplear para obtener el esfuerzo crítico para las columnas restantes. Así pues, si se sustituye l de la ecuación (3.8) por $l/2$, se obtiene el esfuerzo crítico para la columna doblemente empotrada, si se sustituye, l por $2l$ y l por $0.7l$ se obtiene el esfuerzo crítico para la columna cantiliver y empotrada y articulada respectivamente. Se concluye que la ecuación (3.8) se puede generalizar empleando el factor de longitud efectiva. Por lo que la ecuación general del esfuerzo crítico queda:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2} \quad (3.10)$$

donde: k = factor de longitud efectiva de pandeo.

E = módulo de elasticidad.

r = radio de giro de la sección.

f_{cr} = esfuerzo crítico.

$k l/r$ = módulo de esbeltez.

Al producto, $k l$, se le llama, longitud efectiva de pandeo y el valor de k , como se muestra en la figura 2.9 para cada columna es:

$k = 1$: Doblemente articulada.

$k = 2$: Empotrada en su base y libre en el extremo superior.

$k = 0.5$: Doblemente empotrada.

$k = 0.7$: Empotrada en su base y articulada en el extremo superior.

La ecuación (3.10) se utiliza para cualquier columna con cualesquier sistema de apoyos, siempre y cuando se conozca el valor del factor de longitud efectiva, k , también en la ecuación anterior se ve que el esfuerzo crítico es directamente proporcional al módulo de elasticidad e inversamente proporcional al cuadrado del módulo de esbeltez de la columna.

La obtención de la fórmula general (ecuación (3.10)) que da el esfuerzo crítico en una columna, se basa en la hipótesis fundamental de que la columna se comporta elásticamente hasta la aparición del fenómeno del pandeo; por lo que dichas fórmulas no son válidas en piezas en el que el esfuerzo crítico de pandeo es mayor del límite de proporcionalidad.

El rango de aplicación de la fórmula de Euler, queda

entonces determinado, haciendo:

$$f_{cr} = f_{lp} \quad (3.11)$$

en la ecuación (3.10) y despejando el módulo de esbeltez (kl/r) , esto es:

$$kl/r = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{lp}}} \quad (3.12)$$

En resumen, la fórmula de Euler es aplicable a las columnas cuyo módulo de esbeltez sea:

$$\frac{kl}{r} \gg \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{lp}}} \quad (3.13)$$

y el tipo de pandeo que se presenta es elástico. Si la desigualdad (3.13) no se satisface, el pandeo es inelástico y será necesario hacer las consideraciones pertinentes. En la figura 3.4 se muestra la curva esfuerzo de compresión, P/A , en función del módulo de esbeltez, kl/r . Se observa de esta figura que cuando el módulo de esbeltez es grande, el esfuerzo crítico llega a ser muy pequeño; en consecuencia, una columna muy delgada o esbelta se pandea a un bajo esfuerzo de compresión.

3.2 GENERALIZACION PARA EL RANGO INELASTICO

En el artículo anterior se trató con columnas cuyo módulo de esbeltez kl/r , es mayor o igual al límite de aplicabilidad de la fórmula (3.13), es decir, que los esfuerzos en estos elementos estarán comprendidos entre los puntos \overline{OC} de la figura 3.6 donde se observa que el material se compor-

ta elásticamente, y el módulo de elasticidad E , es constante.

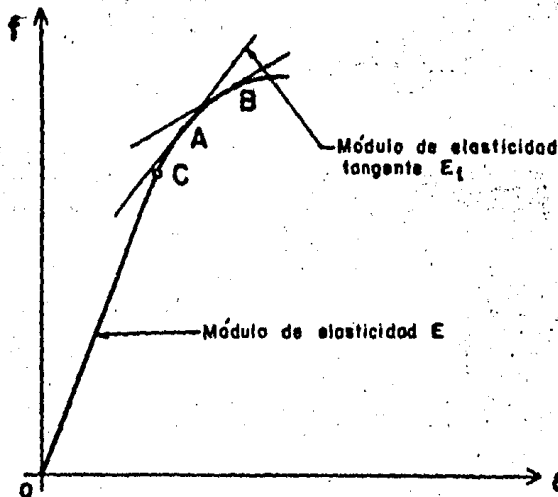


Fig. 3.6 Curva esfuerzo-deformación unitaria de un material.

El punto C es el valor del esfuerzo correspondiente al límite de proporcionalidad del material; también representa al esfuerzo máximo (esfuerzo crítico) que puede obtenerse de la ecuación (3.8) que corresponde a una columna con esbeltez representado por el punto B de la figura 3.7. Dicha columna será la de menor longitud de características dadas, que se pandeará elásticamente.

Una columna con relación de esbeltez menor que la correspondiente al punto B de la figura 3.7, no se pandeará en el límite de proporcionalidad del material, esto es, que los esfuerzos en la columna han sobrepasado al punto C de la figura 3.6 y posiblemente alcanzado un cierto punto A de la

misma figura. A este nivel de esfuerzo mayor puede decirse que se ha creado una columna de material diferente, pues su respuesta al proceso de carga es inelástico (no existe proporcionalidad entre las deformaciones y esfuerzos). En este

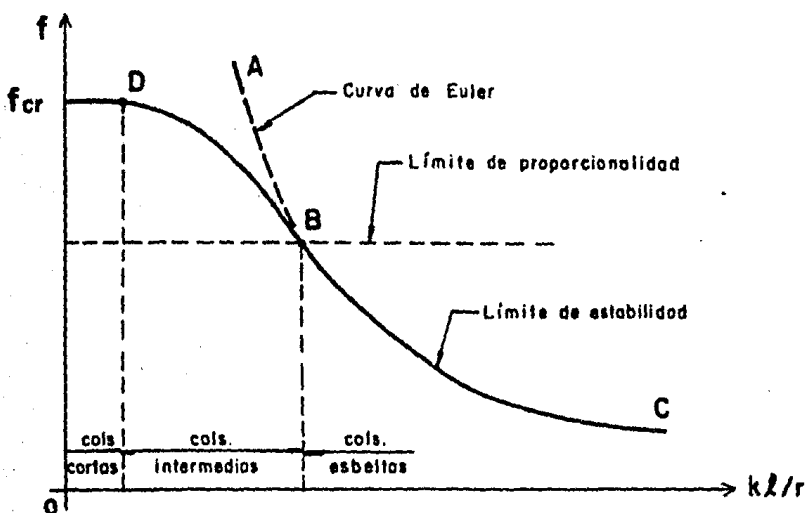


Fig. 3.7 Gráfico esfuerzo crítico en función del módulo de esbeltez (kl/r , f_{cr}) en una columna.

punto el módulo de elasticidad del material está dado por la pendiente de la tangente a la curva esfuerzo-deformación, es decir, por el módulo tangente E_t . La columna se mantendrá estable si su nueva rigidez a la flexión, $E_t I$, en el punto A de figura 3.6 es suficientemente grande y podrá soportar una carga mayor. También en la figura 3.6 se observa que a medida que la carga aumenta, el nivel de esfuerzo se eleva también, en tanto el módulo referido a la tangente disminuye. La sustitución del módulo elástico por módulo tangente, E_t , en

vez del módulo de Young E , es entonces la única modificación necesaria para obtener la fórmula de pandeo elástico aplicables al intervalo inelástico. En consecuencia, la fórmula generalizada de Euler, o bien, la fórmula del módulo referido a la tangente es:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(kl/r)^2} \quad (3.14)$$

Como los esfuerzos correspondientes a los módulos referidos a la tangente se pueden obtener a partir del diagrama esfuerzo-deformación a la compresión, la relación de esbeltez bajo la cual se pandeará una columna; con estos valores se puede obtener de la ecuación (3.14). En la figura 3.7 se muestra la curva DB que representa este comportamiento para valores intermedios y bajos de kl/r . Los ensayos en columnas individuales verifican esta gráfica con notable exactitud.

Ejemplo 3.2

Dada la gráfica esfuerzo-deformación unitaria de un material (figura 3.8), encontrar la gráfica esfuerzo crítico-módulo de esbeltez que permita diseñar columnas esbeltez de ese material.

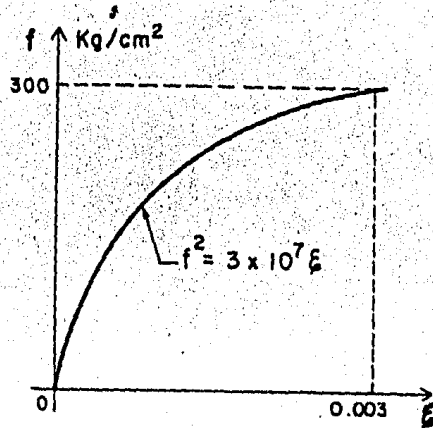


Fig. 3.8 Gráfico esfuerzo - deformación unitaria de un material.

Solución.

La función que da el esfuerzo en función de la deformación unitaria es:

$$f^2 = 3 \times 10^7 \epsilon \quad (a)$$

y para calcular el módulo de elasticidad tangente del material, se derivan ambos miembros de la ecuación (a)

$$\frac{df}{d\epsilon} = \frac{3 \times 10^7}{2 \sqrt{3 \times 10^7 \epsilon}} \quad (b)$$

$$\text{como } E_t = \frac{df}{d\epsilon}$$

resulta entonces que:

$$E_t = \frac{\sqrt{3 \times 10^7}}{2\sqrt{\xi}} \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \quad (c)$$

el esfuerzo crítico está dado por la ecuación (3.14). Si se despeja el módulo de esbeltez de esta ecuación resulta

$$\frac{kl}{r} = \pi \sqrt{\frac{E_t}{f_{cr}}} \quad (d)$$

Ahora, se calcula de la ecuación (a) el esfuerzo que corresponde al esfuerzo crítico de cierta columna, de (c) el módulo de elasticidad tangente y de (d) el módulo de esbeltez de la columna, correspondiente a cada uno de los valores asignados arbitrariamente a la deformación unitaria ξ , los cuales de acuerdo con la figura 3.8 deben estar comprendidos entre 0.000 y 0.003 .

Los valores así obtenidos se presentan en la siguiente tabla, y la gráfica pedida es la mostrada en la figura 3.9, de la cual se obtiene el esfuerzo crítico que, afectado por un factor de seguridad, da el esfuerzo de trabajo para el diseño.

ξ arbitraria	f_{cr} Kg/cm ² ecuación(a)	$E t$ Kg/cm ² ecuación (c)	$\frac{k l}{r}$ ecuación(d)
0.0001	54.77	274,051.3	222.23
0.0002	77.50	193,649.2	157.10
0.0005	122.50	122,474.5	99.30
0.0010	173.20	86,602.39	70.20
0.0020	244.90	61,237.25	49.70
0.0030	300.00	50,000.00	40.60

Tabla 3.1 Valores del módulo de elasticidad tangente, módulo de esbeltez y esfuerzo crítico de un material dado de comportamiento inelástico.

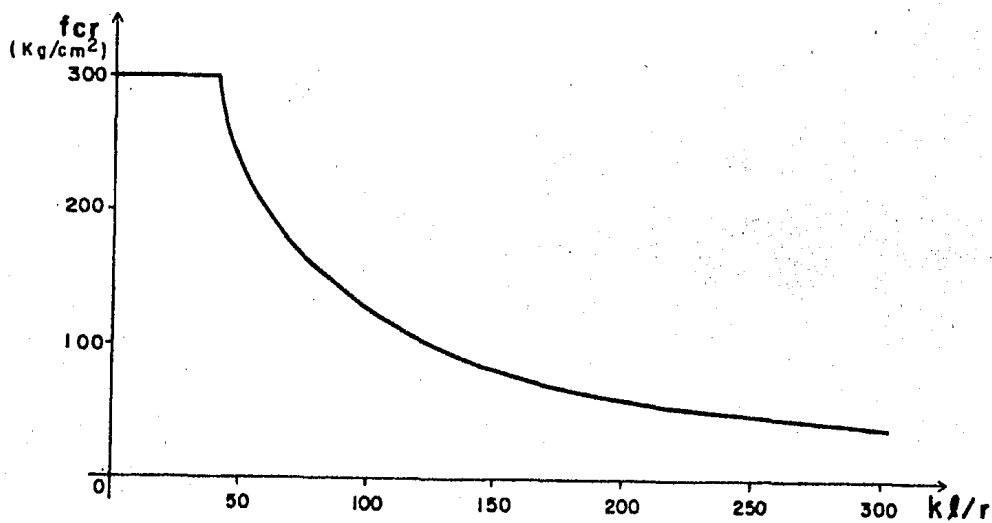


Fig. 3.9 Gráfica esfuerzo crítico, f_{cr} , en función del módulo de esbeltez, kl/r , para material de comportamiento inelástico.

DISEÑO DE COLUMNAS SUJETAS A COMPRESION AXIAL

Basados en la fórmula de Euler, se obtuvieron expresiones para el esfuerzo crítico en función de la relación de esbeltez del elemento. Para columnas largas de comportamiento elástico al pandeo, la ecuación (3.10); para intermedias de comportamiento inelástico la ecuación (3.14) y para columnas cortas el esfuerzo de ruptura del material. Con este esfuerzo se calcula la capacidad de carga que, afectada por un factor de seguridad, FS, se obtiene la carga admisible de trabajo.

Para determinar la capacidad de carga de una columna, se puede utilizar un método de análisis distinto al anteriormente descrito. Como ninguna columna es perfectamente recta ni tampoco las fuerzas que se aplican son totalmente centradas, es posible estudiar el comportamiento de columnas considerando ciertas imperfecciones o excentricidades posibles de las cargas aplicadas, determinadas estadísticamente. De esta manera, en el caso del diseño de una columna real, puede considerarse una deflexión probable o una excentricidad efectiva de la carga. Asimismo, hay muchas columnas a las que se aplica deliberadamente carga excéntrica. Por consiguiente, podemos estudiar y determinar la capacidad de carga de una co-

lumna cargada excéntricamente, tomando como base un esfuerzo elástico permisible, lo anterior no determina la capacidad de carga última del elemento.

Si se considera el caso de una columna doblemente articulada mostrada en la figura 4.1 que está sujeta a carga excéntrica, el momento flexionante en cualquier sección está dado por la ecuación (2.1) y la ecuación diferencial de la curva elástica por la ecuación (2.3) del capítulo 2.

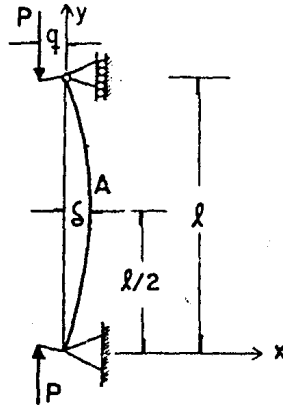


Fig. 4.1 Columna con fuerza excéntrica articulada en ambos extremos.

Resolviendo la ecuación (2.3) se obtiene la elástica de la curva, que se representa en la ecuación (2.17):

$$X = C_1 \cos K Y + C_2 \operatorname{Sen} K Y - q$$

En el capítulo 2 se obtuvo el valor de las constantes C_1 y C_2 , así como también la flecha máxima y el momento flexionante máximo que se presenta al centro de la columna, a la distancia $Y = l/2$, dichas ecuaciones (2.22) y (2.24) respec-

tivamente se presentan en seguida:

$$\delta = q \left(\text{Sec } Kl/2 - 1 \right)$$

$$M_{\text{máx}} = P (q + \delta)$$

Si se sustituye δ , de la ecuación (2.22) en la ecuación (2.24) se tiene la ecuación (2.25) del capítulo 2.

$$M_{\text{máx}} = Pq \text{ Sec } Kl/2$$

el máximo valor del esfuerzo de compresión que corresponde a la cara cóncava de la columna en el punto A de la figura 4.1 es:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}} C}{I} \quad (4.1)$$

donde: $f_{\text{máx}}$ = esfuerzo máximo

$M_{\text{máx}}$ = momento máximo

C = distancia desde el eje centroidal hasta la fibra extrema

A = área de la sección transversal

P = fuerza de compresión

I = momento de inercia de la sección transversal

Si se sustituye la ecuación (2.25) en la ecuación (4.1) y empleando la notación del radio de giro de la sección transversal, $r^2 = I/A$, se obtiene:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{q C}{r^2} \text{Sec} \left(\frac{Kl}{2} \right) \right] \quad (4.2)$$

Del capítulo 2, $K = \sqrt{P/E I}$ (ecuación (2.4)), si se sustituye en la ecuación anterior, se tiene

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{qC}{r^2} \text{Sec} \left(\frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (4.3)$$

La ecuación anterior es la fórmula de la secante para una columna cargada excéntricamente. Da el esfuerzo máximo de compresión en función del esfuerzo medio de compresión, P/A , de la relación de excentricidad, qC/r^2 , y de la relación de esbeltez, kl/r . Debe observarse en la ecuación anterior que el radio de giro de la sección, r , puede no ser el mínimo ($I_{\text{mín.}}$), puesto que se obtiene del valor de I relacionado con el eje respecto al cual se produce la flexión. También la relación entre la carga P , y el esfuerzo máximo, $f_{\text{máx}}$, no es lineal: $f_{\text{máx}}$ crece más rápidamente que P . En consecuencia, no es posible superponer valores máximos de esfuerzos en columnas causados por diferentes fuerzas axiales; en vez de ello se deben superponer primero las fuerzas y luego calcular los esfuerzos.

Estableciendo un límite sobre el esfuerzo máximo, $f_{\text{máx}}$, se puede calcular por la ecuación (4.3) el esfuerzo de compresión medio, P/A . Para el acero estructural, se puede tomar el esfuerzo de fluencia, f_y , como el esfuerzo límite. De esta manera se obtiene:

$$\frac{P_y}{A} = \frac{f_y}{1 + \frac{qC}{r^2} \text{Sec} \left(\frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P_y}{EA}} \right)} \quad (4.4)$$

Para cualquier relación de excentricidad dada, qC/r^2 , se puede resolver la ecuación (4.4) por aproximaciones sucesivas,--

donde P_y será la fuerza necesaria para producir fluencia en la fibra más esforzada de la columna (la fibra más alejada del eje centroidal). Graficando la ecuación (4.4) para varias relaciones de excentricidad, en función del módulo de esbeltez, kl/r , para $f_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ y $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$. Se obtienen las curvas correspondientes, mostradas en la figura 4.2

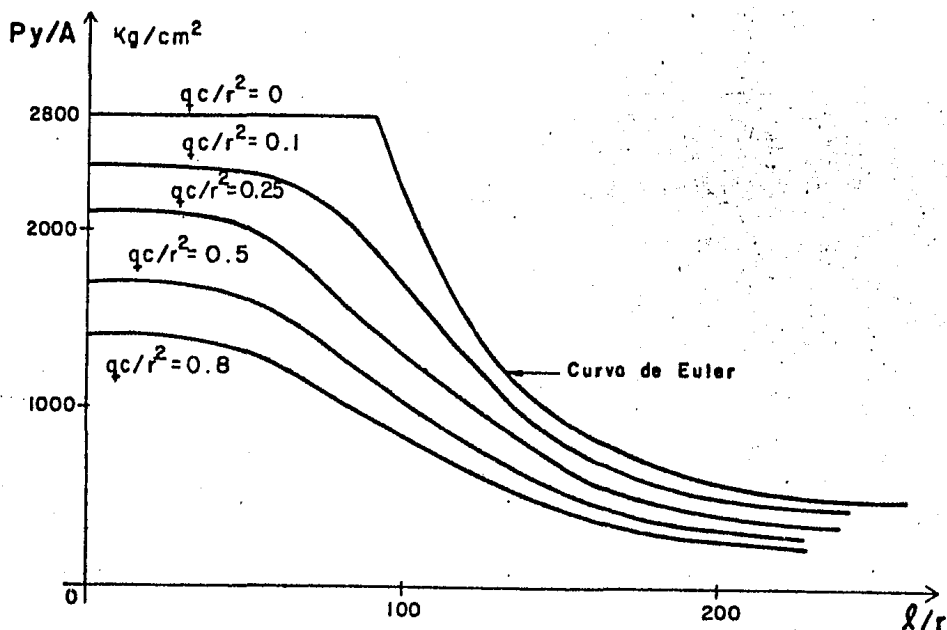


Fig. 4.2 Representación de la ecuación (4.4) para diferentes relaciones de excentricidad, q_c/r^2 .

El valor de P_y/A , regularmente se considera como límite de carga en una columna de acero. Una vez hallado este valor para una columna dada, ya sea por la ecuación (4.4) o por la figura 4.2, la carga admisible, P_a , se determina dividiendo P_y por el factor de seguridad, FS , adecuado.

Como se trata de una carga admisible, P_a , y siendo FS, el factor de seguridad, se puede introducir la cantidad FS P_a , en vez de P_y en la ecuación (4.4), y la ecuación que resulta es:

$$\frac{P_a}{A} = \frac{f_y/FS}{1 + \frac{qC}{r^2} \text{Sec} \left(\frac{l}{2r} \sqrt{\frac{FS P_a}{EA}} \right)} \quad (4.5)$$

Este procedimiento permite utilizar un factor de seguridad correcto para la fuerza aplicada, pues dicha fuerza se puede incrementar FS veces antes de alcanzar el esfuerzo crítico.

El trabajo matemático queda concluido, al tener las ecuaciones (4.3) y (4.5), pero la aplicación de estas ecuaciones para el diseño es laboriosa.

De la figura 4.2 se observa que existe un efecto muy pronunciado por la excentricidad de la carga, mientras menor sea la relación de esbeltez (columnas cortas), y que conforme la relación aumenta (columnas esbeltas), este efecto se vuelve despreciable. Una ventaja de esta fórmula de la secante es que abarca toda la gama de longitudes en columnas, por lo que las curvas que se muestran en la figura 4.2 son de gran ayuda para el diseño práctico.

Para las columnas cortas, cuando la relación de esbeltez, kl/r , se acerca a cero, el valor de la secante tiende a uno, por lo que la fórmula de la secante para puntales cortos queda simplificada a

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} C \quad (4.6)$$

y la carga de trabajo, P_a , también se obtiene considerando un factor de seguridad, FS , que afecta a la carga última.

Como se dijo anteriormente, el comportamiento de una columna sometida a carga de compresión resulta muy afectado por imperfecciones inadvertidas tales como ligera desviación inicial del eje de la columna, errores en el centrado de la carga, incertidumbre en cuanto a las condiciones de apoyo de los extremos, etc. las imperfecciones de una columna a otra varían sustancialmente. Para apreciar la influencia de las imperfecciones sobre la resistencia de la columna se debe tomar en cuenta que a consecuencia de ellas, la línea de acción de las cargas no coincide exactamente con el eje de la columna, introduciendo de esta manera más o menos acción de flexión adicional a la de compresión directa. Por lo anterior, es posible concluir que, el comportamiento de una columna real imperfecta sometida a carga, será análogo al de una columna ideal perfectamente recta cargada con una excentricidad q adecuada. Esto concuerda con el empleo de la fórmula de la secante, utilizándola como base para el proyecto pero considerando un valor apropiado de la relación de excentricidad qC/r^2 , que asume el efecto de las imperfecciones. A pesar de que el procedimiento anterior no determine el valor correcto de qC/r^2 , ofrece un medio lógico de representar el efecto de las imperfecciones en lugar de cubrirlas mediante un factor de seguridad o sobrecarga como el sugerido al inicio del capítulo.

Los resultados de experimentos concuerdan en que un valor recomendable de $qC/r^2 = 0.25$ para columnas doblemente articulada es adecuado. Por lo que la curva $qC/r^2 = 0.25$ de la figura 4.2 puede utilizarse como base de proyecto para co

lumnas de acero estructural; como dicha curva considera el efecto de las imperfecciones, se puede considerar adecuado un factor de seguridad $FS = 2$. Por lo que el esfuerzo admisible está dado por $f_{m\acute{a}x}/FS$, donde $f_{m\acute{a}x}$ se obtiene de la ecuación (4.2) o de la figura 4.2 para $qC/r^2 = 0.25$.

Como puede esperarse que el defecto en la rectitud del eje de la columna aumente con la longitud, a veces se prefiere prever las imperfecciones empleando una excentricidad equivalente q que aumente linealmente con la longitud l , de la columna. Un valor comunmente recomendado respaldado por los ensayos es:

$$q/l = 1/400 \quad (4.7)$$

y la fórmula de la secante resulta:

$$\frac{P_y}{A} = \frac{f_y}{1 + \frac{1}{400} \frac{l}{r} \frac{C}{r} \text{Sec} \left(\frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P_y}{EA}} \right)} \quad (4.8)$$

donde: P_y = carga que produce fluencia en la fibra más esforzada

f_y = esfuerzo de fluencia

A = área de la sección transversal

r = radio de giro de la sección transversal

l = longitud de la columna

La relación C/r es función de la forma de la sección transversal. Para una sección transversal circular llena $C/r = 2$, para la rectangular $C/r = \sqrt{3}$; para la circular hueca de pared delgada $C/r = \sqrt{2}$, y para secciones I con flexión en su

plano de mayor rigidez de flexión, $C/r = 1$.

Las curvas trazadas en la figura 4.3 para $C/r = 1$, $C/r = 2$ y $f_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$, se pueden utilizar como base para el proyecto de columnas de acero.

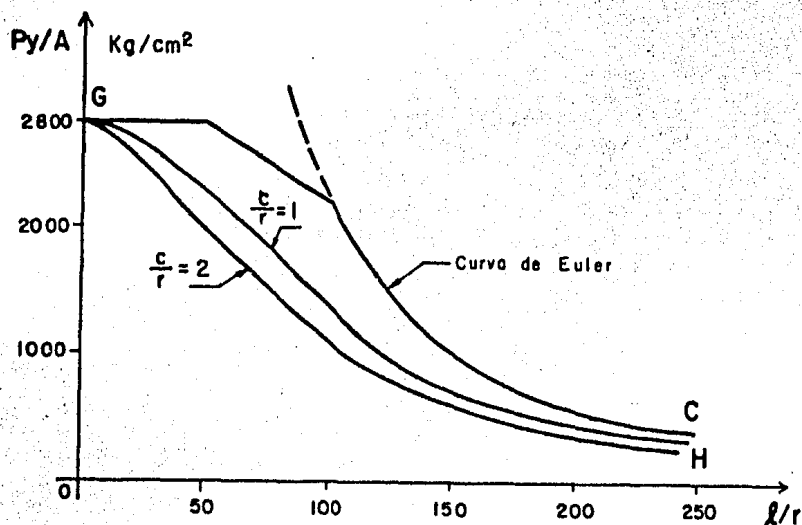


Fig. 4.3 Representación de la ecuación (4.8), para $e = l/400$ y diferentes valores de c/r .

El uso de las curvas de las figuras 4.2 y 4.3 que se basan en la fórmula de la secante resulta ser el procedimiento aproximado más racional para el proyecto de columnas de acero cargadas axialmente. Esta fórmula engloba los casos de columnas cortas, medianas y largas en una sola clase continua.

4.1 DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE COLUMNAS DE ACERO

Al inicio de este capítulo se establecieron métodos

para determinar la capacidad de carga en columnas, los cuales se basan en consideraciones puramente teóricas. En su aplicación queda aún incertidumbre, como es el caso de la selección de valores para las excentricidades supuestas, la elección de un factor de seguridad adecuado, etc. y a causa de la naturaleza trascendente de la fórmula de la secante, se han propuesto fórmulas más sencillas, puramente empíricas fundamentadas en ensayos, con el fin de sustituirlas; éstas dan el esfuerzo admisible de trabajo, f_a , en función de la relación de esbeltez, kl/r .

En la aplicación de fórmulas de diseño es importante tener en cuenta: el material para el cual se establece la fórmula, si ésta estima la capacidad última del elemento o la carga de trabajo para introducir en caso necesario un factor de seguridad y el intervalo de aplicación de la fórmula.

El "Column Research Council"(CRC) o Consejo de Investigación de columnas, propone para el proyecto de columnas de acero estructural con carga axial que el esfuerzo máximo sea precisamente el f_{cr} , entonces, del capítulo 3 se tiene; por la ecuación (3.10)

$$f_{\text{máx}} = f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2}$$

Pero, por la presencia de esfuerzos residuales debido a las condiciones en que es producido el acero, el valor máximo al que puede llegar el esfuerzo residual es

$$f_r = \frac{f_y}{2} \tag{4.9}$$

donde: f_r = esfuerzo residual.

f_y = esfuerzo de fluencia del acero que se está tratando.

entonces, el esfuerzo real de compresión, f_c , será:

$$f_c = f_{\text{máx}} + f_r \quad (4.10)$$

donde f_c no debe exceder el valor de f_y . Así, podemos considerar

$$f_c = f_y \quad (4.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.9) y (4.11) en la ecuación (4.10) resulta

$$f_y = f_{\text{máx}} + \frac{f_y}{2} \quad (4.12)$$

y de la ecuación anterior se obtiene

$$f_{\text{máx}} = \frac{f_y}{2} \quad (4.13)$$

si se sustituye la ecuación (4.13) en la ecuación (3.10) se tiene:

$$\frac{f_y}{2} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2} \quad (4.14)$$

despejando (kl/r) de la ecuación anterior

$$\frac{kl}{r} = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{f_y}} \quad (4.15)$$

si se llama al valor de kl/r de la ecuación (4.15):

$$C_c = \frac{kl}{r} \quad (4.16)$$

donde: C_c = coeficiente de columna.

Y se sustituye la ecuación (4.16) en la ecuación (4.15) se obtiene

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{f_y}} \quad (4.17)$$

Como nos encontramos en la condición límite se puede concluir que la expresión (3.10) se utiliza únicamente cuando se presente el pandeo elástico, o sea que el módulo de esbeltez, kl/r , de la columna en cuestión sea mayor o igual al coeficiente de columna, C_c . Esto es:

$$\frac{kl}{r} \gg C_c \quad (4.18)$$

si se cumple la ecuación (4.18) el pandeo que se presenta es elástico y entonces la ecuación (3.10) se trata de la siguiente manera:

dividiendo la ecuación (3.10) entre el esfuerzo de fluencia f_y

$$\frac{f_{máx}}{f_y} = \frac{\pi^2 E}{f_y \left(\frac{kl}{r}\right)^2} \quad (4.19)$$

si se sustituye la ecuación (4.17) en (4.19) se obtiene

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = \frac{C_c^2}{2 \left(\frac{kl}{r} \right)^2} \quad (4.20)$$

La expresión (4.20) da el esfuerzo máximo para una columna sujeta a carga axial cuando el pandeo que se presenta en ella es elástico. O sea, cuando se satisface la condición (4.18).

Para el caso en que:

$$\frac{kl}{r} < C_c \quad (4.21)$$

se presenta pandeo inelástico, para el cual el Consejo de Investigación de Columnas (CRC) propone una fórmula empírica para la obtención del esfuerzo máximo, la cual es:

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = 1 - \frac{(kl/r)^2}{2 C_c^2} \quad (4.22)$$

Si se grafica $f_{\text{máx}}/f_y$ en función del módulo de esbeltez, kl/r , como se muestra en la figura 4.4, se observa que la tangente de la curva de la ecuación (4.22) tiene una pendiente nula, en $kl/r = 0$ y para este valor del módulo de esbeltez el $f_{\text{máx}}$ es f_y . Esta curva se confunde en el punto $kl/r = C_c$ con la curva de la ecuación (4.20).

Como las curvas anteriores estiman la capacidad última del elemento, no es posible diseñar con dichas curvas (ecuación (4.20) y (4.22)) ya que con ellas no se está cubriendo algún imprevisto que pudiera presentarse (lo que represen

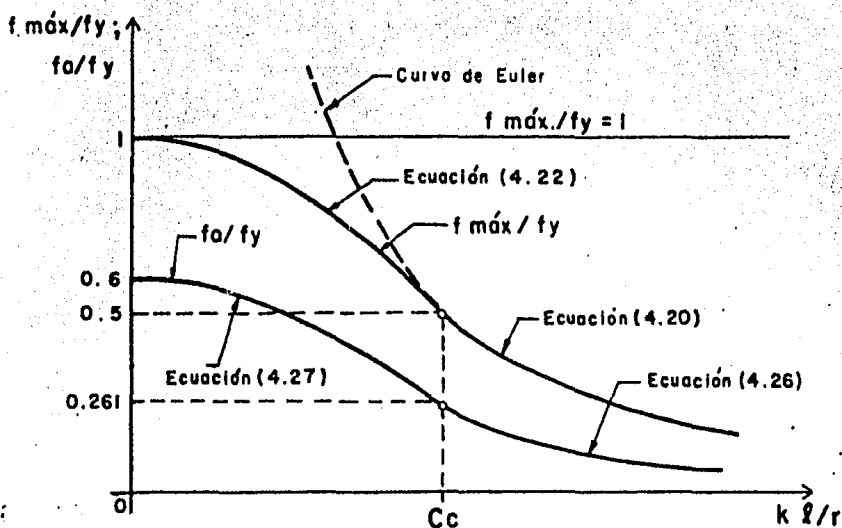


Fig. 4.4 Curvas de esfuerzo máximo, $f_{máx.}/f_y$, y esfuerzo de compresión admisible, f_a/f_y , para proyectar columnas de acero estructural.

taría un aumento de esfuerzo que sumado al inicial podrían superar al esfuerzo máximo y producirse la falla). Entonces para poder proyectar con éstas, se introduce un factor de seguridad, FS , que al afectar el $f_{máx}$ con el factor de seguridad, se obtiene un esfuerzo menor, con el cual se puede diseñar.

El Instituto Norteamericano de la Construcción de Acero (AISC), propone los siguientes factores de seguridad para utilizarse con las fórmulas empíricas del CRC (referencia 4.1) y el esfuerzo de compresión admisible, f_a , en forma general queda:

$$f_a = \frac{f_{máx}}{FS} \quad (4.23)$$

donde: f_a = esfuerzo de compresión admisible.
 FS = coeficiente de seguridad.

pero FS tomará dos valores:

a) $FS = FS_1$, para pandeo elástico; si $kl/r > C_c$

$$FS_1 = \frac{23}{12} = 1.92 \quad (4.24)$$

b) $FS = FS_2$, para pandeo inelástico; si $kl/r < C_c$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(kl/r)}{8 C_c} - \frac{(kl/r)^3}{8 C_c^3} \quad (4.25)$$

por lo que sustituyendo la ecuación (4.24) en (4.20) se obtiene el esfuerzo de compresión admisible en una columna con pandeo elástico:

$$\frac{f_a}{f_y} = \frac{C_c^2}{2 FS_1 (kl/r)^2} \quad (4.26)$$

y en una columna que presente pandeo inelástico es:

$$\frac{f_a}{f_y} = \frac{1}{FS_2} \left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2 C_c^2} \right] \quad (4.27)$$

Las curvas de las ecuaciones (4.26) y (4.27) se encuentran en la figura 4.4 y son las que se utilizan para el diseño, pues ya consideran el coeficiente de seguridad. Estas son paralelas en cada punto a las curvas de esfuerzos máximos de las ecuaciones (4.20) y (4.22) respectivamente. Para

obtener los puntos f_a/f_y correspondientes al valor de $kl/r = C_c$ y $kl/r = 0$, se procede como sigue:

Si se sustituye en la ecuación (4.26) la condición $kl/r = C_c$ y considerando el factor de seguridad, FS_1 , se tiene que:

$$\frac{f_a}{f_y} = \frac{1}{2(1.92)}$$

$$\frac{f_a}{f_y} = 0.261$$

Ahora, en la ecuación (4.27) se sustituye la condición de $kl/r = 0$, y considerando el factor de seguridad, FS_2 , se obtiene:

$$\frac{f_a}{f_y} = \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{f_a}{f_y} = 0.60$$

De las ecuaciones (4.20) y (4.22) se obtiene el tercer punto de la gráfica. Si se escoge la ecuación (4.20) y en ella se sustituye el valor de $kl/r = C_c$ resulta:

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = 0.5$$

Los puntos anteriormente obtenidos se presentan en la figura 4.4, y en la tabla 4.1 se encuentran los valores del factor de longitud efectiva de pandeo, k , para las columnas funda-

mentales recomendados por la Compañía Fundidora de Monterrey.

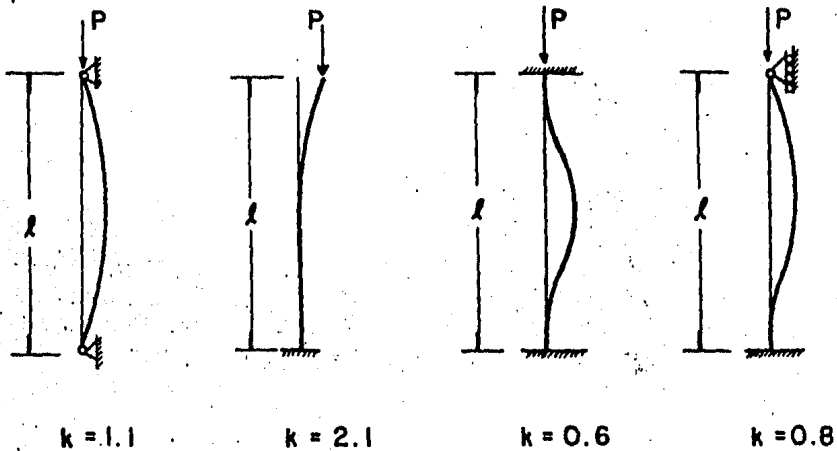


Tabla 4.1 Valor del factor de longitud efectiva de pandeo, k , para las columnas fundamentales, recomendado por la Compañía Fundidora de Monterrey.

Ejemplo 4.1

Para la columna mostrada en la figura 4.5, determinar:
 1) El esfuerzo de compresión admisible y 2) El valor de la carga máxima que puede soportar.

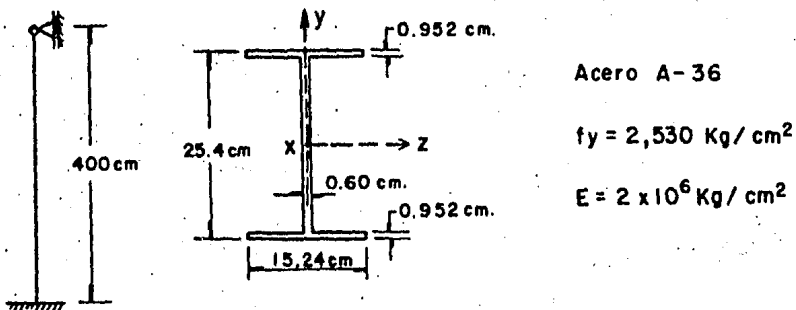


Fig. 4.5 Columna empotrado en la base y articulada en su extremo superior, formada por tres placas.

Solución.

1) Para encontrar el esfuerzo de compresión admisible es necesario conocer algunas características de la sección, como son:

a) área de la sección transversal

$$A = [15.24 (0.952)]^2 + [25.4 - 2 (0.952)] 0.60$$

$$A = 29.017 + 14.10$$

$$A = 43.12 \text{ cm}^2$$

b) momentos de Inercia I_y e I_z

obtención de I_y

$$I_y = \left(\frac{bh^3}{12} \right)_p + \left(\frac{bh^3}{12} \right)_a$$

donde: p = patín de la sección.

a = alma de la sección.

$$I_y = \left(\frac{0.952(15.24)^3}{12} \right) + \frac{23.496(0.60)^3}{12}$$

$$I_y = 561.62 + 0.423$$

$$I_y = 562.04 \text{ cm}^4$$

obtención de I_z

$$I_z = \left(\frac{bh^3}{12} \right)_t - 2 \left(\frac{bh^3}{12} \right)_r$$

donde: t = como sección rectangular.

r = rectángulos al lado del alma.

$$I_z = \frac{15.24(25.40)^3}{12} - 2 \left(\frac{7.32(23.496)^3}{12} \right)$$

$$I_z = 20,811.6 - 15,824.86$$

$$I_z = 4986.65 \text{ cm}^4$$

c) radio de giro r_y y r_z

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{562.04}{43.12}}$$

$$r_y = 3.61 \text{ cm}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{4986.65}{43.12}}$$

$$r_z = 10.75 \text{ cm}$$

d) cálculo del coeficiente de columna

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{f_y}}$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{2 \pi^2 (2 \times 10^6)}{2530}}$$

$$C_c = 124.92$$

e) cálculo del módulo de esbeltez respecto a los ejes Y y Z, para saber si el pandeo es elástico o inelástico.

respecto al eje Y :

$K = 0.8$ (columna empotrada y articulada según tabla 4.1)

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_y = \frac{0.8(400)}{3.61}$$

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_y = 88.64$$

como $(kl/r)_y = 88.64 < C_c = 124.92$ se presenta pandeo inelástico si éste se produce alrededor del eje Y.

respecto al eje Z :

$K = 0.8$ (columna empotrada y articulada según tabla 4.1)

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_z = \frac{0.8(400)}{10.75}$$

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_z = 29.77$$

como $(kl/r)_z = 29.77 < C_c = 124.92$ se presenta pandeo inelástico, si éste se produce alrededor del eje Z.

Sigamos analizando las dos posibilidades:

f) obtención del esfuerzo de compresión admisible para el pandeo alrededor de los dos ejes, Y y Z.

como $(kl/r)_{y,z} < C_c$, la ecuación (4.27) es la adecuada para el análisis.

$$f_a = \left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2 C_c^2} \right] \frac{f_y}{FS_2}$$

respecto al eje Y :

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{(kl/r)_y}{C_c} - \frac{1}{8} \frac{(kl/r)_y^3}{C_c^3}$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{88.64}{124.92} - \frac{1}{8} \frac{(88.64)^3}{(124.92)^3}$$

$$FS_2 = 1.888$$

$$f_a = \left[1 - \frac{(88.64)^2}{2(124.92)^2} \right] \frac{2530}{1.888}$$

$$f_a = 0.748 \left(\frac{2530}{1.888} \right)$$

$$f_a = 1,002.91 \text{ Kg/cm}^2$$

respecto al eje Z :

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{(kl/r)_z}{C_c} - \frac{1}{8} \frac{(kl/r)_z^3}{C_c^3}$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{(29.77)}{124.92} - \frac{1}{8} \frac{(29.77)^3}{(124.92)^3}$$

$$FS_2 = 1.75$$

$$f_a = \left[1 - \frac{(29.77)^2}{2(124.92)^2} \right] \frac{2530}{1.75}$$

$$f_a = 1.404.66 \text{ Kg/cm}^2$$

Se tienen dos resultados de f_a , de ellos se debe escoger el menor, así, la columna fallará primero alrededor del eje Y, donde posee menor resistencia. Por lo que se concluye que el elemento se colapsará respecto al eje de menor momento de inercia, menor radio de giro, que corresponde al módulo de esbeltez mayor, que en este caso resultó ser $(kl/r)_y$ y por lo que el esfuerzo de compresión admisible es:

$$f_a = 1,002.91 \text{ Kg/cm}^2$$

2) La carga máxima de compresión se obtiene con $f_{máx}$, multiplicado por el área de la sección transversal, es decir:

$$P_a = f_a \times A$$

$$f_a = \frac{f_{máx}}{FS}$$

$$P_{máx} = f_{máx} A$$

$$P_{máx} = f_a FS A$$

$$P_{máx} = 1002.91(1.888)(43.12)$$

$$P_{\text{máx}} = 81,647.47 \text{ Kg}$$

$$P_{\text{máx}} = 81.65 \text{ Tn}$$

la anterior es la carga máxima que se puede aplicar a esta columna, y la carga de compresión admisible es:

$$P_a = f_a A$$

$$P_a = 1,002.91 (43.12)$$

$$P_a = 43,245.48 \text{ Kg}$$

$$P_a = 43.24 \text{ Tn}$$

Ahora, es posible proponer una secuela de cálculo para obtener la carga de compresión admisible para una columna con carga axial, los pasos a seguir son:

1. Se calcula el coeficiente de columna C_c .

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{f_y}}$$

2. a) Se obtiene la longitud efectiva de columna $(kl)_{y,z}$
 b) Se obtienen los radios de giro de la sección $r_{y,z}$
3. Se calculan los módulos de esbeltez $(kl/r)_{y,z}$ y se elige aquel que resulte de mayor valor, ya que según la gráfica de la figura 4.4, el esfuerzo admisible correspondiente resulta menor.
4. Cálculo del esfuerzo de compresión admisible.

- a) Si kl/r es mayor que C_c , el pandeo es elástico y la expresión que se aplica es la ecuación (4.26)

$$f_a = \frac{C_c^2}{2 FS_1 (kl/r)^2} f_y$$

- b) Si kl/r es menor que C_c , el pandeo es inelástico y la expresión que se aplica es la ecuación (4.27)

$$f_a = \frac{f_y}{FS_2} \left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2 C_c^2} \right]$$

Los valores de FS_1 y FS_2 están dados por las ecuaciones (4.24) y (4.25) respectivamente.

5. Por último se calcula la carga de compresión admisible:

$$P_a = f_a \cdot A$$

Ejemplo 4.2

Determinar la carga de compresión admisible, P_a , para la columna de la figura 4.6 .

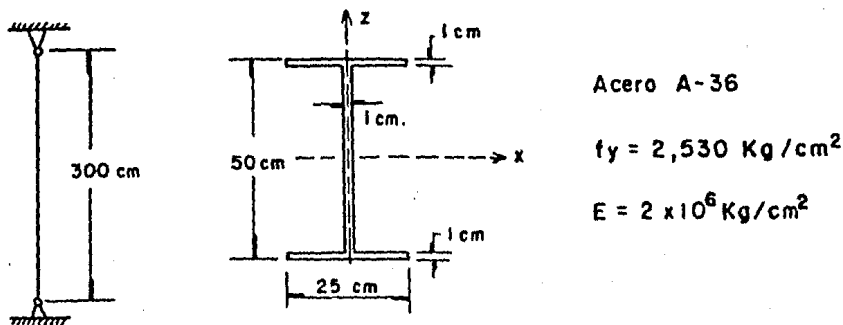


Fig. 4.6 Columna doblemente articulada en ambas direcciones, formada por tres placas.

Solución.

Area de la sección transversal

$$A = 2(1 \times 25) + 1(48)$$

$$A = 98 \text{ cm}^2$$

1. Cálculo del coeficiente de columna C_c .

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{f_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 (2 \times 10^6)}{2530}}$$

$$C_c = 124.92$$

2. a) Obtención de la longitud efectiva de pandeo ($k l$)

respecto al eje X :

$k_x = 1$, por ser la columna articulada en sus dos extremos

$$(k l)_x = 300 \text{ cm}$$

respecto al eje Z :

$$k_z = 1$$

$$(k l)_z = 300 \text{ cm}$$

b) Radios de giro $r_{x,z}$

respecto al eje X :

$$I_x = \frac{25(50)^3}{12} - \frac{24(48)^3}{12}$$

$$I_x = 39,232.7 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{39,232.7}{98}}$$

$$r_x = 20 \text{ cm}$$

respecto al eje Z :

$$I_z = \frac{1.0(25)^3}{12} \times 2 + \frac{48(1.0)^3}{12}$$

$$I_z = 2,608.2 \text{ cm}^4$$

$$r_z = \sqrt{\frac{2608.2}{98}}$$

$$r_z = 5.15 \text{ cm}$$

3. Cálculo del módulo de esbeltez $(kl/r)_{x,z}$

respecto al eje X :

$$(kl/r)_x = \frac{300}{20}$$

$$(kl/r)_x = 15$$

respecto al eje Z :

$$(kl/r)_z = \frac{300}{5.15}$$

$$(kl/r)_z = 58.13$$

se escoge el mayor valor del módulo de esbeltez pues alrededor de ese eje la columna es más susceptible al pandeo.

4. Cálculo del esfuerzo admisible.

Como $(kl/r)_z = 58.13 < C_c = 124.92$ se presenta pandeo inelástico por lo que el esfuerzo admisible está dado por la ecuación (4.27) y el factor de seguridad, FS_2 , por la ecuación (4.25), sustituyendo los valores en las ecuaciones anteriores:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{58.13}{124.92} - \frac{1}{8} \frac{(58.13)^3}{(124.92)^3}$$

$$FS_2 = 1.829$$

$$f_a = \left[1 - \frac{(58.13)^2}{2(124.92)^2} \right] \frac{2530}{1.829}$$

$$f_a = (0.8917)(2530/1.8286)$$

$$f_a = 1233.7 \text{ Kg/cm}^2$$

5. Cálculo de P_a .

$$P_a = f_a \cdot A$$

$$P_a = 1233.7(98)$$

$$P_a = 120,900 \text{ Kg}$$

$$P_a = 120.9 \text{ Tn}$$

Ejemplo 4.3

Una columna de acero formada por tres placas como se muestra en la figura 4.7, está empotrada en su extremo inferior; en su extremo superior está libre para el pandeo alrededor del eje "x" y articulada para el pandeo alrededor del eje "z". Calcular la carga máxima de compresión admisible en la columna, y la carga máxima que puede soportar dicha columna. El acero es de límite de fluencia $f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$ (A-36) y su módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

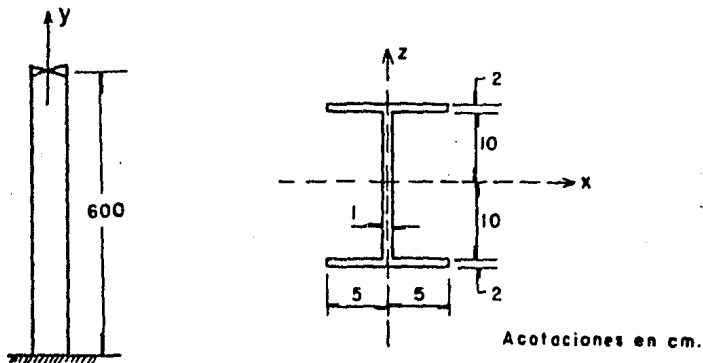


Fig. 4.7 Columna con diferentes condiciones de apoyo en ambas direcciones.

Solución.

Cálculo de I_x e I_z

$$I_x = \frac{10(24)^3}{12} - \frac{9(20)^3}{12}$$

$$I_x = 5520 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \left(\frac{2(10)^3}{12} \right) 2 + \frac{20(1.0)^3}{12}$$

$$I_z = 335 \text{ cm}^4$$

radios de giro r_x y r_z correspondientes:

$$A = 2(10 \times 2) + 20 \times 1$$

$$A = 60 \text{ cm}^2$$

$$r_x = \sqrt{\frac{5520}{60}}$$

$$r_x = 9.60 \text{ cm}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{335}{60}}$$

$$r_z = 2.40 \text{ cm}$$

1. Cálculo del coeficiente de columna:

$$C_0 = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{f_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 (2 \times 10^6)}{2530}}$$

$$C_c = 124.92$$

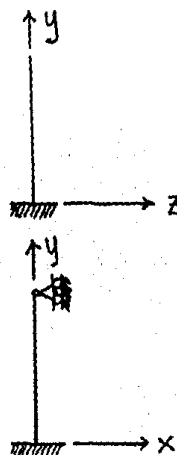
2. Cálculo de las longitudes efectivas de pandeo. Para el pandeo alrededor del eje X, $k_x = 2.1$ (columna empotrada - en su extremo inferior y libre en el superior). Para el pandeo alrededor del eje Z, $k_z = 0.8$ (columna empotrada en su extremo inferior y articulada en el superior), según tabla 4.1

$$(kl)_x = 2.1(600)$$

$$(kl)_x = 1260 \text{ cm}$$

$$(kl)_z = 0.8(600)$$

$$(kl)_z = 480 \text{ cm}$$



3. Cálculo de los módulos de esbeltez

$$(kl/r)_x = \frac{1260}{9.60}$$

$$(kl/r)_x = 131.25$$

$$(kl/r)_z = \frac{480}{2.40}$$

$$(kl/r)_z = 200.0$$

Como resulta $(kl/r)_z > (kl/r)_x$ se elige $kl/r = 200.0$

4. Cálculo del esfuerzo admisible de compresión.

Como el módulo de esbeltez mayor de la columna resultó, $kl/r = 200.0 > C_c$; el pandeo es elástico, por lo que:

$$FS_1 = 1.92$$

$$f_a = \frac{(124.92)^2}{2(1.92)(200.0)^2} (2530)$$

$$f_a = 257.04 \text{ Kg/cm}^2$$

5. Carga admisible

$$P_a = f_a \cdot A$$

$$P_a = 257.04(60)$$

$$P_a = 15,422.4 \text{ Kg}$$

$$P_a = 15.42 \text{ Tn}$$

Ejemplo 4.4

Diseñar los elementos de la siguiente armadura (figura 4.8) libremente apoyada, fabricada con acero A-36 con el sistema de cargas que se propone.

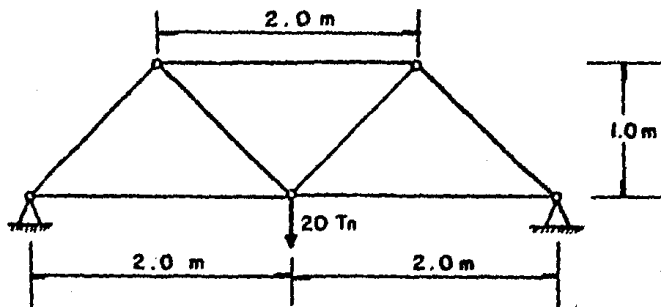


Fig.4.8 Armadura con carga al centro del claro

Si se hace un análisis por nudo y aprovechando que la armadura es simétrica:

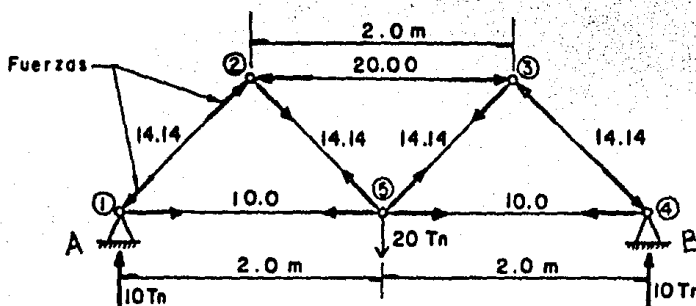


Fig. 4.9 Armadura con fuerzas internas y externas en cada nudo.

1) Reacciones en los apoyos (figura 4.9)

De $\sum F_y = 0$;

$$R_A + R_B - 20 = 0$$

$$R_A + R_B = 20 \quad (a)$$

de $\sum M_A = 0$;

$$R_A (0) + 20(2) - R_B (4) = 0$$

$$40 = 4 R_B$$

(b)

Despejando de la ecuación (b) a la reacción R_B

$$R_B = 10 \text{ Tn}$$

Sustituyendo en la ecuación (a) el valor de R_B

$$R_A = 10 \text{ Tn}$$

2) Obtención de las fuerzas en las barras.

Nudo ①

$$\text{de } \Sigma F_y = 0$$

$$10 - F_{12} \text{ Sen } 45^\circ = 0$$

$$F_{12} = \frac{10}{\text{Sen } 45^\circ}$$

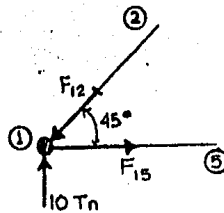
$$F_{12} = 14.14 \text{ Tn}$$

$$\text{de } \Sigma F_x = 0$$

$$F_{15} - 14.14 \text{ Cos } 45^\circ = 0$$

$$F_{15} = 14.14(0.7071)$$

$$F_{15} = 10 \text{ Tn}$$



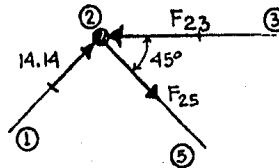
Nudo ②

$$\text{de } \Sigma F_y = 0$$

$$14.14 \text{ Sen } 45^\circ - F_{25} \text{ Sen } 45^\circ = 0$$

$$F_{25} = \frac{14.14 \text{ Sen } 45^\circ}{\text{Sen } 45^\circ}$$

$$F_{25} = 14.14 \text{ Tn}$$



$$\text{de } \Sigma F_x = 0$$

$$14.14 \cos 45^\circ + 14.14 \cos 45^\circ - F_{23} = 0$$

$$F_{23} = 2(14.14 \cos 45^\circ)$$

$$F_{23} = 2(10)$$

$$F_{23} = 20 \text{ Tn}$$

Los resultados anteriores se muestran en la figura 4.9 .

De este análisis se obtiene que el miembro que forma la cuerda superior está sujeto a la acción de una carga de compresión de 20.0 Tn. Si se desprecia el peso propio del elemento se considera que dicho miembro es una columna de acero, doblemente articulada y con carga axial de compresión.

Para elegir la sección a revisar se puede suponer que el esfuerzo de compresión admisible sea del orden del 40% de f_y , y utilizando acero A-36, $f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$, se tiene:

$$f_a = 0.4 f_y$$

$$f_a = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

entonces el área necesaria de la sección transversal del miembro será:

$$A = \frac{P}{f_a} = \frac{20,000}{1,000}$$

$$A = 20 \text{ cm}^2$$

Del manual de la fundidora se propone, para el miembro superior, una sección transversal formada por dos ángulos de lados iguales de 3" x 3" x 1/4", colocados espalda con espalda y unidos al centro por una placa soldada como atiesador, como se muestra en la figura 4.10 .

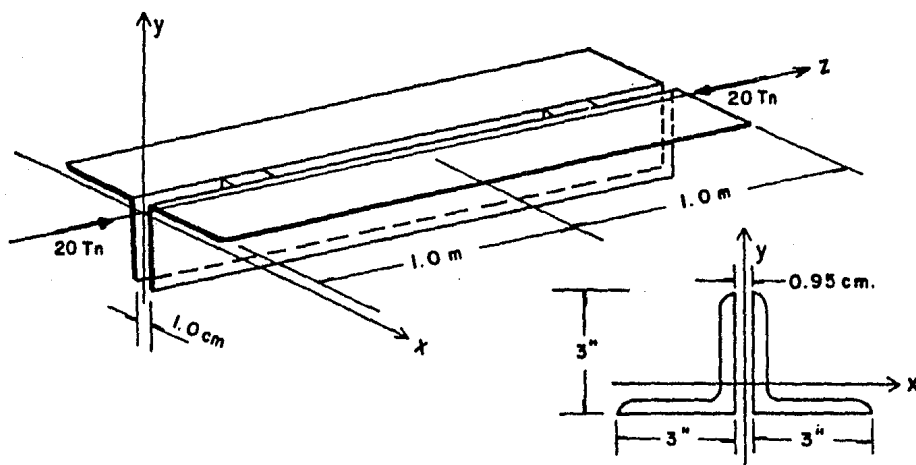


Fig. 4.10 Miembro superior de la armadura (Fig. 4.9), y su sección transversal propuesta.

Entre ambos ángulos se colocan atiesadores para garantizar la integración de la sección y lograr que el pandeo sea alrededor del eje "x" o "y"; se forman las articulaciones en los extremos de la pieza de modo que la sección solo pueda girar alrededor de uno de estos ejes.

3) Módulos de esbeltez.

De acuerdo con lo anterior se deben calcular dos módulos de esbeltez, uno alrededor del eje "x" y otro alrededor del eje "y" .

Se tiene $k_x = 1$ (pieza doblemente articulada).

$$(kl)_x = 1.0(200)$$

$$(kl)_x = 200 \text{ cm}$$

$$(kl)_y = 1.0(200)$$

$$(kl)_y = 200 \text{ cm}$$

del manual de la compañía fundidora

$$r_x = 2.36 \text{ cm}$$

$$r_y = 3.50 \text{ cm}$$

$$(kl/r)_x = \frac{200}{2.36}$$

$$(kl/r)_x = 84.75$$

$$(kl/r)_y = \frac{200}{3.50}$$

$$(kl/r)_y = 57.14$$

Como $(kl/r)_x > (kl/r)_y$, la pieza se pandeará primero alrededor del eje "x", por lo tanto para el cálculo del esfuerzo de compresión admisible, rige $(kl/r) = 84.75$.

Cálculo de C_c

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 \times 2 \times 10^6}{2530}}$$

$$C_c = 124.92$$

Como $kl/r = 84.75 < C_c$ el pandeo es inelástico y por lo tanto:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{84.75}{124.92} - \frac{(84.75)^3}{8(124.92)^3}$$

$$FS_2 = 1.882$$

el esfuerzo admisible es

$$f_a = \frac{1}{1.882} \left[1 - \frac{(84.75)^2}{2(124.92)^2} \right] 2530$$

$$f_a = 1034.94 \text{ Kg/cm}^2$$

del manual se obtiene el área de la sección propuesta

$$A = 18.58 \text{ cm}^2$$

la carga admisible es

$$P_a = f_a \cdot A$$

$$P_a = 1034.94(18.58)$$

$$P_a = 19,229.19 \text{ Kg}$$

$$P_a = 19.23 \text{ Tn}$$

4.2 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE MADERA

Los elementos estructurales de madera, se clasifican en macizos, compuestos y espaciados como se muestra en la figura 4.11, en ella se observa que los elementos macizos están contruidos de una sola pieza, los compuestos, por varias piezas cuyos ejes longitudinales están dispuestos paralelamente y conectados mediante elementos de unión y los espaciados, están constituidos por dos o más piezas macizas separadas por bloques de madera (referencia 4.2).

De la ecuación del esfuerzo crítico para columnas sujetas a carga axial, y considerando una columna de sección rectangular maciza (figura 4.12); la expresión del esfuerzo crítico es (del capítulo anterior):

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2}$$

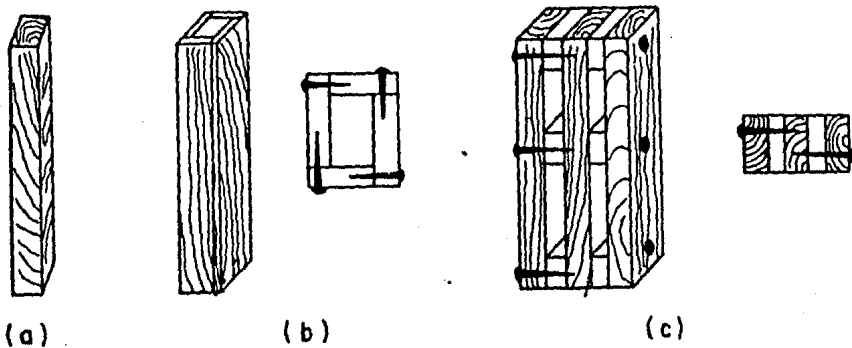


Fig. 4.11 Clasificación de elementos estructurales de madera
a)-macizos, b)-compuestos y c)-espaciados.

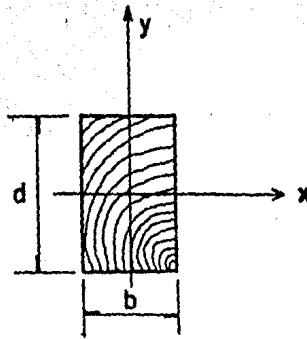


Fig. 4.12 Sección rectangular maciza.

si se obtienen los momentos de inercia y posteriormente los radios de giro respecto a ambos ejes:

$$I_x = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_y = \frac{db^3}{12}$$

$$A = bd$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{d^2}{12}}$$

$$r_x = \frac{d}{\sqrt{12}}$$

(4.28)

de manera similar

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$$

$$r_y = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad (4.29)$$

Si $b < d$ se cumplirá que $r_y < r_x$. Debiendo tomar el menor valor del radio de giro, r_y ; ya que con respecto a ese eje se producirá el pandeo, en el cual se tiene el menor momento de inercia de la sección, menor radio de giro, provocando el mayor módulo de esbeltez del elemento, siempre y cuando las condiciones sean las mismas en cualquier dirección.

Si se sustituye la ecuación (4.29) en la (3.10), se tiene:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kl}{r_y}\right)^2}$$

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(kl/b)^2} \quad (4.30)$$

Introduciendo un factor de seguridad, $FS = 2.75$, en la ecuación (4.30) y considerando que las dimensiones de la sección transversal de la columna deberán reducirse 1 cm por cada lado, se obtiene el esfuerzo de compresión admisible, f_{cd} :

$$f_{cd} = \frac{0.30 E}{(kl/b_n)^2} \quad (4.31)$$

donde: f_{cd} = esfuerzo admisible de compresión para columnas largas.

E = módulo de elasticidad de la madera.

k = factor de longitud efectiva.

b_n = dimensión neta en dirección del eje X

Para las columnas fundamentales, los valores de k , recomendados por el reglamento de construcciones para el Distrito Federal, se presentan en la figura 4.13 .

La expresión (4.31) permite calcular el esfuerzo admisible a compresión de una columna de madera de sección rectangular maciza con carga axial operando paralelamente a las fibras, en el rango elástico.

Como el esfuerzo f_{cd} , dado por la ecuación anterior, no debe exceder el valor del esfuerzo admisible de compresión dado para columnas cortas, f_{cp} , se tiene:

$$f_{cd} \leq f_{cp}$$

Los valores del esfuerzo admisible de compresión para columnas cortas, se encuentran en la tabla 4.2 para distintos tipos de madera.

La ecuación (4.31) representa la curva de Euler, la cual es aplicada hasta un cierto límite de módulo de esbeltez; este valor límite se presenta cuando $f_{cd} = f_{cp}$.

haciendo $f_{cd} = f_{cp}$ en la ecuación (4.31) y despejando el módulo de esbeltez, se tiene:

$$f_{cp} = \frac{0.30 E}{(kl/b_n)^2}$$

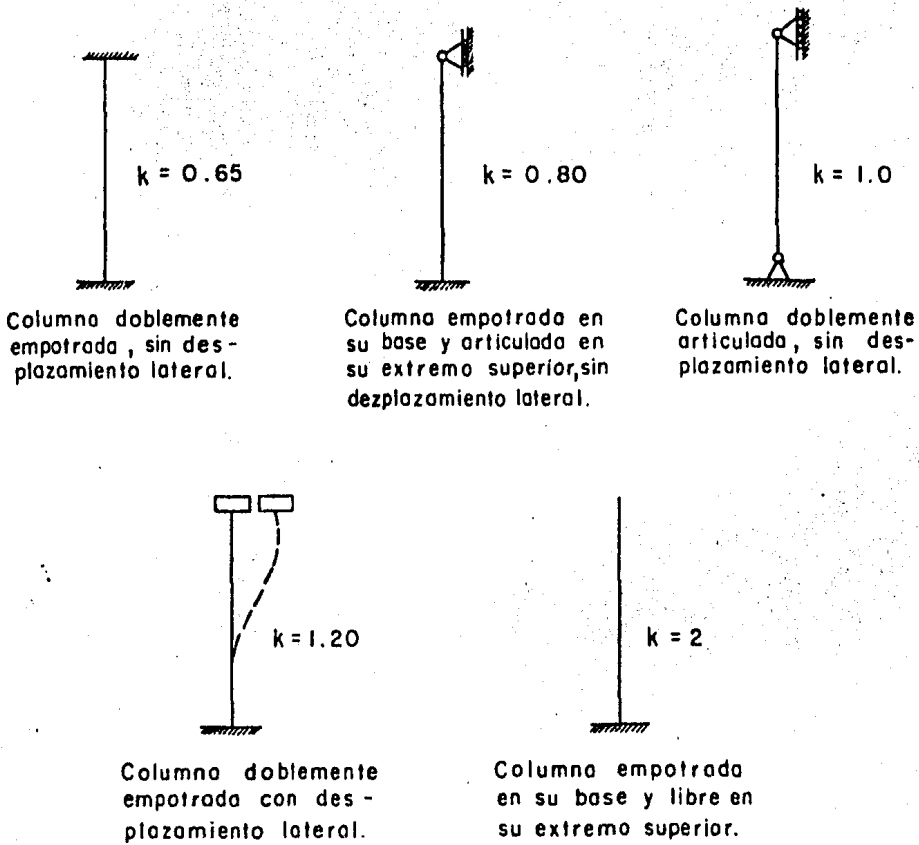


Fig. 4.13 Valores de k para columnas de madera con diferentes condiciones de apoyo, recomendados por el R.C.D.F.

Tipo de madera	f_{cp} (Kg/cm ²)
Selecta	70
Primera	50
Segunda	25
Tercera	17

Tabla 4.2 Esfuerzo admisible de compresión, f_{cp} , para columnas cortas recomendado por el RCDF.

$$\frac{kl}{b_n} = \sqrt{\frac{0.30 E}{f_{cp}}}$$

Si se llama al valor anterior de $kl/b_n = C_c$, por ser el límite de aplicación de la fórmula de Euler, se tiene:

$$C_c = \sqrt{\frac{0.30 E}{f_{cp}}} \quad (4.32)$$

donde: C_c = coeficiente de columna.

f_{cp} = esfuerzo admisible de compresión para columnas cortas.

E = módulo de elasticidad.

Para módulos de esbeltez, kl/b_n , menores que el coeficiente de columna, C_c , el pandeo es inelástico y en este caso no es aplicable la ecuación (4.31) que da el esfuerzo admisible de compresión para columnas esbeltas; en vez de ello, el esfuerzo admisible de compresión, f_{cd} , es igual al esfuerzo admisible para columnas cortas, f_{cp} , esto es:

$$f_{cd} = f_{cp} \quad (4.33)$$

En la figura 4.14 se muestra el límite de aplicación de la curva de Euler, C_c (coeficiente de columna), que separa el pandeo elástico de la falla por resistencia; la curva de Euler dada por la ecuación (4.31) para columnas esbeltas y la recta horizontal $f_{cd} = f_{cp}$ (ecuación(4.33)) para columnas cortas de madera.

Ahora, se puede proponer una secuela de cálculo para obtener la carga de compresión admisible para una columna de

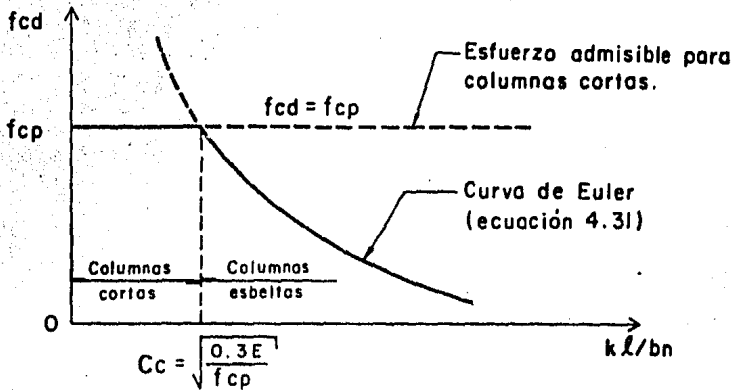


Fig. 4.14 Gráfica del esfuerzo admisible, f_{cd} , en función del módulo de elasticidad, kl/bn .

madera sujeta a carga de compresión axial paralela a las fibras; los pasos a seguir son:

1. Se calcula el coeficiente de columna, C_c , dado por la ecuación (4.32) .

$$C_c = \sqrt{\frac{0.30 E}{f_{cp}}}$$

2. Se calcula el módulo de esbeltez de la columna; para el pandeo en ambos planos: kl/b_n para el pandeo en el plano XZ y kl/d_n para el pandeo en el plano YZ, el mayor de és-

tos módulos de esbeltez será el que se escoja.

3. Cálculo del esfuerzo de compresión admisible.

Suponiendo que el módulo de esbeltez mayor se da en el plano XZ:

- a) Si el módulo de esbeltez mayor, kl/b_n es mayor o igual que el coeficiente de columna, C_c , el pandeo es elástico y la expresión que se emplea es la ecuación (4.31).

$$f_{cd} = \frac{0.30 E}{(kl/b_n)^2} ; \text{ si } kl/b_n \geq C_c$$

- b) Si el módulo de esbeltez mayor, kl/b_n , es menor que el coeficiente de columna, C_c , se trata de una columna -- corta y la expresión que se emplea es la ecuación(4.33)

$$f_{cd} = f_{cp} ; \text{ si } kl/b_n < C_c$$

4. Por último se calcula la carga de compresión admisible.

$$P_a = f_{cd} \cdot A_n \quad (4.34)$$

Como el reglamento de construcciones para el Distrito Federal recomienda el uso de una excentricidad mínima accidental igual a 0.10 de la sección transversal de la columna en las dos direcciones de análisis, esta excentricidad de la carga produce un efecto de flexión y obliga a diseñar la columna por flexocompresión, tema que se sale del alcance de éste trabajo.

Los ejemplos que siguen serán resueltos considerando que la carga es completamente axial.

Ejemplo 4.5

Determinar la carga axial, en condiciones de servicio, para una columna de madera de primera, con las siguientes condiciones de apoyo. En el plano XY, se encuentra embotada en su base y articulada en su extremo superior; en el plano ZY, se encuentra articulada en ambos extremos. La sección transversal es de 15 x 25 cm y tiene una altura de 5 m.

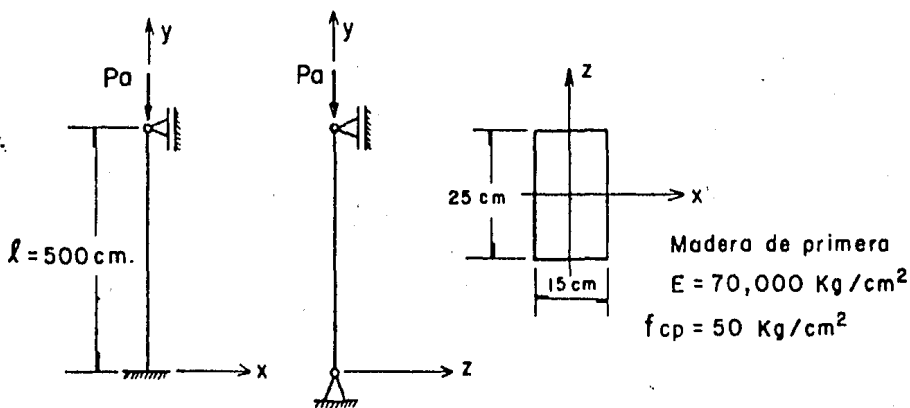


Fig. 4.15 Columna con diferente sistema de apoyo en ambos planos.

Solución.

1. Módulos de esbeltez.

a) En el plano XY

$$k_z = 0.8$$

$$\left(\frac{k \ell}{b_n} \right)_z = \frac{0.8(500)}{(15-1)}$$

$$\left(\frac{kl}{b_n}\right)_z = 28.60$$

b) en el plano ZY

$$k_x = 1.0$$

$$\left(\frac{kl}{d_n}\right)_x = \frac{1.0(500)}{(25-1)}$$

$$\left(\frac{kl}{d_n}\right)_x = 20.80$$

Como $(kl/b_n)_z > (kl/d_n)_x$, el pandeo ocurrirá en el plano XY, por lo que la relación de esbeltez del elemento es:

$$\frac{kl}{b_n} = 28.6$$

2. Cálculo del coeficiente de columna, C_c .

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3(70,000)}{50.0}}$$

$$C_c = 20.5$$

3. Cálculo del esfuerzo de compresión admisible.

Como el módulo de esbeltez $kl/b_n > C_c$, el pandeo es elástico, y la expresión (4.31) da el esfuerzo admisible de

compresión paralelo a las fibras, f_{cd} .

$$f_{cd} = \frac{0.30 E}{(kl/b_n)^2}$$

$$f_{cd} = \frac{0.30(70,000)}{(28.6)^2}$$

$$f_{cd} = 25.7 \text{ Kg/cm}^2$$

4. Cálculo de la carga de compresión admisible.

$$P_a = f_{cd} \cdot A_n$$

$$P_a = 25.7(336)$$

$$P_a = 8635.2 \text{ Kg}$$

$$P_a = 8.64 \text{ Tn}$$

Ejemplo 4.6

¿Cuál será la carga admisible de trabajo para una columna de excelente calidad, articulada en sus extremos con una longitud de 7.62 m y una sección transversal de 25.4 cm por 30.4 cm? . Como se muestra en la figura 4.16 .

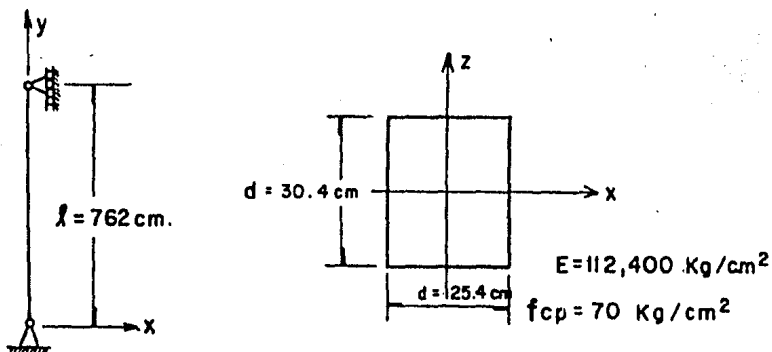


Fig. 4.16 Columna con sistema de apoyo igual para ambos planos.

Solución.

1. Módulo de esbeltez de la columna

$k = 1$ por ser doblemente articulada para ambos sentidos (plano XY, y plano ZY).

a) en el plano ZY

$$\frac{kl}{d_n} = \frac{762(1)}{29.4}$$

$$\frac{kl}{d_n} = 25.92$$

b) en el plano XY

$$\frac{kl}{b_n} = \frac{762(1)}{24.4}$$

$$\frac{kl}{b_n} = 31.23$$

Como $kl/b_n > kl/d_n$ el módulo de esbeltez que se tomará será $kl/b_n = 31.23$

2. Cálculo del coeficiente de columna, C_c .

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3(112,400)}{70}}$$

$$C_c = 21.95$$

3. Cálculo del esfuerzo de compresión admisible

Como $kl/b_n > C_c$ la columna es esbelta y presenta pandeo elástico, por lo que la expresión que se deberá utilizar es la (4.31) para obtener el esfuerzo admisible de trabajo.

$$f_{cd} = \frac{0.30(112,400)}{(31.23)^2}$$

$$f_{cd} = 34.6 \text{ Kg/cm}^2$$

4. Carga admisible de trabajo

$$P_a = f_{cd} A_n$$

$$P_a = 29.4(24.4) 34.6$$

$$P_a = 24,820.7 \text{ Kg}$$

$$P_a = 24.8 \text{ Tn}$$

Ejemplo 4.7

¿Cuál es la carga axial admisible de trabajo para una columna de primera, doblemente articulada en ambas direcciones, con una sección transversal de 20.3 cm por 25 cm, como se muestra en la figura 4.17? . Si su longitud es:

a) $l_1 = 1.83 \text{ m}$

b) $l_2 = 3.66 \text{ m}$

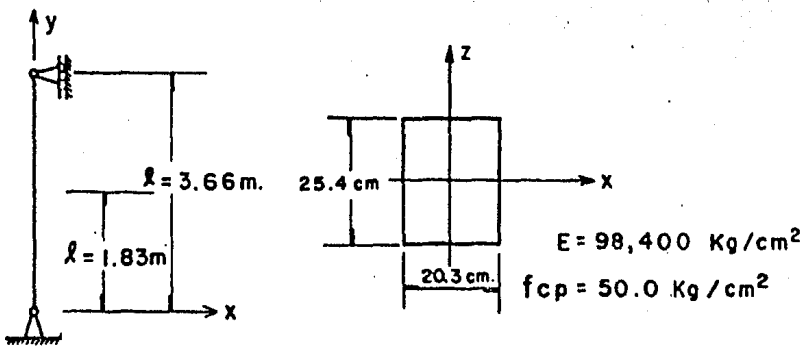


Fig. 4.17 Columna articulada en ambos extremos para dos longitudes dadas y una sola sección transversal.

Solución.

1. Módulo de esbeltez.

a) en el plano XY

a.1) si $l = 1.83$ m

$$\frac{kl_1}{b_n} = \frac{183(1)}{19.3} = 9.48$$

a.2) si $l = 3.66$ m

$$\frac{kl_2}{b_n} = \frac{366(1)}{19.3} = 18.97$$

b) en el plano YZ

b.1) si $l = 1.83$ m

$$\frac{kl_1}{d_n} = \frac{(1)183}{24.4} = 7.5$$

b.2) si $l = 3.66$ m

$$\frac{kl_2}{d_n} = \frac{(1)366}{24.4} = 15$$

2. Coeficiente de columna, C_c .

$$C_c = \sqrt{\frac{0.30 E}{f_{cp}}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{0.30(98,400)}{50.0}}$$

$$C_c = 24.29$$

3. Cálculo del esfuerzo admisible, f_{cd} .

Como se observa en el punto anterior, los módulos de esbeltez son mayores en el plano XY, por lo que la columna es más susceptible al pandeo en este plano que en el YZ; también se observa que los módulos de esbeltez en el plano XY para las dos longitudes, kl_1/b_n y kl_2/b_n son menores que el coeficiente de columna, C_c , esto es:

$$\text{como: } kl_1 / b_n < C_c$$

$$kl_2 / b_n < C_c$$

el esfuerzo admisible de compresión paralelo a las fibras está dado por la ecuación (4.33).

$$f_{cd} = f_{cp}$$

Por lo que en ambos casos:

$$f_{cd} = 50 \text{ Kg/cm}^2$$

4. Carga admisible de trabajo.

Del punto anterior se obtuvo que el esfuerzo admisible, f_{cd} , para la columna con diferente longitud (l_1 y l_2) es igual en ambos casos, por lo que la carga admisible será la misma aún cuando la columna sea de 1.83 m o 3.66 m de longitud.

$$P_a = A_n \cdot f_{cd}$$

$$P_a = 24.4(19.3) 50$$

$$P_a = 23,546 \text{ Kg}$$

$$P_a = 23.55 \text{ Tn}$$

CONCLUSIONES

1. El problema de pandeo no es de resistencia, sino de estabilidad.
2. Cuando una columna es esbelta, a la carga con la cual se inicia el pandeo se le llama Carga Crítica, P_{cr} , la cual produce flexión por pandeo en el plano de mayor módulo de esbeltez y es menor que la carga de resistencia última del material.
3. Se presentan tres tipos de estado en una columna: a) equilibrio estable, b) equilibrio indiferente y c) estado inestable o de desequilibrio.
4. El análisis para la carga crítica, P_{cr} , se hace para columnas de conformación ideal, es decir; que el material del cual se construye el elemento se comporta elásticamente, el elemento es totalmente homogéneo, el sistema de apoyos es ideal, la columna es perfectamente recta y la carga es perfectamente axial.
5. La ecuación diferencial de la elástica que se utilizó en el estudio, es la aproximada debido a que las deformaciones son muy pequeñas, por lo que, cuando P es igual a P_{cr} , la flecha no está determinada. Si en vez de aquella, se utiliza la expresión exacta, resulta que no existe ninguna indeterminación en el valor de la flecha, sino que tiene un valor definido.

6. La expresión de la carga crítica para las columnas fundamentales, se puede obtener a partir de la columna doblemente articulada, comparando la curva elástica de ésta con las primeras.
7. El factor de longitud efectiva de pandeo, k , se utiliza para que la expresión de la carga crítica tome una forma general, $P_{cr} = \pi^2 E I / (k l)^2$.
8. La carga crítica para una columna es directamente proporcional a su rigidez flexional, $E I$, e inversamente proporcional al cuadrado de su longitud, así como también, independiente de la resistencia a la compresión del material.
9. Para las columnas fundamentales, el factor k , está bien definido, mientras que para las columnas que pertenecen a estructuras reales, se tiene que investigar la interacción que ejercen los elementos que concurren a cada nudo y con los nomogramas presentados en las figuras 2.10 ó 2.11, obtener el factor de longitud efectiva que corresponde.
10. Para que la expresión del esfuerzo crítico de Euler sea válida, $f_{cr} = \pi^2 E / (k l / r)^2$, éste debe permanecer por debajo del límite de proporcionalidad, ya que arriba de éste el material se comporta inelásticamente.
11. Si una columna cumple con el punto anterior se dice que es esbelta, si no, es una columna intermedia o corta. Esta última fallará por resistencia del material (aplastamiento o ruptura), la intermedia tiene un comportamiento

en el cual las consideraciones de pandeo y resistencia tienen interacción. Lo anterior conduce a tener dos tipos de pandeo; elástico e inelástico.

12. En general, la fórmula de Euler es aplicable a las columnas cuyo módulo de esbeltez es, $kl/r \gg \pi \sqrt{E/f_{1p}}$, para columnas de cualquier material sujetas a compresión axial.
13. Los métodos basados en la fórmula de la Secante se cimentan en consideraciones puramente teóricas. Esta fórmula engloba las columnas cortas, intermedias y esbeltas en una sola clase continua. Se recomienda utilizar una relación de excentricidad $qC/r^2 = 0.25$, con un factor de seguridad $FS = 2.0$.
14. La fórmula de la Secante también se utiliza considerando las imperfecciones, empleando una excentricidad equivalente q , que aumenta linealmente con la longitud, l , de la columna. Se recomienda un valor de $q/l = 1/400$, y un factor de seguridad $FS = 2.0$.
15. Para el diseño de columnas de acero, se proponen fórmulas totalmente empíricas más sencillas que las anteriores basadas en ensayos, las cuales proporcionan el esfuerzo admisible de trabajo en función del módulo de esbeltez de la columna.
16. Para las columnas de madera se establece un método sencillo, que permite dimensionar columnas de cualquier relación de esbeltez, dando como resultado el esfuerzo de compresión admisible.

REFERENCIAS

- 1.1 Timoshenko, S.P. y Gere, J.M. "Mécánica de Materiales". Primera edición en español. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, de México, D.F., 1974.
- 1.2 B.C. Johnston (Ed.), "The Column Research Council. Guide to Design Criteria for Metal Compression Members". Segunda edición, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1966.
- 2.1 Timoshenko, S.P. y Gere, J.M. "Mecánica de Materiales". Primera edición en español. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, de México, D.F., 1974.
- 2.2 Rainville D. E. "Ecuaciones Diferenciales Elementales". Decimoprimerá reimpresión en español. Editorial Trillas, México, 1982.
- 2.3 Timoshenko, S.P. y Gere, J.M. "Mecánica de Materiales". Primera edición en español. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, de México, D.F., 1974.
- 3.1 Popov P. E. "Mecánica de Materiales". Primera edición en español. Editorial Limusa, S.A., México, 1982.
- 3.2 Timoshenko, S.P. y Gere, J.M. "Mecánica de Materiales". Primera edición en español. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, de México, D.F., 1961.

- 3.3 Timoshenko, S.P. y Gere, J.M. "Mécánica de Materiales".
Primera edición en español. Unión Tipográfica Editorial
Hispano-Americana, de México, D.F., 1974.
- 4.1 Manual of Steel Construction (Manual de la Construcción
de Acero). Séptima edición. Publicado por American Insti-
tute of Steel Construction, Inc., Nueva York, 1970.
- 4.2 Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Cons-
trucciones para el Distrito Federal "Diseño y Construc-
ción de Estructuras de Madera", No. 404 del Instituto de
Ingeniería de la UNAM, México, D.F., 1977.