UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"MODELO DIGITAL PARA EL ANALISIS DE CORTINAS EN ARCO A TRAVES DEL METODO DE LOS ARCOS-MUROS"

TESIS PROFESIONAL

Que para Obtener el Título de:

INGENIERO CIVIL

Presenta:

Leonardo Ponce Hernández

México, D. F. 1983

"MODELO DIGITAL PARA EL ANALISIS DE CORTINAS EN ARCO A TRAVES DEL METODO DE LOS ARCOS-MUROS"

INDICE

Pag.

AGRADECIMIENTO:

Al Ing. Antonio Acosta Godínez, quien me dió la primera oportunidad de desarrollo profe-- sional, por la paciente y acertada dirección de este trabajo.

Al Ing. Rafael Aranda Hernández,destacado in vestigador del Instituto de Ingeniería, por su tiempo y valiosos comentarios, al haber - leido el preliminar de este trabajo.

Al Ing. Antonio Abaunza de la Escosura, in-- cansable profesor de nuestra facultad, por - sus acertados consejos.

1.- I N T R O D U C C I O N

La creación de la infraestructura adecuada para: la - producción de alimentos, el abastecimiento de agua potable,- la generación de energía eléctrica, etc.; es un problema cuya solución es de carácter prioritario para México. Dentro - de este marco, se puede incluir la necesidad de contar con - grandes volúmenes de agua con el fin de satisfacer los requerimientos: agrícolas, ganaderos, industriales, domésticos...

Una de las diversas formas de aprovechar los recursos hidráulicos es mediante la construcción de presas. Este tipo de obras destacan por las diferentes funciones que cumplen y por la gran cantidad de tecnología que se aplica, desde su - planeación hasta su operación y mantenimiento.

Se puede decir que una presa es el conjunto de estructuras e instalaciones cuyo objetivo es formar una obstrucción en un río, para almacenamiento o derivación y aprovechar en forma eficiente el agua que fluye por una corriente. También se puede afirmar que la cortina es una de las estructuras más importantes de una presa.

Las cortinas se pueden clasificar según diferentes --

puntos de vista; en forma general, pueden agruparse de acuerdo con los materiales con que se construyen:

- Material homogéneo (tierra o enrocamiento)
- Materiales graduados (tierra y enrocamiento)
- Mampostería
- Concreto.

En esta tesis se tratarán las cortinas de concreto, cuyos tipos más comunes son:

- Cortinas de gravedad.- Este tipo de estructura depende de su propio peso para lograr su estabilidad estructural. La carga del agua se trasmite a través de la cortina al material de la cimentación. Generalmente las cortinas de gravedad tienen un ancho en la base igual a 0.7 a 0.9 de su altura.

- Cortinas de contrafuertes.- En este tipo de cortinas se incluyen: las de losas planas, de arcos múltiples, de contrafuertes de cabeza redonda, y las de cúpulas múltiples. Las cargas del agua se trasmiten a la cimentación por dos sistemas de miembros que soportan carga; (1) losas planas, arcos o cúpulas que soportan la carga directa del agua y la trasmiten a, (2) los contrafuertes, y estos a su vez a la cimentación.

- Cortinas en arco.- En general este tipo de cortinas pueden subdividirse en: cortinas de radio constante; de ángulo costante y de radio variable. (figs. 1 a 3).

Es necesario hacer notar que es relativamente difícil encontrar sitios adecuados para construir una cortina en arco. La construcción resulta factible cuando se cuenta con un cañón estrecho en forma de "V" o "U". Las paredes del cañón deben ser de roca adecuada para soportar la carga del agua trasmitida a los costados por el efecto del arco. De la misma forma, se debe contemplar la posibilidad de contar con bancos de materiales de buena calidad para la elaboración del concreto que dará forma a la cortina.

En México existen varias cortinas en arco, de las que destacan por su magnitud: La presa Calles, sobre el río Santiago en el estado de Aguascalientes, construida en 1931 por la Comisión Nacional de Irrigación (hoy S.A.R.H.); la presa Plutarco Elías Calles sobre el río Yaqui en el estado de Sonora; la presa Manuel M. Diegues (Sta. Rosa) en el río Santiago, estado de Jalisco; éstas dos últimas corresponden a la Comisión Federal de Electricidad, que las terminó de construir en el año de 1964 y 1963 respectivamente.

La capacidad de los arcos para soportar cargas, permite al proyectar una cortina, ahorrar material y mantener una estructura segura. En el proyecto de cortinas en arco, el objetivo es trasmitir las fuerzas hidrostáticas a los apoyos laterales, aunque existen otras fuerzas, tales como las producidas por sismo o por la presión de los azolves. En este trabajo sólo se considera la carga producida por la presión hidrostática del agua, ya que de igual manera como se trata-a esta fuerza se sigue para las restantes

La teoría para el proyecto de cortinas en arco, ha -- cambiado constantemente. Primero se usó para el diseño la -- Teoría del Cilindro; todavía se emplea para estudios de pre-factibilidad y para análisis en presas pequeñas. Esta teoría supone que toda la carga del agua se trasmite a los apoyos - por el efecto de arco. Se obtiene el espesor del arco a diferentes profundidades con la formula

$$t = \frac{r\gamma x}{f} \tag{1.1}$$

donde: t es el espesor del arco a la profundidad x; r es el-radio del arco; γ es el peso volumétrico del agua y f es el-esfuerzo permisible de compresión para el concreto.

Sin embargo, como el arco es sólo un segmento de círculo y no un anillo completo, los esfuerzos y dimensiones -- calculados pueden ser solamente aproximaciones. Además,en -- las secciones gruesas el esfuerzo máximo puede ser muy diferente.

Posteriormente se han hecho análisis en que se combina la acción de vigas verticales en voladizo con la de arcos horizontales, de lo que se han obtenido resultados satisfactorios. En este tipo de análisis, la carga hidrostática se - divide entre los arcos horizontales y las vigas verticales. Los esfuerzos calculados, cuando las deformaciones en puntos coincidentes de arcos y vigas concuerdan satisfactoriamente, se consideran como los esfuerzos verdaderos en la cortina.

El método de las Cargas de Prueba utiliza esta técnica, haciendo una repartición preliminar de la presión del -- agua entre arcos y voladizos de tal forma que las deflexiones en los puntos de intersección sean iguales, calculados - separadamente para cada elemento. La repartición de la presión se varía para lograr la igualdad de los desplazamientos.

El método de "ARCOS-MUROS", también supone la repartición de carga entre arcos y voladizos con la particularidad de que este método trata de hacer lineales las ecuaciones de la elasticidad, para resolver el problema sin tanteos.

La intención de este trabajo es presentar un modelo - digital de análisis por el método de "ARCOS-MUROS". En este modelo se considera la interacción de varios arcos con una - sola viga vertical en voladizo, la correspondiente a la clave de los arcos. En las presas de poca o mediana altura, la determinación de esfuerzos basada en la distribución de cargas dada por una sola viga, es normalmente suficiente. Aún - en las presas altas, puede usarse una sola viga para diseños preliminares con el fin de hacer comparaciones económicas y de factibilidad técnica.

2.- C R I T E R I O D E A N A L I S I S

El método de los "ARCOS-MUROS" se basa principalmente en la solución de las ecuaciones diferenciales de los cascarones. Se desarrolla la teoría de cascarones en su forma más general, y se encuentra un sistema de ecuaciones diferenciales que al ser resuelto, proporciona un procedimiento númerico de análisis.

Conviene mencionar las hipótesis simplificadoras que se hacen para encontrar las relaciones básicas de los cascarones; estas son:

a) El comportamiento del cascarón es elástico

b) Las deformaciones son pequeñas con relación al espesor y radio del arco (régimen de deformaciones infinitesimales)

c) Se ignoran las deformaciones por esfuerzo cortante

d) Se desprecian los productos entre las deformaciones y sus derivadas.

Considerese una porción de la superficie de un cascarón (fig.4); se observa que α = constante y β = constante, son las trazas del cascarón con los planos YZ y XZ respectivamente; también se puede establecer en todo punto "O" de la superficie media, un sistema de coordenadas tangente en ese punto a las líneas de curvatura α y β. En esta forma, las coordenadas "x" e "y" serán función de α y β, o sea:

$$x = x(\alpha, \beta) \quad ; \quad y = y(\alpha, \beta) \tag{2.1}$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = A(\alpha, \beta) \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = B(\alpha, \beta) \tag{2.2}$$

A y B son dos funciones positivas que indican la variación de las coordenadas x e y.

Durante la deformación, cada punto "o" sufrirá los desplazamientos u, v, w. Se pueden establecer así las siguientes relaciones entre los desplazamientos y las deformaciones unitarias de la superficie media del cascarón:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} \\
\omega &= \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \\
X_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}\right] - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right] \\
X_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right] - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}\right] \\
\tau &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right] - \frac{1}{BA^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{AR_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

en estas ecuaciones, ε_1 y ε_2 son las deformaciones unitarias en las direcciones x e y respectivamente; R_1 y R_2 son los radios de curvatura; ω es la deformación angular de la porción de superficie media; X_1 y X_2 son las variaciones de la curvatura en las direcciones x e y; y τ es la deformación por torsión de la superficie media.

Ahora bien, de la ley de Hooke para un material isó-- tropo en estado de esfuerzo plano, se conocen las ecuaciones que relacionan las deformaciones con los esfuerzos;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \qquad (2.4)$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = G\omega_{xy}$$

donde: σ_x y σ_x son los esfuerzos normales en las direcciones x e y; E es el módulo de elasticidad o de Young; ν es la relación de Poisson; τ_{xy} y τ_{yx} son los esfuerzos cortantes; y G es-- el módulo de elasticidad al cortante.

A partir de los esfuerzos anteriores, se pueden encon trar las fuerzas normales, cortantes y momentos de flexión-- y de torsión, integrandolos en la dirección de z; o sea, a lo largo del espesor de la porción de cascarón, para obtener -- asi:

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad , \quad n_y = \int \sigma_y \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz$$

$$n_{xy} = \int \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad , \quad n_{yx} = \int \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz$$

$$q_x = \int \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad , \quad q_y = \int \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \qquad (2.5)$$

$$m_x = \int \sigma_z\, Z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad , \quad m_y = \int \sigma_y\, z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad \ldots\ldots$$

$$m_{xy} = \int \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \qquad , \qquad m_{yx} = \int \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz$$

todas las integrales tienen los mismos límites.

Considerese ahora el equilibrio de fuerzas en las --- tres direcciones y de momentos respecto a los ejes X, Y y Z, para obtener las relaciones siguientes. (fig.5)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(n_x B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(n_{yx} A)}{\partial \beta} - (r_1 n_{xy} B + r_2 n_y A) + \\
&\qquad + (q_1 q_x B - q_2 q_y A) + AB X_0 = 0 \\
&\frac{\partial(n_{xy} B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(n_y A)}{\partial \beta} - (p_1 q_x B + p_2 q_y A) + \\
&\qquad + (r_1 n_x B + r_2 n_{yx} A) + AB Y_0 = 0 \\
&\frac{\partial(q_x B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(q_y A)}{\partial \beta} - (q_1 n_x B + q_2 n_{yx} A) + \\
&\qquad + (p_1 n_{xy} B + p_2 n_y A) + AB Z_0 = 0 \qquad (2.6) \\
&\frac{\partial(m_{xy} B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(m_y A)}{\partial \beta} + (m_x B r_1 + m_{yx} A r_2) - AB q_y = 0 \\
&\frac{\partial(m_x B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(m_{yx} A)}{\partial \beta} - (m_{xy} B r_1 + m_y A r_2) - AB q_x = 0 \\
&m_x B p_1 + m_y A q_2 + m_{xy} B q_1 + m_{xy} A p_2 + (n_{xy} - n_{yx}) AB = 0
\end{aligned}$$

X_0, Y_0, Z_0; son las componentes de la fuerza externa.

Los coeficientes que figuran en estas ecuaciones se - pueden calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
p_1 &= l_3 \frac{\partial l_2}{\partial \alpha} + m_3 \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial \alpha} ; \quad p_2 = l_3 \frac{\partial l_2}{\partial \beta} + m_3 \frac{\partial m_2}{\partial \beta} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial \beta} \\
q_1 &= l_1 \frac{\partial l_3}{\partial \alpha} + m_1 \frac{\partial m_3}{\partial \alpha} + n_1 \frac{\partial n_3}{\partial \alpha} ; \quad q_2 = l_1 \frac{\partial l_3}{\partial \beta} + m_1 \frac{\partial m_3}{\partial \beta} + n_1 \frac{\partial n_3}{\partial \beta} \qquad (2.7) \\
r_1 &= l_2 \frac{\partial l_1}{\partial \alpha} + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha} ; \quad r_2 = l_2 \frac{\partial l_1}{\partial \beta} + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \beta} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial \beta}
\end{aligned}$$

donde: l_1, l_2, l_3 son los cosenos directores de los ejes x,y,z locales, respecto al eje X del sistema de ejes fijos X,Y,Z -

(fig.4); de igual forma, m_1, m_2, m_3 respecto a $\bar{Y}$ y n_1, n_2, n_3 - respecto a $\bar{Z}$.

Las diversas relaciones escritas antes, son suficientes para establecer las ecuaciones diferenciales de cascarones. Efectivamente; las ecs.(2.3) definen las deformaciones en función de los desplazamientos u, v, w; las ecs.(2.5) proporcionan las fuerzas internas, y las ecs.(2.6) relacionan - esas fuerzas entre si para lograr el equilibrio.

Según la hipótesis (c) mencionada al principio del capítulo, se pueden eliminar las fuerzas cortantes q_x y q_y en las ecs.(2.6) e introducir en las relaciones así obtenidas-- los valores de las ecs.(2.5) y (2.3). De lo anterior, se obtienen tres ecuaciones solo en función de los desplazamientos y las fuerzas externas.

Los cálculos descritos son realmente complicados, por lo que conviene en cada caso recurrir a las ecs.(2.3),(2.5), (2.6) y (2.7), para obtener las ecuaciones diferenciales correspondientes al caso particular.

Se pueden particularizar las ecuaciones generales para el caso de un cascarón cilíndrico, el cual se asemeja a-- una cortina en arco y establecer las ecuaciones diferenciales relativas a este problema.

La figura 5, representa una parte de la superficie redía de una cortina cilíndrica: es decir, de una cortina con- curvatura simple y constante. Las direcciones de curvatura α y β coinciden con las generatrices y directrices del cilin-- dro.

Cada punto de la superficie estará localizado según - los valores de α y β de coordenadas cilíndricas, definidas-- estas como la distancia a la corona y como la amplitud del - ángulo del arco. El radio r se mantiene constante. En cada-- punto "P" definido por α_0 y β_0 se establece un sistema local de coordenadas (x,y,z); eligiendo además un sistema de coor- denadas fijo $(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$, tal que $\overline{X}$ coincida con el eje del ci-- lindro y que $\overline{Y}$ y $\overline{Z}$ sean dos radios en el plano de la corona, se supone que $\overline{Z}$ pasa por el punto "O" origen de las coordenadas cilíndricas, (fi.6).

De lo anterior se puede hacer lo siguiente: la rela-- ción entre las coordenadas cilíndricas y las locales se pue- de considerar como:

$$x = \alpha-\alpha_0 \quad ; \quad y = \beta r - \beta_0 r \qquad (2.8)$$

según (2.2),

$$A = 1 = cte. \quad ; \quad B = r = cte. \qquad (2.9)$$

también,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad ; \quad R = r = cte. \qquad (2.10)$$

y además,

$$\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial(\ldots)}{\partial\beta} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial y} \qquad (2.11)$$

Con relación a los ejes establecidos (fig.6), se puede formar la siguiente tabla de cosenos directores:

	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$
x	$l_1 = 1$	$m_1 = 0$	$n_1 = 0$
y	$l_2 = 0$	$m_2 = \cos$ [illegible]	$n_2 = \operatorname{sen}$ [illegible]
z	$l_3 = 0$	$m_3 = -\operatorname{sen}$ [illegible]	$n_3 = \cos$ [illegible]

aplicando estos valores de los cosenos en (2.7) se tiene:

$$p_1 = q_1 = q_2 = r_1 = r_2 = 0 \; ; \quad p_2 = 1 \qquad (2.12)$$

Sustituyendo (2.9),(2.10) y empleando (2.11) en (2.3) se llega a lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} \\
\omega &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{du}{dy} \\
\chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\chi_2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\tau &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}
\end{aligned}
\qquad (2.13)
$$

Si se emplean las simplificaciones anteriores en la-- ec.(2.4), las integrales (2.5) se pueden efectuar, con lo -- que se obtiene:

$$n_x = D\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} - \nu\frac{w}{r}\right] + \frac{K}{r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{-2+2\nu+3\nu^2}{2(1-\nu)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\nu(2+\nu)}{2(1-\nu)}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\nu(2+\nu)}{2(1-\nu)}\right)\right]$$

$$n_y = D\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{r}\right] + \frac{K}{r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{2+\nu}{2(1-\nu)}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\nu(1+2\nu)}{2(1-\nu)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\nu(2+\nu)}{2(1-\nu)}\right)\right]$$

$$n_{yx} = \frac{D}{2}(1-\nu)\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{K}{2}(1-\nu)\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,\frac{1}{r}\right]$$

$$n_{xy} = \frac{D}{2}(1-\nu)\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{K}{2}(1-\nu)\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,\frac{1}{r}\right]$$

$$m_x = K\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2\nu}{r}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{1}{r} - \frac{\nu w}{r^2}\right] \qquad (2.14$$

$$m_y = K\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right]$$

$$m_{xy} = K(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{3}{2r}\,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2r}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$m_{yx} = K(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

donde:

$$D = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad ; \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (2.15$$

h es el espesor del cascarón.

De igual forma se puede simplificar la ec. (2.6) con ayuda de las ecs.(2.9) a (2.12), para obtener las nuevas condiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} - \frac{q_y}{r} + Y = 0$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{n_y}{r} + Z = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.16$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0$$

$$m_{yx} + (n_{xy} - n_{yx})r = 0$$

Se observa en este sistema de ecuaciones, que la última de - ellas se satisface directamente de las ecs.(2.14). De la --- cuarta y quinta de esas ecuaciones se pueden obtener los valores de las fuerzas cortantes q_x y q_y, que al ser empleados en las tres primeras, definen un sistema de ecuaciones básicas de equilibrio como el siguiente:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + X_0 = 0$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{1}{r}\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + Y_0 = 0 \qquad (2.17)$$

$$\frac{n_y}{r} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + Z_0 = 0$$

Si en el sistema de ecuaciones anterior, se emplean - las ecs.(2.14), el resultado será un sistema con derivadas-- hasta de cuarto orden, lo que para ser aplicado directamente al cálculo de cortinas resulta demasiado complicado. En se-- guida se hará una serie de simplificaciones con el fin de establecer relaciones más manejables numéricamente.

La primera simplificación, es suponer nula la rela--- ción de Poisson; lo anterior puede ser justificado por el hecho de que para el concreto, es relativamente pequeño (menos de 1/6). Una segunda simplificación, es considerar que - la cortina es delgada; esto significa que el espesor a cualquier nivel debe ser menor de 1/5 del radio de curvatura. A partir de estas dos simplificaciones es posible transformar-las relaciones (2.15) en la siguiente forma:

$$k = \frac{K}{r^2 D} = \frac{h^2}{12 r^2} \leq \frac{1}{300} \tag{2.18}$$

Los desplazamientos verticales son relativamente pe--queños de tal forma que la siguiente simplificación será con siderar que:

$$u(x,y) = 0 \tag{2.19}$$

Al conjugar las simplificaciones anteriores y conside rar al arco como un elemento independiente, se pueden igno--rar las derivadas con respecto a x, para que las relaciones-(2.14) tomen la forma:

$$\begin{aligned} N = n_y &= D \frac{\partial v}{\partial y} + D \frac{w}{r} + K \frac{w}{r^3} + \frac{K}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M = m_y &= K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K \frac{w}{r^2} \\ Q = q_y &= \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.20}$$

que son los elementos mecánicos que actuan sobre el arco ---(fig.7).

Las ecs.(2.20) sustituidas en las ecs.(2.17) para Y_0- y Z_0 conducen a:

$$\begin{aligned} & D \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{D}{r} \frac{\partial w}{\partial y} + Y_0 = 0 \\ & \frac{D}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{D}{r^2} w + \frac{K}{r^4} w + 2 \frac{K}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Z_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

De considerar ahora el caso particular de $Y_0 = 0$ y -- $Z_0 = Pa$ (fig.7), y la relación (2.18), se llega a:

$$r\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

$$r\frac{\partial v}{\partial y}+w+k\left[w+2r^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+r^4\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\right]\frac{r^2 Pa}{D}=0 \tag{2.22}$$

donde Pa es la presión que actúa uniformemente sobre el eje-del arco.

La solución simplificada de este sistema de ecuacio-- nes diferenciales parciales es la siguiente:

$$w=-\frac{r^2 Pa}{D(1+k)}-\frac{C_1}{(1+k)}+C_2\cos\left[\frac{y}{r}\right]+C_5\left[\frac{y}{r}\right]\operatorname{sen}\left[\frac{y}{r}\right]$$

$$v=C_1\left[\frac{y}{r}\right]-C_2\operatorname{sen}\left[\frac{y}{r}\right]-C_5\left[\operatorname{sen}\left[\frac{y}{r}\right]-\left[\frac{y}{r}\right]\cos\left[\frac{y}{r}\right]\right] \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=-C_2\frac{1}{r}\operatorname{sen}\left[\frac{y}{r}\right]+C_5\frac{1}{r}\left[\operatorname{sen}\left[\frac{y}{r}\right]+\left[\frac{y}{r}\right]\cos\left[\frac{y}{r}\right]\right]$$

donde: C_1, C_2, C_5, son las constantes de integración que que dan después de simplificar la solución general del sistema - dado por las ecs.(2.22). Es claro que al contar con tres --- ecuaciones y tres incógnitas, el sistema (2.23) puede ser re suelto para C_1, C_2 y C_5.

Hasta aquí, se ha logrado encontrar el sistema de --- ecuaciones diferenciales para arcos cilíndricos delgados y - su solución correspondiente; todo esto se ha derivado de las ecuaciones generales de los cascarones.

Se mencionó en la introducción que el método de los - "ARCOS-MUROS" considera la interacción entre arcos horizonta les y una viga en voladizo vertical. La solución anterior co rresponde a los arcos independientes; a continuación se verá cómo se hace compatible la acción del voladizo.

En cada nivel, la presión hidrostática está equilibrada por la carga que toma el arco, Pa, y por la carga que toma el voladizo, Pv. Esto se puede expresar como:

$$Pa_i + Pv_i = P_i \tag{2.24}$$

Para resolver el problema de la repartición de carga, es necesario conocer la deformación y la curvatura en la clave del arco: para ello, se emplearán las relaciones (2.23) y se supondrá que el origen de las coordenadas cilíndricas es la clave del arco y así definir la siguiente igualdad:

$$w = -\frac{r^2\,Pa}{D(1+k)} - \frac{C_1}{(1+k)} + C_2 = g\ Pa \tag{2.25}$$

donde: g es un coeficiente de deformación que varía de un arco a otro, según la profundidad.

La condición básica que permite tratar independientemente arcos horizontales y un voladizo central, es que en puntos coincidentes de arcos y voladizo, la deformación sea la misma; o sea:

$$w_{ai} = w_{vi}$$

donde el subíndice "a" indica arco, el "v" voladizo y el "i" el nivel al que corresponden las deformaciones.

Si se toma (2.25) para el arco y se emplea el teorema de los trabajos recíprocos o teorema de Betti en el voladizo, se puede escribir:

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\ Pv_j = g_i\ Pa_i \qquad (2.26)$$

en esta expresión, w_{ij} es la deformación del voladizo en el nivel i producida por una carga unitaria en el nivel j, calculada con el teorema de Betti; todo el primer miembro es la deformación total del voladizo en el nivel i.

Ahora bien, según (2.24)

$$Pa_i = (P_i - Pv_i)$$

que al ser empleada en (2.26) produce el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\sum_{J=1}^{n} w_{ij}\ Pv_j + Pv_i\ g_i - P_i\ g_i = 0 \qquad (2.27)$$

El sistema (2.27) proporciona la parte de la carga hidrostática que corresponde resistir al voladizo; bastará recurrir a la ec.(2.24) para conocer la carga que toma el arco.

Los esfuerzos en el voladizo se pueden calcular con la fórmula clásica de la flexión:

$$\sigma_x = \frac{m_x Z}{I} \qquad (2.28)$$

en la que, I es el momento de inercia de la sección del voladizo considerando un ancho unitario y el espesor correspondiente al nivel tratado.

Para el arco se puede emplear la siguiente expresión dada por J. Lombardi;

$$\sigma_y = \frac{Px}{h} - k - \frac{Z}{r-Z}\frac{M_y r}{I} \qquad (2.29)$$

A partir del sistema (2.23), los cálculos se pueden realizar en forma sistemática; para ello, en el siguiente capítulo se desarrolla un programa para computador digital que abarca todas las faces de cálculo numérico.

3.- M O D E L O D I G I T A L

Con base en el desarrollo matemático del capitulo anterior, se ha elaborado un programa para computador digital- con el fin de cubrir las fases de análisis que el método de los "ARCOS-MUROS" exije. El programa esta constituido por -- seis partes principales y ha sido escrito en lenguaje FORTRAN IV. Las corridas se hicieron en un computador tipo CYBER 70- CDC. También se implementó el programa en lenguaje BASIC empleando un minicomputador de capacidad media. En la fig.8 se presenta el diagrama de bloques del programa.

El proceso para definir la configuración definitiva-- de una cortina en arco se puede considerar como iterativo, - de tal forma que es necesario preparar varias alternativas-- hasta encontrar la que, al ser considerada con el criterio - de esfuerzos permisibles, proporcione resultados satisfactorios.

A continuación se describen brevemente las partes del modelo:

PRIMERA PARTE. En esta parte se presenta la lectura - de los datos de proyecto.

-Elevación de la corona y elevación de desplante.- Estos datos se obtienen de un estudio hidrológico y topografico, respectivamente, en que se haya determinado la altura -- que se requiere para la cortina.

-Ancho de la corona.- En el siguiente capítulo se verá una forma de calcular el ancho en la corona, de acuerdo - con la altura de la cortina.

-Semicuerda y semiángulo que abarca cada uno de los - arcos.- Estos dos grupos de datos geométricos se determinan- al hacer un trazo previo de la cortina sobre un plano de curvas de nivel (fig.12).

-Coeficientes de deformación del terreno K_1, K_2, K_3 y K_5.- Estos valores pueden ser tomados de las curvas publicadas por el U.S.B.R. (fig.9).

SEGUNDA PARTE. Aquí se completa el cálculo de la geometría de la cortina iniciado al hacer el trazo preliminar. Se definen en esta parte los siguientes parámetros: La pro-- fundidad de los arcos; el radio de los arcos en función de - la cuerda y el ángulo; el espesor de la cortina a diferentes niveles con una fórmula exponencial propuesta por J. Lombardi; la longotud de cada arco y el volumen total de la cortina.

En esta segunda parte también se calcula la presión--

hidrostática total del agua con la [illegible]

$$Ph = \gamma x \; 1 + \frac{h}{2r})$$ (3.1)

Se ha considerado suficiente dividir la cortina en -- diez arcos, de tal manera que se tendrán once juegos de da-- tos; uno para cada una de las secciones que limitan los ar-- cos.

TERCERA PARTE. Esta parte corresponde al cálculo de - los coeficientes "G" de deformación radial para la clave de- cada uno de los arcos y al cálculo de las deformaciones del- voladizo central por carga triangular unitaria (fig.10).

El coeficiente "G" se puede calcular con la ecuación (2.25) después de haber resuelto el sistema (2.23) para C_1, C_2 y C_5. El sistema (2.23) se resuelve aplicando condiciones de frontera; es decir, las deformaciones en el extremo del - arco son las mismas que las del terreno de apoyo; dichas de formaciones pueden expresarse con las relaciones de F. Vogt:

$$Wt = \frac{1}{Et}\left(K_3 q + K_5 \frac{m}{h}\right)$$

$$Vt = \frac{1}{Et}\left(-K_2 n\right) \qquad (3.1)$$

$$\frac{dWt}{dy} = \frac{1}{Et}\left(-K_5 \frac{q}{h} - K_1 \frac{m}{h}\right)$$

donde: Wt y Vt son respectivamente, la deformación en dirección radial y la deformación en dirección tangencial del terreno; Et es el módulo de elasticidad de la roca de apoyo supuesto igual al del concreto; K_1, K_2, K_3 y K_5 son los coeficientes de deformación del terreno (fig.9).

Igualando (2.23) y (3.2) se determinan fácilmente C_1, C_2 y C_3.

Las deformaciones del voladizo se calculan para una carga unitaria uniforme pero descompuesta en dos grupos de cargas triangulares, también unitarias, y cuyos vértices coinciden en los cruces con los arcos (fig.10). Las cargas triangulares unitarias se transforman a fuerzas concentradas equivalentes para aplicar con facilidad el teorema de los trabajos recíprocos. De esta forma se obtienen las deformaciones del voladizo en los puntos donde se cruza con los arcos.

CUARTA PARTE. En esta parte se resuelve el sistema (2.27) que por haberse dividido la cortina en diez arcos, re resulta de orden diez. Este sistema impone la compatibilidad de deformaciones entre la clave de los arcos y el voladizo central. Al mismo tiempo se determina aquí la parte que de la carga hidrostática soportan el voladizo y los arcos.

QUINTA PARTE. En esta parte se calculan los parámetros que definen si la cortina es o no adecuada; estos parámetros son: los esfuerzos tangenciales en los arcos y en el voladizo y sus deformaciones.

Los esfuerzos tangenciales en los arcos se calculan--

con la expresión (2.29) para diferentes [illegible], desde la clave hasta el apoyo, tanto en el extradós e intradós, como en el eje del arco.

Para el cálculo de los esfuerzos del voladizo se emplea la fórmula de la flexión (2.28), también llamada de la escuadría.

Las deformaciones de la clave de los arcos, que son las mismas del voladizo, se determinan con los coeficientes "G" de deformación radial, simplemente al multiplicarlos por la carga que toma el arco del nivel correspondiente; la deformación tangencial de la clave se considera nula por estar tratando en este caso con arcos simétricos.

En el apoyo del arco se pueden considerar dos deformaciones, las deformaciones del terreno en dirección radial y la deformación del mismo en dirección tangencial; estas se pueden calcular con las relaciones (3.2) antes mencionadas.

SEXTA PARTE. Esta última parte está dedicada a la impresión, tanto de los datos de proyecto, como de los principales resultados del análisis.

Adicionalmente, el programa cuenta con una subrutina que resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan. Este método es de suficiente exactitud para resolver en especial los tipos de sistemas que se generan, tales como el sistema (2.23) de orden tres y el (2.27) de orden diez.

A continuación se dá la definición de las principales variables que intervienen en el programa, así como un listado del mismo:

EC.- Elevación de la corona (msnm)

ED.- Elevación de desplante (msnm)

AC.- Ancho de corona (m)

CK2.- Coeficiente de la ley de variación de espesores (adimensional)

SC.- Semicuerda del arco (m)

R.- Radio interno del arco (m)

ESP.- Espesor del arco (m)

RM.- Radio del eje del arco (m)

PH.- Presión hidrostática (ton/m^2)

A.- Matriz de coeficientes del sistema (2.23)

B.- Vector de términos independientes del sistema --- (2.23)

CI1, CI2, CI5.- Coeficientes de integración que resultan de la solución del sistema (2.22) (m)

G.- Coeficiente de deformación radial para la clave - de los arcos (m/ton)

DI0, DI1, DI2.- Valores de las integrales que resultan de la aplicación del teorema de - los trabajos recíprocos.

DELTA.- Deformación en el nivel I por carga concentrada unitaria en el nivel J

W.- Deformación en el nivel I por carga triangular -- unitaria en el nivel J

SUW.- Vector de términos independientes del sistema-- (2.27)

C2SF.- Matriz de coeficientes del sistema (2.27)

PV2.- Presión que soporta el voladizo (ton/m^2)

PA2.- Presión que soportan los arcos (ton/m^2)

EFORTA.- Esfuerzos producidos en los arcos (ton/m^2)

VM.- Momento flexionante en el voladizo (ton-m)

EFORTV.- Esfuerzos producidos en el voladizo (ton/m^2)

DEFOC.- Deformación de la corona de los arcos (m)

ENE.- Fuerza normal en una sección de arco (ton)

EME.- Momento flexionante en dirección "y", en una -- sección de arco (ton-m)

CU.- Fuerza cortante en una sección de arco (ton)

DEFRT.- Deformación radial del terreno (m)

DEFTT.- Deformación tangencial del terreno (m)

```
      DIMENSION  (11), (11),NI(11),X(11),ELE(11),  (11),ESP(11),
     111),YAR(11),AAR(11),  (11),A(13,13),B(11),PH(11),   (11),   (11),
     2I2(11),    (11),    (11),GAMA(11),DELTA(11,11),  (11,11),CKA(11),
     3A(11),    (11),CTO(11),  (13,13),COEF(13,13),S  (11),FAR(11),
     4),  (11),  (13,13),  (13,13),B(13),  (13),PT(11),    TA(11,3),
     5VM(11),EFORTV(11),DEF (11),DEFRT(11),DEFTT(11)
C*** DATOS DE PROYECTO
      READ 1, EI,ED,AO,CK2
      READ 1, (  (I),I=1,11)
      READ 1, (ANGAR(I),I=1,11)
      READ 1, COT1,COT2,COT ,COT5
      PRINT 21
C*** GEOMETRIA DE LA CORTINA
      DX= (ED-EI)/10.0
      DO 61 J=1,11
      NI(J)= J-1
      X(J)= DX*NI(J)
      ELE(J)= ED-X(J)
      R(J)= SO(J)/SIN(ANGAR(J))
      ESP(J)= AO*EXP(CK2*X(J))
      RM(J)=  (J)+ESP(J)/2.
      YAR(J)= RM(J)*ANGAR(J)*2.0
      AAR(J)= YAR(J)*ESP(J)
      NANGAR= ANGAR(J)*180./3.1416+0.5
      PH(J)= X(J)*(1+ESP(J)/(2.*R(J)))
      PRINT 22,NI(J),ELE(J),X(J),SO(J),NANGAR,R(J),ESP(J),RM(J),YAR(J),
     1AAR(J)
   61 CONTINUE
      VOL= (AAR(1)+AAR(11))*DX/2.
      DO 62 I=2,10
      VOL= VOL+AAR(I)*DX
   62 CONTINUE
      PRINT 23, VOL
C*** COEFICIENTES DE DEFORMACION RADIAL Y CURVATURA DE LOS ARCOS
      PRINT 24
      PRINT 25
      DO 63 I=1,11
      SINA= SIN(ANGAR(I))
      COSA= COS(ANGAR(I))
      ESR= ESP(I)/RM(I)   $ ESR2= ESR**2.  $ ESR3= ESR**3.
      A(1,1)=   (1,I)=(   ESR2-12.)/(12.*ESR2)
      A(1,2)=A   (2,I)=C  
      A(1,3)=A   (3,I)=ANG    (1+COT /6.*ESR  SINA-   
      A(2,1)=A    ,I)=-(      (  ( (12.+ESR2)*ESP(I))
      A(2,2)=    ,I)=-   
      A(2,3)=A    ,I)=-C    *  ESP(I))*   *  A+COT  *   (I))*
     1 SA+   A*ANGAR(I)-    /RM(I)
      A(3,1)=A   ,I)=A   
      A(3,2)=   ,I)=-S 
```

```
      A(3,3)=AR(9,I)=[illegible]/5.*[illegible]SA-[illegible]+AR[illegible](I) [illegible]
      B(1)=AR(10,I)=(ESP(I)*(12./ESP2-GDT5))/(12.+ESP2)
      B(2)=AR(11,I)=[illegible]T1/(12.+ESP2)
      B(3)=AR(12,I)=[illegible]RM(I)
      NICA=3
      CALL SISTEMA(A,B,C,NICA)
      CI1= AR(13,I)= C(1)
      CI2= AR(14,I)= C(2)
      CI5= AR(15,I)= C(3)
      CI5P= AR(16,I)= CI5*(1+ESP2/5.)
      G(I)= AR(17,I)= -(12.*ESP(I))/(ESP2*(12.+ESP2))-(12.*CI1)/(12.+
     1ESP2)+CI2
      FN(I)= AR(18,I)= (-CI2+2.*CI5P)/RM(I)**2.
   63 CONTINUE
      PRINT 26,(AR(13,I),I=1,10),(AR(14,I),I=1,10),(AR(16,I),I=1,10)
      PRINT 27
      PRINT 25
      PRINT 28,(G(I),I=1,10),(FN(I),I=1,10)
C*** DEFORMACION EN EL NIVEL I POR CARGA UNITARIA EN EL NIVEL J
      CK2P= CK2*3. $ CK2P2=CK2P**2. $ CK2P3=CK2P**3.
      DO 64 I=1,11
      CKX=CK2P*X(I) $ CKX2=CKX**2. $ ECKX=EXP(CKX)
      DI0(I)= -1./(CK2P*ECKX)
      DI1(I)= -(CKX+1.)/(CK2P2*ECKX)
      DI2(I)= -(CKX2+2.*CKX+2.)/(CK2P3*ECKX)
   64 CONTINUE
      DO 65 I=1,11
      ALFA(I)= DI0(11)-DI0(I)
      BETA(I)= DI1(11)-DI1(I)
      GAMA(I)= DI2(11)-DI2(I)
   65 CONTINUE
      DO 66 I=1,11
      DO 66 J=1,11
      IF(I.GT.J) GO TO 66
      DELTA(I,J)=DELTA(J,I)= [illegible](I)*X(J)*ALFA(J)-(X(I)+X(J))*BETA(J)+GAM
     1(J)
   66 CONTINUE
      PRINT 29
      PRINT 30,(I,(DELTA(I,J),J=1,11),I=1,11)
C*** DEFORMACION POR CARGA TRIANGULAR UNITARIA
      AG3= AG**3./12.
      DX6=(DX/6.)*AG3 $ DX3=(DX/3.)*AG3 $ [illegible]
      DO 67 I=1,11
      DO 67 J=1,11
      IF(J.EQ.1.OR.J.EQ.11) GO TO 101
      W(I,J)= DX6*DELTA(I,J+1)+DX23*DELTA(I,J)+[illegible]TA(I,J-1)
      GO TO 67
  101 IF(J.EQ.11) GO TO 102
      W(I,J)= [illegible]LTA(I,J)+[illegible]TA(I,J+1)
      GO TO 67
```

```
  102 W(I,J)=DX**DELTA(I,J)+DX3*DELTA(I,J-1)
   57 CONTINUE
      PRINT 31
      PRINT 32,(I,(W(I,J),J=1,11),I=1,11)
C**** COEFICIENTES DEL SISTEMA (II.71)
      DO 68 I=1,10
      SUW(I)=TI(I)=-T*(I)*G(I)
      DO 68 J=1,10
      IF(I.EQ.J)103,104
  103 COEF(I,J)=R2S(I,J)=W(I,J)+(-G(I))
      GO TO 68
  104 COEF(I,J)=R2S(I,J)=W(I,J)
   68 CONTINUE
      NICA=10
      CALL SISTEMA(R2S,TI,PV2,NICA)
      PV2(11)=PH(11)
      DO 69 I=1,11
      PA2(I)=PH(I)-PV2(I)
   69 CONTINUE
      PRINT 32,((COEF(I,J),J=1,10),SUW(I),I=1,10)
      PRINT 33,((PV2(I),I=1,11),(PA2(I),I=1,11),(PH(I),I=1,11))
C*** CALCULO DE ESFUERZOS EN ARCOS
      PRINT 34
      DO 75 I=1,10
      AN=ANGAR(I)/10.
      RA=ANGAR(I) $ T=RM(I) $ E=ESP(I)
      RK=ESP(I)**2./(12.*RM(I)**2.)
      C1=AR(13,I) $ C2=AR(14,I) $ C5=AR(16,I)
      DO 76 J=1,11
      PR=J-1
      ANG=AN*PR
      Z=-E $ S2=E/2.
      DO 76 K=1,3
      Z=Z+S2
      EFORTA(J,K)=(-T/E+T*RK/(E*(1.+RK))+(C1*RK)/(T*(1.+RK))+(Z/(T-Z))*
     1(-T/(E*(1.+RK))-C1/(T*(1.+RK))+(2.*C5*COS(ANG))/T))*PA2(I)
   76 CONTINUE
      PRINT 35,I,((EFORTA(L,M),L=1,11),M=1,3)
   75 CONTINUE
C*** ESFUERZOS EN EL COLADIZO
      FM(1)=0.0 $ EFCTV(1)=0.0
      DO 77 I=2,11
      RATO=I-1
      VM(I)=(DX**2.*RATO/6.)*(2.*PV2(1)-PV2(1)*RATO+PV2(I)/...)*(-1.
     1)
      DO 77 J=2,I
      RATO=I-J
      FM(I)=FM(I)-DX**2.*RATO*PV2(J)
      EFCTV(I)=-6.*FM(I)/ESP(I)**2.
   77 CONTINUE
```

```
      PRINT 3?,(?(I),I=1,11),(???Y(I),I=1,11)
C*** CALCULO DE DEFORMACIONES
      DEF?D(11)=0.
      DO 78 I=1,11
      DEFDS(I)=-?(I)*PA2(I)
      ENE=-RM(I)+(ESP(I)**3./(6.*RM(I)**3.))*AR(16,I)*COS(ANGAR(I))
      EME=-ESP(I)**2./(12.+ESP(I)**2./RM(I)**2.)-(ESP(I)**3.*AR(17,I))/
     1(RM(I)**2.*(12.+ESP(I)**2./RM(I)**2.))+(ESP(I)**3./(6.*RM(I)**2.))
     2*AR(16,I)*COS(ANGAR(I))
      DU=-(ESP(I)**3./(6.*RM(I)**3.))*AR(16,I)*SIN(ANGAR(I))
      DEFRT(I)=(DOT2*DU+DOT???EME/ESP(I))*PA2(I)
      DEFTT(I)=-DOT2*ENE*PA2(I)
   78 CONTINUE
      PRINT 37,(DEFDS(I),I=1,11),(DEFRT(I),I=1,11),(DEFTT(I),I=1,11)
    1 FORMAT(8F10.0)
   21 FORMAT(1H1,5(/),55X,*-GEOMETRIA DE LA CORTINA-*,5(/),3X,*NIVEL*,2X
     1,*ELEVACION*,4X,*X*,4X,*SEMICUERDA*,2X,*SEMIANGULO*,2X,*RADIO INTE
     2RIOR*,2X,*ESPESOR*,2X,*RADIO MEDIO*,2X,*LONGITUD ARCO*,2X,*AREA MED
     3IA ARCO*,/,18X,*MSNM.*,5X,*M.*,7X,*M.*,8X,*GRADOS*,9X,*M.*,10X,*M.
     4*,9X,*M.*,13X,*M.*,13X,*M.*,//)
   22 FORMAT(11X,I2,1X,F10.2,2X,F5.2,F10.2,8X,I2,?X,F10.3,4X,F7.2,2X,F
     111.3,4X,F10.3,6X,F1?.3,/)
   23 FORMAT(//,20X,*VOLUMEN TOTAL DE LA CORTINA*,F2?.2,3X,*M3*)
   24 FORMAT(3(/),44X,*-SOLUCION DEL SISTEMA (II.23) PARA C1,C2 Y C5-*)
   25 FORMAT(/,6X,*ARCO*,7X,*1*,11X,*2*,11X,*3*,11X,*4*,11X,*5*,11X,*6*,
     111X,*7*,11X,*8*,11X,*9*,10X,*10*)
   26 FORMAT(/,6X,*C1*,3X,10F12.4,/,6X,*C2*,3X,10F12.4,/,6X,*C5*,3X,10F1
     12.4)
   27 FORMAT(/,37X,*-COEFICIENTES DE DEFORMACION RADIAL Y CURVATURA DE L
     1OS ARCOS-*)
   28 FORMAT(/,6X,*G*,4X,10F12.4,/,6X,*F*,4X,10F12.4)
   29 FORMAT(1H1,5(/),35X,*-DEFORMACION EN EL NIVEL -I- POR CARGA UNITAR
     1IA EN EL NIVEL -J--*,5(/))
   30 FORMAT(8X,*J*,11X,*1*,10X,*2*,10X,*3*,10X,*4*,10X,*5*,10X,*6*,10X,
     1*7*,10X,*8*,10X,*9*,9X,*10*,8X,*11*,/,4X,*I*,/,(7X,I2,8X,11F11.3,/
     2))
   31 FORMAT(1H1,5(/),45X,*-DEFORMACION POR CARGA TRIANGULAR UNITARIA-*,
     15(/))
   32 FORMAT(1H1,5(/),43X,*-SISTEMA DE ECUACIONES (II.2 ) Y SU SOLUCION-
     1*,///,9X,*PV1*,7X,*+  PV2*,5X,*+  PV3*,6X,*+  PV4*,5X,*+  PV5*,5X,
     2*+  PV6*,5X,*+  PV7*,5X,*+  PV8*,5X,*+  PV9*,4X,*+  PV10*,///,(3X,
     311F12.3,/))
   33 FORMAT(/,?X,*CARGAS EN EL VOLADIZO -PV-*,//,?X,11F1?.?,//,?X,*CARGAS
     1 EN LOS ARCOS -PA-*,//,3X,11F10.3,//,3X,*CARGA HIDROSTATICA -PH-*,
     2//,?X,11F10.3)
   34 FORMAT(1H1,?(/),57X,*-ESFUERZOS EN LOS ARCOS-*,?(/),?1X,*CLAVE*,?
     1X,*?????*)
   35 FORMAT(?(/),1?X,I?,?X,11F1?.?,/,(1?X,11F1?.?))
   36 FORMAT(1H1,?(/),???,*-??????????? EN EL VOLADIZO-*,?(/),?X,????????
     1,?X,11F1?.?,?(/),?X,????????,?X,11F1?.?)
```

```
    FORMAT(5(/),5X,*-DEFORMACIONES-*,3(/),3X,*DEFORMACION*,/,3X,*RADI
   1AL*,/,3X,*EN LA CLAVE*,7X,11F10.2,//,3X,*DEFORMACION*,/,3X,*RADIAL
   2*,/,3X,*DEL TERRENO*,3X,11F10.2,//,3X,*DEFORMACION*,/,3X,*TANGENCI
   3AL*,/,3X,*DEL TERRENO*,3X,11F10.2)
    END
```

4.- A P L I C A C I O N E S

Se verá en este capítulo la utilización práctica del método de "ARCOS-MUROS", como se describe a continuación.

Una vez que se elige el sitio para la presa, tomando en cuenta su potencial hidrológico, y que de acuerdo con las condiciones topográficas y geológicas se observa que es factible la construcción de una cortina en arco, se procede a preparar los datos para el análisis.

Los parámetros que se requieren al inicio del análisis son principalmente los relativos a la geometría de la cortina; espesores, cuerdas y ángulos de los arcos, así como los coeficientes de deformación del terreno.

El espesor a diferentes niveles se puede obtener a partir de la fórmula exponencial dada por J. Lombardi:

$$h = h_c e^{kx} \tag{4.1}$$

donde: h es el espesor a la profundidad x, a partir de la corona; h_c es el ancho de la corona; k es un coeficiente que depende del espesor de la base y la corona, y e es la base de los logaritmos naturales.

Ahora bien, para determinar los espesores de la base y la corona en una primera aproximación, se pueden emplear las relaciones de Rosanov:

$$h_b = 0.2\ H \qquad (4.2)$$
$$h_c = 0.01\ (H + 1.2L_1)$$

en las que: h_b es el espesor de la base; H es la altura total de la cortina; h_c es el espesor de la corona, y L_1 es la cuerda del arco de la corona.

Estos dos últimos valores h_b y h_c se determinan con facilidad a partir de la topografía y se complementan con la fórmula (4.1).

De la sección transversal del cauce que se elige para el emplazamiento de la cortina, se obtienen los valores de las cuerdas que se emplean en la fórmula que define al radio; esta es:

$$r_i = \frac{Li/2}{\text{sen}\ \psi_i} \qquad (4.3)$$

aquí: r_i es el radio en el intradós del arco; Li es la longitud de la cuerda del arco, y ψ_i es el semiángulo del arco.

También deberá seleccionarse el valor del ángulo $2\psi_i$ para cada arco. El ángulo tendrá que ser lo más grande posible para que el arco trabaje como tal. El ángulo con que el arco se aproxime a sus atraques no deberá ser menor de 30° para que la trasmisión de esfuerzos sea adecuada, así entonces el ángulo $2\psi_i$ no podrá ser mayor de 120° para una boqui--

lla de paredes paralelas.

Por otro lado, el ahorro en volúmen de la cortina se logra minimizando el área en planta del arco, lo que se consigue cuando 2ϕ = 133°30'. Se puede concluir entonces que el elegir un ángulo cercano a 120° para ser empleados en la fórmula (4.3), es adecuado.

Con relación a la forma en que se determinan los coeficientes de deformación del terreno, según la teoria de F. Vogt, quien dedujo las fórmulas (3.2), la cimentación de la presa cede bajo la acción de fuerzas normales, cortantes, y momentos flexionantes. El prisma 1-2 de la fig. 11a. de espesor db y ancho "a" está sujeto a una fuerza vertical que causa una deformación en la cimentación.

Si la cimentación es isótropa, la deformación se extiende a los lados y extremos del prisma; el material circundante ayuda a soportarlo. Si dos de éstos prismas están juntos, la deformación aumentará; ahora bien, cuando varios de éstos prismas cubren completamente el área rectangular 4-5, la contribución del material circundante puede despreciarse para un prisma en el centro.

Si los prismas son independientes unos de otros, la deformación variará con la distancia los extremos; pero si los prismas forman una unidad solida, la deformación dependerá de la fluencia del terreno. El mismo razonamiento se --

puede aplicar a la fuerza cortante y al momento flexionante.

Los coeficientes K_1, K_2, K_3 y K_5, como se ve en la -- fig. 9, dependen de la relación b/a y del módulo de Poisson, que como se dijo en el capítulo 2, se considera nulo. La relación b/a se puede obtener suponiendo un rectangulo de dimensiones "b" y "a" que contenga la misma área que el área-- real de la cimentación (fig.11b). No hay reglas definidas para calcular las dimensiones "b" y "a"; el procedimiento es - enteramente empírico.

El ejemplo de aplicación tratado aquí es el proyecto- de la presa "Torimena". La boquilla para ese proyecto se encuentra sobre el río Sinaloa, en el estado del mismo nombre. Aunque se hicieron estudios con el fin de desarrollar el proyecto completo de una cortina en arco en ese lugar, por razones económicas y técnicas se prefirió construir, aguas abajo, la presa "Bacurato", de materiales graduados.

La referencia (2) de la bibliografia, es parte de los estudios que se realizarón para la presa "Torimena" y se usa aquí como base de comparación. En ese trabajo se enplea también el método de los "ARCOS-MUROS", resolviendo los sistemas fundamentales en forma manual, por tanteos y con sumadoras de escritorio.

La topografia de la boquilla Torimena se presenta en- la fig.12. Se determinó en ese proyecto que la altura de la-cortina fuera de 126 m., fijando la cota 62 msnm. como nivel de desplante y 188 msnm. como elevación de la corona. De la planta topográfica y de una sección del cauce (fig.12), se pueden obtener las cuerdas de los arcos para diferentes niveles. Al emplear las fórmulas (4.2) con los datos contenidos en la tabla 1, se tiene que los espesores de la base y la corona para una primera alternativa son:

$$h_b = 0.2\ (126) = 25.2\ \text{m.} \doteq 25\ \text{m.}$$

$$h_c = 0.01\ (126 + 1.2(380)) = 5.82\ \text{m.} \doteq 6\ \text{m.}$$

Con estos valores y la fórmula (4.1), se pueden determinar los espesores, calculando primero el coeficiente "k" en la misma fórmula (4.1). Los espesores a diferentes niveles se incluyen en la tabla 1.

Los valores de los ángulos se hicieron variar gradualmente desde 120° en la corona hasta 80° en la base; tales valores están también en la tabla 1, junto con los radios calculados según la formula (4.3).

De la figura 9 se obtienen se obtienen los valores de los coeficientes de deformación del terreno, considerando $\nu = 0$ y $b/a \doteq 2?$; estos son:

$$K_1 = 5.66,\ K_2 = 2.67,\ K_3 = 2.67,\ K_5 = 0.93$$

Los resultados obtenidos al correr el programa se aprecian en las tablas 1 y 2, así como en las figuras 13 y 14.

Se observa en esta primera alternativa que la mayoría de los arcos trabajan con esfuerzos de compresión que estan por debajo del permisible. Son excepsión algunos arcos de la parte baja en los que se producen pequeñas tensiones para el intradós de la clave y el extradós de los apoyos; también -- dentro de lo permisible (fig.14).

Los esfuerzos permisibles se toman normalmente como:

$f_p = 0.25\ f'_c$, para compresión y,

$f_t = 0.15\ f_p$, para tensión,

para el caso particular del proyecto Torimena se tiene que-- $f'_c = 380\ kg/cm^2$ y por lo tanto,

$f_p = 95\ kg/cm^2$

$f_t = 14.3\ kg/cm^2$.

Conviene mencionar que para todos los arcos, el es--- fuerzo en el eje es de compresión y constante a lo largo de- este. Esto confirma que los arcos trabajan como tales (fig.- 14).

Para el voladizo de esta primera alternativa se obser va que la parte inferior del extradós esta sujeto a esfuer- zos de tensión mayores que el permisible; también en el in-- tradós se sobrepasa el esfuerzo permisible de compresión; es to puede evitarse cambiando un poco la curva del perfil del- voladizo (fig.12), para que el efecto del peso propio y peso del agua, disminuyan los efectos hidrostáticos.

En la segunda alternativa se consideró adecuado cam--biar la curva del perfil y aumentar hasta 31 m. el ancho en-la base (fig.12). Los nuevos datos se ven en la tabla 3, se-conservaron las cuerdas y los ángulos de los arcos.

Los resultados de la segunda alternativa se muestran-en las tablas 3 y 4, y las figuras 15 y 16, mismas que indi-can que el comportamiento de los arcos no varia en forma con siderable, manteniendose estos dentro del rango de esfuerzos-permisibles.

Respecto al voladizo, el cambio de la curva del per--fil resulta favorable al reducir la zona de esfuerzos de ten sión en la parte baja del extradós, igualmente se reducen --los altos esfuerzos de compresión que se tenian inicialmente en el intradós, hasta hacerlos permisibles (fig.15b).

La configuración que se considera más adecuada se a--precia en la fig. 12a y 12d.

En las zonas en que los arcos o voladizo estan suje--tos a pequeños esfuerzos de tensión permisibles, es factible diseñar un refuerzo para evitar que se generen grietas inde-seables en la superficie del concreto.

5.- C O N C L U C I O N E S

1.- Las ventajas de contar con un programa para computador, pueden resumirse en los siguientes puntos:

1.a). La exactitud que se puede lograr en los resultados es mayor que si el proceso se hace en forma manual, debido a que la mayoría de los equipos que se usan cuentan con capacidad para variables de precisión doble; cualidad que en el caso de tener que resolver sistemas de ecuaciones de tamaño medio, resulta de gran utilidad.

1.b). El número de alternativas que se pueden procesar es grande, ya que el tiempo que emplea el programa es de unos cuantos segundos, dejando a un lado la necesidad de emplear la "intuición técnica" para definir de antemano la solución y evitar así la perdida de tiempo.

1.c). Los costos del análisis de cada alternativa son muy bajos en comparación al del cálculo manual, dado que una alternativa en computador son unos segundos de cálculo y en forma manual se requieren semanas de un buen equipo de mas o menos cinco gentes.

2.- Es posible "partir" el programa para emplear equipos electrónicos que son de fácil adquisición, tales como microcomputadores y calculadoras de escritorio avanzadas donde no cabría completo; igualmente pueden emplearse minicomputadores que usan lenguaje BASIC.

3.- La tecnología actual permite realizar el análisis estructural en México de proyectos para cortinas en arco; es en la construcción donde se tienen que adecuar o contratar equipos y procedimientos. Por esta misma razón se construyen pocas presas de arco en México, ya que la experiencia constructiva amplia está en las de materiales graduados.

4.- Sin un estudio profundo de mecánica de rocas es imposible respaldar un buen proyecto de la cortina. En países donde han ocurrido fallas en cortinas de arco, se observa que la causa fundamental es el colapso de la cimentación; esta es otra limitación para el estudio y construcción de cortinas en arco.

5.- Para la elaboración del concreto deberán emplearse materiales de la mejor calidad. El proporcionamiento se determina en el laboratorio, ensayando un número considerable de mezclas tentativas, con objeto de garantizar no sólo la resistencia sino otras propiedades importantes tales como la impermeabilidad y la durabilidad.

B I B L I O G R A F I A.

1. Lombardi Jean, "Les barrages en voute mince", Dunod, Paris, 1955.
2. Oliva Anaya Carlos, "Proyecto preliminar de la cortina de la presa Torimena", Tesis profesional, U.N.A.M., México, 1959.
3. Beaujoint Nicolas, "Le calcul global des barrages-voutes", Annales des ponts et chaussées, - Vol. 130, 1960.
4. Creager William Pitcher, "Engineering for dams" J. Wiley, New York, 1945.
5. United States Departament of the Interior, Bureau of Reclamation, "Trial load method of analizyng arch dams", Boulder Canyon Proyect, Final report, Part V, Bulletin 1, Denver Colorado, 1938.
6. Rozanov L.D., Bielty P.I., "Presas de concreto sobre mantos rocosos", Stroyizdat, Moscú, 1975.
7. Portland Cement Associatión, "Presas pequeñas de concreto", Limusa, México, 1978.
8. S.R.H., C.F.E., U.N.A.M., "Comportamiento de presas construidas en México", Contribución al XII Congreso Internacional de Grandes Presas, Instituto de Ingeniería U.N.A.M., México, 1976.
9. Canales Lozano Rogerio, "La planta hidroeléctrica de Santa Rosa", Rev. Ingeniería, México, Vol. XXXIV Oct. 1964.

10. Rocha Manuel, "Comportamiento mecánico de las rocas de cimentación en cortinas de concreto", Rev. Ingeniería, México, Vol. XXXIV Oct. 1964.

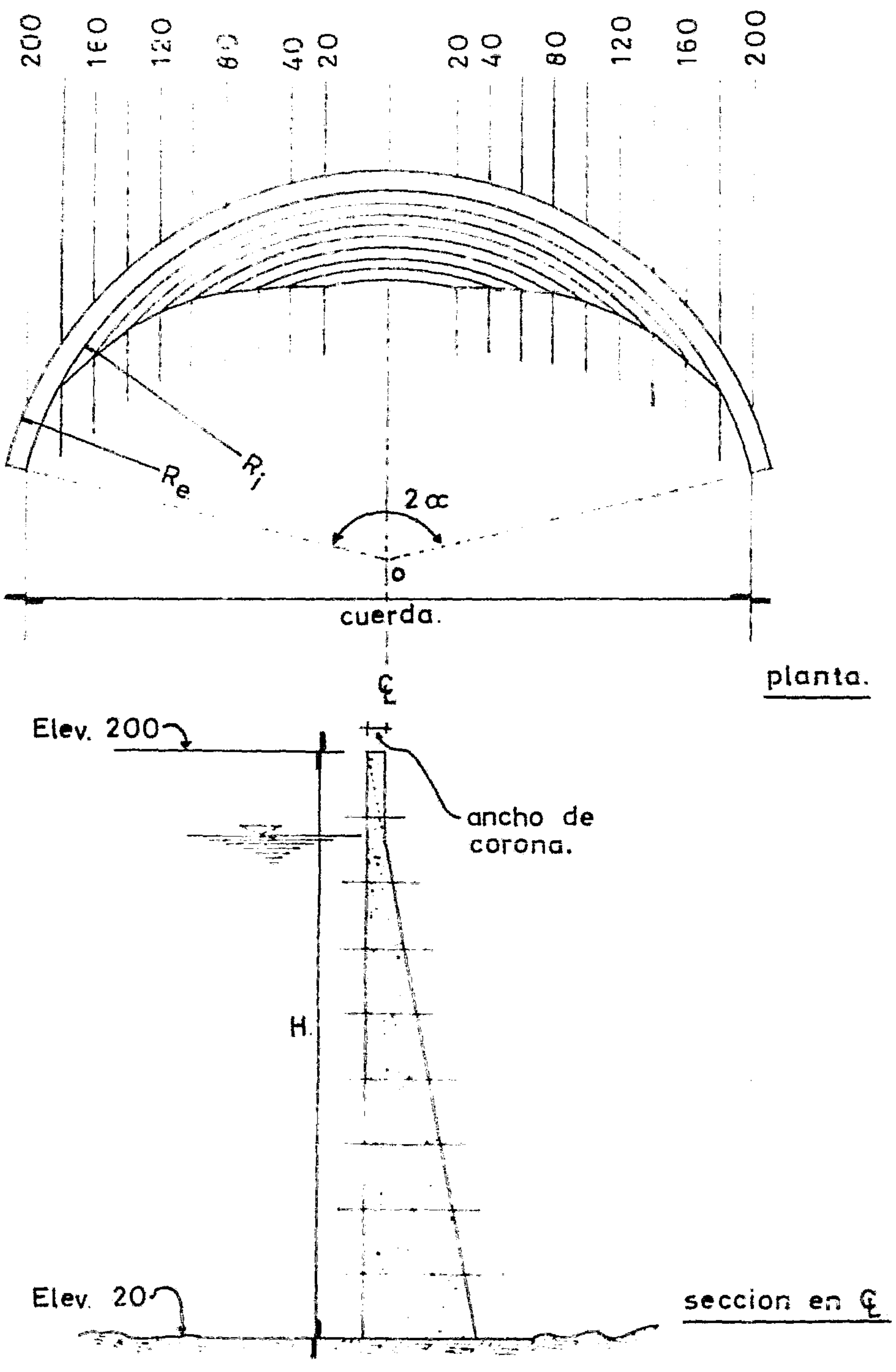


Fig 1 CORTINA EN ARCO DE RADIO CONSTANTE

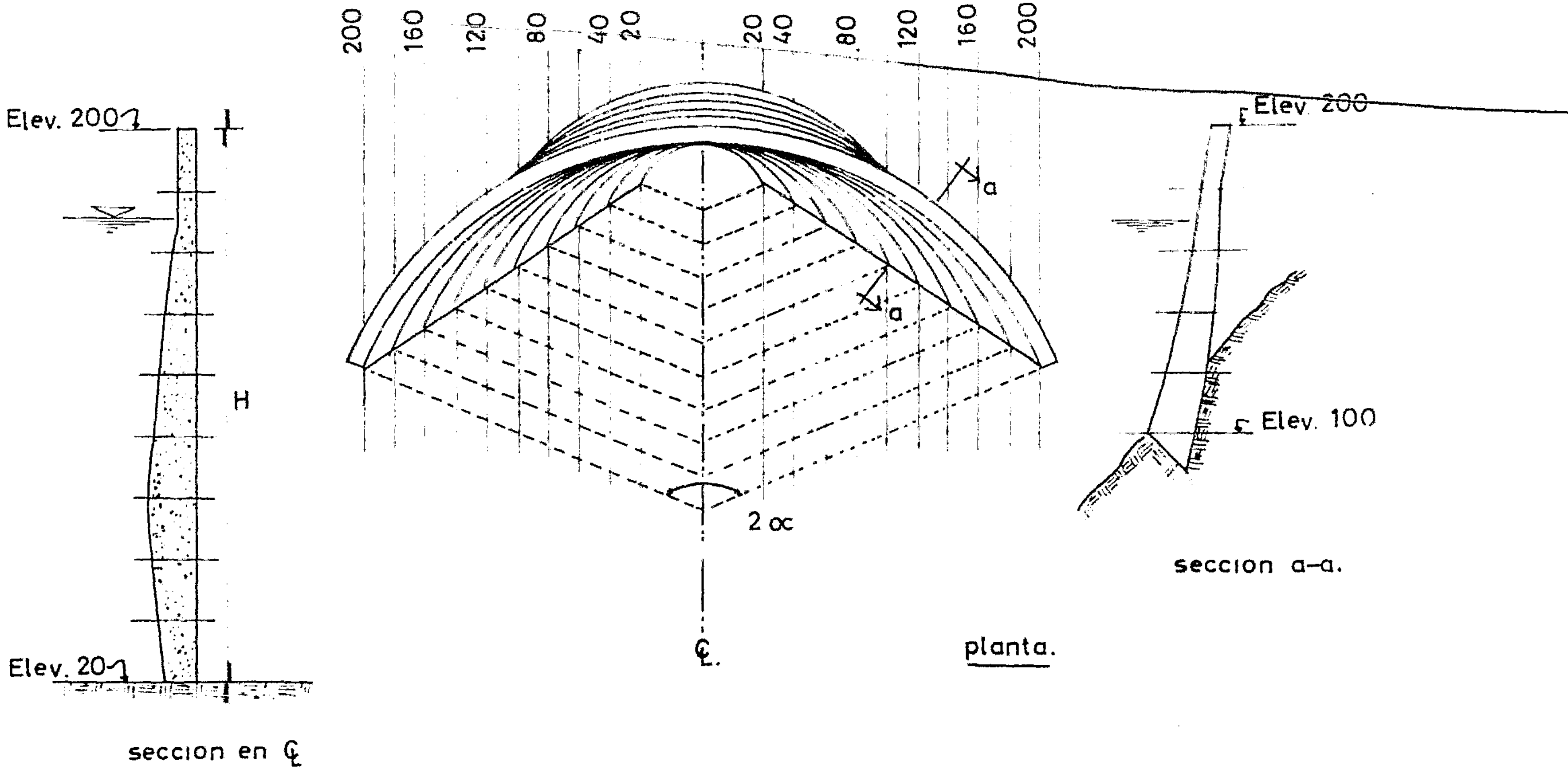


Fig. 2. CORTINA EN ARCO DE ANGULO CONSTANTE.

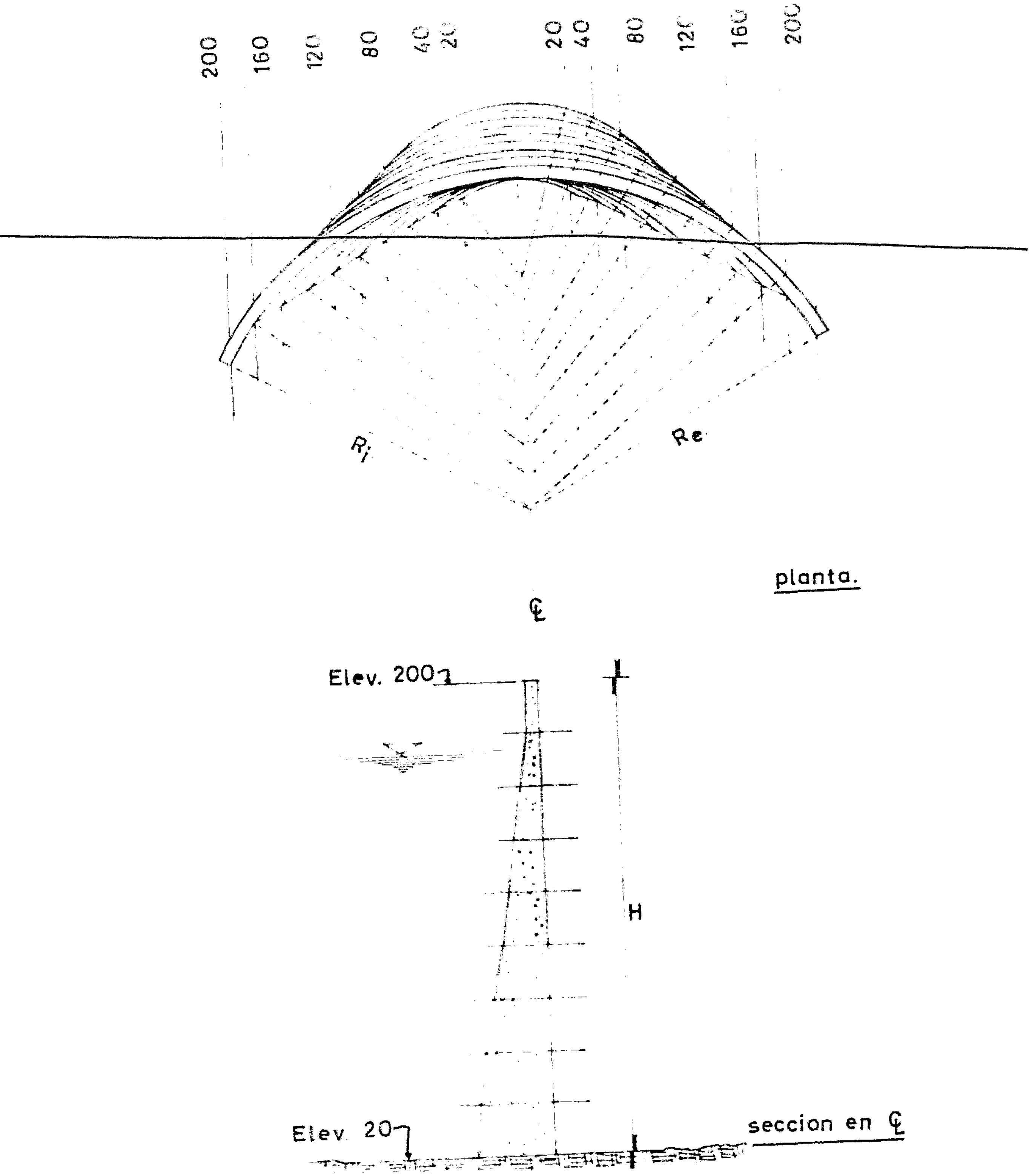


Fig 3. CORTINA EN ARCO DE RADIO VARIABLE.

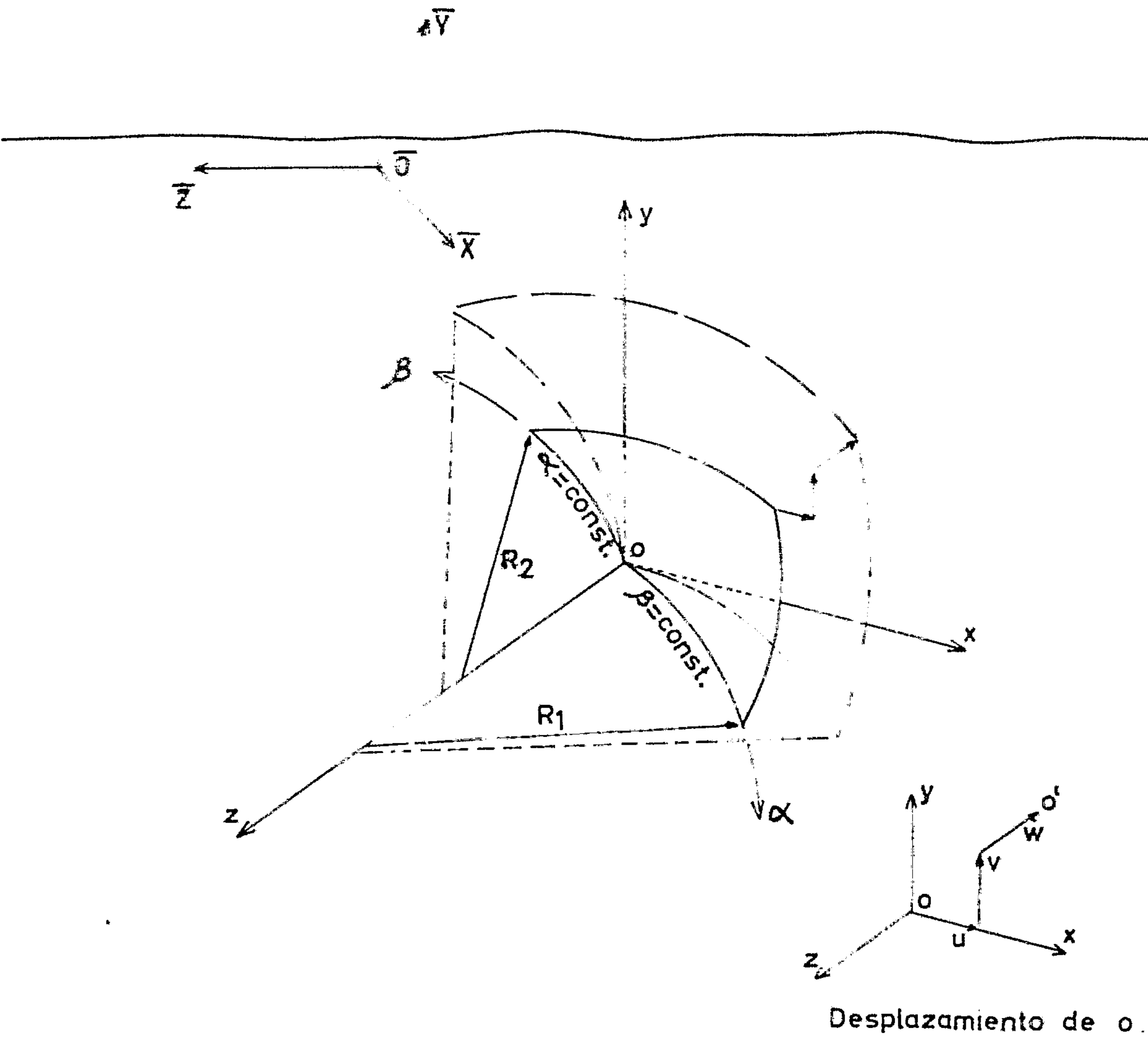
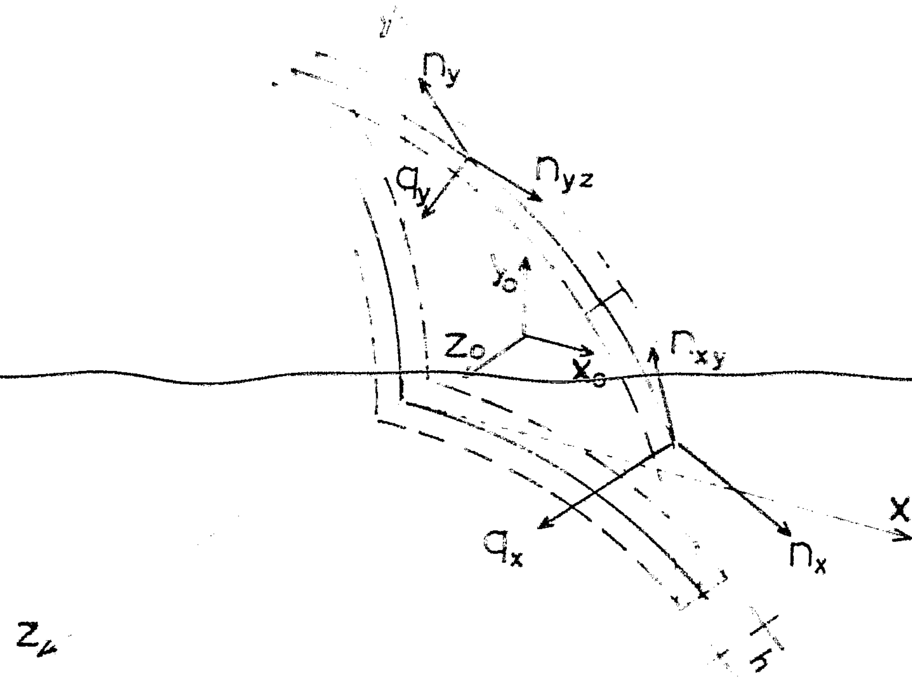
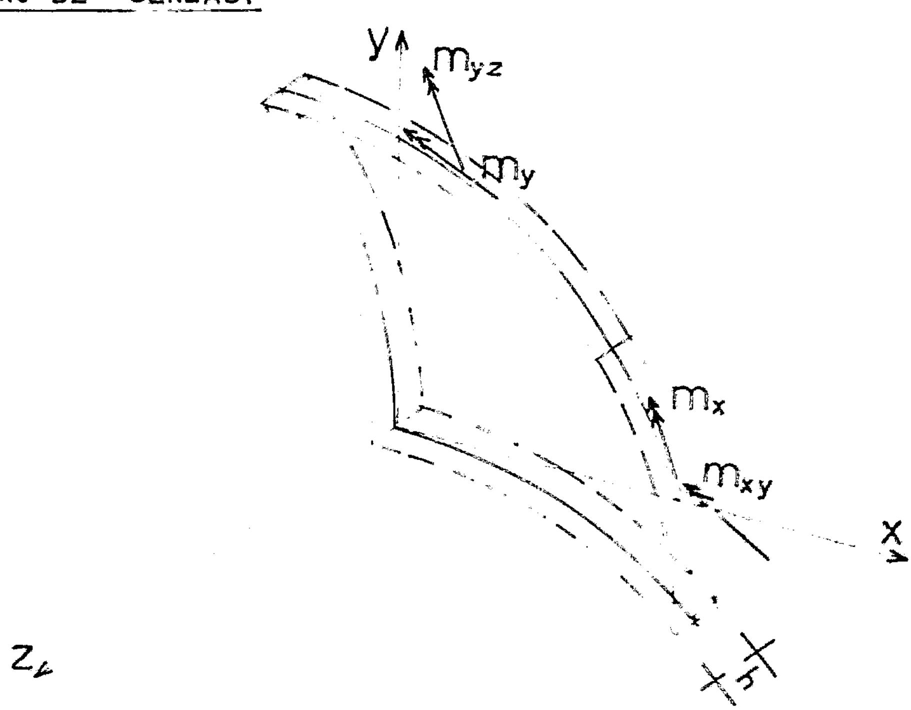


Fig. 4 PORCION DE SUPERFICIE MEDIA DE UN CASCARON

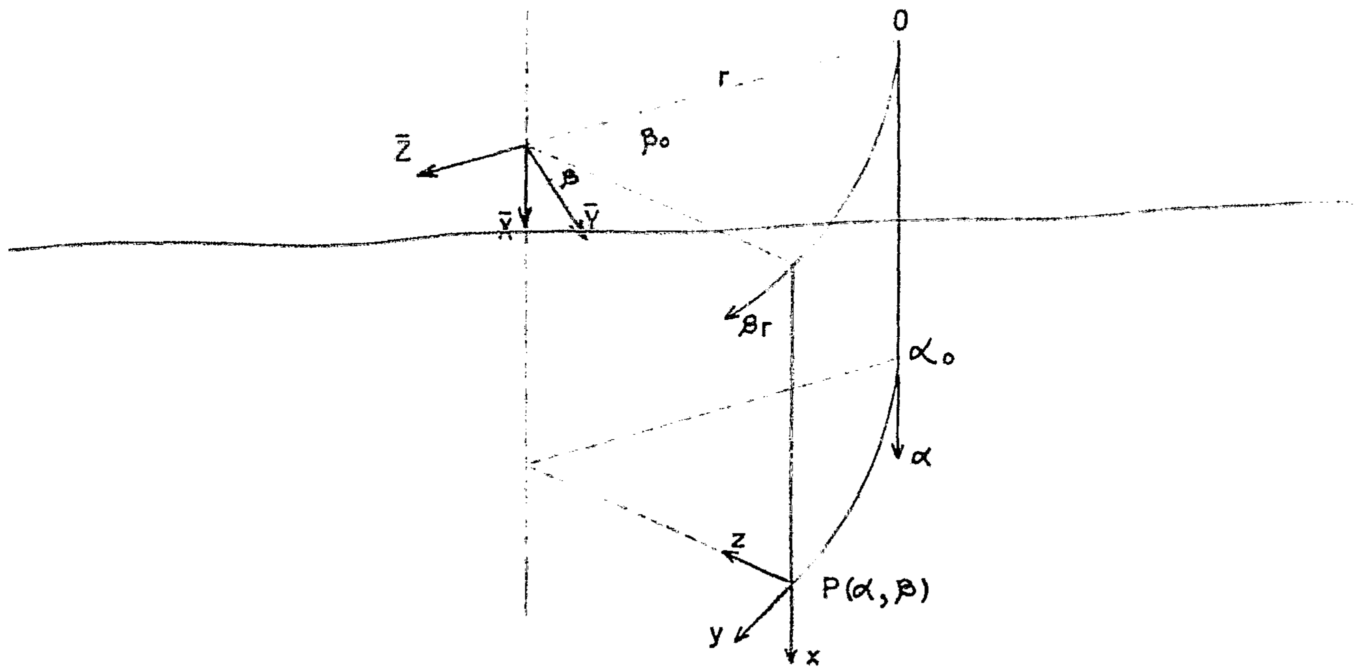


EQUILIBRIO DE FUERZAS.



EQUILIBRIO DE MOMENTOS

Fig. 5.



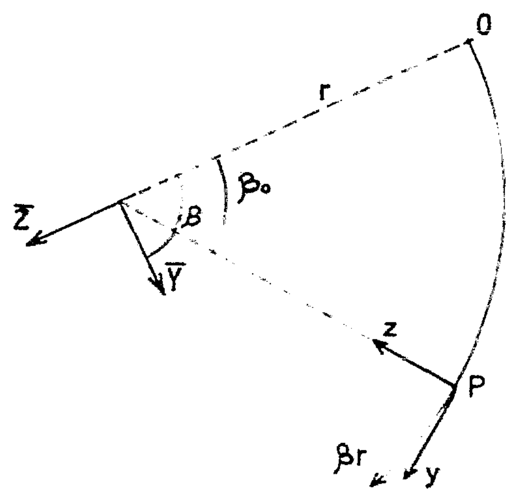


Fig 6 CASCARON CILINDRICO

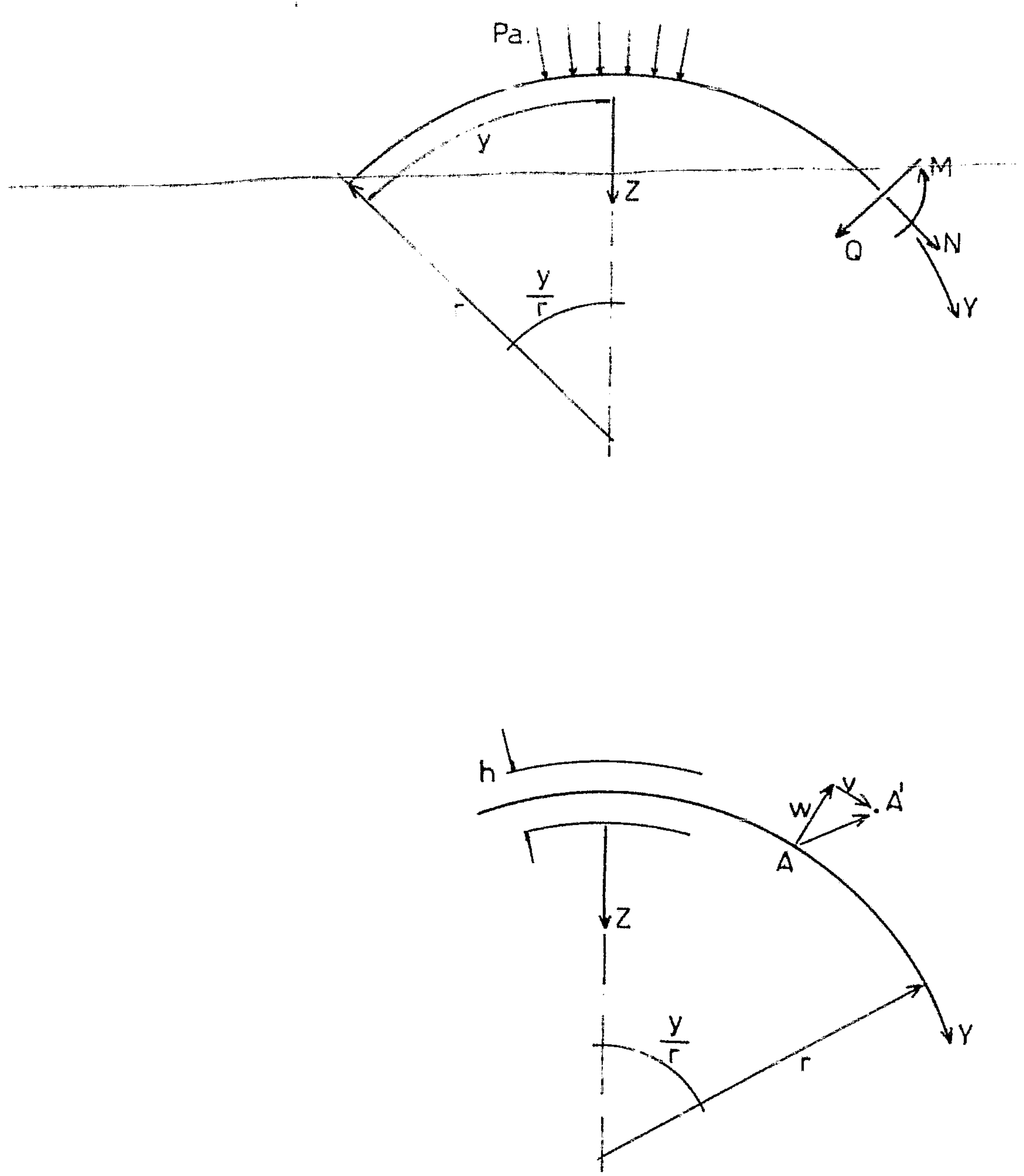


Fig. 7 ELEMENTOS MECANICOS EN UNA SECCION Y DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO

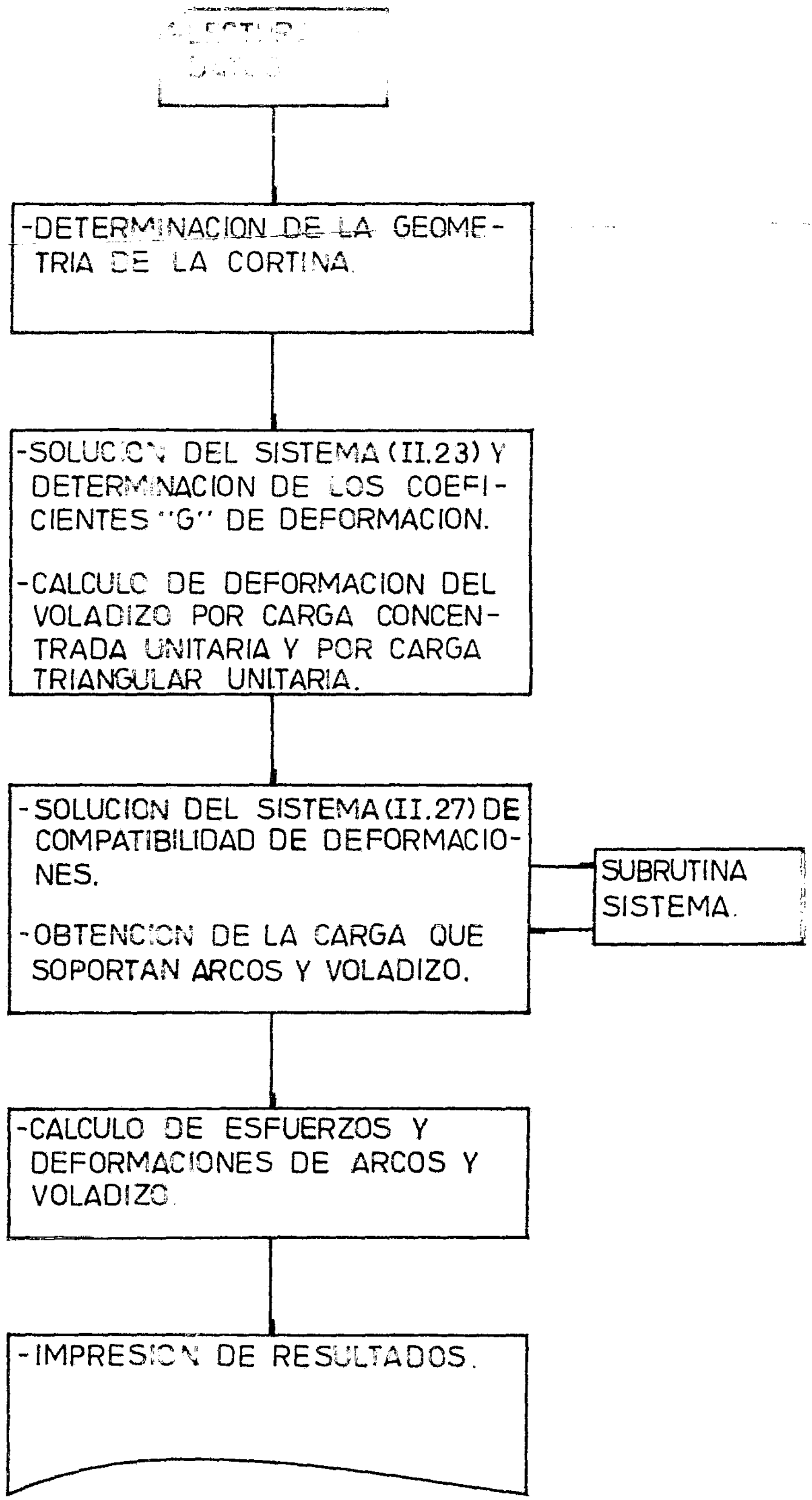


Fig. 8. DIAGRAMA DE BLOQUES.

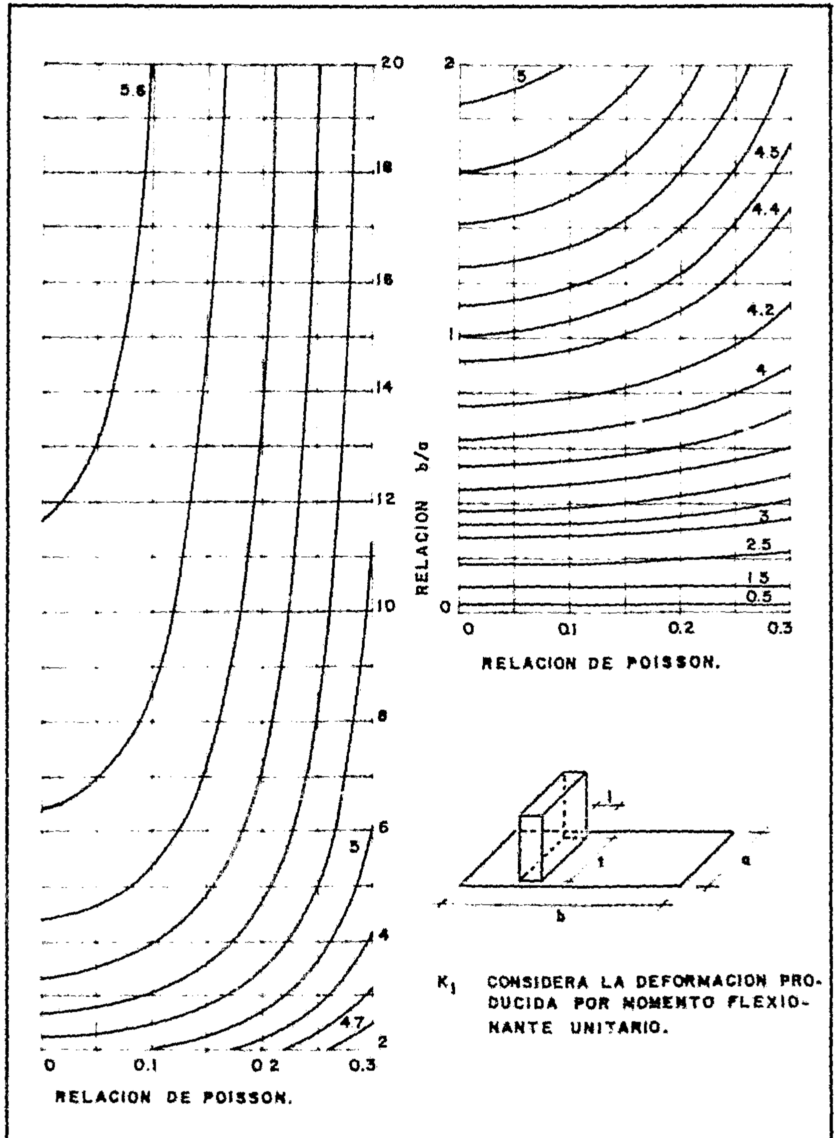


Fig. 9a. VALORES DEL COEFICIENTE K_1

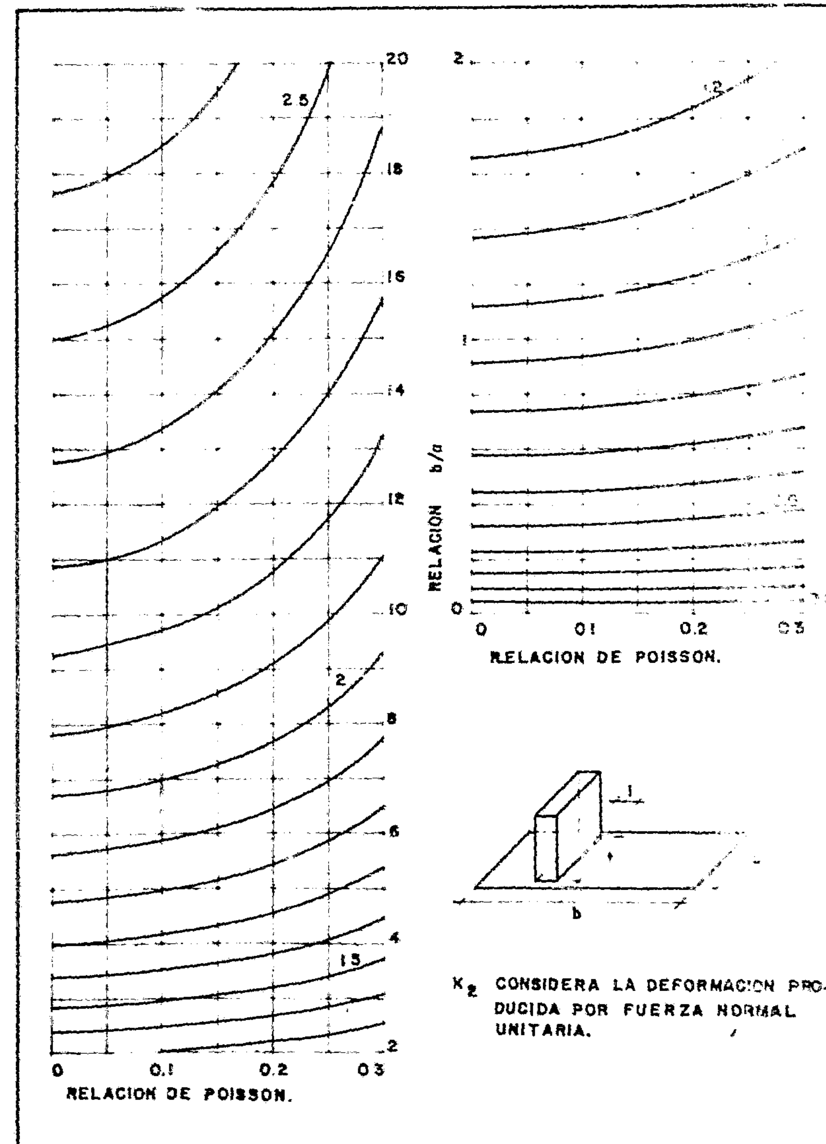


Fig. 9b. VALORES DEL COEFICIENTE K_2

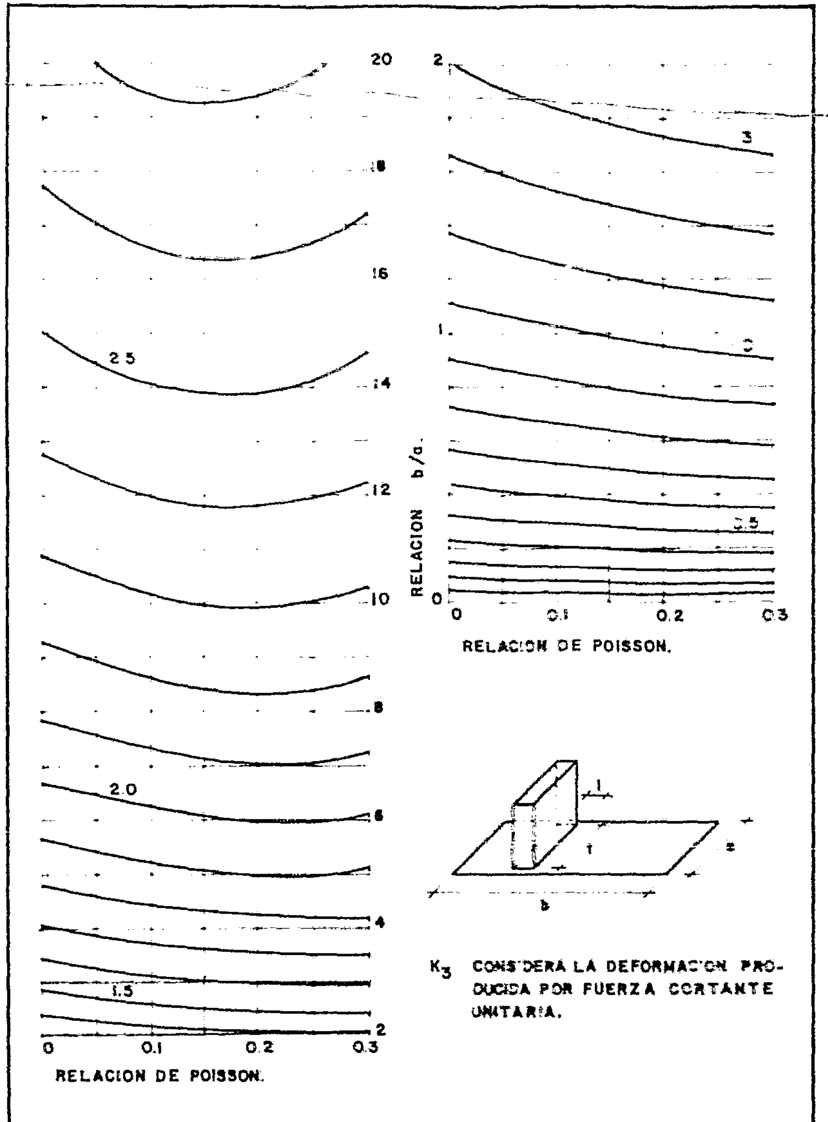


Fig. 9c. VALORES DEL COEFICIENTE K_3

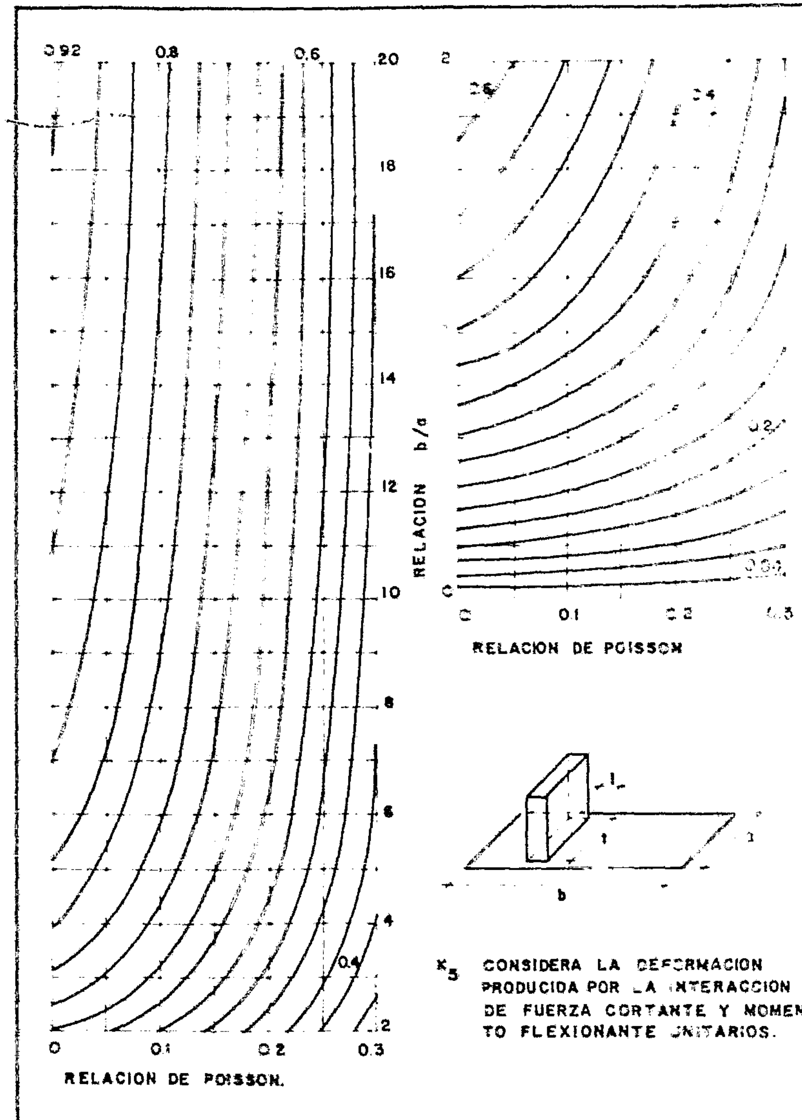


Fig. 9d. VALORES DEL COEFICIENTE K_5

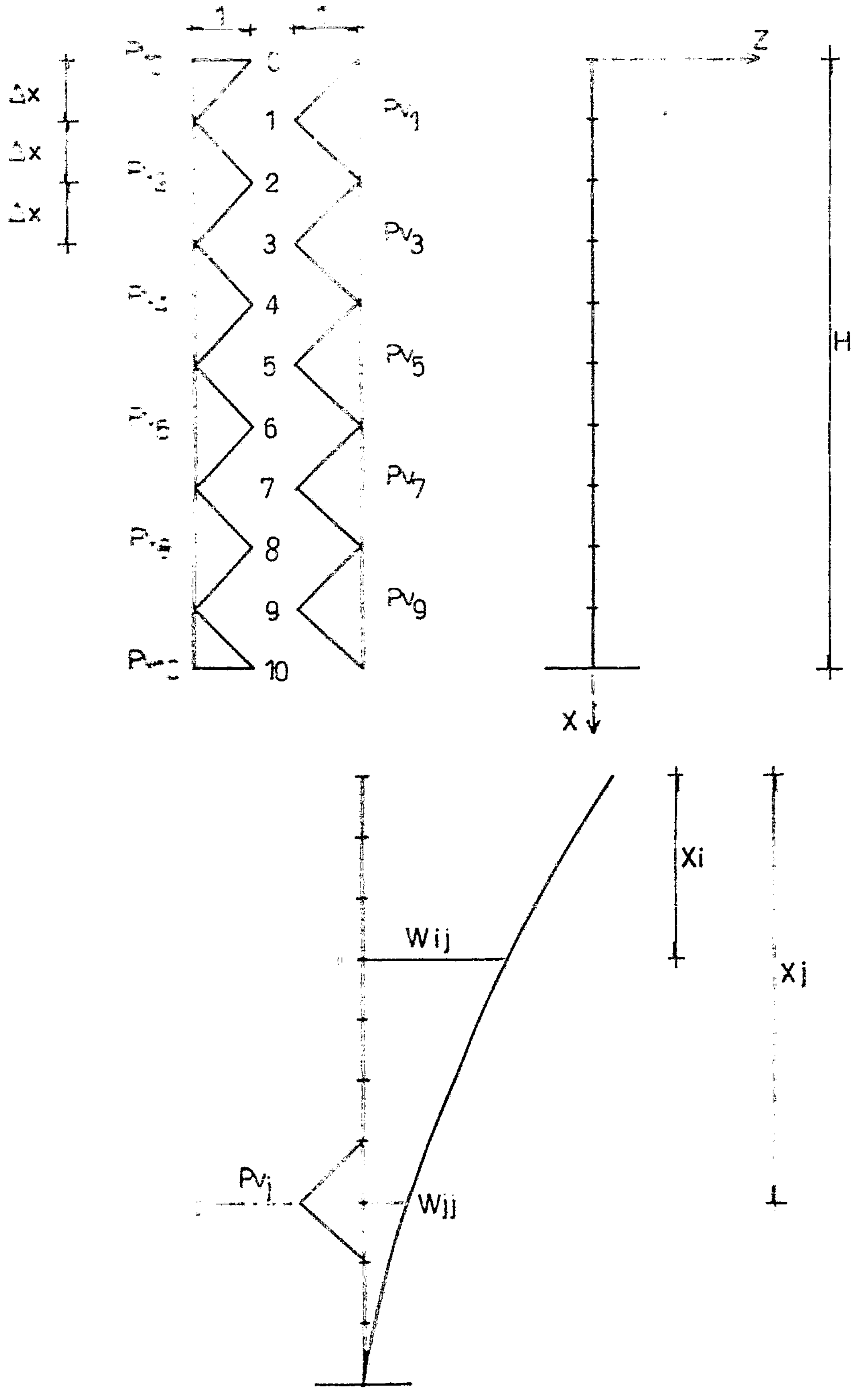


Fig. [illegible] CARGA TRIANGULAR UNITARIA Y DEFORMACION PRODUCIDA

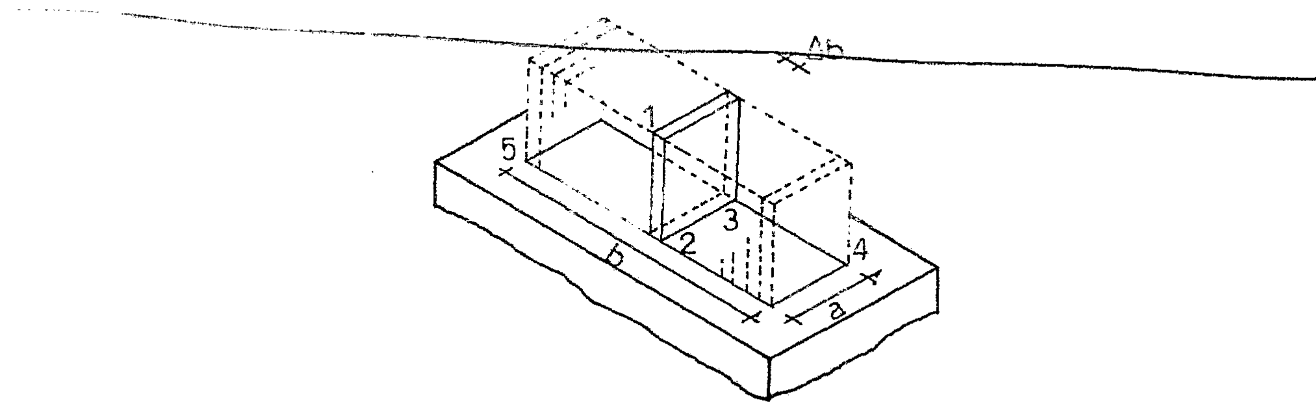


Fig. 11a. Prisma de carga sobre la cimentacion.

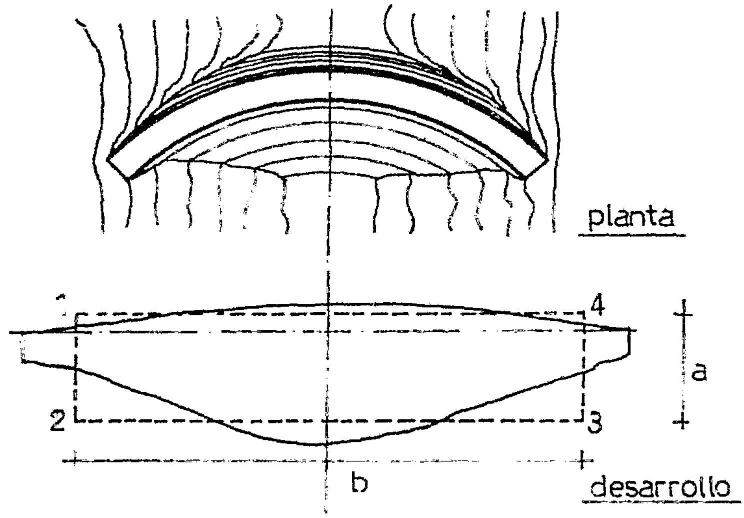


Fig. 11b. Area equivalente de la cimentacion.

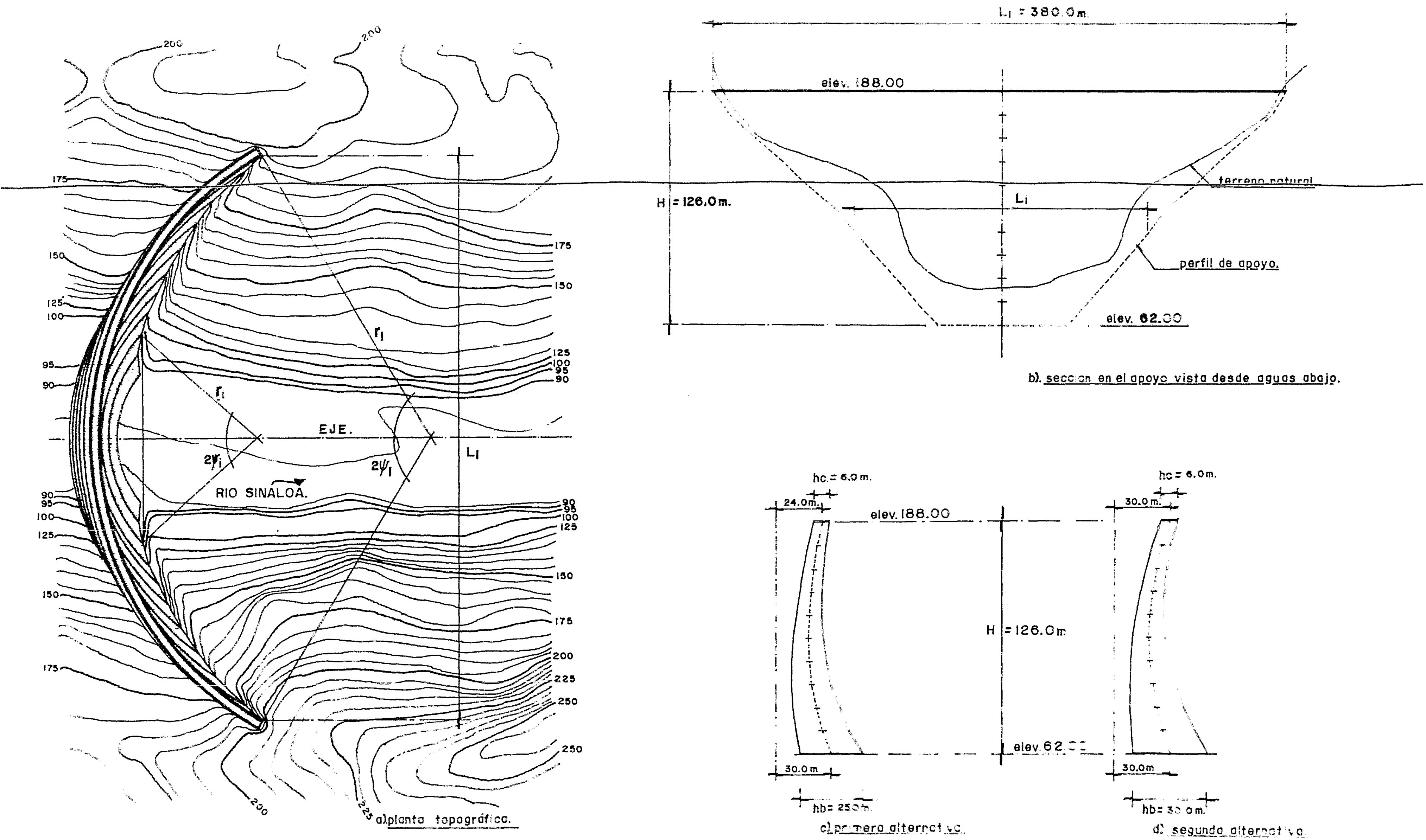


Fig. 12 CONFIGURACION DE LA CORTINA.

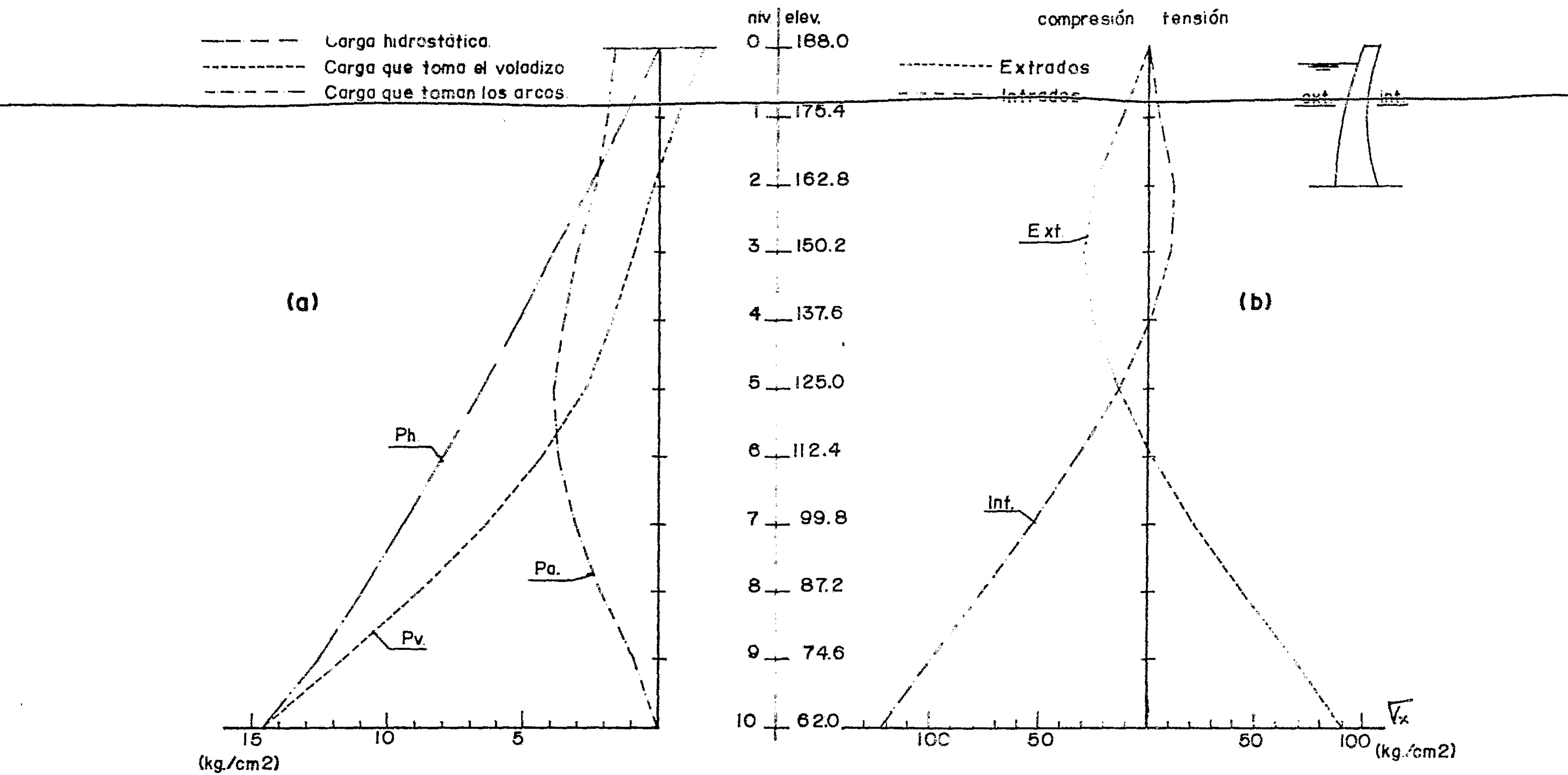


Fig. 13. a). REPARTICION DE CARGA ENTRE ARCOS Y VOLADIZO, b). VARIACION DE ESFUERZOS EN EL VOLADIZO. PRIMERA ALTERNATIVA, CORTINA "TORIMENA".

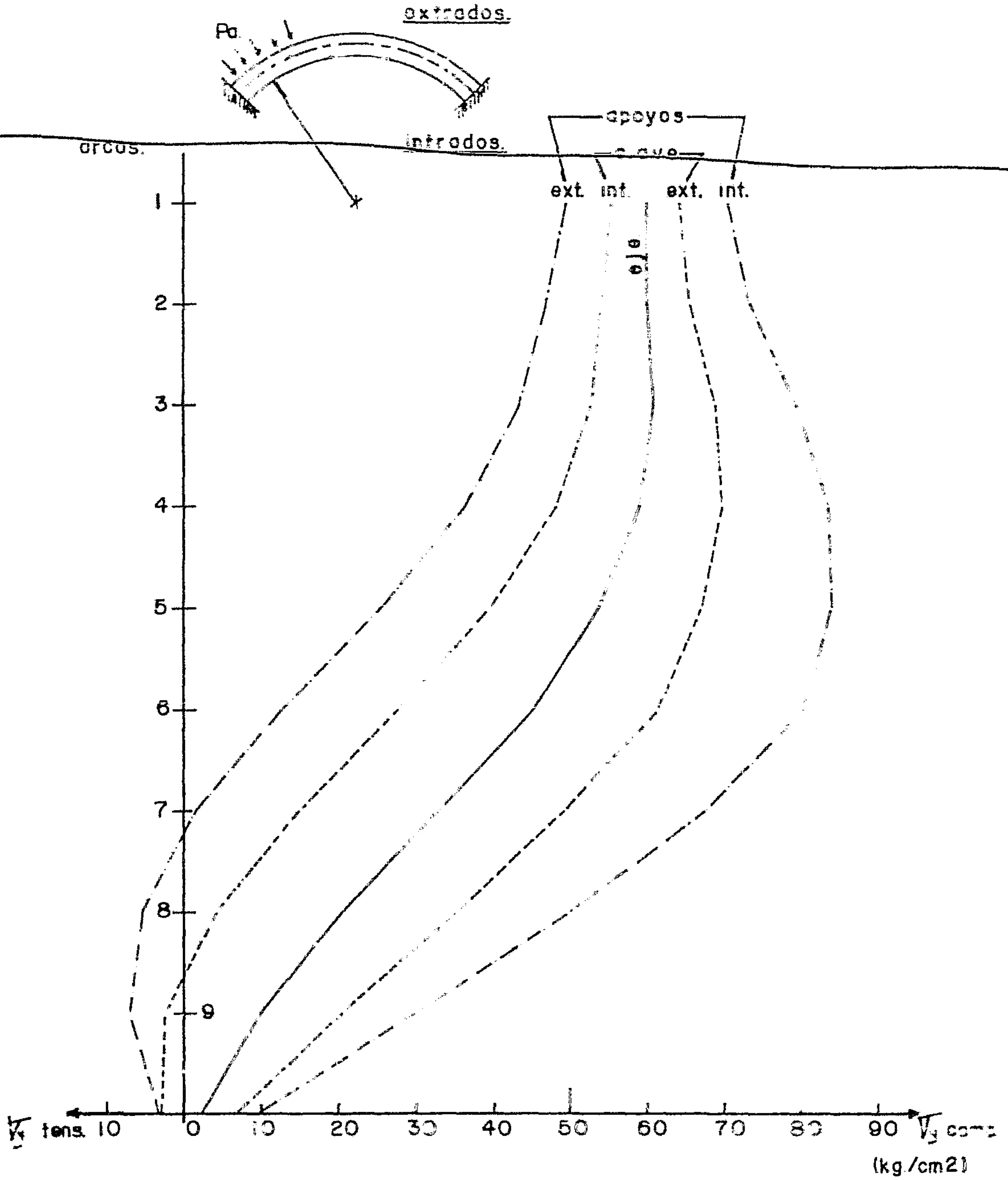


Fig. 14 VARIACION DE ESFUERZOS EN LOS ARCOS PRIMERA ALTERNATIVA, CORTINA "TORIMENA".

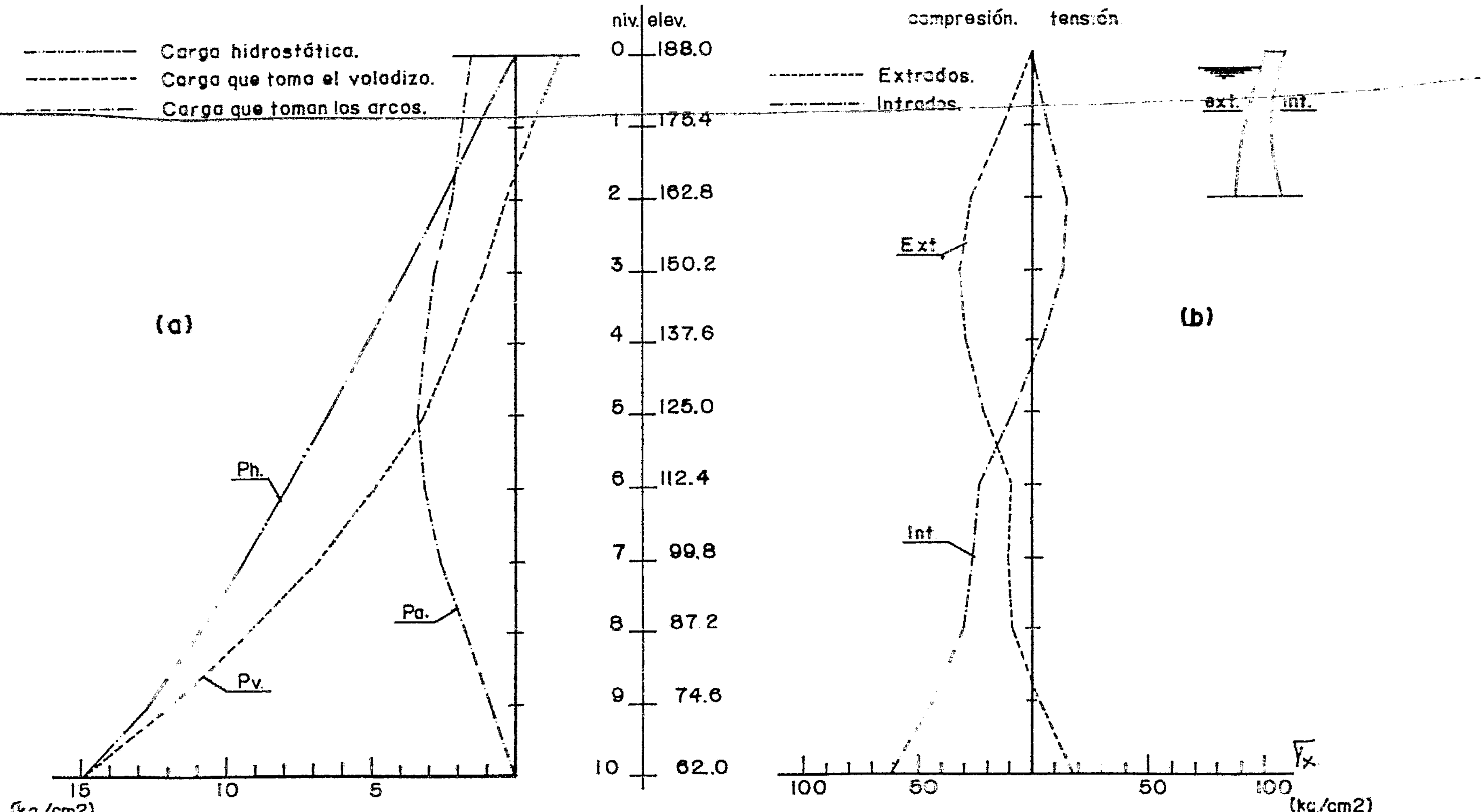


Fig.15. a).REPARTICION DE CARGA ENTRE ARCOS Y VOLADIZO. b). VARIACION DE ESFUERZOS EN EL VOLADIZO. SEGUNDA ALTERNATIVA, CORTINA "TORIMENA".

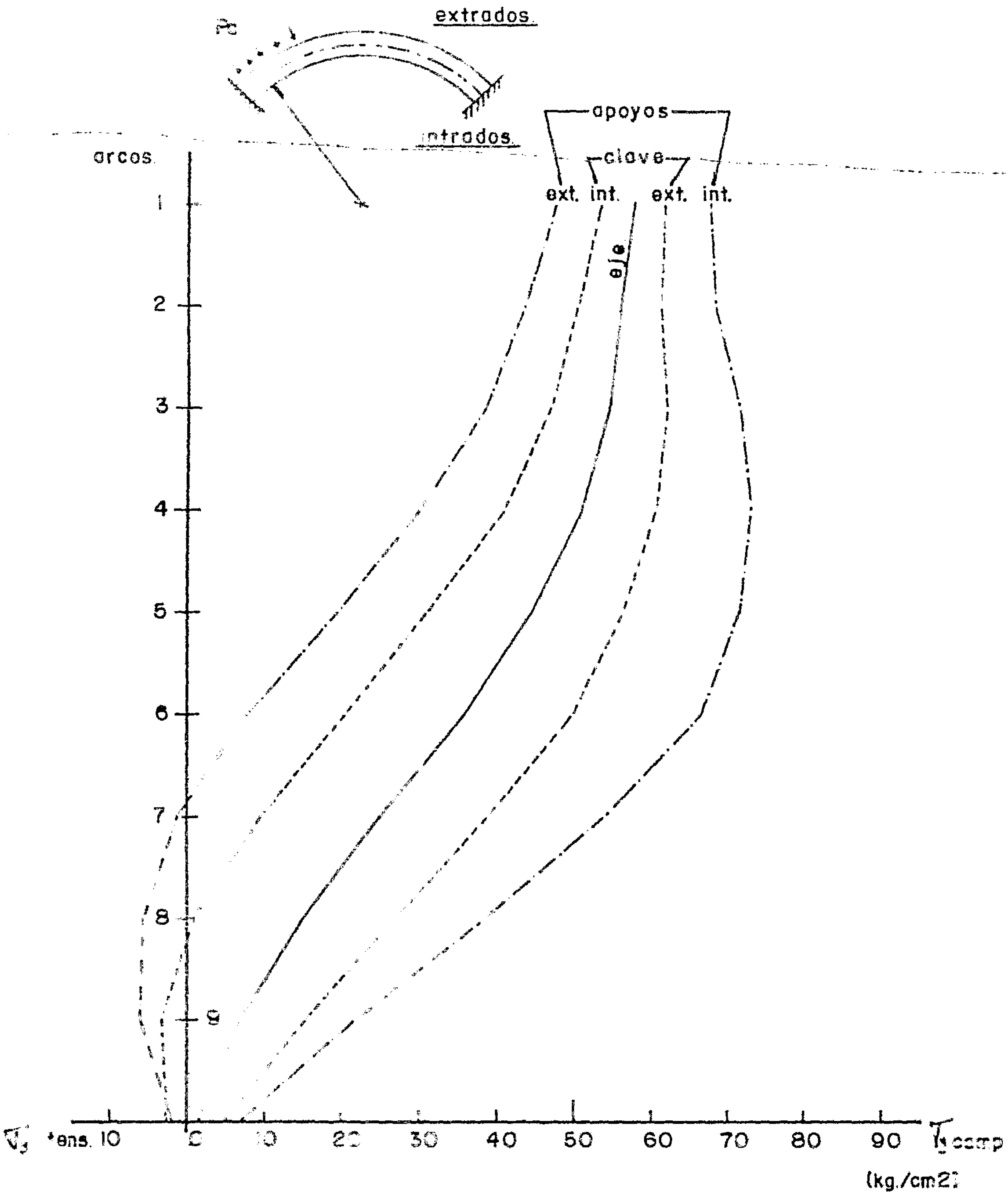


Fig 6 VARIACION DE ESFUERZOS EN LOS ARCOS. SEGUNDA ALTERNATIVA, CORTINA "TORIMENA"

NIVEL	ELEVACION	Li/2	ψ/2	RADIO	ESPESOR	Ph	Pv	Pa
	(msnm)	(m)		(m)	(m)	(kg/cm²)	(kg/cm²)	(kg/cm²)
0	188.00	190.00	60°	222.39	6.00	0	- 1.62	1.62
1	175.40	180.00	58°	215.71	6.92	1.28	- 0.65	1.93
2	162.80	162.50	56°	200.00	7.98	2.57	0.12	2.45
3	150.20	145.00	54°	183.83	9.21	3.87	0.88	3.99
4	137.60	127.50	52°	167.11	10.62	5.20	1.71	3.49
5	125.00	110.00	50°	149.72	12.25	6.56	2.72	3.84
6	112.40	97.50	48°	138.26	14.13	7.95	4.34	3.61
7	99.80	85.00	46°	126.31	16.30	9.39	6.38	3.01
8	87.20	71.00	43°	113.51	18.80	10.91	8.82	2.09
9	74.60	57.00	40°	99.52	21.68	12.58	11.66	0.92
10	62.00	42.50	40°	78.62	25.62	14.60	14.60	0

VOLUMEN TOTAL DE LA CORTINA: 394,656 m

TABLA 1. Geometría de la cortina y repartición de carga entre arcos y voladizo. Primera alternativa.

NIVEL	ARCOS					VOLADIZO		
	σ_y CLAVE (kg/cm²)		σ_y APOYO (kg/cm²)		EJE	σ_x (kg/cm²)		σ_z (m)
	EXT.	INT.	EXT.	INT.	(kg/cm²)	EXT.	INT.	
0	- 64.21	- 55.49	- 49.69	- 70.41	- 59.91	0	0	0.13
1	- 65.70	- 54.20	- 47.03	- 73.56	- 60.08	- 11.99	5.55	0.13
2	- 68.87	- 52.94	- 43.40	- 79.45	- 61.06	- 25.00	12.09	0.13
3	- 69.70	- 48.21	- 36.21	- 83.42	- 59.22	- 29.31	10.60	0.11
4	- 67.25	- 39.59	- 25.49	- 84.10	- 53.86	- 24.75	1.25	0.10
5	- 61.35	- 27.75	- 12.61	- 80.65	- 45.24	- 13.54	- 13.62	0.08
6	- 49.36	- 14.82	- 1.52	- 67.81	- 32.97	2.29	- 31.99	0.05
7	- 35.14	- 4.10	55.32	- 50.14	- 20.62	21.93	- 53.14	0.03
8	- 20.57	2.66	7.01	- 29.90	- 9.92	44.36	- 76.13	0.02
9	- 7.01	2.83	3.18	- 9.86	- 2.63	68.07	- 99.62	0
10	--	--	--	--	--	91.44	-122.15	0

TABLA 2. Esfuerzos finales. Primera alternativa.

NIVEL	ELEVACION (msnm)	Li/2 (m)	ψ/2	RADIO (m)	ESPESOR (m)	Ph (kg/cm²)	Pv (kg/cm²)	Pa (kg/cm²)
0	188.00	190.00	60°	222.39	6.00	0	- 1.56	1.56
1	175.40	180.00	58°	215.78	7.05	1.28	- 0.55	1.83
2	162.80	162.50	56°	200.15	8.28	2.57	0.29	2.28
3	150.20	145.00	54°	184.09	9.72	3.88	1.15	2.73
4	137.60	127.50	52°	167.51	11.42	5.21	2.11	3.10
5	125.00	110.00	50°	150.30	13.41	6.58	3.34	3.24
6	112.40	97.50	48°	139.07	15.76	7.99	4.92	3.07
7	99.80	85.00	46°	127.42	18.51	9.46	6.94	2.52
8	87.20	71.00	43°	114.97	21.74	11.03	9.28	1.75
9	74.60	57.00	40°	101.44	25.53	12.77	12.00	0.77
10	62.00	42.50	40°	81.11	29.98	14.93	14.93	0

VOLUMEN TOTAL DE LA CORTINA: 435,989 m

TABLA 3. Geometría de la cortina y repartición de carga entre arcos y voladizo.
Segunda alternativa.

NIVEL	ARCOS					VOLADIZO		
	σ_y CLAVE (kg/cm^2)		σ_y APOYO (kg./cm^2)		EJE	σ_x (kg./cm^2)		δ_z (m)
	EXT.	INT.	EST.	INT.	(kg/cm^2)	EXT.	INT.	
0	- 61.38	- 53.47	- 47.88	- 67.85	- 57.73	0	0	0.13
1	- 61.24	- 50.41	- 43.55	- 68.68	- 55.91	- 15.0	4.32	0.12
2	- 62.32	- 47.19	- 38.36	- 71.85	- 54.76	- 29.78	12.42	0.11
3	- 61.60	- 41.01	- 30.19	- 73.07	- 51.06	- 34.76	11.18	0.10
4	- 56.48	- 31.02	- 19.49	- 71.41	- 44.57	- 31.85	2.58	0.08
5	- 49.82	- 20.57	- 7.88	- 66.43	- 35.85	- 23.94	- 10.57	0.06
6	- 38.82	- 9.50	1.05	- 54.16	- 24.99	- 11.62	- 26.34	0.04
7	- 26.80	- 1.18	5.65	- 38.72	- 14.92	- 12.55	- 29.05	0.02
8	- 15.22	3.30	5.82	- 22.13	- 6.83	- 11.31	- 32.11	0
9	- 5.00	2.50	2.25	- 6.83	- 1.72	1.58	- 46.38	0
10	--	--	--	--	--	15.30	- 63.25	0

TABLA 4. Esfuerzos finales. Segunda alternativa.