



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA

25
180

"TUNELES EN ROCA"

TESIS PROFESIONAL

ELABORADA PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

por

RIO ZOLEZZI GUSTAVO DEL

MEXICO, D. F.

NOVIEMBRE - 1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TUNELES EN ROCA

- I. INTRODUCCION
- II. MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS
- III. MECANICA DE MEDIOS DISCONTINUOS
- IV. TUNELES EN MEDIOS REOLOGICOS
- V. ANALISIS Y DISEÑO DE TUNELES EN ROCA
- VI. DISEÑO Y CONSTRUCCION DEL REVESTIMIENTO DE TUNELES MEDIANTE EL NUEVO METODO AUSTRIACO
- VII. CONCLUSIONES

CAPITULO I. INTRODUCCION.

Las obras subterráneas, y en particular los túneles, son casi tan antiguas como la humanidad, iniciándose en la exploración y desarrollo de grutas y cavernas. La historia antigua abunda en citas de túneles de uso hidráulico, bélico y minero; el primer empleo masivo de explosivos en túneles se sitúa alrededor del año 1680 con ocasión de las obras del canal de Languedoc; asimismo, el siglo XVIII conoció importantes túneles mineros en Inglaterra. La historia moderna de los túneles puede decirse que comienza cuando M. I. Brunnel inicia en 1825 la perforación de un túnel bajo el Támesis, de unos 450 m de longitud con un rudimentario escudo que había patentado en 1818. Por otra parte en nuestro país, existe noticia sobre la construcción de túneles mineros desde el inicio de la colonia; ya en este siglo se hicieron necesarios túneles de muy diversa tipología, entre los que se pueden citar túneles ferroviarios, carreteros, galerías y túneles en obras hidroeléctricas, túneles urbanos, etc. En el futuro será preciso construir obras subterráneas que satisfagan nuevos requerimientos como pueden serlo: depósitos de desechos radiactivos, telecomunicaciones, conducciones industriales, etc.

De todo lo antes expuesto se concluye la fundamental importancia que tiene el establecer una metodología para el análisis y diseño de túneles, finalidad que persigue, al menos como una contribución parcial, esta tesis.

En los capítulos II y III se presentan bases teóricas de la mecánica de medios continuos y discontinuos, respectivamente, necesarias para la generación de modelos que representen, del modo más aproximado, los fenómenos inducidos por la construcción de túneles en medios reológicos. En el capítulo IV se presentan algunos de estos modelos, mostrando de manera más o menos detallada, el proceso que se sigue en la elaboración de los mismos.

En el capítulo V se exponen algunos métodos para el dimensionamiento

del revestimiento de túneles; se comentan sus ventajas y limitaciones más importantes así como las condiciones necesarias para su mejor aplicación.

En el capítulo VI se hace una descripción de la metodología general del Nuevo Metodo Austriaco, sistema conceptual que pretende racionalizar y dar coherencia a la construcción de túneles en roca.

Por último, en el capítulo VII se enuncian las conclusiones de este trabajo.

CAPITULO II. MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS.

II.1 Ecuaciones de estado.

II.1.1 Conceptos fundamentales. Se dice que un sólido es elástico ideal si posee la propiedad de que el trabajo realizado al deformarlo es recuperable en su totalidad, es decir, cualquier esfuerzo externo introduce una energía potencial \bar{E} en el sólido que equilibra el trabajo realizado sobre el cuerpo; tan pronto como la carga externa es retirada el cuerpo experimenta una deformación opuesta a la inicial, que le permite recuperar su forma original. La energía potencial elástica es una función del estado de deformación del cuerpo, pero es independiente de los estados de deformación intermedios que adquiere éste antes de alcanzar su estado final. La experiencia muestra que en algunos materiales, y dentro de ciertos límites, las componentes del esfuerzo son funciones lineales de las componentes de la deformación; los materiales de este tipo son conocidos con el nombre de sólidos elásticos lineales, expresándose su relación esfuerzo deformación mediante la función lineal:

$$\bar{U} = E \bar{\epsilon} \quad (1)$$

llamada ley de Hooke, en la que E representa al módulo elástico de Young.

Cuando a un material isotrópico se le sujeta a una prueba de compresión uniaxial, la deformación en cualquier plano perpendicular a la dirección del esfuerzo es una función lineal de éste último, y la relación entre las deformaciones unitarias en la dirección del esfuerzo (deformación longitudinal unitaria, $\bar{\epsilon}$), y perpendicular a ésta (deformación transversal unitaria, $\bar{\epsilon}_t$) es una constante:

$$\frac{\bar{\epsilon}}{-\bar{\epsilon}_t} = \mu = \text{cte.} \quad (2)$$

a n se le conoce como el número de Poisson, y al inverso de éste:

$$\mu = \frac{1}{\nu n} \quad (3)$$

como la relación de Poisson.

De lo anterior se infiere que la relación esfuerzo-deformación de un material elástico lineal, se especifica totalmente mediante dos parámetros (constantes elásticas).

Del ensayo de especímenes de roca, de forma cilíndrica o prismáticas, provenientes de muy diversas localidades, y representando a una gran variedad de tipos de roca, se han obtenido gráficas de laboratorio esfuerzo vs. deformación para incrementos de carga uniformes, velocidad de variación de la misma cercana a cero, y hasta alcanzar un valor de esfuerzo máximo no muy grande; la relación existente entre el esfuerzo y la deformación para los especímenes probados con el procedimiento arriba descrito resulta ser, de modo bastante aproximado, lineal y homogénea. Sin embargo, se ha observado que para un gran número de rocas dicha relación se vuelve no lineal cuando la velocidad de aplicación de la carga es, de manera significativa, diferente de cero. Esto quiere decir que para cualquier condición de carga, la mayoría de las rocas no cumplen con la ley de Hooke; su deformación es función, entre otras variables, de las derivadas del esfuerzo con respecto al tiempo, pudiendo ser ésta una de las características básicas de las rocas.

Deformación continuada; reptación; efecto post-elástico. En pruebas de compresión realizadas sobre muestras de roca es común observar, si la carga se mantiene constante en un valor σ_x después de un período de aumento continuo de la misma, que la deformación no cesa; a este fenómeno se le conoce con el nombre de reptación (creep) o efecto post-elástico (ver figura I.1). Como ϵ_x es una función de la prehistoria de deformación, esto es, del proceso en el que se incre-

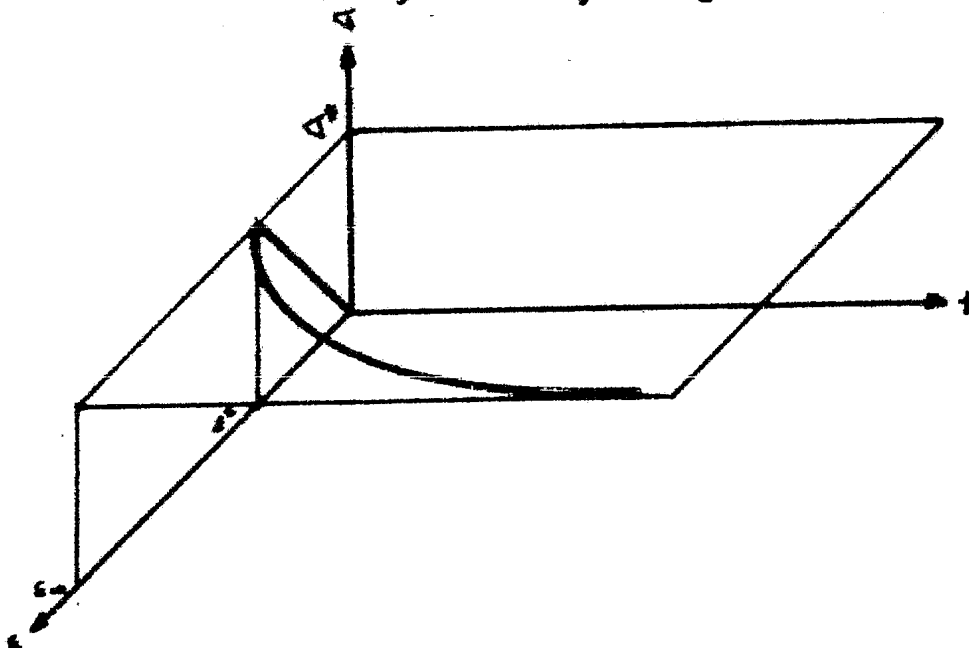


Figura I.1. Reptación a esfuerzo constante.

menta el esfuerzo desde cero hasta σ_x , se puede pensar que este efecto es una especie de memoria del material. Debido a esto, y a que la

deformación tiende a una asíntota conforme transcurre el tiempo, algunos autores llaman a este fenómeno deformación continuada, asumiendo que la fricción interna evita que el material reaccione inmediatamente por medio de una deformación proporcional al cambio en el esfuerzo; es usual describir esta propiedad en función de un coeficiente de viscosidad lineal, o coeficiente de reptación \bar{A} .

Si el espécimen ensayado recupera su forma original después de retirado el esfuerzo externo (aun cuando esto tome mucho tiempo), es decir, si la deformación unitaria ϵ decrece hasta cero, entonces el fenómeno es conocido como efecto post-elástico.

Relajación de esfuerzos. En la mayoría de las rocas sujetas a deformación, el esfuerzo requerido para mantener dicho estado decrece con el tiempo; a este fenómeno se le conoce con el nombre de relajación. Los efectos de la relajación pueden ser reproducidos en laboratorio, aplicando una carga al espécimen, y una vez obtenida una deformación longitudinal unitaria ϵ_* , restringir a cero cualquier subsecuente deformación (controlando el desarrollo del esfuerzo a lo largo del tiempo, así como manteniendo constante la longitud del espécimen); el resultado usual de este tipo de experimentos es un decremento del esfuerzo con el tiempo (figura I.2):

$$\sigma = f(t), \quad \sigma(t_2) < \sigma(t_1) \quad \text{si} \quad t_2 > t_1$$

esto es, el esfuerzo σ_* requerido para producir una deformación ϵ_* - en primera instancia, se relajará gradualmente; σ_* es una función de la prehistoria de deformación, es decir, del proceso que se ha desarrollado entre el estado "virgen" $\epsilon=0$ del espécimen y el estado $\epsilon=\epsilon_*$

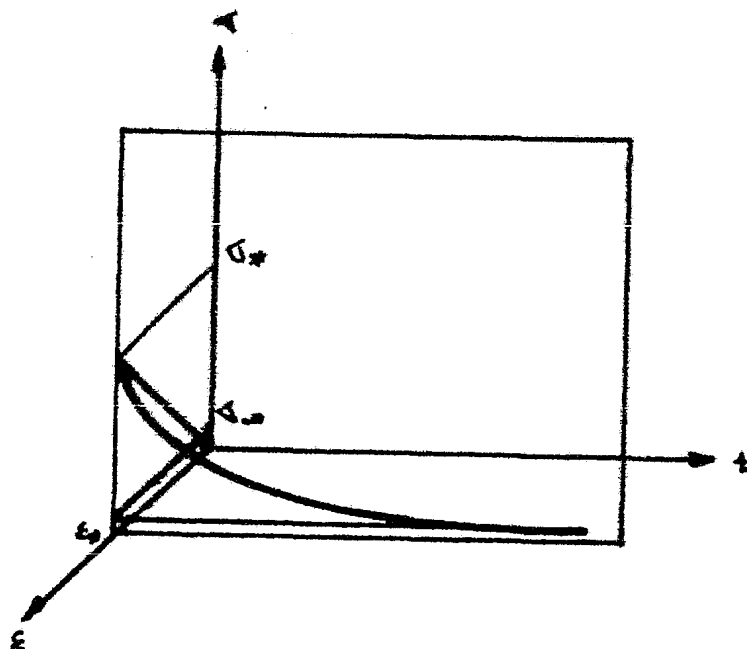


Figura I.2. Diagrama que muestra el efecto de la relajación de esfuerzos.

Una de las posibles interpretaciones de este fenómeno, es que al "congelar" la deformación, que en un principio es elástica, ésta se transforma gradualmente en plástica, es decir, en permanente; por otro lado, es claro que la deformación elástica no puede incrementar

se más allá de un cierto límite. Sea ϵ_e la deformación elástica, y ϵ_p la deformación permanente, entonces en el experimento que se ha descrito:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p = \epsilon_* = cte.$$

la deformación plástica ϵ_p puede, en principio, aumentar hasta llegar a ser igual a ϵ_* , en cuyo caso el esfuerzo en el espécimen se reduce a cero. Sin embargo, en experimentos reales, se ha observado que en la mayoría de los especímenes de roca no se presenta la relajación total.

Otra interpretación viable del fenómeno se basa en un comportamiento elástico de la deformación, ya que la relajación puede darse cuando el espécimen aún se encuentra en el rango elástico, esto es, antes de alcanzar el límite plástico (esfuerzo de fluencia). En estos casos, el fenómeno se explica mejor en términos de la fricción interna, que como una función de la deformación plástica, y por tanto, la relajación puede ser vista como otra manifestación de la reptación. Si el ritmo con que se incrementa el esfuerzo es tal que la fricción interna evita que la deformación en el espécimen juegue un papel definitivo antes de que el esfuerzo alcance el valor deseado σ_* , y no se induce ninguna otra deformación, entonces se puede considerar que el material ha absorbido un esfuerzo extra (una cantidad adicional de energía), que puede, a su vez, causar nuevas deformaciones (fenómeno de reptación) si no se impiden éstas de algún modo; sin embargo, debido al endurecimiento producido al "congelar" la deformación, y a las propiedades elásticas del espécimen sujeto a prueba, el esfuerzo se relajará del nivel asignado al nivel correspondiente a la deformación unitaria ϵ_* .

II.1.2 Cambios de estado mecánico. La excavación de un túnel produce cambios en el estado de deformación del semi-espacio infinito en el que se encuentra, estos cambios pueden ser reversibles o irreversibles; un cambio de estado irreversible modifica el arreglo estructural de los elementos que constituyen a la roca, el flujo plástico es una deformación de este tipo. Por otra parte, las modificaciones estructurales debidas a cambios de estado reversibles son temporales, dado que por definición de reversibilidad, en un proceso de este tipo los estados inicial y final coinciden; esto significa que la estructuración interna del material es la misma antes y después de experimentarse la deformación, o por lo menos, éste tiene, estadísticamente, la misma estructura. El caso en que los estados inicial y final sean idénticos se puede obtener entre el estado original (pre-primario) de un espécimen de roca, y su estado después de ser liberado de su contexto; o entre el estado primario y el inducido por la excavación de un túnel, suponiendo que el estado primario ha de restaurarse por medio de la introducción de esfuerzos suplementarios (producidos por la colocación de un revestimiento, por ejemplo).

Ecuaciones de estado. El estado mecánico de un sólido deformado que se considera físicamente continuo, puede ser descrito en términos de variables tales como: tensores esfuerzo, tensores de deformación, de velocidad de cambio del esfuerzo y de la deformación, acce

raciones obtenidas a partir de la derivación respecto al tiempo de - estos últimos. Debido a la hipótesis de continuidad de la materia, - cualquier cambio mecánico que tenga lugar dentro de un volumen limitado por una superficie cerrada S , y que se encuentre en un semi-espacio infinito, puede ser expresado como una función continua de las variables mencionadas arriba, y esta a su vez puede ser usada como ecuación de estado.

En esencia, cualquier ecuación de estado describe transformaciones de energía susceptibles de ser expresadas en términos ya sea de variables mecánicas, o directamente como energías cinética, potencial, y térmica. Asimismo, estas ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de los principios básicos que rigen los procesos de transformación de energía, las leyes fundamentales de la termodinámica.

Conservación de la energía. La primera ley de la termodinámica, - también llamada de la conservación de la energía, establece que en - un sistema cerrado (conservativo), la suma de las energías mecánica y térmica es una constante.

La magnitud del cambio del contenido energético del sistema es igual a la cantidad de energía cedida al sistema por las fuerzas externas; por tanto, el trabajo A_{12} , necesario para transferir al sistema del estado energético W_1 al estado energético W_2 , es una función de los dos estados exclusivamente, y es independiente de los estados intermedios que se asuman, es decir:

$$W_2 - W_1 = A_{12}$$

o,

$$dW = dA \quad (4)$$

En esta ecuación, la conservación de la energía ha sido restringida a procesos puramente mecánicos, y la energía total W del sistema es igual a la suma de su energía cinética \mathcal{E} más su energía potencial Φ , siendo A el trabajo realizado por las fuerzas externas. Si se desea extender el concepto de conservación de la energía mecánica de manera que cubra también la equivalencia de energía mecánica y térmica, entonces se obtiene la primera ley de la termodinámica, referida a una masa unitaria:

$$dW = dA + dQ = d\mathcal{E} + d\Phi$$

o,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dA}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} \quad (5)$$

donde Q es la energía térmica entregada al sistema por el medio ambiente, expresada en unidades mecánicas.

En un sistema conservativo en equilibrio, la suma de la energía o cinética, la energía cedida por el medio, y la energía térmica, es una constante. De aquí que:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (6)$$

esto es, Φ es un extremo. Este es el principio de la mínima energía potencial.

En los procesos mecánicos reales es imposible el evitar por completo la generación de calor por fricción interna u otro fenómeno del tipo de fricción; este calor no puede, en general, ser reconvertido a trabajo mecánico; por lo tanto, tales procesos no son del todo reversibles. Cuando se produce una deformación irreversible, parte de la energía cedida por el medio se convierte en calor; si se denota con L esta parte de la energía entregada al sistema (con $dL = -dQ$), entonces la expresión (5) toma la forma:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} + \frac{dL}{dt} \quad (7)$$

En un sistema mecánico, Φ , L , y E son funciones de las variables mecánicas (es decir, de los tensores esfuerzo y deformación \bar{T} y \bar{D} , respectivamente), y por ello la expresión (7) es una ecuación de estado que puede obtenerse, sin ninguna restricción, a partir de la conservación de la energía.

Dado que es posible descomponer cualquier deformación en un cambio sólo de volumen, que es reversible, y en una distorsión sin cambio de volumen ($\bar{D} = \bar{E} + \bar{E}'$), es conveniente descomponer la ecuación (7) como sigue:

$$\frac{dA'}{dt} = \frac{d\Phi'}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{dE'}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dt} + \frac{dE_0}{dt} \quad (9)$$

en donde las funciones de energía marcadas como primas son funciones de los tensores desviadores, y las otras, marcadas con un subíndice circular, son funciones de los tensores esféricos:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi'(\bar{T}, \bar{E}) & \Phi_0 &= \Phi_0(\bar{T}_0, \bar{E}_0) \\ L &= L(\bar{T}, \bar{E}) & & \\ E' &= E'(\bar{T}, \bar{E}) & E_0 &= E_0(\bar{T}_0, \bar{E}_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Representación de la deformación. De la expresión (8) se tiene que el estado de distorsión de un sólido deformable puede obtenerse a partir de las variaciones en el tiempo de tres formas de energía:

- energía potencial, Φ ,
- energía disipada (térmica), L , y
- energía cinética, E .

Por tanto, el estado del sólido en cualquier instante puede ser representado en un diagrama triangular (figura I.3).

El vértice A del diagrama (donde $A' = E'$), representa un conjunto de condiciones en las que la energía entregada es convertida inmediatamente en energía cinética, tales condiciones se encuentran en sólidos incompresibles y totalmente inelásticos, y en fluidos incompresibles

bles ideales, en los que la energía entregada a estos no se convierte en calor, y no puede ser almacenada como energía elástica.

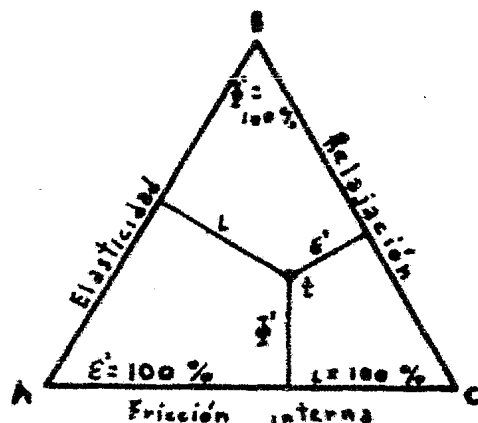


Figura I.3.

El vértice B ($A'=E'$) representa el caso en el que la energía recibida por el sistema, es almacenada como energía potencial de un estado estático, esto es posible si el sólido considerado es perfectamente elástico. Por lo tanto, $E'=0$ y $L=0$, y la totalidad de la energía entregada al sistema puede ser recuperada libre de pérdidas.

El vértice C ($A'=L$) representa el caso para el que la energía entregada es inmediata y completamente disipada como calor, esto sucede, por ejemplo, con un fluido viscoso en reposo. Los cuerpos con estas características son incapaces de poseer energía cinética, o elástica.

Los más de los materiales que constituyen la corteza terrestre poseen un comportamiento intermedio entre estos tres casos extremos, y su estado reológico puede ser representado, en general, por algún punto en el interior del triángulo.

El borde AB representa los intercambios, libres de pérdidas, de energía potencial por cinética, o viceversa ($dL=0$). Si se avanza hacia C, sobre el borde BC, se tienen disipaciones de energía potencial ($dE=0$), mientras que si se avanza sobre AC, se obtienen disipaciones de energía cinética ($dL=0$). Las transformaciones energéticas que se dan a lo largo del borde AC, y del borde BC, en dirección de C son irreversibles, es decir, mientras estas transformaciones tienen lugar, se incrementa el contenido de energía difusa (térmica).

Los otros dos bordes describen diferentes procesos de disipación de energía; BC se refiere a procesos que parten de un estado de reposo ($E=0$), mientras que AC está relacionado con procesos vinculados con el movimiento ($E \neq 0$). Cuando la energía previamente almacenada en forma de potencial es disipada, estando el medio en reposo, se tiene el fenómeno de relajación; éste está restringido a materiales capaces de almacenar una cierta cantidad de energía potencial. Cuando la disipación está relacionada con el movimiento, ésta se debe a la --

fricción interna.

Límite plástico; fuerza de fluencia. Es necesario distinguir entre la capacidad de un material para almacenar energía temporalmente, o almacenarla durante un período cualquiera de tiempo. En el primer caso, la relación entre el esfuerzo y la deformación, o entre la energía entregada al sistema y la disipada, es continua en todo el rango de deformación; en el segundo caso, estas relaciones no son continuas, dado que la magnitud de la deformación permanente será diferente dependiendo de si las cargas se encuentran bajo, o sobre, el límite de capacidad de almacenaje energético.

Para que un material pueda ser considerado como sólido verdadero, es necesario que éste sea capaz de almacenar, reversiblemente, una cantidad finita de energía potencial. Todos los demás sólidos aparentes, son de hecho, líquidos y pueden ser considerados como líquidos supercongelados", o en el mejor de los casos como "pseudo-sólidos". Al límite de energía en cuestión, se le conoce como resistencia a la fluencia, o límite plástico.

II.1.3 Ecuaciones del estado mecánico. Las consideraciones que siguen tienen como finalidad encontrar relaciones físicas, que describan los cambios de estado mecánico, expresando al mismo tiempo, las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones causadas por estos, en un cierto material.

Por el principio de conservación de energía mecánica:

$$dA = dE + d\mathcal{U} \quad (11)$$

donde \mathcal{U} es el trabajo realizado por las fuerzas internas, pudiéndose eliminar la variación de energía cinética:

$$dE + d\mathcal{U} = dE + d\bar{E} + dL \quad (12)$$

La razón de cambio del trabajo efectuado por las fuerzas internas (potencia entregada por el sistema), puede expresarse como el producto tensorial del tensor esfuerzo y el tensor de velocidad de deformación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} &= \dot{\mathcal{U}} = \bar{T} : \dot{\bar{D}} = (\bar{T} + \bar{T}_0) : (\dot{\bar{E}} + \dot{\bar{E}}_0) = \\ &= \bar{T} : \dot{\bar{E}} + \bar{T}_0 : \dot{\bar{E}}_0 = \bar{T} : \dot{\bar{E}} + 3G\dot{\bar{e}}_0 = G_x \dot{e}_x + \\ &+ G_y \dot{e}_y + G_z \dot{e}_z + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} \end{aligned} \quad (13)$$

El trabajo realizado por las fuerzas internas, puede ser descompuesto en lo que se conoce como trabajo de distorsión, y trabajo de cambio de volumen.

$$d\mathcal{U} = d\mathcal{U}' + d\mathcal{U}_0 \quad (14)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \bar{T} : \dot{\bar{E}}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial t} = \bar{T}_0 : \dot{\bar{E}}_0 = 3G\dot{e}_0 \quad (15)$$

Dado que la experiencia ha demostrado que la deformación isotrópi-

ca es reversible, se tiene que este cambio de volumen sin distorsión es sólo un cambio en la energía potencial, por lo que las ecuaciones de estado mecánico pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = \bar{T} : \dot{\bar{\epsilon}} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}, \bar{\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}, \bar{\epsilon}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial t} = \bar{T}_0 : \dot{\bar{\epsilon}}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(\bar{T}_0, \bar{\epsilon}_0) \quad (17)$$

Estas ecuaciones diferenciales establecen relaciones entre las variables mecánicas; sus constantes son constantes materiales (paramétricas).

Ecuaciones de estado simplificadas. Por simplicidad, se restringirá la transferencia de energía a dos formas de ésta, asumiendo que la cantidad transferida de energía del tercer tipo es igual a cero. Esta hipótesis permite descomponer la ecuación diferencial (16) en tres ecuaciones, de las que, sin embargo, sólo dos son independientes, ya que de las tres funciones incluidas en la expresión (16), sólo dos pueden ser elegidas independientemente (Φ' y L).

Primer caso: $dL=0$. La ecuación (16) se transforma en:

$$\frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = \bar{T} : \dot{\bar{\epsilon}} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}, \bar{\epsilon}) \quad (18)$$

Esta es la ecuación de un sólido elástico; la cantidad de energía entregada al sistema es igual a la cantidad de energía almacenada por éste, y, por tanto, el proceso es reversible, ya que no se tiene energía disipada. Como Φ' es la función general de las variables mecánicas, la expresión (18) es la ecuación general de la elasticidad, que tiene como caso más simple la relación lineal de la teoría clásica de la elasticidad. La figura I.4 es una ilustración esquemática de como, en un estado uniaxial de esfuerzos, la totalidad de la energía entregada al sistema es convertida en energía potencial.

Segundo caso: $d\mathcal{U}'=0$. De la ecuación (16):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}, \bar{\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}, \bar{\epsilon}) = 0 \quad (19)$$

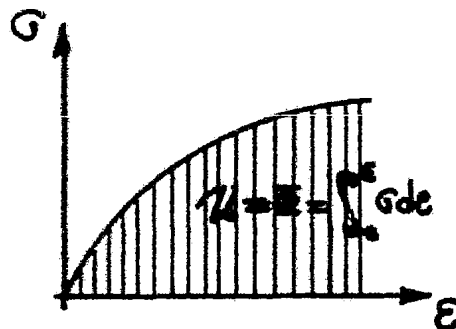


Figura I.4. En un sólido elástico, el esfuerzo aplicado es almacenado como energía potencial.

Si la potencia desarrollada por las fuerzas internas es nula,

$$\frac{\delta \mathcal{U}'}{\delta t} = \bar{T} : \dot{\bar{\mathbb{E}}} = 0$$

entonces la energía de deformación del sistema es independiente del tiempo,

$$\mathcal{U}' = \text{constante}$$

lo que implica, por un lado que:

$$\dot{\bar{\mathbb{E}}} = 0, \text{ es decir, por ejemplo: } \bar{\mathbb{E}} = \text{constante} = \bar{\mathbb{E}}_*$$

y por el otro, que la suma de las energías potencial y térmica dentro del sistema es constante,

$$\mathcal{U}' = cte = \Phi'(\bar{T}, \bar{\mathbb{E}}) + L(\bar{T}, \bar{\mathbb{E}})$$

En vista de la permanencia de las deformaciones, se puede escribir

$$\Phi'(\bar{T}, \bar{\mathbb{E}}) \Big|_{\bar{\mathbb{E}} = \bar{\mathbb{E}}_*} = \Phi'(\bar{T}, \bar{\mathbb{E}}_*) = \Phi'_*(\bar{T})$$

$$L(\bar{T}, \bar{\mathbb{E}}) \Big|_{\bar{\mathbb{E}} = \bar{\mathbb{E}}_*} = L(\bar{T}, \bar{\mathbb{E}}_*) = L_*(\bar{T})$$

lo que permite inferir la siguiente relación:

$$\Phi'_*(\bar{T}) + L_*(\bar{T}) = cte = \mathcal{U}'_* \quad (19a)$$

Las expresiones (19) y (19a) describen el intercambio de energía - potencial elástica por energía disipada (calor cedido a los alrededores); por su propia naturaleza, el proceso es irreversible, e invariabilmente se desarrolla en la dirección de menor energía potencial a este proceso se la ha llamado relajación, y la ecuación (19) es su ley general. La figura II.5 ilustra la conversión de energía potencial elástica a energía térmica en un estado uniaxial de esfuerzos.

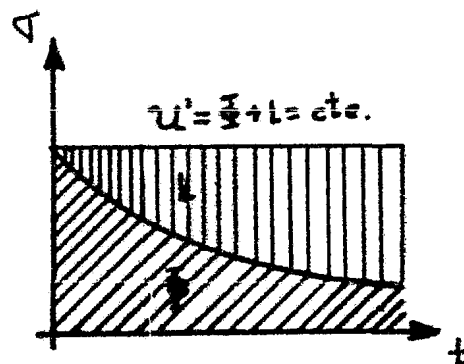


Figura II.5. Relajación de esfuerzos.

Tercer caso: $d\bar{\Phi}'=0$. La ecuación (16) se transforma ahora en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}'(\bar{T}, \bar{\epsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}, \bar{\epsilon}) \quad (20)$$

Esta expresión describe un proceso en el que la energía entregada al sistema es convertida en su totalidad en calor; cualquier proceso de este tipo es completamente irreversible. Se cree que el comportamiento de la materia tal y como lo expresa la ecuación (20), se debe a la fricción interna; en la figura II.6 se presenta un diagrama esfuerzo-deformación para un material como el aquí descrito.

Las ecuaciones (18) a (20) se pueden obtener a partir de la primera ley de la termodinámica, sin necesidad de hipótesis suplementarias o condiciones auxiliares.

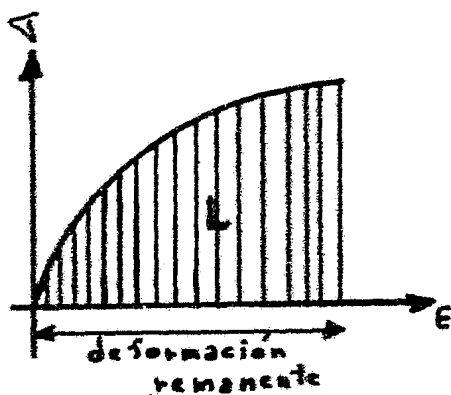


Figura II.6.

En la figura II.7 se muestra la representación más usual del proceso de conversión de la energía cedida al sistema, \mathcal{U} en función de $\bar{\epsilon}$ y L . Es común graficar el potencial elástico contra la energía disipada L , siendo este primero la ordenada en caso de relajación, y la abscisa en caso de deformación permanente.

II.1.4 Superposición de las ecuaciones de estado. El comportamiento de los materiales no ideales (por ejemplo, las rocas), puede ser descrito por superposición de casos ideales, tales como los representados por las expresiones (18) a (20). Las funciones:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}' &= \bar{\Phi}'(\bar{T}, \bar{\epsilon}) \\ L &= L(\bar{T}, \bar{\epsilon}) \end{aligned}$$

en las ecuaciones de estado se interpretan como si el material en cuestión estuviese compuesto por dos componentes, descrita cada una de ellas por una ecuación; en otras palabras, se supone que el medio descrito por la ecuación de estado:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

puede considerarse como un medio con dos componentes, definidas por las expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{U}_1'}{\partial t} = \frac{\partial \Phi'}{\partial t}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{U}_2'}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}_1'}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{U}_2'}{\partial t}$$

con una componente almacenando elásticamente la energía entregada al sistema, y con la otra disipándola en forma de calor.

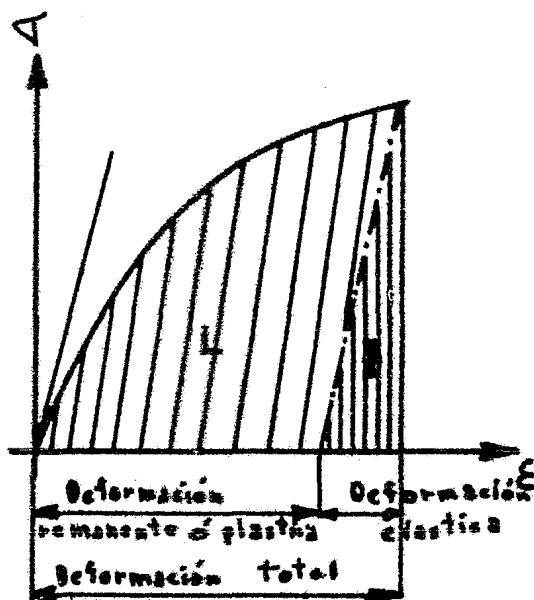


Figura II.7.

Superposición de deformaciones. Si tanto la deformación del medio general, como la del medio bi-compuesto (aquel con dos componentes), es descrita por sólo un esfuerzo desviador \bar{T} , y éste es igual para ambos medios, entonces las ecuaciones de estado:

$$\bar{T} : \dot{\bar{\epsilon}}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}, \bar{\epsilon}_1) + \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}, \bar{\epsilon}_1)$$

$$\bar{T} : \dot{\bar{\epsilon}}_2 = \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}, \bar{\epsilon}_2)$$

$$\bar{T} : \dot{\bar{\epsilon}}_3 = \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}, \bar{\epsilon}_3)$$

tienen tres posibles soluciones:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_k(\bar{T}, t) \quad (k=1, 2, 3) \quad (21)$$

Si es posible eliminar \bar{T} y t de estas tres ecuaciones, entonces la relación a la que se llega, que relaciona los tres valores $\bar{\Xi}_k$, es válida tanto para el caso general, como para los dos medios especiales (aquellos que constituyen al medio bi-compuesto).

Expresando $\bar{\Xi}_1$ en términos de $\bar{\Xi}_2$ y $\bar{\Xi}_3$, se obtiene la ley de superposición:

$$\bar{\Xi}_1 = \bar{F}_T(\bar{\Xi}_2, \bar{\Xi}_3) \quad (22)$$

que permite deducir la deformación del medio general a partir de la deformación de las dos componentes.

Superposición de esfuerzos. El argumento que se emplea en este apartado es similar al de la sección precedente; si un mismo tensor -distorsional $\bar{\Xi}$ actúa sobre los tres medios, entonces las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 : \dot{\bar{\Xi}} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}_1, \bar{\Xi}) + \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}_1, \bar{\Xi}) \\ \bar{T}_2 : \dot{\bar{\Xi}} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}_2, \bar{\Xi}) \\ \bar{T}_3 : \dot{\bar{\Xi}} &= \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}_3, \bar{\Xi}) \end{aligned} \quad (23)$$

resueltas para \bar{T} , dan las tres expresiones:

$$\bar{T} = \bar{T}_k(\bar{\Xi}, t), \quad (k=1, 2, 3) \quad (24)$$

Por eliminación de $\bar{\Xi}$ y t se obtiene una relación entre \bar{T}_1 , \bar{T}_2 , y \bar{T}_3 :

$$\bar{T}_1 = \bar{F}_E(\bar{T}_2, \bar{T}_3) \quad (25)$$

Esta es la ley de superposición de esfuerzos.

\bar{F}_T y \bar{F}_E son las funciones de superposición de las ecuaciones de estado, mediante ellas se pueden derivar las leyes de superposición de las variables mecánicas (componentes del esfuerzo y de la deformación).

II.1.5 Ecuaciones lineales de estado. De las consideraciones hechas en la sección anterior, las ecuaciones de estado de materiales reales (incluyendo a las rocas) están compuestas por dos partes:

$$\bar{T} : \dot{\bar{\Xi}} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi'(\bar{T}, \bar{\Xi}) + \frac{\partial}{\partial t} L(\bar{T}, \bar{\Xi}) \quad (26)$$

$$\bar{T}_0 : \dot{\bar{\Xi}}_0 = \bar{\epsilon}_0 \dot{\bar{\epsilon}}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(\bar{T}_0, \bar{\Xi}_0) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(G_0, \epsilon_0) \quad (27)$$

En un medio homogéneo e isótropo con un rango de deformaciones en que éstas sean suficientemente pequeñas, las relaciones funcionales:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{T}, \dot{\bar{T}}, \ddot{\bar{T}}, \dots, \bar{\Xi}, \dot{\bar{\Xi}}, \ddot{\bar{\Xi}}, \dots) &= 0 \\ \bar{F}_0(\bar{T}_0, \dot{\bar{T}}_0, \ddot{\bar{T}}_0, \dots, \bar{\Xi}_0, \dot{\bar{\Xi}}_0, \ddot{\bar{\Xi}}_0, \dots) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

entre las variables mecánicas pueden ser consideradas, para una pri-

mera aproximación, como lineales; es decir, omitidas las derivadas de orden superior al primero de la ecuación de estado $\dot{\bar{\epsilon}}=0$, se pueden distinguir tres tipos de constantes:

- la constante de la elasticidad,
- la constante de relajación, y
- la constante de fricción interna.

Si se desea especificar la relación entre el esfuerzo isotrópico y el cambio de volumen ($\dot{\bar{\epsilon}}=0$), debe introducirse una cuarta constante. En un medio isótropo y homogéneo, la naturaleza de esta relación es elástica; esto es, basta introducir otra constante elástica para poder escribir la "ecuación del material". Despreciando las derivadas de orden superior al primero, la "ecuación del material" toma la forma:

$$\bar{\epsilon} \equiv \bar{C}_0 + C_1 \bar{T} + C_2 \dot{\bar{T}} + C_3 \bar{E} + C_4 \dot{\bar{E}} = 0 \quad (29)$$

$$\bar{\epsilon}_0 \equiv C_5 \bar{T}_0 + C_6 \bar{E}_0 = \bar{T}_0 + C_5 \bar{E}_0 = 0 \quad (30)$$

II.2 Ecuaciones de materiales ideales que se aproximan a los casos.

II.2.1 Cuerpos reológicos ideales.

El modelo de Hohenemser-Prager. Las ecuaciones lineales de estado:

$$\bar{\epsilon} \equiv \bar{C}_0 + C_1 \bar{T} + C_2 \dot{\bar{T}} + C_3 \bar{E} + C_4 \dot{\bar{E}}$$

$$\bar{\epsilon}_0 \equiv C_5 \bar{T}_0 + C_6 \bar{E}_0 = \bar{T}_0 + C_5 \bar{E}_0$$

derivadas en la sección anterior, pueden re-escribirse en una forma que es más común en la literatura especializada,

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \mathcal{Z}G\bar{E} + \mathcal{Z}\eta\dot{\bar{E}} - \mathcal{Z}\dot{\bar{T}} + \bar{C}_0 \\ \bar{T}_0 &= 3K\bar{E}_0, \quad \dot{\bar{T}}_0 = 3K\dot{\bar{E}}_0 \end{aligned} \quad (31)$$

utilizando las así llamadas constantes reológicas:

$$C_1 = -1, \quad C_2 = -\mathcal{Z}, \quad C_3 = \mathcal{Z}G, \quad C_4 = \mathcal{Z}\eta, \quad C_5 = 3K$$

El modelo de sólido descrito por las ecuaciones (31), es conocido como el modelo de Hohenemser-Prager; en él, los símbolos se definen como sigue:

G := módulo de elasticidad al corte

η := coeficiente de viscosidad

\mathcal{Z} := tiempo de relajación

\bar{C}_0 := tensor constante (plasticidad)

K := módulo de compresibilidad

El modelo reológico que satisface las ecuaciones (31), incluye como casos especiales, las ecuaciones de estado de los siguientes medios reológicos simples:

a) $\bar{T} = 0$ (fluido de Pascal)

b) $\bar{T} = \mathcal{Z}G\bar{E}$ (sólido elástico de Hooke)

c) $\bar{T} = \mathcal{Z}\eta\dot{\bar{E}}$ (fluido de Newton)

d) $\bar{T} = \bar{C}_0$ (sólido de Saint-Venant (elasto-plástico))

e) $\bar{T} = \mathcal{Z}G\bar{E} + \mathcal{Z}\eta\dot{\bar{E}}$ (sólido de Kelvin (visco-elástico))

- f) $\bar{T} = ZG\bar{E} - \dot{\bar{T}}$ (sólido elástico con relajación)
 g) $\bar{T} = Z\dot{\bar{E}} - \dot{\bar{T}}$ (fluido de Maxwell)
 h) $\bar{T} = ZG\bar{E} + \bar{C}$ (sólido elasto-plástico)
 i) $\bar{T} = Z\dot{\bar{E}} + \bar{C}$ (fluido visco-plástico (plástico de Bingham))
 j) $\bar{T} = ZG\bar{E} + Z\dot{\bar{E}} - \dot{\bar{T}}$ (sólido (estándar) de Poynting-Thomson)
 k) $\bar{T} = ZG\bar{E} + Z\dot{\bar{E}} + \bar{C}$ (sólido elasto-visco-plástico)
 l) $\bar{T} = Z\dot{\bar{E}} - \dot{\bar{T}} + \bar{C}$ (sólido elasto-plástico de Prandtl-Reuss)

El sólido estándar. En mecánica de rocas es común considerar, por simplicidad, a la ecuación física lineal y homogénea (esto es, utilizar para los cálculos e investigaciones teóricas, el llamado modelo de Poynting-Thomson "estándar"), ya que este modelo ideal es capaz de reproducir algunas de las propiedades de las rocas que se presentan en la práctica de la ingeniería civil.

Otra razón que justifica el empleo del modelo estándar, es que en general se desea trabajar con la roca sin que ésta llegue a plastificarse, y mientras esto se cumpla el modelo en cuestión reproduce con bastante precisión el comportamiento de la roca. Si las deformaciones que sufre el medio están por abajo del límite plástico, la ecuación material debe ser homogénea, es decir, no debe incluir términos de deformación permanente, o esfuerzo remanente; en otras palabras, es válido asumir que el esfuerzo correspondiente al estado no deformado es nulo e inversamente, que en un estado de esfuerzo nulo, la deformación también es nula. Por lo tanto, en el caso que ahora se trata, basta omitir de la ecuación del material el tensor \bar{C} , para confinar el análisis a situaciones por debajo del límite de fluencia esta restricción, no se ha impuesto para limitar la generalidad del modelo, sino para evitar el concepto erróneo de que el límite plástico es una función del estado de esfuerzos; la discusión de este problema se hará más adelante.

El modelo material lineal y homogéneo más general contiene el efecto tiempo sólo de manera implícita (es decir, el modelo es independiente del momento en que comienza a medirse el tiempo), y despreziona la influencia de las derivadas de orden superior al primero. Como resultado de lo anterior, el modelo que se obtiene es de una forma matemática tal, que un simple y manejable conjunto de conceptos matemáticos permite su aplicación a un gran número de problemas prácticos. Las expresiones de este modelo, llamado de Poynting-Thomson, son:

$$\bar{T} = ZG\bar{E} + Z\dot{\bar{E}} - \dot{\bar{T}} \quad (32a)$$

$$\bar{T}_0 = 3K\bar{E}_0, \quad \dot{\bar{T}}_0 = 3K\dot{\bar{E}}_0 \quad (32b)$$

Este modelo posee cuatro constantes paramétricas (materiales) independientes; de éstas, G o K puede ser reemplazada por el número de Poisson (μ) y el módulo de elasticidad (E).

Las ecuaciones tensoriales referentes a la deformación isotrópica son equivalentes a las expresiones escalares:

$$G_0 = 3K\epsilon_0, \quad \dot{G}_0 = 3K\dot{\epsilon}_0$$

El cambio de volumen relativo puede ser escrito en la forma:

$$\Theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 3\epsilon_0, \quad \dot{\Theta} = 3\dot{\epsilon}_0$$

por lo que:

$$\sigma_0 = K\theta, \quad \dot{\sigma}_0 = K\dot{\theta}$$

esto significa que el cambio relativo de volumen, varía directamente proporcional al esfuerzo medio que lo produce, y el ritmo de variación del cambio relativo de volumen se modifica conforme la velocidad de variación del esfuerzo medio.

El modelo estándar incluye las ecuaciones de estado de los medios de Pascal, Hooke, Newton, Kelvin, y Maxwell, y la del medio elástico con relajación; en mecánica de rocas, los fluidos de Pascal no representan ningún interés especial, y por lo tanto, sólo se detallarán los otros modelos lineales y homogéneos.

Estado de esfuerzos uniaxial. El análisis se presentará para el caso de estado de esfuerzos uniaxial, de manera que, prescindiendo del simbolismo tensorial, sea más clara la representación gráfica del proceso.

En este caso:

$$\bar{\mathbb{T}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbb{T}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_v & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_v \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbb{D}}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_v - \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_v - \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

y,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma, \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3}\dot{\sigma}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_v), \quad \dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_v)$$

Si a partir de la ecuación tensorial (32a), se escribe la ecuación componente referente a σ , queda:

$$\sigma - \sigma_0 = \mathcal{L}G(\varepsilon - \varepsilon_0) + \mathcal{L}\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0) - \mathcal{V}(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0) \quad (33)$$

Haciendo uso de la ecuación (32b), esta última expresión se transforma en:

$$\sigma - \sigma_0 = \mathcal{L}G\left[\varepsilon - \frac{\sigma_0}{3K}\right] + \mathcal{L}\eta\left[\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_0}{3K}\right] - \mathcal{V}(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0) \quad (34)$$

ya que:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma \quad \text{y} \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3}\dot{\sigma}$$

se tiene que la ecuación (34) puede escribirse como:

$$\frac{2}{3} \left(1 + \frac{G}{3K} \right) \dot{\sigma} = 2G\dot{\epsilon} + 2\eta\dot{\epsilon} - \frac{2}{3} \left(\nu + \frac{\eta}{3K} \right) \dot{\sigma}$$

o,

$$\dot{\sigma} = \frac{9GK}{3K+G} \dot{\epsilon} + \frac{9\eta K}{3K+G} \dot{\epsilon} - \frac{3K\nu + \eta}{3K+G} \dot{\sigma} \quad (35)$$

Introduciendo la siguiente notación:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9GK}{3K+G} \\ \lambda &= \frac{9\eta K}{3K+G} \\ \omega &= \frac{3K\nu + \eta}{3K+G} \end{aligned} \quad (36)$$

se logra simplificar la expresión (35) a:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \lambda\dot{\epsilon} - \omega\dot{\sigma} \quad (37)$$

en donde:

E, es el módulo de elasticidad de Young,

 λ , es el coeficiente de viscosidad lineal, o de reptación, ω , es la constante temporal de relajación.

II.2.2 El modelo elástico lineal (de Hooke). Estado uniaxial de esfuerzos. Escribiendo la primera ecuación escalar componente de la ecuación tensorial:

$$\bar{T} = 2G\bar{E}$$

de un sólido de Hooke, se tiene:

$$G - G_0 = 2G(\epsilon - \epsilon_0) \quad (38)$$

La deformación unitaria que tiene lugar en el plano normal al eje de la carga, se puede expresar en función del número de Poisson ν , - obteniéndose la deformación media como:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{1}{3}\left(\epsilon - \frac{\epsilon}{\nu} - \frac{\epsilon}{\nu}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\nu-2}{\nu}\right)\epsilon$$

y el esfuerzo medio como:

$$G_0 = \frac{1}{3}(G_x + G_y + G_z) = \frac{1}{3}(G + 0 + 0) = \frac{1}{3}G$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación (38), y arreglando los términos, se obtiene:

$$G = 2G \frac{\nu+1}{\nu} \epsilon$$

o, de un modo más familiar:

$$G = \frac{E}{2} \epsilon \quad (39)$$

donde:

$$E = 2G \frac{m+1}{m} \quad (40)$$

y,

$$2 < m < \infty$$

La ecuación de cambio isotrópico de volumen $G_0 = 3k\epsilon_0$, puede escribirse:

$$G = 3k \frac{m-2}{m} \epsilon$$

Comparando esta expresión con la ecuación (39), se obtiene una relación que liga al módulo de compresibilidad con las constantes elásticas E , G , y m :

$$3k = \frac{Em}{m-2} = 2G \frac{m+1}{m-2} \quad (41)$$

Ecuación física en términos de los tensores esfuerzo y deformación. En muchos casos, se hace necesario combinar las ecuaciones materiales en las que aparecen los tensores desviador y esférico:

$$\bar{T} = 2G\bar{E} \quad \text{y} \quad \bar{T}_0 = 3k\bar{E}_0$$

en una sola relación que vincule al tensor esfuerzo \bar{T} con el tensor deformación \bar{D} .

Sumando las dos ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\bar{T} = \bar{T} + \bar{T}_0 = 2G\bar{E} + 3k\bar{E}_0$$

Si ahora se hace uso de las expresiones:

$$\bar{E} = \bar{D} - \bar{E}_0$$

y,

$$\bar{E}_0 = \epsilon_0 \bar{I} = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \bar{I} = \frac{1}{3} \Theta \bar{I}$$

se deriva:

$$\bar{T} = 2G \left[\bar{D} + \left(\frac{3k}{2G} - 1 \right) \frac{1}{3} \Theta \bar{I} \right]$$

la que, combinada con la ecuación (41), da como resultado la llamada ley de Hooke generalizada:

$$\bar{\mathbb{T}} = \lambda G \left(\bar{\mathbb{D}} + \frac{\rho}{m-\lambda} \bar{\mathbb{I}} \right) \quad (42)$$

misma que escrita en términos de escalares, tiene la forma:

$$\begin{aligned} G_x &= \lambda G \left[\varepsilon_x + \frac{1}{m-\lambda} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \delta_{xy} \\ G_y &= \lambda G \left[\varepsilon_y + \frac{1}{m-\lambda} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \delta_{yz} \\ G_z &= \lambda G \left[\varepsilon_z + \frac{1}{m-\lambda} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{zx} &= G \delta_{zx} \end{aligned} \quad (42a)$$

De manera similar se obtiene la ley de Hooke generalizada para la deformación, es decir:

$$\bar{\mathbb{T}} = \lambda G \bar{\mathbb{E}} = \lambda G (\bar{\mathbb{D}} - \bar{\mathbb{E}}_0) = \lambda G \bar{\mathbb{D}} - \frac{\lambda G}{3K} \bar{\mathbb{T}}_0$$

y haciendo uso de:

$$\bar{\mathbb{D}} = \frac{1}{\lambda G} \left(\bar{\mathbb{T}} + \frac{\lambda G}{3K} \bar{\mathbb{T}}_0 \right) = \frac{1}{\lambda G} \left(\bar{\mathbb{T}} - \bar{\mathbb{T}}_0 + \frac{\lambda G}{3K} \bar{\mathbb{T}}_0 \right)$$

$$\bar{\mathbb{T}}_0 = \alpha \bar{\mathbb{I}} = \frac{1}{3} (G_x + G_y + G_z) \bar{\mathbb{I}} = \frac{1}{3} s \bar{\mathbb{I}}$$

y de la ecuación (41), resulta:

$$\bar{\mathbb{D}} = \frac{1}{\lambda G} \left(\bar{\mathbb{T}} - \frac{s}{m+1} \bar{\mathbb{I}} \right) \quad (43)$$

o escrita en forma escalar:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[G_x - \frac{1}{m} (G_y + G_z) \right], & \delta_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[G_y - \frac{1}{m} (G_x + G_z) \right], & \delta_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[G_z - \frac{1}{m} (G_x + G_y) \right], & \delta_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (43a)$$

II.2.3 El modelo de fluido de Newton. Estado uniaxial de esfuerzos. La relación esfuerzo-deformación para un fluido de Newton, queda establecida por una ecuación tensorial de la forma:

$$\bar{\mathbb{T}} = \lambda \eta \dot{\bar{\mathbb{E}}}$$

que tiene como ecuación escalar componentes:

$$\sigma - \sigma_0 = \lambda \eta (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0)$$

Utilizando las relaciones:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma, \quad \dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{3} \left(\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\epsilon}}{m} \right) = \frac{1}{3} \frac{m-1}{m} \dot{\epsilon}$$

válidas para esfuerzo uniaxial, se tiene que:

$$\sigma = 2\eta \frac{m+1}{m} \dot{\epsilon}$$

haciendo:

$$\lambda = 2\eta \frac{m+1}{m} \quad (44)$$

se llega a la forma simplificada:

$$\sigma = \lambda \dot{\epsilon} \quad (45)$$

Esta última expresión describe la relación entre el esfuerzo y la de formación unitaria en la dirección de éste, en un estado uniaxial de esfuerzos.

En un medio Newtoniano, el esfuerzo varía proporcionalmente con la velocidad de deformación, de aquí que la ecuación tensorial referente a la deformación isotrópica, se escriba utilizando como variables a \bar{T}_0 y \bar{E}_0 . Supóngase, por ejemplo, que esta ecuación es de la forma

$$\bar{T}_0 = 3K' \dot{\bar{E}}_0 \quad (46)$$

donde K' es una constante paramétrica no especificada; la relación:

$$\bar{T}_0 = G \bar{I} = \frac{1}{3} \sigma \bar{I} = 3K' \dot{\bar{E}}_0 = 3K' \frac{1}{3} \left(\frac{m-1}{m} \right) \dot{\bar{I}}$$

implica que:

$$G = 3K' \frac{m-1}{m} \dot{\bar{I}}$$

de donde, aplicando la ecuación (45):

$$3K' = 2\eta \frac{m+1}{m-1} = \frac{\lambda m}{m-1} = 3K \frac{\lambda}{E} = 3K \frac{\eta}{G} \quad (47)$$

Ecuación física que incorpora a los tensores esfuerzo y velocidad de deformación. La ecuación tensorial combinada:

$$\bar{T} = \bar{T} + \bar{T}_0 = 2\eta \dot{\bar{E}} - 3K' \dot{\bar{E}}_0 = 2\eta (\dot{\bar{E}} - \dot{\bar{E}}_0) + 3K' \dot{\bar{E}}_0$$

junto con la expresión (47), da como resultado la ecuación material, y al resolverla para el esfuerzo, toma la forma:

$$\bar{\mathbb{T}} = 2\eta \left[\dot{\mathbb{D}} + \frac{\Theta}{m-2} \bar{\mathbb{I}} \right] \quad (48)$$

que es equivalente a las ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\eta \left[\dot{\epsilon}_x + \frac{1}{m-2} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) \right], & \tau_{xy} &= \eta \dot{\gamma}_{xy} \\ \sigma_y &= 2\eta \left[\dot{\epsilon}_y + \frac{1}{m-2} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) \right], & \tau_{yz} &= \eta \dot{\gamma}_{yz} \\ \sigma_z &= 2\eta \left[\dot{\epsilon}_z + \frac{1}{m-2} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) \right], & \tau_{zx} &= \eta \dot{\gamma}_{zx} \end{aligned} \quad (48a)$$

Resolviendo la ecuación física para la velocidad de deformación, se obtiene:

$$\dot{\mathbb{D}} = \frac{1}{2\eta} \left[\bar{\mathbb{T}} - \frac{\Theta}{m+1} \bar{\mathbb{I}} \right] \quad (49)$$

cuyas ecuaciones escalares componentes son:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1}{\lambda} \left[\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right], & \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{\eta} \tau_{xy} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{1}{\lambda} \left[\sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_x) \right], & \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{1}{\eta} \tau_{yz} \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{1}{\lambda} \left[\sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right], & \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{1}{\eta} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (49a)$$

Análisis del comportamiento del fluido de Newton. En un estado uniaxial de esfuerzos, la ecuación material de un medio Newtoniano toma la forma:

$$\sigma = \lambda \dot{\epsilon} = \lambda \frac{d\epsilon}{dt} \quad (45)$$

es decir, el esfuerzo varía proporcionalmente a la velocidad de deformación; estas condiciones pueden materializarse moviendo un pistón perforado dentro de un cilindro lleno de un líquido viscoso (figura II.8).

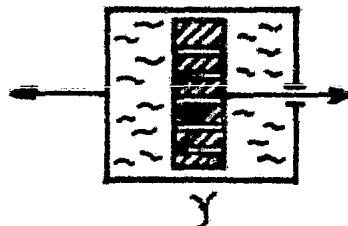


Figura II.8. Analogía mecánica de un fluido de Newton.

En el análisis detallado anteriormente, el estado de esfuerzos es uniaxial, y la conducta del fluido ha sido estudiada, por simplici-

dad, bajo la suposición de constancia de esfuerzos, y deformaciones y, por tanto, también de su ritmo de variación.

Si $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 = \text{cte.}$ (por ejemplo, en una prueba de compresión uniaxial), - el incremento del esfuerzo es una función lineal del tiempo:

$$\sigma = \dot{\sigma}_2 t \quad (50)$$

Sea $t=0$ el instante en que la prueba se inicia, y supóngase que el espécimen se encuentra libre de esfuerzos, y sin deformar, en ese mismo instante, es decir:

$$\sigma \Big|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon \Big|_{t=0} = 0 \quad (51)$$

La ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{\sigma}_2 t = \lambda \frac{d}{dt} \varepsilon$$

derivada a partir de las expresiones (45) y (50), da como resultado, después de ser integrada considerando las condiciones iniciales descritas por (51), la solución:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\lambda} \dot{\sigma}_2 t^2 \quad (52)$$

representada esquemáticamente en la figura II.9. Haciendo uso de la ecuación (50), la ecuación (52) se puede escribir como una relación esfuerzo-deformación:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\lambda} \frac{\sigma^2}{\dot{\sigma}_2} \quad (53)$$

que se ilustra en la figura II.10, para diferentes velocidades de variación del esfuerzo. Bajo una carga de impacto, $\dot{\sigma}_2 \rightarrow \infty$, la deforma-

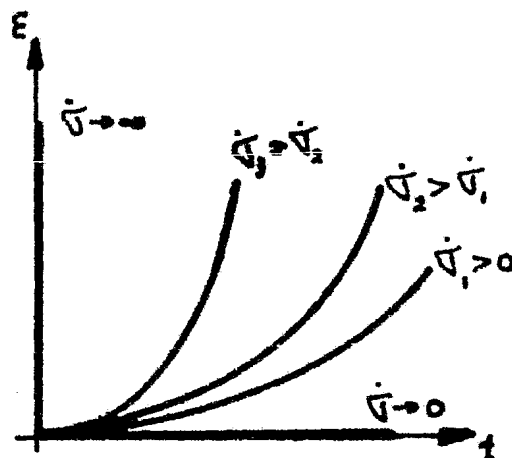


Figura II.9. Deformación contra tiempo en un fluido de Newton, sometido a una velocidad de cambio del esfuerzo, constante.

ción es nula; esto es, bajo tales condiciones el medio Newtoniano se comporta como un medio inelástico perfecto, un sólido incompresible, o como un fluido ideal.

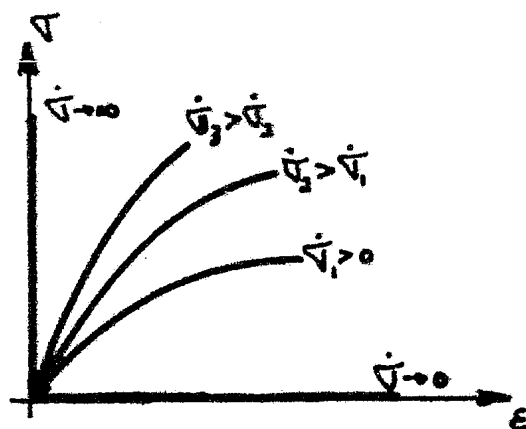


Figura II.10. Diagrama esfuerzo-deformación de un fluido Newtoniano sometido a un ritmo constante de incremento del esfuerzo.

Velocidad de deformación constante. Si $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 = cte.$, el esfuerzo también es constante.

Esfuerzo constante. Si $\sigma = \sigma_1 = cte.$, entonces:

$$\epsilon = G_2 \frac{t}{\lambda} \quad (54)$$

es decir, la deformación varía linealmente con el tiempo (figura II.11).

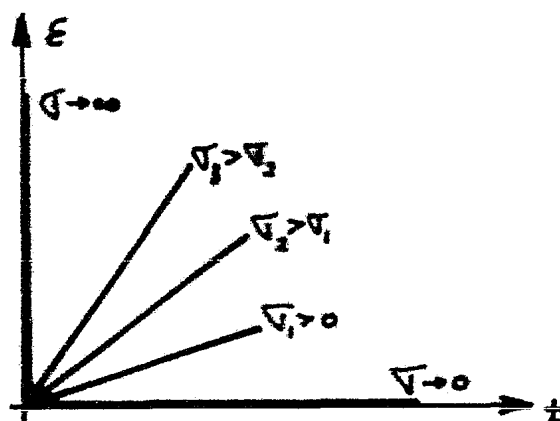


Figura II.11. Curvas de reptación, para un fluido Newtoniano sometido a diferentes esfuerzos.

Deformación constante. Para $\epsilon = \epsilon_1 = cte.$, el esfuerzo es, invariablemente, nulo.

Conclusiones. De las consideraciones anteriores, se desprende que

el modelo de Newton es adecuado para caracterizar solamente fluidos viscosos, y no permite reproducir el comportamiento de sólidos tales como las rocas.

II.2.4 Modelo visco-elástico de Kelvin. Modelo mecánico de un sólido de Kelvin. Usando los argumentos expuestos en los apartados II.2.2 y II.2.3, se puede deducir que la ecuación de estado de un sólido visco-elástico (llamado también de Kelvin), sometido a un esfuerzo uniaxial es:

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon} \quad (55)$$

la que se obtiene combinando un sólido elástico de Hooke, y un fluido viscoso de Newton; su modelo mecánico puede ser representado por la combinación, en paralelo, de un resorte y un amortiguador (figura II.12).

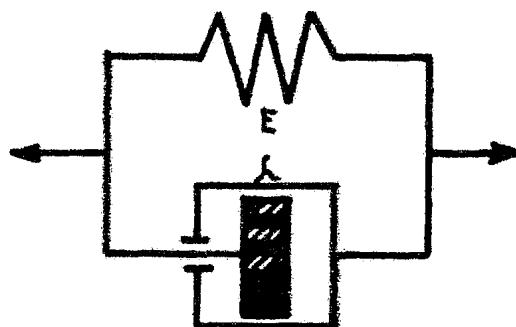


Figura II.12. Analogía mecánica de un sólido de Kelvin.

Aumento del esfuerzo mediante incrementos constantes. Asumiendo que la velocidad de incremento del esfuerzo sea constante ($\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 = \text{cte.}$) se obtiene la relación esfuerzo-deformación, como solución de la ecuación diferencial no homogénea:

$$\dot{\sigma}_0 t = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}$$

o, escrita de otra forma,

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\lambda} \varepsilon = \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda} t \quad (56)$$

Considérese la ecuación homogénea, cuya solución se obtiene por separación de variables,

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{E}{\lambda} dt$$

de donde:

$$\varepsilon = C e^{-\frac{E}{\lambda} t} \quad (57)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial no homogénea, se supone que ésta es de la forma (57); suponiendo que la constante de integración C , es una función del tiempo; empleando la ecuación (57) y después de algunas manipulaciones, la ecuación diferencial (56) toma la forma:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\dot{\sigma}_2}{\lambda} t e^{\frac{E}{\lambda} t}$$

Integrando esta ecuación por partes, se obtiene:

$$C = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} t e^{\frac{E}{\lambda} t} - \frac{\dot{\sigma}_2 \lambda}{E E} e^{\frac{E}{\lambda} t} + A$$

Sustituyendo esto en la ecuación (57), se tiene una expresión para la deformación:

$$\varepsilon = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} t - \frac{\dot{\sigma}_2 \lambda}{E E} + A e^{-\frac{E}{\lambda} t}$$

Aceptando que cuando la prueba se inicia ($t=0$), la deformación es nula, la constante de integración, A , toma el valor:

$$A = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} \lambda$$

y por lo tanto, la deformación como función del tiempo, queda expresada por:

$$\varepsilon = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} \left[t - \frac{\lambda}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t} \right) \right] \quad (58)$$

donde λ/E es el factor de retraso temporal de la deformación.

Dado que $\sigma = \dot{\sigma}_2 t$, la relación esfuerzo-deformación queda como:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left[\sigma - \dot{\sigma}_2 \frac{\lambda}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda} \frac{\sigma}{\dot{\sigma}_2}} \right) \right] \quad (59)$$

Esta función se ilustra, gráficamente, en la figura II.13; de esta última expresión se ve que, bajo impacto, $\dot{\sigma}_2 \rightarrow \infty$, la deformación es igual a cero, mientras que si el incremento del esfuerzo es muy lento $\dot{\sigma}_2 \rightarrow 0$, o $\dot{\sigma}_2 = 0$, se tiene una deformación que va de acuerdo con la ley de Hooke para sólidos elásticos ideales.

Velocidad de deformación constante. En este caso, la ecuación (55) implica que la relación esfuerzo-deformación está representada por la familia de líneas, de ecuación:

$$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}_2 + E \varepsilon$$

y con pendiente igual a $\tan \Xi$ (figura II.14).

Esfuerzo constante. Cuando $\sigma = \sigma_0 = cte.$, la ecuación material se convierte en una ecuación diferencial no homogénea de la forma:

$$\dot{\epsilon} + \frac{\Xi}{\lambda} \epsilon = \frac{\sigma_0}{\lambda} \quad (60)$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea asociada es:

$$\bar{\epsilon} = C e^{-\frac{\Xi}{\lambda} t} \quad (57)$$

en donde $C=C(t)$, puede obtenerse sustituyendo la expresión (57) en -

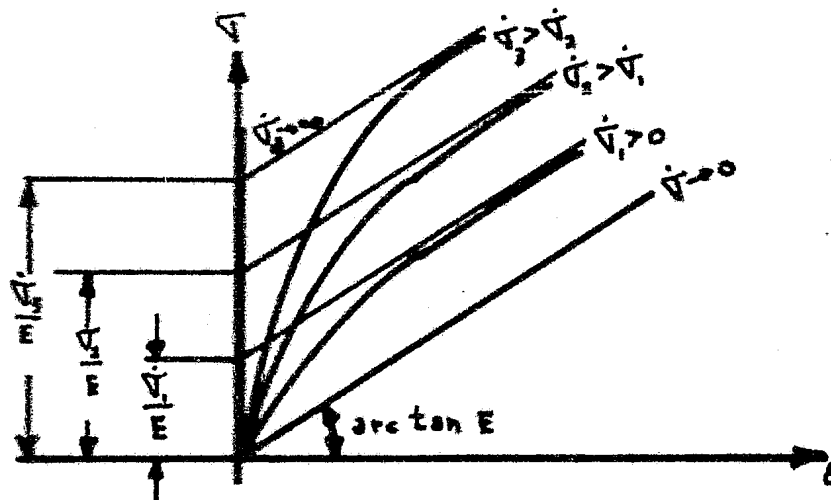


Figura II.13. Diagrama esfuerzo-deformación de un sólido de Kelvin bajo velocidad del esfuerzo constante.

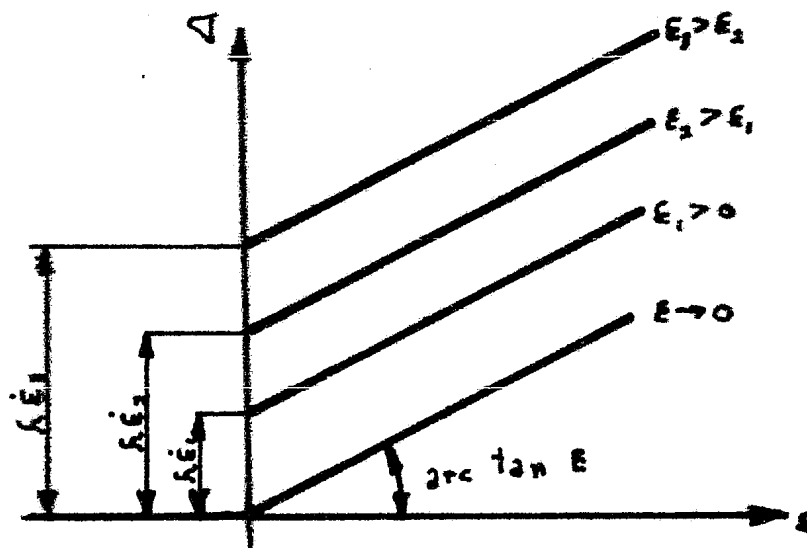


Figura II.14.

la ecuación (60), y efectuando la integración:

$$C = \frac{G_2}{E} e^{\frac{E}{\lambda} t} + A$$

Debido a que el espécimen puede estar sujeto a un esfuerzo cortante diferente de cero, éste se debe cargar, antes de iniciar la prueba, desde cero hasta G_2 ; solamente después de haber hecho esto se puede comenzar a registrar el proceso de deformación con G_2 constante. El tiempo empieza a correr, es decir, t es igual a cero, en el momento en que se ha alcanzado una carga de valor $\sigma = G_2$. En ese instante, la deformación unitaria del espécimen, en la dirección del esfuerzo es ϵ_2 ; por lo tanto las condiciones iniciales son:

$$\epsilon \Big|_{t=0} = \epsilon_2$$

por lo que la constante de integración toma el valor:

$$A = \epsilon_2 - \frac{G_2}{E}$$

y la deformación es:

$$\epsilon = \frac{G_2}{E} - \left(\frac{G_2}{E} - \epsilon_2 \right) e^{-\frac{E}{\lambda} t} = \epsilon_\infty - (\epsilon_\infty - \epsilon_2) e^{-\frac{E}{\lambda} t} \quad (61)$$

donde ϵ_∞ denota el valor al que la deformación tiende conforme $t \rightarrow \infty$, mientras que a ϵ_2 se le denomina deformación inicial, su valor depende de la historia de incrementos del esfuerzo, desde $\sigma = 0$ hasta G_2 . A partir de esto, se dice que los sólidos de Kelvin poseen cierta forma de memoria.

La ecuación (61) ha sido graficada en la figura II.15; a esta curva se le conoce con el nombre de curva de reptación. En un sólido de Kelvin el fenómeno de reptación es reversible, ya que se basa en una deformación elástica, es decir, si el esfuerzo G_2 es removido, la deformación regresa aproximándose asintóticamente a cero, conforme $t \rightarrow \infty$.

Deformación constante. La ecuación física (55), implica que si la deformación es constante ($\epsilon_2 = cte.$, $\dot{\epsilon} = 0$), el esfuerzo también debe serlo,

$$\sigma = E \epsilon_2$$

Implicaciones. Al comparar el comportamiento de un sólido visco-elástico con el de las rocas reales, se concluye lo siguiente:

1. La curva experimental de reptación de las rocas se aproxima bastante bien, al comportamiento teórico de reptación de los sólidos de Kelvin.

2. La propiedad de los sólidos de Kelvin, conforme a la que a mayor deformación corresponde un menor ritmo de incremento del esfuerzo, se verifica en las rocas.

3. Las pruebas sobre rocas, hechas en laboratorio, arrojan como re

sultado, que incluso para esfuerzos muy pequeños se presenta alguna deformación; por lo que la propiedad del sólido de Kelvin de que:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_2 = \text{cte.}$$

es decir, que la deformación se inicia (ver figura II.14) sólo cuando el esfuerzo excede el valor:

$$\sigma = \lambda \varepsilon_2$$

no tiene su contrapartida experimental para el caso de las rocas.

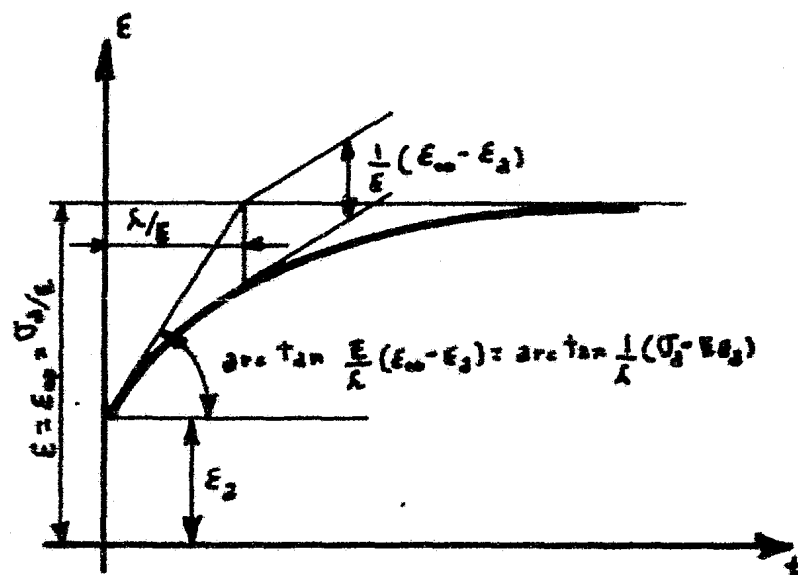


Figura II.15. Curva de reptación de un sólido de Kelvin.

4. En las pruebas de laboratorio, se ha encontrado que la mayoría de las rocas exhiben una relajación elástica de esfuerzos, característica que no se encuentra en el modelo de Kelvin.

Estos dos últimos problemas han presionado a los investigadores para buscar otro modelo reológico simple, que describa mejor la conducta de las rocas.

II.2.5 El modelo de Maxwell con relajación viscosa. Estado uniaxial de esfuerzos. Escribiendo la primera ecuación componente en σ :

$$\sigma - \sigma_0 = \lambda \eta (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0) - \tau (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0) \quad (62)$$

de la ecuación material:

$$\bar{T} = \lambda \eta \dot{\bar{\varepsilon}} - \tau \dot{\bar{T}}$$

y dado que bajo esfuerzo uniaxial:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma, \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3} \dot{\sigma}$$

y que la ecuación física, referente a la deformación isotrópica es:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$$

entonces, la expresión (52) puede escribirse como:

$$\frac{2}{3}\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon} - \frac{2\eta}{3K}\dot{\sigma}_0 - \frac{2}{3}\sigma\dot{\sigma}$$

o,

$$\sigma = 3\eta\dot{\varepsilon} - \left(\nu + \frac{\eta}{3K}\right)\dot{\sigma}$$

si se emplea la notación:

$$\lambda = \frac{9\eta K}{3K+G} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{3K\nu + \eta}{3K+G}$$

ya mencionada en (36), y recordando que en un sólido de Maxwell, $G=0$ se tiene que:

$$\lambda|_{G=0} = 3\eta \quad \text{y} \quad \nu|_{G=0} = \nu + \frac{\eta}{3K}$$

esto es,

$$\sigma = \lambda\dot{\varepsilon} - \nu\dot{\sigma} \quad (63)$$

que se puede representar por una combinación en serie de un resorte y un pistón (figura II.16).

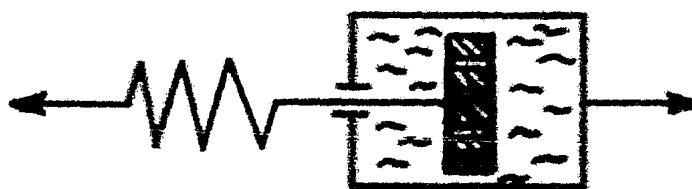


Figura II.16. Analogía mecánica del sólido de Maxwell.

Variación uniforme del esfuerzo. Si $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 = cte.$, la ecuación diferencial (52) da como solución, después de integrarse e incorporar las condiciones iniciales, una familia de curvas esfuerzo-deformación de ecuación:

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda} \left(\nu\sigma - \frac{1}{2\dot{\sigma}_0} \sigma^2 \right) \quad (64)$$

mismas que se muestran en la figura II.17. Si se tiene una velocidad

de variación de la carga infinitesimal, $\dot{\sigma} \rightarrow 0$, los esfuerzos en el sólido no aumentan; conforme la relajación progresa, y la carga se incrementa, la deformación pasa a ser permanente de manera inmediata. Bajo impacto, $\dot{\sigma} \rightarrow \infty$, se obtiene la relación:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\nu} \varepsilon \quad (65)$$

Dado que λ/ν es constante, el modelo de Maxwell se comporta como un sólido de Hooke, idealmente elástico, y λ/ν corresponde al módulo de elasticidad de Young.

Velocidad de variación de la deformación constante. En el caso en que $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_2 = c t_2$, la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\nu} \sigma = \frac{\lambda}{\nu} \dot{\varepsilon}_2$$

derivada de la ecuación (63), y obtenida a partir de las condiciones iniciales:

$$\sigma \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon \Big|_{t=0} = 0$$

es de la forma:

$$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\nu} \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}_2}} \right) \quad (66)$$

esta relación esfuerzo-deformación se ilustra en la figura II.18.

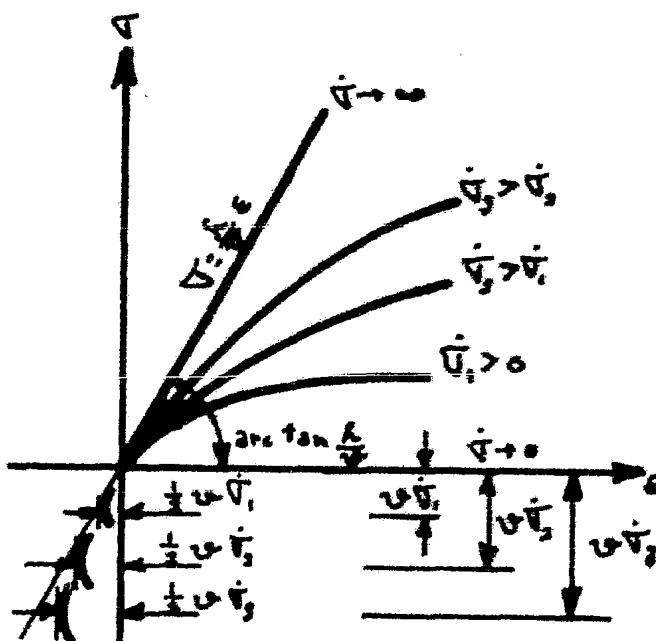


Figura II.17. Diagrama esfuerzo-deformación de un sólido de Maxwell, velocidad de variación del esfuerzo constante.

Esfuerzo constante. En el caso en que $\sigma = \sigma_2 = cte.$, la integración de la expresión (63), produce una ecuación que describe el proceso de deformación en el tiempo (figura II.19):

$$\epsilon = \epsilon_2 + \frac{\sigma_2}{\lambda} t \quad (67)$$

donde ϵ_2 es una deformación inicial, cuya magnitud depende de la his-

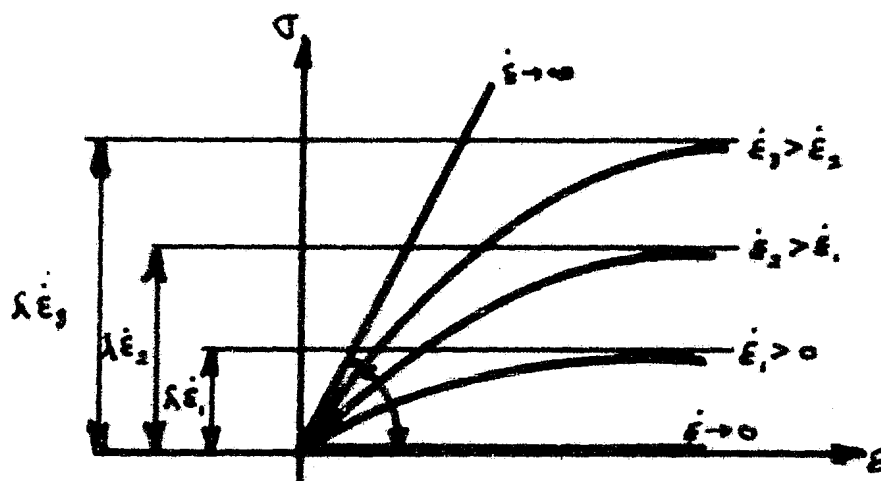


Figura II.18. Diagrama esfuerzo-deformación, de un sólido de Maxwell bajo una velocidad de deformación constante.

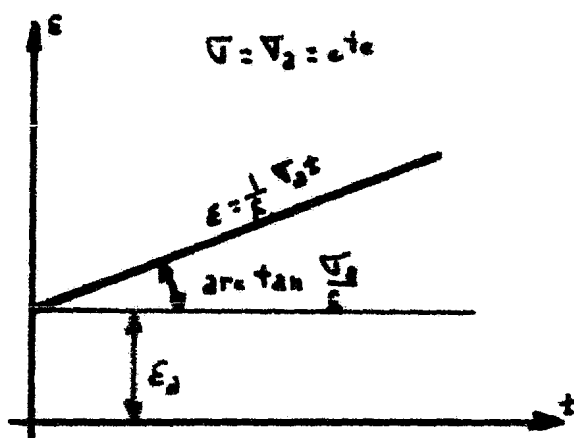


Figura II.19. Diagrama de reptación de un sólido de Maxwell.

toria de la deformación, misma que se inicia en el estado reológicamente "virgen", es decir, depende del proceso de incremento del esfuerzo desde $\sigma=0$ hasta $\sigma=\sigma_2$. Posteriormente a la descarga, las deformaciones no decrecen hasta cero como en el caso de un sólido de Kelvin; no siendo éstas elásticas, el fenómeno de reptación en un sólido de Maxwell es irreversible.

Deformación constante. La ecuación (63) se traduce en la relación:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (68)$$

Si no se permite que la deformación de un espécimen pre-cargado, aumente más allá de un cierto límite, se observa una relajación del esfuerzo; σ_0 es el esfuerzo inicial, cuyo valor es función de la historia de deformación, este fenómeno se ilustra en la figura II.20.

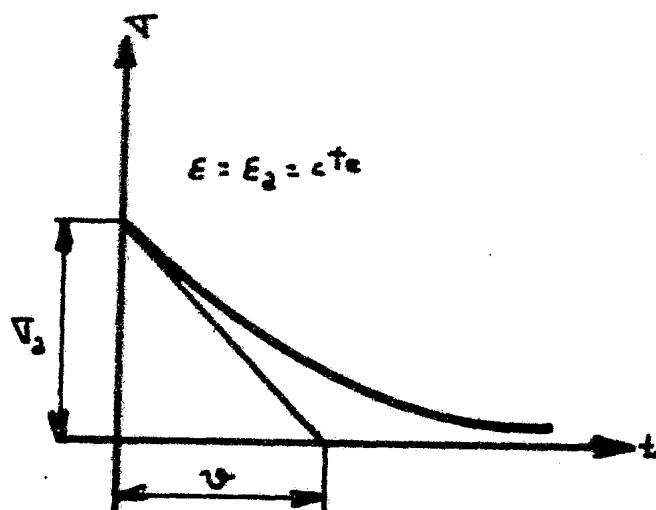


Figura II.20. Relajación en un sólido de Maxwell.

Implicaciones. Las consideraciones hechas en este apartado, acerca de un sólido con relajación viscosa, revelan lo siguiente:

1. la propiedad de un sólido de Maxwell para relajarse, se encuentra en la mayoría de las rocas, sin embargo, en éstas últimas dicho comportamiento es limitado, ya que no se llega a la completa eliminación de los esfuerzos.

2. El modelo no toma en cuenta deformaciones elásticas, usualmente presentes en las más de las rocas.

3. El modelo es aplicable como una aproximación del fenómeno de relajación en rocas con comportamiento plástico.

II.2.6 El modelo con relajación elástica. Estado uniaxial de esfuerzos. Bajo carga uniaxial, la ecuación material:

$$\bar{\tau} = \mathcal{L}G\bar{\epsilon} - \tau\dot{\bar{\tau}}$$

se convierte en la ecuación escalar:

$$\sigma - \sigma_0 = \mathcal{L}G(\epsilon - \epsilon_0) - \tau(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0)$$

que, mediante las sustituciones:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma, \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3}\dot{\sigma}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3K}\sigma_0 = \frac{1}{9K}\sigma$$

puede escribirse como:

$$\sigma = \lambda G \frac{m+1}{m} \varepsilon - \frac{\lambda m+1}{3m} \dot{\varepsilon} \dot{\sigma}$$

dado que ahora $\eta = \lambda = 0$:

$$\alpha \Big|_{\eta=0} = \frac{3(\lambda+1)}{3\lambda+G} \Big|_{\eta=0} = \frac{\frac{E_m}{m-2} \dot{\varepsilon}}{\frac{E_m}{m-2} + \frac{E_m}{\lambda m+1}} = \frac{\lambda m+1}{3m} \dot{\varepsilon}$$

por lo tanto:

$$\sigma = E \varepsilon - \alpha \dot{\sigma} \quad (69)$$

Velocidad de incremento del esfuerzo constante. Sustituyendo $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 = \text{cte.}$, en la ecuación (69) se tiene:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\alpha}{E} \dot{\sigma}_0 \quad (70)$$

(figura II.21). Bajo incrementos infinitesimales del esfuerzo, el comportamiento de este modelo coincide con el del sólido de Hooke.

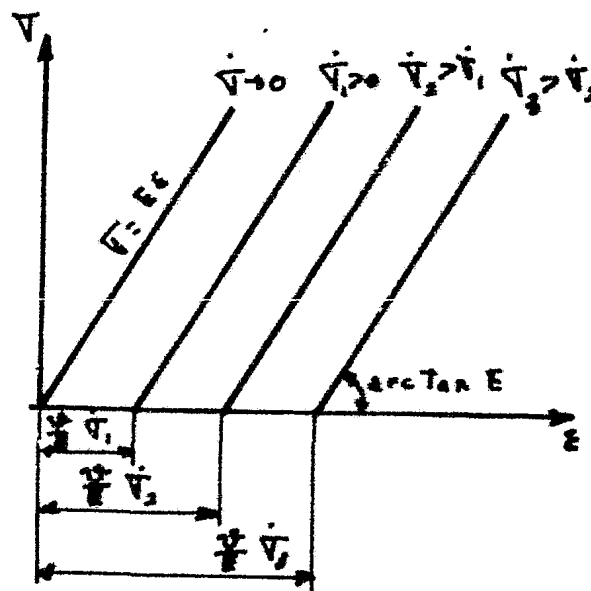


Figura II.21. Diagrama esfuerzo-deformación de un modelo elástico con relajación, sometido a una variación constante del esfuerzo.

Variación constante de la deformación. En el caso en que $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 = \text{cte.}$, la relación esfuerzo-deformación toma la forma:

$$\sigma = E \left[\varepsilon - \dot{\varepsilon}_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\tau \dot{\varepsilon}_0}} \right) \right] \quad (71)$$

Esfuerzo constante. En este caso, $\dot{\sigma} = 0$, y la ecuación (69) se transforma en:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \quad (72)$$

es decir, la deformación es constante y se rige por la ley de Hooke.

Deformación constante. La ecuación diferencial (69) implica ahora que:

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon_3 + (\sigma_2 - E\epsilon_3)e^{-\frac{t}{\tau}} = \\ &= \sigma_0 + (\sigma_2 - \sigma_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (73)$$

esto es, si la deformación se mantiene constante, el esfuerzo decrece asintóticamente hacia un valor constante, diferente de cero (figura II.22).

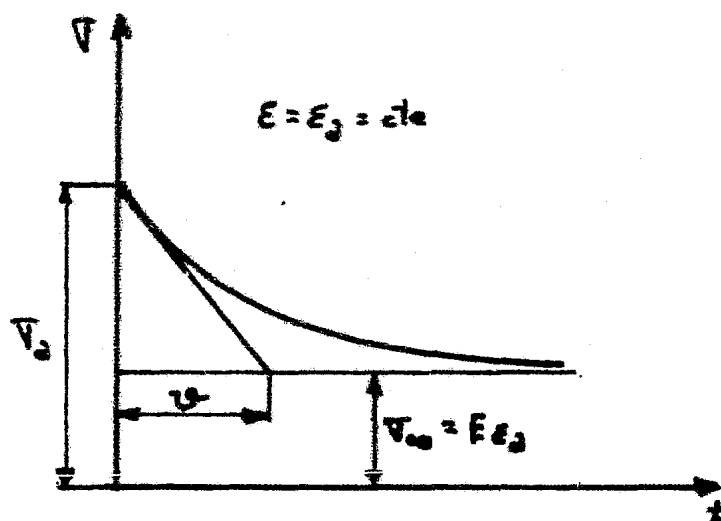


Figura II.22. Diagrama de relajación del esfuerzo en un modelo elástico con relajación, bajo deformación constante.

Implicaciones. Al comparar el comportamiento del modelo elástico - con relajación, con el de las rocas, se puede concluir que:

1. El modelo puede reproducir las deformaciones elásticas observadas en las rocas.

2. Las rocas no poseen la característica de que, bajo incremento de la deformación constante y no nulo, el esfuerzo permanece invariable hasta que la deformación alcanza el valor:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E}$$

(figura II.21).

3. Este modelo no es capaz de reproducir el fenómeno de reptación,

observado en la mayoría de las rocas.

4. El modelo reproduce de manera muy aproximada, la relajación de las rocas, ya que los esfuerzos relajados tienden a una asíntota diferente de cero, y, por lo tanto, no ocurre la relajación completa.

II.2.7 Modelo estándar de Poynting-Thomson. La comparación entre las rocas reales y los modelos mecánicos revisados en los apartados anteriores, revela que la descripción más adecuada de las propiedades materiales de los agregados rocosos, que ocupan un semi-espacio infinito, y que se asume son continuos, homogéneos, e isótropos, requiere un modelo reológico que posea todas las características deseables de los modelos anteriores, y no sus "desventajas"; tal modelo es el sólido estándar debido a Poynting-Thomson, cuyas ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= 2G\bar{E} + 2\eta\dot{\bar{E}} - \dot{\bar{E}}\tau \\ \bar{T}_0 &= 3K\bar{E}_0 \quad \text{y} \quad \dot{\bar{T}}_0 = 3K\dot{\bar{E}}_0 \end{aligned} \quad (74)$$

Ecuación física en términos de los tensores esfuerzo y deformación. Haciendo uso de las relaciones que ligan a los tensores \bar{T} y \bar{T}_0 , se puede escribir:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{T} + \bar{T}_0 = 2G\bar{E} + 2\eta\dot{\bar{E}} + 3K\bar{E}_0 - \dot{\bar{E}}\tau = \\ &= 2G(\bar{D} - \bar{E}_0) + 3K\bar{E}_0 + 2\eta(\dot{\bar{D}} - \dot{\bar{E}}_0) - \tau(\dot{\bar{D}} - \dot{\bar{E}}_0) = \\ &= 2G\bar{D} + (3K - 2G)\bar{E}_0 + 2\eta\dot{\bar{D}} + (3K\tau - 2\eta)\dot{\bar{E}}_0 - \tau\dot{\bar{D}} = \\ &= 2G\left[\bar{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\bar{E}_0\right] + 2\eta\left[\dot{\bar{D}} + \left(\frac{3K\tau}{2\eta} - 1\right)\dot{\bar{E}}_0\right] - \tau\dot{\bar{D}} \end{aligned} \quad (75)$$

Por otro lado, como:

$$\frac{3K}{2G} - 1 = \frac{\frac{Em}{m-2}}{\frac{Em}{m+1}} - 1 = \frac{3}{m-2}$$

$$\frac{3K\tau}{2\eta} - 1 = \frac{\frac{Em}{m-2}\tau}{\frac{\lambda m}{m+1}} - 1 = \frac{E}{\lambda} \frac{m+1}{m-2} \tau - 1$$

$$\bar{E}_0 = \epsilon_0 \bar{I} = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \bar{I} = \frac{1}{3} \theta \bar{I}$$

la ecuación (75) puede escribirse de la forma:

$$\bar{F} = 2G\left[\bar{D} + \frac{\theta}{m-2}\bar{I}\right] + 2\eta\left[\dot{\bar{D}} + \mathcal{A}' \frac{\dot{\theta}}{m-2}\bar{I}\right] - \tau\dot{\bar{D}} \quad (76)$$

Esta es la ecuación física del sólido estándar, resuelta para el esfuerzo, siendo:

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{3} \left[(m+1) \frac{E}{\lambda} \tau - (m-2) \right] = \frac{1}{3} \left[(m+1) \frac{G}{\eta} \tau - (m-2) \right] \quad (77)$$

Las componentes escalares de la ecuación física (76) son:

$$\begin{aligned} G_x + \nu \dot{G}_x &= \left[\varepsilon_x + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] + \lambda \eta \left[\dot{\varepsilon}_x + \frac{\lambda'}{m-2} (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) \right], & \tau_{xy} + \nu \dot{\tau}_{xy} &= G \delta_{xy} + \eta \dot{\delta}_{xy} \\ G_y + \nu \dot{G}_y &= \left[\varepsilon_y + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] + \lambda \eta \left[\dot{\varepsilon}_y + \frac{\lambda'}{m-2} (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) \right], & \tau_{yz} + \nu \dot{\tau}_{yz} &= G \delta_{yz} + \eta \dot{\delta}_{yz} \\ G_z + \nu \dot{G}_z &= \left[\varepsilon_z + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] + \lambda \eta \left[\dot{\varepsilon}_z + \frac{\lambda'}{m-2} (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) \right], & \tau_{zx} + \nu \dot{\tau}_{zx} &= G \delta_{zx} + \eta \dot{\delta}_{zx} \end{aligned} \quad (76a)$$

La ecuación física resuelta para la deformación, se deriva de manera similar. Cabe hacer notar que la ecuación:

$$\bar{T} = \lambda G (\bar{D} - \bar{\varepsilon}_0) + \lambda \eta (\dot{\bar{D}} - \dot{\bar{\varepsilon}}_0) - \nu \dot{\bar{T}}$$

implica que:

$$\begin{aligned} \lambda G \bar{D} + \lambda \eta \dot{\bar{D}} &= \bar{T} + \lambda G \bar{\varepsilon}_0 + \nu \dot{\bar{T}} + \lambda \eta \dot{\bar{\varepsilon}}_0 = \\ &= \bar{T} - \bar{T}_0 + \frac{\lambda G}{3K} \bar{T}_0 + \nu (\dot{\bar{T}} - \dot{\bar{T}}_0) + \frac{\lambda \eta}{3K} \dot{\bar{T}}_0 = \\ &= \bar{T} + \left(\frac{\lambda G}{3K} - 1 \right) \bar{T}_0 + \nu \dot{\bar{T}} + \left(\frac{\lambda \eta}{3K} - \nu \right) \dot{\bar{T}}_0 \end{aligned} \quad (78)$$

y dado que:

$$\frac{\lambda G}{3K} - 1 = -\frac{3}{m+1}$$

$$\frac{\lambda \eta}{3K} = \frac{\lambda}{E} \frac{m-2}{m+1}$$

$$\bar{T}_0 = G_0 \bar{I} = \frac{1}{3} (G_x + G_y + G_z) \bar{I} = \frac{1}{3} \bar{I}$$

la ecuación (78) puede ser reemplazada por:

$$\lambda G \bar{D} + \lambda \eta \dot{\bar{D}} = \bar{T} - \frac{\nu}{m+1} \bar{I} + \nu \left(\dot{\bar{T}} - \frac{\nu \dot{\bar{I}}}{m+1} \bar{I} \right) \quad (78a)$$

donde:

$$\nu = \frac{\lambda \eta'}{E \tau} = \frac{1}{3} \left[(m+1) - \frac{\lambda}{E \tau} (m-2) \right] \quad (79)$$

Escrita en forma escalar, la expresión (78) se transforma en:

$$\begin{aligned} E \varepsilon_x + \lambda \dot{\varepsilon}_x &= \left[G_x - \frac{1}{m} (G_y + G_z) \right] + \nu \left[\dot{G}_x - \frac{k}{m} (\dot{G}_y + \dot{G}_z) \right] \\ E \varepsilon_y + \lambda \dot{\varepsilon}_y &= \left[G_y - \frac{1}{m} (G_x + G_z) \right] + \nu \left[\dot{G}_y - \frac{k}{m} (\dot{G}_x + \dot{G}_z) \right] \\ E \varepsilon_z + \lambda \dot{\varepsilon}_z &= \left[G_z - \frac{1}{m} (G_x + G_y) \right] + \nu \left[\dot{G}_z - \frac{k}{m} (\dot{G}_x + \dot{G}_y) \right] \end{aligned} \quad (78b)$$

$$G \delta_{xy} + \eta \dot{\delta}_{xy} = \tau_{xy} + \nu \dot{\tau}_{xy}$$

$$G \delta_{yz} + \eta \dot{\delta}_{yz} = \tau_{yz} + \nu \dot{\tau}_{yz}$$

$$G \delta_{zx} + \eta \dot{\delta}_{zx} = \tau_{zx} + \nu \dot{\tau}_{zx}$$

donde:

$$k = \frac{2D}{a} = \frac{2A^2}{Ea} = \frac{2A^2}{G\alpha} \quad (80)$$

Estado uniaxial de esfuerzos. Efectuando las sustituciones:

$$G_x = G, \quad G_y = G_z = 0$$

en la primera ecuación (78b), se obtiene la ecuación material del sólido estándar, para esfuerzo uniaxial:

$$G = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} - \alpha\ddot{\varepsilon} \quad (81)$$

donde:

$$E = 2G \frac{m+1}{m}$$

$$\lambda = 2\eta \frac{m+1}{m}$$

$$\alpha = 2\tau \frac{m+1}{3m} + \frac{\eta}{G} \frac{m-2}{3m}$$

El modelo mecánico del sólido de Poynting-Thomson se muestra en la figura II.23; está compuesto por el acoplamiento en paralelo, de un resorte de constante $C_1 = E$, que representa a un sólido de Hooke, y una combinación en serie, de un resorte de constante C_2 , y un cilindro, relleno con un fluido de viscosidad μ_2 , dentro del que se mueve un pistón perforado. Sea x el desplazamiento del punto de aplicación

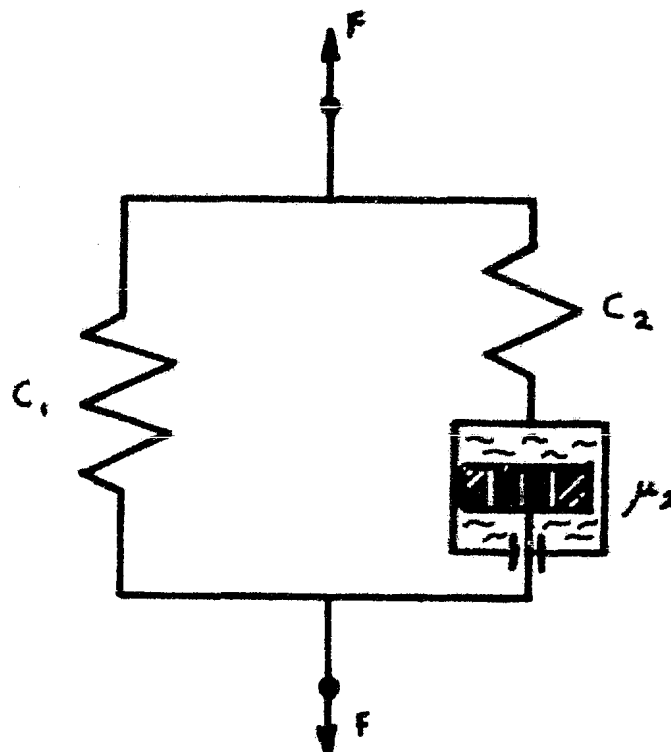


Figura II.23. Modelo mecánico del sólido de Poynting-Thomson.

de la fuerza F , y sean x_1 , y x_2 los desplazamientos de las ramas izquierda y derecha, respectivamente, del modelo, mismas sobre las que actúan las fuerzas F_1 y F_2 ; la expresión que describe el comportamiento del modelo mecánico puede derivarse a partir de las siguientes hipótesis:

-condición de equilibrio: $F = F_1 + F_2$

-condición de igualdad de desplazamientos: $x_1 = x_2 = x$

Dado que:

$$x = x_1 = \frac{F_1}{C_1}, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 = \frac{\dot{F}_1}{C_1}, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_2 = \frac{\dot{F}_2}{M_2} + \frac{\ddot{F}_2}{C_2}$$

entonces:

$$F = C_1 x + \left(\dot{x} - \frac{\dot{F}_2}{C_2} M_2 \right)$$

pero:

$$\dot{F}_2 = \dot{F} - \dot{F}_1 = \dot{F} - C_1 \dot{x}$$

por lo tanto:

$$F = C_1 x + M_2 \dot{x} - \frac{M_2}{C_2} \dot{F} + \frac{M_2 C_1}{C_2} \dot{x}$$

por lo que la relación:

$$F = C_1 x + \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) M_2 \dot{x} - \frac{M_2}{C_2} \dot{F}$$

puede escribirse; siendo idéntica a la ecuación (81), siempre y cuando se introduzca la notación:

$$\begin{aligned} F &= \sigma, & \dot{F} &= \dot{\sigma}, & \varepsilon &= x, & \dot{\varepsilon} &= \dot{x} \\ C_1 &= E, & \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) M_2 &= \lambda, & \frac{M_2}{C_2} &= \nu \end{aligned}$$

De lo anterior, se puede concluir que el modelo mecánico que se ilustra en la figura II.23, corresponde al medio reológico de Poynting-Thomson.

Variación uniforme del esfuerzo. En el caso en que $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 = cte.$, la ecuación (81) puede escribirse de la forma:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\lambda} \varepsilon = \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda} t + \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda} \nu$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\lambda} \varepsilon = 0$$

es, como se ha visto:

$$\varepsilon = Ce^{-\frac{\Xi}{\lambda}t}$$

La función $C=C(t)$ puede especificarse al sustituir esta última expresión, en la ecuación diferencial no homogénea, e integrando:

$$\frac{dC}{dt} e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} = \frac{\dot{G}_2}{\lambda} (t+u)$$

obteniéndose como resultado:

$$\begin{aligned} C &= \int dC = \frac{\dot{G}_2}{\lambda} \int (u+t) e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} dt = \\ &= \frac{\dot{G}_2}{\Xi} u e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} + \frac{\dot{G}_2}{\lambda} \int t e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} dt = \\ &= \frac{\dot{G}_2}{\Xi} u e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} + \frac{\dot{G}_2}{\Xi} t e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} - \frac{\dot{G}_2}{\Xi} \frac{\lambda}{\Xi} e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} + A \end{aligned}$$

por lo que:

$$\varepsilon = \frac{\dot{G}_2}{\Xi} \left[t - \left(\frac{\lambda}{\Xi} - u \right) + A' e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} \right]$$

y la constante de integración A' , se calcula a partir de la condición inicial:

$$\varepsilon \Big|_{t=0} = \frac{\dot{G}_2}{\Xi} \left(u - \frac{\lambda}{\Xi} + A' \right) = 0$$

por lo tanto,

$$A' = \frac{\lambda}{\Xi} - u$$

De acuerdo a lo anterior, la variación en el tiempo de la deformación, está descrita por la expresión:

$$\varepsilon = \frac{\dot{G}_2}{\Xi} \left[t - \left(\frac{\lambda}{\Xi} - u \right) \left(1 - e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} \right) \right] \quad (82)$$

misma que en la figura II.24 se grafica para diferentes velocidades de variación del esfuerzo.

Asimismo, la relación esfuerzo-deformación (figura II.25), está dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{\Xi} \left[G - \dot{G}_2 \left(\frac{\lambda}{\Xi} - u \right) \left(1 - e^{-\frac{\Xi}{\lambda}t} \right) \right] \quad (83)$$

La figura II.25, revela que, tanto cuando la carga es aplicada mediante incrementos infinitesimales, $\dot{G}=0$, como cuando:

$$\frac{\lambda}{E} = \tau$$

en cuyo caso el retardo de la deformación coincide con el tiempo de relajación, el modelo se comporta como un sólido de Hooke (elástico lineal).

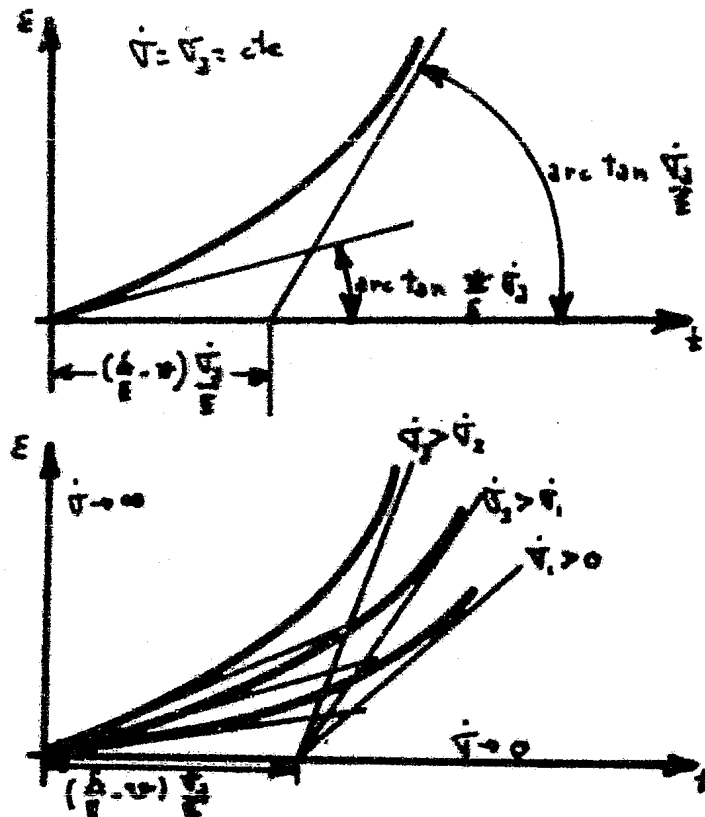


Figura II.24. Desarrollo de la deformación con el tiempo, en un sólido estándar sometido a una variación constante del esfuerzo,

Variación constante de la deformación. Si $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_2 = cte.$, las condiciones iniciales implican que:

$$\sigma = E \left[\epsilon + \dot{\epsilon}_2 \left(\frac{\lambda}{E} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda} \frac{\epsilon}{\dot{\epsilon}_2}} \right) \right] \quad (84)$$

(figura II.26).

Esfuerzo constante. El fenómeno de reptación en un sólido estándar de Poynting-Thomson, coincide con el de un sólido de Kelvin,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma_2}{E} - \left(\frac{\sigma_2}{E} - \epsilon_2 \right) e^{-\frac{E}{\lambda} t} = \\ &= \epsilon_{\infty} - (\epsilon_{\infty} - \epsilon_2) e^{-\frac{E}{\lambda} t} \end{aligned} \quad (85)$$

tal ; como se ilustra en la figura II.27.

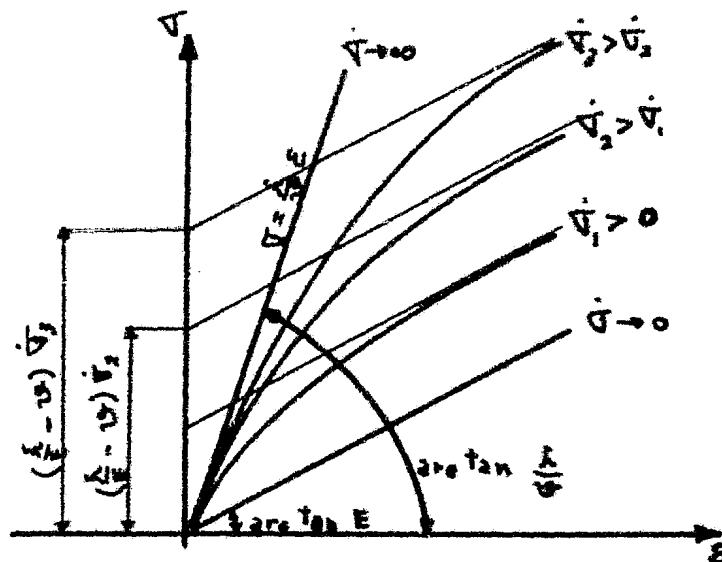


Figura II.25. Diagrama esfuerzo-deformación del modelo estándar, - sujeto a un ritmo constante de variación del esfuerzo.

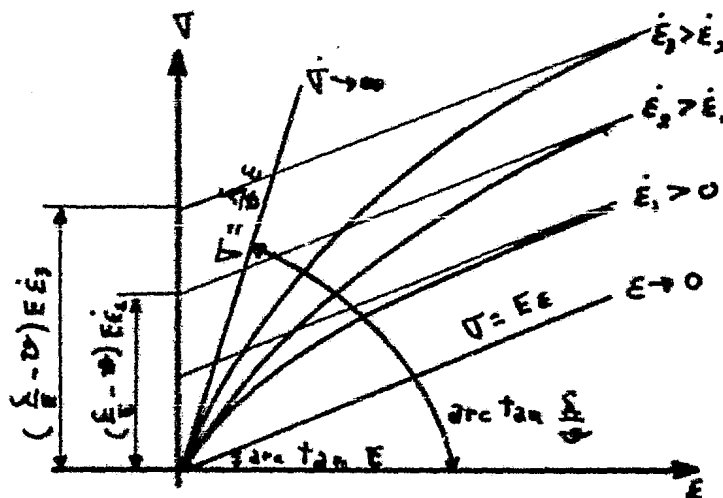


Figura II.26. Diagrama esfuerzo-deformación del modelo estándar, - sometido a velocidad de deformación constante.

Deformación constante. La relajación de esfuerzos que tiene lugar en un sólido estándar, cuando la deformación se mantiene constante, coincide con el comportamiento deducido para el modelo con relajación elástica (figura II.22),

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon_2 + (\sigma_2 - E\epsilon_2) e^{-\frac{t}{\tau}} = \\ &= \sigma_0 + (\sigma_2 - \sigma_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (86)$$

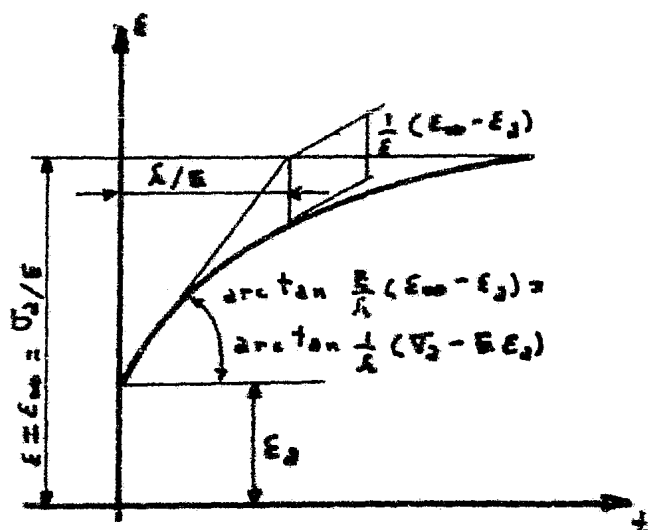


Figura II.27. Curva de reptación del sólido de Poynting-Thomson.

Consecuencias. La comparación entre el comportamiento de este modelo teórico, y el que se conoce de las rocas, revela que el modelo es estándar, con su ecuación de estado lineal y homogénea, es adecuado para describir algunas propiedades importantes de las rocas. Sin embargo, dado que este modelo no reproduce ciertos aspectos del comportamiento plástico de las rocas, su aplicación al análisis de las propiedades materiales del semi-espacio infinito, estará restringida al cumplimiento de la hipótesis de que las magnitudes de los esfuerzos se encuentran por debajo del límite de fluencia (límite plástico).

II.2.8 La teoría de la elasticidad en la mecánica de rocas. A lo largo de la evolución histórica del análisis mecánico de las rocas, se han propuesto numerosas ecuaciones materiales, desarrolladas tanto teóricas como empíricamente, de éstas, la más empleada ha sido la teoría matemática de la elasticidad, o hablando con más precisión la ecuación material de Hooke. Esta elección está justificada, no sólo por el hecho de que en un gran número de casos en que se ha cargado una roca, la zona en estudio exhiba un comportamiento muy aproximado al elástico lineal, sino también por la circunstancia de que el análisis bajo tales condiciones, pueda aprovechar el enfoque de la mecánica de medios continuos, la que, al exigir rigor y claridad en sus desarrollos, permite eliminar errores de concepto, concretar la mayoría de los problemas, y evitar la toma de decisiones incorrectas derivadas del uso de modelos mecánicos no apropiados.

Por otro lado, un modelo material elástico lineal es, por su propia naturaleza, inadecuado para describir el comportamiento de las rocas en función del tiempo, y los procesos que tienen lugar conforme transcurre éste; es, por tanto, incapaz de reproducir rigurosamente la evolución temporal de la interacción roca-soporte, su dependencia del tiempo, el fenómeno de deformación prolongada, desplazamientos y su posible falla, etc. En contraste, el enfoque elástico lineal, que pueda hacer uso de los métodos de análisis numérico más desarrollados, está en posición de ofrecer al ingeniero práctico, modelos y analogías, como por ejemplo: la analogía óptica para el aná-

lisis de esfuerzos, analogías eléctricas, etc., que le permiten obtener soluciones aceptables, incluso en aquellos casos en que el enfoque teórico parezca fallar, en lo que respecta al tiempo, o la herramienta matemática disponible no sea apropiada para atacar el problema. El método del elemento finito provee, a los ingenieros, de un procedimiento de cálculo que hace posible resolver complejos problemas de mecánica de rocas, en los que éstas, están descritas por ecuaciones materiales compuestas, e incluso, diferentes de un punto a otro del macizo rocoso.

Existe un especial interés en comparar el comportamiento real de las rocas en la naturaleza, con el que se predice a partir de los modelos estándar y elástico. Hay que hacer notar que si el rango en el que, tanto el aparato teórico, como el experimental de la teoría de la elasticidad, pueden usarse para reemplazar de manera rigurosa al enfoque del modelo estándar, obteniéndose suficiente aproximación, entonces:

- se tiene una ayuda de como, y haciendo uso de que modelo, se puede aproximar una solución referente a un medio reológico general, a partir de una solución elástica,

- empleando el principio de correspondencia, se puede derivar, de una solución elástica, una reológica,

- se pueden definir las condiciones bajo las cuales, los métodos experimentales de la teoría de la elasticidad, son capaces de aportar información útil para la resolución de un problema dado.

En el análisis de las propiedades del modelo estándar, se vio que si la deformación se mantiene constante, los esfuerzos se relajarán hasta un nivel definido por la ley de Hooke, y si los esfuerzos son fijos, las deformaciones convergerán a los valores que la teoría de la elasticidad predice. Todo esto muestra que las relaciones válidas para sólidos elásticos, son directamente aplicables al medio estándar, si lo que se desea determinar es:

- su estado inicial de esfuerzos,

- sus estados finales de deformación y desplazamiento,

sin, claro está, proveer ninguna información sobre los estados intermedios.

En resumen, se concluye que los aparatos teórico y experimental de la teoría de la elasticidad, son directamente aplicables en lo que respecta a la predicción de los estados inicial de esfuerzos, y final de deformación. Las soluciones obtenidas a partir de la teoría de la elasticidad, son útiles incluso cuando se requiere información acerca de los estados intermedios (por ejemplo, en problemas concernientes a la presión de la roca como función del tiempo, la dependencia temporal del comportamiento del revestimiento de un túnel), ya que éstas dan una base que permite conocer la forma que debe tomar la solución. Asimismo, se puede decir que cuando se conoce la solución para el sólido de Hooke, de cualquier problema de mecánica de rocas, se puede derivar de manera simple su solución reológica; lo mismo se puede decir si el problema es susceptible de ser modelado utilizando alguno de los métodos experimentales de la teoría de la elasticidad.

II.3 Relaciones reológicas fundamentales de la mecánica de ro-

cas.

II.3.1 El campo mecánico. Variables mecánicas. Uno de los objetivos básicos de la investigación en mecánica de rocas, es el análisis de los fenómenos mecánicos y cambios de estado que se presentan durante largos períodos de tiempo, debidos principalmente a la excavación de túneles, con vista en proveer a la práctica diaria, de información acerca de los cambios que se pueden esperar en el estado de dichos túneles o cavidades, de las consecuencias que acarrea la introducción en el sistema de reacciones en forma de soportes, de los tipos de soportes más adecuados y la forma de instalarlos, el probable movimiento de la roca, etc. Las respuestas a todos estos es-
tos problemas, pueden obtenerse sólo mediante el conocimiento de los estados de esfuerzo, deformación, y desplazamiento de la zona de la corteza terrestre que se encuentra en la vecindad de la cavidad, sus distribuciones como funciones de las coordenadas espaciales, y sus variaciones respecto al tiempo. En otras palabras, en el dominio por investigar, el campo mecánico (reológico) debe ser especificado adecuadamente. De manera más precisa, lo que se debe conocer como función del tiempo y del lugar, es:

-el campo de esfuerzos,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{F}} &= \bar{\mathbb{F}}(\bar{r}, t) = \bar{\mathbb{T}}(\bar{r}, t) + \bar{\mathbb{T}}_0(\bar{r}, t) = \bar{\mathbb{T}}(\bar{r}, t) + \mathbb{G}_0(\bar{r}, t) \bar{\mathbb{I}} \\ \bar{G}_x &= \bar{G}_x(\bar{r}, t) = \bar{G}_x(x, y, z, t), \quad \bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy}(\bar{r}, t) = \bar{\tau}_{xy}(x, y, z, t) \\ \bar{G}_y &= \bar{G}_y(\bar{r}, t) = \bar{G}_y(x, y, z, t), \quad \bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{yz}(\bar{r}, t) = \bar{\tau}_{yz}(x, y, z, t) \\ \bar{G}_z &= \bar{G}_z(\bar{r}, t) = \bar{G}_z(x, y, z, t), \quad \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zx}(\bar{r}, t) = \bar{\tau}_{zx}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (87)$$

-su correspondiente campo de deformaciones,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{D}} &= \bar{\mathbb{D}}(\bar{r}, t) = \bar{\mathbb{E}}(\bar{r}, t) + \bar{\mathbb{E}}_0(\bar{r}, t) = \bar{\mathbb{E}}(\bar{r}, t) + \bar{\mathbb{E}}_0(\bar{r}, t) \bar{\mathbb{I}} \\ \bar{\epsilon}_x &= \bar{\epsilon}_x(\bar{r}, t), \quad \bar{\gamma}_{xy} = \bar{\gamma}_{xy}(\bar{r}, t) \\ \bar{\epsilon}_y &= \bar{\epsilon}_y(\bar{r}, t), \quad \bar{\gamma}_{yz} = \bar{\gamma}_{yz}(\bar{r}, t) \\ \bar{\epsilon}_z &= \bar{\epsilon}_z(\bar{r}, t), \quad \bar{\gamma}_{zx} = \bar{\gamma}_{zx}(\bar{r}, t) \end{aligned} \quad (88)$$

-y, el campo de desplazamientos,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{U}} &= \bar{\mathbb{U}}(\bar{r}, t) \\ \bar{u}_x &= \bar{u}_x(\bar{r}, t) \\ \bar{u}_y &= \bar{u}_y(\bar{r}, t) \\ \bar{u}_z &= \bar{u}_z(\bar{r}, t) \end{aligned} \quad (89)$$

El planteamiento de un problema de mecánica de rocas (utilizando un modelo que se considere adecuado), se acepta como correcto si las tres funciones (87) a (89) (o las quince funciones escalares en las que éstas se descomponen) son conocidas.

Ecuaciones fundamentales. Para especificar un campo mecánico, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y de borde, se puede hacer uso de las ecuaciones fundamentales de la reología, que establecen las relaciones que vinculan a las variables mecánicas. En un análisis convencional, es usual dividir las ecuaciones fundamentales en tres grandes grupos, en función de las variables que éstas relacionan, o de las leyes generales a partir de las cuales éstas han sido derivadas; estos grupos se enumeran a continuación.

Ecuación de movimiento o de equilibrio. Esta relación expresa el equilibrio dinámico de una región del espacio, limitada por una superficie cerrada arbitraria (en general, un prisma elemental); esto es posible debido a que tanto las fuerzas internas que actúan sobre la superficie límite de la región considerada, como las fuerzas de cuerpo que representan influencias externas, y las fuerzas de inercia, constituyen, todas juntas, un conjunto balanceado de fuerzas. De acuerdo con lo anterior, esta ecuación describe la relación que existe entre el tensor esfuerzo y el vector desplazamiento:

$$\bar{\nabla}_i(\bar{T}, \bar{u}) = \bar{0} \quad (90)$$

Ecuación geométrica. Sea P un punto de un sólido cuyo vector de posición es \bar{r} , supóngase que éste es desplazado, por la acción de un esfuerzo, a un punto P' con vector de posición $\bar{r} + \bar{u}$; al vector PP' se le llama el vector desplazamiento \bar{u} . En general, los puntos P_i de un sólido no son desplazados la misma magnitud y en las mismas direcciones; el esfuerzo también cambia las posiciones relativas de estos puntos, es decir, el sólido se deforma. Utilizando las expresiones:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

se obtienen las relaciones entre las componentes del tensor deformación, y las del vector desplazamiento:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (91)$$

Estas relaciones geométricas son conocidas por el nombre de ecuación geométrica:

$$\bar{\nabla}_i(\bar{D}, \bar{u}) = \bar{0} \quad (91a)$$

Ecuación material. Esta sirve para dar una descripción de las propiedades mecánicas de los materiales en términos de las variables mecánicas (en los enfoques convencionales, éstas son los tensores esfuerzo y deformación); asimismo, permite obtener la descripción de -

los cambios de estado mecánico, y la de varias transformaciones energéticas. Esta ecuación se ha deducido a partir del principio de conservación de la energía, y de la primera ley de la termodinámica. La ecuación material o física, refleja la relación existente entre los esfuerzos y las deformaciones:

$$\bar{f}_3(\bar{F}, \bar{D}) = \bar{0} \quad (92)$$

Las tres funciones que describen el campo mecánico pueden ser deducidas a partir de las tres ecuaciones anteriores, y las funciones que resuelven estas ecuaciones, deben satisfacer las condiciones iniciales y de frontera.

Una circunstancia que debe hacerse notar, es que estas tres ecuaciones no poseen el mismo rango de validez o generalidad; la ecuación de equilibrio, que se deriva del segundo axioma de Newton, es de carácter general sin importar las propiedades materiales del continuo, o las magnitudes de las deformaciones.

La ecuación geométrica (91) es, en esencia, una definición; se necesita dado que, por las hipótesis que se han hecho, las ecuaciones físicas representan propiedades materiales que consideran al tensor de deformación \bar{D} ; por ello, para establecer una conexión entre las expresiones (90) y (92), se requiere especificar \bar{D} en función de \bar{U} ; de aquí que la ecuación geométrica no sea sino la formulación matemática de una convención arbitraria.

La ecuación material no posee validez general, ya que depende del comportamiento mecánico, y las propiedades materiales, de la región o dominio de materia bajo estudio; su validez se restringe, por lo tanto, a una regla para un determinado tipo de material; es una relación aproximada que refleja las propiedades mecánicas más importantes de un conjunto de cuerpos (sistemas mecánicos), que tienen como característica común el poseer dichas propiedades.

II.3.2 Ecuación de equilibrio. Establecimiento de la condición de equilibrio dentro del dominio. Considérese un volumen limitado -- por una superficie cerrada S arbitraria dentro del semi-espacio infinito (figura II.28). Si todo el semi-espacio infinito está en equilibrio este dominio también debe estarlo; sean: \bar{n} un vector unitario normal a la superficie S , y que apunta hacia el exterior de la región, \bar{P}_n el vector esfuerzo; \bar{f}_q denota la fuerza de cuerpo que actúa sobre una unidad de volumen de materia contenida en el dominio, donde ρ es la densidad de la materia, y \bar{q} es el vector aceleración debida a la gravedad terrestre; por último, sea \bar{f}_a la fuerza de inercia por unidad de volumen, donde \bar{a} es el vector aceleración de un punto, cuyo vector de posición es \bar{r} , y que se encuentra en la región delimitada por S :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \end{aligned} \quad (93)$$

en la que \bar{v} es la velocidad de un punto cualquiera del continuo, -- con vector de posición \bar{r} , obtenida por derivación parcial con respecto al tiempo, del vector desplazamiento:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= [v_x \ v_y \ v_z] = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} \ \frac{\partial u}{\partial x} \ \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\ \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \nabla \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\end{aligned}$$

donde d/dt es conocida como la derivada sustancial con respecto al tiempo, misma que permite establecer el desplazamiento de una partícula, con respecto a un sistema de referencia en movimiento, y $\partial/\partial t$ es la derivada local con respecto al tiempo.

De aquí en adelante se empleará la aproximación, usualmente empleada en mecánica de sólidos,

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \doteq \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (93a)$$

asumiendo su admisibilidad.

El equilibrio de la región limitada por la superficie cerrada S puede expresarse mediante la integral, sobre la superficie, del esfuerzo y las integrales, sobre el volumen, de la fuerza de cuerpo y la fuerza de inercia:

$$\oint_{(S)} \bar{P}_n dA + \iiint_{(V)} \bar{F} dV = \iiint_{(V)} \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dV \quad (94)$$

donde dA es el elemento de superficie y dV es el elemento de volumen.

Como:

$$\bar{P}_n = \bar{F} \bar{n}$$

y:

$$d\bar{A} = \bar{n} dA$$

el primer término de la ecuación (94) puede escribirse como:

$$\bar{P}_n dA = \bar{F} \bar{n} dA = \bar{F} d\bar{A} \quad (95)$$

Por el teorema de Gauss - Ostrogradsky, la integral de superficie (95) puede transformarse en una integral de volumen:

$$\oint_{(S)} \bar{F} d\bar{A} = \iiint_{(V)} \bar{F} \nabla dV$$

por lo que el equilibrio de la región limitada por la superficie S puede ser expresado como una ecuación integral:

$$\iiint_{(V)} \left[\bar{F} \nabla + \rho \bar{F} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right] dV = \bar{0} \quad (96)$$

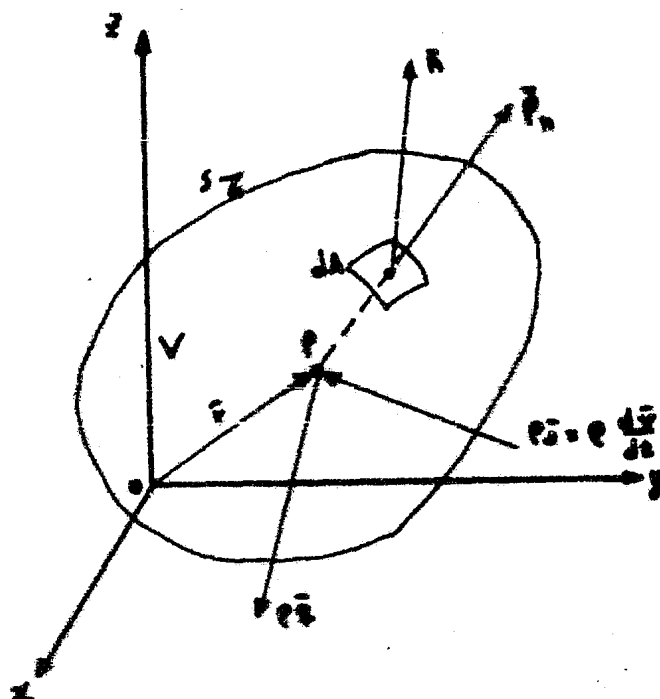


Figura II.28. Fuerzas que actúan tanto en la superficie como en el interior del elemento sólido delimitado por la superficie cerrada S .

Como la elección del volumen V inscrito en la superficie S es arbitraria, la expresión anterior es como resultado una ecuación de equilibrio:

$$\bar{F}V + \bar{P}\bar{S} = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t^2} \quad (97)$$

válida para todo el volumen.

Escrita en forma escalar, la ecuación (97) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \rho f_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \rho f_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \rho f_z \end{aligned} \quad (97a)$$

Casos de equilibrio. Si se desprecian las fuerzas de cuerpo, esto es, si se asume que el campo de esfuerzos inicial (primario), es homogéneo, la ecuación que expresa el equilibrio dinámico se simplifica a:

$$\bar{F}\nabla = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t^2} \quad (98)$$

En problemas estáticos de mecánica de medios continuos, el vector:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

puede suponerse igual a cero, dado que los desplazamientos son muy pequeños, o se llevan a cabo en intervalos de tiempo muy grandes, o cuando $t \rightarrow \infty$ (es decir, cuando las deformaciones y desplazamientos \bar{u} han tomado su curso); en este caso, la ecuación de equilibrio se simplifica aún más:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \bar{0} \quad (99)$$

que descompuesta en sus componentes escalares toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Funciones esfuerzo. Las componentes del esfuerzo que satisface a (99), pueden ser derivadas a partir de tres funciones esfuerzo.

Funciones esfuerzo de Maxwell. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ funciones que pueden ser diferenciadas por lo menos tres veces; utilizándolas, las componentes del esfuerzo pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \\ G_y &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z} \\ G_z &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2}, & \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (100)$$

De esta manera la ecuación diferencial (99) queda satisfecha automáticamente.

Función esfuerzo de Morera. En términos de las funciones esfuerzo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, las componentes del esfuerzo toman la forma:

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, & \tau_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right] \\ G_y &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z}, & \tau_{yz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right] \\ G_z &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}, & \tau_{zx} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (101)$$

Una vez que las funciones esfuerzo se ajustan a las condiciones de frontera, se puede calcular el campo de esfuerzos.

II.3.3 Condiciones iniciales y de borde. Las funciones que describen el campo mecánico, vistas como soluciones, deben satisfacer las condiciones iniciales, y de frontera más relevantes del sistema de ecuaciones simultáneas, constituido por las ecuaciones de equili-

lrio, geométrica y física; estas condiciones se determinan en función de la naturaleza del problema. Por ejemplo, considérese las condiciones iniciales, y de frontera, para un túnel excavado a lo largo del eje Z, a una profundidad H, como se muestra en la figura II.29.

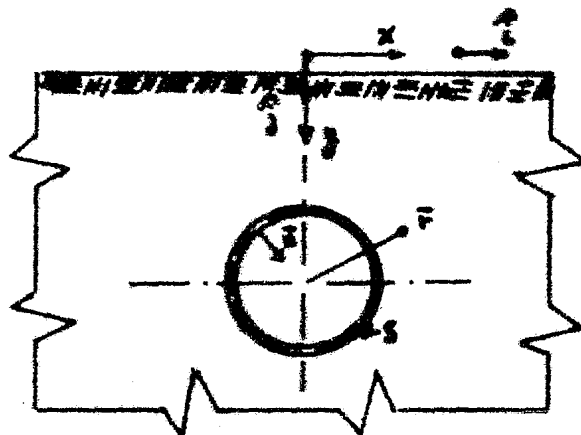


Figura II.29.

1. La superficie del terreno no soporta ninguna carga, es decir, -ningún esfuerzo normal actúa sobre ella. El vector unitario que define a ese plano es \hat{j} , y, por tanto, esta condición puede formularse matemáticamente como:

$$\bar{F}(\bar{r}, t) \hat{j} \Big|_{y=0} = \bar{0} \quad (102)$$

2. Sea \bar{n} un vector normal a la superficie S que delimita el túnel, tal que apunta hacia el interior de la misma; considérese que este túnel ha sido excavado en un semiespacio infinito. Si la superficie de la cavidad no transmite ninguna carga, esto es, no se ha instalado soporte alguno, entonces:

$$\bar{F}(\bar{r}, t) \bar{n} \Big|_S = \bar{0} \quad (103a)$$

Si por el contrario, un esfuerzo distribuido \bar{p} , normal a S en todo punto, actúa sobre la pared del túnel, entonces:

$$\bar{F}(\bar{r}, t) \bar{n} \Big|_S = \bar{p} \quad (103b)$$

3. A una gran distancia de la cavidad, es decir, en el "infinito", la distribución de esfuerzos original no se ve afectada por la excavación del túnel, esto es, el campo de esfuerzos, en ese caso, se encuentra caracterizado por el tensor esfuerzo primario \bar{F}_p :

$$\lim_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} \bar{F}(\bar{r}, t) = \bar{F}_p \quad (104)$$

De lo anterior se desprende de que en el "infinito", los desplazamientos y deformaciones debidos a la excavación del túnel son nulos; por tanto:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \bar{U}(\vec{r}, t) = \bar{0}, \quad \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \bar{D}(\vec{r}, t) = \bar{0} \quad (105)$$

4. En el instante en que se inicia la excavación de la cavidad, de nuevo los desplazamientos y las deformaciones son nulos; si a este instante se le escoge como $t=0$, entonces:

$$\bar{U}(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \bar{0}, \quad \bar{D}(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \bar{0} \quad (106)$$

5. Las deformaciones y los desplazamientos se desarrollan en periodos de tiempo finitos; esto significa que conforme el tiempo tiende a infinito, sus velocidades de variación tienden a cero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{U}} = \bar{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{D}} = \bar{0} \quad (107)$$

II.4 Métodos para la resolución de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de rocas.

II.4.1. Métodos de solución. Se considera resuelto un problema de mecánica de rocas una vez que el tensor esfuerzo, el tensor deformación y el vector desplazamiento, que caracterizan al campo mecánico, han sido establecidos como funciones del tiempo y de las coordenadas espaciales; para lograr esto, es necesario establecer quince funciones escalares; de las seis, definen al tensor esfuerzos:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$$

seis más, al tensor deformación:

$$\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

y tres al vector desplazamiento:

$$u_x \quad u_y \quad u_z$$

para la obtención de éstas, se tienen quince ecuaciones escalares. En casos sencillos, la solución se puede calcular de varias formas, mientras que cuando se trata de problemas más complejos, se tiene que aceptar una solución aproximada en lugar de una rigurosa.

Se brindará especial atención a tres métodos de resolución:

1. El sistema de ecuaciones simultáneas con quince incógnitas, se reduce a tres ecuaciones diferenciales cuyas variables dependientes son sólo las componentes del desplazamiento; es usual llamar a esto el método de los desplazamientos. Su uso es recomendado en aquellos casos en que las condiciones iniciales y de frontera están establecidas en términos de las componentes del desplazamiento, o puede lograr

se ello fácilmente.

2. Las ecuaciones fundamentales, pueden reducirse a un sistema de seis ecuaciones diferenciales que tienen como únicas incógnitas a las componentes de la deformación, a este procedimiento se le podría nombrar el método de las deformaciones. Para ser usado es necesario que las condiciones iniciales y de borde, estén en función de los elementos del tensor \bar{D} .

3. Eliminando de la ecuación fundamental las componentes del desplazamiento, y la deformación, se obtiene un sistema de seis ecuaciones diferenciales, involucrando solamente esfuerzos; a lo anterior se le conoce como el método de los esfuerzos, recomendado en el caso en que las condiciones de frontera se encuentran establecidas en términos de esfuerzos, o cargas.

II.4.2 Método de los desplazamientos. Ecuación de Lamé generalizada. Si se descompone la ecuación física en una ecuación de deformación, y una de cambio de volumen:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= 2G\bar{E} + 2\eta\dot{\bar{E}} - \tau\dot{\bar{T}} \\ \bar{T}_0 &= 3K\bar{E}_0, \quad \dot{\bar{T}}_0 = 3K\dot{\bar{E}}_0\end{aligned}$$

y se suman, se tiene:

$$\bar{F} = \bar{T} + \bar{T}_0 = 2G\bar{E} + 2\eta\dot{\bar{E}} - \tau\dot{\bar{T}} + 3K\bar{E}$$

recordando que:

$$\bar{D} = \bar{E} + \bar{E}_0$$

la relación que liga al tensor esfuerzo \bar{F} , con el tensor de deformación \bar{D} , puede expresarse en una sola ecuación:

$$\bar{F} = 2G\left(\bar{D} + \frac{\Theta}{m-2}\bar{I}\right) + 2\eta\left(\dot{\bar{D}} + \frac{\dot{\Theta}}{m-2}\bar{I}\right) - \tau\dot{\bar{F}} \quad (108)$$

donde Θ es el cambio relativo de volumen:

$$\Theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \bar{U} = \text{div } \bar{U} \quad (109)$$

Introduciendo la ecuación material (108) en la ecuación de equilibrio:

$$\bar{F}\nabla = \rho\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - \bar{q}\right) \quad (110)$$

se obtiene la relación:

$$\begin{aligned}2G\bar{D}\nabla + \frac{1}{3}(3K-2G)(\nabla\bar{U})\bar{I}\nabla + 2\eta\dot{\bar{D}}\nabla + \\ + \frac{1}{3}(3K\tau-2\eta)(\nabla\dot{\bar{U}})\bar{I}\nabla - \tau\dot{\bar{F}}\nabla = \rho\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - \bar{q}\right)\end{aligned} \quad (111)$$

Derivando a la ecuación (110) con respecto al tiempo, se tiene:

$$\ddot{\bar{v}} = \dot{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t^3} - \dot{\rho} \bar{q}$$

ya que:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0$$

Asumiendo que la derivada de tercer orden con respecto al tiempo, así como el producto de la primera y segunda derivadas con respecto a la misma variable, son despreciables, se infiere que:

$$\ddot{\bar{v}} = -\dot{\rho} \bar{q}$$

Usando este resultado, y las ecuaciones geométricas:

$$\bar{D} = \frac{1}{2} [\bar{u} \cdot \nabla + \nabla \cdot \bar{u}]$$

y,

$$\dot{\bar{D}} = \frac{1}{2} [\dot{\bar{u}} \cdot \nabla + \nabla \cdot \dot{\bar{u}}]$$

que ligam el vector desplazamiento con el tensor deformación, la expresión (111) toma la forma:

$$\begin{aligned} & G [\nabla \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla] \nabla + \frac{1}{3} (3k - 2G) (\nabla \bar{u}) \bar{I} \nabla + \\ & + \eta [\nabla \cdot \dot{\bar{u}} + \dot{\bar{u}} \cdot \nabla] \nabla + \frac{1}{3} (3k\tau - 2\eta) (\nabla \dot{\bar{u}}) \bar{I} \nabla = \\ & = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \bar{q} (\rho + \tau \dot{\rho}) \end{aligned} \quad (112)$$

Esta es una ecuación vectorial en términos del vector desplazamiento, exclusivamente.

Por simplicidad, se indican las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{u}) \nabla &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \bar{u}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \bar{u}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \bar{u}) \end{bmatrix} = \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{U} \cdot \nabla) \nabla &= \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ U_y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ U_z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_x \\ \Delta U_y \\ \Delta U_z \end{bmatrix} = \Delta \vec{U} \quad (114)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el llamado operador diferencial laplaciano, y

$$\begin{aligned}
 [(\nabla \vec{U}) \cdot \vec{I}] \nabla &= \begin{bmatrix} \nabla \vec{U} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \vec{U} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \vec{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \vec{U}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \vec{U}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \vec{U}) \end{bmatrix} = \nabla (\nabla \vec{U}) \quad (115)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos como las ecuaciones (113) a (115) en la ecuación vectorial (112), y admitiendo que con los términos que contienen a \vec{U} se pueden realizar operaciones análogas a las efectuadas en los párrafos anteriores, se encuentra que, después de ciertas manipulaciones, y dividir por G ,

$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{U} + \frac{3k+G}{3G} \nabla (\nabla \vec{U}) + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\vec{U}} + \\
 + \frac{3k\tau + \eta}{3G} \nabla (\nabla \dot{\vec{U}}) = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \frac{\bar{g}}{G} (\rho + \tau \dot{\rho})
 \end{aligned}$$

la que se puede simplificar a:

$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{U} + \frac{m}{m-\tau} \nabla (\nabla \vec{U}) + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\vec{U}} + \\
 + \frac{m\tau}{m-\tau} \nabla (\nabla \dot{\vec{U}}) = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \frac{\bar{g}}{G} (\rho + \tau \dot{\rho}) \quad (116)
 \end{aligned}$$

en donde:

$$\frac{\eta}{G} = \frac{\lambda}{E} = T$$

es el tiempo de retardo de la deformación y τ es el ya familiar fac-

tor de relajación. Escrita en forma escalar la ecuación (116) queda como:

$$\begin{aligned} \Delta u_x + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{u}_x + \\ + \frac{m\epsilon}{m-2} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\rho}{G} (\rho + 2\dot{\rho}) \\ \Delta u_y + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{u}_y + \\ + \frac{m\epsilon}{m-2} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{\rho}{G} (\rho + 2\dot{\rho}), \\ \Delta u_z + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{u}_z + \\ + \frac{m\epsilon}{m-2} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial z} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\rho}{G} (\rho + 2\dot{\rho}) \end{aligned} \quad (116a)$$

Por analogía con la ecuación convencional de la elasticidad de Lamé, se justifica el llamar a la ecuación (116), la ecuación de Lamé generalizada.

Ecuación para el caso en que se desprecian las fuerzas de cuerpo, y de inercia. En problemas estáticos de mecánica del continuo:

$$\bar{\nabla} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}}$$

lo que reduce a cero el miembro derecho de la ecuación (116):

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} + \frac{m}{m-2} \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \frac{m\epsilon}{m-2} \nabla(\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}) + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (117)$$

Se introducirán los siguientes símbolos, que representan a los términos del miembro izquierdo de la ecuación de la elasticidad de Lamé:

$$\begin{aligned} \bar{L}_1(\bar{\mathbf{u}}) &= \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{L}_2(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{m}{m-2} \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

Utilizándolos, la expresión (117) puede reescribirse como:

$$\left(1 + T \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{L}_1(\bar{\mathbf{u}}) + \left(1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{L}_2(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{0}}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\left(1 + T \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{L}_1 + \left(1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{L}_2 = \bar{\mathbf{0}} \quad (118)$$

Haciendo uso de los siguientes operadores diferenciales lineales:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T &\equiv \left(1 + T \frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \mathcal{D}_\epsilon &\equiv \left(1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (119)$$

la ecuación reológica fundamental de la mecánica de rocas, escrita en términos del vector desplazamiento, toma la forma:

$$\mathcal{D}_T \bar{L}_1(\bar{U}) + \mathcal{D}_{22} \bar{L}_2(\bar{U}) = \bar{0} \quad (120)$$

La ecuación (120) sugiere que, teniéndose la solución dada por la teoría de la elasticidad para un cierto problema, la solución para el modelo estándar, puede derivarse mediante un procedimiento adecuado. Esto es un corolario del hecho de que la ecuación de estado del modelo estándar, incluye la ecuación material de un sólido elástico de Hooke en el caso especial en que $\eta = \lambda = 0$ y $\gamma = \alpha = 0$ (es decir, cuando las constantes reológicas son iguales a cero); haciendo esto, los modelos estándar, y elástico lineal, coinciden.

Ecuación de cambio volumétrico relativo. Aplicando el operador nabla ∇ al miembro izquierdo de la ecuación diferencial (117), se obtiene una relación en términos del cambio volumétrico relativo solamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \Delta \bar{U} \nabla + \mathcal{D}_{22} \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \bar{U}) \nabla = \\ \mathcal{D}_T \Delta \Theta + \mathcal{D}_{22} \frac{m}{m-2} \Delta \Theta = 0 \end{aligned}$$

que puede simplificarse a :

$$\mathcal{D}_0 \Delta \Theta = 0 \quad (121)$$

donde:

$$\mathcal{D}_0 \equiv 1 + \frac{m-2}{m-1} (\tau + \alpha) \frac{\partial}{\partial t} = 1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}$$

La solución de la ecuación diferencial (121),

$$\Delta \Theta + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Theta = 0$$

es de la forma:

$$\Delta \Theta = C e^{-t/\alpha} \quad (122)$$

La constante de integración C se valúa, en general, utilizando la condición inicial; en el instante en que se inicia la excavación de un túnel, tanto las deformaciones como los desplazamientos son nulos, por lo que:

$$\Delta \Theta \Big|_{t=0} = C e^{-t/\alpha} \Big|_{t=0} = C = 0$$

Por lo tanto, la ecuación (112) se transforma en:

$$\Delta \Theta \equiv \Delta(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = 0 \quad (123)$$

Ecuación diferencial biarmónica de los desplazamientos. A partir de la expresión (123):

$$\Delta(\nabla \bar{U}) = 0$$

se puede derivar una ecuación diferencial de cuarto orden del vector desplazamiento:

$$\Delta \Delta \bar{U} = \bar{0} \quad (124)$$

que escrita en forma escalar queda como:

$$\Delta \Delta u_x = 0, \quad \Delta \Delta u_y = 0, \quad \Delta \Delta u_z = 0 \quad (124a)$$

Este método de desplazamientos es de particular aplicabilidad en mecánica de rocas, debido a que, en general, las condiciones de frontera se establecen en función de desplazamientos (medidos estos dentro del túnel, registro de subsidencias, etc.).

II.4.3 Método de las deformaciones. Ecuación generalizada de Huzár. Para poder escribir las ecuaciones reológicas fundamentales, en términos del tensor de deformación \bar{D} , se empezará por diferenciar las ecuaciones (116a) con respecto a la variable apropiada, x, y, z, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \epsilon_y$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_z$$

se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \Delta \epsilon_x + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\eta}{G} (\Delta \dot{\epsilon}_x) + \\ & + \frac{m\mu}{m-2} \frac{\partial^2 \dot{\Theta}}{\partial x^2} = \frac{P}{G} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_x}{\partial x} (P + 2\dot{P}) \\ \text{b)} \quad & \Delta \epsilon_y + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\eta}{G} (\Delta \dot{\epsilon}_y) + \\ & + \frac{m\mu}{m-2} \frac{\partial^2 \dot{\Theta}}{\partial y^2} = \frac{P}{G} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_y}{\partial y} (P + 2\dot{P}) \\ \text{c)} \quad & \Delta \epsilon_z + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\eta}{G} (\Delta \dot{\epsilon}_z) + \\ & + \frac{m\mu}{m-2} \frac{\partial^2 \dot{\Theta}}{\partial z^2} = \frac{P}{G} \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_z}{\partial z} (P + 2\dot{P}) \end{aligned} \quad (125)$$

Derivando la primera de estas ecuaciones con respecto a y, la segunda con respecto a x, y sumando los resultados de esto, se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned}
 d) \quad \Delta \delta_{xy} + \frac{2m}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \frac{\eta}{G} (\Delta \delta_{xy}) + \frac{2m\tau}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \delta_{xy}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) (\rho + \tau \rho)
 \end{aligned} \quad (125)$$

Siguiendo un procedimiento similar que involucre la segunda y tercera ecuaciones, y la primera y la tercera, respectivamente, se tienen dos ecuaciones más:

$$\begin{aligned}
 e) \quad \Delta \delta_{yz} + \frac{2m}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \frac{\eta}{G} (\Delta \delta_{yz}) + \\
 + \frac{2m\tau}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \delta_{yz}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right) (\rho + \tau \rho) \\
 f) \quad \Delta \delta_{zx} + \frac{2m}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} + \frac{\eta}{G} (\Delta \delta_{zx}) + \\
 + \frac{2m\tau}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \delta_{zx}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} \right) (\rho + \tau \rho)
 \end{aligned} \quad (125)$$

Las ecuaciones (125), representan a las ecuaciones fundamentales - en términos de las componentes de la deformación, y puede llamarseles las ecuaciones generalizadas de Huzsár, con referencia a las relaciones análogas que establecen el equilibrio estático de un sólido elástico.

Usando los operadores diferenciales lineales, introducidos en (119), las ecuaciones (125) toman la forma, más simple:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_T \Delta \epsilon_x + \mathcal{D}_\theta \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_x}{\partial x} \mathcal{D}_\tau \rho \\
 \mathcal{D}_T \Delta \epsilon_y + \mathcal{D}_\theta \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_y}{\partial y} \mathcal{D}_\tau \rho \\
 \mathcal{D}_T \Delta \epsilon_z + \mathcal{D}_\theta \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_z}{\partial z} \mathcal{D}_\tau \rho \\
 \mathcal{D}_T \Delta \delta_{xy} + \mathcal{D}_\theta \frac{2m}{m-2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \delta_{xy}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) \mathcal{D}_\tau \rho \\
 \mathcal{D}_T \Delta \delta_{yz} + \mathcal{D}_\theta \frac{2m}{m-2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \delta_{yz}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right) \mathcal{D}_\tau \rho \\
 \mathcal{D}_T \Delta \delta_{zx} + \mathcal{D}_\theta \frac{2m}{m-2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\
 = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \delta_{zx}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} \right) \mathcal{D}_\tau \rho
 \end{aligned} \quad (126)$$

donde: $\mathcal{D}_\tau \equiv 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}$

Expresando las condiciones iniciales y de frontera en términos de las componentes de la deformación (éstas no se tienen, en general, - al iniciar el análisis de un túnel, sobre todo cuando éste está por construirse), es posible derivar el campo de deformaciones directamente del sistema de ecuaciones diferenciales (126).

Introduciendo el tensor del operador diferencial de segundo orden:

$$\nabla \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

y la notación:

$$\frac{1}{2} (\bar{\nabla} \cdot \nabla + \nabla \cdot \bar{\nabla}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

La ecuación (126) puede ser condensada en una sola ecuación tensorial

$$\mathcal{D}_T \Delta \bar{D} + \mathcal{D}_\omega \frac{m}{m-2} \nabla \cdot \nabla \Theta = \frac{P}{G} \frac{\delta^2}{\partial t^2} \bar{D} - \frac{1}{2G} (\bar{\nabla} \cdot \nabla + \nabla \cdot \bar{\nabla}) \mathcal{D}_T P \quad (127)$$

es:

$$\Delta \bar{D} + \frac{m}{m-2} \nabla \cdot \nabla \Theta + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\bar{D}} + \frac{m \omega}{m-2} \nabla \cdot \nabla \dot{\Theta} = \frac{P}{G} \frac{\delta^2}{\partial t^2} \bar{D} - \frac{1}{2G} (\bar{\nabla} \cdot \nabla + \nabla \cdot \bar{\nabla}) \mathcal{D}_T P$$

Planteamiento de la ecuación diferencial sin tomar en cuenta las \llcorner fuerzas de cuerpo y de inercia. Como se ha indicado anteriormente, - cualquier estado que se tenga después de la excavación de un túnel - puede descomponerse en dos estados, uno que incluya el peso propio de la roca y otro que no lo tome en cuenta; es por esto que es conveniente considerar también el caso en que no existan fuerzas de cuerpo. Si se mantiene la ecuación de equilibrio $\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = \bar{0}$, entonces la ecuación reológica fundamental, expresada en términos del estado de deformación, toma la forma:

$$\mathcal{D}_T \Delta \bar{D} + \mathcal{D}_\omega \frac{m}{m-2} \nabla \cdot \nabla \Theta = \bar{0} \quad (128)$$

Ecuación diferencial bi-armónica de las deformaciones. Aplicando - por segunda vez el operador Δ a la ecuación (128), y haciendo uso de la ecuación diferencial armónica:

$$\Delta \Theta = 0 \quad (123)$$

y tomando en cuenta la condición inicial:

$$\bar{D} \Big|_{t=0} = \bar{0}$$

se obtiene la siguiente ecuación en derivadas parciales de cuarto orden:

$$\Delta \Delta \bar{D} = \bar{0} \quad (129)$$

sus componentes escalares son:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \varepsilon_x &= 0, & \Delta \Delta \gamma_{xy} &= 0 \\ \Delta \Delta \varepsilon_y &= 0, & \Delta \Delta \gamma_{yz} &= 0 \\ \Delta \Delta \varepsilon_z &= 0, & \Delta \Delta \delta_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (129a)$$

II.4.4 Método de los esfuerzos. Si las condiciones de borde se encuentran establecidas en términos de las cargas o esfuerzos, es indicado trabajar con la ecuación fundamental, en función de las componentes del tensor \bar{F} . Para lograr esto, se hace uso de la ecuación material del modelo estándar de Poynting-Thomson desarrollada de forma que el tensor de deformación \bar{D} sea una función explícita:

$$2G\bar{D} + 2\eta\dot{\bar{D}} = \bar{F} - \frac{\varsigma}{m+1} \bar{I} + \nu \left(\dot{\bar{F}} - \frac{\nu\dot{\varsigma}}{m+1} \bar{I} \right) \quad (130)$$

que, dividida entre $2G$, queda:

$$\bar{D} + \frac{\eta}{G} \dot{\bar{D}} = \frac{1}{2G} \left(\bar{F} - \frac{\varsigma}{m+1} \bar{I} \right) + \frac{\nu}{2G} \left(\dot{\bar{F}} - \frac{\nu\dot{\varsigma}}{m+1} \bar{I} \right) \quad (130a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varsigma &= 3G_0 = G_x + G_y + G_z \\ \nu &= \frac{1}{3} \left[m+1 - \frac{\eta}{G} \frac{1}{\tau} (m-2) \right] \end{aligned}$$

Introduciendo la ecuación física (103a) en la ecuación tensorial (127a), efectuando las manipulaciones apropiadas y omitiendo las derivadas parciales de orden mayor al segundo, la ecuación fundamental puede ser escrita en términos del tensor esfuerzo \bar{F} solamente:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{F} + \nu \Delta \dot{\bar{F}} - \frac{1}{m+1} \Delta \varsigma \bar{I} + \frac{m}{m+1} \nabla \cdot \nabla \varsigma - \frac{\nu\dot{\varsigma}}{m+1} \Delta \bar{I} + \\ + \frac{m\nu\dot{\varsigma}}{m+1} \nabla \cdot \nabla \dot{\varsigma} = \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2} \bar{I} \right) - \\ - (\rho + \nu\dot{\rho}) (\nabla \cdot \bar{F} + \dot{\bar{F}} \cdot \nabla) \end{aligned} \quad (131)$$

Esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones escalares:

$$\mathcal{D}_x \Delta G_x - \mathcal{D}_x \frac{1}{m+1} \Delta \varsigma + \mathcal{D}_x \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial t^2} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial \rho_x}{\partial x} \mathcal{D}_x \dot{\rho}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \Delta G_y - \mathcal{D}_p \frac{1}{m+1} \Delta S + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 G_y}{\partial t^2} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial g_y}{\partial y} \mathcal{D}_z \rho \\ \mathcal{D}_z \Delta G_z - \mathcal{D}_p \frac{1}{m+1} \Delta S + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 G_z}{\partial t^2} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial g_z}{\partial z} \mathcal{D}_z \rho \\ \mathcal{D}_z \Delta \tau_{xy} + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x} \right) \mathcal{D}_z \rho \\ \mathcal{D}_z \Delta \tau_{yz} + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} &= \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial g_y}{\partial z} + \frac{\partial g_z}{\partial y} \right) \mathcal{D}_z \rho \\ \mathcal{D}_z \Delta \tau_{zx} + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} &= \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \mathcal{D}_z \rho \end{aligned}$$

donde:

$$\mathcal{D}_p \equiv 1 + \nu \rho \frac{\partial}{\partial t} \quad (132)$$

Ecuación fundamental en el caso estático. Omitiendo las fuerzas de cuerpo y de inercia, es decir, $\bar{F} = \bar{0}$, la ecuación (131) se simplifica a:

$$\mathcal{D}_z \Delta \bar{F} - \mathcal{D}_p \frac{1}{m+1} \Delta S \bar{I} + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \nabla \nabla S = \bar{0} \quad (133)$$

Sumando las ecuaciones de las componentes G_x , G_y , G_z de la ecuación tensorial (133) se obtiene la relación:

$$\left(\mathcal{D}_z - \mathcal{D}_p \frac{3}{m+1} + \mathcal{D}_u \frac{m}{m+1} \right) \Delta S = 0$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria en t , de primer orden, — con:

$$\Delta S = C e^{-t/\beta} \quad (134)$$

como solución general, con C una constante de integración, y β una constante compuesta por las constantes paramétricas del material:

$$\beta = \frac{m(\nu + \mu) + \nu - 3\nu}{2(m+1)}$$

En problemas de elasticidad, se tiene la ecuación diferencial armónica:

$$\Delta S = 0$$

en lugar de la ecuación (134). Utilizando el argumento expuesto en la sección II.2.8, mismo que no se probó, el estado de esfuerzos en el instante $t=0$, momento en que la cavidad es excavada, debe ser un estado de esfuerzos gobernado por la ley de Hooke, esto es:

$$S \Big|_{t=0} = C e^{-t/\theta} \Big|_{t=0} = 0$$

lo que implica:

$$C=0$$

En el apartado II.4.2, se mostró que en situaciones de equilibrio estático, y referido al modelo estándar:

$$\Delta \Theta = 0 \quad (123)$$

y dado que:

$$G_0 = 3K\Theta$$

o,

$$S = 3K\Theta$$

se infiere que la ecuación:

$$\Delta S = 0 \quad (135)$$

debe ser satisfecha, también por el sólido estándar.

Haciendo uso a esta última expresión, la ecuación tensorial (133) puede escribirse como:

$$\mathcal{D}_z \Delta \bar{F} + \mathcal{D}_z \frac{m}{m+1} \nabla \cdot \nabla S = \bar{0} \quad (136)$$

o, en forma escalar:

$$\begin{aligned} \Delta G_x + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2\Delta \dot{G}_x + \frac{m\tau}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0 \\ \Delta G_y + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + 2\Delta \dot{G}_y + \frac{m\tau}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0 \\ \Delta G_z + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + 2\Delta \dot{G}_z + \frac{m\tau}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0 \\ \Delta \tau_{xy} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + 2\Delta \dot{\tau}_{xy} + \frac{m\tau}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \Delta \tau_{yz} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} + 2\Delta \dot{\tau}_{yz} + \frac{m\tau}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \Delta \tau_{zx} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} + 2\Delta \dot{\tau}_{zx} + \frac{m\tau}{m+1} \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (136a)$$

Esta ecuación puede ser llamada la ecuación de Beltrami generalizada, ya que sólo difiere en sus operadores diferenciales de la ecuación de Beltrami, referente a un medio elástico lineal:

$$\Delta \bar{F} + \frac{m}{m+1} \nabla \cdot \nabla S = \bar{0} \quad (137)$$

Ecuación diferencial bi-armónica del esfuerzo. Aplicando una vez -

más el operador Δ a la ecuación (136), y haciendo uso de la expresión (135) se puede derivar una ecuación diferencial de cuarto orden:

$$\mathcal{D}_z \Delta \Delta \bar{F} = 0 \quad (138)$$

equivalente a las ecuaciones escalares componentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \Delta \Delta G_x &= 0, & \mathcal{D}_z \Delta \Delta \tau_{xy} &= 0 \\ \mathcal{D}_z \Delta \Delta G_y &= 0, & \mathcal{D}_z \Delta \Delta \tau_{yx} &= 0 \\ \mathcal{D}_z \Delta \Delta G_z &= 0, & \mathcal{D}_z \Delta \Delta \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (138a)$$

II.4.5 Situaciones bidimensionales. En la mecánica de rocas aplicada al caso de túneles, los casos de deformaciones y esfuerzos planos, son poco frecuentes; sin embargo, estas situaciones son de interés dado que es más simple realizar pruebas en modelos planos, y las funciones que describen el campo reológico se determinan más fácilmente que en el caso tridimensional. Es por esto que comúnmente se ve uno forzado a asumir la hipótesis simplificatoria de bidimensionalidad, con objeto de poseer cierta información aproximada, concerniente a los fenómenos que tienen lugar alrededor de un túnel y sus causas.

Estado plano de esfuerzos. Este estado se presenta cuando existe una dirección \hat{z} , definida por un vector unitario, por ejemplo, \hat{k} , tal que en el plano normal a \hat{k} , el tensor esfuerzo vale cero:

$$\bar{P}_z = \bar{T} \hat{k} = \begin{bmatrix} \tau_{zz} \\ \tau_{zy} \\ G_x \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Las deformaciones y desplazamientos en la dirección z , de poco interés en este caso, se pueden calcular una vez que se tienen las componentes del esfuerzo y la deformación planos.

Para la solución del problema se emplean las siguientes relaciones:

Ecuaciones de equilibrio. En problemas estáticos, y despreciando las fuerzas de cuerpo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (139)$$

Ecuaciones geométricas:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (140)$$

De las ecuaciones de compatibilidad, que expresan la continuidad de las deformaciones, sólo se retiene una:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (141)$$

Ecuaciones físicas:

$$\begin{aligned} \pm \dot{\epsilon}_x + \lambda \dot{\epsilon}_x &= \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y + \nu \left(\dot{\sigma}_x - \frac{k}{m} \dot{\sigma}_y \right) \\ \pm \dot{\epsilon}_y + \lambda \dot{\epsilon}_y &= \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x + \nu \left(\dot{\sigma}_y - \frac{k}{m} \dot{\sigma}_x \right) \\ \pm \dot{\tau}_{xy} + \lambda \dot{\tau}_{xy} &= \frac{2(m+1)}{m} \tau_{xy} + \nu \frac{2(m+1)}{m} \dot{\tau}_{xy} \end{aligned} \quad (142)$$

Como el número de ecuaciones de que se dispone es igual al número de incógnitas, el problema tiene solución —una vez dadas las condiciones iniciales y de frontera— y puede resolverse por uno de los tres métodos descritos en las secciones anteriores.

La deformación unitaria ϵ_z puede derivarse a partir de la ecuación física para deformación isotrópica:

$$\sigma_0 \equiv \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y) = k (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \equiv 3k\epsilon_z$$

de donde:

$$\epsilon_z = \frac{1}{3k} (\sigma_x + \sigma_y) - (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (143)$$

En el caso de estado de esfuerzos plano, la expresión (135), se escribe como:

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (144)$$

que es conocida como la ecuación de Lévy para los esfuerzos.

En este caso, las componentes del esfuerzo son expresadas mediante lo que se conoce como la función esfuerzo de Airy F , en la forma:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (145)$$

donde:

$$F = F(x, y, t)$$

La validez de la ecuación (145) puede verificarse por sustitución en la ecuación (139).

Utilizando la función esfuerzo F , la ecuación (144) puede escribirse como:

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (146)$$

lo que reduce el problema a la determinación de la función bi-armónica F , que satisfaga las condiciones iniciales y de frontera.

Estado plano de deformación. Supóngase que el vector deformación —en la dirección z tiene el valor cero, es decir:

$$\bar{d}_z = \bar{D}\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z}\delta_{xz} \\ \frac{1}{z}\delta_{yz} \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \bar{0} \quad (147)$$

A esta situación se le conoce como caso plano de deformación. Despejando al esfuerzo normal G_z de la ecuación física que describe la deformación isotrópica:

$$G_z = 3K(\epsilon_x + \epsilon_y) - (G_x + G_y) \quad (148)$$

Haciendo $\epsilon_x = 0$, en la expresión (123), se obtiene la ecuación diferencial armónica:

$$\Delta(\epsilon_x + \epsilon_y) = 0 \quad (149)$$

Se puede asumir la existencia de una función de deformación:

$$A = A(x, y, t)$$

a partir de la que se derivan las componentes de la deformación como:

$$\epsilon_x = \frac{\partial A}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial A}{\partial y^2}, \quad \delta_{xy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \quad (150)$$

ya que al sustituir las ecuaciones (150) en la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \delta_{xy}}{\partial x \partial y}$$

se tiene una identidad. Por lo tanto, la determinación del campo de deformación se reduce a la determinación de una función de deformación que satisfaga las condiciones iniciales y de borde, y la ecuación diferencial bi-armónica:

$$\Delta \Delta A = 0 \quad (151)$$

implicada por la expresión (149).

La ecuación componente de G_z , de la ecuación física (véase la ecuación (76a)), puede escribirse como:

$$G_z + \tau \dot{G}_z = \frac{zG}{m-z} (\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{z\eta H'}{m-z} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \quad (152)$$

Aplicando el operador Δ a la ecuación (152), y utilizando la expresión (149), se tiene:

$$\Delta G_z + \tau \Delta \dot{G}_z = 0$$

la que, por integración con respecto al tiempo, y tomando en cuenta las condiciones iniciales consideradas, se escribe:

$$\Delta G_z = 0 \quad (153)$$

De aquí, la parte de la ecuación:

$$\Delta S \equiv \Delta (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = 0$$

válida para el caso de deformación plana, es la ecuación de Lévy:

$$\Delta (G_x + G_y) = 0 \quad (144)$$

II.5 Criterios de falla.

II.5.1 Un problema fundamental en mecánica de rocas, es el conocer las condiciones mecánicas que causan que la roca se deforme permanentemente, o se fracture. Si se conoce la condición mecánica, o de esfuerzos, de una roca, aparece de inmediato la necesidad de fijar un criterio de falla o fractura (ruptura), y/o magnitud de la deformación plástica y rango de ésta; el término "fractura", se utiliza, aquí, como sinónimo de fractura frágil o falla, lo que implica la pérdida total de cohesión a lo largo de la superficie de falla.

Los criterios de falla más útiles en mecánica de rocas, no se han obtenido a partir de sólo hipótesis matemáticas simples; es más, estos criterios son expresiones de hipótesis físicas. Claro está, que al diseñar una estructura en roca, y recordando que todas las leyes físicas se derivan de la experimentación, es deseable tener un criterio de falla basado en la experimentación. Tal teoría debe especificar como se ve afectada la resistencia de la roca por el estado de esfuerzos en el macizo, los efectos temporales, temperatura, y otros factores más. Desgraciadamente, no se ha desarrollado, hasta ahora, una teoría de falla plausible y completa para materiales policristalinos complejos, tales como las rocas. Como consecuencia de esto, a lo largo del tiempo se han ido desarrollando varias hipótesis empíricas sobre dichos criterios.

Para poder apreciar el peligro que se presenta cuando ocurre una falla en una roca, se deben distinguir los diferentes criterios de falla comúnmente usados. Algunos de los criterios de falla más conocidos, basados en un conocimiento empírico, y considerados como aceptables en la mecánica de suelos y en la mecánica de rocas, son:

1. Esfuerzo máximo de tensión (criterio del);
2. Criterio de Tresca, o del esfuerzo cortante máximo;
3. Criterio de falla de Coulomb;
4. Criterio de Mohr; y
5. Criterio de Griffith, de falla frágil por tensión.

Los criterios de Mohr y de Coulomb se han citado por separado, debido a que poseen bases físicas conceptuales diferentes.

El término criterio se utilizará de manera subjetiva, ya que se conoce muy poco acerca de los mecanismos de deformación, y falla de materiales policristalinos, como las rocas, es decir, es casi imposible elaborar una teoría que incluya a todos los tipos de roca en to-

dos los estados de esfuerzos, bajo diferentes tipos de confinamiento, a diferentes temperaturas, y para cualquier instante.

II.5.2 Algunos criterios. Criterio del esfuerzo de tensión máximo para rocas. En este criterio se considera que la roca falla por fractura frágil, debido a tensión, cuando el esfuerzo principal menor G_3 es igual a la resistencia a la tensión uniaxial de la roca $G_t \text{ ult}$:

$$G_3 = - G_t \text{ ult} \quad (154)$$

Criterio del esfuerzo cortante máximo. El criterio de falla de Tresca es válido para materiales isotrópicos y dúctiles, éste se establece como función de los esfuerzos principales G_1 y G_3 . De acuerdo con este criterio, se asume que el material falla cuando el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ es igual a la resistencia al corte, s , del material:

$$s = \tau_{\text{máx}} = \frac{G_1 - G_3}{2} \quad (155)$$

donde G_1 y G_3 son los esfuerzos principales mayor y menor, respectivamente; en este criterio no interviene el esfuerzo principal intermedio G_2 . Por lo que el factor decisivo en el criterio de Tresca, para que se presente la falla, es el esfuerzo cortante máximo en el material.

Criterio de falla de Coulomb. De acuerdo con la ley clásica de Coulomb, de tipo empírico, la resistencia al corte s , de un suelo cohesivo, o roca, varía con el esfuerzo G_n normal al plano de ruptura, es decir:

$$s = \tau = G_n \tan \phi + c \quad (156)$$

donde:

τ := esfuerzo cortante

ϕ := parámetro de resistencia al corte, o ángulo de fricción interna

c := parámetro de laboratorio, conocido con el nombre de cohesión

Geométricamente, la ecuación (156) representa una línea recta, $t-t$ en la figura II.30, conocida como la línea de resistencia al corte de Coulomb.

De la figura II.30, se tiene que el esfuerzo normal G_n en el plano $r-r$, de ruptura o corte, se calcula por medio de:

$$G_n = \frac{G_1 + G_3}{2} + \frac{G_1 - G_3}{2} \cos 2\alpha \quad (157)$$

en donde G_1 y G_3 son los esfuerzos principales mayor y menor, respectivamente, y α es el ángulo de ruptura.

El esfuerzo cortante τ en el plano de ruptura es:

$$\tau = \frac{G_1 - G_3}{2} \sin 2\alpha \quad (158)$$

Cuando $c=C$, y de acuerdo con la expresión (156), la resistencia al corte en la falla es:

$$S = \tau = G_n \tan \phi \quad (159)$$

que corresponde a una línea recta que pasa por el origen del sistema de referencias, con coordenadas esfuerzo normal y esfuerzo cortante - (figura II.31).

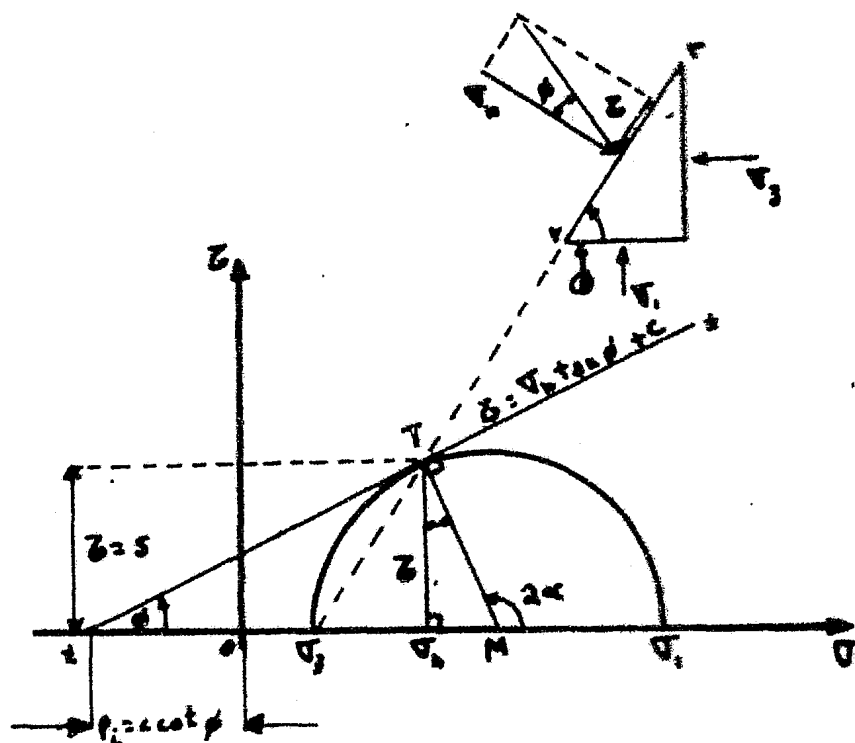


Figura II.30. Criterio de falla de Mohr (caso general).

r-r := plano de ruptura o falla.

t-t := línea de resistencia al corte de Coulomb.

G_1-G_2 := diámetro del círculo de esfuerzos de Mohr.

$\tau = S$:= resistencia al corte.

Si $\phi=0$, la ecuación (156) se transforma en:

$$S = \tau = c = \frac{G_1 - G_2}{2} = \sigma_c \quad (160)$$

(véase figura II.32), es decir, la resistencia al corte es constante e independiente del esfuerzo normal; de lo anterior se desprende que el criterio de Tresca es un caso especial del criterio de falla de Coulomb.

Más aún, cuando $G_1=0$ y $\phi=0$, entonces:

$$S = \tau = c = \frac{G_1}{2} \quad (161)$$

esto implica que la resistencia al corte de un material puramente cohesivo, es igual a la mitad de su resistencia a la compresión simple σ_c .

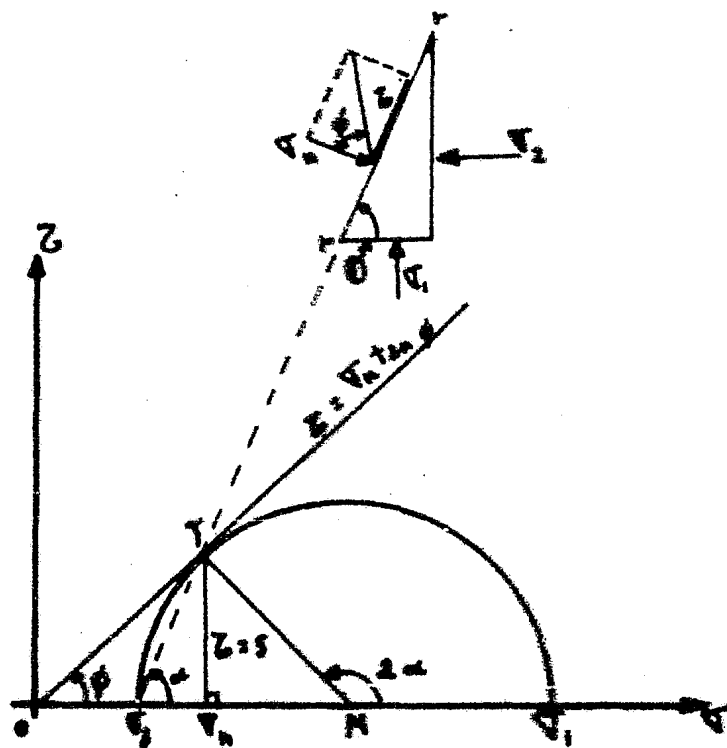


Figura II.31. Criterio de falla de Mohr-Coulomb, para $c=0$.

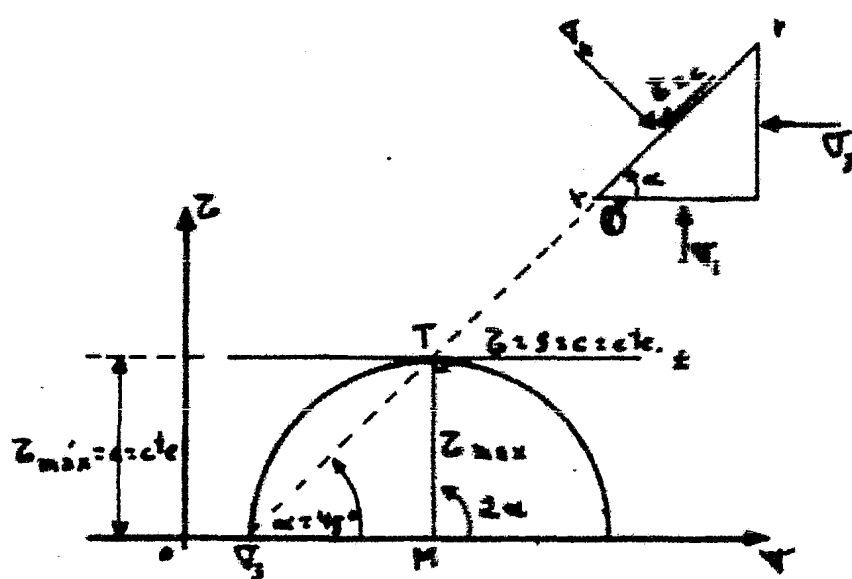


Figura II.32. Criterio de falla de Coulomb-Mohr-Tresca, para un material puramente cohesivo ($\phi=0$).

De lo visto, se concluye que el criterio de Coulomb, es equivalente a la envolvente lineal de Mohr, de los círculos de esfuerzos del mismo autor.

De la figura II.30, se tiene que el criterio de resistencia al corte de Coulomb, puede ser escrito en términos de los esfuerzos principales:

$$\tau \sin \phi = \frac{G_1 - G_3}{G_1 + G_3 + 2P_i} \quad (162)$$

donde:

$$P_i = c \cot \phi \quad (163)$$

es el esfuerzo inicial en el espécimen de prueba.

Cuando $c=0$, $P_i=0$, y:

$$\tau \sin \phi = \frac{G_1 - G_3}{G_1 + G_3} \quad (164)$$

Haciendo referencia a la figura II.30, se deduce que conforme la presión confinante G_3 aumenta, el esfuerzo G_1 normal al plano incipiente de corte (ruptura), también crece; por lo tanto, el esfuerzo cortante $\tau(\phi)$ necesario para producir la falla, también se incrementa. Por geometría, y de la figura II.30 o de la figura II.31:

$$\angle \alpha = 90^\circ + \phi \quad (165)$$

y,

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\phi}{2} \quad (166)$$

lo que significa que, teóricamente, la falla por corte se presenta - en planos de ruptura con un ángulo de inclinación $\alpha = 45^\circ + \phi/2$ con respecto al plano principal mayor (1).

Aún cuando en teoría, y en el caso de un material puramente cohesivo, el plano de ruptura intersecta a la línea de acción de la carga axial a $\alpha = 45^\circ$, en la realidad el ángulo de ruptura α varía de un tipo a otro de roca.

Cabe aclarar, también, que aunque el criterio rectilíneo de Coulomb es empleado de modo generalizado para predecir la falla en rocas, este criterio no representa de forma exacta a la envolvente curvilínea de los círculos de Mohr, para el esfuerzo a que están sometidas la mayoría de las rocas.

Criterio de falla de Mohr. La hipótesis básica del criterio de Mohr es el suponer la existencia de una envolvente de falla por corte (figura II.33), la que puede ser una línea recta (t-t), o curvilínea (e-e). Dicha envolvente es la condición que gobierna la ocurrencia de la superficie de ruptura, debido a que, el esfuerzo cortante ha agotado la resistencia al cizallamiento del material.

Si la envolvente de los círculos de esfuerzos, es una línea recta,

se tiene que los criterios de Mohr y Coulomb coinciden.

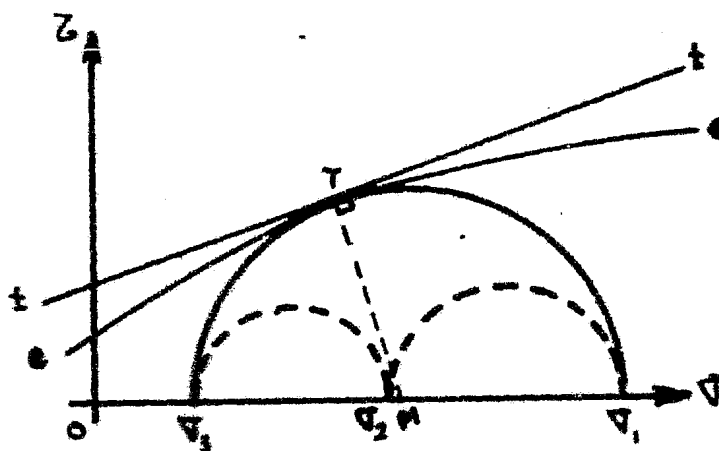


Figura II.33. Envolventes rectilínea (t-t), y curvilínea en el criterio de falla de Mohr.

El criterio de falla de Mohr establece que la fractura de un material, sujeto a compresión, aparece cuando el esfuerzo cortante τ , que actúa en el plano de ruptura incipiente, aumenta hasta un cierto valor, que depende de la magnitud del esfuerzo normal G_n en dicho plano, es decir, $\tau = \tau(G_n)$; esta relación ha sido obtenida experimentalmente.

De un diagrama de Mohr, como el de la figura II.33, se ve que la roca falla cuando el círculo de esfuerzos de diámetro $(G_1 - G_3)$, es tangente a la envolvente e-e de resistencia al corte. Asimismo, cabe hacer notar que en una representación tridimensional del criterio de falla de Mohr, el esfuerzo principal intermedio G_2 (si éste existe) no afecta a la falla; sólo los esfuerzos principales mayor y menor juegan un papel activo en este criterio. También hay que aclarar que en un diagrama de círculos de esfuerzos de Mohr, la envolvente de falla (e-e) no está representada por ninguna expresión matemática, sino que se obtiene experimentalmente; ésta se dibuja tangente a los círculos de esfuerzos obtenidos a partir de pruebas de laboratorio (figura II.34).

El criterio de falla de Mohr, específica a escala macroscópica no sólo el estado de esfuerzos en la falla, sino también la dirección del plano de ruptura. Sin embargo, tanto este criterio como el de Coulomb no toman en cuenta el mecanismo interno o microscópico de la falla de la roca.

Por otro lado, este criterio tampoco explica, completa y satisfactoriamente, todas las variaciones y desviaciones observadas en las resistencias a la compresión y al corte de las rocas; no obstante es to, en la actualidad este criterio goza de muy amplia aceptación en mecánica de rocas.

El criterio de falla de Mohr también puede ser usado con razonable validez, en estudios de resistencia al corte en fallas, juntas, fracturas, diaclasas, y otros tipos de discontinuidades (figura II.35).

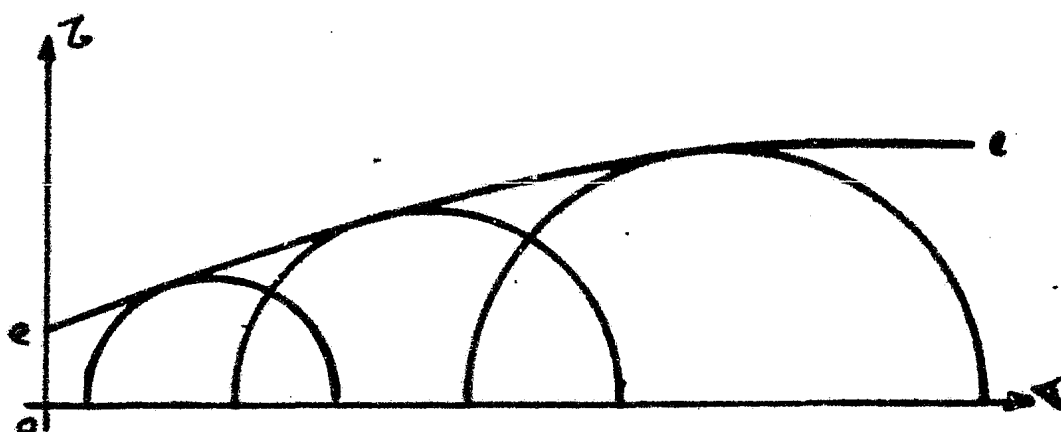


Figura II.34. Envolvente curvilínea de resistencia de Mohr.

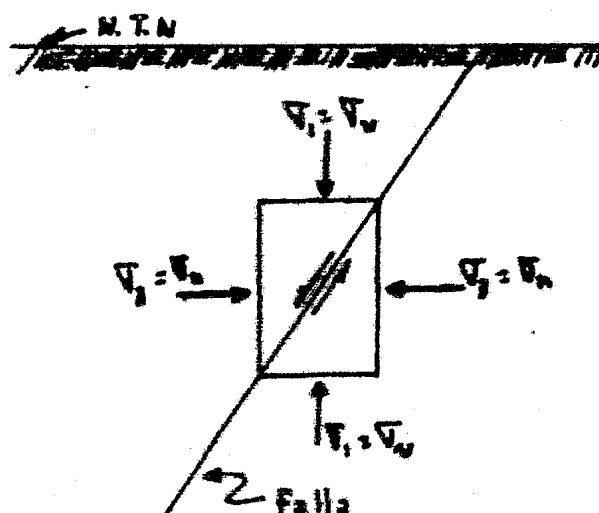


Figura II.35. Cortante en una falla.

Criterio de falla por tensión de Griffith. Es sabido que las sustancias cristalinas contienen microfracturas; en su criterio de falla, Griffith asume la existencia de microfisuras de forma elíptica uniforme, estrechas, delgadas, y planas, en el material; estas microfisuras producen concentraciones de esfuerzos en sus extremos. De acuerdo con este criterio, la fractura en el material es causada por estas concentraciones de esfuerzos, que hacen que la fisura se propague — contribuyendo a la falla macroscópica del material; por otra parte, el criterio postula que la fractura se inicia en un material frágil, por falla a la tensión, alrededor de los extremos de las microfisuras, y que éstas conservan su forma hasta el momento de la falla. — Las hipótesis de Griffith han sido corroboradas mediante trabajos experimentales en vidrio; en lo que respecta a mecánica de rocas, no se han realizado suficientes estudios que permitan determinar, cuando el criterio de Griffith podría predecir la falla a la compresión, conociendo la resistencia de la roca a la tensión.

Por otra parte, la teoría de Griffith no considera la probabilidad

de que las fisuras de la roca se cierran antes de la falla, si esto sucede, es de esperar que actúen fuerzas de fricción sobre las superficies cerradas; en tal caso, este criterio se transforma en un caso especial del criterio de Coulomb.

El mecanismo de falla real de las rocas es, todavía, sujeto de hipótesis; a pesar de su elegancia teórica, el criterio de Griffith es de poca aplicabilidad general a la mecánica de rocas, dado que, parece ser, los criterios de falla de las rocas requieren ser representados mediante enfoques empíricos, tales como los de Coulomb y Mohr.

Las juntas en los macizos rocosos no son equivalentes a aberturas elípticas delgadas, ya que in situ, las juntas y diaclasas comúnmente intersectan a otros sistemas de fracturas; asimismo, las longitudes de las fisuras en un macizo rocoso, no son pequeñas comparadas con el volumen de roca sujeto a esfuerzos, y los espaciamientos de las juntas son, con frecuencia, lo suficientemente reducidos como para afectar las concentraciones de esfuerzos alrededor de cualquier borde. La teoría que Griffith elaboró se basó en la teoría de la elasticidad, por ello el mecanismo de falla es independiente del tiempo, y por lo tanto, no toma en cuenta la variación de la resistencia con respecto a los cambios en el esfuerzo y la deformación.

En palabras de Farnner, "el criterio de Griffith aplicado a las rocas es, en el mejor de los casos, un método complicado para lograr una solución lógica".

Referencias.

- (1) Cs. Asazonyi; R. Richter. "The continuum theory of rock mechanics" Series on Rock and Soil Mechanics. Trans Tech Publications, 1979
- (2) Alfreds E. Jumikis. "Rock mechanics. Series on Rock and Soil --- Mechanics, 1979.

CAPITULO III. MECANICA DE MEDIOS DISCONTINUOS.

III.1 Introducción.

El modelo matemático de más amplia aceptación para el análisis de las distribuciones de esfuerzos, en sólidos, es el de la mecánica de medios continuos. En su forma más generalizada, la solución para la distribución de esfuerzos en un medio continuo satisface las condiciones de equilibrio y los requerimientos de compatibilidad de deformaciones, junto con las leyes constitutivas apropiadas.

En geomecánica, se tienen ejemplos obvios en los que el concepto de continuo físico ideal, no puede ser aplicado, tales como, medios granulares, y macizos rocosos formados por un sistema bloques-juntas. Se ha hecho cada vez más aparente, que el modelo elástico (del griego *klastos*, que significa fragmentario), que se definirá más adelante, ofrece un enfoque alternativo aún para materiales que satisfacen con suficiente aproximación, las condiciones de un sólido elástico ideal, como por ejemplo, materiales rocosos de consistencia muy dura y metales. Es opinión de varios autores, que sólo con modelos elásticos, o con desarrollos basados en las mismas ideas, se podrá atacar, de mejor modo, el problema de predecir el comportamiento esfuerzo-deformación de los sólidos.

Uno de los principales atractivos del modelo de unidades elásticas, es el poder incluir, en el análisis, medios anisótropos; asimismo tiene como ventaja adicional un limitado número de ejes de simetría claramente definidos. Para poder desarrollar un tratamiento teórico de un cuerpo tridimensionalmente isotrópico, es necesario postular una distribución aleatoria de unidades individuales, siendo éstas anisótropas tanto en propiedades físicas, como en forma.

De acuerdo con los argumentos elásticos, no es posible obtener un cuerpo homogéneo, sin embargo, es posible tener cuerpos estadísticamente isotrópicos; esta conclusión se deduce del hecho de que los átomos poseen una forma cuasi-esférica, y todos los materiales sólidos

están constituidos por arreglos de átomos contiguos.

Dado que para los fines de la física contemporánea (cuántica), la hipótesis de los átomos (o iones) se han considerado como esferas macizas, no es demasiado satisfecha, se supone que este es un modelo adecuado para los propósitos de investigación de las propiedades mecánicas de los sólidos.

Debe aclararse a estas alturas, que la mecánica elástica asume que las masas pueden ser descritas como ensambles de bloques unitarios, y también en muchas ocasiones la forma de estas unidades se ha inspirado en la de los átomos, es decir, esférica; el análisis no está restringido de ninguna manera a partículas de tamaño atómico; las interacciones interatómicas (mismas que definen el comportamiento cristalino), representan un caso especial de una teoría más general.

En esencia, el primer requerimiento de una masa elástica, es que comprenda un arreglo de unidades, cada una de ellas, con una forma física finita, por ejemplo: esférica, cúbica, elipsoidea; dependiendo de la forma del contorno, las unidades tenderán a formar paquetes en los que algún arreglo sistemático dominará, y en general la masa estará constituida por arreglos variables de zonas agrupadas sistemáticamente; a continuación en lo que resta de este capítulo, se utilizará el término "configuración estructural", para designar a cada una de dichas zonas. No es necesario que las unidades constituyan una configuración estructural dada, sean del mismo tamaño, ya que, por ejemplo, un cristal es considerado como un caso especial de configuración estructural, en donde las unidades son átomos sujetos a fuerzas de enlace, pero por conveniencia analítica se asumirán unidades de un solo tamaño.

Es por tanto posible considerar desde un punto de vista práctico, y tomando como referencia la forma de cada unidad, la significancia del análisis en función de tres grupos, caracterizado cada uno por la dimensión menor de la unidad:

1. microscópico (o nivel atómico)
2. mezoscópico (partículas con tamaños como el de la arcilla, arena, o grava)
3. macroscópico (unidades rocosas grandes, por decir algo de un metro de lado, de forma generalmente prismática).

En cada caso, la naturaleza de la masa sugerirá la forma más apropiada para la unidad y restringirá la naturaleza física de las fuerzas generadas entre éstas, de aquí en adelante el análisis elástico se aplicará por igual a todos los casos.

Es claro que las diferencias entre, por ejemplo, los problemas de distorsión de cristales y aquellos de tectónica regional son diferencias en grado, más que de principio.

Algunos ejemplos de configuraciones estructurales bidimensionales típicas y sus unidades asociadas se muestran en la figura III.1.

Aún cuando en ciertas ocasiones se haga referencia a configuraciones estructurales tridimensionales, por simplicidad se consideran, en general, condiciones bidimensionales. Cabe hacer notar, sin embargo, que algunos problemas es esencial elaborar arreglos tridimensionales para poder obtener resultados satisfactorios.

III.2. El modelo elástico. De la figura III.1. se concluye que las variables principales en la descripción geométrica de una confi-

guración estructural son:

θ , al que se le conoce como ángulo de distribución (o ángulos en ciertos arreglos).

y κ , el factor forma ($\kappa \geq 0$).

A estas alturas del análisis se puede asumir, sin gran pérdida de generalidad, $\kappa=1$ y por tanto será suficiente conocer el ángulo distribución (θ), para definir la geometría de la unidad.

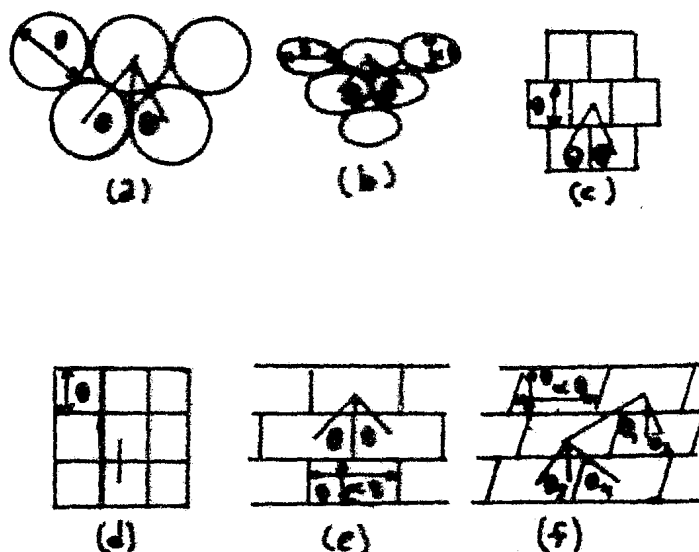


Figura III.1. Algunas configuraciones estructurales típicas.

De lo anterior se desprende que los casos más simples del modelo clásico son aquellos que se muestran en la figura III.2, donde el equilibrio de cada unidad se define por completo en términos de las seis fuerzas de contacto.

Las direcciones de cada una de estas fuerzas L, M, N, P, Q, R (figura III.2c) pueden entonces definirse en función del ángulo ϕ que especifica la inclinación de sus líneas de acción, con respecto a la dirección radial y en el punto de aplicación de la fuerza.

Si se denotan a estos ángulos por medio de:

$$\phi_i \Rightarrow i \in \mathbb{N}, i \leq 6$$

Por equilibrio rotacional, la suma de momentos con respecto al centro de la unidad debe ser cero, es decir:

$$L \sin \phi_1 + M \sin \phi_2 + N \sin \phi_3 + P \sin \phi_4 + Q \sin \phi_5 + R \sin \phi_6 = 0 \quad (1)$$

y por la definición de unidad, y como las unidades en la figura III.2 son elementos típicos de un cuerpo general, se desprende que los ángulos ϕ_i son los mismos para todas éstas. Esta última conclusión será referida como el principio de regularidad: "Si una unidad se encuentra en una condición geométrica, respecto a su entorno, similar a la de otra en el mismo arreglo, entonces ambas unidades transmitirán a sus contactos análogos fuerzas con la misma dirección".

Ahora bien, dado que, en general, las magnitudes de las fuerzas L

a R, variarán de una unidad a otra, se deduce que la única solución a la ecuación (1) es:

$$\phi_i = 0 ; \forall i \in \mathbb{N}, i \leq 6 \quad (2)$$

La implicación física de la ecuación (2) es que todas las líneas de acción de las fuerzas en los contactos, pasan por el centroide de cada unidad, es por ello que a esta conclusión se le conoce como el teorema de las reacciones centroidales.

Si por otra parte se considera el problema inverso, esto es, si se acepta que las fuerzas de contacto tienen el mismo valor de una unidad a otra, entonces los valores de los ángulos ϕ_i variarán.

En el caso bidimensional más sencillo se postula que, $L = P$, $M = R$ y $N = Q = 0$, es decir, la falla está asociada con la formación de grietas en los contactos M y Q.

Introduciendo la condición límite para discos circulares $\phi_1 \leq \phi_2$, — donde ϕ_2 es el ángulo de fricción en el contacto, y asumiendo que $\phi_1 > \phi_2$, la expresión (1) se reduce a:

$$L \sin \phi_2 = N \sin \phi_1 \quad (3)$$

la que junto con las otras dos ecuaciones de equilibrio permite obtener una solución en términos de L, N, ϕ_2 . Se pueden emplear argumentos similares para el modelo de la figura III.2b con la restricción de que $L: (\sin \phi_1) \leq \phi_2$.

Otra clase importante de problemas en el campo de la mecánica de rocas, es aquella en la que la única influencia es el peso propio; — esta situación se ilustra en la figura III.3.

Sea W el peso de una unidad disco, y supóngase que sólo se presentan fuerzas de compresión, por lo tanto, W se distribuirá sobre tres contactos p, q, r (figura III.3a) y, de acuerdo con el teorema de la reacción centroidal, las líneas de acción de las fuerzas de contacto pasan por el centro del disco; en el caso general, cada disco puede ser solicitado como se muestra en la figura III.3b, en donde l, m, n son enteros y representan el número de unidades que contribuyen a cargar a un disco típico.

Cuando sobre el paquete de unidades actúa sólo la gravedad y no — existen influencias en las fronteras del mismo, se puede demostrar — que la orientación media de la configuración estructural con respecto a variaciones de p, q, r, es $\beta = 0$; este sistema representa de la — mejor manera una composición aleatoria de las discontinuidades.

En otras situaciones, tales como en masa de roca natural con planos de separación definidos, la disposición de las discontinuidades existentes sugerirá tanto la orientación de la configuración estructural como la forma de las unidades.

En el caso en que un par de fuerzas de contacto desaparezca cuando sólo se ha considerado peso propio, permite obtener un resultado interesante; supóngase ahora que p y q no actúan normalmente en los — puntos de contacto sino con ángulos ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente, y sea $r = 0$, entonces para cualquier unidad:

$$(l+1) + p \sin \phi_1 + (m+1)q \sin \phi_2 = 0 \quad (4)$$

como para $r=0$, $p=q>0$ y la expresión (4) debe ser satisfecha para todo valor de l y m (incluyendo $l=m=C$), la única solución es:

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

De forma similar, para $q=0$:

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

Esto es un resultado opuesto al de la ecuación (3) donde L y N son especificadas arbitrariamente. Más adelante se verá que los casos — particulares $r=0$ y $q=0$ definen soluciones límites para masas elásticas ideales sujetas a peso propio.

Considerando de nuevo al modelo simple, cada unidad estará, en general, en contacto con seis unidades vecinas. Si sólo actúan fuerzas por peso propio, es conveniente representar la condición de equilibrio como se muestra en la figura III.4a

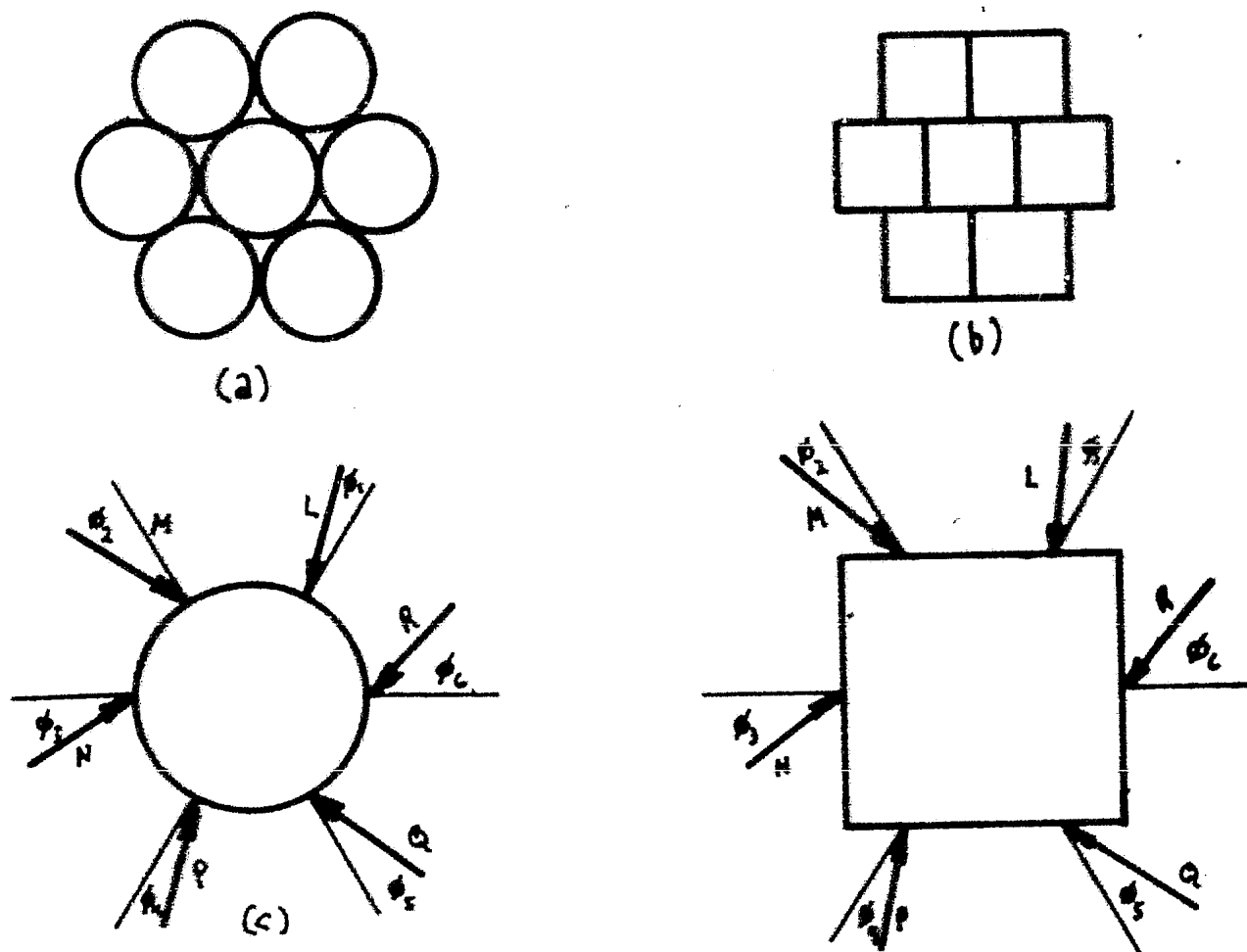


Figura III.2 Configuraciones estructurales con unidades de forma de disco y cuadrada con sus fuerzas de contacto.

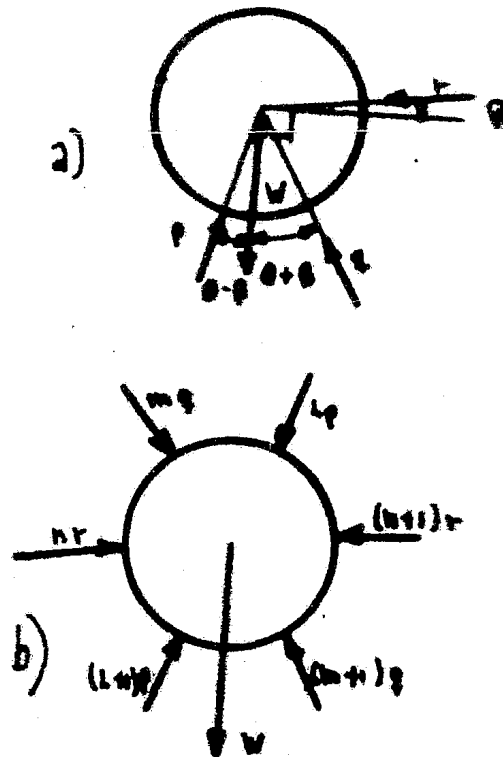


Figura III.3. Desarrollo de fuerzas de contacto en un análisis por peso propio.

Para partículas de ancho d , ángulo de distribución θ y peso W , el peso específico por unidad de longitud (γ) es:

$$\gamma = \frac{2W \tan \theta}{d^2} \quad (5)$$

(la distancia entre capas sucesivas es $(d/2) \cot \theta$).

La expresión (5) puede verificarse aplicándola a una unidad cuadrada donde $\tan \theta = 1/2$, por lo que:

$$\gamma = \frac{W}{d^2}$$

Si p , q , r son las fuerzas que actúan sobre una unidad, debidas al peso W de la partícula y se hace $q = kp$, de la condición de equilibrio estático se tiene que:

$$p = \frac{W}{(1+k) \cos \theta} \quad (6)$$

$$q = \frac{kW}{(1+k) \cos \theta}$$

$$\gamma = \left[\frac{(1-k)}{(1+k)} \right] W \tan \theta$$

De las figuras III.4b y c se pueden derivar los esfuerzos promedio - como:

$$\begin{aligned}
 G_z &= \frac{(P+q) \cos \theta}{d} \\
 \tau_{xz} &= \frac{(P-q) \sin \theta}{d} \\
 G_x &= \frac{[(P+q) \sin \theta + Zr]}{d} \tan \theta \\
 \tau_{zx} &= \frac{(P-q) \cos \theta}{d} \tan \theta = \frac{P-q}{d} \sin \theta = \tau_{xz}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

De modo más general, si cualquier unidad es solicitada por fuerzas de contacto lp , mq , y nr , combinando las expresiones (5) y (7) y asumiendo que q , l , m , n son números enteros muy grandes (es decir, $|+| \approx \pm 1$) se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 G_x &= \frac{1+km+Z(1-k)n}{1+k} \tan^2 \theta \\
 G_z &= \frac{1+km}{1+k} \\
 \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{1-km}{1+k} \tan \theta
 \end{aligned} \right\} \frac{\delta_d}{Z \tan \theta}
 \tag{8}$$

De aquí que las expresiones para los esfuerzos, por peso propio, en un elemento de densidad del peso específico del material, δ , de la geometría de las unidades que lo constituyen, d , θ , y del parámetro k . Para un modelo elástico dado se tiene que el problema de equilibrio estático de una unidad será indeterminado o determinado dependiendo de que se conozca o no el término k .

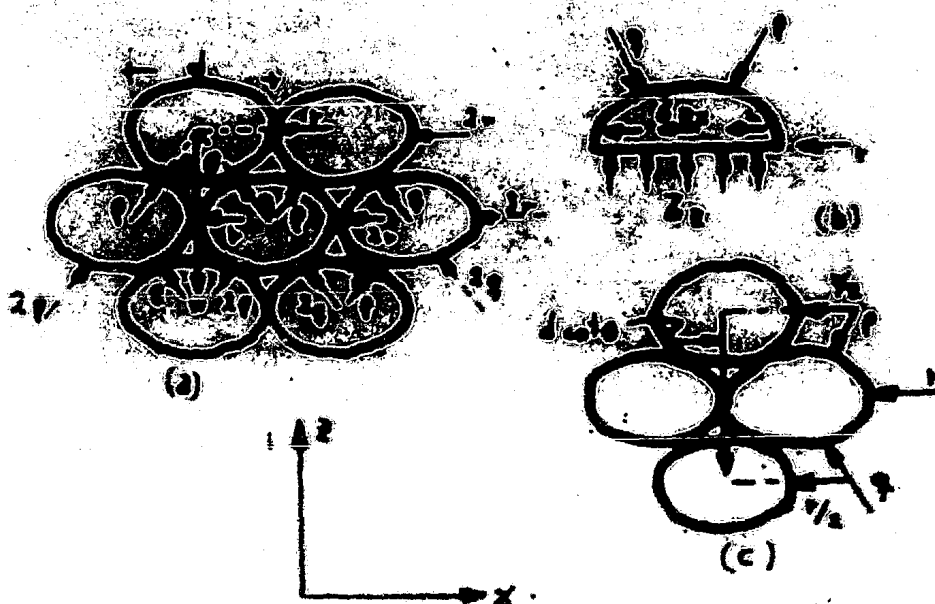


Figura III.4. Obtención de los esfuerzos medios generados por las fuerzas de contacto en el modelo elástico.

Un posible tratamiento matemático sería considerar una función —

($k=f(x,z)$) que satisfaga todas las condiciones de frontera conocidas; pueden obtenerse soluciones de valor, sin embargo, asumiendo $k=cte.$, cuidando que los valores de k adoptados sean físicamente razonables y sujetando a condiciones de borde controladas a las zonas en las que se han de aplicar dichas soluciones.

Por conveniencia, los problemas de interés en mecánica de rocas pueden ser clasificados como sigue:

1. Transmisión de esfuerzos:
 - a. Estática:
 - i. Por peso propio.
 - ii. Por carga externa.
 - b. Dinámica:
 - i. Sismo.
 - ii. Vibración.
2. Criterios de falla:
 - a. Para rocas
 - b. Para macizos rocosos
3. Problemas de flujo.

Inicialmente es posible establecer, las condiciones de transmisión de esfuerzos y de falla simultáneamente para un modelo elástico dado; sin embargo, tal procedimiento implica complejos argumentos estadísticos y la teoría asociada con esto aún no ha sido desarrollada; por lo tanto, para poder obtener soluciones manejables es necesario efectuar hipótesis simplificadoras. En general, las hipótesis geométricas empleadas para enfrentar los problemas de transmisión de esfuerzos no se oponen a la orientación crítica de la configuración estructural en lo que a condiciones de falla se refiere, por lo que es preferible, por el momento considerar los dos problemas por separado.

Problemas de transmisión de esfuerzos. Antes de analizar las masas rocosas, es deseable establecer una clasificación general, en relación a la geometría predominante en las masas rocosas; se proponen los siguientes tres tipos:

- a. Monolito homogéneo.
- b. Sistema aleatorio.
- c. Sistema de bloques juntados.

Es claro, que tanto los modelos esféricos como cúbicos, pueden ser considerados al representar un macizo rocoso, conforme estos sean dispuestos aleatoriamente o en bloques juntados. Jenkin fué el primero en usar un modelo disco para investigar las presiones ejercidas por el terreno sobre un muro de retención vertical; una de las observaciones más importantes hechas por este autor fué, que en los modelos disco por él empleados, se desarrollaban "contactos débiles" en un par de puntos diametralmente opuestos. Se puede pensar que la presencia de estos contactos débiles en materiales discretos, se debe al hecho de que en estos pueden desarrollar fuerzas de tensión entre unidades adyacentes. Jenkin estableció que ello está relacionado con un fenómeno de arqueado y lo expresó analíticamente en términos del parámetro k (factor de arqueado).

Haciendo referencia a las expresiones (6), se notó que si $k=1$ entonces todas las fuerzas r desaparecen, mientras que si $k=0$ son las fuerzas q las que se anulan por lo que, si se acepta el criterio de no tensiones:

$0 \leq k \leq 1$

(9)

lo que define el rango de posibles soluciones del modelo elegido. La condición $k=1$ ha sido llamada condición de no arqueado y cuando $k=0$ se le nombra condición de arqueado total.

El valor de k para un problema dado, y correspondiente a un cierto punto será función del patrón de deformación asumido por la masa. Sin embargo, en general, si es aplicada una deformación sistemática a una frontera, entonces k será constante en la zona de influencia de la deformación impuesta.

Por ejemplo, en el caso de una cuña granular simétrica, en que su superficie de soporte sea deformada de manera que adquiera una forma cóncava, se produce la condición de arqueado total, mientras que una superficie plana (o ligeramente convexa), estará asociada con la condición de no arqueado (figura III.5a).

En la figura III.5b se muestra el proceso físico con el que se relaciona el arqueado tal y como se ha considerado aquí.

Es de suma importancia identificar el punto de máxima deformación, al que se le conoce con el nombre de foco; una vez localizado este foco es posible dividir al cuerpo en zonas y restringir a q (expresión (6)), como la fuerza que actúa en la dirección general del foco del arqueado. En el caso ilustrado en la figura III.5a, se puede ver que la disposición de las fuerzas p , q , r de un lado de la línea central corresponde a la imagen de la que se tiene del otro lado.

Una de las características más importantes del fenómeno de arqueado, es que el cambio desde una condición de no arqueado, hasta una de arqueado casi total, ocurre con deformaciones muy pequeñas. Existe evidencia que confirma el hecho, de que el arqueado se desarrolla bajo, lo que generalmente se considera, como deformaciones "normales"; conforme el material sea más denso, menor será la deformación general requerida, para producir un grado determinado de arqueado.

Aún cuando es relativamente simple, introducir consideraciones de deformación en el modelo elástico ideal, se puede lograr un gran avance en el estudio de la estabilidad de estructuras rocosas, asumiendo que puedan presentarse todos los grados de arqueado siempre y cuando sean consistentes, con la resistencia del material, este es el criterio que se adoptará en este capítulo.

Uno de los modelos más interesantes desde el punto de vista de la mecánica de rocas, es el que se logra, ensamblando cubos (o cuadrados) que representan a la masa diaclasada, y el caso más simple de este modelo, analíticamente ablando, es la cuña simétrica (figura III.6).

III.3 La cuña clástica. Las fuerzas que actúan sobre el cuadro A se derivan de aquellas transmitidas entre unidades adyacentes a lo largo de las líneas AL, AM, y AN; tales líneas son conocidas con el nombre de líneas de distribución y sus direcciones relativas a la dirección del paquete, están regidas por el parámetro geométrico Θ . Para la condición mostrada en la figura III.6 ($\beta=0$ y carga externa nula) las ecuaciones (8), son susceptibles de aplicarse y por lo tanto, la solución depende de los valores de l , m , n .

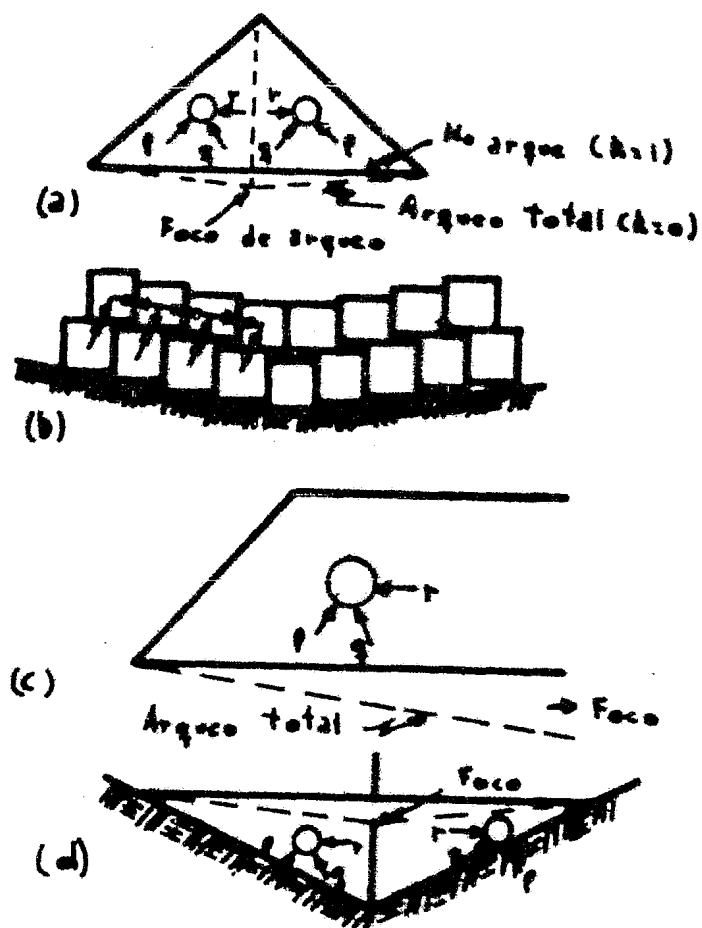


Figura III.5. El mecanismo de arqueo.

La solución general para esta cuña puede establecerse en términos de las variables (figura III.7a):

i := ángulo de la pendiente

θ := ángulo de distribución

k := factor de arqueo (se ha supuesto constante para toda la cuña)

δ := densidad

d := parámetro de longitud que define el tamaño de la partícula

x, y := coordenadas cartesianas

Considerando un punto cualquiera A (figura III.7b). Las líneas de distribución que concurren a este punto tienen longitudes \overline{ab} , \overline{ac} , \overline{ad} . Tomando un elemento típico (figura III.7c), estas longitudes se pueden convertir al número de partículas contenidas en cada línea.

Las dimensiones de las unidades asociadas con este elemento son:

d (en la dirección ad) y $d/\sin\theta$ (en las direcciones ab , ac)

Por lo tanto:

Número de unidades a lo largo de ab

$$= \frac{\overline{ab} \delta \sin\theta}{d}$$

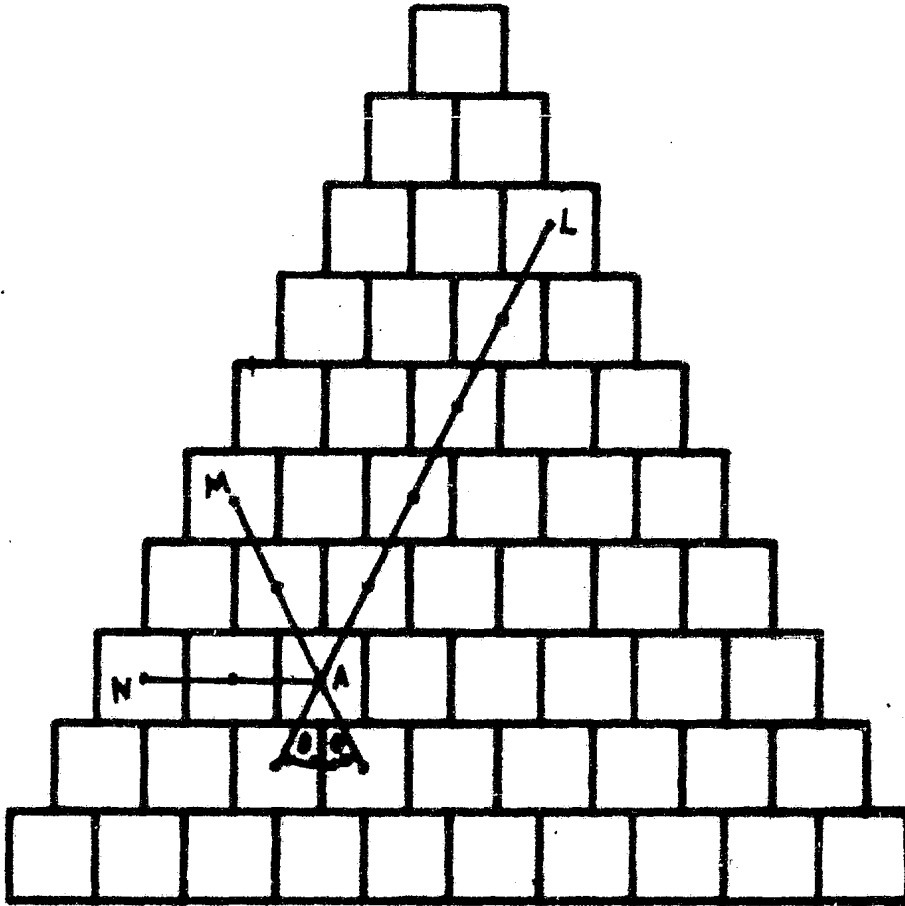


Figura III.6 La cña de bloques unidos.

Número de unidades a lo largo de $ac = m$

$$= \bar{ac} \frac{L \sin \theta}{d} \quad (10)$$

Número de unidades a lo largo de $ad = n = \frac{\bar{ad}}{d}$

y el estado de esfuerzos en A está dado por:

$$\begin{aligned} G_x &= \left[(\bar{ac}p + \bar{be}q + \bar{ad}r) \frac{L \sin \theta}{d} \right] \frac{\cos \theta}{d} \\ G_x &= \left[(\bar{ac}p + \bar{be}q + \bar{ad}r) \frac{L \sin \theta}{d} \sin \theta + \frac{L \bar{ad} r}{d} \right] \frac{\tan \theta}{d} \quad (11) \\ \tau_{xz} &= \left[(\bar{ac}p + \bar{be}q - \bar{ad}r) \frac{L \sin \theta}{d} \right] \frac{\sin \theta}{d} \end{aligned}$$

(nótese que las fuerzas en las unidades que actúan en cada partícula se convierten en imágenes de espejo en la línea central.

Por lo que se tiene:

fuerzas p actuando a lo largo de \bar{ac} ,
fuerzas q actuando a lo largo de \bar{ac} y \bar{be} ,
fuerzas r actuando a lo largo de \bar{ad}).

Esfuerzos en la región central ($0 < x < z \tan \theta$)

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{x}{\tan \theta} \\ \bar{b} &= \frac{\cos i}{\cos(\theta-i)} (z - x \cot \theta) \\ \bar{c} &= \frac{\cos i}{\cos(\theta-i)} (z - x \tan i) \\ \bar{d} &= \cot i (z - x \tan i)\end{aligned}\tag{12}$$

y de (11) y (12) se obtiene, utilizando (5) y (6):

$$\begin{aligned}G_x &= \frac{\delta x}{1+k} \tan \theta \cot i \left[1 - k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \\ G_z &= \frac{\delta z}{1+k} \left[\frac{(1-k)x}{z \tan \theta} + \frac{zk \cos \theta \cos i}{\cos(\theta-i)} \right] \\ \bar{G}_x &= \frac{\delta x}{1+k} \left[1 - k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right]\end{aligned}\tag{13}$$

Esfuerzos en la región exterior ($z \tan \theta < x < z \cot i$)

En la región exterior, el punto e coincide con el b y las relaciones geométricas son:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{\cos i}{\cos(\theta+i)} (z - x \tan i) \\ \bar{c} &= \frac{\cos i}{\cos(\theta-i)} (z - x \tan i) \\ \bar{d} &= \cot i (z - x \tan i)\end{aligned}\tag{14}$$

y de (11) y (14) se tiene:

$$\begin{aligned}G_x &= \frac{\delta}{1+k} (z \cot i - x) \left[1 - k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \frac{\sin \theta \cos i}{\cos(\theta+i)} \\ &\quad \frac{\delta}{1+k} (z \cot i - x) \left[1 + k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \frac{\cos \theta \sin i}{\cos(\theta+i)} \\ &\quad \frac{\delta}{1+k} (z \cot i - x) \left[1 - k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \frac{\sin \theta \cos i}{\cos(\theta+i)}\end{aligned}\tag{15}$$

(nótese que si $i < (90^\circ - \theta)$ entonces todos los esfuerzos en los vértices inferiores de la cuña, $x = z \cot i$, se anulan).

Por lo tanto, la distribución de esfuerzos debida a la acción de la gravedad viene dada en términos de las ecuaciones (13) y (15) como una función continua, de x , z . Se deduce que estas ecuaciones deben satisfacer las ecuaciones estándar de equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{G}_{xz}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

También puede obtenerse otra comprobación a partir de la condición de que los dos campos de esfuerzos deben estar en equilibrio a lo lar

go de la línea $x = z \tan \theta$.

En la figura III.8 se muestra la solución para una cuña típica y cabe aclararse que la solución general puede considerarse como constituida por dos zonas de esfuerzos (regiones central y exterior), cada una de las cuales posee un sistema de esfuerzos lineal, presentándose una discontinuidad de la primera derivada de las ecuaciones de esfuerzos en el borde $x = z \tan \theta$.

Para una cuña de cualquier forma puede adoptarse un procedimiento similar al expuesto anteriormente dividiendo las soluciones resultantes en zonas separadas cada una de éstas con una función esfuerzo — particular.

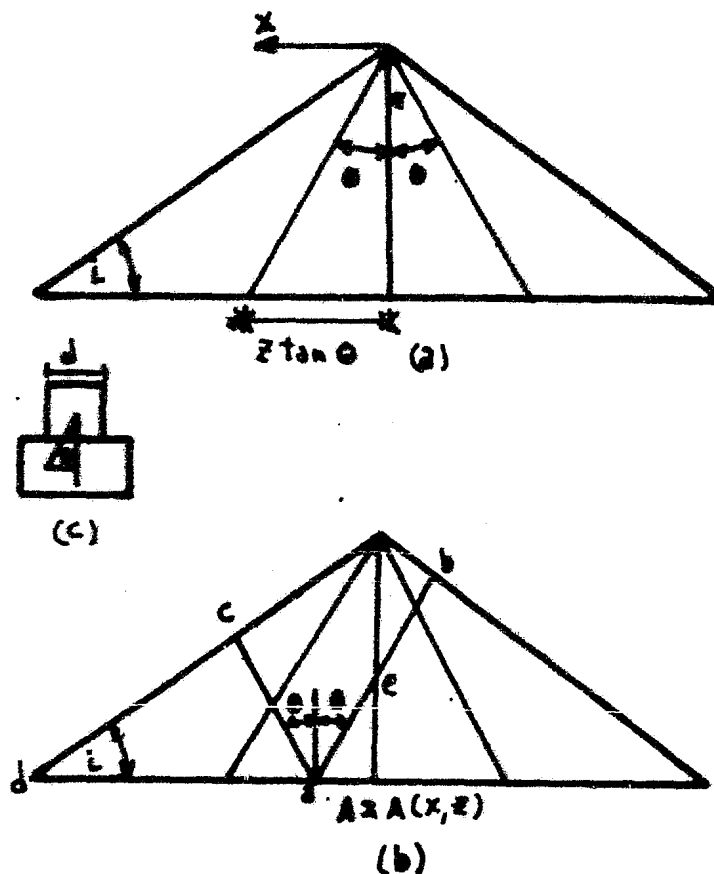


Figura III.7. Geometría de la cuña simétrica.

III.4 La pendiente simple. Este ejemplo se muestra en la figura III.9 donde se ha supuesto un valor uniforme de k ; esto implica que el foco del arqueado (figura III.5c) se localiza a la derecha de la figura y que las fuerzas q actúan en la misma dirección en todo el medio.

La solución resultante es:

Zona 1: $(-z \cot \theta \leq x \leq -z \tan \theta)$

Dado que esta zona es igual a lo que se llamó región exterior en el caso de la cuña elástica, las longitudes de los segmentos de éste y aquel caso serán las mismas y por lo tanto, las expresiones para los esfuerzos tendrán la forma:

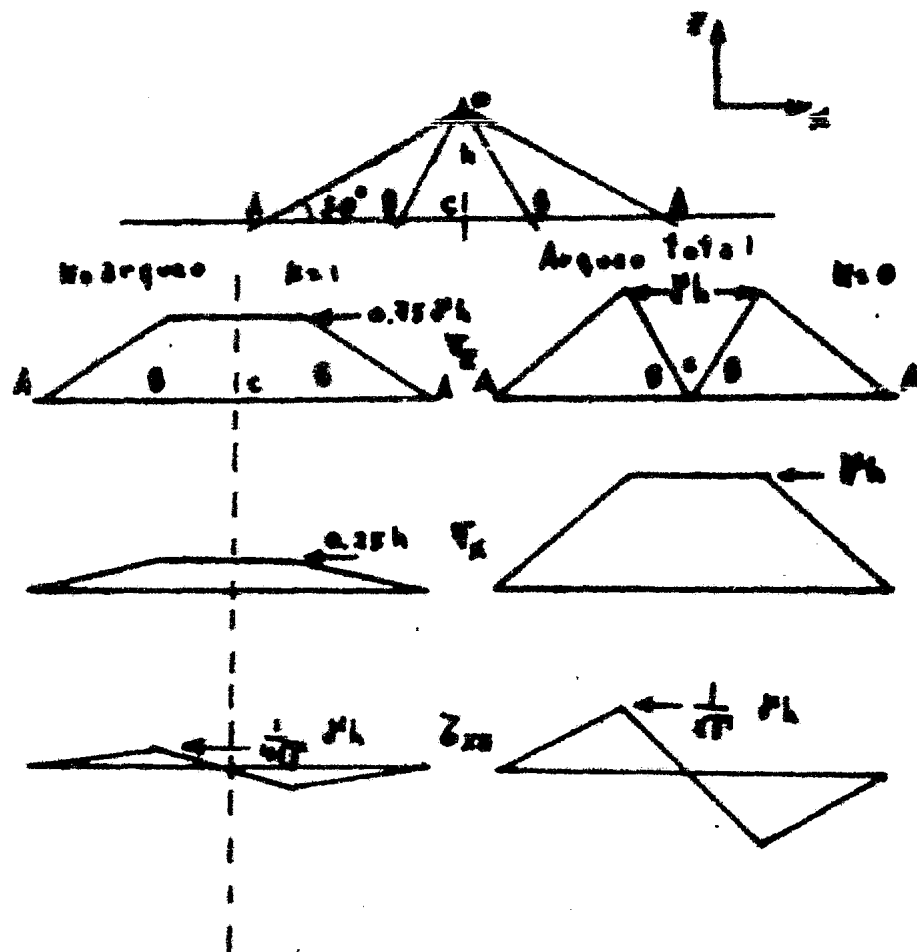


Figura III.8. Distribución de esfuerzos en una cuña a 30° ($\theta=30^\circ$)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\delta}{1+k} (z \cos i + x) \left[1 - k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \frac{\sin \theta \cos i}{\cos(\theta+i)} \\ \sigma_y &= \frac{\delta}{1+k} (z \cos i + x) \left[1 + k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \frac{\cos \theta \sin i}{\cos(\theta+i)} \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta}{1+k} (z \cos i + x) \left[1 - k \frac{\cos(\theta+i)}{\cos(\theta-i)} \right] \frac{\sin \theta \sin i}{\cos(\theta+i)} \end{aligned} \quad (17)$$

Se puede apreciar que la única diferencia entre las expresiones (15) u (17) es el signo que precede a la x en el primer paréntesis, esto se debe a que en cada problema se considerará una orientación del eje x distinta.

Zona 2: $(-Z \tan \theta \leq x \leq Z \tan \theta)$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{z}{\cos \theta} \\ \bar{x} &= \frac{\sin i}{\cos(\theta-i)} (z \cos i + x) \\ \bar{y} &= x \sin i + z \end{aligned} \quad (18)$$

De (5), (6), (11), y (18) se tiene:

$$\begin{aligned}
 G_x &= \frac{\delta \tan \theta}{1+k} \left[z(\tan \theta + \cot i) + x - \frac{k \cos \theta \operatorname{sen} i (z \cot i + x)}{\cos(\theta - i)} \right] \\
 G_z &= \frac{\delta}{1+k} \left[z + \frac{k \cos \theta \operatorname{sen} i (z \cot i + x)}{\cos(\theta - i)} \right] \\
 \tau_{xz} &= \frac{\delta}{1+k} \left[z \tan \theta - \frac{k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} i (z \cot i + x)}{\cos(\theta - i)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Zona 3: ($x \geq z \tan \theta$)

$$\begin{aligned}
 \bar{a}b &= \bar{a}c = \frac{x}{\cos \theta} \\
 \bar{d} &= z \cot i + x
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

De (5), (6), (11), y (20):

$$\begin{aligned}
 G_x &= \delta \tan \theta \left[z \tan \theta + \frac{1-k}{1+k} (z \cot i + x) \right] \\
 G_z &= \delta z \\
 \tau_{xz} &= \frac{1-k}{1+k} \delta z \tan \theta
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

De la expresión (21) se tiene que, si $k < 1$, conforme $x \rightarrow \infty$, $G_x \rightarrow \infty$. Por lo tanto si el arqueo se desarrolla, el esfuerzo horizontal G_x aumenta indefinidamente; en la opinión de varios autores, este crecimiento del esfuerzo lateral es el responsable de la formación de sistemas de fallas de empuje y debe enfatizarse que estas altas presiones laterales, pueden generalizarse como resultado de movimientos verticales diferenciales relativamente pequeños.

Otro factor importante en la determinación del ritmo de variación con que la presión lateral se incrementa en función de la distancia a la cara de la pendiente es el factor de forma, el cual determina el valor de θ .

La tabla III.1 muestra las variaciones de G_x en el punto C de la figura III.9 para distintos valores de θ e $i=20^\circ$.

Tabla III.1. Influencia de θ sobre G_x para el caso de una pendiente simple.

k	$\theta = 20^\circ$	$\theta = 26^\circ 33'$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$
	0.725	1 (cuadrado)	1 (círculo)	2
0	1.27	1.87	2.25	4.75
0.25	0.81	1.22	1.49	3.25
0.5	0.51	0.79	0.94	2.25
1.0	0.13	0.25	0.33	1.0

Los esfuerzos tabulados son múltiplos de δz ($i=20^\circ$)

Es, por tanto, de suma importancia determinar la relación α para el caso real de un macizo rocoso fisurado; para un arreglo aleatorio, es generalmente adecuado considerar $\theta = 30^\circ$ (teniéndose discos circulares).

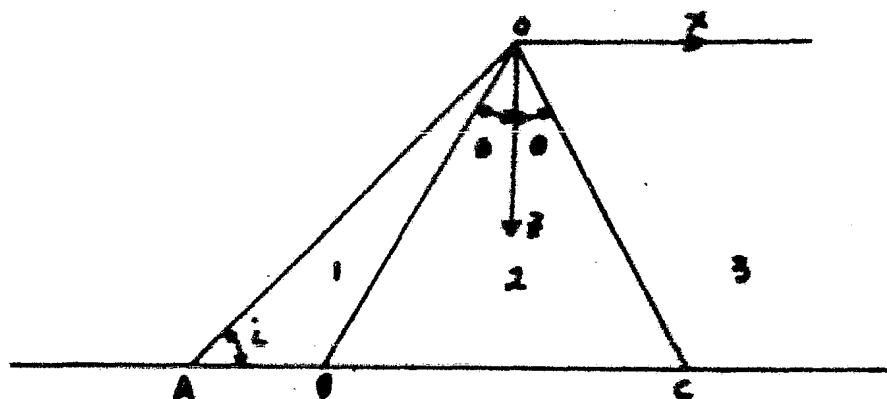


Figura III.9. La pendiente simple.

III.5. La cuña "invertida". En este problema, ilustrado en la figura III.10, se supone un "valle" de bordes relativamente rígidos que contienen un material elástico; por simetría, sólo es necesario considerar media cuña invertida.

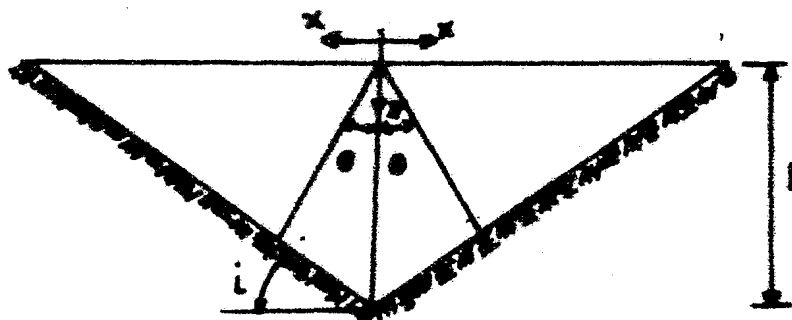


Figura III.10. La cuña invertida.

Un análisis similar a los realizados anteriormente conduce a la siguiente solución:

Región central ($0 < x < z \tan \theta$)

$$\begin{aligned} \bar{a}e &= \frac{x}{\sin \theta} \\ \bar{b}e &= \frac{z}{\cos \theta} - \frac{x}{\sin \theta} \\ \bar{a}c &= \frac{z}{\cos \theta} \\ \bar{a}d &= \frac{H-z}{\tan i} - x \end{aligned} \tag{22}$$

De (5), (6), (11) y (22)

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{\delta}{1+k} \tan \theta \left[z k z \tan \theta + (H-z)(1-k) \cot i \right] \\ G_z &= \frac{\delta}{1+k} \cos \theta \left[x(1-k) \csc \theta + z k z \sec \theta \right] \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{1-k}{1+k} \delta x \end{aligned} \tag{23}$$

Región exterior ($z \tan \theta < x < (H-z) \cot \theta$)

$$\bar{a}b = \bar{a}c = \frac{x}{\cos \theta} \quad (24)$$

$$\bar{a}d = (H-x) \cot \theta - x$$

De (5), (6), (11) y (24) se obtienen:

$$\sigma_x = \frac{\delta}{1+k} \tan \theta [z(1+k) \tan \theta + (1-k)[(H-x) \cot \theta - x]] \quad (25)$$

$$\sigma_y = \delta x$$

$$\tau_{xy} = \frac{1-k}{1+k} \delta x \tan \theta$$

Sean σ_1 y σ_2 los esfuerzos principales mayor y menor, respectivamente en un medio sujeto a un estado plano de esfuerzos y sea σ_m el esfuerzo principal medio definido mediante la expresión:

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

como la suma de σ_1 y σ_2 es un invariante, se tiene:

$$(26)$$

Ahora bien, si se considera $k < 1$, y de (23), (25), y (26) se obtienen los esfuerzos principales medios, tanto de la región central, σ_m^c , como de la región exterior, σ_m^e , expresados por medio de:

$$\sigma_m^c = \frac{1}{2} \frac{\delta}{1+k} [zkz(\tan^2 \theta + 1) + (H-x)(1-k) \tan \theta \cot \theta + (1-k)x \cot \theta] \quad (27)$$

$$\sigma_m^e = \frac{1}{2} \frac{\delta}{1+k} \tan \theta \left\{ z(1+k) \tan \theta + (1-k)[(H-x) \cot \theta - x] \right\} + \frac{1}{2} \delta x \quad (28)$$

Tomando la ecuación (27) y haciendo $x = cte.$ se observa que conforme x tiende a cero σ_m^c decrece, por otra parte:

$$\frac{\partial \sigma_m^c}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{1+k} (1-k) \cot \theta = cte.$$

lo cual implica, por el teorema del cálculo diferencial, que $\sigma_m^c(x)$ es una función monótona al considerar $x = cte.$ Por lo tanto, como para una z constante σ_m^c es monótona y decrece cuando x tiende a cero, σ_m^c tiene un máximo en $x = z \tan \theta$ para toda z entre cero y H .

Por otro lado;

$$\frac{\partial \sigma_m^e}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{1+k} (1-k) \tan \theta < 0$$

entonces, de nuevo por el teorema del cálculo diferencial, $\sigma_m^e(x)$

es monótona decreciente, lo que hace que para una z dada G_m^c tiene un máximo en $x=ztan\theta$.

Así mismo;

$$\frac{\partial G_m^c}{\partial z} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial k} [z^k (\tan^2 \theta + 1) - (1-k) \tan \theta \cot \theta] = \text{cte.}$$

por el teorema del cálculo diferencial, y para $x=\text{cte.}$, G_m^c es monótona. Si ahora $k=0$, entonces:

$$G_m^c = \frac{\delta}{z} [(H-z) \tan \theta \cot \theta + x \cot \theta]$$

Si $x=\text{cte.}$, y $z \rightarrow H$, se tiene que G_m^c decrece.

De estos dos últimos párrafos se puede concluir que G_m^c es una función monótona decreciente respecto a z .

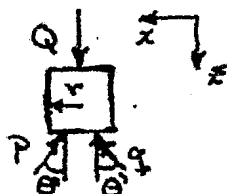
Resumiendo, es interesante hacer notar que, bajo condiciones de arqueo ($k < 1$) y para una profundidad dada, el esfuerzo principal medio máximo se localiza sobre la recta $x=ztan\theta$ y, bajo condiciones de arqueo total ($k=0$) y en la región central, el esfuerzo principal medio decrece con la profundidad ($G_m^c = f(z)$) es monótona decreciente).

III.6. Problemas de carga estática externa. Mientras que al considerar solo peso propio, es razonable asumir que, bajo ciertas condiciones, se desarrollará un estado uniforme de arqueo, no es inmediatamente obvio que bajo carga externa, se puedan aplicar condiciones similares. Algunos experimentos (Krasmanovic y Milic, 1964) muestran una distribución de la presión vertical con dos máximos bajo el área cargada siendo ésta una característica de las soluciones por arqueo.

La figura III.11 muestra una solución típica en la que se ha considerado un valor de $k=1/2$ en toda la masa; así mismo, el foco del arqueo se encuentra sobre el eje de la zona cargada, por lo tanto, las unidades cuyos centroides se localizan sobre dicho eje vertical, tendrán un sistema de reacciones compuesto sólo por fuerzas p . Analizando el bloque central del primer nivel del macizo representado en la figura III.11a se ve que, dado que la fuerza r que actúa sobre un bloque cualquiera es el resultado de la interacción de todos los bloques que se encuentran en sentido horizontal, entre la unidad considerada y el "eje" del arqueo, la fuerza r sobre éste es nula. Siguiendo un razonamiento similar para la fuerza q se llega a que ésta debe valer cero; por lo tanto, sobre este bloque actuarán sólo la carga externa y las fuerzas p una a cada lado del eje de simetría. Por equilibrio estático, $p=Q/2$.

Estudiando el equilibrio del bloque B se tiene que:

donde:

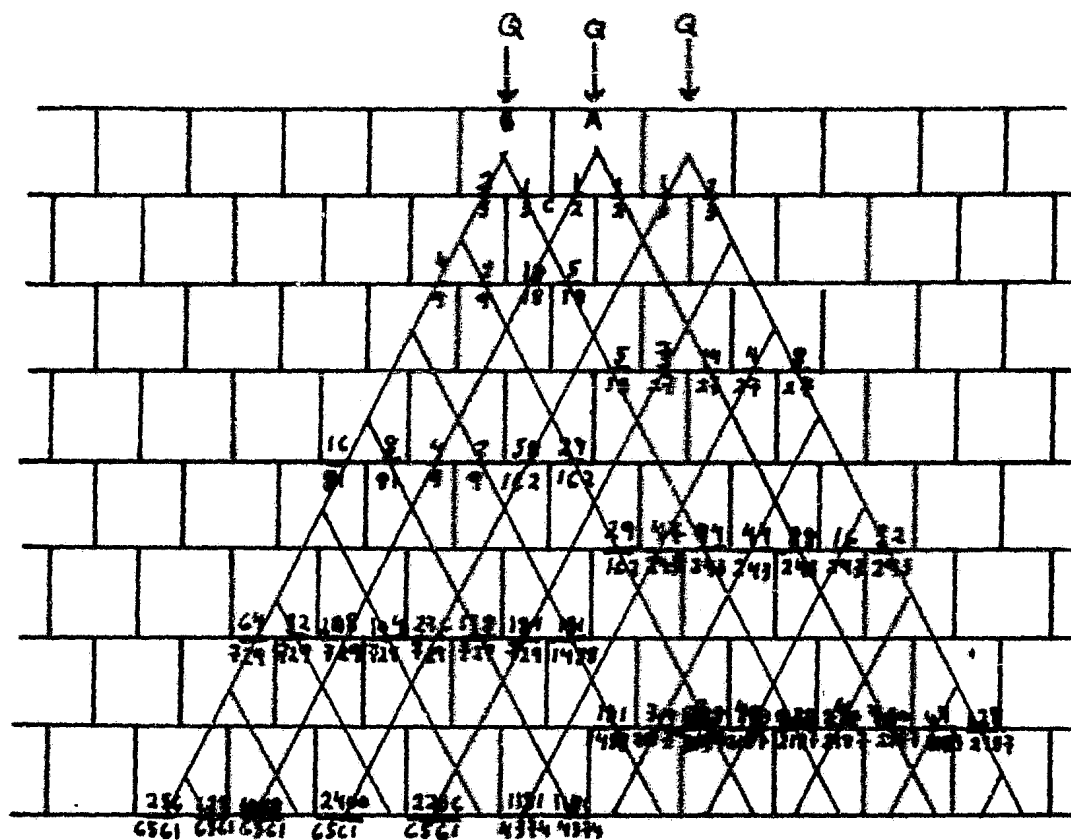


$$P = \frac{Q}{(1+k) \cos \theta}$$

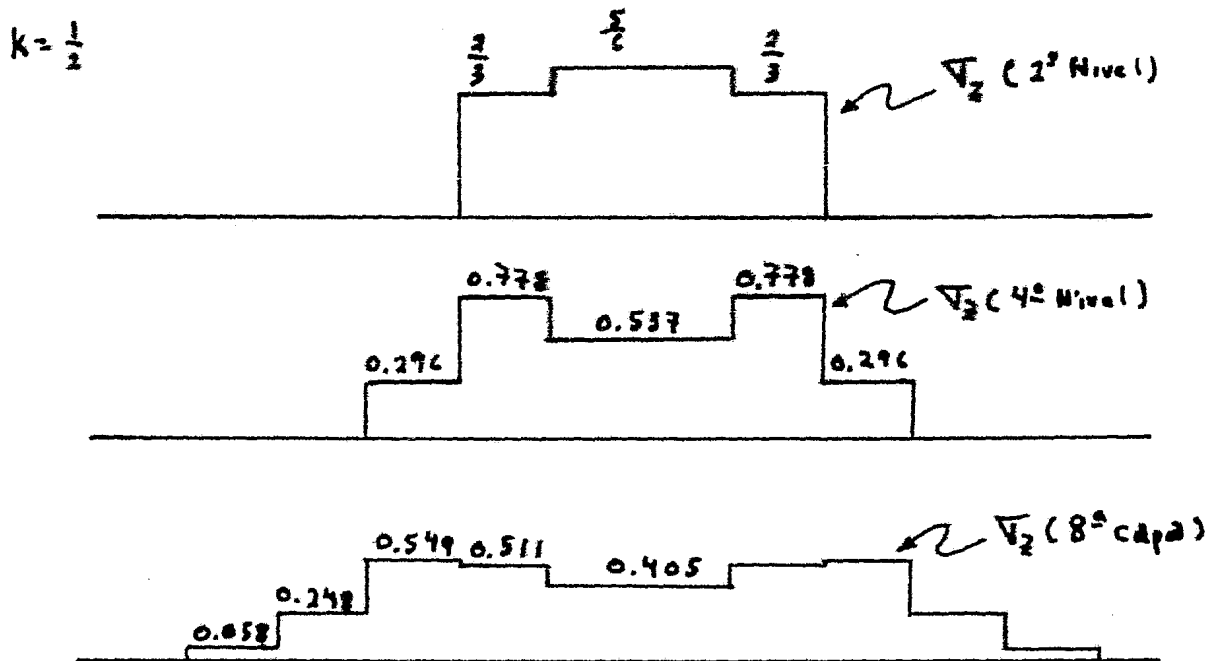
$$q = \frac{kQ}{(1+k) \cos \theta}$$

(29)

$$r = \frac{Q \sin \theta}{(1+k) \cos \theta}$$



(a)



(b)

Figura III.11. Distribución de fuerzas de contacto bajo carga externa uniforme. (a) Distribución de fuerzas de contacto excluyendo fuerzas horizontales. (b) Distribución de Q_x en la 2ª, 4ª y 8ª capa.

por lo que, si $k=1/2$:

$$\begin{aligned} p &= (2/3)F \\ q &= (1/3)F \\ r &= (1/3)F \end{aligned}$$

en donde:

$$F = \frac{Q}{\cos \theta}; \quad F' = F \sin \theta$$

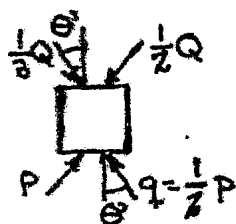
o:

$$\begin{aligned} q &= (1/2)p \\ r &= (1/2)p \sin \theta \end{aligned}$$

Sin embargo, en el primer nivel, $\theta=0$, ya que se ha supuesto que la carga externa actúa verticalmente, entonces:

$$p = (2/3)Q; \quad q = (1/3)Q; \quad r = (1/3)Q \sin \theta$$

Analizando ahora el equilibrio del bloque C en lo que respecta a — fuerzas verticales se obtiene:



$$\text{Por } \sum F_z = 0$$

$$\begin{aligned} [(1/3) + (1/2)]q \cos \theta &= (3/2)p \cos \theta \\ \Rightarrow p &= (10/18)Q; \quad q = (5/18)Q \end{aligned}$$

Al bajar del primer nivel $\theta = \theta'$ y el cálculo se reduce a lo hecho en el párrafo anterior.

De (7) se tiene que:

$$G_z = \frac{p+q}{d} \cos \theta$$

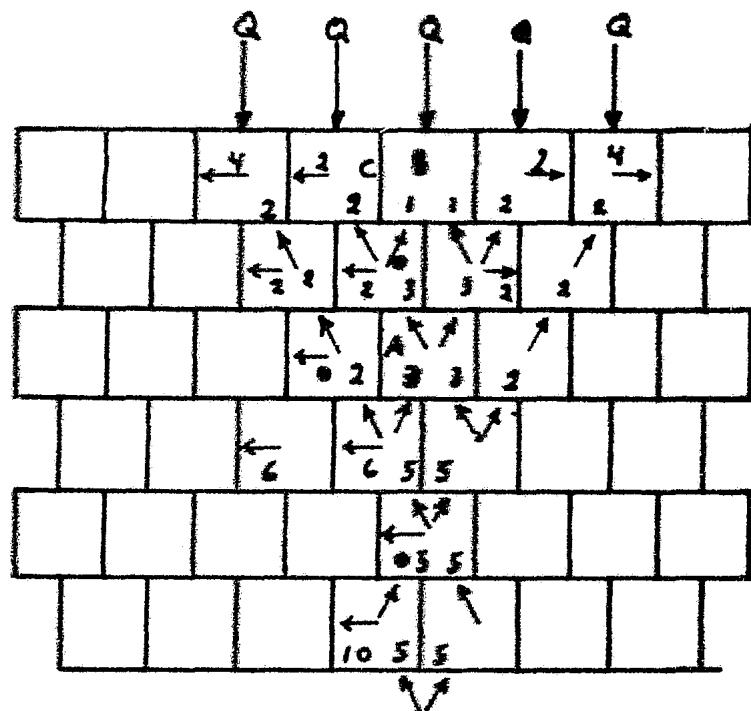
en la figura III.11b los valores registrados corresponden sólo al factor $(q+p)$, pero dado que $\cos \theta/d$ es constante, en este caso, en todo el medio la distribución de G_z es proporcional a la $(p+q)$.

Recientemente se ha extendido el análisis para tomar en cuenta la condición en que la dirección del arco es inversa, es decir, que las fuerzas horizontales se acumulen a distancia del eje vertical — del área cargada. Se considera que esta distribución se aproxima mejor a lo que ocurre justo antes de la falla del macizo.

En la figura III.12 se muestra la solución de lo que ha de ser en — llamarse caso de arco inverso total. Bajo estas condiciones, es un hecho significativo que las fuerzas horizontales generadas actúan so bre las unidades del modelo en el exterior de lo que se conoce como la zona de distribución usual; estas fuerzas tenderán, obviamente, a causar una falla pasiva en los bordes laterales del área cargada. Así mismo, en el bloque A y bloques similares ubicados debajo de éste se indica una alta concentración de esfuerzos; es razonable suponer que ésta este asociada con un mecanismo de penetración.

Previamente, algunos investigadores trataron de desarrollar una so

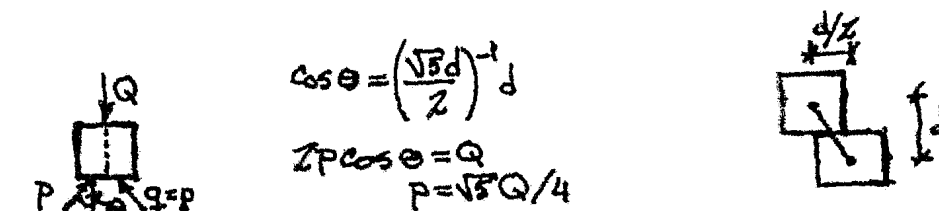
lución única al problema de una cimentación mediante una distribución de Pascal para las fuerzas de contacto; esto es, en cualquier punto sobre la superficie de una unidad, la presión (esfuerzo) actúa en la dirección de la normal \bar{l} a ésta, su magnitud es la misma para todas las direcciones \bar{l} ; $P_{11} = P_{22} = P_{33}$ para tres direcciones ortogonales cualesquiera. Sin embargo, con esta distribución no se puede establecer el equilibrio individual de las unidades sin hacer aparecer una restricción externa artificial y esto es una seria limitación en la aplicabilidad del método.



Todas las fuerzas horizontales multiplíquense por $\frac{Q}{4}$
 Todas las fuerzas inclinadas multiplíquense por $\frac{Q\sqrt{3}}{4}$

Figura III.12. Distribución de fuerzas de contacto bajo carga externa uniforme y arqueado inverso total.

En el problema de la figura III.12 el eje de arqueado coincide con el del arco cargado por lo que la fuerza horizontal, que actúa sobre cada bloque será el resultado de acumular todas las fuerzas horizontales que actúan sobre éste y el eje de arqueado más las que actúan sobre la unidad misma; de lo anterior se concluye que sobre el bloque B no actuará ninguna fuerza r (horizontal); así mismo, la fuerza q sobre una unidad cualquiera será el resultado de la interacción de las fuerzas en esa misma dirección que se encuentren entre el eje del arqueado y la unidad considerada, en el ejemplo de la figura III.12 no aparecen fuerzas q dado que se tiene una condición de arqueado total (inverso), es decir, $k=0$. Lo que ocurre en el bloque B es que actúan dos fuerzas p con distinta orientación dado que se localiza cada una de ellas de un lado del eje de arqueado. Por lo tanto para el bloque B, se tiene que:

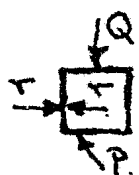


$$\cos \theta = \left(\frac{\sqrt{5}d}{2} \right)^{-1} d$$

$$2P \cos \theta = Q$$

$$P = \sqrt{5}Q/4$$

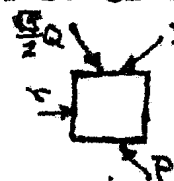
También, analizando el bloque C:



$$P = \frac{Q}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{2} Q$$

$$r = P \sin \theta = Q \tan \theta = \frac{Q}{2}$$

Para el bloque D:



$$P \cos \theta = Q \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \cos \theta \Rightarrow r = \frac{3}{4} \sqrt{5} Q$$

$$r = P \sin \theta + \frac{\sqrt{5}}{4} Q \sin \theta - \frac{\sqrt{5}}{2} Q \sin \theta = \frac{Q}{2}$$

Para la obtención de las fuerzas en los bloques restantes se sigue el mismo procedimiento, que se ha utilizado en los párrafos anteriores. Dado que no existe un algoritmo general para el cálculo de las fuerzas a través de todo el medio, éste se debe realizar paso a paso por lo que el empleo de un ordenador en ésta etapa es de gran ayuda. Una vez calculadas todas las fuerzas de contacto se deducen los esfuerzos en cada bloque mediante las ecuaciones (7), siendo éstos los esfuerzos debidos a carga externa.

Ya establecida la distribución de esfuerzos en el material de cimentación, se puede realizar, de manera simple, una estimación aproximada de los asentamientos mediante un proceso de integración numérica del tipo que se emplea para calcular asentamientos en suelos debidos a cimentaciones superficiales.

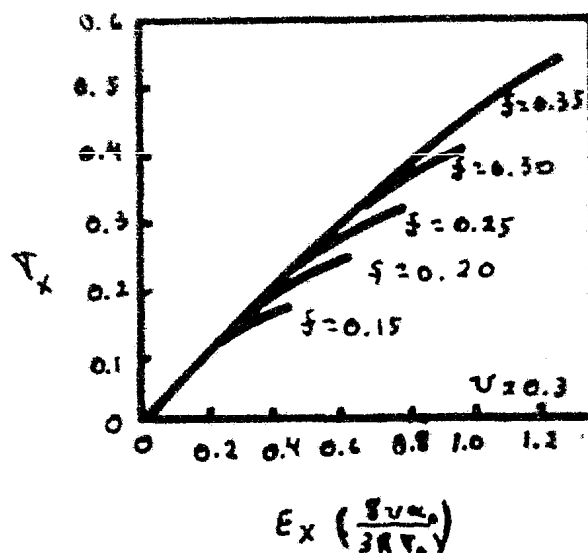
III.7. Criterios de falla.

III.7.1. Falla del material rocoso. La naturaleza de las características esfuerzo-deformación de modelos elásticos ideales, ha recibido considerable atención durante las últimas dos décadas.

Minálin y sus coautores, derivaron varias soluciones para las relaciones esfuerzo-deformación de arreglos cúbicos, con las caras de éstos centradas, y Deresiewicz analizó, con cierto detalle, un arreglo cúbico simple; la figura III.13 muestra los resultados de este análisis; en él, se demuestra el comportamiento no lineal del sistema debido, básicamente, a la deformación de los contactos y la cambiante anisotropía introducida por la fricción en los contactos.

Al considerar un conjunto de configuraciones estructurales, el efecto que domina, es el de deslizamiento entre unidades, debido ésto a las inevitables imperfecciones en su ensamblaje, si se desea disminuir la importancia de este efecto, es necesario repetir un cierto número de veces el ciclo de carga. Es por ello que, excepto bajo condiciones de carga repetida, se dificulta el análisis de deformación del modelo elástico y su relación con el comportamiento de los agregados.

La roca como material, es decir, como sustancia policristalina, -



- σ_x := esfuerzo en la dirección x (la dirección x corresponde a un plano con 110 cristales).
 α_0 := radio de contacto bajo el esfuerzo inicial
 R := radio de la esfera
 ξ := coeficiente de fricción por deslizamiento

Figura III.13. Relaciones esfuerzo-deformación para el modelo de esferas elásticas.

puede ser estudiada mediante el modelo que se muestra en la figura - III.14 en lugar del modelo de esferas elásticas; en él, los discos - representan átomos y los rigideces de los resortes que los conectan pueden ser definidas en términos, de las fuerzas de interacción atómica apropiadas. Cuando se "trabaja" con átomos, es razonable suponer que no existen fuerzas de fricción entre ellos, por lo que se asumirá que la línea de acción de la fuerza resultante está contenida en la recta que une los centros de los discos. Este argumento puede entenderse para configuraciones estructurales esféricas, sin embargo, el presente análisis se restringirá al caso bidimensional.

Primero, se considerará el caso especial en que los resortes son - infinitamente rígidos, esto es, el modelo clástico de unidades rígidas de la figura III.14. Bajo un estado general de esfuerzos representado por los esfuerzos G_x y G_z (véase figura III.15) y considerando sólo fuerzas centroidales, se tiene lo siguiente:

Analizando el equilibrio de un elemento infinitesimal de material continuo se obtiene que:

$$G = G_z \cos^2 \beta + 2 \tau_{xz} \sin \beta \cos \beta + G_x \sin^2 \beta \quad (30)$$

$$\tau = (G_x - G_z) \sin \beta \cos \beta + \tau_{xz} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \quad (31)$$

donde G_x y G_z son los esfuerzos normales que actúan en las caras - vertical y horizontal, respectivamente, del elemento, τ_{xz} el esfuerzo cortante sobre dichas caras ($\tau_{xz} = \tau_{zx}$) y G y τ los esfuerzos --

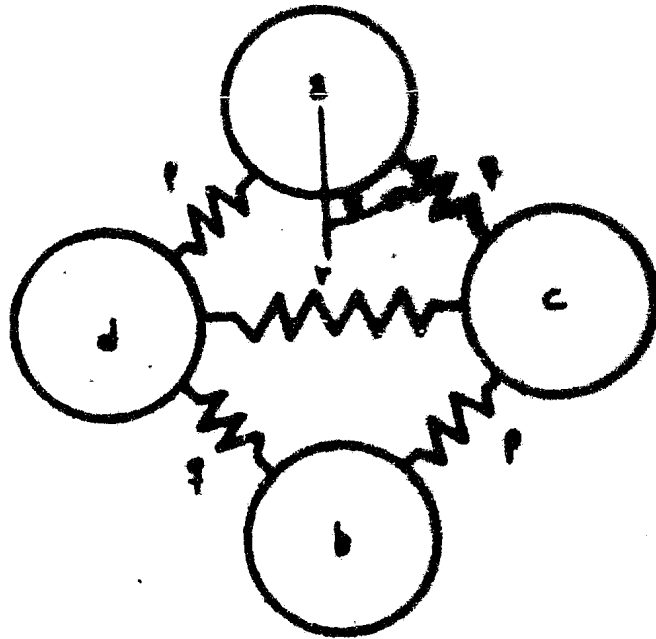


Figura III.14 Modelo elástico lineal ideal.

normal y cortante sobre la cara cuya inclinación, respecto a la horizontal es β . Si ahora se toman los ejes principales como nuevos ejes x, z se tiene que, en las expresiones (30) y (31) $G_x = G_1$, $G_z = G_2$, $\tau_{xz} = 0$, y los esfuerzos normal y cortante a través del plano de inclinación, respecto al nuevo eje en x' es φ , serían:

$$\begin{aligned} G_{\beta=\varphi} &= G_1 \sin^2 \varphi + G_2 \cos^2 \varphi \\ \tau_{\beta=\varphi} &= (G_1 - G_2) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (32)$$

así mismo el esfuerzo normal que actúa en el plano cuya inclinación es $(90^\circ - \varphi)$, respecto al nuevo eje x' , será:

$$G_{\beta=90^\circ-\varphi} = G_1 \cos^2 \varphi + G_2 \sin^2 \varphi \quad (33)$$

ahora bien, $G_{\beta=\varphi}$ actúa sobre un plano vertical y $G_{\beta=90^\circ-\varphi}$ sobre uno horizontal, por lo que:

$$G_{\beta=\varphi} = G_x; \quad G_{\beta=90^\circ-\varphi} = G_z; \quad \tau_{\beta=\varphi} = \tau_{\beta=90^\circ-\varphi} = \tau_{xz}$$

los subíndices x, z de estos esfuerzos corresponden al sistema de referencia original, de donde:

$$\begin{aligned} G_x &= G_1 \sin^2 \varphi + G_2 \cos^2 \varphi \\ G_z &= G_1 \cos^2 \varphi + G_2 \sin^2 \varphi \\ \tau_{xz} &= (G_1 - G_2) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (34)$$

Substituyendo (7) en (34) y, tomando en cuenta que dada la configuración estructural que se ha elegido, $\text{Sen } \theta = 1/2$ y $\text{Cos } \theta = \sqrt{3}/2$, se ob-

tiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}(p+q) + 2r \right] \frac{1}{\sqrt{3}} &= G_1 \operatorname{sen}^2 \varphi + G_2 \cos^2 \varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2d} (p+q) &= G_1 \cos^2 \varphi + G_2 \operatorname{sen}^2 \varphi \\ \frac{1}{2d} (p-q) &= (G_1 - G_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (35)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para p , q , r , se tiene que:

$$\begin{aligned} p &= \frac{d}{\sqrt{3}} \left[G_1 (\cos^2 \varphi + \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) + G_2 (\operatorname{sen}^2 \varphi - \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) \right] \\ q &= \frac{d}{\sqrt{3}} \left[G_1 (\cos^2 \varphi - \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) + G_2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) \right] \\ r &= \frac{d}{\sqrt{3}} \left[G_1 (\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos^2 \varphi) + G_2 (\cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

Dado que $G_1 \geq G_2$, se puede suponer que $G_2 = bG_1$, donde b es un número real en el intervalo $[0, 1]$; substituyendo esto en las ecuaciones (36) para q, r se obtienen las siguientes expresiones:

$$q = \frac{d}{\sqrt{3}} G_1 \left[\cos^2 \varphi - \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + b (\operatorname{sen}^2 \varphi + \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) \right] \quad (37)$$

$$r = \frac{d\sqrt{3}}{2} G_1 \left[\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos^2 \varphi + b (\cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] \quad (38)$$

Derivando (37) parcialmente respecto a φ y a b :

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{d}{\sqrt{3}} G_1 \left[-\operatorname{sen} 2\varphi - \sqrt{3} \cos 2\varphi + b (\operatorname{sen} 2\varphi + \sqrt{3} \cos 2\varphi) \right] \quad (39)$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{d}{\sqrt{3}} G_1 \left[\operatorname{sen}^2 \varphi + \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \right] \quad (40)$$

Igualando a cero (39) y (40); se ve que el único valor de b que hace que ésta última se anule es $b=0$; substituyendo este valor en (39):

$$\frac{d}{\sqrt{3}} G_1 \left[-\operatorname{sen} 2\varphi - \sqrt{3} \cos 2\varphi \right] = 0$$

\Rightarrow

$$\tan 2\varphi = -\sqrt{3}$$

por lo tanto:

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

derivando de nuevo (39) respecto a φ se tiene:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \varphi^2} = \frac{d}{\sqrt{3}} G_1 \left[-2 \cos 2\varphi + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} 2\varphi \right]$$

de donde:

$$\left. \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi = \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} d G_1 > 0$$

por lo que, se puede afirmar que q tiene un mínimo en $G_2=0$ y $\varphi=\pi/3$.
Derivando (38) respecto a φ y b :

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} dG_1 \left[\frac{2}{3} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 2\varphi + b \left(-\frac{2}{3} \sin 2\varphi - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) \right] \quad (41)$$

$$\frac{\partial r}{\partial b} = \frac{\sqrt{3}}{2} dG_1 \left[\cos 2\varphi - \frac{1}{3} \sin 2\varphi \right] \quad (42)$$

De nuevo, para que $\partial r / \partial b$ sea igual a cero, $b=0$; substituyendo esto en (41):

$$\frac{\sqrt{3}}{2} dG_1 \left[\frac{4}{3} \cos 2\varphi \right] = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$

Por lo tanto, r tiene un punto crítico en $G_2=0$, y $\varphi=0$; derivando (41) respecto a φ y substituyendo $b=0$, $\varphi=0$:

$$\left. \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} \right|_{\substack{\varphi=0 \\ b=0}} = \frac{4}{\sqrt{3}} dG_1 > 0$$

es decir, r tiene un mínimo para $G_2=0$, $\varphi=0$.

Resumiendo, q y r asumen valores máximos negativos cuando $\varphi=\pi/3$ y 0 respectivamente, y $G_2=0$. Esto es:

$$q \Big|_{\substack{G_2=0 \\ \varphi=\pi/3}} = -\frac{d}{2\sqrt{3}} G_1 ; \quad r \Big|_{\substack{G_2=0 \\ \varphi=0}} = -\frac{d}{2\sqrt{3}} G_1$$

Una característica geométrica de este modelo particular es que debido a la simetría de la unidad alrededor de las direcciones de recurrencia del ensamble a intervalos de $\pi/3$, estas soluciones son idénticas.

Por tanto, para esta orientación en particular, se desarrolla una fuerza de tensión en aquellos enlaces situados a $\pi/3$ respecto a la dirección de la carga de compresión. En un sólido cristalino esta fuerza de tensión es resistida por los enlaces interatómicos o intermoleculares, cuya naturaleza es descrita, generalmente, en términos de una función de energía potencial, como se muestra en la figura III.16.

Como primera aproximación, se puede desprestigiar, la influencia de las fuerzas externas sobre la curva I de la figura III.16, con lo cual es claro, que cuando $r = r_{\text{máx}}$ el enlace se rompe y, como el sistema es no conservativo, la energía interatómica de repulsión para valores de $d > d_0$ (dentro del rango considerado) es mayor que la correspondiente energía de atracción, por lo que la falta de un enlace, puede iniciar una reacción en cadena que se propagará hasta desarrollarse, una superficie continua de ruptura. Si no hay deslizamientos relativos entre átomos próximos antes de darse la ruptura, se tendrá la condición ideal de fractura rígida-frágil y donde existan movimientos relativos pequeños de los átomos y el sistema de fuerzas sea conservativos se darán las condiciones de fractura elasto-frágil.

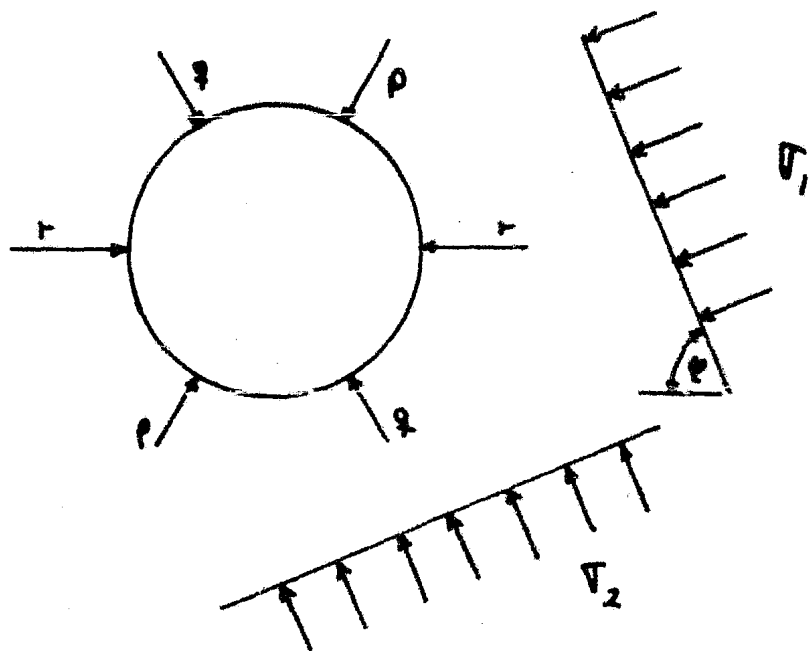


Figura III.15. Geometría esfuerzo- fuerza de contacto en el modelo elástico.

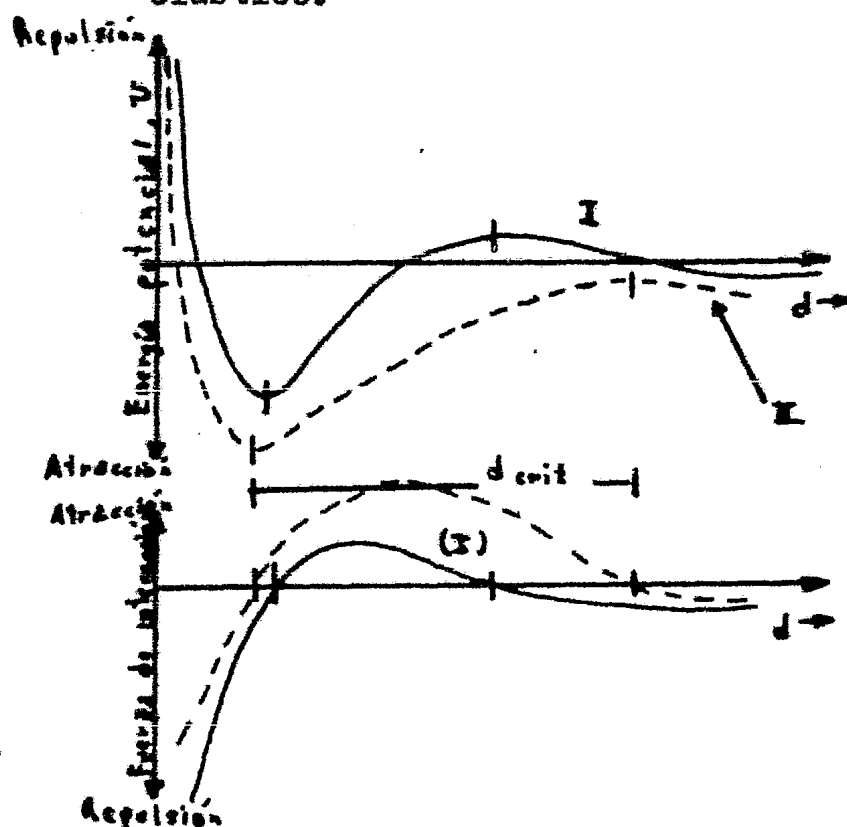


Figura III.16. Curvas típicas de energía potencial y fuerza de interacción para moléculas próximas (las líneas II, -punteadas, muestran la influencia de la aplicación (atracción)).

El argumento anterior es aplicable a un cristal simple; sin embargo, cuando se trata de una masa policristalina debe reconocerse que es -

poco probable que exista un sistema continuo simple. Las discontinuidades deberán desarrollarse en las fronteras de las configuraciones estructurales (cristales en este caso) y como, por ejemplo, la energía de unión promedio a través de la frontera de un grano, es menor que en el interior de un cristal bien ordenado, la zona más débil del sistema se encuentra en el borde.

De manera similar, en agregados cementados, las uniones en la frontera entre unidades individuales, en general, las primeras fuentes de debilidad. La frecuencia de espaciamentos atómicos reducidos en las uniones entre granos o partículas del agregado es, obviamente, mucho menor que en el caso de un cristal perfecto y, como el esfuerzo se define como la fuerza promedio por unidad de área, la situación mostrada en la figura III.17a resultará en una resistencia a la tensión mucho más baja que aquella presentada en la figura III.17b; en ésta última, se debe reconocer que el sistema puede ser igualmente descrito como un cristal simple imperfecto.

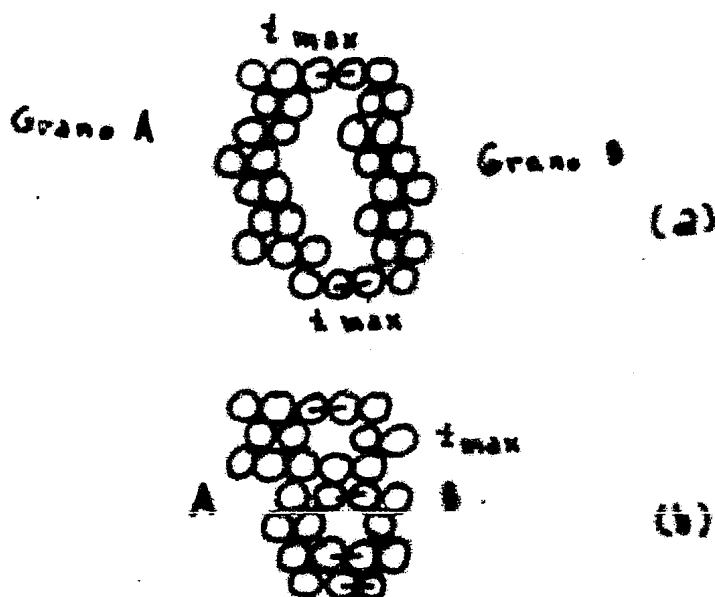


Figura III.17. Defectos típicos en los bordes entre dos granos (o cristales).

Es de esperarse, entonces, que la resistencia a la tensión de un sistema formado por varias configuraciones estructurales sea inversamente proporcional al diámetro medio de las configuraciones (tamaño del grano). Esto implica, que aún los agregados naturales, tales como la arena seca, poseen resistencia a la tensión, pero de magnitud tan reducida que se puede considerar nula para propósitos prácticos. Esta es la razón por la que los materiales policristalinos, nunca pueden alcanzar la resistencia manifestada por los cristales "perfectos".

Similarmente, se pueden mostrar que las imperfecciones resultado de la asociación o agrupación de cristales simples (por ejemplo: defectos de Frenkel y Schottky, dislocaciones, etc.) producen inestabilidad en la red misma que si llega a colapsarse libera energía que a -

su vez puede influenciar regiones vecinas en las que ocurren defectos similares. Este fenómeno es de considerable interés no sólo respecto a la propagación de dislocaciones, ya que parece ser un factor significativo al explicar el origen de las perturbaciones sísmicas a gran profundidad.

Relacionar t_{max} con la resistencia media a la tensión de un material policristalino dado es, obviamente, un problema de gran complejidad (recientemente, Rennie demostró que en el caso de un modelo ideal de esferas σ_f (compresión) = $\lambda \sigma$ (tensión); donde σ_f es el esfuerzo uniaxial en la falla); ésta depende no sólo del tamaño de los átomos (considerados individualmente) sino también de su acomodo alrededor de los contactos; más aún, se debe tomar en cuenta la orientación de cada cristal relativa al sistema de esfuerzos externos.

Sin embargo es posible desarrollar relaciones generales a partir de propiedades macroscópicas observables; la primera aproximación de este tipo es la bien conocida hipótesis de Griffith acerca del inicio y propagación de fisuras. A continuación se presenta una descripción alternativa del mecanismo de fractura frágil en términos del modelo clástico debida a D.H. Trollope.

Considérese el modelo de la figura III.14 sujeto al sistema general de esfuerzos mostrado en la figura III.15 con . Se asume que las rigideces de todos los resortes son iguales tanto en tensión como en compresión.

Si δx_k , y δy_k , y δx_i , y δy_i denotan las componentes del desplazamiento de los nudos k e i, respectivamente, y se supone que estos desplazamientos son pequeños, entonces por simples consideraciones geométricas (figura III.18) se tiene que el cambio δl_{ik} en la longitud del miembro ik correspondiente a esos desplazamientos es:

$$\delta l_{ik} = (\delta x_k - \delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\delta y_k - \delta y_i) \sin \alpha_{ik} \quad (43)$$

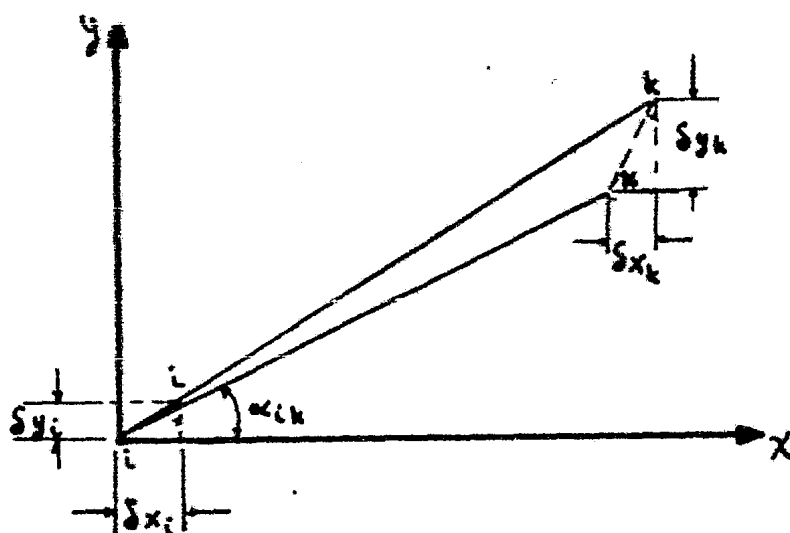


Figura III.18

Asumiendo que la deformación de la barra de en el modelo de la figura III.14 no interviene en el movimiento del nudo a (hipótesis de

Trollope) y analizando sólo la mitad de dicho modelo (figura III.19) se tiene:

$$\delta a_{12} = (\delta x_2 - \delta x_1) \cos \alpha_{12} + (\delta y_2 - \delta y_1) \operatorname{sen} \alpha_{12}$$

$$\delta a_{c2} = (\delta x_2 - \delta x_c) \cos \alpha_{c2} + (\delta y_2 - \delta y_c) \operatorname{sen} \alpha_{c2}$$

pero:

$$\delta x_c = \delta x_1 = 0 ; \quad \delta y_c = \delta y_1 = 0 ; \quad \alpha_{12} = 2\theta ; \quad \alpha_{c2} = 180^\circ - 2\theta$$

entonces:

$$\delta a_{12} = \delta x_2 \cos 2\theta + \delta y_2 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\delta a_{c2} = \delta x_2 \cos(180^\circ - 2\theta) + \delta y_2 \operatorname{sen}(180^\circ - 2\theta)$$

por lo tanto:

$$\delta a_{12} = \delta x_2 \cos 2\theta + \delta y_2 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\delta a_{c2} = -\delta x_2 \cos 2\theta + \delta y_2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Sin embargo, las barras se han considerado perfectamente elásticas:

$$\delta a_{12} = \frac{P}{S}, \quad \delta a_{c2} = \frac{q}{S}$$

donde S es la rigidez del resorte. Por lo que:

$$\frac{P}{S} = \delta x_2 \cos 2\theta + \delta y_2 \operatorname{sen} 2\theta \quad (44)$$

$$\frac{q}{S} = -\delta x_2 \cos 2\theta + \delta y_2 \operatorname{sen} 2\theta \quad (45)$$

Sumando (44) y (45) se obtiene:

$$\frac{P+q}{S} = 2\delta y_2 \operatorname{sen} 2\theta = 2\delta y_2 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

para este modelo en particular $\operatorname{sen} \theta = 1/\sqrt{2}$, y $\cos \theta = \sqrt{2}/2$ entonces:

$$\delta y_2 = \frac{P+q}{2S \cos \theta}$$

Ya que sólo se consideró en el análisis la mitad del modelo, la deformación total en la dirección ab será:

$$\frac{2(P+q)}{2S \cos \theta}$$

y la deformación unitaria en esta dirección resultará:

$$\frac{P+q}{S \cos \theta} \cdot \frac{\tan \theta}{d}$$

donde d es el diámetro de cada disco (véase figura III.4).

En la dirección lateral el único resorte que contribuye a la deformación es el que se encuentra sobre la línea cd por lo que la deformación unitaria en esa dirección es:

$$\frac{v}{s_d}$$

la relación entre estas deformaciones unitarias da como resultado:

$$\frac{v \cos \theta}{(p+q) \tan \theta} \quad (46)$$

Substituyendo (36) en (46) y tomando en cuenta que $\theta = 30^\circ$ y considerando la expresión (3) del capítulo II,

$$\mu^T = -\frac{3}{8} (3 \tan^2 \psi - 1) \quad (47)$$

Si se hace $\psi = 0$ en (47) se obtiene la relación de Poisson para G , aplicado a lo largo de ab quedando:

$$\mu^T = \frac{3}{8}$$

Si ahora se analiza el modelo propuesto por Shanley (referencia 3) que asume que las distancias:

$$ad = ac = bc = bd$$

permanecen inalteradas durante la deformación, es decir, los resortes, en compresión, son infinitamente rígidos.

Escribiendo la expresión (43) para cada una de las tres barras (da , ca , dc) se obtienen:

$$\begin{aligned} \delta a_{da} &= (\delta x_2 - \delta x_1) \cos \alpha_{da} + (\delta y_2 - \delta y_1) \sin \alpha_{da} \\ \delta a_{ca} &= (\delta x_2 - \delta x_c) \cos \alpha_{ca} + (\delta y_2 - \delta y_c) \sin \alpha_{ca} \\ \delta a_{dc} &= (\delta x_c - \delta x_1) \cos \alpha_{dc} + (\delta y_c - \delta y_1) \sin \alpha_{dc} \end{aligned}$$

pero como se han supuesto indeformables, bajo compresión, las barras da y ca :

$$\delta a_{da} = \delta a_{ca} = 0$$

por simplicidad en el desarrollo se asume que el nudo d está fijo y coincide con el origen de un sistema de referencia ortogonal ($\delta x_1 = \delta y_1 = 0$); así mismo, la fuerza que actúa sobre la barra dc es colineal a la dirección de éstas por lo que no habrá desplazamiento vertical del nudo d .

También:

$$\alpha_{da} = 70^\circ; \quad \alpha_{ca} = 180^\circ - 70^\circ; \quad \alpha_{dc} = 0$$

$$\delta d_{ac} = \frac{r}{3}$$

Entonces:

$$0 = \delta x_c \cos 70^\circ + \delta y_c \sin 70^\circ \quad (48)$$

$$0 = -(\delta x_c - \delta x_e) \cos 70^\circ + \delta y_c \sin 70^\circ \quad (49)$$

$$\frac{r}{3} = \delta x_c \quad (50)$$

Substituyendo (50) en (49) y sumando a (48) se tiene:

$$2\delta y_c \sin 70^\circ + \frac{r}{3} \cos 70^\circ = 0$$

d. despejando δy_c y recordando que para este modelo en particular $\theta = 70^\circ$ se desprende que:

$$\delta y_c = -\frac{r}{\sqrt{3}}$$

Ya que sólo se ha considerado medio modelo, la deformación total en la dirección ab será:

$$-\frac{r}{\sqrt{3}}$$

y la deformación unitaria en esa dirección vendrá dada por:

$$\epsilon_y = -\frac{r \tan 60^\circ}{\sqrt{3} \cdot d} = -\frac{r}{3d}$$

Por otro lado, como:

$$\delta x_c = \frac{r}{3}$$

entonces:

$$\epsilon_x = \frac{r}{3d}$$

De donde:

$$\mu^3 = 3$$

Valor que coincide con el calculado por Shanley más no con la cita hecha por Trollope respecto al mismo modelo; el problema parece radicarse en que Shanley apunta:

$$\epsilon_y = -\frac{1}{3} \epsilon_x$$

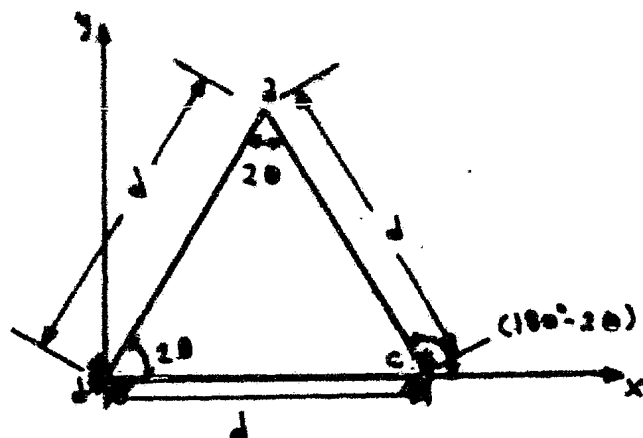


Figura III.19

considerando a ε_y como la deformación transversal, por lo que $A^2 = 1/5$, sin embargo, tanto en el análisis de Trollope como en el desarrollado después de este se ha tomado como deformación transversal a ε_x ya que la dirección en que actúa G , es de $\pi/2$ respecto a la horizontal ($\psi=0$).

En continuación, el autor de esta tesis propone el modelo de la figura III.14 sujeto al estado de esfuerzos mostrada en la figura III.15, analizándolo sin suponer que la deformación de la barra bc , no interviene en el movimiento del nudo b (hipótesis de Trollope), ni asumir que las distancias ad , ac , bc , bd permanecen invariables durante el proceso de deformación (hipótesis de Shanley).

Escribiendo la ecuación (43) para las barras de la figura III.19 se obtiene:

$$\delta a_{ba} = (\delta x_b - \delta x_a) \cos \alpha_{ba} + (\delta y_b - \delta y_a) \sin \alpha_{ba}$$

$$\delta a_{cb} = (\delta x_c - \delta x_b) \cos \alpha_{cb} + (\delta y_c - \delta y_b) \sin \alpha_{cb}$$

$$\delta a_{bc} = (\delta x_c - \delta x_b) \cos \alpha_{bc} + (\delta y_c - \delta y_b) \sin \alpha_{bc}$$

donde:

$$\alpha_{ba} = 2\theta, \quad \alpha_{cb} = \pi - 2\theta, \quad \alpha_{bc} = 0$$

$$\delta x_a = \delta y_a = \delta y_c = 0$$

$$\delta a_{ba} = \frac{P}{5}, \quad \delta a_{cb} = \frac{q}{5}, \quad \delta a_{bc} = \frac{r}{5}$$

por lo que:

$$\frac{P}{5} = \delta x_b \cos 2\theta + \delta y_b \sin 2\theta \quad (51)$$

$$\frac{q}{5} = -(\delta x_b - \delta x_c) \cos 2\theta + \delta y_b \sin 2\theta \quad (52)$$

$$\frac{r}{5} = \delta x_c \quad (53)$$

Sustituyendo (53) en (52) y sumando esto a (51) se tiene:

$$\frac{P+q}{5} = 2 \delta y_b \sin 2\theta + \frac{r}{5} \cos 2\theta$$

por lo que :

$$2\delta y_z = \frac{1}{s \sin 2\theta} (p+q - r \cos 2\theta)$$

y la deformación total en la dirección ab será:

$$\Delta \bar{ab} = \frac{1}{s \sin 2\theta} (p+q - r \cos 2\theta)$$

como $\theta = \pi/6$:

$$\Delta \bar{ab} = \frac{2}{\sqrt{3}s} (p+q - \frac{r}{2})$$

entonces:

$$\epsilon_y = \frac{2}{\sqrt{3}s} (p+q - \frac{r}{2}) \frac{\tan \theta}{d} = \frac{1}{3sd} (2p+2q-r)$$

ya que $\delta x_z = r/s$, se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{r}{sd}$$

lo que conduce a:

$$\mu^R = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = -\frac{3r}{2p+2q-r} \quad (54)$$

Substituyendo las expresiones (36) en la ecuación (54) y recordando que $\sigma_z = 0$:

$$\mu^R = -3 \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} dG_1 (3 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{\frac{4}{\sqrt{3}} dG_1 \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{6} dG_1 (3 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}$$

es decir:

$$\mu^R = -\frac{4 \sin^2 \varphi - 1}{4 \cos^2 \varphi - 1}$$

Si $\varphi = 0$ se obtiene la relación de Poisson para el caso en que, la dirección del esfuerzo principal mayor es $\pi/2$ respecto a la horizontal:

$$\mu^R = \frac{1}{3}$$

Sin embargo, en un material isótropo policristalino como el supuesto, es claro que cualquier esfuerzo uniaxial podrá presentarse con direcciones, respecto a la horizontal, que hagan que φ se en-

cuentre los valores 0 y $\pi/6$, de aquí que para estimar el valor medio de la relación de Poisson sea necesario promediar; por lo tanto, de la expresión (47) se tiene que la relación de Poisson media según Trollope es:

$$M_m^T = \frac{-\frac{3}{8} \int_0^{\pi/6} (3 \tan^2 \varphi - 1) d\varphi}{\int_0^{\pi/6} d\varphi} = \frac{3}{8} \frac{3 \tan \varphi - 4\varphi \Big|_0^{\pi/6}}{4 \Big|_0^{\pi/6}} \quad (-1)$$

entonces:

$$M_m^T = \frac{3}{8} \frac{-\sqrt{3} + 2\pi/3}{\pi/6} = 0.26$$

Si mismo, el valor medio de la relación de Poisson según el autor de esta tesis es:

$$M_m^R = \frac{-\int_0^{\pi/6} \frac{4 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1}{4 \operatorname{cos}^2 \varphi - 1} d\varphi}{\int_0^{\pi/6} d\varphi}$$

de donde:

$$M_m^R = 0.24$$

(esta última integral se calculó numéricamente mediante el método de Simpson subdividiendo el intervalo de integración en cuarenta partes).

Tal y como Shanley hace notar (referencia 3), aunque estos análisis están basados en un modelo bidimensional, los resultados obtenidos son bastante parecidos a aquel derivado a partir de un modelo de esferas.

Este método sirve para enfatizar el hecho, de que no es posible predecir correctamente el comportamiento mecánico de sistemas constituidos por varias configuraciones estructurales, a partir de un modelo cuya orientación sea fija; es decir, se debe tomar en cuenta la distribución estadística de las unidades anisotrópicas.

Si las deformaciones son pequeñas, las hipótesis de comportamiento esfuerzo-deformación lineal es válida, y la deformación unitaria longitudinal (ϵ) puede ser relacionada con el esfuerzo medio G_1 en esa dirección y el esfuerzo lateral efectivo G_2^* que determina las fuerzas r de enlace estará dado por:

$$G_2^* = -\mu G_1 \quad (55)$$

Por lo tanto, y dentro del rango lineal, el principio de superposición es aplicable obteniéndose las expresiones generales:

$$\begin{aligned} G_1^* &= G_1 - \mu (G_2 + G_3) \\ G_2^* &= G_2 - \mu (G_3 + G_1) \\ G_3^* &= G_3 - \mu (G_1 + G_2) \end{aligned} \quad (56)$$

en donde se han supuesto positivos los esfuerzos de compresión. Como estas relaciones conservan su validez hasta la falla (incluyéndola), entonces el esfuerzo efectivo se identifica en el momento en que ocurre ésta en un arreglo aleatorio de configuraciones estructurales ideales como $\bar{\sigma}_i^*$ se tiene que:

$$\bar{\sigma}_{fi}^* = \sigma_{fi}^* - \mu (\sigma_{if} + \sigma_{if}), \text{ etc.} \quad (57)$$

Sin embargo, se deben efectuar algunas correcciones debidas a las imperfecciones en las configuraciones estructurales y en los bordes de las mismas.

Sea e la reducción en por ciento del esfuerzo efectivo de tensión en la falla debida a dichas intersecciones, entonces:

$$\bar{\sigma}_{fi} = \bar{\sigma}_{fi}^* \left(1 - \frac{e}{100}\right) \quad (i=1,2,3)$$

donde $\bar{\sigma}_{fi}$ es el esfuerzo efectivo de tensión media y:

$$\bar{\sigma}_{fi} = \left(\sigma_{if} - \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \sigma_{if} \right) \left(1 - \frac{e}{100}\right) \quad (58)$$

La ecuación (58) describe lo que Trollope ha dado en llamar el criterio de falla del esfuerzo efectivo de tensión crítico. Los términos σ_{ij} pueden relacionarse con sus correspondientes deformaciones unitarias principales ($\epsilon_{ij} E$); de aquí que este criterio sea equivalente a la teoría de la máxima deformación unitaria de Poncelet.

Cuando $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (compresión uniaxial) el esfuerzo efectivo de tensión crítico vendrá dado por:

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = -\mu \sigma_1$$

Esta es la expresión que gobierna la llamada fractura en clivaje axial.

El uso de la ecuación (58) ha dado excelente correlación entre las resistencias a la tensión estimadas en pruebas de compresión simple, pruebas brasileñas y ensayos con anillo de compresión diametral. Así mismo, Fumagalli reportó que los resultados de prueba de compresión biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = 0$) concuerdan bien con la expresión:

$$\sigma_{13} = -\mu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Introduciendo un modelo más sofisticado, por ejemplo, substituyendo los resortes simples de la figura III.14, por los enlaces mostrados en la figura III.19, se puede investigar más profundamente la naturaleza de este criterio de fractura frágil.

Un resorte ab se conecta en serie con dos barras perfectamente rígidas ca y bd ; en d la barra está conectada, mediante conectores de cortante delgados, al segundo disco en e ; entre d y g está contenido un resorte comprimido.

La fuerza de enlace máxima entre unidades está representada por la resistencia al corte de los conectores e ; hasta que estos fallan, la

deformación es gobernada por el resorte ab ; sin embargo, tan pronto como ocurre la falla en e el resorte dg impone una tensión efectiva adicional entre las unidades, ésta representa a las repulsiones interatómicas que dominan esta condición. Si en adición al estado de esfuerzos (G_1, G_2) de la figura III.15 se introduce una fuerza arbitraria en r ($\psi=0$), entonces p y q pueden transformarse, en fuerzas de tensión y por tanto propagarse la falla frágil no conservativa. Claro está, que ésta tenderá a propagarse a partir de los bordes con menor esfuerzo de compresión (o mayor esfuerzo de tensión).

Así mismo, si es aplicado a un esfuerzo externo G_0 , suficientemente grande el sistema, la función energía potencial es modificada a la forma mostrada en la figura III.16 (curva II), entonces, si d_{crit} es mayor que V_d cada disco podrá moverse de una posición de "empaquetada" cerrada a la siguiente sin exceder la energía de enlace crítico. En esta situación, será más probable que se presente una distorsión plástica de una falla frágil. Por la anterior se tiene que este modelo explica la dependencia de la naturaleza del mecanismo de falla respecto a la magnitud del esfuerzo principal medio - fenómeno que fue demostrado por primera vez por Von Karman en 1911 y que subsecuentemente ha mostrado ser aplicable a una amplia gama de materiales tales como las rocas, barro, concreto, etc. - . Los tres modos principales de falla se ilustran en la figura III.20.

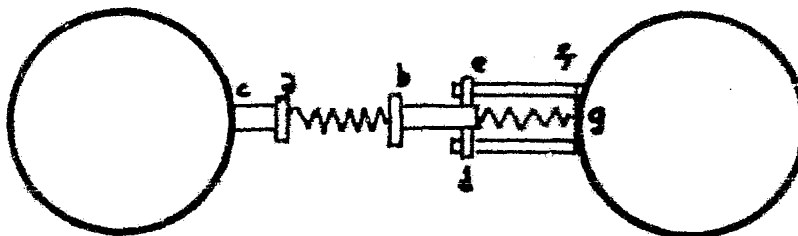


Figura III.19. Modelo idealizado que ilustra el defecto de las fuerzas de enlace molecular variables.

Cuando se forma una grieta entre un par de contactos, se puede considerar que el fenómeno es similar al examinado por Rennie y Parkin; en estos análisis se muestra que el llamado ángulo de fricción interna ϕ depende tanto de la geometría del paquete (que cambia con la deformación) como del ángulo de fricción por deslizamiento en los contactos ϕ_s (que se supone permanece constante); en el caso de reacciones intermoleculares se puede tomar ϕ_s igual a cero de modo que el valor de ϕ es, primordialmente, función de la geometría del paquete.

En los contactos, los átomos involucrados están sujetos a esfuerzos ambientales altos, de manera que éstos tienden a ubicarse en estructuras cerradas; por lo tanto, la geometría en los contactos tenderá a ser similar a aquella de los arreglos atómicos en el interior de las partículas. Esto implica que la mayor diferencia entre las zonas de contacto y el interior de las partículas reside en el "número" de

átomos sobre la trayectoria de corte, éste determina la magnitud — del "esfuerzo" interatómico de atracción que tiende a mantener a los átomos en posición. De acuerdo con este argumento, la diferencia entre las resistencias al corte de un sólido cristalino y de un agregado compuesto por partículas químicamente similares radica en el es fuerza interatómico medio en la trayectoria de corte.

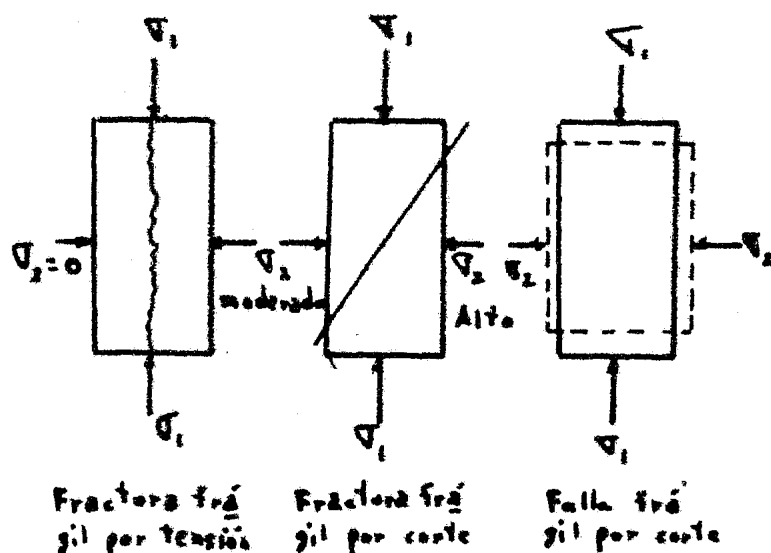


Figura III.20. Modo de falla en materiales del tipo de las rocas.

El contacto puede ser definido como la situación en que dos átomos estén lo suficientemente próximos de modo que sus nubes de electrones se sobrepongan; por lo tanto, la componente de la resistencia al corte debida a la atracción intermolecular depende del número medio de contactos atómicos por unidad de área.

Actualmente, y desde el punto de vista de la ingeniería, sólo es posible medir fuerzas sobre áreas relativamente grandes; pensando en esto parece lógico el integrar, sobre grandes áreas, las fuerzas de atracción en los contactos interatómicos y definir un esfuerzo cortante efectivo en términos de σ_n' , componente del esfuerzo debida a las fuerzas externas, y w , componente del esfuerzo debida a las fuerzas interatómicas de atracción. De esta manera, la ecuación en esfuerzos efectivos:

$$\tau_e = (\sigma_n' + w) \tan \phi \quad (59)$$

empleada previamente para suelos, puede ser ampliada para tomar en cuenta tanto sólidos cristalinos como agregados.

Dado que la geometría de los silicatos está dominada por átomos de oxígeno, esta hipótesis es aplicable en particular a suelos inorgánicos y rocas. El argumento anterior, ofrece un enfoque conveniente para la evaluación de la resistencia al corte sobre superficies compuestas que cruzan tanto roca como fisuras, y conducen a la envolvente de falla mostrada en la figura III.21.

Se puede demostrar también, si el material es frágil, que la falla por cortante aparente está de hecho gobernada por el criterio del es

fuerzo efectivo de tensión (o de máxima extensión unitaria) representado por las ecuaciones (58). Si σ_{11} es el esfuerzo de compresión en un estado de compresión uniaxial en el momento en que ocurre la falla por clivaje ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) y μ es la relación de Poisson del material, entonces:

$$\omega_0 = \omega_0 \tan \bar{\phi} = \sigma_{11} \sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}} \quad (60)$$

y:

$$D = \tan \phi' = \frac{1-2\mu}{2\sqrt{\mu(1-\mu)}} \quad (61)$$

Existen, también, buenas razones para suponer que (sólo dentro del rango frágil) $\bar{\phi} = \phi'$, en cuyo caso:

$$\omega_0 = \frac{2\sigma_{11}\mu}{1-2\mu} \quad (62)$$

III.7.2. Falla de la masa de roca. La influencia de discontinuidades en los criterios de falla de masas rocosas, no ha recibido hasta ahora la atención que se ha dado a la roca como material. Hayashi demostró que tanto la frecuencia como la dirección de las juntas, interviene de forma considerable en las condiciones de falla; así mismo, anotó que tal y como sucede con materiales granulares y agregados aleatorios, se puede desarrollar dilatación en masas constituidas por bloques.

Trollope y Brown han demostrado que la influencia de la falla en clivaje axial de bloques individuales, puede tener un marcado efecto tanto en el esfuerzo a la falla (medio), como en las propiedades deformacionales del sistema, comparados con los de un elemento aislado. La influencia de la magnitud de las presiones confinantes en relación con la resistencia del material respecto al fenómeno de dilatación, puede ilustrarse en términos del modelo mostrado en la figura III.22.

Considérese que la cuña de la figura III.22b, se mueve una distancia unitaria a lo largo de la superficie b-b; suponiendo que la resistencia al corte c del material es constante y que no hay deslizamiento respecto a las superficies verticales, e igualando los trabajos externo e interno se obtiene:

$$H \cos i = \sigma_0 b \cos i + \frac{ca}{\cos i} \quad (63)$$

H presentará un mínimo si:

$$\frac{dH}{di} = 0 = -\sigma_0 b \sin^2 i - ca \cos^2 i (1 - \tan^2 i)$$

lo que implica que:

$$\tan^2 i = 1 + \frac{\sigma_0 b}{ca} \quad (64)$$

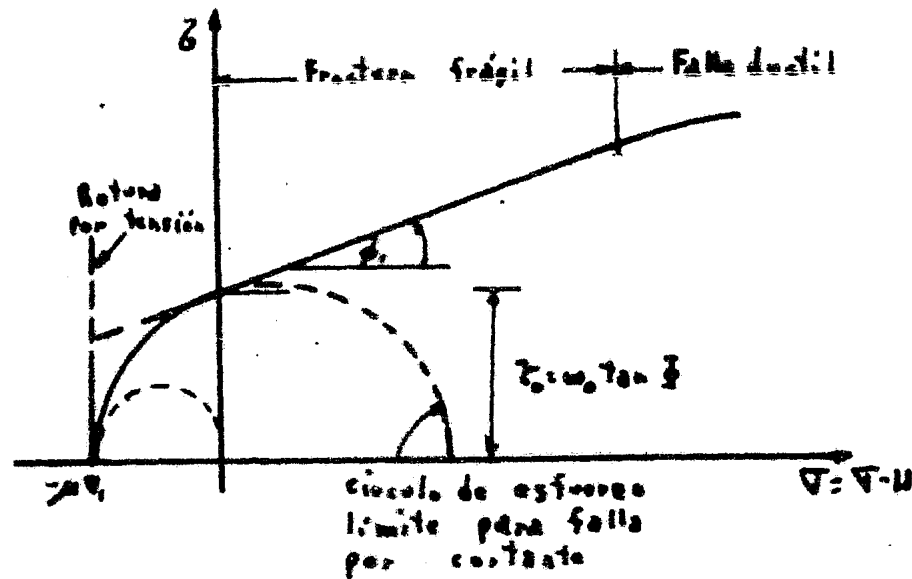


Figura III.21. Envolvente de esfuerzos efectivos de Mohr-Coulomb modificada para compresión triaxial.

Substituyendo (64) en (63):

$$H = Z \sqrt{c_0^2 (\sigma_0 b + c_0^2)} \quad (65)$$

La otra alternativa de superficie de falla es a lo largo de a-a y en este caso, no se analiza trabajo en contra de σ_0 ; sin embargo, se efectúa trabajo por fricción en la dirección a-a, por lo que:

$$H = Z \nu \sigma_0 b + c_0 b = b (Z \nu \sigma_0 + c_0) \quad (66)$$

donde $\nu = \tan \phi$ proporciona el coeficiente de fricción en las juntas. Por lo tanto, para que la distancia ocurra, se debe tener que:

$$Z \sqrt{c_0^2 (\sigma_0 b + c_0^2)} < b (Z \nu \sigma_0 + c_0) \quad (67)$$

Una situación más razonable, es aquella en que se tome en cuenta el efecto de σ_0 y H sobre el esfuerzo normal que actúa en la superficie de falla.

Reemplazando c por:

$$(\sigma_n + w) \tan \phi$$

y teniendo en cuenta que:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0 b \sin i + H \cos i}{2/\cos i}$$

el balance de los trabajos interno y externo conduce a:

$$(1 - \cot i \tan \Phi) H = G_0 b (\tan \Phi + \cot i) + \frac{\omega a \tan \Phi}{\sin i \cos i} \quad (68)$$

por lo que, el mínimo valor de H se tendrá cuando:

$$\frac{dH}{di} = 0 = - \frac{\csc^2 i \tan \Phi}{(1 - \cot i \tan \Phi)^2} \left[G_0 b (\cot i + \tan \Phi) + \frac{\omega a \tan \Phi}{\sin i \cos i} \right] + \frac{1}{1 - \cot i \tan \Phi} \left[-G_0 b \csc^2 i + \frac{\sec^2 i - \cot i \omega a \tan \Phi}{\sin^2 i \cos^2 i} \right]$$

de donde se obtiene:

$$\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi = \tan^2 \Phi \cot i - \tan i$$

o:

$$\tan^2 i + \left(\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right) \tan i - \tan^2 \Phi = 0$$

resolviendo esta ecuación, se tiene que:

$$i = \arctan \left\{ \frac{1}{2} \left[\tan \Phi - \cot \Phi - \frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \sqrt{\left(\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi} \right] \right\}$$

tomando de los dos valores posibles el que sea positivo. Substituyendo en la expresión (68) el valor de i así calculado se desprende que:

$$H = \frac{\frac{1}{2} \left\{ \tan \Phi - \cot \Phi - \frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2} \right\}}{\frac{1}{2} \left\{ \tan \Phi - \cot \Phi - \frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2} \right\} - \tan \Phi} + \frac{G_0 b}{\left[\frac{1}{2} \left\{ \tan \Phi - \cot \Phi - \frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2} \right\} \right]} + G_0 b \tan \Phi + \frac{\omega a \tan \Phi}{\sin 2 \arctan \left\{ \frac{1}{2} \left[\tan \Phi - \cot \Phi - \frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{G_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2} \right] \right\}} \quad (69)$$

recordando que se debe elegir el signo del radical de modo que el resultado de efectuar las operaciones entre los términos en el interior de las llaves sea de signo positivo.

Por otro lado, del balance de trabajo a lo largo de la superficie de falla a-a se deduce que:

$$H = Z \rho \sigma_0 b + (\sigma_0 + \omega) b \tan \Phi = b [\sigma_0 (Z \rho + \tan \Phi) + \omega \tan \Phi] \quad (70)$$

Por lo tanto, para que se presente el fenómeno de dilatación debe cumplirse que:

$$\frac{\tan \Phi - \cot \Phi - \frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2}}{-\tan \Phi - \cot \Phi - \frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2}} \cdot$$

$$\left[\frac{Z \sigma_0 b}{\tan \Phi - \cot \Phi - \frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2}} + \right. \quad (71)$$

$$\left. + \sigma_0 b \tan \Phi + \frac{Z \omega a \tan \Phi}{\sin Z \text{ ang } \tan \frac{1}{2} \left[\tan \Phi - \cot \Phi - \frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi \pm \left[\left(\frac{\sigma_0 b}{\omega a} \csc^2 \Phi + \cot \Phi - \tan \Phi \right)^2 + 4 \tan^2 \Phi \right]^{1/2} \right]} \right] \cdot$$

$$\leq b [\sigma_0 (Z \rho + \tan \Phi) + \omega \tan \Phi]$$

Aún cuando la figura III.22 presenta un caso muy simple, este análisis permite enfatizar uno de los factores más importantes en lo que a la determinación de la estabilidad de macizos rocosos se refiere. Para que un cuerpo no sufra distorsión interna, la superficie de falla debe ser plana o cilíndrica; si se considera cualquier otro tipo de superficie, se debe tomar en cuenta la distorsión interna resultante, misma que involucra tanto deslizamientos sobre superficies internas, con o sin dilatación, como fracturación por corte de la matriz rocosa. Esto puede hacerse, impartiendo un deslizamiento unitario a lo largo de cualquier superficie de falla satisfaciendo, simultáneamente los requerimientos de movimiento, considerado éste como mecanismo.

Si bien el no reconocer este factor puede producir grandes errores, éstos se encuentran, en general, del lado de la seguridad.

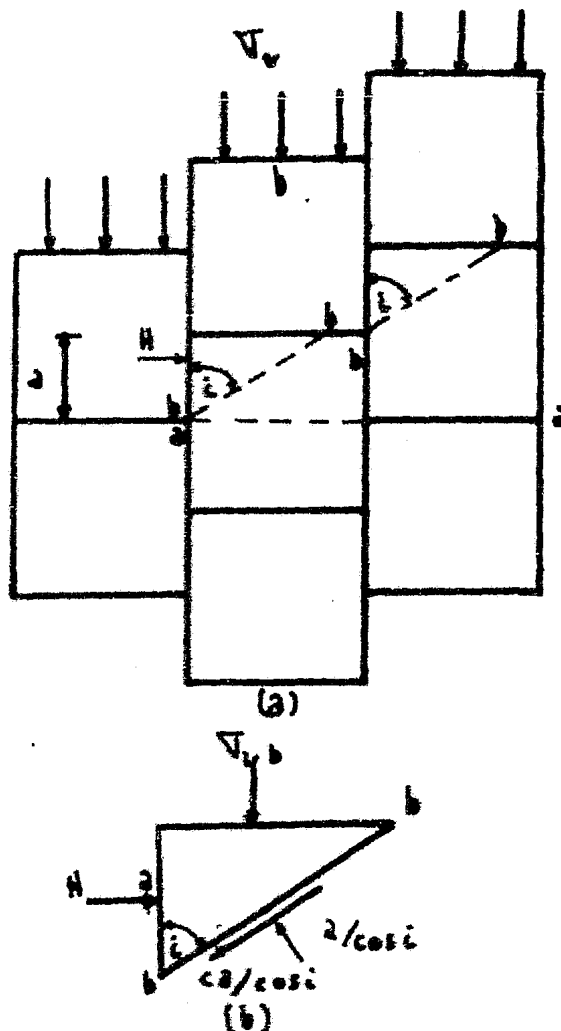


Figura III.22. Falla por corte en un modelo constituido por bloques.

Referencias.

- (1) D.H. Trollope. "The mechanics of discontinua or elastic mechanics in rock problems"; capítulo 9 del libro: Rock mechanics in engineering practice; editores Stagg, Zienkiewicz. John Wiley and Sons, London, 1979.
- (2) Timoshenko and Gere. Theory of elastic stability. McGraw-Hill. KOGAKUSHA COMPANY LTD, Tokyo, 1969.
- (3) F.R. Shanley. Strength of materials, McGraw-Hill, New York, 1957.

CAPITULO IV. TUNEL'S EN MEDIOS REOLOGICOS.

IV.1 El estado primario.

Se le llama estado primario al estado de la corteza terrestre o de alguno de sus dominios antes de realizarse la excavación de un túnel; de aquí que las dimensiones de éste dominio se determinen de modo que queden involucradas todas las influencias que contribuyen a constituir dicho estado primario. Aún en el caso en que esta región incluya grandes masas de roca, la representación geométrica de la corteza nunca estará dada por la totalidad del casquete esférico —más aún, cualquier hipótesis que asuma que la corteza terrestre es una zona coherente y homogénea, conducirá a conclusiones mecánicas inaceptables; incluso en el caso del estado primario —, es por ello que sólo se consideran dominios de la corteza relativamente pequeños, como semi-espacios infinitos llenos de materia.

En mecánica de rocas se caracteriza al estado primario como una función tanto de los esfuerzos, y de las deformaciones y desplazamientos resultantes como de las distribuciones (campos) de éstos, se puede, por tanto, distinguir campo de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos primarios; siendo claro que, la definición aceptable de estos en un dominio cualquiera, de tamaño apropiado al túnel en cuestión, es una tarea compleja y difícil.

Campo de esfuerzos primarios. El suponer que los materiales (rocas) que ocupan el dominio que se investiga se encuentran en reposo es una hipótesis bastante cercana a la realidad (excepto en algunas situaciones especiales), y permite obtener un campo de esfuerzos independiente del tiempo, cuyas características mecánicas son funciones sólo de la posición.

El campo de esfuerzos se debe, en gran parte, al peso propio de la roca, superponiéndosele algunas influencias de naturaleza geológica; siendo éstas últimas las que representan, en el caso del campo primario de esfuerzos, las marcas de la prehistoria de la corteza, sin

embargo, y desafortunadamente, la impresión observada en el momento actual es resultado de la superposición espacial y temporal de eventos subsecuentes lo que hace muy difícil, sino imposible, su descomposición en componentes individuales. Si se desea examinar cualquier fenómeno función del esfuerzo que tenga lugar en el estado primario, es necesario conocer y analizar el verdadero campo primario de esfuerzos; la evolución de éste se deberá a desplazamientos y deformaciones de la corteza; los desplazamientos en cuestión incluyen, entre otros, la compactación de sedimentos bajo la presión producida por formaciones suprayacentes, etc.

Interpretación de esfuerzos primarios. En la discusión de las ecuaciones de estado, se señalaron las consecuencias de la transformación de la energía potencial Φ , acumulada en el semi-espacio infinito, en trabajo mecánico como resultado de los desplazamientos y deformaciones inducidos por la excavación de túneles. Por lo tanto, si se desean conocer los desplazamientos, incrementos de la presión en la roca y fuerzas de soporte resultantes de la excavación de un túnel antes de realizarse ésta, es indispensable, poseer suficiente información acerca de los esfuerzos primarios y de la energía potencial Φ como funciones de la posición en la zona de influencia* del túnel, es decir, es necesario conocer:

$$\bar{F}_p = \bar{F}_p(\bar{r}) = \bar{F}_p(x, y, z) \quad (1)$$

$$\bar{\Phi}_p = \bar{\Phi}_p(\bar{r}) = \bar{\Phi}_p(x, y, z) \quad (2)$$

$\bar{\Phi}_p$ denota el nivel de energía potencial antes de la excavación.

La determinación real de las funciones (1) y (2) sería posible sólo si se estudiaran, mediante instrumentos registradores, todos los cambios que ha sufrido la corteza, incluso desde su origen, hasta la fecha y que esos instrumentos transmitieran la información relevante que permitiese caracterizar el estado primario, esto evitaría el tener que perturbar la roca para obtener información.

En lo que respecta al análisis de las consecuencias de la excavación de un túnel, el campo de esfuerzos que interesa es aquel que prevalece en la zona de influencia del túnel cuando la excavación de éste se inicia. De aquí que el punto decisivo en este análisis no sea el obtener la mejor aproximación posible del campo primario de esfuerzos, sino que los desplazamientos y deformaciones determinados mediante el campo primario supuesto se aproximen de la mejor forma a aquellos que se presentarán en la realidad. Este enfoque implica de hecho que, en todo punto del semi-espacio infinito considerado a cualquier deformación debida a una modificación espontánea o externa del esta-

* Se entenderá por zona de influencia del túnel, la región (subconjunto) del dominio en la que los desplazamientos inducidos por la excavación (túnel) puedan ser medidos; para fines prácticos, hasta los puntos en que los cambios del esfuerzo exceden el uno o dos por ciento.

do primario de esfuerzos se le debe asignar un estado de esfuerzos tal que, bajo condiciones idénticas, produzca la misma deformación en un medio estándar de Poynting-Thomson. Esto es, en lugar de considerar al verdadero estado primario de esfuerzos se toma como estado primario (virtual) a aquel estado de esfuerzos que causa una deformación equivalente en un medio estándar de Poynting-Thomson. Claro está que el estado primario así definido es, indirectamente, función de la ecuación material elegida, sin embargo, se puede preservar la consistencia lógica utilizando la misma ecuación material al evaluar las pruebas efectuadas para determinar los parámetros materiales de las rocas adyacentes; conforme la ecuación de estado empleada se aproxime más a la ecuación de estado del material rocoso que ocupa el semi-espacio infinito, el estado de esfuerzos virtual representará mejor a aquel que en realidad se tiene en la naturaleza. De lo anterior se desprende que el campo primario de esfuerzos no puede ser deducido mediante especulación, sino sólo por medio de pruebas "in-situ", cualquier otra forma de especificarlo no conduce más que a una aproximación más o menos incierta, aún cuando para fines de una primera orientación es válido usar el enfoque especulativo.

Por lo tanto, se conocerá el campo primario de esfuerzos, en cualquier sistema de coordenadas x, y, z , si el tensor esfuerzo:

$$\bar{\bar{T}}_p(\bar{r}) = \bar{\bar{T}}_p(x, y, z) = \begin{bmatrix} P_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & P_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & P_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

se especifica adecuadamente.

Campos primarios de deformación y desplazamiento. Para especificar el campo de deformaciones es suficiente conocer el tensor esfuerzo y el comportamiento del material sujeto a deformación (ecuación material). Después de introducir condiciones de borde también puede ser determinado el campo de desplazamientos (o más correctamente dicho, el campo de desplazamientos relativos).

Sin embargo, los campos de deformaciones y desplazamientos así deducidos son irrelevantes ya que estos pueden ser derivados a partir de los valores finales del campo primario de esfuerzos.

IV.2. Teorías del estado primario.

El estado primario idealizado. La ecuación diferencial de equilibrio de un semi-espacio isótropo bajo la acción de su peso propio implica que, asumiendo condiciones uniformes (constantes) en el sentido horizontal, el estado primario de esfuerzos en cualquier elemento de superficie horizontal del semi-espacio (figura IV.1) está expresado por:

$$P_z = \delta x \quad (4)$$

ya que:

$$\bar{\bar{T}} \nabla = \rho \frac{\delta^2 \bar{u}}{\delta t^2} - \bar{\bar{F}}$$

lo que implica:

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \rho g_x$$

como se han supuesto condiciones constantes en el sentido horizontal:

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial t_{xz}}{\partial z}$$

y por otra parte:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 ; g_x = g$$

entonces:

$$P_x = - \int_0^x \rho g dx = -\gamma \int_0^x dx = -\gamma x$$

(el signo indica sólo el sentido del esfuerzo).

donde γ es el peso específico medio del material suprayacente.

La ecuación (4) establece que, suponiendo condiciones uniformes - en el sentido horizontal, la carga actuante sobre un elemento de superficie, también horizontal, localizado a una profundidad x es igual al peso del material que se encuentra sobre él.

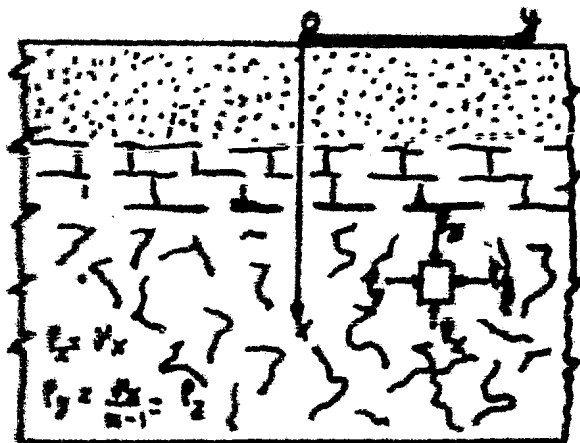


Figura IV.1. Esfuerzos primarios en el caso regular.

En una situación enteramente regular, donde las partículas de la corteza terrestre no tengan desplazamientos horizontales (esto es, - en la que el campo primario de esfuerzos haya evolucionado con las partículas moviéndose sólo verticalmente, y por tanto incrementándose gradualmente el grado de compacidad de las rocas), el comportamiento mecánico de la corteza bajo la acción de su propio peso pueda ser - descrito por la ley de Hooke, y

$$\varepsilon_{\text{horizontal}} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

entonces, por hipótesis, la ley general de Hooke implica (ver ecuaciones (43a) del capítulo II):

$$\frac{1}{E} \left[G_y - \frac{1}{m} (G_x + G_z) \right] = \frac{1}{E} \left[G_z - \frac{1}{m} (G_x + G_y) \right] = 0$$

por lo que los esfuerzos primarios actuantes sobre elementos de superficie verticales del semi-espacio pueden ser especificados como:

$$P_y = P_z = \frac{\delta x}{m-1} \quad (5)$$

De este argumento teórico se desprende que, para el caso de una situación "regular", el estado de esfuerzos es función exclusivamente de x y de las constantes paramétricas δ, m . Más aún, la vertical es una dirección principal de los esfuerzos, y, por lo tanto, también lo es cualquier dirección horizontal, es decir:

$$\bar{F}_p = \bar{F}_p(x) = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta x}{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta x}{m-1} \end{bmatrix} = \bar{F}_p \langle x, y, z \rangle \quad (6)$$

Dado que el número de Poisson se encuentra en el intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$, los esfuerzos principales son siempre de compresión (por hipótesis); y también:

$$\delta x \geq P_y \geq P_z \geq 0$$

En la figura IV.2 se muestra el círculo de Mohr del estado primario; en el caso en que $m=2$ se tiene un estado de esfuerzos hidrostático, y para $m \rightarrow \infty$ se tendrá la máxima carga posible, con los elementos de superficie vertical expuestos a un esfuerzo nulo.

Las condiciones para que el estado idealizado, descrito por el tensor esfuerzo (6), pueda ser aplicado, se resumen como sigue:

- Un medio rocoso homogéneo e isotrópico.
- Comportamiento del material de acuerdo con la ley de Hooke.
- Uniformidad del material, esfuerzo y características geométricas en el sentido horizontal.
- Ausencia de efectos geológicos aparte del de "compactación".
- Solo desplazamientos verticales durante la evolución del estado primario.

Definición del estado primario a partir de mediciones. En contraste con las hipótesis anteriores, las situaciones reales no presentan, usualmente, uniformidad en el sentido horizontal; por ejemplo, en la deposición de un sedimento transportado por agua es de esperar que exista una distribución gradual tanto de la densidad como del tamaño de los granos a lo largo de la dirección principal de la corriente; esta graduación afecta la distribución uniforme de presión, debida al material suprayacente, sobre planos, horizontales, evitando que cual

quiera de estos sea un plano de esfuerzo principal, induciendo desplazamientos horizontales como resultado de la compactación, y, por tanto, generando compresiones y distensiones locales en el sentido horizontal. El hecho de que con frecuencia $\epsilon_{horizontal} \neq 0$, implica que, aún cuando el material obedezca la ley de Hooke, los esfuerzos horizontales no pueden ser especificados en términos de sólo el número de Poisson.

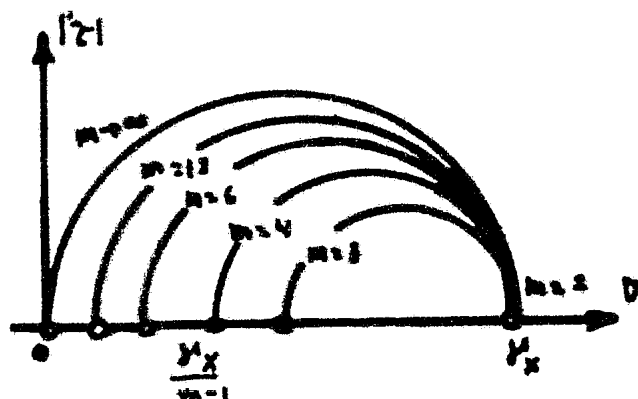


Figura IV.2. Círculos de Mohr del estado primario de esfuerzos para diferentes números de Poisson.

Las perturbaciones más fuertes que afectan al estado de esfuerzos de la corteza terrestre se deben a influencias estructurales (tectónicas); los productos de éstas pueden ser deformaciones visibles de los estratos, fallas en los macizos que alteran al estado de esfuerzos de modo que es inaplicable el enfoque que supone una situación "regular".

Se puede lograr una representación más adecuada de la realidad expresando los esfuerzos horizontales en función de un quasinúmero de Poisson, k :

$$\bar{F}_p = \bar{F}_p(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x}{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x}{k-1} \end{bmatrix} = \bar{F}_p \langle x, y, z \rangle \quad (7)$$

donde k incluye las influencias del número de Poisson m , las de tipo geológico estructural, y, en general, cualquier factor que cause cambios en el sentido horizontal; definido de esta forma, k no es una constante paramétrica del material, y, por lo tanto, no es fácil establecerlo, ya que depende entre otros, de la composición material de la corteza, de las consecuencias de la evolución estructural y, en general, de la evolución de la corteza; el valor de k será diferente en cada depósito sedimentario e incluso, variará en un mismo depósito tanto en sentido horizontal como vertical. De acuerdo con esto, para poder especificarlo es necesario realizar pruebas de cam-

po apropiadas; al analizar los fenómenos mecánicos relacionados con cavidades de eje horizontal recto y sección transversal constante, con frecuencia será suficiente establecer el valor de k en el plano de deformaciones. En el caso de estructuras geológicas planas pero perturbadas (por ejemplo, en un túnel excavado a lo largo del eje de un sinclinal) se deben tomar en cuenta las anomalías, en lo que a carga respecta, del plano horizontal (P_1 en lugar de δx), esto es:

$$\bar{T}_p = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_1/k_y - 1 & 0 \\ 0 & 0 & P_1/k_x - 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde el esfuerzo máximo es una función de la posición:

$$P_1 = P_1(\bar{r}) = P_1(x, y, z) \quad (9)$$

Al suponer una orientación especial de los esfuerzos (vertical y horizontal) y todos los cambios planos es una mera simplificación hecha para facilitar el análisis y no está justificada por ningún principio fundamental. Se ha probado mediante pruebas de campo llevadas a cabo en una gran cantidad de sitios, que las orientaciones y magnitudes de los esfuerzos primarios principales son funciones, altamente variables, de las condiciones naturales locales.

En el caso general, y tomando en cuenta las consideraciones anteriores, lo único que se puede asumir es que en cualquier punto del semi-espacio infinito prevalece una distribución de esfuerzos triaxial general (espacial), con magnitudes y orientaciones variables de un dominio al siguiente (esto es, siendo funciones de la posición); de aquí que el campo primario de esfuerzos sólo se pueda determinar estadísticamente y a partir de pruebas de campo realizadas en puntos distribuidos sobre el dominio que ha de investigarse. Una vez se posean suficientes resultados de pruebas, se puede establecer una distribución de esfuerzos, mediante un enfoque estocástico, con función de las coordenadas de la posición (x, y, z). Sean p_1 , p_2 y p_3 los esfuerzos principales en un punto cualquiera x, y, z de la corteza terrestre, y sean \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 las direcciones principales, entonces, el campo primario de esfuerzos puede especificarse, en forma general como:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1(\bar{r}), & \bar{e}_1 &= \bar{e}_1(\bar{r}) \\ P_2 &= P_2(\bar{r}), & \bar{e}_2 &= \bar{e}_2(\bar{r}) \\ P_3 &= P_3(\bar{r}), & \bar{e}_3 &= \bar{e}_3(\bar{r}) \end{aligned} \quad (10)$$

es decir:

$$\bar{T}_p(\bar{r}) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} = \bar{T}_p \langle 1, 2, 3 \rangle$$

o, respecto a algún marco de referencia x, y, z dado:

$$\overline{\overline{T}}_p(x, y, z) = \begin{bmatrix} P_x(x, y, z) & t_{xy}(x, y, z) & t_{xz}(x, y, z) \\ t_{yx}(x, y, z) & P_y(x, y, z) & t_{yz}(x, y, z) \\ t_{zx}(x, y, z) & t_{zy}(x, y, z) & P_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (11)$$

De observaciones llevadas a cabo se concluye que los valores de los campos de deformación y desplazamiento que se desarrollan después de la excavación de un túnel pueden considerarse prácticamente cero a partir de 2 a 5 veces la dimensión de la cavidad, dependiendo de la forma de ésta, siempre y cuando los esfuerzos actuantes en la roca no produzcan alguna falla.

Haciendo referencia a las mencionadas investigaciones, en especial a aquellas realizadas en túneles, se puede considerar que los esfuerzos primarios a profundidades $H > 100$ m son constantes, obteniéndose con esto una precisión aceptable. Por lo tanto, y de acuerdo con un enfoque simplificado, se puede aplicar el siguiente procedimiento:

- Asumir que la distribución primaria de esfuerzos en la vecindad del túnel es función sólo de la presión ejercida por el material suprayacente, y más aún, es homogénea en el interior de la roca que ha de removerse.
- Determinar la intensidad de los esfuerzos aplicando un método es tocástico a los resultados de las pruebas de campo o, en los casos más simples, estimarla por interpolación.
- En investigaciones aproximadas, se pueden aceptar estimaciones basadas en la estructura geológica, en las deformaciones de túneles cercanos, y en pruebas de laboratorio.

Otra forma de derivar el estado primario, asumiendo una carga triaxial, la roca debe soportar, sin fallar, la distribución de esfuerzos en el estado primario; en el límite (figura IV.3), los círculos de Mohr de los estados de esfuerzo admisibles son tangentes a una envolvente $\tau = f(\sigma)$, y si $P_1 = \sigma_1$ es un esfuerzo principal, entonces todos los estados de esfuerzo admisibles, estarán confinados por los extremos representados por los círculos de Mohr A y B. Los estados de esfuerzo límites especifican, al mismo tiempo, los esfuerzos principales máximos; tomando la situación extrema, A o B, más desfavorable, se puede encontrar una solución, dentro de los límites de seguridad, para cualquier problema.

Para poder obtener los círculos de Mohr extremos es necesario establecer una condición más aparte del valor general del esfuerzo calculado para un plano de orientación arbitraria.

Así, el estado primario de esfuerzos puede ser especificado en términos de los estados de esfuerzo extremos admisibles respecto a la falla de la roca considerada.

IV.3. Campos mecánicos generados por la excavación de un túnel.

IV.3.1. El campo secundario. La excavación de un túnel induce a un campo de esfuerzos, que se puede describir por un tensor $\overline{\overline{T}}_s$, en el campo primario, caracterizado por un tensor esfuerzo $\overline{\overline{T}}_p$; si no se aplican fuerzas de soporte que reemplacen enteramente las fuerzas suprimidas en la superficie de la cavidad, S, entonces al campo de esfuerzos así modificado se le conoce como el campo secundario. El tensor que describe a este campo de esfuerzos es una función del es-

pacio y el tiempo:

$$\bar{\tau}_s = \bar{\tau}_s(\tau, t) \quad (12)$$

El remover la masa de roca, que previamente se encontraba rodeada por la superficie S, impone cambios-desplazamientos y deformaciones en el semi-espacio infinito, especialmente en la vecindad del túnel. El movimiento de las partículas materiales, posible, dado el desplazamiento de la superficie de la cavidad, se dará en la dirección de la decompresión de masa y hacia el interior del túnel; ésta deformación está acompañada de una modificación del estado de esfuerzos, dicha modificación está caracterizada por el tensor esfuerzos:

$$\bar{\tau}^* = \bar{\tau}_s(\tau, t) - \bar{\tau}_p(\tau) \quad (13)$$

De acuerdo con esto, el tensor de esfuerzos que describe el estado secundario puede imaginarse como la suma de un tensor de esfuerzos primarios $\bar{\tau}_p$ y un tensor de esfuerzos complementarios (deformacional) $\bar{\tau}^*$. Dado que el cambio en los esfuerzos es función de $\bar{\tau}_p$, y está relacionado íntimamente con la forma S del túnel, se puede escribir:

$$\bar{\tau}_s = \bar{\tau}_p + \bar{\tau}^* = \bar{\tau}_p + \bar{\tau}^*(\bar{\tau}_p, S, t) = \bar{\tau}_s(\bar{\tau}_p, S, t) \quad (14)$$

Sean \bar{D}_s el tensor de deformaciones debido a la excavación y \bar{U}_s el vector de desplazamientos, entonces:

$$\bar{D}_s = \bar{D}_p + \bar{D}^* \quad (15)$$

y,

$$\bar{U}_s = \bar{U}_p + \bar{U}^* \quad (16)$$

Se hace la suposición de que el estado primario de esfuerzos ha actuado suficiente tiempo como para que las deformaciones primarias se hallan desarrollado totalmente; por lo tanto, al especificar las deformaciones que tiene un lugar al excavar el túnel (mismas que se registran), se tiene que

$$\bar{D}_p = \bar{0}, \quad \text{y} \quad \bar{U}_p = \bar{0} \quad (17)$$

esto es, se asume que el semi-espacio infinito, se encuentra en reposo en el momento de iniciar la perforación por lo que:

$$\bar{D}_s = \bar{D}^*, \quad \text{y} \quad \bar{U}_s = \bar{U}^* \quad (18)$$

y los desplazamientos y las deformaciones posteriores a la excavación son, respectivamente, las consecuencias y causas del cambio de los esfuerzos, de modo que:

$$\begin{aligned} \bar{D}_s &= \bar{D}_s(\bar{\tau}^*) \\ \bar{U}_s &= \bar{U}_s(\bar{\tau}^*) \end{aligned} \quad (19)$$

es decir, una vez conocido el tensor de esfuerzos complementarios - (deformacional) y haciendo uso de la ecuación material se pueden calcular los campos secundarios de deformación y desplazamiento.

Especificación del campo secundario. Para caracterizar el estado subsecuente a la excavación de un túnel, se requiere establecer las funciones que describen a los campos mecánicos $\bar{\mathbb{T}}$, $\bar{\mathbb{D}}$ y $\bar{\mathbb{U}}$. Utilizando con este propósito las ecuaciones fundamentales introducidas en el capítulo II (sección II.3), se tiene que la ecuación de equilibrio:

$$\bar{\mathbb{T}}_s \nabla = \bar{\mathbb{T}}_p \nabla + \bar{\mathbb{T}}^* \nabla = \bar{\mathbb{O}} \quad (20)$$

puede ser descompuesta en dos expresiones:

$$\bar{\mathbb{T}}_p \nabla = \bar{\mathbb{O}} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbb{T}}^* = \bar{\mathbb{O}} \quad (21)$$

ya que tanto el estado primario como el secundario, deben satisfacer las condiciones de equilibrio; otra ecuación disponible en la geometría que expresa la relación entre deformaciones y desplazamientos:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{D}}_s = \bar{\mathbb{D}}^* &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{U}}_s \cdot \nabla + \nabla \cdot \bar{\mathbb{U}}_s) = \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{U}}^* \cdot \nabla + \nabla \cdot \bar{\mathbb{U}}^*) \end{aligned} \quad (22)$$

y las ecuaciones materiales:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{T}}^* &= 2G \bar{\mathbb{E}}^* + 2\eta \dot{\bar{\mathbb{E}}}^* - \varepsilon \dot{\bar{\mathbb{T}}}^* \\ \bar{\mathbb{T}}_s^* &= 3K \bar{\mathbb{E}}_s^*, \quad \dot{\bar{\mathbb{T}}}_s^* = 3\lambda \dot{\bar{\mathbb{E}}}_s^* \end{aligned} \quad (23)$$

donde $\bar{\mathbb{T}}^*$, $\bar{\mathbb{T}}_s^*$ y $\bar{\mathbb{E}}^*$, $\bar{\mathbb{E}}_s^*$ denotan las descomposiciones de los tensores de esfuerzos y deformaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{T}}^* &= \bar{\mathbb{T}}_s^* + \bar{\mathbb{T}}^* \\ \bar{\mathbb{D}}^* &= \bar{\mathbb{E}}_s^* + \bar{\mathbb{E}}^* \end{aligned}$$

Empleando las expresiones (20) e (23), y tomando en cuenta las condiciones de frontera e iniciales que se enumeran a continuación, es posible determinar el campo secundario (véase capítulo II, sección II.3).

1. En el instante $t=0$, los desplazamientos y deformaciones son cero; esto es, en ese instante, los estados secundarios de deformación y desplazamiento coinciden con los primarios:

$$\bar{\mathbb{D}}_s \Big|_{t=0} = \bar{\mathbb{O}} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbb{U}}_s \Big|_{t=0} = \bar{\mathbb{O}} \quad (24)$$

2. La superficie de la cavidad no soporta carga alguna; esto significa que el esfuerzo normal que actúa sobre la superficie S debe ser igual a cero para todo instante:

$$\bar{\mathbb{T}}_s \bar{n} \Big|_s = \bar{\mathbb{O}} \quad (25)$$

3. A una distancia muy grande del eje del túnel, la influencia de éste es nula; es decir, en el infinito, el estado secundario debe coincidir con el primario en todo tiempo:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p \quad (26)$$

Contando con las relaciones (20) a (25), y siendo conocido el campo primario, se puede determinar, en principio, el campo secundario; — exceptuando algunos casos especiales, en la práctica no puede lograrse una solución exacta, ya que la obtención de ésta requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Determinación del campo debido a la excavación. En los análisis de mecánica de rocas es razonable, comunmente, a partir de los esfuerzos inducidos por la perforación del túnel (en el caso del campo secundario esto equivale a la determinación del tensor esfuerzos):

$$\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p$$

El campo de excavación es, en gran medida una consecuencia de ésta; por lo tanto, los esfuerzos de éste serán prácticamente cero más allá de la zona de influencia del túnel. Este hecho hace posible determinar con buena aproximación la distribución de esfuerzos secundarios (o, utilizando un argumento similar, la distribución de esfuerzos terciarios, que se introducirá más adelante) mediante métodos comparativamente simples, siempre y cuando el campo primario sea del tipo de peso propio. Cuando la profundidad es suficientemente grande no es necesario especificar que el campo $\bar{\sigma}^*$ es cero en la superficie del terreno; en el caso de este campo y sólo para éste, se considera que la superficie del terreno se encuentra en el infinito.

Los esfuerzos primarios en la superficie de la cavidad dependen de la profundidad, variando tanto en orientación como en magnitud alrededor de la periferia del túnel (S). Respecto a los esfuerzos deformacionales ($\bar{\sigma}^*$), mismos que puede considerarse se deben a la acción de una carga sobre la superficie de la cavidad, de la misma intensidad que los esfuerzos primarios, pero con dirección contraria, se puede suponer no varían con la profundidad; puede asumirse que el efecto de la superficie del túnel queda especificado adecuadamente por la intensidad primaria que prevalece en el centro de gravedad de éste (figura IV.4b). Aunque cierta, esta hipótesis implica que $\bar{\sigma}_s$ no será, en general, cero ni en la superficie del terreno (Δ_1) ni en la de la cavidad (Δ_2, Δ_3), sin embargo, a profundidades suficientemente grandes (como las alcanzadas en minería, o las de algunas casas de máquinas) este valor puede despreciarse. Por otro lado las condiciones de frontera se simplifican bastante; la distribución de $\bar{\sigma}^*$ no se ve distorsionada por la cercanía de la superficie del terreno, y la expresión que la describe será bastante sencilla.

En el caso de un túnel carretero o, para ferrocarril éste se encontrará apenas abajo de la superficie del terreno, la profundidad de la cavidad es, en general, del mismo orden de magnitud que su diámetro, y la condición de borde:

$$\bar{F}_t \cdot \bar{n} \Big|_{\text{superficie del terreno}} = \bar{\sigma}$$

representada por la superficie del terreno debe tomarse en cuenta de manera muy rigurosa; la forma del túnel, por otra parte, es siempre regular comparada con las secciones que se encuentran en minería.

IV.3.2. El campo terciario. Si después de la excavación de un túnel se instalan soportes, el campo mecánico que se desarrolla se desvía de aquel discutido en la sección anterior (IV.3.1); en tales casos aparece un campo terciario.

Los soportes se pueden instalar tanto en la cavidad (soportes directos) como en la roca inmediatamente adyacente al túnel (soportes indirectos); éstos son estructuras de cierta resistencia y capacidad de carga que sirven para limitar y modificar los desplazamientos inducidos por la excavación de la cavidad. Un puntal instalado en un túnel contrarrestará la tendencia a converger de las partículas de roca, que presionan los extremos de éste, esta acción; así mismo, inducirá esfuerzos y deformaciones en el puntal.

Las estructuras de soporte construidas en el interior de una excavación subterránea interactúan activamente con los campos de esfuerzo, deformación y desplazamiento de la zona aledaña al túnel. Dado que la roca y los soportes forman un sistema de interacción binario, es imposible de terminar o derivar el estado terciario a partir del campo secundario.

Determinación del estado terciario. Debido a la naturaleza de la roca y el soporte, no es posible dar una prescripción de validez general en lo que a la determinación del estado terciario se refiere; así mismo, la naturaleza de la interacción entre los dos sistemas (roca y soporte) depende de las características de soporte (función carg-desplazamiento) y de las condiciones del contacto. Esto implica que las características del soporte medidas en laboratorio no coinciden, en general, con las que se tienen en campo; por ello es de fundamental importancia realizar mediciones in-situ de la deformación del soporte y de los desplazamientos de la superficie de la cavidad (registros de convergencia y observaciones de la deformación del perfil), obteniéndose así una mejor aproximación de las presiones de soporte y una especificación más ajustada a la realidad de las condiciones de frontera representadas por los desplazamientos de la superficie S del túnel.

La determinación de los campos terciarios se basará en las expresiones (20) a (25). Sea la función característica del soporte:

$$\bar{P}_s = \bar{P}_s(\bar{u}|_s) \quad (27)$$

que expresa la relación entre las presiones de soporte transmitidas a la roca a través de la superficie S y los desplazamientos de los puntos de dicha superficie; los esfuerzos en la circunferencia de la cavidad, coinciden con las presiones ejercidas por el soporte, esto es:

$$\bar{F}_t \cdot \bar{n} \Big|_s - \bar{P}_s(\bar{u}|_s) = \bar{\sigma} \quad (28)$$

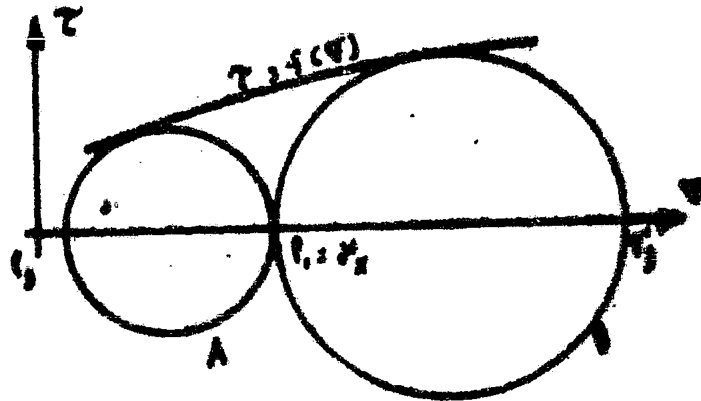


Figura IV.3

donde el subíndice t indica que el tensor de esfuerzos se refiere al estado terciario. En los cálculos, la ecuación (25) es reemplazada por la (28).

Consideraciones respecto al campo terciario. Aun cuando los soportes instalados en túneles tienen como función principal limitar los desplazamientos, la interacción de estos con la roca adyacente resulta en una transferencia de esfuerzos de la roca al soporte (presión de roca) e inversamente (presión de soporte) que afecta la distribución de esfuerzos en la roca circundante:

$$\bar{\tau}_t(r,t) = \bar{\tau}_p(r) + \bar{\tau}^*(\bar{\tau}_p, r, t) - \bar{\tau}^{**}(r_0, r, t) \quad (29)$$

donde $\bar{\tau}^{**}$ es la parte correspondiente a la modificación del tensor de esfuerzos debida a la presencia del soporte, y r_0 es un factor que depende de la naturaleza de la estructura de soporte y de la naturaleza y grado de la interacción. Dado que tanto $\bar{\tau}^*$ como $\bar{\tau}^{**}$ son independientes de la profundidad, la intensidad de $\bar{\tau}^{**}$ en la superficie S está especificada por la presión de soporte, tal y como $\bar{\tau}^*$ está definida por el tensor de esfuerzos en el centro de gravedad de la cavidad; combinando estos dos en uno, bajo el nombre de "esfuerzos de reacción por excavación", se tiene que:

$$\bar{\tau}_t = \bar{\tau}_p + \bar{\tau}_R \quad (30)$$

donde:

$$\bar{\tau}_R = \bar{\tau}^* - \bar{\tau}^{**} \quad (30a)$$

Ya que la instalación de soportes afecta los campos de deformación y de desplazamiento, de manera que los campos resultantes son diferentes de aquellos que se desarrollarían en ausencia de soporte, se abren perspectivas de formalización y generalización del aparato técnico que interviene, en los estudios de estabilidad de excavaciones

subterráneas: cualquier sección técnica que modifique los esfuerzos o desplazamientos secundarios, ya sea una estructura inserta en el túnel, una modificación de la forma de éste, alguna medida que incremente o reduzca la densidad de la roca circundante (bulonado, o inyección, por ejemplo) es, en esencia una reacción de soporte.

IV.4. Consideraciones fundamentales.

Tanto en este apartado como en el siguiente se analizará el campo mecánico, alrededor de un túnel para el caso de estado plano; se ha decidido hacer esto por dos razones principalmente: el grado de complejidad de la solución general es tal que dificulta la comprensión de los aspectos físicos del fenómeno y, por otro lado, la aproximación que se obtiene al analizar el problema para el caso plano ha demostrado ser satisfactoria en la mayoría de los casos ya que, por ser el túnel una estructura "larga" se pueden despreciar los efectos en el sentido longitudinal de éste.

Así mismo, al resolver los problemas en éste y el siguiente apartado, se harán las hipótesis simplificatorias que se mencionan a continuación:

1. Se asume que el túnel se extiende hasta el "infinito", a ambos lados de la sección en estudio; esto permite despreciar la influencia del frente de avance y de los portales en el campo de esfuerzos, ésta hipótesis es aceptable dado que, los desplazamientos alrededor del túnel son de una magnitud cien a quinientas veces menor que la velocidad de avance en el frente.

2. Se supone que, al analizar los campos de esfuerzo, deformación y desplazamiento en la inmediata vecindad del túnel, es válido considerar a la distribución primaria de esfuerzos como homogénea, y substituir todos los esfuerzos primarios por el esfuerzo primario en el centro de la sección en estudio.

3. Se asume que la masa de roca que ocupa el semi-espacio infinito es homogénea e isótropa, y susceptible de caracterizarse mediante el modelo estándar con ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= zG\bar{E} + zK\bar{E} - \bar{E}\bar{T} \\ T_0 &= 3K\bar{E}_0 \quad (G_0 = 3K\bar{E}_0) \end{aligned} \quad (31)$$

4. Los soportes poseen simetría circular y características lineales (es decir, la presión de roca y la de soporte varían linealmente con los desplazamientos de los puntos de la superficie de la cavidad).

5. El contacto entre roca y soporte es ideal e independiente de su posición en la superficie del túnel (independiente de φ , y z).

IV.4.2. Determinación del campo mecánico de un túnel horizontal.

Formulación del problema. A grandes profundidades, es usual asumir (contrario a lo supuesto en ésta y la siguiente secciones) un comportamiento plástico con una distribución primaria de esfuerzos hidrostática.

Considérese que el eje longitudinal de un túnel de sección circular coincide con uno de los ejes coordenados, y tómesese los ejes x , y z en el plano de dicha sección, dispuestos de forma que se tenga un sistema "derecho" (figura IV.5). Lo más conveniente es resolver

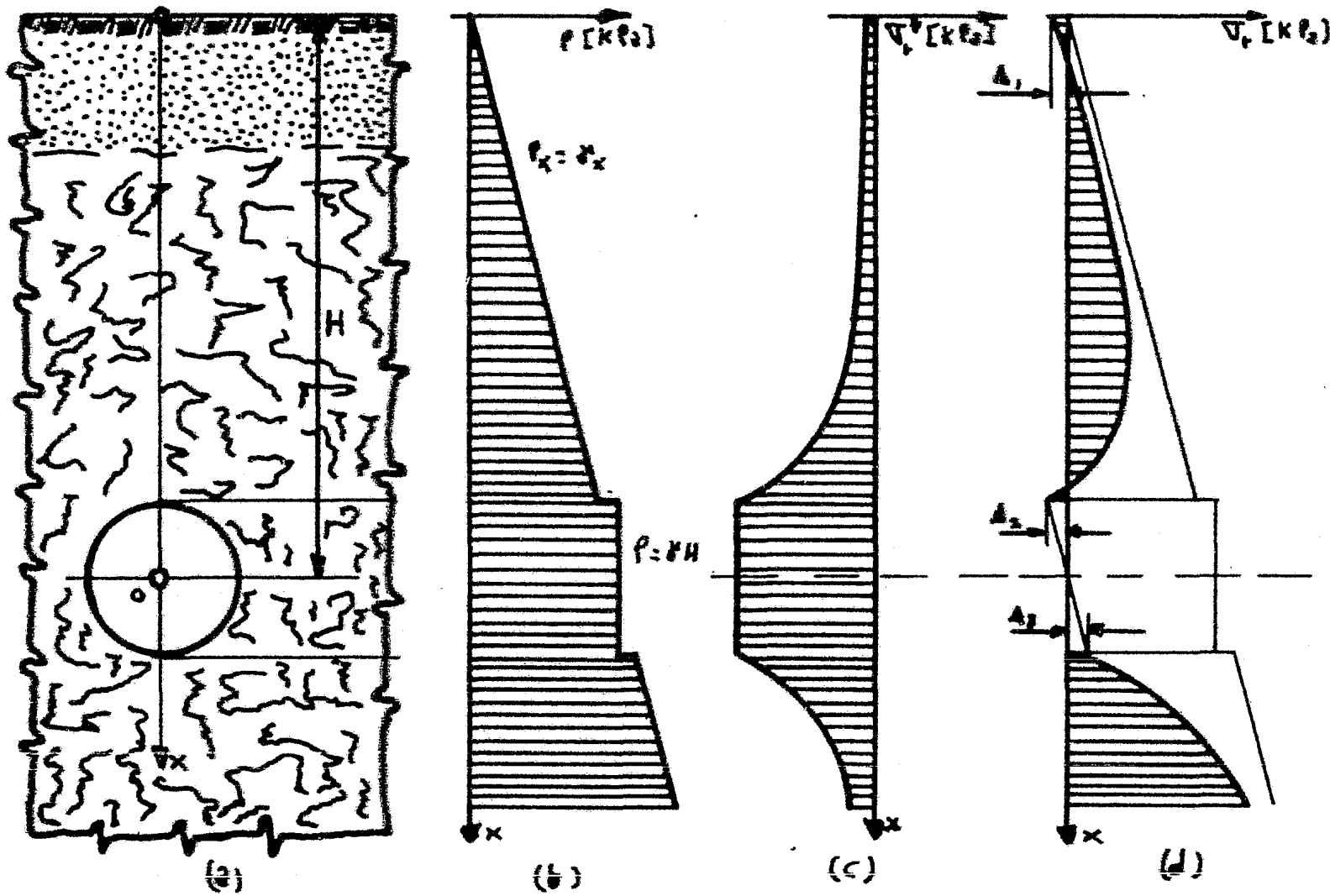


Figura IV.4. Distribución aproximada de esfuerzos en la vertical alrededor de un túnel excavado en un campo primario generado por el peso propio de la roca. Esfuerzos - verticales: b) Primario, c)deformacional, d)secundario.

el problema en coordenadas polares r, φ .

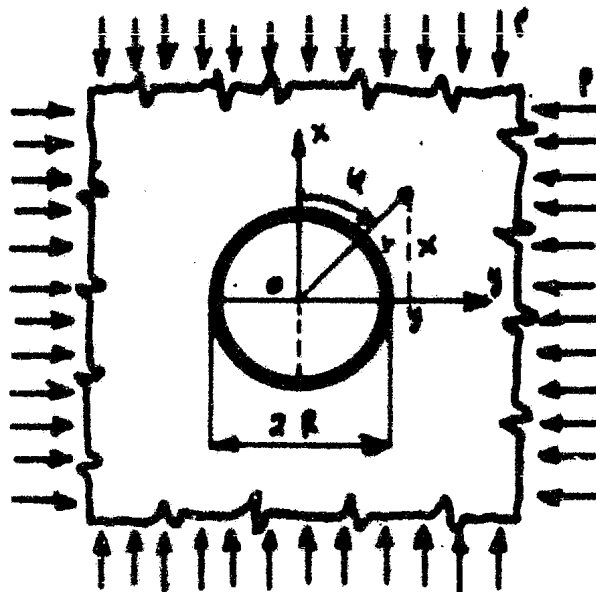


Figura IV.5. Diagrama para el estudio de la distribución primaria de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos primarios para el caso en cuestión, puede ser escrito en la forma:

$$\bar{T}_p = \begin{bmatrix} P_r & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & P_\varphi & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} = P\bar{I} \quad (32)$$

Como, por hipótesis, el túnel se extiende al infinito hacia ambos lados y a lo largo de su eje, es válido asumir que:

$$\varepsilon_z = 0 \quad (33)$$

y que en el plano de coordenadas $z=0$, bajo estudio, todas las deformaciones y desplazamientos son planos, es decir:

$$\nu_{r\varphi} = 0 \quad (34)$$

Como corolario de la simetría axial de la distribución de esfuerzos, se tiene que las variables mecánicas son funciones sólo de r, y :

$$\nu_{rz} = \nu_{\varphi z} = 0 \quad (35)$$

Estas consideraciones revelan que la expresión para el campo mecánico terciario debe ser de la forma:

$$\bar{T}(r, t) = \begin{bmatrix} G_r(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & G_\varphi(r, t) & 0 \\ 0 & 0 & G_z(r, t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\bar{D}(r,t) = \begin{bmatrix} E_r(r,t) & 0 & 0 \\ 0 & E_\varphi(r,t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\bar{U}(r,t) = [U_r(r,t) \quad 0 \quad 0] \quad (38)$$

Ecuaciones fundamentales. Ya que se desea obtener el campo terciario, se supondrá que los soportes se instalan inmediatamente después de la excavación. De los argumentos expuestos en la sección IV.3 se puede concluir que, los desplazamientos y deformaciones que ocurren después de la excavación, son inducidos por los esfuerzos excavacionales, y por lo tanto el esfuerzo terciario se puede escribir como la suma del esfuerzo primario más el esfuerzo de soporte:

$$\begin{aligned} G_r &= P_r + G_r^* = P + G_r^* \\ G_\varphi &= P_\varphi + G_\varphi^* = P + G_\varphi^* \\ G_z &= P_z + G_z^* = P + G_z^* \end{aligned} \quad (39)$$

Las expresiones que se emplearán en el cálculo son:

Ecuación de equilibrio (forma polar de la expresión (97a) sección II.3.2):

$$\frac{\partial G_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_{\varphi r}^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial z_{zr}^*}{\partial z} + \frac{G_r^* - G_\varphi^*}{r} = \rho \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} - g_r \right] \quad (39a)$$

despreciando las fuerzas de cuerpo y los desplazamientos y asumiendo uniformidad de condiciones horizontales, se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} - g_r \right] &= 0 \\ \frac{\partial z_{zr}^*}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

así mismo, de (34):

$$\frac{\partial z_{\varphi r}^*}{\partial \varphi} = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial G_r^*}{\partial r} + \frac{G_r^* - G_\varphi^*}{r} = 0 \quad (40)$$

Ecuaciones geométricas (forma polar de las expresiones (91) sección II.3.1):

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial U_r}{\partial r} \\ E_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r} \\ E_z &= \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (40a)$$

dado que se han supuesto:

$$U_{\varphi} = 0 \quad (\text{por simetría})$$

y

$$U_z = 0 \quad (\text{debido a la longitud "infinita" del túnel})$$

entonces:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{U}{r} \quad (41)$$

donde representa el desplazamiento radial ($U = U_r$)
ecuaciones físicas (véase apartado I.2.7):

$$\begin{aligned} G_r^* - G_o^* &= 2G(\varepsilon_r - \varepsilon_o) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_o) - 2(\dot{G}_r^* - \dot{G}_o^*) \\ G_{\varphi}^* - G_o^* &= 2G(\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_o) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_{\varphi} - \dot{\varepsilon}_o) - 2(\dot{G}_{\varphi}^* - \dot{G}_o^*) \\ G_r^* + G_{\varphi}^* + G_z^* &= 3K(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) \\ \dot{G}_r^* + \dot{G}_{\varphi}^* + \dot{G}_z^* &= 3K(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}) \end{aligned} \quad (42)$$

en las que:

$$G_o^* = \frac{1}{3}(G_r^* + G_{\varphi}^* + G_z^*), \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi})$$

Desplazamientos en la roca circundante. Para determinar el campo mecánico de la manera más simple es recomendable usar el método de los desplazamientos; reemplazando las deformaciones por desplazamientos se tiene que:

De la primera expresión (12):

$$G_r^* + 2\dot{G}_r^* = 2G\varepsilon_r + G_o^* - 2G\varepsilon_o + 2\eta\dot{\varepsilon}_r + 2\dot{G}_o^* - 2\eta\dot{\varepsilon}_o$$

substituyendo los valores de G_o^* , \dot{G}_o^* y ε_o , y $\dot{\varepsilon}_o$:

$$\begin{aligned} G_r^* + 2\dot{G}_r^* &= 2G\varepsilon_r + \frac{1}{3}(G_r^* + G_{\varphi}^* + G_z^*) - \frac{2}{3}G(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) + \\ &+ 2\eta\dot{\varepsilon}_r + \frac{1}{3}2(\dot{G}_r^* + \dot{G}_{\varphi}^* + \dot{G}_z^*) - \frac{2}{3}\eta(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}) \end{aligned}$$

de la tercera y cuarta ecuación (12):

$$\begin{aligned} G_r^* + 2\dot{G}_r^* &= 2G\varepsilon_r + K(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) - \frac{2}{3}G(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) + 2\eta\dot{\varepsilon}_r + \\ &+ 2K(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}) - \frac{2}{3}\eta(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} G_r^* + 2\dot{G}_r^* &= 2G\varepsilon_r + (3K - 2G)\frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) + \\ &+ 2\eta\dot{\varepsilon}_r + (3K\eta - 2\eta)\frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}) \end{aligned}$$

de (11):

$$G_r^* + 2\dot{G}_r^* = 2G \frac{\partial U}{\partial r} + (3k-2G) \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) + \\ + 2\eta \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + (3k\tau - 2\eta) \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \right)$$

agrupando términos:

$$G_r^* + 2\dot{G}_r^* = \left(k + \frac{4}{3}G \right) \frac{\partial U}{\partial r} + \left(k - \frac{2}{3}G \right) \frac{U}{r} + \left(k\tau + \frac{4}{3}\eta \right) \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \left(k\tau - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (43)$$

de modo similar se obtiene que:

$$G_\varphi^* + 2\dot{G}_\varphi^* = \left(k - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial U}{\partial r} + \left(k + \frac{4}{3}G \right) \frac{U}{r} + \left(k\tau - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \left(k\tau + \frac{4}{3}\eta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (43a)$$

Restando éstas dos últimas expresiones:

$$(G_r^* - G_\varphi^*) + 2(\dot{G}_r^* - \dot{G}_\varphi^*) = 2G \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) + 2\eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (43b)$$

Diferenciando la ecuación (40) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial^2 G_r^*}{\partial r \partial t} + \frac{\dot{G}_r^* - \dot{G}_\varphi^*}{r} = 0$$

multiplicando ésta última por 2 y sumándola a (40) se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial r} (G_r^* + 2\dot{G}_r^*) + \frac{(G_r^* - G_\varphi^*) + 2(\dot{G}_r^* - \dot{G}_\varphi^*)}{r} = 0 \quad (44)$$

Sustituyendo (43) y (43a) en (44) se llega a:

$$\frac{3k+4G}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{3k\tau+4\eta}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \frac{3k-2G}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{3k\tau-2\eta}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \\ + 2G \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + 2\eta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} - \frac{3k+4G}{3} \frac{U}{r^2} - \frac{3k\tau+4\eta}{3} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

lo que implica que:

$$\left[1 + \frac{3k\tau+4\eta}{3k+4G} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left[1 + \frac{3k\tau+4\eta}{3k+4G} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \left[1 + \frac{3k\tau+4\eta}{3k+4G} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{U}{r^2} = 0$$

haciendo:

$$\alpha_0 = \frac{3k\tau+4\eta}{3k+4G}$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial en U :

$$\left(1 + \alpha_0 \frac{d}{dt}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) = 0 \quad (45)$$

Sea:

$$L \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right)$$

entonces, la expresión (45) se puede escribir como:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{L}{\alpha_0}$$

por lo que:

$$\frac{dL}{L} = -\frac{1}{\alpha_0} dt$$

ecuación que tiene como solución:

$$L = C(t) e^{-t/\alpha_0}$$

En el instante $t=0$, los desplazamientos y deformaciones alrededor del túnel son nulos, es decir:

$$U \Big|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_r \Big|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_\theta \Big|_{t=0} = \frac{U}{r} \Big|_{t=0} = 0 \quad (46)$$

por lo tanto, para ese instante la función L debe ser igual a cero:

$$L \Big|_{t=0} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{t=0} + \frac{U}{r} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dr} \left(\varepsilon_r \Big|_{t=0} + \varepsilon_\theta \Big|_{t=0} \right) = C e^{-t/\alpha_0} = 0$$

de donde:

$$C = 0$$

esto es, L es cero para todo instante t ; por lo tanto, los desplazamientos en la vecindad del túnel están dados por la solución a la ecuación diferencial:

$$L(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} = 0 \quad (47)$$

que se puede escribir como:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right] = 0$$

de donde se desprende que:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = C \quad ; \quad C = \text{cte.}$$

entonces:

$$r \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{dr}{dr} = Cr$$

$$\frac{d}{dr}(Ur) = Cr$$

por lo tanto:

$$Ur = \frac{C}{2} r^2 + A \quad ; \quad A = \text{cte.}$$

haciendo:

$$\frac{C}{2} = B$$

se tiene que:

$$U = \frac{A}{r} + Br \tag{48}$$

Dado que los desplazamientos tienden a cero conforme $r \rightarrow \infty$ (el túnel no induce deformaciones a distancias muy grandes):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$$

se obliga a que:

$$B = 0$$

es decir, el desplazamiento radial de cualquier punto en la vecindad de la cavidad es:

$$U = \frac{A}{r} \tag{49}$$

siendo A función sólo del tiempo.

Empleando ésta última expresión, las deformaciones y sus variaciones respecto al tiempo toman la siguiente forma:

$$\epsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} A, \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{dA}{dt} \tag{50}$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{U}{r} = \frac{1}{r^2} A, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{dA}{dt}$$

y por lo tanto:

$$\epsilon_o = \frac{1}{3} (\epsilon_r + \epsilon_\varphi + \epsilon_z) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{r^2} A + \frac{1}{r^2} A + 0 \right) = 0, \quad \dot{\epsilon}_o = 0 \tag{51}$$

y:

$$G_o^* = \frac{1}{3}(G_r^* + G_\phi^* + G_z^*) = 3\lambda \varepsilon_o, \quad \dot{G}_o^* = 0 \quad (52)$$

Al soporte. Si en el túnel se instalan soportes de dimensión constante y simetría circular, se pueda suponer, como primera aproximación, que el esfuerzo radial en el soporte será proporcional al desplazamiento, también radial, de los puntos de la superficie de la cavidad.

$$G_{soport} = \xi U \Big|_{r=R} = \xi [U]_R \quad (53)$$

Haciendo uso de la solución de Lamé se obtiene la constante de proporcionalidad ξ , de modo aproximado, en la forma:

$$\xi = \frac{E_b m_b}{m_b + 1} \frac{R^2 - R_o^2}{R} \frac{1}{R_o^2 + \frac{m_b - 2}{m_b} R^2} = \frac{E_b h}{R^2} \quad (54)$$

donde:

E_b , es el módulo de elasticidad del soporte, en ,

m_b , es el número de Poisson del soporte,

R , es el radio del túnel o del soporte al instalarse, en m,

R_o , es el radio interior del soporte al instalarse éste, en m,

$h = R - R_o$, es el espesor del soporte, en m.

La expresión (54) se deriva de la aplicación de la teoría de la elasticidad a un tubo de pared gruesa; esto es, el aro de soporte se ha considerado elástico; en otras palabras, se ha supuesto que su comportamiento (su deformación) puede ser especificado en términos de su geometría y sus dos constantes elásticas (E_b y m_b). Sin embargo, el soporte es, en general, un cuerpo reológico, y para poder tomar en cuenta este hecho es necesario incorporar algunas constantes paramétricas (η_b , τ_b). Con objeto de simplificar la solución se continuará suponiendo al soporte linealmente elástico, con ello, la forma matemática de ésta será simple y se facilitará su interpretación física. Por otro lado, en base al análisis mecánico que se presenta aquí, la derivación de una solución para el caso de un soporte anular constituido por un sólido reológico lineal homogéneo no presenta dificultades especiales.

La presión ejercida sobre el soporte es igual al esfuerzo radial actuante en la superficie de la cavidad:

$$G_r \Big|_R = P + G_r^* \Big|_R = \xi U \Big|_R \quad (55)$$

De las expresiones (50) a (52) y (43):

$$G_r^* + 2\dot{G}_r^* = 2G\varepsilon_r + 2\eta\dot{\varepsilon}_r = - \left(2G \frac{1}{r^2} A + 2\eta \frac{1}{r^2} \frac{dA}{dt} \right) \quad (56)$$

y como:

$$(G_r + 2\dot{G}_r) \Big|_R = P + G_r^* \Big|_R + 2\dot{G}_r^* \Big|_R = \xi U \Big|_R + 2 \xi \frac{dU}{dt} \Big|_R$$

se puede especificar la función $A(t)$ mediante la ecuación diferencial:

$$P - \left(ZG \frac{1}{R^2} A + Z\eta \frac{1}{R^2} \frac{dA}{dt} \right) = \xi \left(\frac{1}{R} A + \frac{2}{R} \frac{dA}{dt} \right)$$

la que al reordenarse toma la forma:

$$\frac{dA}{PR^2 - A(ZG + \xi R)} = \frac{dt}{Z\eta + \xi R}$$

integrando ambos miembros se obtiene:

$$\ln[PR^2 - A(ZG + \xi R)] = - \frac{ZG + \xi R}{Z\eta + \xi R} t + C'$$

o,

$$A = \frac{PR^2}{ZG + \xi R} - \frac{C}{ZG + \xi R} e^{-\alpha t} \quad (57)$$

donde C es una constante de integración, y:

$$\beta = \frac{ZG + \xi R}{Z\eta + \xi R}$$

El valor de C se establece haciendo uso de la condición de que los desplazamientos en el instante $t=0$ deben ser nulos, es decir:

$$u \Big|_{t=0} = \frac{A}{r} \Big|_{t=0} = \frac{PR^2}{r(ZG + \xi R)} - \frac{C}{r(ZG + \xi R)} = 0$$

por lo tanto:

$$C = PR^2$$

Campos de deformación y desplazamiento. Considerando las relaciones anteriores, estos pueden escribirse como sigue:

$$u = P \frac{\alpha}{\xi} \left(\frac{R}{r} \right) (1 - e^{-\beta t}) \quad (59)$$

$$\varepsilon_r = -P \frac{\alpha}{\xi R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - e^{-\beta t}) \quad (60)$$

$$\varepsilon_\theta = P \frac{\alpha}{\xi R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - e^{-\beta t}) \quad (61)$$

en las que:

$$\alpha = \frac{\xi R}{ZG + \xi R} \quad (62)$$

La figura IV.6 es una gráfica de los desplazamientos a diferentes tiempos contra la distancia radial medida desde el centro de la sección del túnel; de esta figura se puede concluir que en la práctica no se presentan desplazamientos importantes en puntos localizados más

allá lo cuatro veces el radio del túnel. En la figura IV.7 se presenta una gráfica de desplazamientos de los puntos de la superficie de la cavidad contra tiempo.

La variación temporal de las deformaciones, respecto a la distancia del túnel, es similar a la de los desplazamientos, pero dado que ϵ_r y ϵ_θ varían inversamente con el cuadrado de r , el radio de influencia efectivo de la deformación es aún menor.

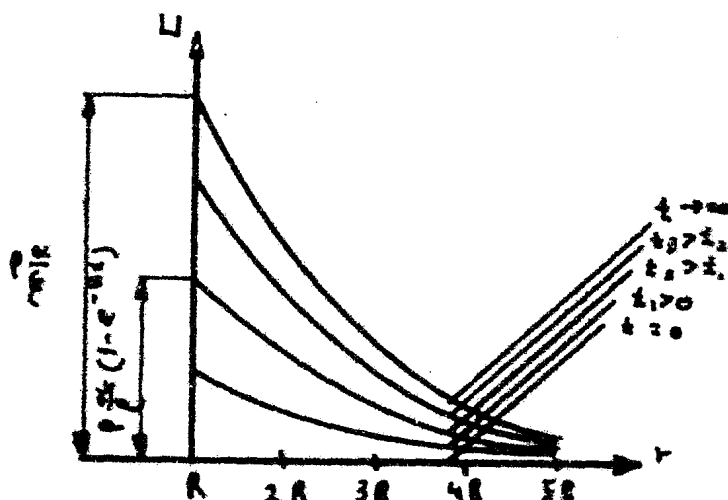


Figura IV.6. Intensidades del campo de desplazamientos contra distancia al eje del túnel.

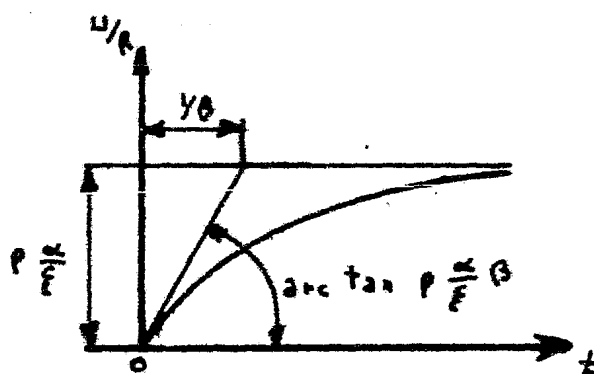


Figura IV.7. Desplazamiento de los puntos de la superficie de la cavidad.

Campo terciario de esfuerzos. Teniendo las componentes de la deformación, y haciendo uso de la expresión (55), se pueden especificar los esfuerzos deformacionales:

$$\sigma_r^* + z\sigma_r^* = 2G\epsilon_r + 2\eta\dot{\epsilon}_r = \frac{PK}{\xi R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[2G(1 - e^{-at}) - 2\eta\beta e^{-at} \right] \quad (63)$$

La forma de esta ecuación diferencial sugiere una solución de la forma:

$$G_r^* = \left(\frac{R}{r}\right)^2 (D + F e^{-\alpha t}) ; \quad \dot{G}_r^* = -\left(\frac{R}{r}\right)^2 F \alpha e^{-\alpha t} \quad (64)$$

Substituyendo (64) en (53) y efectuando algunas manipulaciones resulta:

$$D = (\alpha - 1)P, \quad F = P \left(1 - \alpha - \frac{Z\eta(\alpha\beta)}{\xi R}\right) / (1 - \beta)$$

Así mismo, considerando la ecuación física:

$$G_\varphi^* + \beta \dot{G}_\varphi^* = ZG E_\varphi + Z\eta \dot{E}_\varphi$$

se tiene que utilizando (61):

$$G_\varphi^* + \beta \dot{G}_\varphi^* = \frac{PK}{\xi R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[ZG(1 - e^{-\alpha t}) + Z\eta(\beta e^{-\alpha t}) \right] \quad (65)$$

cuya solución es de la forma:

$$G_\varphi^* = P \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[H + I e^{-\alpha t} \right] \quad (66)$$

Substituyendo la expresión (66) en la (65) se obtiene que:

$$H = 1 - \alpha, \quad I = \frac{\alpha}{1 - \beta} \frac{Z\eta(\beta - ZG)}{\xi R}$$

Como resultado de lo anterior, el campo terciario de esfuerzos alrededor de un túnel que es caracterizado por las expresiones:

$$\begin{aligned} G_r &= P + G_r^* = P \left\{ 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[\alpha - 1 + \left(\frac{1 - \alpha - \frac{Z\eta(\alpha\beta)}{\xi R}}{1 - \beta}\right) e^{-\alpha t} \right] \right\} \\ G_\varphi &= P + G_\varphi^* = P \left\{ 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[\left(\frac{\alpha}{1 - \beta} \frac{Z\eta(\beta - ZG)}{\xi R}\right) e^{-\alpha t} + 1 - \alpha \right] \right\} \\ G_z &= P + G_z^* = P \end{aligned} \quad (67)$$

Para simplificar el graficado de las expresiones (67) se harán las siguientes suposiciones:

$$\eta \gg \beta, \quad \eta \gg G$$

Apartir de ellas se obtiene que:

$$\frac{Z\eta(\alpha\beta)}{\xi R} \doteq 1 ; \quad 1 - \beta = 1 - \beta \frac{ZG + \xi R}{Z\eta + \xi R} \doteq 1 ; \quad \frac{Z\eta(\beta - ZG)}{\xi R} \doteq 1$$

Por lo tanto, el campo terciario de esfuerzos alrededor de un túnel puede caracterizarse, de modo aproximado, mediante las ecuaciones:

$$G_r = P + G_r^* = P \left\{ 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[1 - \alpha(1 - e^{-\alpha t}) \right] \right\},$$

$$G_{\varphi} = P + G_{\varphi}^* = P \left\{ 1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 [1 - \kappa (1 - e^{-\alpha t})] \right\} \quad (67a)$$

$$G_z = P + G_z^* = P$$

mismas que se representan en la figura IV.8 para diferentes tiempos.

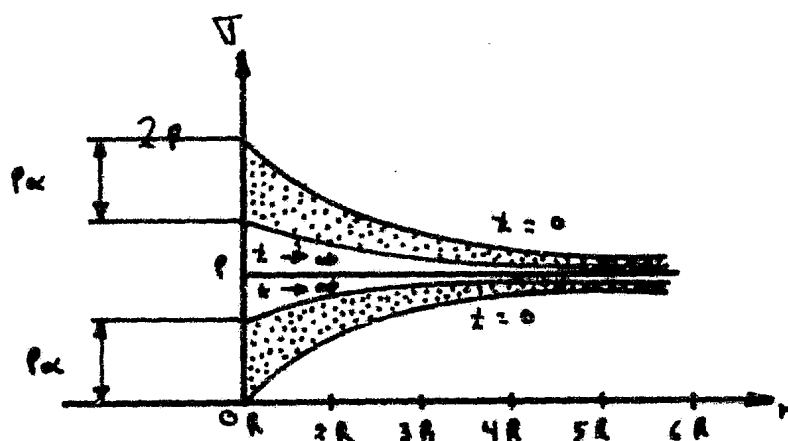


Figura IV.8. Evolución temporal de la distribución de esfuerzos vs. distancia al eje del túnel.

IV.4.3. Relaciones entre "estándar" e idealmente elásticas. Tal y como se mencionó en la sección II.2.8, es de considerable interés la alguna relación entre soluciones referentes a sólidos elásticos - ideales de Hooke y aquellas correspondientes a cuerpos de Poynting--Thomson. Conforme a esto se procederá a analizar los campos mecánicos que se desarrollan en un medio que satisface la ley de Hooke.

De la ley de Hooke generalizada para el esfuerzo (ecuaciones (42a) del capítulo II) escrita en coordenadas polares y dado que:

$$\frac{1}{m-2} = \frac{k}{2G} - \frac{1}{3}$$

y considerando un estado plano de deformación ($\varepsilon_z = 0$), se obtienen:

$$\begin{aligned} G_r^* &= 2G\varepsilon_r + \frac{1}{3}(3k-2G)(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) \\ G_{\varphi}^* &= 2G\varepsilon_{\varphi} + \frac{1}{3}(3k-2G)(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) \\ G_r^* + G_{\varphi}^* + G_z^* &= 3K(\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) \end{aligned} \quad (68)$$

Substituyendo en (68) las deformaciones por desplazamientos teniendo en cuenta (41), se tiene que:

$$G_r^* = 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3}(3k-2G) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (69)$$

$$G_{\varphi}^* = 2G \frac{u}{r} + \frac{1}{3}(3k-2G) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (70)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dr} G_r^* = 2G \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{3}(3k-2G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - u \right) \right] \quad (71)$$

y

$$G_r^* - G_\phi^* = ZG \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) \quad (72)$$

De (40), (71) y (72) se desprende que:

$$\left(K + \frac{4}{3}G \right) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left(K + \frac{4}{3}G \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right] = 0$$

haciendo:

$$\alpha_0^2 = K + \frac{4}{3}G$$

se obtiene:

$$\alpha_0^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right] = 0$$

lo que implica que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) = 0$$

por lo que se concluye que:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = C \quad ; \quad C = \text{cte.}$$

entonces:

$$r \frac{\partial U}{\partial r} + U = Cr$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial r} (Ur) = Cr$$

por lo tanto:

$$Ur = \frac{C}{2} r^2 + A$$

Sea:

$$B = \frac{C}{2}$$

entonces:

$$U = \frac{A}{r} + Br$$

dado que el túnel no induce desplazamientos a distancias muy grandes:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$$

por lo que:

$$B = 0$$

quedando:

$$U = \frac{A}{r} \quad (73)$$

De (41) y (73):

$$\epsilon_r = -\frac{A}{r^2} ; \quad \epsilon_\varphi = \frac{A}{r^2} \quad (73a)$$

Aceptando que el esfuerzo radial sobre el soporte es proporcional al desplazamiento radial de los puntos de la superficie de la cavidad, esto es:

$$G_r = \xi U \Big|_{r=R}$$

y suponiendo que la carga radial sobre el revestimiento es igual al esfuerzo radial en la superficie del túnel, se tiene que:

$$G_r \Big|_R = P + G_r^* \Big|_R = \xi U \Big|_R$$

por otra parte:

$$\epsilon_r + \epsilon_\varphi = -\frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^2} = 0 \quad (74)$$

Así, de las ecuaciones (68) y (73) se concluye que:

$$G_r^* = -2G \frac{A}{r^2} \quad (75)$$

y dado que:

$$G_r \Big|_R = P + G_r^* \Big|_R = \xi U \Big|_R = \xi \frac{A}{R}$$

entonces:

$$P - 2G \frac{A}{R^2} = \xi \frac{A}{R}$$

de donde:

$$A = \frac{PR^2}{\xi R + 2G} = \frac{PK}{\xi R} R^2 = \frac{PK}{\xi} R \quad (76)$$

El campo de desplazamiento y de deformación queda, entonces, descrito por las expresiones siguientes:

$$U = \frac{PK}{\xi} \left(\frac{R}{r} \right) \quad (77)$$

$$\epsilon_r = -\frac{PK}{\xi R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (78)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{PK}{\xi R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (79)$$

Los esfuerzos excepcionales pueden especificarse a partir de las

ecuaciones (68), (78) y (79), ya que:

$$\sigma_r^* = ZG \epsilon_r = -ZG \frac{P\kappa}{\xi R} \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} = P(\kappa-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \quad (80)$$

$$\sigma_{\varphi}^* = ZG \epsilon_{\varphi} = ZG \frac{P\kappa}{\xi R} \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} = P(1-\kappa) \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \quad (81)$$

Por lo tanto, el campo terciario de esfuerzos en un medio elástico y alrededor de un túnel queda caracterizado por las expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P + \sigma_r^* = P \left[1 - (1-\kappa) \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \right] \\ \sigma_{\varphi} &= P + \sigma_{\varphi}^* = P \left[1 + (1-\kappa) \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \right] \\ \sigma_z &= P + \sigma_z^* = P \end{aligned} \quad (82)$$

Caso en el que no existe soporte. Si después de excavado el túnel no se colocan soportes, se tiene que:

$$h=0$$

lo que implica que:

$$\xi=0$$

y, por lo tanto:

$$\kappa=0, \quad \frac{\kappa}{\xi} = \frac{R}{ZG}, \quad \frac{\kappa}{\xi R} = \frac{1}{ZG} \quad (83)$$

esto es, los campos secundarios de esfuerzos, deformacionales y desplazamientos pueden ser derivados directamente aplicando las ecuaciones (83) a las relaciones (59), (60), (61) y (67a) del campo terciario en un medio de Poynting-Thomson y a las expresiones (77), (78), (79) y (82) que caracterizan al campo terciario en un medio elástico. A continuación se enlistan las soluciones así obtenidas para ambos casos:

Modelo estándar

Modelo de Hooke

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \right] & \sigma_r &= \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \right] P \\ \sigma_{\varphi} &= P \left[1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \right] & \sigma_{\varphi} &= \left[1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \right] P \\ \epsilon_r &= -\frac{P}{ZG} \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} (1-e^{-\alpha t}) & \epsilon_r &= -\frac{P}{ZG} \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \\ \epsilon_{\varphi} &= \frac{P}{ZG} \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} (1-e^{-\alpha t}) & \epsilon_{\varphi} &= \frac{P}{ZG} \left(\frac{R}{r}\right)^{\kappa} \\ u &= \left[\frac{PR}{ZG} \right] \left(\frac{R}{r}\right) (1-e^{-\alpha t}) & u &= \frac{PR}{ZG} \left(\frac{R}{r}\right) \end{aligned} \quad (84)$$

De la comparación de estas expresiones se desprenden las siguientes conclusiones:

1. Inmediatamente después de la excavación de la cavidad, el estado

secundario de esfuerzos coincide con el predicho por la ley de Hooke; si el túnel no es revestido - si no existe alguna estructura de soporte que limite las deformaciones - no se presenta el fenómeno de relajación en el medio estándar, y por lo tanto, el campo de esfuerzos - es independiente del tiempo.

2. Los desplazamientos y deformaciones alrededor de la cavidad convergen asintóticamente, conforme $t \rightarrow \infty$, a los valores derivados para un medio elástico ideal.

Instalación de soportes. Una medida como ésta afecta substancialmente las condiciones esfuerzo-deformacionales.

Comparando las expresiones (59), (60), (61) y (67a) con las ecuaciones (77), (78), (79) y (82) se concluye lo siguiente.

1. El estado de esfuerzos en un sólido estándar en el instante en que se excava un túnel en su interior ($t=0$) coincide con el estado de esfuerzos que se desarrolla alrededor de una cavidad sin soporte excavada en un medio elástico.

2. Conforme transcurre el tiempo ($t \rightarrow \infty$), el estado de esfuerzos converge al estado terciario especificado por la ley de Hooke.

3. Por hipótesis, los desplazamientos y deformaciones en un medio estándar en el instante de la excavación ($t=0$) son nulos; sin embargo, conforme pasa el tiempo ($t \rightarrow \infty$), las deformaciones y desplazamientos convergen a aquellos obtenidos a partir de la teoría de la elasticidad.

Las relaciones formuladas entre estos dos modelos resaltan la importancia de las soluciones elásticas; ya que los estados inicial y final son, como se ha visto, funciones de las propiedades elásticas de la roca, y es sólo la transición entre uno y otro - trayectorias y ritmos de variación - la que depende de las constantes paramétricas reológicas (viscosidad y relajación).

IV.4.4. Repartición del esfuerzo entre la roca y el soporte. - Carga sobre el soporte. En las consideraciones anteriores se ha supuesto que las características del soporte son lineales; a continuación se examinarán con mayor detalle las condiciones que están implícitas en esta hipótesis.

Considérese al soporte como un tubo de pared gruesa de radios exterior e interior R y R_0 , respectivamente; las condiciones de carga se ilustran en la figura IV.9. La naturaleza del campo primario de esfuerzos, es tal que la carga radial que actúa sobre el tubo está distribuida uniformemente. Su intensidad (presión de roca):

$$R = \sigma_r \Big|_R$$

no se especificará por el momento.

En lo que sigue se supondrá que la estructura de soporte obedece la ley de Hooke y que el estado de deformación de ésta es plano.

La ecuación de equilibrio en forma polar es (véase (39a)):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = \rho \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - g_r \right]$$

misma que al despreciar las fuerzas de cuerpo (o en ausencia de éstas) y la aceleración de los "desplazamientos" y asumir uniformidad de las condiciones horizontales, toma la forma:

$$\frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{G_r - G_{\varphi}}{r} = 0 \quad (85)$$

debido a la simetría axial del problema $U_{\varphi} = 0$, por lo que de (40a):

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{U_r}{r} \quad (86)$$

Transformando las ecuaciones (43a) del capítulo II a coordenadas polares se obtiene que:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [G_r - \nu(G_{\varphi} + G_z)] \quad (87)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} [G_{\varphi} - \nu(G_z + G_r)] \quad (88)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [G_z - \nu(G_r + G_{\varphi})] \quad (89)$$

sin embargo, debido a que se ha supuesto un estado plano de deformación:

$$\varepsilon_z = 0$$

por lo tanto, de (89):

$$G_z = \nu(G_r + G_{\varphi}) \quad (90)$$

De (87) y (90):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [G_r - \nu G_{\varphi} - \nu^2(G_r + G_{\varphi})]$$

•,

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)G_r - \nu G_{\varphi}] \quad (91)$$

Así mismo, de (88) y (90):

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)G_{\varphi} - \nu G_r] \quad (92)$$

Por otra parte de las expresiones (42a) de capítulo II, escritas en forma polar, y de (86) se derivan las siguientes ecuaciones:

$$G_r = 2G \frac{\partial U_r}{\partial r} + (k - \frac{2}{3}G) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} \right) \quad (93)$$

$$G_{\varphi} = 2G \frac{U_r}{r} + (k - \frac{2}{3}k) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} \right) \quad (94)$$

De las ecuaciones (91) del capítulo II escritas en forma polar se tiene que:

$$\delta_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}$$

dado que se tiene simetría axial, $u_\varphi = 0$; por otro lado, se supone -- que $u_r = u_r(r)$ por lo que:

$$\delta_{r\varphi} = 0$$

Como:

$$\delta_{r\varphi} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\varphi}$$

entonces:

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

La relación entre coordenadas cartesianas y polares es:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

tomando derivadas se tiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

Sea $\Phi(x, y)$ una función, que en coordenadas polares toma la forma $\Phi(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, entonces:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi + \\ &+ \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi - \\ &- \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (96)$$

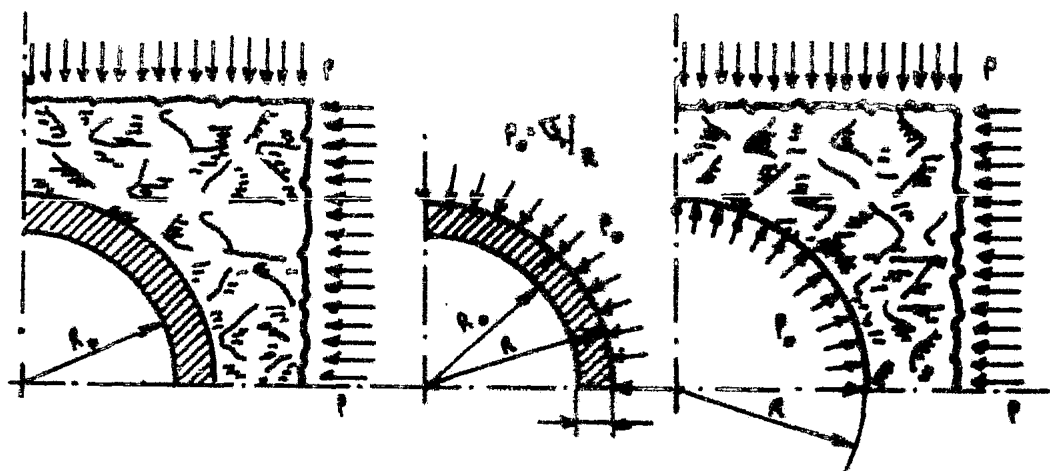


Figura IV.9. Fuerzas internas que actúan sobre la superficie de la cavidad y sobre el revestimiento.

Ahora bien:

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

Sumando (95) y (96) se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

lo que implica que:

$$\nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Phi$$

por lo que:

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right)$$

El siguiente desarrollo se elaborará en coordenadas cartesianas, - ya que el resultado que se obtendrá es general, e independiente del marco de referencia empleado, y por otra parte es mucho más simple - que el efectuado en coordenadas polares.

Como:

$$\epsilon_z = 0$$

entonces; de las expresiones (43a) del capítulo II:

$$\begin{aligned} G_2 &= \mu (G_x + G_y) \\ \epsilon_x &= \frac{1}{E} [G_x - \mu (G_y + G_z)] = \left(\frac{1+\mu}{E} \right) [(1-\mu)G_x - \mu G_y] \end{aligned} \quad (97)$$

$$\varepsilon_y = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \quad (97)$$

De las ecuaciones (91) (capítulo II):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (98)$$

Asumiendo que:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho q_x = \rho q_y = \rho q_z = 0$$

las expresiones (97a) del capítulo II se transforman en:

$$\nabla^2 \sigma = 0$$

Sin embargo, dado que se está manejando un estado plano de deformación:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (99)$$

de la expresión (40) del capítulo II se tiene que:

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \quad (100)$$

de (99):

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} \right) \quad (101)$$

Substituyendo (97) en (98) se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{G} \right) = \left(\frac{1+\mu}{E} \right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1-\mu)G_x - \mu G_y] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1-\mu)G_y - \mu G_x] \right\}$$

es decir;

$$\frac{E}{G} \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\mu \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2}$$

de esta última expresión y de las ecuaciones (100) y (101):

$$-\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} = -\mu \nabla^2 (G_x + G_y) + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2}$$

por lo que:

$$(1-\mu) \nabla^2 (G_x + G_y) = 0$$

y, finalmente:

$$\nabla^2 (G_x + G_y) = 0 \quad (102)$$

Sea $\bar{\Phi}(x,y)$ una función potencial, tal que:

$$G_x = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} ; \quad G_y = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x \partial y}$$

de esta definición y de la ecuación (102) se desprende que:

$$\nabla^4 \bar{\Phi} = 0 \quad (103)$$

Al transformar a coordenadas polares se tiene que:

$$\begin{aligned} G_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} \\ G_\varphi &= \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (104)$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

y debido a la simetría axial que presenta el problema ahora tratado:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

por lo que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0$$

considerese:

$$L(r) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

entonces:

$$\frac{\partial^2 L(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial L(r)}{\partial r} = 0$$

o

$$r \frac{\partial^2 L(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial L(r)}{\partial r} = 0$$

lo que se puede escribir como:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} L(r) \right] = 0$$

lo cual implica que:

$$r \frac{dL(r)}{dr} = c ; \quad c = \text{cte.}$$

de donde:

$$L(r) = \int \frac{c}{r} dr = c \ln r + A ; \quad A = \text{cte.}$$

es decir:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = c \ln r + A \Rightarrow r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = Ar + Cr \ln r$$

por tanto:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = Ar + Cr \ln r$$

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{2} r^2 + C \int r \ln r dr = \frac{A}{2} r^2 + \frac{C}{2} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + B ; \quad B = \text{cte.}$$

sean:

$$C_1^2 = \frac{A}{Z} ; C_2^2 = \frac{C}{Z} ; C_3^2 = B$$

entonces:

$$d\bar{\Phi} = \left(C_1^2 r + C_2^2 r \ln r + \frac{C_3^2}{r} \right) dr$$

lo que conduce a:

$$\bar{\Phi} = C_1 r^2 + C_2 r \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4 \quad (105)$$

que es la solución general de la ecuación biarmónica. De esta última expresión y de las ecuaciones (104) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 1) \\ \sigma_\varphi &= 2C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 3) \end{aligned} \quad (106)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

dado que:

$$u_\varphi = 0$$

y

$$u_r = f(r) \quad (107)$$

y como:

$$\varepsilon_z = 0$$

de (90) y teniendo en cuenta que ν_b es el módulo de Poisson del material que constituye el soporte:

$$\sigma_z = \nu_b (\sigma_r + \sigma_\varphi)$$

Por otra parte, de (91), (92) y (86) y llamando E_b al módulo de elasticidad del material del soporte, se tiene que:

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu_b}{E_b} [(1-\nu_b)\sigma_r - \nu_b\sigma_\varphi] = \frac{du_r}{dr} \quad (109)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1+\nu_b}{E_b} [(1-\nu_b)\sigma_\varphi - \nu_b\sigma_r] = \frac{u_r}{r}$$

Substituyendo (106) en (109), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dr} &= \frac{1+\nu_b}{E_b} \left[(1-\nu_b) \left\{ 2C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 1) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \nu_b \left\{ 2C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 3) \right\} \right] \end{aligned} \quad (110)$$

$$U_r = \frac{(1+\nu_b)r}{E_b} \left\{ (1-\nu_b) \left[2C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 3) \right] - \nu_b \left[2C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 1) \right] \right\} \quad (111)$$

Derivando (111) con respecto a r , se tiene que:

$$\frac{dU_r}{dr} = \frac{(1+\nu_b)}{E_b} \left\{ (1-\nu_b) \left[2C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 3) \right] - \nu_b \left[2C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 1) \right] \right\} + \frac{(1+\nu_b)r}{E_b} \left\{ (1-\nu_b) \left[\frac{2C_2}{r^3} + \frac{2C_3}{r} \right] - \nu_b \left[-\frac{2C_2}{r^3} + \frac{2C_3}{r} \right] \right\}$$

es decir,

$$\frac{dU_r}{dr} = \frac{1+\nu_b}{E_b} \left\{ (1-\nu_b) \left[2C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 5) \right] - \nu_b \left[2C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3 (2 \ln r + 3) \right] \right\} \quad (112)$$

Comparando (110) y (112):

$$C_3 (2 \ln r + 1) = C_3 (2 \ln r + 5)$$

por lo que:

$$C_3 = 0$$

por lo tanto:

$$G_r = 2C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (113)$$

$$G_\varphi = 2C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad (114)$$

las condiciones de frontera son:

$$G_r \Big|_R = P_0 \quad ; \quad G_r \Big|_{R_0} = 0$$

entonces:

$$\begin{aligned} 2C_1 + \frac{C_2}{R^2} = P_0 & \Rightarrow C_1 = \frac{P_0}{2} \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2 - R_0^2} \right) \\ 2C_1 + \frac{C_2}{R_0^2} = 0 & \Rightarrow C_2 = P_0 \frac{R^2 R_0^2}{R_0^2 - R^2} \end{aligned} \quad (115)$$

Substituyendo (113) y (114):

$$G_r^{\text{soporte}} = P_0 \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \left[1 - \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right] \quad (116)$$

$$G_{\text{soporte}} = P_0 \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \left[1 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right] \quad (116)$$

De (111) y (115) se obtiene que:

$$U_r = U = P_0 \frac{m_b + 1}{E_b m_b} \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \left(\frac{m_b - 2}{m_b} r + \frac{R^2}{r} \right)$$

por lo que los desplazamientos de los puntos con $r=R$ (puntos de la superficie de la cavidad) se obtienen como:

$$U|_R = P_0 \frac{m_b + 1}{E_b m_b} \frac{R}{R^2 - R_0^2} \left(\frac{m_b - 2}{m_b} R^2 + R_0^2 \right)$$

Introduciendo la expresión:

$$\xi = \frac{E_b m_b}{m_b + 1} \frac{R^2 - R_0^2}{R} \frac{1}{\frac{m_b - 2}{m_b} R^2 + R_0^2} \quad (117)$$

se tiene que, en función del coeficiente de rigidez del soporte,

$$U|_R = \frac{1}{\xi} P_0 = \frac{1}{\xi} G_r|_R$$

o,

$$G_r|_R = \xi U|_R$$

esto es, un soporte con simetría circular, que reacciona a la acción de cargas como un tubo de pared gruesa, posee características esfuerzo - desplazamiento lineales.

Transferencia de esfuerzos. La presión transferida es la integral de los esfuerzos transferidos, mismos que sólo pueden ser registrados después de excavado el túnel. Considérese la figura IV.10; los esfuerzos normales, presentes en el plano horizontal $x=0$ antes de la excavación, son de magnitud p , y son esfuerzos primarios. La perforación del túnel hace que los esfuerzos normales en un plano que pasa por el centro de la sección se incrementen en G_2 , y la integral de los incrementos del esfuerzo es (véase (84)):

$$\int_{r=R}^{\infty} G_2 dr = \int_R^{\infty} (G_2 - p) dr = pR \quad (118)$$

es decir, esto corresponde a la mitad del peso de la columna de roca de ancho $2R$, ubicada sobre la cavidad y que ha sido privada de su soporte por la excavación (siempre y cuando la presión primaria p se deba exclusivamente al peso propio de la roca); puesto de otra manera, la presión que actuaba en una de las mitades de una superficie -

de ancho $2R$ antes de efectuarse la excavación, aparece, después de hecha ésta, en uno de los lados de la cavidad, y la presión sobre la otra mitad en el otro lado, en forma de esfuerzos transferidos.

Caso sin soporte. Dado que los esfuerzos primario y secundario paralelos a la dirección en que crece ψ son:

$$G_{\psi,p} = P$$

$$G_{\psi,s} = P \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]$$

respectivamente, y como por (13):

$$G_{\psi}^* = G_{\psi,s} - G_{\psi,p}$$

entonces:

$$G_{\psi}^* = P \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

mismo que coincide con el encremento del esfuerzo G_2 ; por lo tanto:

$$\int_R^{\infty} G_2 dr = \int_R^{\infty} G_{\psi}^* dr = PR^2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{\infty} = PR$$

Instalación del soporte. Si en un túnel de radio R se instala un soporte con simetría circular y de espesor h , los esfuerzos transferidos - que se han de sumar a los esfuerzos primarios - se distribuirán entre la roca y el soporte de acuerdo con la ecuación:

$$PR = \int_R^R G_{\psi}^b dr + \int_R^{\infty} G_{\psi}^* dr = P_a^{\text{soporte}} + P_a^{\text{roca}} \quad (119)$$

donde, de (116):

$$P_a^{\text{soporte}} = \int_R^R P_0 \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \left[1 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right] dr \quad (120)$$

y de las expresiones (67a):

$$G_{\psi}^* = P \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \alpha (1 - e^{-\alpha t}) \right]$$

por lo que:

$$P_a^{\text{roca}} = \int_R^{\infty} \left[P \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \alpha (1 - e^{-\alpha t}) \right] \right] dr \quad (121)$$

dado que:

$$P_0 = G \Big|_R = P \left\{ 1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \alpha (1 - e^{-\alpha t}) \right] \right\} \Big|_R$$

por lo tanto:

$$P_0 = \alpha P (1 - e^{-\alpha t})$$

efectuando la integración de la expresión (120), la presión transferida al soporte se obtiene como:

$$P_2^{\text{soporte}} = \int_R^R P \alpha (1 - e^{-\alpha t}) \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \left[1 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right] dr$$

es decir:

$$P_2^{\text{soporte}} = \alpha P (1 - e^{-\alpha t}) \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \left[r - \frac{R_0^2}{r} \right]_R^R = \alpha P R (1 - e^{-\alpha t}) \quad (122)$$

y la presión transferida a la roca será:

$$P_2^{\text{roca}} = P R \left[1 - \alpha (1 - e^{-\alpha t}) \right] \quad (123)$$

En vista de la simetría circular de la distribución de esfuerzos, se puede pensar que la "carga" primaria en cualquier plano que contiene al eje del túnel permanece constante, y que la excavación de éste y la instalación de soportes sólo afecta la distribución de cargas.

En la figura IV.11 se ilustra la distribución de esfuerzos transferidos, y en la figura IV.12 se muestra la evolución en el tiempo de la presión transferida.

Implicaciones. De las expresiones (119) a (123), por una parte y de las figura IV.11 y IV.12 por otra, se obtienen las siguientes conclusiones.

1. En los puntos de cualquier plano que pase a través del centro del túnel, y en los que $r=R$, los esfuerzos transferidos se suman a los normales:

$$\int_{-R}^R P dr = 2P R = \int_{-R}^R G_{\psi}^*(r) dr + \int_R^{\infty} G_{\psi}^*(r) dr$$

esto es, los esfuerzos primarios que originalmente actuaban sobre la superficie a la que se privó de soporte, por la excavación, actúan, después de realizada ésta en la roca que se encuentra a los lados de la cavidad.

2. En el caso en que no existe revestimiento, la integral (suma) de los incrementos de esfuerzo, se toma sobre la roca circundante.

3. Al instalar soportes, el esfuerzo sobre la roca adyacente puede ser reducido, si la carga debida al esfuerzo transferido se reparte (distribuye) entre la roca y el revestimiento.

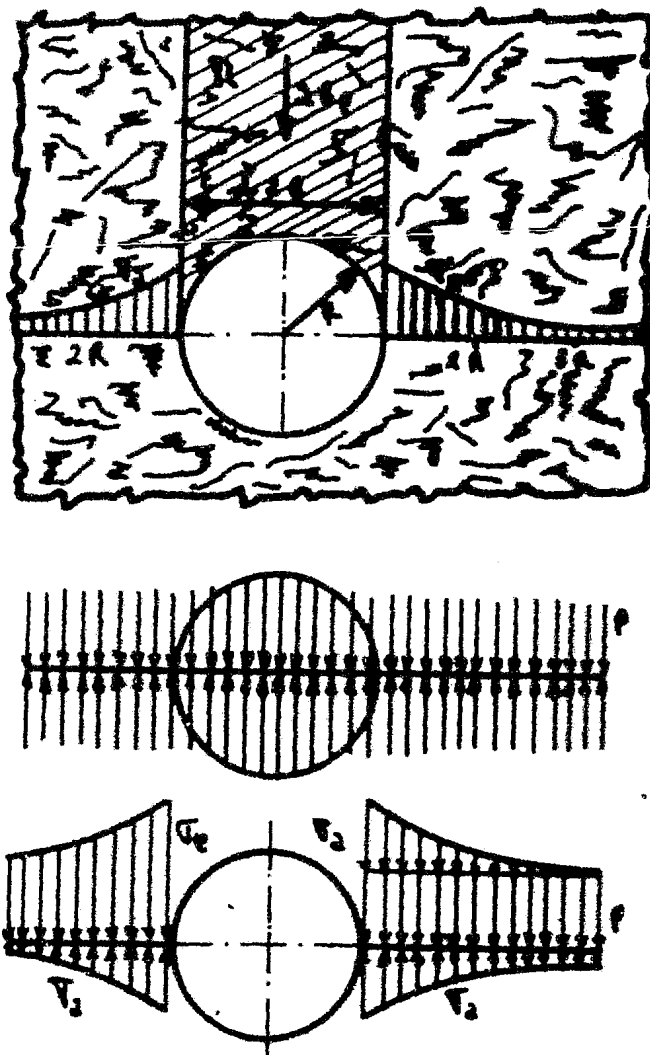


Figura IV.10. Esfuerzos transferidos inducidos por la excavación de un túnel.

4. En el instante de la excavación, $t=0$, toda la presión transferida es soportada por la roca circundante.

5. Conforme el tiempo pasa el revestimiento toma más de la sobrepresión, y así mismo, mientras las deformaciones y desplazamientos toman su curso ($t \rightarrow \infty$), la carga en los soportes aumenta tendiendo a un valor proporcional al coeficiente de interacción κ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2^{\text{soporte}} = \kappa PR$$

y al mismo tiempo, la carga sobre la roca decrece hasta el valor:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2^{\text{roca}} = (1-\kappa)PR$$

6. La carga total sobre roca y soporte es constante a lo largo del tiempo, e igual a la suma (integral) de los esfuerzos primarios que originalmente actuaban sobre la parte removida del plano que se considera; esta remoción es, de hecho, la excavación del túnel.

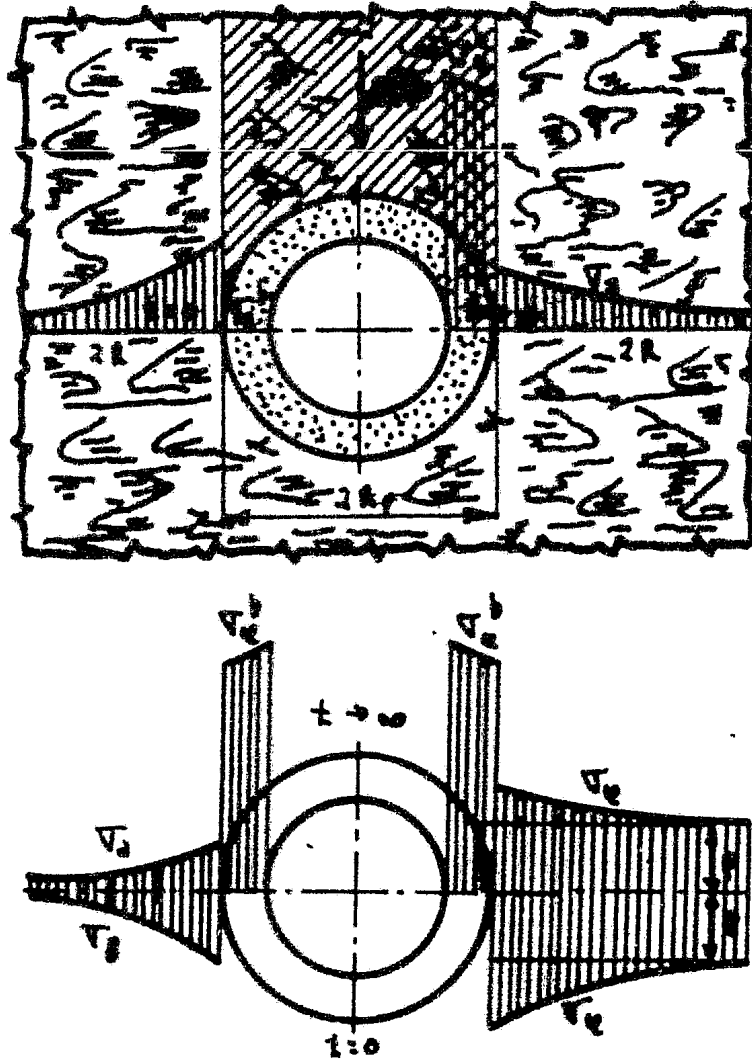


Figura IV.11. Evolución en el tiempo de los esfuerzos transferidos vs. distancia al eje del túnel.

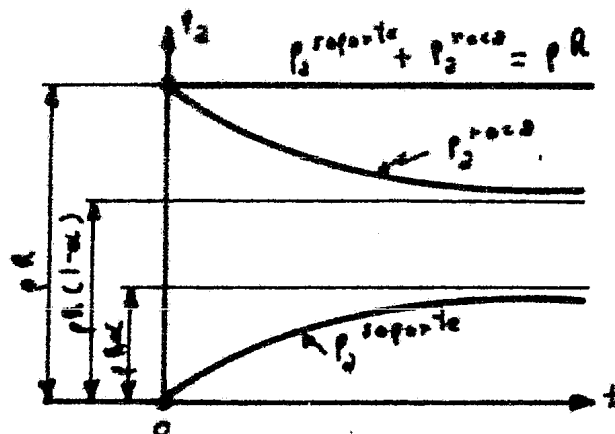


Figura IV.12. Evolución en el tiempo de los esfuerzos transferidos que actúan sobre la roca y el revestimiento.

IV.5. Estudio bidimensional del macizo elastoplástico.

IV.5.1. Como se ha visto anteriormente, mediante la teoría de la elasticidad se puede hallar la distribución de esfuerzos alrededor de la cavidad, en un terreno ideal que cumple la hipótesis en que se basa dicha teoría. Conocidas las esfuerzos, si se postula además la existencia de un criterio de rotura, se podría comprobar si existen zonas del terreno en las que se viole el criterio y que se encuentren en rotura.

En la zona en rotura los esfuerzos quedan limitados por el criterio de rotura y por lo tanto ha de producirse una acomodación de los esfuerzos. Si la zona en rotura es muy extensa, los resultados sin tener en cuenta esta acomodación pueden alejarse mucho de la realidad, ya que el comportamiento en el interior de dicha zona dista mucho del elástico supuesto.

Por ello si se quiere progresar en el conocimiento de estos estados es necesario recurrir a soluciones de tipo elastoplástico.

Fenner (1938) y Kastner (1949) estudiaron la formación de una zona plástica suponiendo que el terreno se comportaba como un cuerpo elastoplástico perfecto, con un determinado criterio de rotura (1). En la zona elástica la deformabilidad viene regida por las constantes elásticas E y ν del material. En la zona plástica se estudian independientemente los esfuerzos de las deformaciones. Las primeras se obtienen integrando el sistema completo formado por las ecuaciones de equilibrio interno y la condición de plasticidad más las condiciones de contorno (esfuerzos conocidos en la pared del orificio).

Los movimientos se determinan admitiendo, como, hipótesis simplificada que existe un cambio de volumen Δ en la zona plástica: muchas veces cero. Por último en todos los análisis rigurosos de que se tiene noticia se ha adoptado un coeficiente de empuje K_0 igual a la unidad.

De acuerdo con este modelo matemático, se produce un anillo plástico alrededor del orificio cuyo espesor depende de los parámetros geotécnicos del terreno (deformabilidad elástica y parámetros de resistencia), el esfuerzo primaria del terreno y de la presión de estabilización que se haya dado a la pared del orificio. Precisamente la presión de estabilización se define en el proyecto para obtener un anillo plástico de amplitud razonable.

En la zona plástica las líneas características son dos familias de espirales logarítmicas con polo en el centro del orificio. La zona plástica se extiende hasta donde los círculos de Mohr de esfuerzos dejan de ser tangentes a la línea de Mohr-Coulomb y pasan a estar totalmente dentro del dominio elástico. (figura IV.13).

(1) En general el criterio de Mohr-Coulomb y admitiendo que los esfuerzos principales extremas se producen en el plano estudiado.

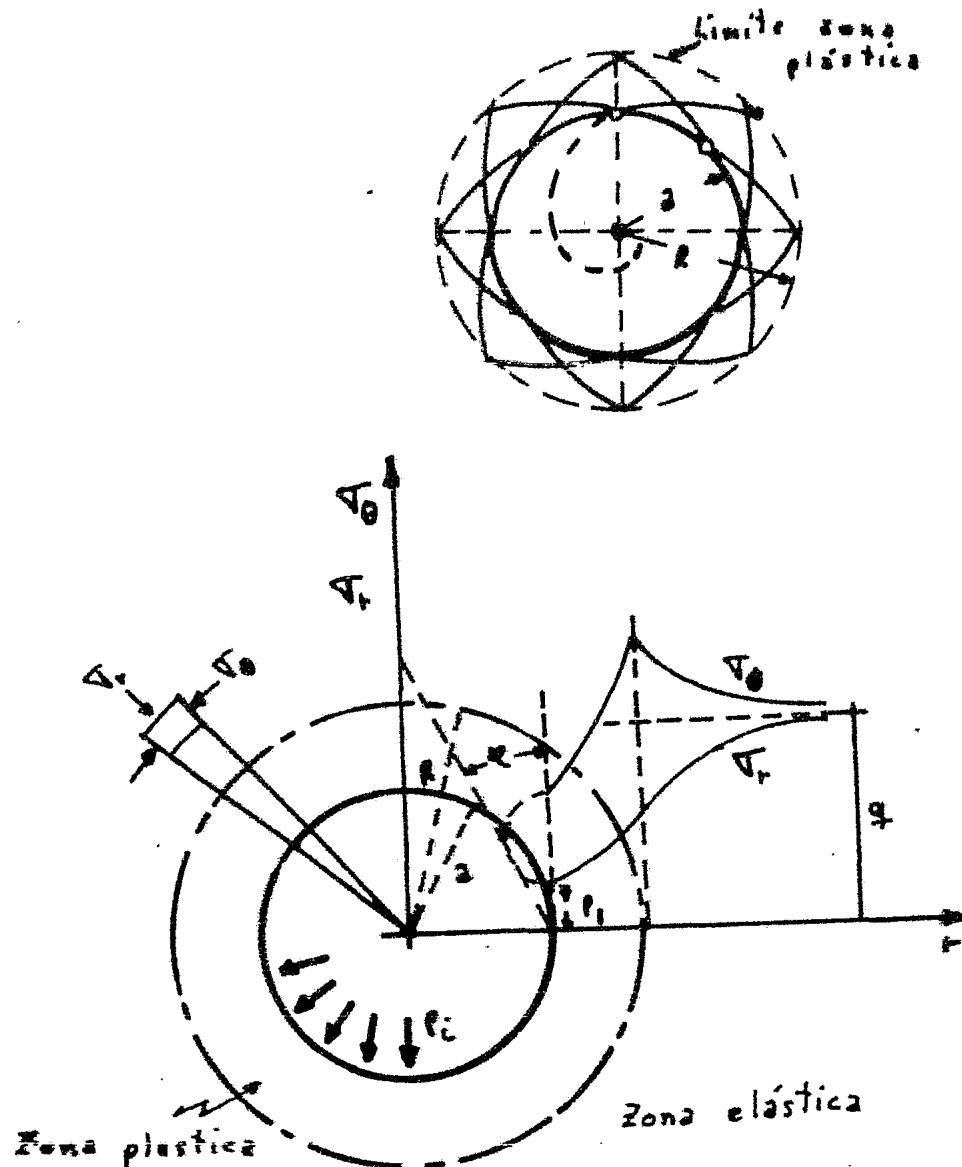


Figura IV.13. Cálculo de esfuerzos en un medio elasto-plástico.

En la zona plástica se verifican:
Las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\delta \sigma_r}{\delta r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (124)$$

y la condición de plasticidad

$$\sigma_\theta = \sigma_r \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2c \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (125)$$

- (1) Por tener el problema si, en el eje axial los esfuerzos σ_r y σ_θ son principales. El esfuerzo va aumentando desde un valor mínimo en el contorno, que puede ser cero si no hay presión interior en el orificio, y por lo tanto es el esfuerzo principal menor.

Eliminando σ_θ el sistema diferencial queda reducido a la ecuación única:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\sigma_r \sin \varphi}{r(1-\sin \varphi)} + \frac{2c \cos \varphi}{r(1-\sin \varphi)} \quad (126)$$

integrando esta ecuación entre a y r se llega a:

$$\frac{\sigma_r + c \cot \varphi}{p_i + c \cot \varphi} = \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1-\sin \varphi}} \quad (127)$$

siendo p_i la presión interior de estabilización que puede existir contra la pared del orificio.

Las ecuaciones (125) y (127) definen los esfuerzos σ_r , σ_θ en la zona plástica $a \leq r \leq R$, siendo R el radio hasta donde se extiende esta zona.

En la zona elástica ($r > R$), la distribución de esfuerzos se obtiene considerando un orificio de radio R con una presión interior $p_i = \sigma_r$ (valor que toma σ_r en la zona plástica para $r=R$):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = q \left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 \mp \sigma_r \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] = q \left[1 \mp \sin \varphi \left(\frac{R}{r}\right)^2 \mp c \cos \varphi \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right]$$

para $R=r$ se tiene

$$\sigma_r = q(1-\sin \varphi) + c \cos \varphi \quad (128)$$

que llevada a (127) se obtiene un radio de plastificación:

$$R = a \left[(1-\sin \varphi) \frac{q+c \cot \varphi}{p_i+c \cot \varphi} \right]^{\frac{1-\sin \varphi}{2 \sin \varphi}} \quad (129)$$

El corrimiento u_r en el contorno del orificio se puede determinar suponiendo que en la zona plástica no hay cambio de volumen ($\Delta = 0$) y que todos los corrimientos en dicha zona se deben al corrimiento elástico u_p que se producen en la interfaz entre zonas ($r=R$).

$$2\epsilon u_2 - u_2^2 = R u_r - u_r^2 \quad (130)$$

Teniendo en cuenta el valor de u_r , se llega a:

$$\frac{u_2}{a} = 1 + \sqrt{\frac{1}{1+A}} = \frac{1}{2}A \quad (131)$$

con

$$A = 2(1+\nu) \frac{q+c \cot \varphi}{E} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \sin \varphi \quad (132)$$

Vesic ha estudiado el caso en que se produce una expansión Δ propo-
niendo una ecuación análoga a (130):

$$\sum R u_R - u_R^2 + \Delta R^2 = \sum z u_z - u_z^2 + \Delta z^2 \quad (133)$$

en la que despreciando los términos u_z^2 y u_R^2 se obtiene

$$\frac{u_z}{z} = \frac{\Delta}{z} + \Delta \left[\left(\frac{R}{z} \right)^2 - 1 \right] \quad (134)$$

Δ debe considerarse como un valor medio correspondiente a la zona plástica. En realidad el valor de Δ varía con r de forma que en el cálculo del cambio de volumen se debería considerar, obteniéndose una ecuación diferencial que, integrada, proporcionaría el valor de u_z . Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la complicación analítica no está justificada en absoluto ya que la relación de Δ con r es forzosamente inexacta. La consideración de un valor medio para Δ es lo suficientemente aproximada.

Las fórmulas anteriores son válidas únicamente para el caso de dilatación positiva ($\Delta > 0$). El caso de dilatación negativa ($\Delta < 0$) ha sido estudiado por Palmer y Mitchell (1971) para una cavidad cilíndrica. En general este caso tiene poca aplicación a los problemas reales de túneles.

En el apartado IV.5.2 se resumen los principales resultados para terreno coulombiano con cohesión c y ángulo de rozamiento ϕ distintos de cero.

El caso material puramente cohesivo tiene gran interés especialmente para análisis a corto plazo en terrenos arcillosos. En el apartado IV.5.3 se presentan las conclusiones más importantes. Estas conclusiones pueden obtenerse directamente o partiendo de los resultados del material coulombiano haciendo tender ϕ a cero.

En función de la presión de estabilización P_i puede determinarse el radio R_d de la zona plastificada. Se deben prever presiones P_i tales que el radio de plastificación se mantenga dentro de valores adecuados. Este concepto de valor adecuado es muy complejo. Por lo pronto está ligado con la magnitud de la deformación en las paredes del túnel.

Muchos materiales tienen una resistencia de pico, con la que se llega a la ruptura y una resistencia de piso, con la que se llega a la rotura y una resistencia residual, después que se han producido grandes deformaciones. Por otra parte el material puede tener características reológicas que lo alejen de la aternicidad y que sus parámetros de resistencia se vayan reduciendo con el tiempo, o sencillamente que se produzca una degradación del material. En este caso en la zona plastificada habrá que considerar que los parámetros de resistencia pueden bajar hasta unos valores c_r y ϕ_r menores que los c y ϕ iniciales.

En el apartado IV.5.4 se señalan ahora los resultados más interesantes que corresponden a esta hipótesis.

Bollo, Haer y Muzás (1963) y Muzás (1971 y 1972) han realizado un estudio aproximado para el caso en que K_0 sea distinto de 1, supo-

niendo que el radio de plastificación que se alcanza en cada dirección es el que se obtendría si la presión actuante fuera isotrópica y de valor correspondiente a la presión normal que actúa en esa dirección, es decir:

$$\frac{q_0}{q} = \frac{1+k_0}{2} - (1-k_0) \cos 2\theta$$

IV.5.2 Estado tensodeformacional alrededor de un orificio circular en un semiespacio elasto-plástico coulombiano ($c \neq 0$; $\varphi \neq 0$).

Radio de plastificación:

$$\frac{R}{a} = \left[(1 - \sin \varphi) \frac{q + c \cot \varphi}{p_i + c \cot \varphi} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}}$$

Esfuerzos en la zona plástica $a \leq r \leq R$

$$\frac{\sigma_r + c \cot \varphi}{p_i + c \cot \varphi} = \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}}$$

$$\frac{\sigma_\theta + c \cot \varphi}{p_i + c \cot \varphi} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}}$$

Esfuerzos en la frontera $r=R$:

$$\sigma_r = q(1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi; \quad \sigma_\theta = q(1 + \sin \varphi) + c \cos \varphi$$

Zona elástica $r \geq R$:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = q \left[1 \mp \sin \varphi \left(\frac{R}{r} \right) \mp c \cos \varphi \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]$$

Corrimientos en la superficie del orificio:

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{1+A} - 1 \quad \frac{\Delta V}{V} = 1 + \sqrt{\frac{1}{1+A}}$$

$$\frac{\Delta V}{V_n} = A$$

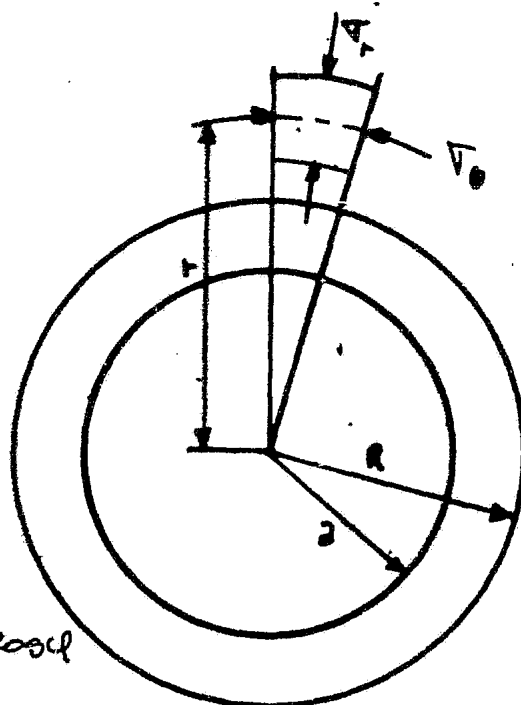
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A}{1+A}$$

$$A = 2(1+\nu) \frac{q + c \cot \varphi}{E} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \sin \varphi$$

a_n radio del orificio después de la deformación.

IV.5.3. Estado tensodeformacional alrededor de un orificio circular en un semiespacio elasto-plástico perfecto.

Radio de plastificación:



$$\frac{R}{r} = \exp \frac{1}{2} \left(\frac{q - P_i}{c} - 1 \right)$$

Esfuerzos en la zona plástica $a \leq r \leq R$:

$$\sigma_r = P_i + 2c \ln \frac{r}{a}$$

$$\sigma_\theta = P_i + 2c \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right)$$

Esfuerzos en la frontera $r=R$:

$$\sigma_r = q - c \quad ; \quad \sigma_\theta = q + c$$

Esfuerzos en la zona elástica $r \geq R$:

$$\sigma_r = q - c \left(\frac{a}{r} \right)^2 \exp \left(\frac{q - P_i}{c} - 1 \right)$$

$$\sigma_\theta = q + c \left(\frac{a}{r} \right)^2 \exp \left(\frac{q - P_i}{c} - 1 \right)$$

Corrimientos en la superficie del orificio:

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{1+A} - 1 \quad \frac{\Delta a}{a} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+A}}$$

$$\frac{\Delta V}{V_n} = A \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{A}{1+A}$$

$$A = 2c \frac{H\nu}{E} \left[1 - \frac{(1+\nu)c}{2E} \right] \exp \left(\frac{q - P_i}{c} - 1 \right)$$

IV.5.4. Estado tensodeformacional alrededor de un orificio circular en un semiespacio elasto-plástico coulombiano con resistencia de pico y residual.

Radio de plastificación:

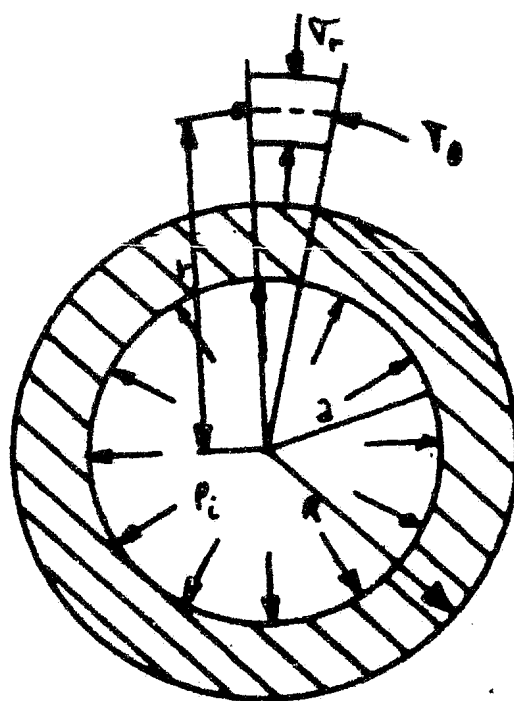
$$\frac{R}{a} = \left[\frac{q - c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} + C_r \frac{\cot \phi_r}{1 - \sin \phi}}{P_i + C_r \cot \phi_r} \right]^{\frac{1 - \sin \phi}{2 \sin \phi_r}}$$

Esfuerzos en la zona plástica: $a \leq r \leq R$:

$$\frac{C_r + C_r \cot \phi_r}{P_i + c \cot \phi_r} = \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi_r}{1 - \sin \phi_r}}$$

$$\frac{C_\theta + C_r \cot \phi_r}{P_i + c \cot \phi_r} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi_r}{1 - \sin \phi_r}}$$

Esfuerzos en la frontera:



Para $r=R^+$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = q (1 \mp \sin \varphi) \mp c \cos \varphi$$

Para $r=R^-$

$$\sigma_\theta = \frac{2C_r \cos \varphi_r}{1 - \sin \varphi_r} + \frac{H \sin \varphi_r}{1 - \sin \varphi_r} [q(1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi]$$

Referencias.

- (1) Cs. Asszonyi; R. Richter. The continuum theory of rock mechanics. Series on rock and soil mechanics. Trans Tech Publications. 1979
- (2) Dr. Sadhu Singh. Theory of Elasticity. Khanna Publishers, Delhi-6. 1979.
- (3) J. M. Rodríguez Ortiz y A. A. Serrano González. Capítulo 17, título: Obras subterráneas, libro Geotécnica y Cimientos III. ed. - Rueda. 1980.

CAPITULO V. ANALISIS Y DISEÑO DE TUNELES EN ROCA

V.1. Cálculo estructural del revestimiento de túneles

Cuando y como revestir un túnel, es uno de los problemas más difíciles y controvertidos en la ejecución de obras subterráneas. A la dificultad de estimar las "acciones" que debe soportar el revestimiento, se une la de determinar las reacciones que el terreno pueda proporcionar. Puesto que si ambas resultaran conocidas, el cálculo del revestimiento no presentaría más problemas que el de una estructura, - normalmente simple, de la que se podría hablar de sus coeficientes - de seguridad con la misma certeza, al menos, que se tiene cuando se trata por ejemplo, de un edificio.

Apesar de las inseguridades inherentes al estudio teórico de los problemas de la estática de túneles, es indiscutible la necesidad de realizar comprobaciones numéricas. Las decisiones sobre la construcción de túneles y galerías no puede ni deben tomarse solamente a base de hechos experimentales. Desgraciadamente no se dispone de un método reconocido para el dimensionamiento de construcciones subterráneas, y los procedimientos actuales particularizan el problema de modo que sólo contemplan aspectos muy parciales del mismo.

Como en cualquier otro problema de interacción suelo estructura, - el tratamiento resulta muy complejo, pero lo es más en este caso, no sólo debido a que los procedimientos de ejecución influyen decisivamente sobre esa acción conjunta, sino porque envuelve un proceso de descarga en el terreno que se encuentra poco estudiado, y porque ha de partirse de un estado de esfuerzos, llamado primario, prácticamente desconocido. Baste recordar el diferente comportamiento de las probetas de roca rotas en compresión y en extensión, por no hablar del problema tridimensional, o de los que plantea una rotura por tensión pura con una liberación instantánea de esfuerzos, y separación de bordes, como puede ser el caso de los llamados "golpes de montaña". Por consiguiente, en tanto los esquemas físicos de partida sean los

simplisísimos actuales, lo lógico es construir sobre ellos al modo como lo hacen las ciencias razonables puras. Es en la confrontación final de los resultados con la realidad, en la que habrá que detenerse y vasilar, pero no en la etapa previa de construcción de las teorías.

En la realidad, cualquier carga que pueda actuar sobre el revestimiento se debe, exclusivamente, a una o más de las siguientes cuatro causas:

1. La modificación esfuerzo-deformacional producida por el avance del frente.
2. El comportamiento variable de la roca con el tiempo.
3. La variación de las condiciones hidráulicas producida por la presencia del túnel.
4. La colocación de nuevas cargas.

Pero estas cargas que debe resistir el revestimiento se verán afectadas por la interacción con el terreno, es decir, una vez instalada, la estructura de soporte no puede estudiarse como una estructura independiente, y ha de procederse a una modelización del problema, que no siempre resulta fácil.

Según Kovari, los tres elementos principales de cada método de dimensionamiento son:

- formación de modelos
- operación de cálculo
- formulación de un criterio de dimensionamiento.

La formación de modelos incluye todo el proceso de idealización de la realidad. Consciente o inconscientemente se confeccionan modelos para representar el comportamiento de los materiales y para determinar la magnitud de las acciones. Para poder terminar el análisis, los resultados deberán satisfacer determinados criterios, normalmente derivados de las condiciones exigidas a los materiales en cuanto a su resistencia, de la inestabilidad del conjunto, y de las deformaciones admisibles.

Si se sintetizan los métodos de cálculo según las ideas básicas en la formación de los modelos, pueden dividirse en tres grupos:

1. Teoría del equilibrio límite.
2. Teorías de las zonas plásticas.
3. Métodos esfuerzo deformacionales.

Las teorías del equilibrio límite, o de las cuñas de rotura, parten de la base de que un determinado volumen de terreno o roca se separa en la zona de la cave del resto de la masa, y carga directamente con su peso propio sobre el revestimiento. Para la intensidad y distribución de esta carga, se han dado multitud de valores más o menos experimentales teniendo y sin tener en cuenta las dimensiones de la cavidad y/o su profundidad relativa. Como el revestimiento en las obras bien ejecutadas está pegado al terreno, el apoyo de la bóveda puede tomarse en cuenta mediante cargas horizontales, o mediante apoyos elásticos, normalmente constituidos por muelles individuales de acuerdo con la teoría del coeficiente de balasto, que, de algún modo, rompen la continuidad de la masa. A su vez, esto puede evitarse si se considera el problema bidimensional y se estudia el revestimiento inmerso en una placa elástica. En ambos casos, el ángulo de apertura del sector libre puede elgirse de forma que en el punto frontera no haya transmisión de esfuerzos entre el terreno y el revestimiento.

En todas estas teorías, el efecto portante se atribuye a la bóveda, por lo que el problema se simplifica de forma que los momentos, esfuerzos normales y deformaciones del revestimiento resultan fácilmente calculables, de modo que el dimensionamiento del mismo (espesor y resistencia) puede hacerse mediante la correspondiente comprobación de resistencia. Sin embargo, lo que se podría llamar efectos secundarios no lo son tanto en este caso y así, por ejemplo, la presencia del rozamiento entre el terreno y el revestimiento, que solamente pueden tener en cuenta el tercer grupo de modelos, resulta tan importante como el efecto de las inseguridades en la determinación del módulo de elasticidad del terreno o la adopción de los coeficientes de balasto en función de éste. Los esfuerzos normales, que son máximos en hastiales si no hay rozamiento, resultan máximos en clave si se tiene en cuenta dicho efecto.

El modelo de muelles puede decirse que es el más simple y más antiguo de los que utilizan un ordenador para los cálculos. Resulta un procedimiento muy barato de estudiar los efectos relativos de diferentes hipótesis de carga y distintas configuraciones del revestimiento. No obstante sus deficiencias de base que acabamos de comentar, resulta muy razonable su empleo para un estudio paramétrico, aunque no debe olvidarse que cualquier revestimiento proyectado de acuerdo con los esfuerzos resultantes de este tipo de análisis, se basa en cálculos "sospechosos". Entre otras cosas, las únicas propiedades del terreno que suelen necesitarse son las elásticas (incluso para comportamientos anisótropos), y hay que reconocer que los geotécnicos las facilitan con cierta frivolidad. Está claro que se necesitan algunos valores para empezar el cálculo, pero es también necesario que la geotecnia siga presente cuando se concluya.

El segundo grupo en que se han dividido los métodos de cálculo actuales es el de la teoría de las zonas plásticas. A diferencia del grupo anterior, éste considera como verdadera obra portante al terreno mismo, simulando el revestimiento mediante una presión interior, denominada normalmente resistencia del soporte. El lento avance del material sobre el hueco y la compresión del terreno trata de explicarse mediante fenómenos de rotura. El modelo está representado por una placa en estado de deformación plana sometida a las cargas correspondientes al estado de esfuerzos primario y la resistencia del soporte. En la hipótesis de comportamiento elástico del material de la placa se determina el campo de esfuerzos según la teoría clásica y se comprueba a continuación en que zonas de la placa se han sobrepasado las condiciones de ruptura, generalmente definidas según el criterio de Mohr-Coulomb, y estas zonas se denominan plásticas. En realidad, el verdadero campo de esfuerzos, considerando las deformaciones plásticas, sólo puede determinarse analíticamente en condiciones de simetría axial; en todo los demás casos la definición de zona plástica es la ficticia que se ha mencionado anteriormente. En general, su forma depende de la resistencia al esfuerzo cortante del material, del estado primario de esfuerzos y de la intensidad de la presión interior, cuya determinación es el objeto principal de estos cálculos. Una vez obtenida esta resistencia del soporte necesaria para limitar adecuadamente el desarrollo de las zonas plásticas, el revestimiento se dimensiona para esta carga con las fórmulas para tubos delgados.

Los diferentes criterios para limitar dichas zonas plásticas son los que diversifican estos métodos pero, como se dijo, la idea básica de todos ellos es la limitación de estas zonas.

Cuando se abre el túnel en un material heterogéneo, las dificultades empiezan ya con la determinación del estado primario de esfuerzos, pues incluso las medidas "in situ" proporcionan escasa información acerca del complicado estado de esfuerzos en la zona de la obra. Las posibles variaciones de los esfuerzos a lo largo de los bordes del futuro modelo estático, pueden ser muy importantes sobre todo en el caso de los esfuerzos horizontales, debiéndose conformar con unos valores medios. A continuación, también ha de simplificarse el modelo del material para tratarlo como cuerpo isótropo y homogéneo. Si el estado primario no es hidrostático, ha de permitirse que los círculos de Mohr en las zonas plásticas corten la línea de resistencia intrínseca, con la que finalmente se llega a la determinación de dicha zona.

En esta misma línea de comparación y limitación de las zonas plásticas se encuentran muchas de las teorías sobre el efecto de anclajes y bulonajes en los túneles. Al estado de esfuerzos secundario se superpone el creado por los anclajes, estimado con independencia, y se comparan las "zonas plásticas" antes y después del bulonado. Desde el punto de vista del rigor científico todos estos procedimientos resultan anatemizables, pero se insiste en que la duda y vacilación han de reservarse para la confrontación final de resultados y no para esta fase previa de construcción de teorías.

Se tiene, por último, los métodos esfuerzo-deformacionales, utilizados tanto analíticamente como a través del empleo de los elementos finitos.

En principio, si el revestimiento fuera infinitamente flexible pue de contarse con una interacción total con el terreno, no se producirían momentos flexionantes sino sólo esfuerzos normales y la excavación del terreno produciría unos corrimientos del revestimiento hasta que se igualaran las presiones actuantes (o hasta que se produjera el colapso del túnel, Peck, 1969). En el extremo opuesto, si el revestimiento fuera infinitamente rígido, puede suponerse que no habría ninguna interacción suelo-estructura, y podría dimensionarse para un conjunto dado de cargas exteriores.

En este caso, la excavación del terreno dentro del túnel no induciría deformaciones del revestimiento y, por consiguiente, efecto sobre la roca circundante. De forma aproximada, si se supone un túnel circular, el valor medio del esfuerzo normal sería (Peck, 1969):

$$N = \frac{1}{2} (1 + K_0) \delta H R$$

y los momentos en clave y arranques:

$$|M_c| = |M_a| = \frac{1}{4} (K_0 - 1) \delta H R^2$$

donde δ es la densidad del terreno, H la profundidad del centro del túnel, R el radio del mismo y K_0 el coeficiente de empuje al reposo.

Pero todos los revestimientos tienen una rigidez intermedia, que u

nida a la de la roca controlan las deformaciones y producen una redistribución y disminución de momentos. En los estudios de Burns y Richard (1964) y Hoeg (1968) la rigidez relativa del revestimiento y la roca se introduce mediante dos parámetros, denominados razones de compresibilidad y flexibilidad, que se definen por las relaciones

$$C = \frac{\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}}{\frac{E_r t}{(1-\mu_r^2)R}} \quad ; \quad F = \frac{\frac{E}{1+\mu}}{\frac{6E_r I_r}{(1-\mu_r^2)R^3}}$$

donde C es la razón de compresibilidad, F la razón de flexibilidad, E, E_r son los módulos de elasticidad de la roca y el revestimiento, respectivamente, μ y μ_r los módulos de Poisson, I_r la inercia de la sección del revestimiento, t el espesor y R el radio del túnel.

Los momentos que se producen son principalmente funciones de F y K₀, mientras que los esfuerzos normales lo son de C y K₀. Sus soluciones, son válidas para túneles profundamente enterrados:

$$N_0, N_2 = \left[\frac{1}{2}(1+K_0)b_1 \mp \frac{1}{3}(1-K_0)b_2 \right] \times 4R$$

$$M_0, M_2 = \pm \frac{1}{6}(1-K_0)b_2 \times HR^2$$

donde: $b_1 = 1 - a_1$; $b_2 = 1 + 3a_2 - 4a_3$; $a_1 = \frac{(1-2\mu)(C-1)}{4(1-2\mu)C}$ y

$$a_2 = \frac{1+2F-2\mu}{5+2F-6\mu} \quad ; \quad a_3 = \frac{2F-1}{5+2F-6\mu}$$

si se admite el contacto perfectamente liso y

$$a_2 = \frac{(1-2\mu)(1-C)F - \frac{1}{2}(1-2\mu)^2 C + 2}{24}$$

$$a_3 = \frac{[1 + (1-2\mu)C]F - \frac{1}{2}(1-2\mu)C - 2}{24}$$

siendo

$$a_4 = [3 - 2\mu + (1-2\mu)C]F + \left(\frac{5}{2} - 8\mu + 6\mu^2\right)C + 6 - 8\mu$$

si se supone el contacto perfectamente rugoso.

Hay que hacer notar que en todos estos casos se admite que el revestimiento actúa como si estuviera colocado antes de la ejecución del túnel, lo que sólo resulta razonable bajo ciertas condiciones, como luego se comentará, puesto que se admite que el estado primario del macizo no se modifica.

Por otro lado, el auge de los elementos finitos ha permitido analizar toda una serie de nuevos parámetros que facilitan la aproximación del modelo a la realidad (siempre con la difícil complejidad de estimar valores para dichos parámetros), aunque debe señalarse que lo más destacable de los mismos quizás sea su particularidad, es decir,

la resolución de un problema concreto que, en la mayoría de los casos resulta de difícil o imposible generalización.

De todo lo hasta aquí expuesto, solamente dos cosas se saben con exactitud:

1. El borde del perfil no tiene esfuerzos radiales ni cortantes. Es decir, son nulos los esfuerzos secundarios G_r y τ_{er} .

2. A una distancia suficientemente grande de la perforación, el estado secundario de esfuerzos coincide con el primario.

Todo lo demás son datos más o menos medibles, como el estado primario de esfuerzos, los parámetros constitutivos del material y las ecuaciones reológicas del mismo. Si existe revestimiento, son conocidos la rigidez del mismo, la distancia al frente y el intervalo de tiempo entre excavación y ejecución de aquel, pero resultan incógnitas los esfuerzos secundarios en el borde G_r y τ_{er} .

Basándose en estos datos la teoría debe proporcionar los resultados que se buscan, que son normalmente los esfuerzos y corrimientos del revestimiento, y el estado esfuerzo-deformacional del macizo.

Con esta formulación del problema queda claro lo poco que puede obtenerse con exactitud y cuanto ha de ser objeto de medición. Pues si en una galería de ensayo pudiera observarse el comportamiento de un prototipo para diferentes modos de construcción, se obtendrían directamente los resultados deseados. A su vez, estos resultados pueden analizarse y reobtenerse en forma numérica, con lo que es posible comprobar que teorías se ajustan más a la realidad. Y, siguiendo este proceso inductivo, se llegaría, tal vez, a una resolución general del problema.

Estrictamente hablando, el revestimiento es un elemento estructural, y una vez establecido para qué debe proyectarse, la tarea no debería ser más intratable que para otro tipo de estructuras. Los métodos de proyecto basados en el concepto de estado límite con una eficaz ayuda para definir áreas de relativa seguridad. Pero: ¿cuáles son los estados límites en el proyecto de un túnel?, ¿cuándo debe decirse que un túnel ha colapsado?. Estos conceptos no están, por ahora, suficientemente claros.

Por ejemplo, un revestimiento de un túnel circular es una estructura muy estable, y en muy pocos casos prácticos podrán las cargas producir roturas por pandeo o corte. Con ductilidades muy pequeñas pueden formarse rótulas plásticas, pero muchas rótulas no quieren decir rotura (piénsese, por ejemplo, en todos los túneles revestidos con dovelas, que poseen esas articulaciones de nacimiento). Por tanto ¿bataría con proyectar cuidadosamente contra el pandeo por esfuerzos normales, para definir un estado límite o colapso del túnel?. Las excentricidades del esfuerzo normal se reducirían al aumentar éste, y, según opinión de Curtis y Rock (1978), los estudios muestran que, bajo una gran variedad de condiciones, la rigidez a flexión del revestimiento sólo tiene un efecto: aumentar su costo.

Por otro lado, excepto en materiales muy blandos, el revestimiento controla mucho mejor las medidas perimetrales de un túnel que la forma de éste. En realidad la forma de un túnel depende principalmente de lo que se puede llamar "estados límites de servicio", como pueden ser la posibilidad de roturas locales, grietas, etc. producidas por el desarrollo de rótulas plásticas. La estanqueidad es un aspecto --

del proyecto del túnel difícil de conseguir; la cantidad de agua -- que entra en un túnel debería también considerarse como un estado límite de servicio (quizá con el criterio económico de comparar el costo de un sellado con el de un agotamiento permanente), o, viceversa, la cantidad que se está en disposición de permitir que salga y escape de la conducción.

Como resumen, pueden establecerse las siguientes directrices para el proyecto del revestimiento:

1. Las reglas empíricas adecuadamente basadas en la experiencia son un buen punto de partida para comenzar un proyecto. Su mayor inconveniente estriba en la naturaleza generalmente subjetiva de los parámetros que las clasifican, por lo que es difícil estar seguros de que se aplican correctamente.

2. Realizar estudios paramétricos con el método analítico más simple de que se disponga y que pueda tener en cuenta las principales circunstancias que afecten al revestimiento particular de que se trate.

3. Tratar de aplicar procedimientos más refinados de cálculos si pueden aportar un mejor conocimiento del comportamiento esperable -- del túnel.

4. Las decisiones finales deben tomarse en base a la experiencia y al juicio del ingeniero, ayudado por las conclusiones que hayan podido derivarse de los cálculos analíticos. Cuanto más cerca del conocimiento físico del terreno consiga llegar el proyectista, tanto mejores resultarán sus decisiones.

Finalmente, se debe recalcar que el estado actual de los modelos matemáticos para el estudio de túneles no es tan bueno como en otras ramas de la ingeniería civil.

V.2. Cálculo del revestimiento.

V.2.1. Galerías sin revestir. Sólo en rocas estables en las que puede admitirse un comportamiento elástico, es posible dejar la roca sin revestir.

En este caso los esfuerzos en el macizo se determinan añadiendo a los esfuerzos establecidos después de abierta la excavación, los producidos por la presión interior del agua.

Los esfuerzos circunferenciales y radiales debidos al agua son iguales en valor absoluto en todos los puntos del macizo, pero tienen -- signo contrario. Alcanzan su máximo en la superficie de la galería y este máximo es la presión interior.

V.2.2. Galerías revestidas.

1. Revestimiento de concreto sin armar. Si a pesar del buen comportamiento mecánico del terreno no son admisibles las pérdidas de agua, ya porque su caudal sea excesivo, ya porque el agua degrade la roca o porque por razones económicas haya que mejorar la rugosidad, se impone disponer un revestimiento. Actualmente los revestimientos son en general de concreto. Mientras que el concreto no muestre grietas paralelas al eje de la galería colaborará en la absorción de la presión interior en la medida de su capacidad elástica de deformación. Si el concreto está agrietado, no sirve más que para transmitir los esfuerzos radiales a la roca, la cual tomará por sí sola todos los esfuerzos tangenciales.

Suponemos ahora que el concreto no está agrietado y en todas partes está pegado a la roca y vamos a calcular los esfuerzos que aparecen en el concreto y en la roca, cuando hay simetría axial (figura V.1):
Expresando el equilibrio de esfuerzos a lo largo de un radio y suponiendo que el material es elástico se llega a

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + r \frac{dU}{dr} - U = 0$$

que integrada da, para los corrimientos la expresión

$$U = Br + \frac{C}{r}$$

se tiene en el concreto:

$$U_h = B_h + \frac{C_h}{r}$$

$$C_{\theta,h} = \frac{E_h}{1-\nu_h} B_h + \frac{E_h}{1+\nu_h} \frac{C_h}{r^2}$$

$$C_{r,h} = \frac{E_h}{1-\nu_h} B_h - \frac{E_h}{1+\nu_h} \frac{C_h}{r^2}$$

En donde:

- U_h recorrido radial de un elemento de concreto
- r radio del citado elemento
- E_h módulo de elasticidad del concreto
- $C_{\theta,h}, C_{r,h}$ esfuerzo circunferencial y radial del concreto
- B_h, C_h constantes de integración obtenidas para la zona de concreto.

En el macizo rocoso se verifican unas ecuaciones análogas a las anteriores, sustituyendo el subíndice h por t (significando t , magnitudes del terreno).

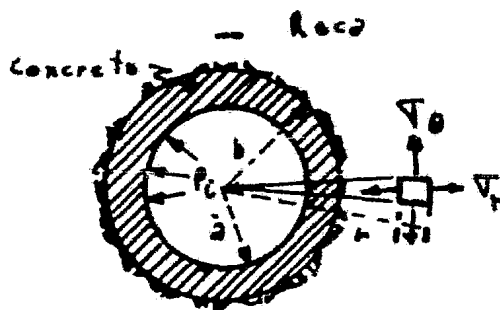


Figura V.1. Esquema de cálculo de los esfuerzos alrededor de una galería de presión.

Las constantes B_t, B_h, C_t, C_h pueden determinarse con las cuatro condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} (C_{r,t})_{r=\infty} &= 0 & (C_{r,h})_{r=a} &= -P_i \\ (C_{r,t})_{r=b} &= (C_{r,h})_{r=b} & (U_h)_{r=a} &= (U_t)_{r=b} \end{aligned}$$

La máxima tensión circunferencial se da en el borde interior del anillo de concreto, $r=a$ y vale

$$(G_{\theta})_a = P_i \frac{\lambda + \frac{E_t (\lambda \nu_k - 1)}{E_k (1 + \nu_k)}}{1 + \frac{E_t (\lambda + \nu_R)}{E_k (1 + \nu_k)}}$$

siendo

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2}$$

Conocido el esfuerzo $(G_{\theta})_a$ puede comprobarse si el concreto se fisura o no.

Para terrenos flojos E es pequeño frente a E y la ecuación se simplifica a

$$(G_{\theta})_a = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} P_i$$

En algunos casos podría considerarse admisible una cierta fisuración del revestimiento definida por unas grietas de ancho d separadas una distancia l .

Está claro que después que el revestimiento se haya partido en cuñas toda la presión interna se transmite al macizo y en este caso la longitud del perímetro de la excavación (línea de contacto de la roca con revestimiento) tendrá un alargamiento:

$$L = 2\pi b (1 + \nu_k) \frac{P_i}{E_t}$$

Si el revestimiento fuera infinitamente delgado y flexible y sin dificultad alguna pudiera deslizarse sobre la excavación, se formaría una sola grieta con apertura L . Si se admite en cambio que hay un cierto coeficiente de rozamiento $\operatorname{tg} \delta$ entre el revestimiento y el terreno, se deberán abrir una serie de grietas separadas a una distancia l definida igualando la fuerza de rozamiento en el tramo con la resistencia total o tensión de la sección del revestimiento. Se obtiene así:

$$l = \frac{(b-a)R_t}{3(\operatorname{tg} \delta)P_i}$$

en donde R_t es la resistencia a tensión del concreto.

Si se divide el alargamiento total L por el número de grietas $(2\pi b/l)$ se obtendrá el valor de la apertura de grietas

$$d = \frac{(b-a)(1 + \nu_k)R_t}{3E_t \operatorname{tg} \delta}$$

Teóricamente el valor de la apertura de la grieta no depende de la presión interna, lo que aumenta con ella es el número de grietas.

En general para un valor determinado de la apertura total L , cuando mayor sea el número de grietas en que se reparte, menor será el caudal de filtración por ellas. Cuanto menor sea la resistencia a la tensión R_c del concreto más pequeña será la apertura de cada una de ellas y por lo tanto menor será el caudal de filtración. Finalmente, cuanto menor sea el espesor del revestimiento, menor será la apertura de cada grieta.

El coeficiente de rozamiento $\tan \delta$ entre roca y concreto podrá valorarse en 0.7. Sin embargo, debido a la gran rugosidad con que queda en general la superficie de excavación puede tomarse $\tan \delta = 1$.

Hay que tener en cuenta las diferencias inevitablemente existentes entre estos cálculos teóricos y la realidad, debido fundamentalmente a los parámetros geomecánicos y a la variabilidad del espesor $b-a$ del revestimiento.

2. Revestimiento de concreto armado con previsión de la formación de fisuras. Cuando las características geotécnicas del terreno atravesado por la galería de presión no aseguran la colaboración necesaria del empuje pasivo para resistir los esfuerzos producidos por la presión interior y limitar así la apertura de las grietas, se recurre al empleo del concreto armado en el revestimiento.

En el caso de que las tensiones impuestas en el revestimiento por la presión interior del agua sean superiores a las de rotura del concreto, éste se fisurará, sea cual fuere, dentro de las cuantías normales, la cantidad de refuerzo de que esté provista la sección. En las etapas previas a la fisuración, la tensión que soportará el revestimiento dependerá exclusivamente del módulo de deformación del concreto, de la roca circundante y muy poco de la sección del acero. Alcanzada la rotura, el concreto se fisurará y comenzarán a trabajar el refuerzo. El efecto conjunto será una disminución del módulo de deformación del revestimiento, por lo cual la roca se verá obligada a aceptar una carga mayor.

En el cálculo de la sección en que se haya previsto la colocación del acero de refuerzo, deberán comprobarse los siguientes extremos:

a. Que el esfuerzo del acero en el borde de la fisura está dentro de los límites admisibles, sin que se haya sobrepasado el límite de fluencia del material.

b. Que la apertura de la fisura no sobrepase un límite que permita asegurar que el caudal de filtración a través de ella es suficientemente pequeño para que no haya peligro de falta de estabilidad, ni pérdidas considerables desde el punto de vista hidráulico.

A continuación exponemos el método de cálculo de estas secciones del revestimiento, basándonos en la aceptación de las siguientes hipótesis alternativas, Uriel (1968):

a. Solamente resiste el acero, ya que el concreto se supone totalmente fisurado.

b. El concreto resiste entre las secciones fisuradas, descargando por tanto al acero.

a. El hormigón está totalmente fisurado.

En este caso solamente se puede contar con la resistencia del acero (figura V.2).

Se iguala la deformación de la roca a la del acero.
Si la presión interior es p , y el acero absorbe una presión T/r , la roca debe absorber:

$$p - \frac{T}{r}$$

El corrimiento del acero será:

$$\frac{T r}{A E_s}$$

siendo:

A = Área de armaduras

E_s = Módulo de elasticidad del acero

r = Radio del eje de gravedad de la sección del acero

T = Tracción a que está sometido el acero

p = Presión interior

El corrimiento del terreno es

$$\delta = \frac{r(1+\nu)}{E_t} \left(p - \frac{T}{r} \right)$$

siendo

ν = Coeficiente de Poisson

E_t = Módulo de deformación de la roca

Igualando los corrimientos resulta:

$$\frac{T}{A E_s} = \frac{(1+\nu) \left(p - \frac{T}{r} \right)}{E_t}$$

Despejando T , operando y simplificando, resulta:

$$T = p r \frac{1}{\frac{r E_t}{(1+\nu) E_s A} + 1}$$

luego el esfuerzo en el acero de refuerzo es

$$\sigma_s = p r \frac{1}{\frac{r E_t}{(1+\nu) E_s A} + 1}$$

b. El concreto está fisurado, pero resiste entre fisuras para el caso de presión interior.

Se considera que en la sección central entre grietas el concreto - resiste a tensión y por consiguiente le corresponderá un esfuerzo que será proporcional al coeficiente de equivalencia. Se supone que el - aumento de esfuerzo del acero es lineal hasta llegar a la sección de la fisura en la que el acero tiene que resistir toda la tensión (figura V.3).

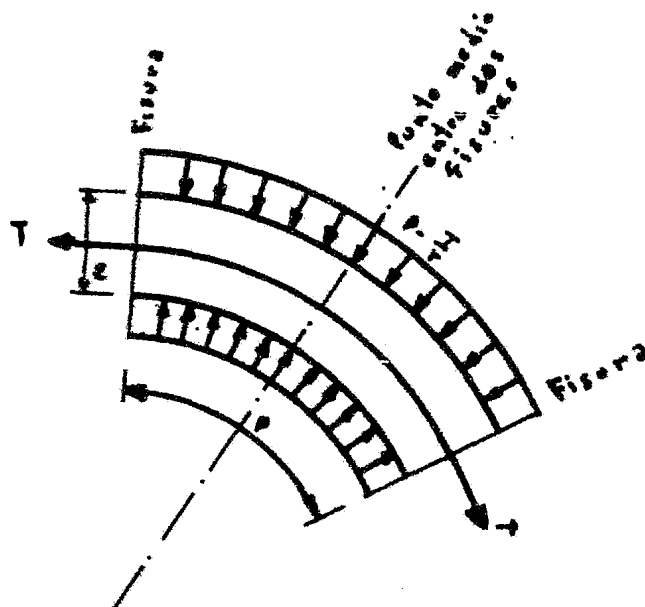


Figura V.2. Esquema de cálculo del revestimiento de una galería de presión. El concreto está fisurado

Los valores de los esfuerzos son:

$$G_2 = T/A$$

$$G_2' = \frac{T}{\frac{e}{n} + A}$$

donde:

T = tensión total

A = área de refuerzo

e = espesor del revestimiento

n = coeficiente de equivalencia entre el acero y el concreto

La deformación media será:

$$\epsilon = \frac{G_2 + G_2'}{2E_2} = T \frac{1 + \frac{n}{e + An}}{2E_2}$$

El corrimiento del acero será:

$$\delta = T \frac{1 + \frac{n}{e + An}}{2E_2} r$$

donde:

E₂ = módulo de elasticidad del acero

r = radio del eje de gravedad de la sección del acero

El corrimiento del terreno es:

$$\delta = \frac{r(1+\nu)}{E_t} \left(p - \frac{T}{r} \right)$$

siendo:

ν = módulo de Poisson

E_t = módulo de deformación del terreno

p = presión interior

Iguando los corrimientos del acero y de la roca resulta:

$$\left(p - \frac{T}{r} \right) \frac{1+\nu}{E_t} = T \frac{\frac{1}{A} + \frac{\eta}{e+An}}{2E_2}$$

El esfuerzo resultante del refuerzo para el caso de colaboración de concreto y acero, será:

$$\sigma_{ha} = pr \frac{\eta}{\frac{E_t (e+znA)}{E_2 (1+\nu) A} + An+e}$$

Si se supone que no hay deslizamiento relativo entre el concreto y el acero, resultaría

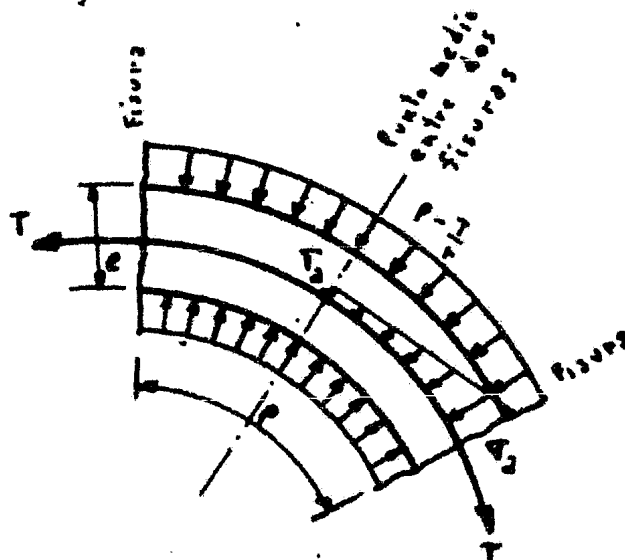


Figura V.3. Esquema de cálculo del revestimiento de una galería de presión. El concreto está fisurado, pero resiste entre fisuras para el caso de presión interior.

Referencias

- (1) C. Lorente de No. Texto del Curso Sobre Revestimiento de Túneles en Roca, Valencia, España, junio de 1982; ed. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia.
- (2) J. M. Rodríguez Ortiz y A. A. Serrano González. Capítulo 17, titulado: Obras subterráneas, libro Geotecnia y Cimientos III. ed. - Rueda. 1980.

CAPITULO VI. DISEÑO Y CONSTRUCCION DEL REVESTIMIENTO DE TUNELES MEDIANTE EL NUEVO METODO AUSTRIACO

VI.1. Principios del nuevo método Austriaco. Todo el mundo habla ahora del Nuevo Método Austriaco como respuesta técnica, y sorprende la diferencia de interpretación del término. Para unos es sinónimo de gunitado, para otros se da el Nuevo Método Austriaco cuando se excava, a sección completa, un túnel circular; un tercero dirá que si se emplean marcos ya no se dan las condiciones. Otros lo confunden con el uso de las líneas características esfuerzo-deformación de macizo, revestimiento y frente. Y la mayoría de los ingenieros se callan, cuando oyen hablar del Nuevo Método Austriaco a algún entendido de salón, porque temen que una opinión errónea les traicione. Todas las definiciones son ciertas en parte, pero casi ninguna lo es totalmente. Porque en realidad el Nuevo Método Austriaco no es un método específico sino más bien una filosofía, un sistema conceptual.

El ilustre ingeniero que lo inventó fué Rabcewicz (1964) que durante la Segunda Guerra Mundial "usó un nuevo método llamado el arco auxiliar que consistía en aplicar un revestimiento relativamente delgado de concreto a la roca lo antes posible, cerrándolo con una contrabóveda... Se medían continuamente las deformaciones (y)... en cuanto las observaciones mostraban una tendencia a la estabilización de la curva deformación-tiempo, se construía un segundo revestimiento interior". Inmediatamente nos cuenta Rabcewicz que "en aquella época... los túneles se construían con métodos obsoletos de sostenimiento que necesariamente provocaban un gran aflojamiento de la roca antes de que el primer revestimiento pudiera ser construido" lo que constituía una gran desventaja. En todo caso Rabcewicz patentó el proceso (patente austriaca No. 165.573) aunque dudo de que haya podido cobrar muchos royalties. Después Rabcewicz ha publicado sistemáticamente sobre el método (1964, 1969, 1973, 1975) indicando un proceso concreto de cálculo necesario para el sostenimiento provisional (marcos, an--

clajes, gunita).

Es natural que un inventor, que se toma la molestia de registrar una patente, considere que su procedimiento es muy concreto. Pero no lo es. Muller (1978) nos lo dice con claridad. "El Nuevo Método Austriaco es un concepto... (cuyo) éxito depende de que se aplique un conjunto de principios, el primero de los cuales es utilizar la masa rocosa como principal elemento para resistir las cargas".

Los principios del Nuevo Método Austriaco son (Cuadro No. 1):

1. Utilizar la propia roca como elemento para resistir los incrementos locales de carga producidos por la excavación.

2. Utilizar métodos de excavación que minimicen el daño inferido al macizo rocoso.

3. Colocar sostenimientos iniciales flexibles que protejan al macizo de los posibles daños (decohesión, meteorización, pérdida de dilatación) y colocarlos con la velocidad adecuada en cada tipo de roca para evitar el comienzo de los daños.

4. Controlar mediante instrumentación, ayudada por ensayos de laboratorio y clasificaciones geomecánicas, la influencia del tiempo en el comportamiento de la masa rocosa.

5. Construir el revestimiento definitivo, cuando sea necesario, -- también flexible, con objeto de minimizar los momentos flectores. Si se necesita resistencia, esta debe conseguirse con refuerzo, marcos, bulones... pero no con secciones rígidas.

La aplicación correcta de estos principios implica:

- prever el comportamiento de la roca
- estimar/calcular un sostenimiento flexible adecuado para mantener la resistencia de la roca
- controlar el comportamiento del conjunto roca-sostenimiento.

CRUADRO 1

PRINCIPIOS DEL "NUEVO METODO AUSTRIACO"

1. Utilizar la roca como elemento resistente.
2. No dañar la roca durante la excavación.
3. Colocar sostenimientos iniciales flexibles, con la velocidad adecuada a cada tipo de roca.
4. Controlar la influencia del tiempo en el comportamiento de la masa rocosa.
5. Construir revestimientos definitivos flexibles.

ES NECESARIO

- Conocer previamente la roca
- Estimar/calcular sostenimientos:
flexibles
adecuados
sucesivos
- Controlar el comportamiento conjunto

Estos pasos no son diferentes de los que ha de dar el proyectista de puentes o de presas. En definitiva el Nuevo Método Austriaco nos

obliga a proyectar un túnel como lo haríamos con cualquier otra estructura ingenieril. La novedad esencial es que hemos de contar con la roca como material resistente. Y por lo tanto debemos conocerla y saber "ponerla en obra" como hemos de conocer y saber poner en obra el concreto, un alambre pretensado o un filtro.

Esta filosofía, este entramado de conceptos que constituye el Nuevo Método Austriaco, sólo ha sido puesta en práctica recientemente, por tres razones (Cuadro No. 2).

- La Mecánica de Rocas, nacida hace 20 años, nos permite ya un buen conocimiento del comportamiento de las masas rocosas.

- Han surgido, también hace 20 años, nuevas técnicas de excavación de túneles, (topos, rozadoras, voladuras controladas), sin dañar la roca.

- Se han incorporado al arsenal de la construcción subterránea nuevos métodos "flexibles" de sostenimiento utilizados inicialmente en minería (marcos TH, bulones a la resina), en el campo estructural -- (gunita, concreto proyectado y/o bombeado) o desarrollados específicamente para túneles (chapas Bernold).

Como tantas veces en la ingeniería el cálculo ha ido por detrás. Pero se dispone ya de los algoritmos necesarios para analizar matemáticamente el conjunto roca-revestimiento que constituye el túnel. Es verdad que esos algoritmos casi siempre sólo se usan a posteriori. Pero también es verdad que ya los tenemos y en el futuro seguramente los usaremos para proyectar.

Es claro el proceso que hay que seguir para un estudio completo de túneles que quiere profundizar en la aplicación del Nuevo Método Austriaco:

- Reconocimiento previo.
- Métodos de excavación y sostenimiento.
- Cálculo/instrumentación de la sección.
- Métodos de construcción del revestimiento.

VI.2. Clasificación de Lauffer.

Lauffer realizó un estudio sistemático sobre el tiempo que permanecían estables excavaciones de determinadas dimensiones efectuadas en diferentes tipos de roca, extendiendo sus observaciones incluso a minas abandonadas. Basado en dichas observaciones, clasificó los diversos terrenos en una serie de Categorías.

La clasificación de Lauffer sirvió a Rabcewicz, Muller, etc., para establecer los elementos típicos de la estabilización inicial de las excavaciones a efectuar en los diversos terrenos, en correspondencia con dicha clasificación.

Durante el proceso de apertura de las galerías experimentales, en general sobre el perfil del futuro túnel, se definen dos parámetros: Longitud libre: Que es la menor de las dos dimensiones, diámetro o profundidad, abierta sin revestimiento.

Tiempo de estabilidad : ("Stand-Up time"). Tiempo que dura, sin demorarse, la longitud libre de roca anteriormente definida.

Los puntos experimentales se reagrupan en una zona característica definida sobre la figura VI.1.

Esta clasificación está muy generalizada en los países de habla a-

lemana y se ha adoptado para ofertado para ofertas y valoraciones.

CUADRO 2

RAZONES PARA LA APLICACION RECIENTE DEL
"NUEVO METODO AUSTRIACO"

- La Mecánica de Rocas permite ya un buen conocimiento del comportamiento de las masas rocosas
- Hay nuevas técnicas de excavación:
 - a) Topos
 - b) Rozadoras
 - c) Voladura suave
- Hay métodos flexibles de sostenimiento:
 - a) de la minería marcos TH
 bulonaje a la resina
 - b) de las estructuras gunita
 concreto bombeado
 - c) específicos chapas Bernold
 otros

-
- Existen métodos de cálculo apropiados:
 - a) métodos de las curvas características
 - b) métodos por elementos finitos

Las siete categorías de Lauffer son:

Clase A: Roca sana. Una excavación, no revestida, con luz libre de 12.00 m permanece estable durante varios años.

Terreno muy bueno

Clase B: Roca sana, compactada pero fracturada.

Terreno bueno.

Clase C: Roca sana, bastante fracturada o roca ligeramente alterada
Terreno medio.

Clase D: Roca muy fracturada o bastante alterada.

Rocas blandas.

Terreno mediocre.

Clase E: Roca triturada o muy alterada, con juntas rellenas de arcilla, sericita o caolín.

Roca blanda de débil cohesión.

Terrenos arcillosos con fuertes empujes.

Terreno malo.

Clases F y G: Características análogas a "suelos"

Se consideran muy difíciles y necesitan de métodos especiales para ser atravesados por un túnel, como inyecciones, congelación, uso de escudo, etc.

Concretamente en un terreno del tipo G no se puede abrir una cavidad de 0.50 m de luz libre que sea estable durante varios segundos.

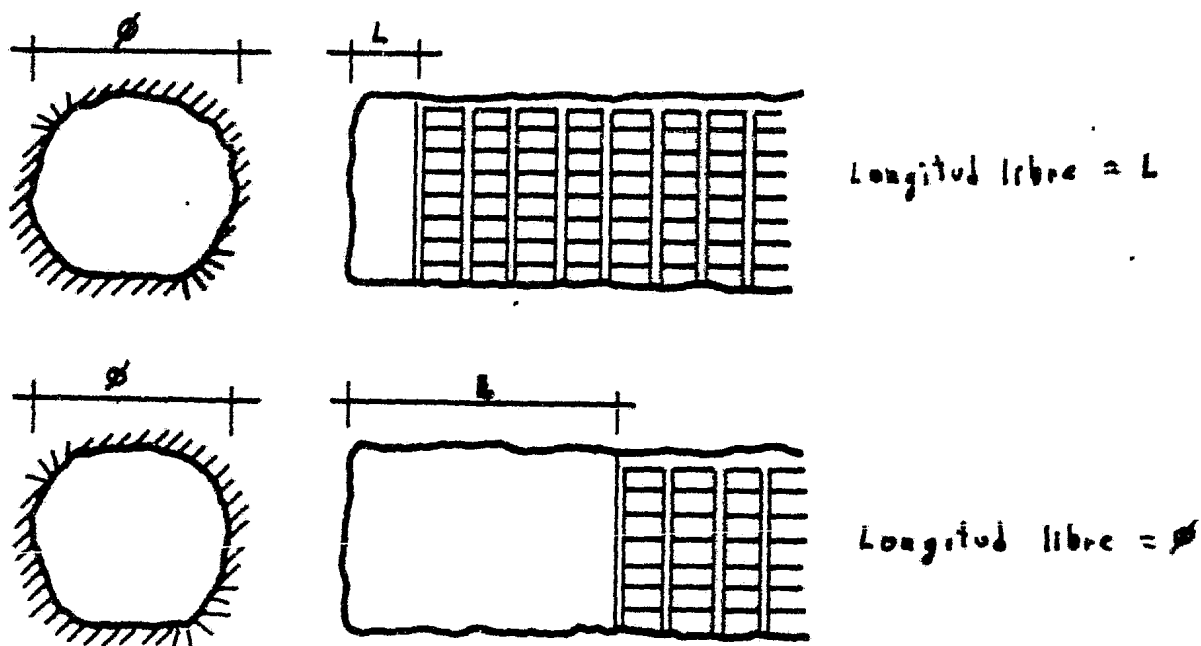
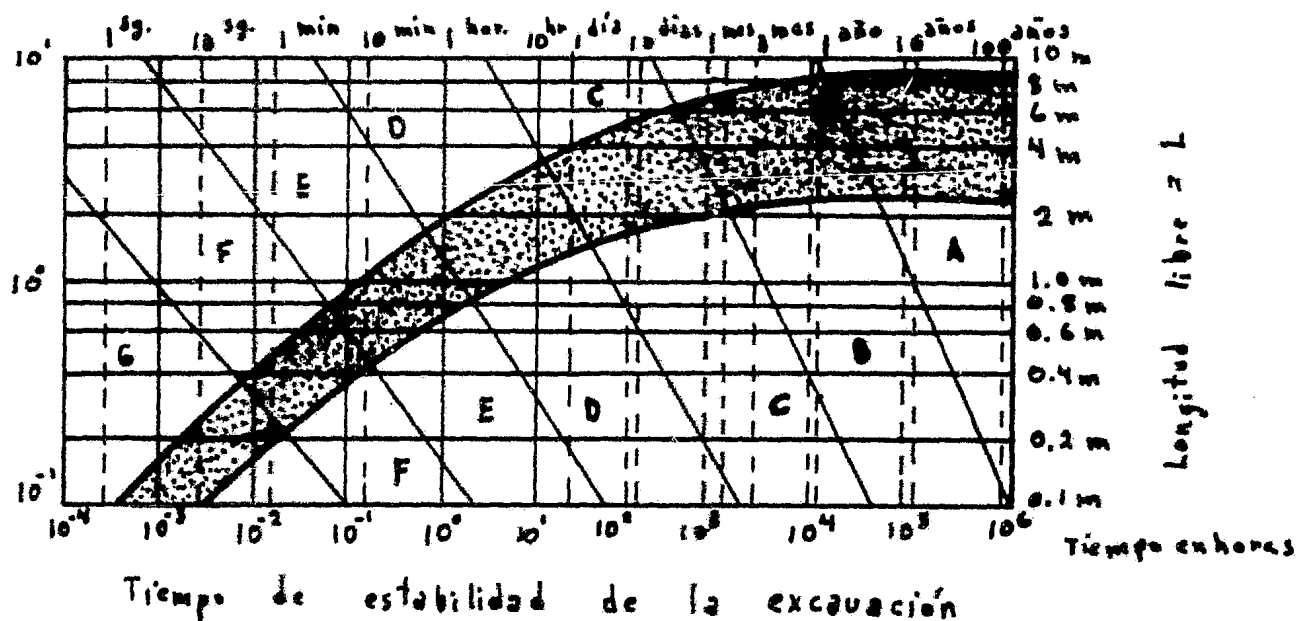


Figura VI.1. Clasificación de Lauffer.

VI.3. Aplicación al túnel de Massenber (1964).

Un ejemplo temprano de aplicación del Nuevo Método Austriaco fué - la construcción de un túnel carretero de 400 m de longitud cerca de Leoben, Austria (Pacher, 1964). Los materiales eran esquistos grafitosos saturados muy alterados. El rumbo del buzamiento formaba con - el eje del túnel un ángulo de $60 - 70^\circ$. El recubrimiento máximo fué - de 60 m.

La construcción comenzó por el Método Belga, con un revestimiento auxiliar gunitado en el techo. Después de excavar 67 m de calota se

inició la destroza. Al excavar los hastiales se produjo un hundimiento de los 27 primeros metros del túnel.

Los trabajos continuaron por el Nuevo Método Austriaco de acuerdo con la siguiente secuencia:

1. Excavación en clave con avance de 0.6 a 1.2 m. Instalación inmediata de 2-3 cm de gunita con tela metálica. Colocación de marcos.
2. Terminación del revestimiento en clave mediante gunitado.
3. Excavación del núcleo central.
4. Excavación de hastiales.
5. Gunitado de hastiales. Colocación de puntales.
6. Excavación de la destroza (semanal).
7. Construcción de la contrabóveda (a 20 m del frente de excavación).
8. Colocación del aislamiento e impermeabilización.
9. Colado del revestimiento interior (tres a cinco meses después de la excavación para permitir controlar las deformaciones del revestimiento primario).

La figura VI.2 muestra las deformaciones producidas en dos estaciones de medida.

Puede observarse que la operación crítica para la estabilización es el colado de la contrabóveda. El revestimiento primario compuesto por marcos bulonados al terreno y 20 cm de gunita bastó para asegurar la estabilidad. El revestimiento posterior sólo es necesario para impermeabilizar o como precaución suplementaria no justificada estructuralmente.

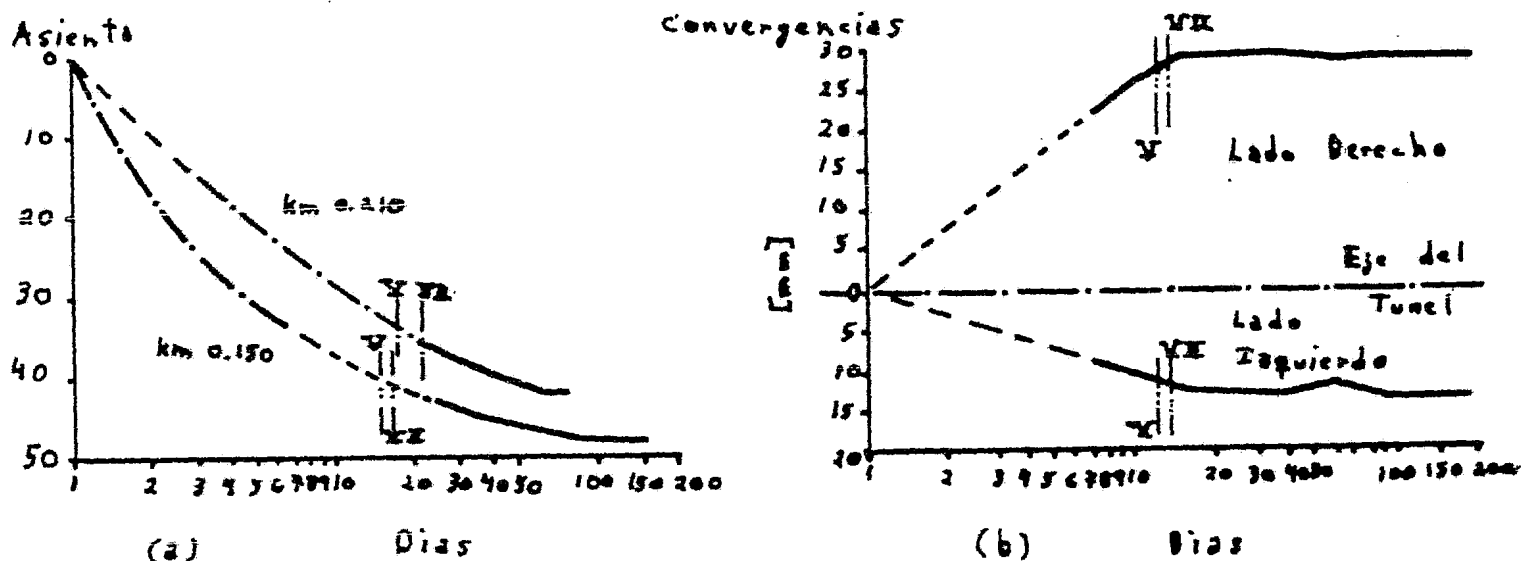


Figura VI.2. Deformaciones medidas en el túnel de Massenberg (Leoben, Austria). (a) Asiento de la clave; (b) convergencia horizontal. (V) Gunitado de hastiales, colocación de marcos; (VII) construcción de la contrabóveda.

VI.4. Línea característica de la cavidad.

El comportamiento mecánico de la cavidad, supuesta excavada instantáneamente, puede ser representado por la relación entre la presión

interior σ_i (aplicada por el soporte y/o revestimiento) y la convergencia o corrimiento hacia el interior del borde u . A la gráfica de esa función se le llama línea característica.

Si el comportamiento de la roca es elástico la línea característica es una recta de ecuación

$$\frac{u}{r} = (\sigma_0 - \sigma_i) \frac{1+\nu}{E}$$

obtenida con las hipótesis de terreno y estado de esfuerzos exteriores, σ_0 , isótropo, para una cavidad circular. Puesto que para:

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sigma_i &= 0 \\ \frac{u_0}{R} &= \sigma_0 \frac{1+\nu}{E} \end{aligned}$$

la línea característica puede expresarse adimensionalmente

$$\frac{u}{u_0} = \left(1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right)$$

donde, para $u=0$: $\sigma_i = \sigma_0$

Si el comportamiento de la roca es visco-elástico hay una presión crítica por debajo de la cual aparece en la cavidad una zona plástica concéntrica con ella. La línea característica pasa a ser curva a partir de ese punto, que corresponde a una presión crítica,

$$\sigma_{i \text{ crit}} = \frac{\lambda \sigma_0 - \sigma_c}{\lambda + 1}$$

para presiones interiores, y las deformaciones tienden al infinito - con una asíntota vertical a la presión interior crítica σ_i .

Dicha presión vale:

a) Terreno con fricción y cohesión:

$$\sigma_i(\text{min}) = -c \cot \varphi = -\frac{\lambda \sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} c$$

donde:

$$\lambda = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

expresión que puede ponerse en función de la resistencia a compresión simple σ_c .

$$\sigma_i(\text{min}) = \frac{\sigma_c}{\lambda - 1}$$

Como $\sigma_i(\text{min}) < 0$ la cavidad puede ser autoestable para una presión nula de revestimiento.

La ecuación de la curva característica es:

$$\frac{u_R}{R} = \frac{\sigma_c + \sigma_0(\lambda - 1)}{\lambda + 1} \frac{1 + \nu}{E} \left[\frac{z}{\lambda + 1} \frac{\sigma_c + \sigma_0(\lambda - 1)}{\sigma_c + \sigma_i(\lambda - 1)} \right]^{\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}}$$

b) Terreno con fricción nula:

$$G_i(\text{min}) = G_0 - c$$

$$\frac{G_i(\text{min})}{G_0} = 1 - \frac{c}{G_0}$$

que puede ser positiva si $G_0 < c$, lo que indica que según el valor de la cohesión la cavidad puede ser autoestable o nó.

La ecuación de la curva característica es:

$$\frac{U_R}{R} = c \frac{1+\nu}{E} e^{\frac{G_0 - G_i - c}{c}}$$

c) Terreno con cohesión nula.

$$G_i(\text{min}) = 0$$

y la cavidad no es autoestable si no hay presión interior. La ecuación de la curva característica es:

$$\frac{U_R}{R} = G_0 \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \frac{1+\nu}{E} \left[\frac{Z}{\lambda+1} \frac{G_0}{G_i} \right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}$$

El comportamiento real de la roca suele ser más complejo lo que -- produce cambios en las curvas citadas. En primer lugar existe la dilatancia en la zona plastificada (que complica las ecuaciones) puesto que al romperse la roca aumenta algo de volumen. El proceso de deterioro de la roca es progresivo y para grandes deformaciones el macizo se desorganiza perdiendo rápidamente sus propiedades resistentes.

Las líneas características se incurvan entonces hacia afuera y, a partir de un cierto nivel de deformación, crecen simultáneamente presiones y deformaciones. La cavidad se vuelve radicalmente inestable exigiendo presiones de revestimiento muy altas para su estabilización.

Además, ya sea por el daño que la excavación con explosivos produce en una zona próxima al túnel, ya sea por un proceso de pérdida de dilatancia, la zona plastificada alrededor del túnel puede exhibir un comportamiento frágil perdiendo la cohesión, lo que produce cavidades no autoestables que requieren una presión mínima de sostenimiento.

En general para la estabilidad de la cavidad será necesario que el revestimiento aplique una cierta presión algo superior a la mínima estricta, con objeto de mantener las deformaciones dentro de límites aceptables. Dicha presión práctica es algo superior a la mínima estricta:

$$G_i(\text{min}) < G_i(\text{prácticas})$$

y puede calcularse limitando la convergencia. U_R .

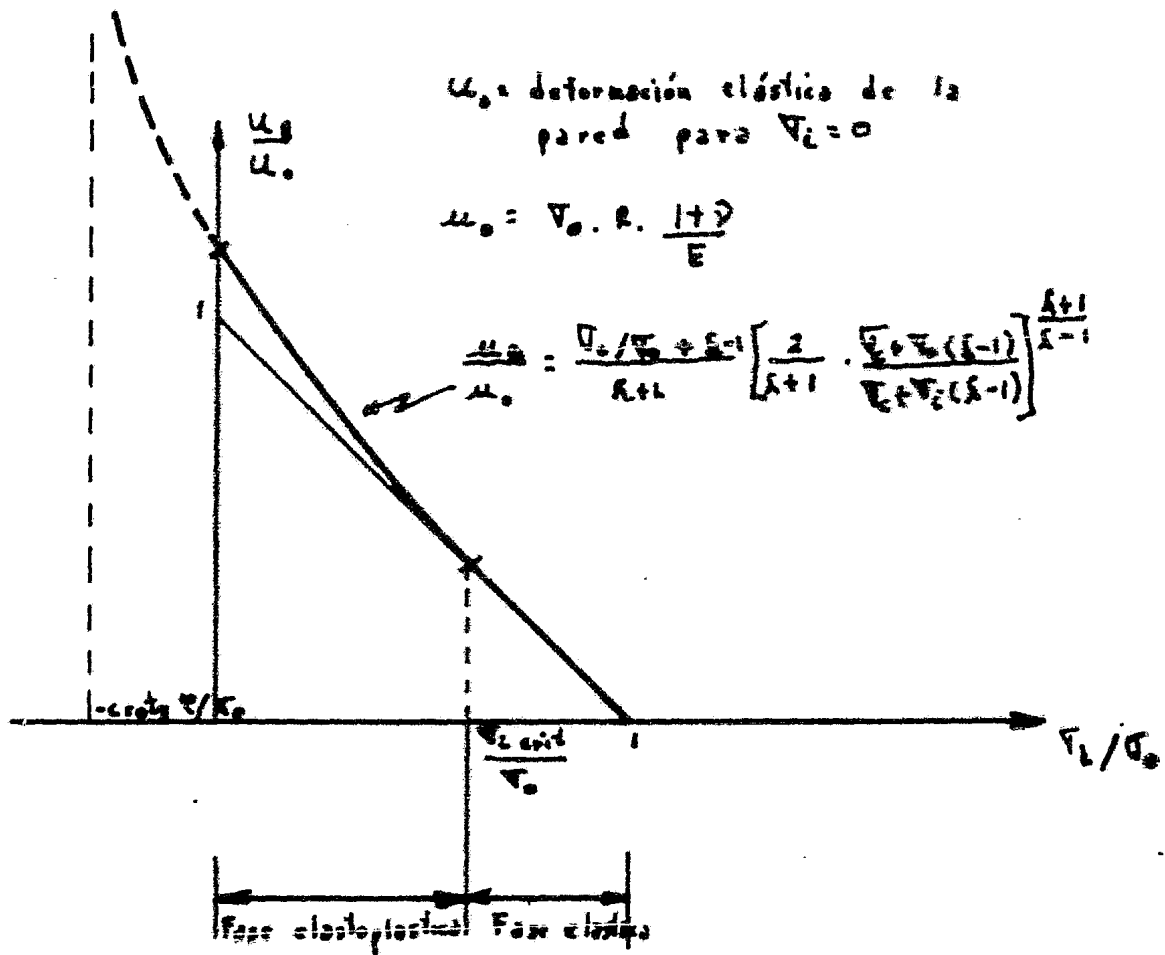


Figura VI.3. Curva característica de la cavidad. Terreno con cohesión y fricción.

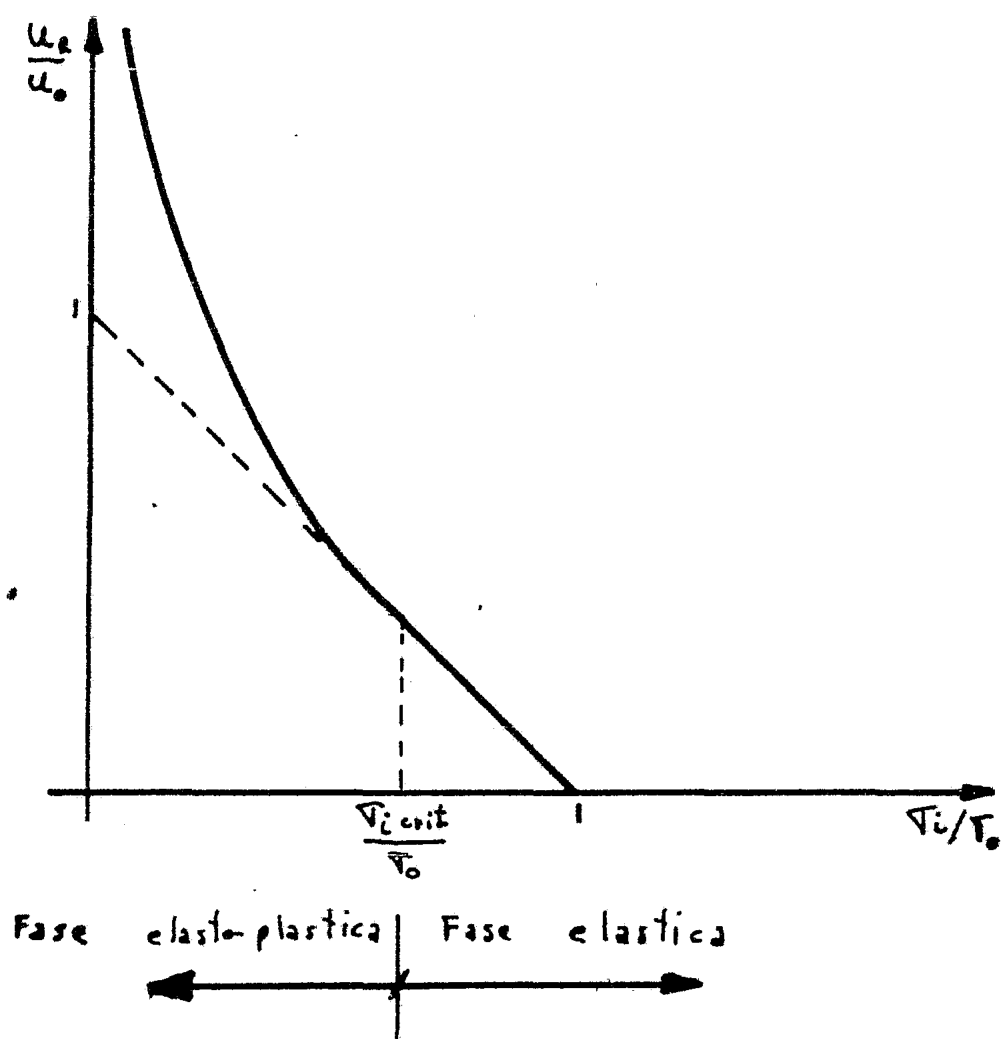


Figura VI.4. Curva característica de la cavidad. Terreno sin cohesión.

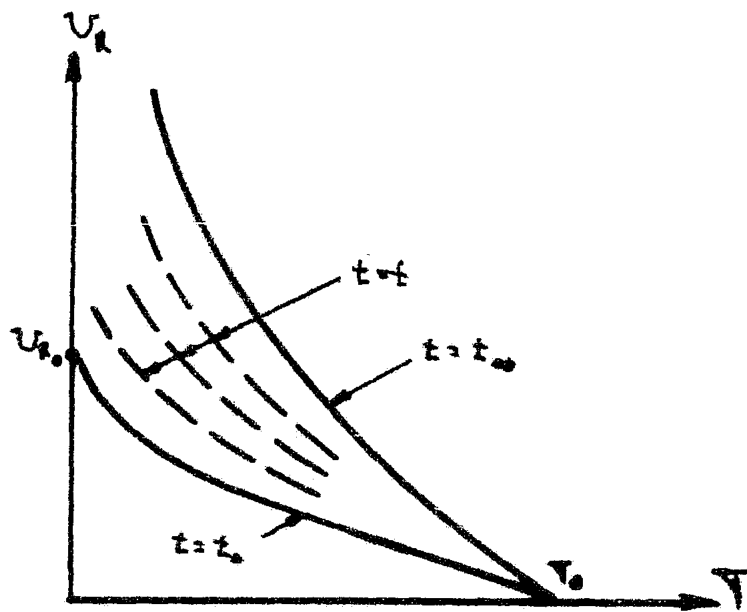


Figura VI.5 Curvas características de terreno con comportamiento viscoso. Cada curva corresponde a un tiempo dado después de la excavación ($t=t_0$).

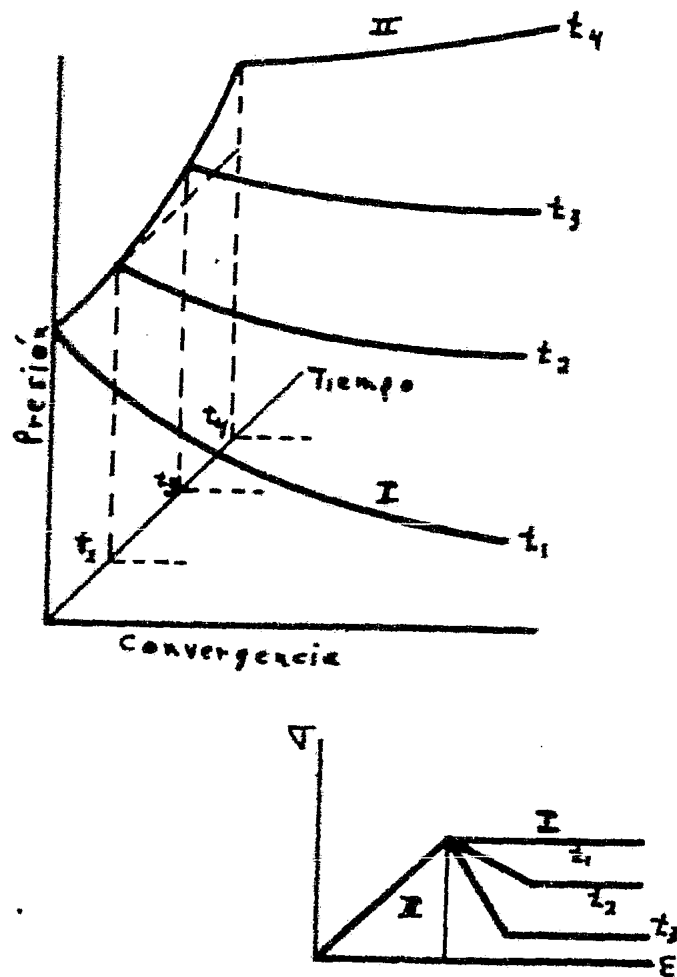


Figura VI.6. Representación tridimensional de la superficie característica en el caso de una pérdida progresiva de resistencia con el tiempo (Fairhurst).

VI.5. Líneas características del revestimiento.

La curva característica del revestimiento relaciona su deformación con su rigidez y es bastante fácil de determinar teóricamente para ser túnel circular.

VI.5.1. Revestimiento continuo de concreto (o gunita).

Aplicando las fórmulas de los tubos delgados

$$G_b = \frac{G_i R}{e} = E_b \varepsilon = E_b \frac{u_r}{R - \frac{e}{2}}$$

donde

- G_b esfuerzo de compresión en el concreto
- G_i presión entre revestimiento y terreno
- R radio del túnel
- e espesor del revestimiento
- E_b módulo de deformación del concreto
- ε deformación circunferencial del revestimiento
- u_r deformación radial del revestimiento

La curva característica del revestimiento es

$$\frac{u_r}{R} = \frac{G_i R}{E_b e}$$

válida para revestimientos flexibles en los que puede suponerse que $0.5e/R$ es nulo, sin introducir errores de importancia, lo que se cumple siempre para $e \leq R/10$.

VI.5.2. Revestimiento discontinuo con puntales. Si el espaciado entre puntales vale d la curva característica del revestimiento es:

$$\frac{u_r}{R} = \frac{G_i}{E_s S/dR} \quad (\text{si } G_i < G_i \text{ lím})$$

donde

- E_s módulo de deformación del acero
- S sección transversal de cada puntal
- d distancia entre puntales

Para los puntales deslizantes el esfuerzo normal está limitado ($G_s < G_s \text{ lím}$) y por lo tanto también lo está G_i .

$$G_i \text{ lím} = G_s \text{ lím} \frac{S}{dR}$$

para presiones mayores el revestimiento se comporta como plástico.

VI.5.3. Revestimiento con anclajes. Si los anclajes tienen una longitud libre l con la zona de anclaje suficientemente lejos de la pared del túnel, y están colocados con una cuadrícula $d_1 \times d_2$ su alargamiento valdrá:

$$u_r = \frac{G_2 l}{E_s}$$

y la presión vertical aplicada será:

$$G_i = \frac{G_2 S}{d_1 d_2}$$

donde:

G_a esfuerzo en el bulón

E_a módulo de deformación del bulón

S sección de un bulón

La curva característica del revestimiento valdrá

$$U_R = \frac{G_i}{E_a S / d \cdot dz L}$$

Si los anclajes no tienen longitud libre, sino que están inyectados en toda su longitud, este análisis no es válido por que no puede suponerse que el anclaje actúe independientemente sino que es un refuerzo de la masa rocosa. Este es el caso del bulonaje a la resina.

VI.5.4. Deformaciones del revestimiento antes de su entrada en carga. La deformación que haya experimentado la pared del túnel antes de la colocación del revestimiento U_{R_0} debe ser incrementada en ΔU_R para tener en cuenta una deformación previa de éste antes de su entrada en carga, que puede ser medida o estimada con los siguientes valores.

- Gunita $\Delta U_R = 0$
- Concreto in situ $\Delta U_R = 1-2 \text{ mm}$
(se debe a la retracción)
- Concreto prefabricado en dovelas $\Delta U_R = 10-50 \text{ mm}$
(según el sistema de colocación y relleno del hueco entre dovelas y terreno)
- Puntales metálicos $\Delta U_R = 5-20 \text{ mm}$
(si la colocación es descuidada el huelgo puede ser mucho mayor)
- Anclajes y bulones no pretensados $\Delta U_R = 2-5 \text{ mm}$
(juego de la placa de cabeza)
- Anclajes pretensados $\Delta U_R < 0$
(corresponde al alargamiento del anclaje bajo la carga de pretensado menos las pérdidas)

VI.5.5. Revestimientos compuestos. Cuando los revestimientos son compuestos, es preciso superponer las curvas características.

Si los dos revestimientos se colocan simultáneamente bastará considerar al revestimiento compuesto con una rigidez suma de las rigideces individuales. Si la colocación no es simultánea, será preciso tener en cuenta la deformación experimentada por el primero en el momento de la colocación del segundo.

Normalmente esta deformación del primer revestimiento (p. ej. puntales) es el componente mayor de la deformación total y el segundo revestimiento (p. ej. el concreto) no entra en carga (o lo hace muy lentamente en función del comportamiento viscoso del macizo rocoso).

VI.5.6. Efecto de la anisotropía. Las curvas anteriores han sido obtenidas con la hipótesis de estado de cargas isótropo. En la realidad aparecerán anisotropías que producirán momentos en los revestimientos.

Si la roca es de calidad mediana y el revestimiento de poco espesor no será necesario armarlo. Egger afirma que los momentos serán prácticamente nulos si:

$$\frac{E}{4\gamma} \geq 1,000 \text{ MP}_2 \quad \text{y} \quad \frac{e}{R} \leq 0.2$$

VI.6 Línea característica del frente.

VI.6.1. Deformaciones en las cercanías del frente. La deformación de la cavidad, estudiada en el punto VI.4., no se produce instantáneamente porque el proceso de excavación de un túnel es progre-
sivo.

Al acercarse al frente, en el terreno no excavado, se produce una relajación de los esfuerzos, con deformaciones previas a la llegada del túnel:

- abombamiento del frente
- asentamiento en la superficie
- desplazamiento de los puntos próximos al frente hacia el eje - del túnel y hacia el propio túnel.

Estas deformaciones han sido comprobadas instrumentalmente en numerosas ocasiones. Si la cavidad es autoestable la convergencia varía desde un valor nulo tras el frente, hasta el valor correspondiente al estado bidimensional de esfuerzos a una cierta distancia dentro del túnel. En las cercanías del frente es menor debido al efecto tridimensional. Por eso los esfuerzos de estabilización son menores cerca del frente y con frecuencia nulos.

Lauffer describió empíricamente este fenómeno mediante el concepto de "longitud libre" (definido en el punto VI.2) que definió empíricamente para las distintas categorías rocosas de su clasificación, con valores máximos de 4 m o del diámetro de la galería (si es menor de 4 m).

En general el frente suele presentar condiciones de estabilidad mejores que la cavidad y ello permite instalar el revestimiento. La inestabilidad del frente se produce en condiciones especiales:

- fuerte flujo de agua
- suelo blando de cohesión muy reducida
- suelo, o roca triturada sin cohesión

y puede estimarse mediante el llamado factor de sobrecarga de Peck - (FS)

$$FS = \frac{G_e - G_i}{c}$$

donde

G_e presión exterior (γZ)

G_i presión interior (debida al aire comprimido, a las tierras, a la bentonita).

c cohesión

si

$FS > 6$ frente inestable

$4 < FS < 6$ frente semiestable con grandes deformaciones

$FS < 4$ frente estable con deformaciones reducidas

En la figura VI.7. se presenta el desplazamiento de un punto sobre la bóveda del túnel experimental de Kielder, en terrenos carboníferos donde las deformaciones fueron muy superiores a las elásticas y la cavidad resultó inestable al cabo de 300-500 días (Ward, 1978).

VI.6.2. El frente como "núcleo" de roca (Lombardi). Para representar el efecto del frente Lombardi recurre al artificio de suponer que un "núcleo" de roca que "rellena" el túnel antes de su excavación estando en equilibrio dentro del conjunto de la masa rocosa.

En el momento de su excavación el comportamiento del frente correspondería a un núcleo reducido, por ejemplo de un espesor mitad de la inicial, y que presentaría mayor deformabilidad.

En palabras de Lombardi (1974) publicadas en el Simposio Nacional de Túneles:

"A este fin examinamos la figura VI.8 en la cual se han representado tres secciones infinitas de ancho unidad, dispuestas perpendicularmente al eje de la galería y de las cuales la primera A se encuentra por delante del frente, la B en el plano del frente y la tercera C a suficiente distancia por detrás del frente".

"Examinando la línea característica de esta galería, mantenida por tanto estable y sin revestimiento vemos inmediatamente que el punto A representa el estado inicial de esfuerzos "presiones correspondientes a las naturales, deformaciones nulas" y que el punto C corresponde a su vez a deformaciones de una cierta magnitud en ausencia de presiones radiales de estabilización, mientras que la sección B en el frente de excavación está representada por un punto intermedio de la línea característica".

"En primer lugar podemos representar la sección B como sostenida en la zona del frente por un núcleo de roca debilitado pero que todavía resiste las deformaciones, mientras que en la zona A el núcleo posee toda su resistencia y es capaz de soportar totalmente las presiones naturales del terreno".

"En una segunda fase debemos considerar las trayectorias de las sollicitaciones longitudinales en el macizo rocoso, que se desvían en la zona del frente. Por condiciones evidentes de equilibrio resulta que en la zona del frente existen fuerzas radiales de desviación que se ejercen hacia el exterior y sostienen la cavidad. Se trata del conocido efecto de cúpula, al que se debe la mejor estabilidad en la zona del frente respecto a la que se encuentra a una cierta distancia del mismo".

"La consideración de estos diversos factores permite pasar a la construcción gráfica de la figura VI.9. En la misma se han dibujado diversas líneas características. La línea 1 representa la de la galería antes definida; la línea 2, por el contrario es la línea característica de la cavidad cuando se tienen en cuenta las fuerzas de desviación mencionadas. Se trata por supuesto de la línea característica de la cavidad en las proximidades del frente. La línea 3 corresponde al núcleo del terreno situado por delante del frente que ya está evidentemente debilitado por la excavación".

"El punto B se obtiene por la intersección de las dos últimas líneas características y es por tanto el punto de equilibrio en la zona del frente con lo cual se define la deformación inicial".

"Si el sostenimiento se coloca inmediatamente detrás del frente y si la línea 4 representa las características de deformabilidad, el punto de equilibrio final se encontrará en F y nos dará la presión final P_f que actúa sobre el revestimiento, así como la correspondiente deformación radial respecto al origen, es decir respecto al estado natural de la montaña".

"Si el revestimiento se coloca con un huelgo suplementario o si no se coloca en la inmediata proximidad del frente, sino a una cierta distancia, ya no será válida la línea característica 4 sino la para-

lela 5 que conduce al equilibrio final F, con deformaciones mayores pero con presiones de equilibrio menores".

"Es interesante advertir lo que también viene confirmado en esta figura es decir que la deformación que tiene lugar por delante del frente de excavación no puede ser observada desde el interior de la galería, sino que, como mucho, podrá medirse las deformaciones sucesivas que se añadan a la inicial".

"El exámen de las diversas situaciones posibles lleva a considerar cuatro casos de estabilidad que suponemos especialmente importantes para la construcción de túneles".

"La figura VI.10 muestra los cuatro casos fundamentales de estabilidad".

"En el caso 1 tanto el frente como la propia cavidad son auto-estables. Es el caso que se encuentra frecuentemente en particular en galerías de pequeñas dimensiones, en un terreno de buena calidad y a pequeña profundidad".

"En el caso 2 la cavidad es estable dado que las líneas características relativas cortan el eje de ordenadas. Por el contrario el núcleo no lo es, ya que el terreno no puede soportar las grandes deformaciones impuestas por la excavación y por lo tanto cede. Este caso se presenta por ejemplo en ciertas condiciones de roca fracturada".

"En el caso 3 la estabilidad de la cavidad en la zona del frente de ataque está garantizada, pero a una cierta distancia del mismo la cavidad debe ser ademada. Este caso se encuentra en túneles de grandes dimensiones, en roca de calidad media y a una cierta profundidad".

"En el caso 4 ni el frente de excavación ni la propia cavidad son estables. Se trata de la peor situación posible. Por ello deben elegirse métodos constructivos especiales, como el empleo de un escudo, la estabilización del frente con elementos especiales de sostenimiento, etc."

"El método de construcción de un túnel o más precisamente el método de excavación, la elección de los revestimientos y por consiguiente el abono de las obras de excavación, deben orientarse teniendo en cuenta estos cuatro casos de estabilidad. Estudios específicos de mecánica de rocas permitiran a veces obtener los datos necesarios para este exámen".

El análisis precedente peca de teórico. El caso dos (frente inestable y cavidad estable) es muy poco verosímil. El caso cuatro corresponde a condiciones del terreno extremadamente precarias.

Por otra parte el cálculo exige suponer un espesor virtual del núcleo muy mal definido y una presión de agotamiento, con deformaciones plásticas crecientes, que será inferior a la resistencia a compresión simple y que corresponde a cargas "rígidas" en condiciones de deformabilidad reducida.

No hay, de momento, un método práctico para estimar ni ese espesor virtual ni esa resistencia de agotamiento.

VI.6.3. El frente como bóveda (Egger). Egger (1974) ha propuesto evaluar la línea característica del frente como si este fuera una cavidad hemisférica de radio igual al del túnel. Evidentemente las deformaciones serán mucho menores que las de la cavidad para la misma presión invaden la mitad si se supone que frente y cavidad permanecen en régimen elástico.

Si la presión interior es nula, lo que es el caso habitual, el frente se plastifica para el caso

$$\sigma_c \leq 1.5 \sigma_0$$

que corresponde a un valor del factor de sobrecarga superior a 3, - mientras que la cavidad lo hace para valores de

$$\sigma_c \leq 2 \sigma_0$$

Si la resistencia a compresión simple es nula (caso de terreno incoherente) el frente no es estable. Es preciso dotarlo de cohesión - (mediante drenaje o inyección por ejemplo) o aplicar una presión interior, lo que puede hacerse mediante:

- aire comprimido (solución clásica)
- lodo bentonítico (escudos con lodos usados en Japón e introducidos en Europa por Wirth o Priestley)
- presión de tierras (escudos "compensados")

En los casos normales ($\sigma_c \neq 0$, $P_i = 0$) la cavidad alcanza, en el momento de excavar el frente, la deformación correspondiente a su línea característica, y a partir de ella empieza a jugar el revestimiento, cuya deformación previa se compone de:

- deformación del frente como cavidad
- deformación de espera, producida antes de colocar el revestimiento
- deformación suplementaria antes de la entrada en carga del revestimiento.

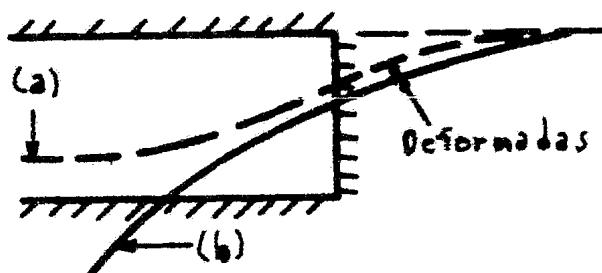


Figura. Proceso de deformación en un túnel sin revestir en las cercanías del frente. (a) estable. (b) inestable.

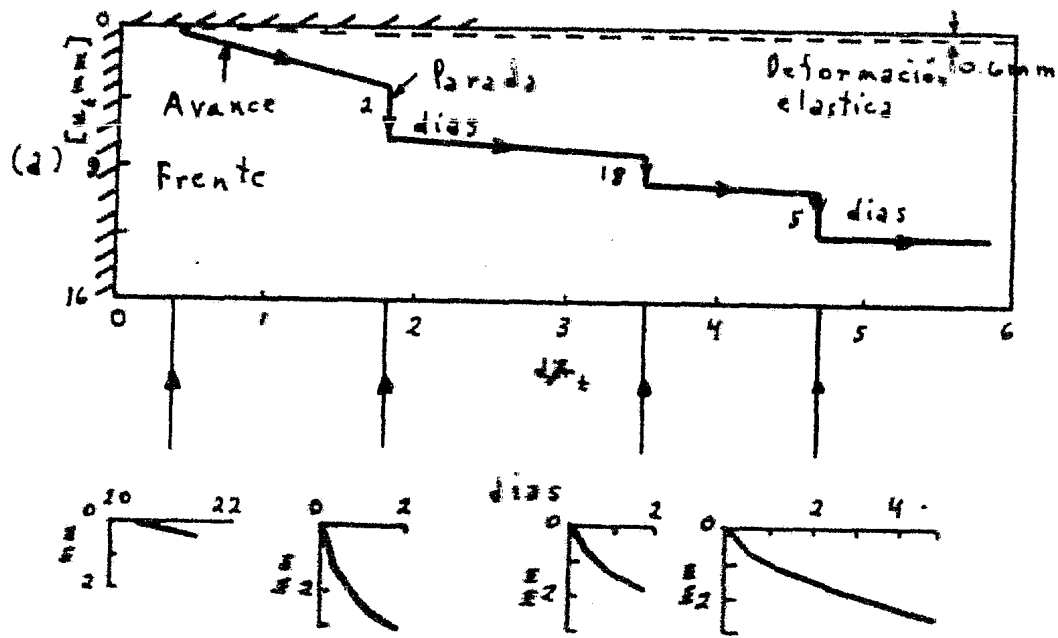


Figura VI. 7. Corrimientos radiales medidos en el túnel de Kielder a 0.3 m sobre la clave (Ward, 1978). (a) Gráfico de convergencia con el avance del frente. (b) Convergencias en función del tiempo durante las paradas del frente.

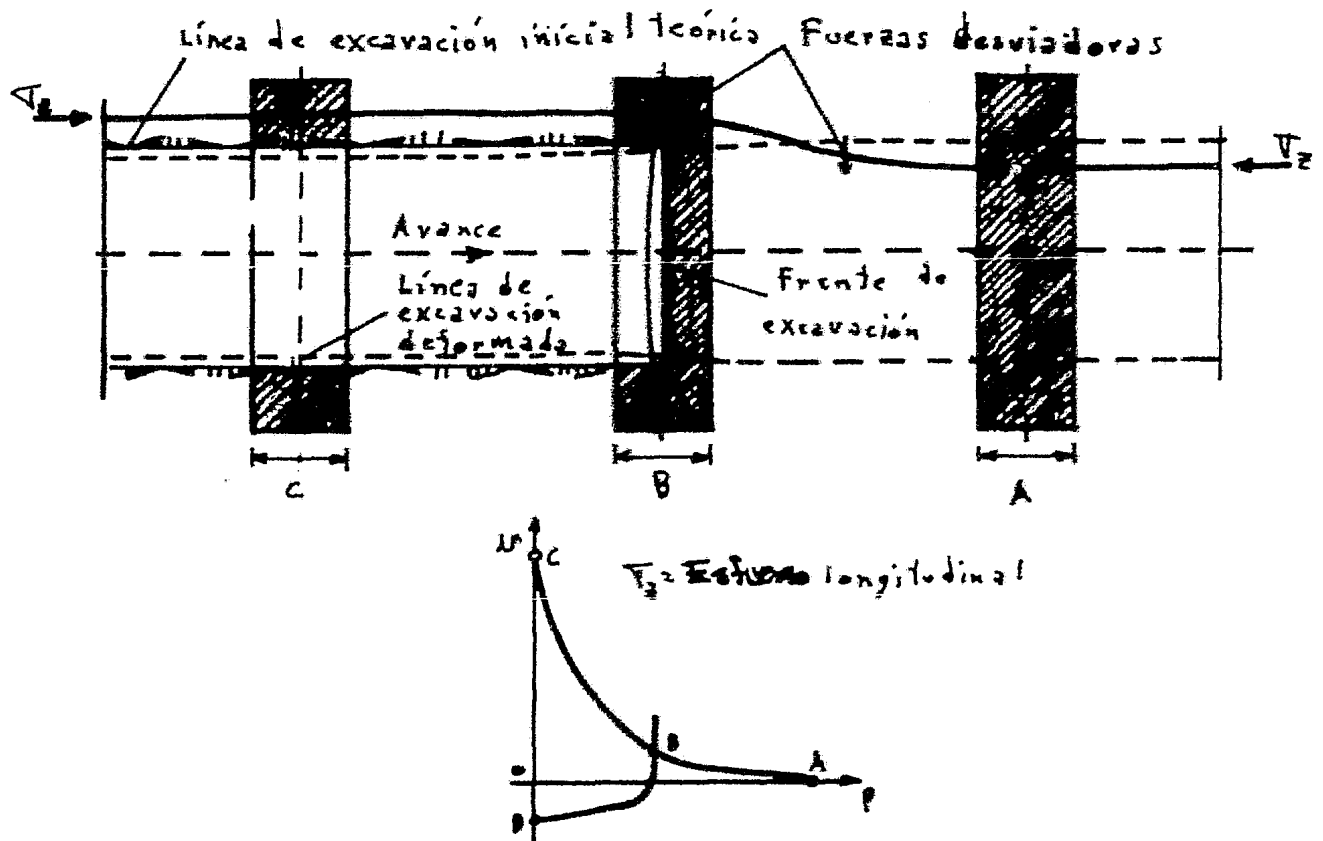
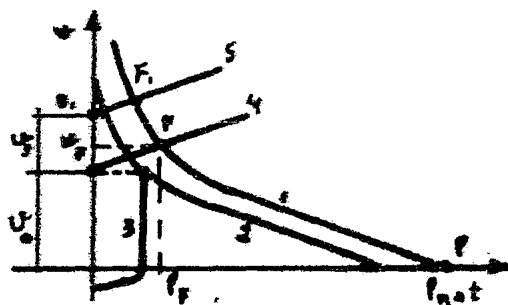
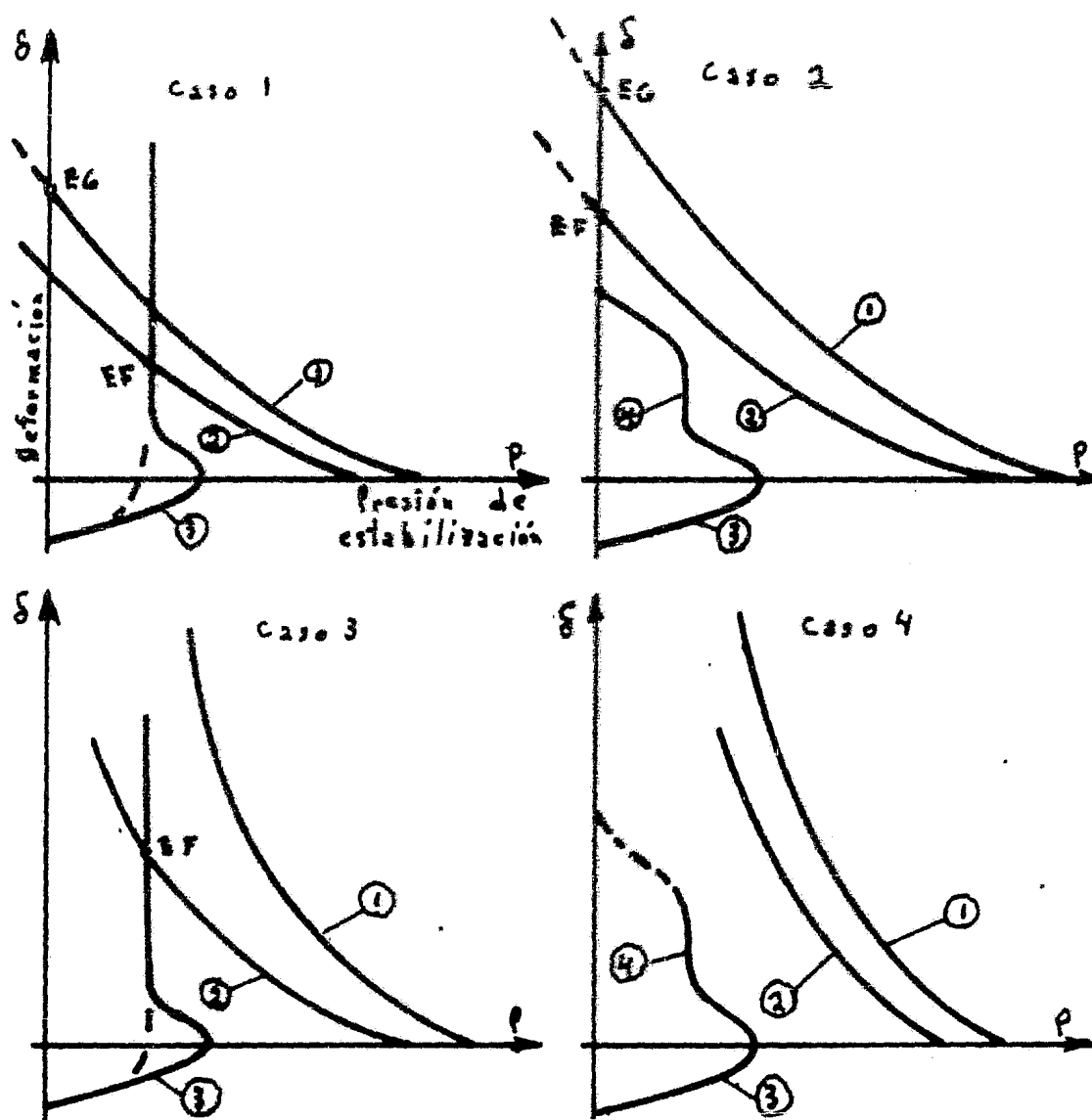


Figura VI.8. Condiciones de equilibrio en el frente de excavación (Lombardi, 1974)



- 1: L. C. del túnel
- 2: L. C. de la zona del frente
- 3: L. C. del núcleo del frente
- 4: L. C. del sostenimiento inmediatamente colocado
- 5: L. C. del sostenimiento colocado después de una deformación U_S ,

Figura VI. 9. Combinaciones de líneas características (L. C.)
(Lombardi, 1974)



- 1 = línea característica de la galería
 2 = línea característica de la galería en el frente
 3 = línea característica del núcleo
 4 = rotura del núcleo
 EF = equilibrio en el frente
 EG = equilibrio de la galería

Figura VI.10. Cuatro casos de estabilidad (Lombardi, 1974)

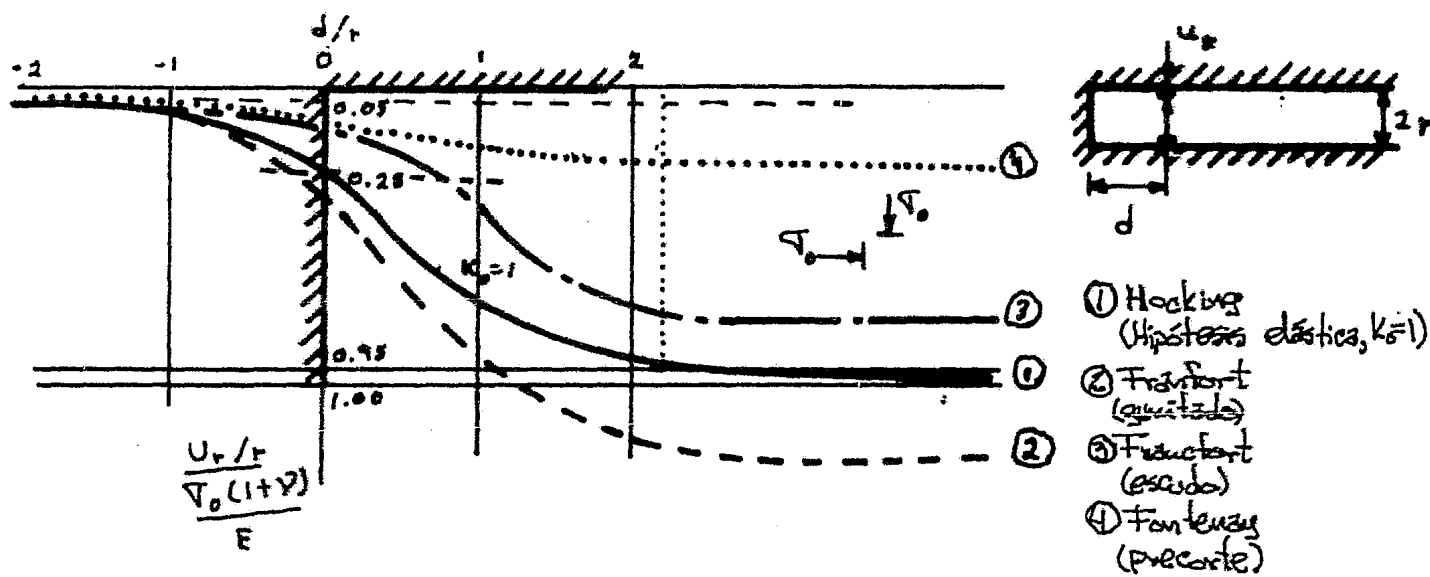


Figura VI.11. Comparación de líneas características del frente, calculadas (1) y medidas (2,3 y 4) (Kerisel, 1979)

VI.7. Concepto del método de las líneas características.

El método de las líneas características permite estimar el equilibrio de esfuerzos y deformaciones en un túnel mediante la intersección de las líneas características correspondientes a:

- la cavidad supuesta excavada instantáneamente, que puede tener según los casos comportamiento elástico, plástico, frágil, dilatante o viscoso (en cuyo caso el tiempo se representa como una sucesión de líneas características)

- el revestimiento colocado cuando se ha producido la convergencia

- el frente con un comportamiento hipotético simplificado.

Son posibles varios casos diferentes de equilibrio alguno de los cuales se presentan en las figuras siguientes:

- equilibrio entre cavidad y diversos tipos de revestimiento (figura VI.12, Lombardi, 1974)

- equilibrio entre cavidad con comportamiento viscoso y revestimiento complejo de gunita/concreto (figura VI.13, Egger, 1977)

- equilibrio entre cavidad, frente y un revestimiento deformable con puntales TH, colocados de prisa o con retraso (figura VI.14, Egger, 1977)

- equilibrio entre cavidad, frente y un revestimiento rígido colocado pronto o con demasiado retraso (Egger, 1977).

VI.8. Aplicabilidad actual.

El método de las líneas características está ya disponible pero requiere un grado importante de información.

Para el terreno:

- elástico: valores de constantes elásticas (módulos de Young, E y Poisson, ν)

- plástico: límite de plasticidad (cohesión c y rozamiento ψ o resistencia a compresión simple G_c y parámetro λ)

$$\tau = c + \sigma \tan \psi$$

$$G_I = G_c + \lambda G_{III}$$

- dilatante: valor de la dilatancia κ

- frágil: velocidad de pérdida de resistencia con la deformación

- viscoso: variación con el tiempo de los parámetros anteriores

Para el revestimiento:

- rigidez en régimen elástico

- resistencia límite

- deformación inicial

- deformación de entrada en carga

Para el estado de cargas

- valor del esfuerzo primario

Las hipótesis significativas que facilitan el cálculo son:

- terreno isótropo

- estado isótropo de esfuerzos

- túnel circular

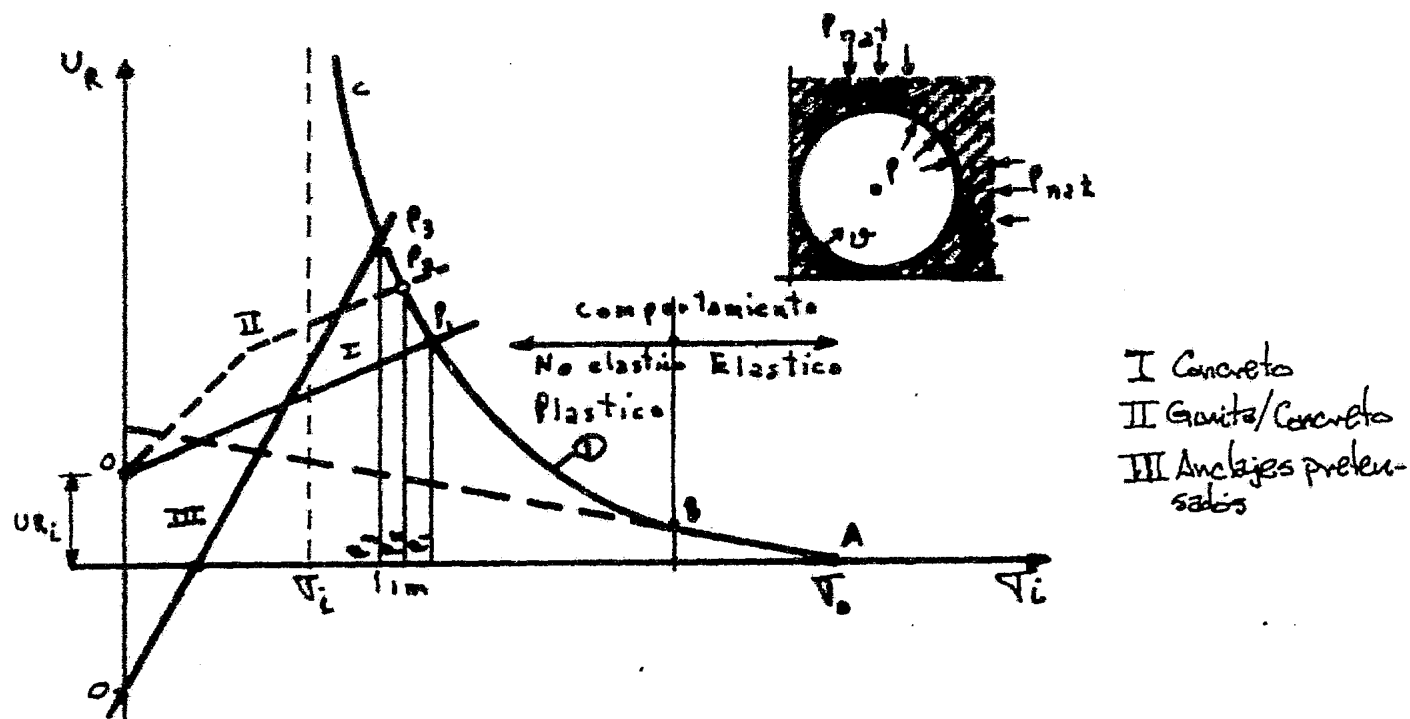
- lejanía de la superficie del terreno

Por ello el método es más útil para túneles relativamente profundos

de geometría cuasi-circular (túneles excavados con tuneladora, túneles hidráulicos, túneles ferroviarios de una vía).

Además su utilización requiere un estudio serio para estimar las propiedades del terreno.

Cumplidos estos requisitos el Nuevo Método Austriaco supone uno de los procesos de cálculo y diseño más adecuados de entre todos los que se emplean en Ingeniería Geotécnica.



- = línea característica de la cavidad
- = líneas características de diversos sostenimientos
- = puntos posibles de equilibrio con la presión
- = deformación de la cavidad hasta el momento de la colocación del sostenimiento

Figura VI.12. Líneas características de la cavidad y de diversos sistemas de sostenimiento (Lombardi, 1974)

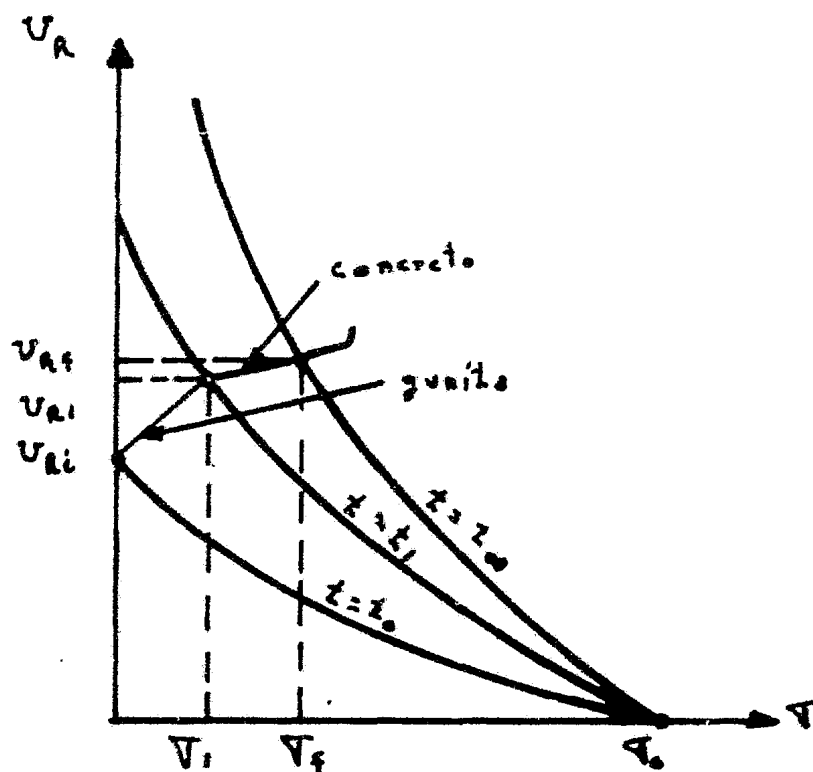


Figura VI.13. Equilibrio entre revestimiento y terreno. La curva característica del terreno varía con el tiempo desde la inicial ($t=t_0$), que corresponde a túnel estable, hasta la final ($t=t_2$) que puede corresponder a un túnel inestable sin revestimiento. El revestimiento se colocó con deformación δ_i y estaba constituido por gunita. Después ($t=t_1$) se coló, aumentando su rigidez (Egger, 1977).

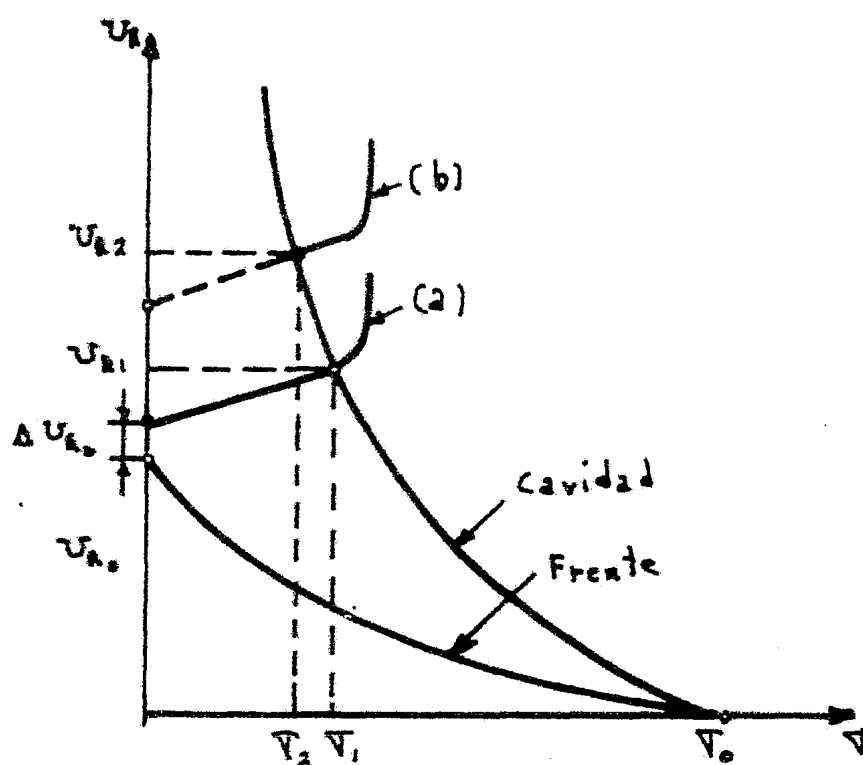


Figura VI.14. Influencia del tiempo de espera para la colocación de un revestimiento deformable con marcos deslizantes (Egger, 1977). (a) colocación casi inmediata al frente. (b) colocación a cierta distancia del frente

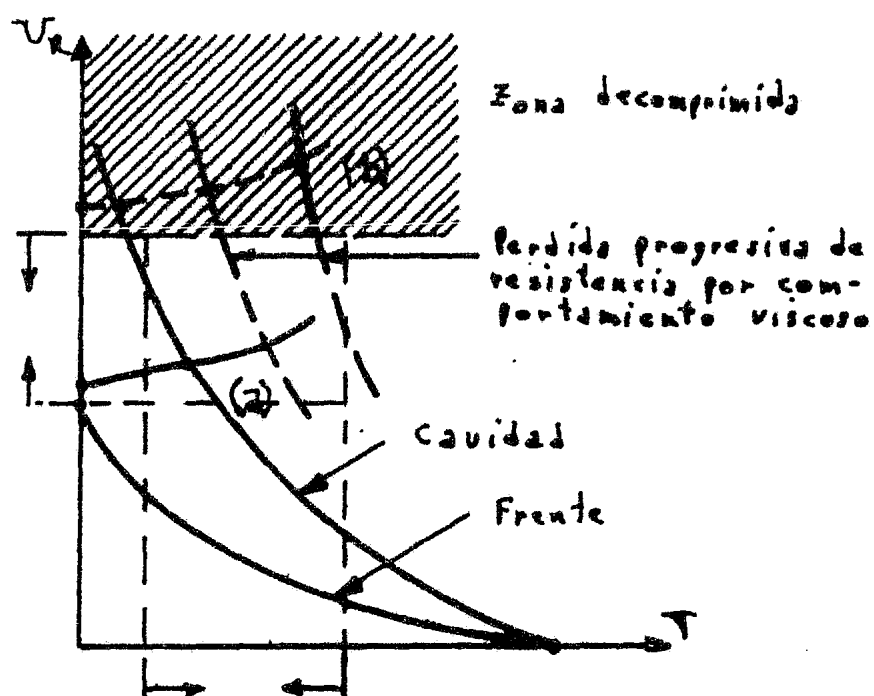


Figura VI.15. Influencia del tiempo de espera para la colocación de un revestimiento rígido (Egger, 1977). (a) Colocación casi inmediata al frente. (b) Colocación permitiendo una deformación excesiva.

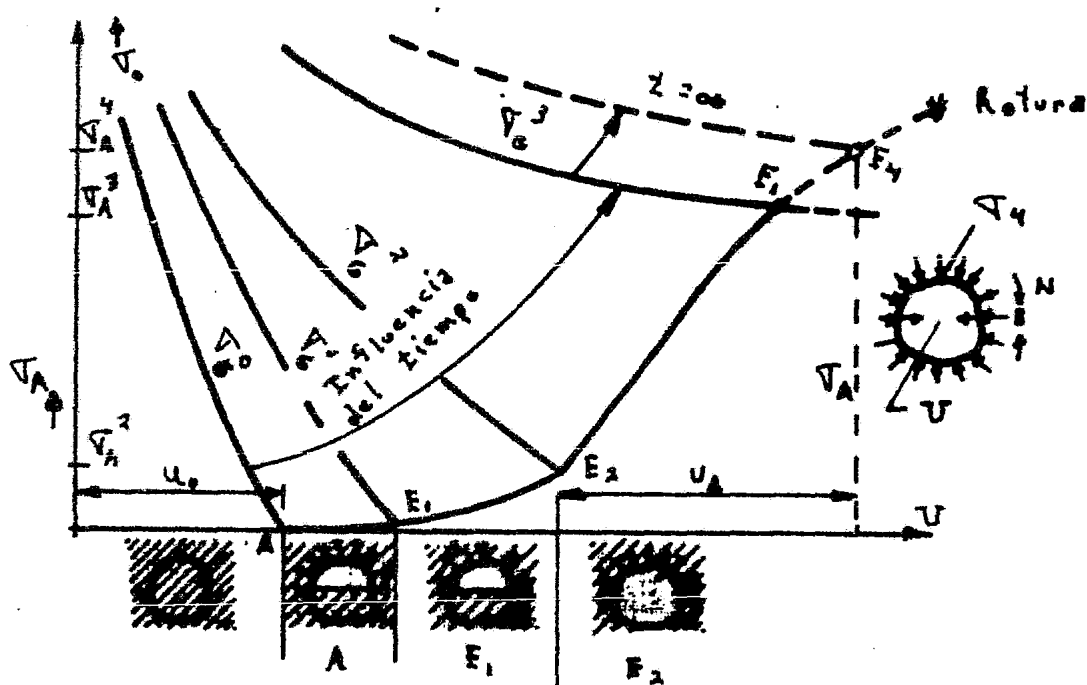


Figura VI.16. Evolución de las líneas características según las fases de excavación (Duddeck, 1979)

Referencias

- (1) Romana Ruiz, Manuel. Notas del Curso sobre Revestimiento de Túneles en Roca; Valencia, España; junio de 1982; ed. Departamento de Geotecnia de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia.

CAPITULO VII. CONCLUSIONES

En la actualidad la mecánica de medios continuos es ampliamente utilizada para modelar una gran variedad de fenómenos que ocurren en la práctica diaria de la Ingeniería Civil, esto se debe principalmente a que el enfoque de medios continuos, posee la ventaja substancial de permitir la descripción de túneles, su revestimiento, etc., mediante funciones continuas. Ello a su vez, da la posibilidad de emplear en los análisis las técnicas matemáticas más sofisticadas con que se cuenta en el presente. Cabe hacer notar, que aún cuando el "mundo" - se presenta al ser humano con naturaleza eminentemente discontinua, los resultados que da esta teoría en muchos casos son de una aproximación tal, que se hacen necesarias algunas reflexiones sobre el particular. Esta coincidencia de predicciones con realidad puede ser -- producto de, un ajuste "tendencioso" de los parámetros materiales -- que intervienen en el modelo, o bien porque a la estructura discontinua del universo que el hombre percibe, subyace una naturaleza continua que no está al alcance de los sentidos de éste. En la física moderna existen, básicamente, dos corrientes conceptuales, una de las cuales está representada por las teorías relativistas que asumen que la estructura más íntima de todo cuanto forma al universo es continua; continuidad que radica en la materia básica de éste, a la que se le conoce con el nombre de espacio-tiempo. Resta entonces, a los ingenieros, la labor nada fácil de hacer aplicable a la Ingeniería la teoría de la relatividad, con lo que, creo yo, se lograría dar un -- gran paso en la comprensión de los fenómenos físicos a que se enfrenta el ingeniero.

Asimismo, de la aplicación de la mecánica de medios continuos al -- problema de la construcción de túneles en roca se desprenden las siguientes conclusiones:

1. El estado inicial de esfuerzos en $t=0$, y en la vecindad del túnel, no depende de las constantes paramétricas de la roca ni del re-

vestimiento.

2. El estado final de esfuerzos es, por lo general, una función de la naturaleza de la interacción roca-soporte. El estado final de esfuerzos es, también, una función de los parámetros elásticos de la roca y el soporte, así como de la geometría del túnel y del revestimiento.

3. Los parámetros reológicos de la roca (η, τ) afectan el ritmo de variación del esfuerzo y el desplazamiento solamente. In situ es recomendable registrar las velocidades de deformación que permiten establecer las propiedades reológicas del macizo rocoso que se excava.

4. La velocidad de variación del esfuerzo varía respecto a los esfuerzos primarios y los coeficientes de interacción.

5. Los parámetros elásticos de la roca no afectan el ritmo de variación del esfuerzo.

6. La velocidad de variación del esfuerzo es mayor al inicio de la excavación y, subsecuentemente, tiende a cero asintóticamente.

7. Los esfuerzos en un túnel sin revestimiento son constantes.

8. La carga transferida de la roca circundante al revestimiento, aumenta asintóticamente, conforme el tiempo pasa, desde cero hasta un máximo que es función del coeficiente α y de los esfuerzos primarios.

9. Si el revestimiento es totalmente rígido, el contacto entre éste y la roca es perfecto, y es instalado en breve tiempo, la carga sobre el revestimiento tiende al esfuerzo primario conforme el tiempo transcurre.

10. Roca y soporte constituyen un sistema binario interactuante y, mediante una correcta elección del revestimiento, la presión de roca puede ajustarse y controlarse dentro de límites deseados.

11. Un medio efectivo de control de la presión de roca es la instalación de un revestimiento flexible.

12. Los soportes definitivos rígidos no deben ser usados, excepto donde la presión primaria de roca es pequeña, o la resistencia de la roca es alta.

13. A gran profundidad y en roca de baja resistencia, es conveniente usar soportes flexibles.

14. Las características geométricas y materiales del soporte y la situación de los esfuerzos primarios determinan la vida útil del túnel.

15. Otro medio para controlar la presión de roca sobre los soportes es la instalación retardada del revestimiento.

16. Si el proyecto definitivo contempla la instalación de un revestimiento definitivo rígido, es deseable instalar primero soportes flexibles temporales que permiten liberar presión de roca.

17. Es recomendable reemplazar el revestimiento temporal con soportes definitivos, siendo estos últimos más rígidos.

18. Soportes renovables pueden ser empleados, también, para liberar presiones de roca.

19. Los soportes renovables reducen la presión de roca esperada para las etapas finales, en una cantidad igual a la presión actuante en el momento de la instalación de dicho revestimiento, siempre y cuando no se espere ninguna falla de la roca adyacente durante el

tiempo en que esté instalado dicho soporte renovable.

Por lo que respecta a la aplicación de la mecánica de medios discontinuos a túneles en roca, cabe aclarar que si bien ésta representa un enfoque más apegado a la realidad aparente que nos rodea, los procedimientos de cálculo involucrados son muy complejos, por lo que se requiere la utilización de ordenadores. Otra de las corrientes — que existe en la física moderna, y que goza de gran aceptación, es — la teoría cuántica que postula que la estructura de la materia es — discontinua; en este sentido, también hay mucho que hacer si se desea aplicar a la ingeniería las ideas de la mecánica cuántica, lo que — promete avances substanciales en la comprensión de los fenómenos mecánicos a que se enfrenta el ingeniero en la práctica cotidiana.

El "Nuevo método Austriaco" aporta una nueva filosofía a la tecnología de construcción de túneles ya que permite contar con la propia capacidad auto-resistente de la roca que se pone en juego al permitir una pequeña deformación de la misma. Este método consiste en una adecuada combinación entre el método de trabajo y las características de flexibilidad del revestimiento, con el fin de obtener la estabilización o equilibrio del conjunto roca-revestimiento en las mejores — condiciones económicas y de seguridad posibles. El camino para conseguir este objetivo es doble: por un lado es necesario un gran conocimiento del terreno que permita ir introduciendo las presiones de estabilización en el preciso momento, y por otro lado, es necesario disponer de medios auxiliares (concreto lanzado, en una o varias capas y con o sin malla, los anclajes en sus diversas variedades y los perfiles metálicos con el arriostramiento entre ellas) y de equipos de personal adecuados. El método reúne en sí una serie de ventajas que hacen muy tentadora la idea de aplicarlo; las principales ventajas son:

1. Sólo se requiere un único revestimiento; ya sea que se use concreto lanzado y revestimiento definitivo o sólo el primero.
2. Un revestimiento flexible que introduce unas presiones de estabilización reducidas a la admitir ciertas deformaciones del terreno, — es necesariamente económico.
3. El método entraña la puesta en obra de medios auxiliares, distribuidos de tal forma en el espacio y en el tiempo, que el sistema es de una gran seguridad para el personal que trabaja dentro del túnel.
4. Los medios auxiliares del método permite la rápida adaptación — a otro sistema si las circunstancias así lo aconsejan, sin perturbar la organización interna de la obra.
5. El método, eminentemente perfeccionista, obliga a una alta tecnificación del personal a todos los niveles.