

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

293
158

FACULTAD DE INGENIERIA

FUERZA Y MOMENTO FLEXIONANTE INDUCIDOS SOBRE UNA PILA
ESBELTA SOMETIDA A OLEAJE

JUAN PADILLA CABALLERO

T E S I S P R O F E S I O N A L

MAYO 1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

	Pág
1. INTRODUCCION	1
2. ANALISIS DE OLEAJE	6
2.1 <i>Conceptos fundamentales</i>	6
2.1.1 Ecuación de continuidad	7
2.1.2 Potencial de velocidad	8
2.2 <i>Oleaje monocromático</i>	11
2.2.1 Teorías de oleaje	17
2.2.2 Teoría lineal	19
2.3 <i>Oleaje irregular</i>	28
2.3.1 Análisis estadístico	29
2.3.2 Análisis espectral	37
2.3.3 Análisis espectral-estadístico	43
3. FUERZAS Y MOMENTOS FLEXIONANTES DEBIDOS A OLEAJE SOBRE UN CILINDRO CIRCULAR VERTICAL ESBELTO	51
3.1 <i>Ecuación de Morison</i>	52
3.1.1 Coeficientes hidrodinámicos C_d y C_m	55
3.2 <i>Análisis con oleaje monocromático</i>	57
3.2.1 Fuerza total	57
3.2.2 Momento flexionante total	61

	Pág
3.2.3 Procedimiento de cálculo	63
3.3 <i>Análisis con oleaje irregular</i>	64
3.3.1 Fuerza total	67
3.3.2 Momento flexionante total	68
3.3.3 Procedimiento de cálculo	70
4. EJEMPLOS DE APLICACION	75
4.1 <i>Pila delgada sujeta a oleaje monocromático</i>	76
4.2 <i>Pila delgada sujeta a oleaje irregular</i>	81
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	105
BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS	109

1. INTRODUCCION

La Ingeniería de estructuras fuera de costa tiene como objetivo desarrollar métodos de diseño y construcción que ayuden a producir estructuras seguras, funcionales y económicas, capaces de resistir las fuerzas inducidas por el hombre y el medio ambiente dentro de un determinado período de tiempo (vida útil).

Recientemente, la Ingeniería de estructuras fuera de costa se ha desarrollado en forma significativa debido a los problemas tecnológicos que en el diseño y construcción de éstas se presentan y requieren para cumplir con los objetivos cada vez más ambiciosos del hombre.

Para subrayar la importancia de las estructuras fuera de costa

pueden mencionarse algunos de los diversos usos que éstas tienen. Por ejemplo: la perforación de pozos de exploración y explotación de petróleo, tanques de almacenamiento (petróleo, granos, agua), plataformas de operación, etc.

En general, las estructuras fuera de costa pueden clasificarse en fijas y móviles. Las fijas son las que se encuentran sujetas al fondo del mar mediante elementos anclados o depositados (por peso propio) en el fondo del mar. Las móviles son temporales y pueden ser removidas de su lugar de operación sin producirle daños (ver ref 5).

Las estructuras fijas, en su mayoría, están sujetas al fondo mediante pilas cilíndricas circulares que pueden ser delgadas o gruesas (ver capítulo 3).

Uno de los principales factores que intervienen en el diseño de las pilas es el oleaje que incide sobre ellas; aunque también hay que tomar en cuenta los efectos debidos al viento, sismo, fuerzas producidas por el hombre (v.gr. amarre de barcos) y corrientes subyacentes.

Considerando el efecto del oleaje como factor único en el diseño de estructuras, se presenta lo que podría llegar a tomarse como la secuencia que sería necesaria para establecer las cargas sobre la estructura.

- a) establecer las condiciones de oleaje de diseño para la estructura (cap 2)
- b) seleccionar y aplicar alguna teoría de oleaje para determinar las características cinemáticas de las partículas de fluido (cap 2)
- c) determinar las fuerzas hidrodinámicas sobre la estructura; para ello puede emplearse la ecuación de Morison (cap 3)
- d) calcular la respuesta de la estructura
- e) establecer las fuerzas y momentos flexionantes de diseño tanto en la base de la estructura como a lo largo de ella.

Esta secuencia no es la que se tendría que seguir siempre; los cálculos necesarios para diseñar una estructura están en función del problema en particular de que se trate.

El alcance de este trabajo comprende los incisos a, b, y c, para cuya solución se abordan diferentes temas en los capítulos 2 y 3.

El objetivo de este trabajo es determinar las características hidrodinámicas (fuerzas y momentos) a las que se ve sujeta una pila delgada en presencia del oleaje. El análisis se hace tanto para oleaje monocromático (regular) como para oleaje irregular.

En el capítulo 2 se presenta un análisis de oleaje partiendo de los conceptos fundamentales que intervienen en el fenómeno. Se analizan y definen los conceptos de oleaje monocromá-

tico e irregular. Para oleaje monocromático, se establecen las ecuaciones de gobierno (continuidad y de frontera); se presenta un análisis comparativo de algunas de las teorías existentes y se analiza de manera detallada la teoría lineal de oleaje para ondas progresivas. El oleaje irregular se analiza a partir de un registro del mismo. Se analiza con técnicas estadísticas estableciendo las características significantes del oleaje. También se analiza mediante técnicas espectrales (transformada de Fourier) estableciendo una representación analítica de la dinámica de la superficie libre del agua y finalmente se combinan los resultados estadísticos y espectrales para establecer una relación que permite calcular valores máximos asociados a una determinada probabilidad.

En el capítulo 3 se presenta la expresión para calcular la fuerza que produce el oleaje sobre un cilindro circular vertical delgado por unidad de longitud (ecuación de Morison). Se expone brevemente el origen y determinación de los coeficientes hidrodinámicos C_d y C_m .

Se determina, mediante integración, las ecuaciones para la fuerza y momento flexionante totales tanto para oleaje monocromático como para oleaje irregular. Para el caso de oleaje monocromático se emplean expresiones para la velocidad y aceleración de una partícula definidas de acuerdo con la teoría lineal.

Para el caso de oleaje irregular, en este trabajo se proponen nuevas expresiones para la velocidad y aceleración desarrolladas a partir de la teoría lineal.

Se obtienen valores máximos totales de la fuerza y momento flexionante empleando el criterio de la primera derivada, en el caso de oleaje monocromático, y recurriendo a los resultados del análisis espectral-estadístico (cap 2), en el caso de oleaje irregular. En ambos casos se presenta el procedimiento de cálculo para establecer dichos valores.

En el capítulo 4 se presentan dos ejemplos de aplicación. En el primero se obtiene la fuerza y el momento flexionante máximos totales para el caso de un prototipo de una plataforma de operaciones apoyada en una pila esbelta sujeta a oleaje monocromático. En el segundo se obtienen también la fuerza y momento flexionante máximos totales asociados a una determinada probabilidad para el caso de un modelo de una pila delgada sujeta a oleaje irregular. En este caso las pruebas se llevaron a cabo en el canal de arrastre del Instituto de Ingeniería.

Finalmente, en el capítulo 5 se presenta una serie de conclusiones y recomendaciones enfatizando aquellos tópicos que el autor considera de mayor interés y trascendencia con respecto a los temas menos 'explorados' actualmente por los investigadores dedicados a la Ingeniería de estructuras fuera de costa.

2. ANALISIS DE OLEAJE

2.1 *Conceptos fundamentales*

En hidráulica marítima uno de los problemas fundamentales es el análisis del oleaje; dicho análisis, en general, está encaminado a determinar por una parte, las características físicas del oleaje y por otra, las características cinemáticas de una partícula de agua que forma parte de una ola. Para establecer y analizar las características cinemáticas (una vez conocidas las físicas), se recurre a las teorías de oleaje existentes, mismas que, fundamentalmente, tratan de representar lo mejor posible la dinámica de la superficie libre del agua. La ecuación que se emplea en el desarrollo de la mayoría de las teorías de oleaje es la de Laplace (continuidad) acompañada de un juego de ecuaciones que representan las

condiciones de frontera.

2.1.1 Ecuación de continuidad

Esta ecuación parte del principio de conservación de masa el cual establece que la rapidez del cambio de almacenamiento en un volumen de control es igual a las entradas netas a dicho volumen, más la creación o destrucción de la masa contenida en el volumen.

Tomando en cuenta este principio y considerando un volumen de control diferencial se determina la ecuación diferencial de continuidad

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = R \quad (2.1)$$

donde

ρ	densidad del fluido
u, v, w	componentes de la velocidad \vec{V} en las direcciones x, y, z respectivamente
x, y, z	direcciones de los ejes coordenados ortogonales
t	tiempo
R	término que involucra la creación o destrucción de masa

La ec 2.1 es la más general para un flujo compresible no permanente. Para un flujo incompresible ($\rho = \text{ctte}$) donde además no hay creación ni destrucción de masa se establece que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

Recordando que

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

la ec 2.2 se escribe vectorialmente como

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2.3)$$

que es la ecuación diferencial de continuidad para flujo incompresible sea o no permanente.

2.1.2 Potencial de velocidad

Primeramente se definen las condiciones de flujos rotacionales e irrotacionales; las relaciones de rotación de una partícula con respecto a un sistema de ejes ortogonales x, y, z están dadas por

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.4a)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.4b)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.4c)$$

donde

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ componentes del vector de rotación $\vec{\omega}$.

Se dice que un flujo es rotacional cuando alguno de los tres componentes del vector de rotación $\vec{\omega}$ es diferente de cero; es rotacional porque cada partícula de fluido experimenta una rotación (de acuerdo a las ecs 2.4), además del movimiento de traslación.

También se acepta que un flujo puede ser irrotacional sin requerir que sea no viscoso.

Se considera que un flujo es irrotacional cuando todos los componentes del vector de rotación $\vec{\omega}$ son cero, es decir

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.5c)$$

Por otra parte es posible establecer una función escalar contínua diferenciable, denominada función potencial

$$\phi = \phi (x, y, z, t) \quad (2.6)$$

tal que la diferencia de potencial $\Delta\phi$ a lo largo de un segmento de una línea de corriente de longitud Δs está dada por

$$\Delta\phi = V_s \Delta s \quad (2.7)$$

donde V_s es la velocidad en la dirección de la coordenada s .

A partir de la ec 2.7 para un sistema coordenado ortogonal y haciendo $\Delta s \rightarrow 0$, se tiene

$$\vec{V} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.8)$$

o bien

$$\vec{V} = \text{grad } \phi \quad (2.9)$$

De esta manera se determina la velocidad mediante el gradiente del potencial, al cual se le denomina potencial de velocidad.

Tomando en cuenta la ec 2.8, los componentes de la velocidad u, v, w están dados por

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.10a)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.10b)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.10c)$$

Mediante sustitución, se puede comprobar fácilmente que las ecs 2.10 satisfacen las ecs 2.5, por lo que se concluye que el flujo con potencial o flujo potencial es irrotacional; también se establece que una función potencial existe solamente para un flujo irrotacional.

Sustituyendo las ecs 2.10 en la ec 2.2 (continuidad), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0$$

de donde

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

Tomando en cuenta las ecs 2.3 y 2.9, se tiene

$$\text{div} (\text{grad } \phi) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0.$$

de donde

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.12)$$

que es otra forma de expresar la ec 2.11; a esta expresión se le conoce como ecuación de Laplace y según se vió, a partir de ella puede establecerse la ecuación de continuidad.

2.2 Oleaje monocromático

El fenómeno de oleaje se genera por la diferencia de velocidades y densidades entre dos fluidos, agua y aire en movimiento, cuando éstos entran en contacto; también, debido a fuerzas de atracción entre la tierra, luna y sol y por movimientos telúricos subterráneos.

Se define como ola a la ondulación que sufre la superficie del agua debida a las fuerzas de generación antes mencionadas.

Para determinar las características físicas de una ola se es

tablecen las siguientes consideraciones:

- a) Se define un sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) , con x medida en la dirección de propagación de la ola, z medida hacia arriba a partir del nivel de aguas tranquilas (NAT) & y ortogonal a x & z .
- b) Las olas son bidimensionales en el plano $x - z$.
- c) El movimiento de las olas es progresivo conforme a la dirección positiva del eje x .
- d) El fondo, arriba del cual las olas se propagan, es liso y horizontal.
- e) Las olas mantienen una forma estable y uniforme.
- f) No existen corrientes subyacentes.
- g) La superficie libre del agua no sufre alteración alguna.
- h) El fluido (agua) es incompresible y no viscoso.
- i) Se admite que el flujo es irrotacional.

Con base en las anteriores consideraciones y con referencia en la fig 2.1 se definen las características físicas de una ola.

Altura de ola, H , es la distancia vertical medida desde el nivel máximo alcanzado por la ola (cresta) hasta el nivel mínimo de la misma (valle).

Amplitud de ola, a , es la mitad de la altura H .

Longitud de ola, L , es la distancia horizontal medida entre dos crestas o valles consecutivos.

Período de ola, T , es el tiempo que se requiere para que dos crestas o valles sucesivos pasen por un determinado punto fijo.

Celeridad de ola, c , es la velocidad con la cual la ola se desplaza.

Frecuencia de ola, f , es el inverso del período de ola y representa el número de olas que pasan por un punto fijo por unidad de tiempo.

Elevación de la superficie libre, η , es la distancia vertical a cualquier punto sobre la superficie del agua medida a partir del nivel de aguas tranquilas.

Profundidad del agua, d , es la distancia vertical medida desde el fondo del mar hasta el nivel de aguas tranquilas.

Ola senoidal es aquella en la que se considera que el perfil de la superficie libre adopta la forma de una función seno o coseno.

De acuerdo a la variación de las características físicas de las olas, éstas se clasifican de varias formas (ver tabla (2.1)).

TABLA 2.1

OLAS	Período	Capilar	$(T \leq 0.1 \text{ seg})$
		Ultragravedad	$(1.0 < T \leq 1.0 \text{ seg})$
		Gravedad	$(1.0 < T \leq 300 \text{ seg})$
		Infragravedad	$(30 < T \leq 300 \text{ seg})$
		Largo período	$(300 < T \leq 43200 \text{ seg})$
		Marea	$(43200 < T \leq 86400 \text{ seg})$
		Transmarea	$(T > 86400 \text{ seg})$
	Amplitud	Pequeña amplitud	$(H \ll L)$
		Amplitud finita	$(H < L)$
	Desplazamiento de la cresta	Progresivas	(Las crestas se mueven horizontalmente)
		Estacionarias	(Las crestas se mueven aparentemente en la vertical)
	Profundidad relativa	Olas en aguas profundas	$(d/L \geq 1/2)$
		Olas en aguas intermedias	$(1/2 > d/L > 1/20)$
		Olas en aguas bajas	$(d/L \leq 1/20)$
	Desplazamiento de las partículas	Olas de traslación	(se mueven siempre hacia donde lo hace la cresta)
		Olas de rotación	(algunas veces se mueven hacia donde lo hace la cresta)
	Tiempo de acción de la fuerza perturbadora	Olas libres	(por una acción instantánea de la fuerza)
		Olas forzadas	(por una acción continua de la fuerza)
	Teoría	Trocoidal	
		C-noidal	
		Solitaria	
		Función de corriente	

De acuerdo al período, las olas que mayor interés tienen en el estudio de estructuras fuera de costa, y en general en la ingeniería marítima, son las de gravedad. Además, dado que la mayoría de dichas estructuras se localizan en aguas profundas donde las olas presentan una longitud mucho mayor que la altura, puede considerarse que la teoría de olas progresivas de pequeña amplitud es la que tiene mayor interés y aplicabilidad para el estudio de estructuras fuera de costa.

Debido a lo anterior, en este trabajo se plantea y analiza, de manera detallada, la teoría lineal, aunque también se presenta un análisis comparativo de las otras teorías.

Se define como oleaje monocromático aquél cuyo perfil de la superficie libre puede representarse mediante una senoide, ésto implica que la altura, longitud y período se consideren constantes para un determinado oleaje.

Para determinar la altura, longitud y período de un tren de olas (serie de olas sucesivas), pueden emplearse métodos de predicción de oleaje (a partir de registros meteorológicos) y métodos de análisis estadístico y/o espectral (a partir de registros de oleaje).

Sin embargo, para definir completamente un oleaje, no basta haber obtenido sus parámetros H , L y T . Es necesario establecer las características cinemáticas de las partículas de agua que lo determinan. Dichas características son: desplazamien-

to, velocidad y aceleración.

Para definir dichas características se parte de la ecuación de Laplace y se establecen condiciones de frontera.

La ecuación de Laplace (ec 2.11) para dos dimensiones se escribe como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.13)$$

las condiciones de frontera son

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -d \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta + \frac{p_0}{\rho} = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.16)$$

donde

- ϕ función potencial
- η elevación de la superficie libre del agua medida a partir del nivel de aguas tranquilas
- g aceleración de la gravedad
- p_0 presión en la superficie libre
- ρ densidad del fluido

La ec 2.14 representa la condición de frontera en el fondo, la cual especifica que la componente vertical de la velocidad de una partícula de fluido en el fondo es cero. Las ecs 2.15

y 2.16 representan las condiciones de frontera a superficie libre, cinemática y dinámica respectivamente; la primera describe la condición de que la velocidad de una partícula de fluido normal a la superficie libre es igual a la velocidad de la superficie libre en sí, en la misma dirección; la condición dinámica establece que la presión en la superficie libre, expresada en términos de la ecuación de Bernoulli, es constante, ésto implica que la presión atmosférica (inmediatamente arriba del fluido) es en sí, constante, y que la superficie libre permanece libre de alteración (la tensión superficial se considera nula). Además, para admitir que el oleaje es periódico y regular se considera que no existen corrientes subyacentes.

Las hipótesis que se hicieron para establecer las ecs 2.13 a 2.16 son poco justificables; las más importantes son las que se refieren a considerar que no existen corrientes subyacentes, que la profundidad d es constante y que las olas son bidimensionales y de forma permanente. Por otra parte, se considera razonable admitir flujo irrotacional fuera de las capas límite en el fondo y en la superficie libre.

2.2.1 Teorías de oleaje

Existen varias teorías de oleaje las cuales se diferencian entre sí de acuerdo a las hipótesis y grado de aproximación de las ecuaciones de gobierno (continuidad y de frontera) que en

cada una se hacen.

Las principales teorías que se han desarrollado son:

1. Teoría lineal o de Airy (pequeña amplitud)
2. Teoría de Stokes (amplitud finita)
3. Teoría c-noidal
4. Teoría de la ola solitaria
5. Teoría trocoidal
6. Teoría de la función de corriente.

La teoría lineal o de Airy es la teoría más empleada en la práctica y una de las más sencillas, por ello se le analiza más adelante en forma detallada. En las refs 23 y 27 se pueden consultar las demás teorías.

Ya que las teorías de oleaje proporcionan diferentes resultados de las características cinemáticas de las partículas de agua que forman las olas, surge, invariablemente, la dificultad de seleccionar la teoría de oleaje más adecuada para su aplicación en algún problema particular; ésto es difícil de resolver ya que para valores específicos de H , T y d , se obtienen varios y diferentes resultados y no se puede hablar de soluciones únicas.

Un aspecto importante a considerar en la selección de alguna teoría es la magnitud del esfuerzo (en cálculos) necesario en el empleo de las diferentes teorías; por ejemplo, cuando se efectúan cálculos preliminares, puede resultar mejor emplear

la teoría lineal que la de Stokes de quinto orden.

Para establecer un criterio de aplicación, Dean (1970) comparó varias teorías tomando como punto de referencia el grado de aproximación del ajuste de la característica cinemática bajo estudio con respecto del planteamiento completo del problema. Dado que la ecuación de Laplace y la condición de frontera de fondo se satisfacen de manera exacta en todas las teorías bajo consideración, se emplea el error de ajuste de las dos condiciones de frontera no lineales de superficie libre como criterio de comparación. Las teorías analizadas son la lineal, Stokes de tercer y quinto orden, cnoidal en primera y segunda aproximaciones, onda solitaria en primera y segunda aproximaciones y función de corriente; de acuerdo a los resultados obtenidos, Dean determinó una gráfica en la que se muestran los rangos de aplicación de estas teorías, en la fig 2.2 se muestra dicha gráfica.

En este trabajo se emplea la teoría lineal. Si se desean consultar otras teorías, consultar las refs 22 y 27.

2.2.2 Teoría lineal

En el análisis bidimensional de un tren de oleaje, al tratar de obtener una solución exacta de las ecuaciones de gobierno (continuidad y de frontera), surgen dos problemas fundamentales; el primero es que las condiciones de frontera a superficie libre son no lineales y el segundo, que estas condiciones

se consideran válidas para la superficie libre $z = \eta$, la cual es inicialmente desconocida. La mayor y más simple aproximación es buscar una solución lineal del problema, misma que se logra proponiendo que la altura de la ola H sea mucho más pequeña que la longitud L y la profundidad d ; ésto es

$$H \ll L, d$$

Tomando en cuenta esta consideración, además de las ya mencionadas se presenta la teoría lineal de olas.

De acuerdo a la anterior restricción, los términos no lineales en las ecs 2.15 y 2.16 resultan despreciables en comparación con los demás, los cuales son lineales. Además, las condiciones de frontera a superficie libre pueden aplicarse directamente en el nivel de aguas tranquilas (NAT), ésto es, en $z = 0$. Recuérdese que las anteriores simplificaciones fueron hechas con base en la restricción de que $H \ll L, d$, la cual parte de un análisis físico de las condiciones de oleaje.

Según el anterior razonamiento, las ecuaciones de frontera a superficie libre (ecs 2.15 y 2.16) se escriben como

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.18)$$

que, al combinarlas, resultan

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.19)$$

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (2.20)$$

Proponiendo el perfil de oleaje η como

$$\eta = a \cos (kx - \sigma t) \quad (2.21)$$

donde

η superficie libre del agua

$$a = \frac{H}{2} \quad (\text{amplitud del oleaje}) \quad (2.22)$$

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (\text{número de onda}) \quad (2.23)$$

L longitud de la ola

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{frecuencia angular}) \quad (2.24)$$

T período de la ola

x distancia (horizontal)

t tiempo

y tomando en cuenta la condición de frontera dada por la ec 2.18, se plantea el potencial de velocidad como

$$\phi = f(z) \text{ sen } (kx - \sigma t) \quad (2.25)$$

que al sustituirlo en la ecuación de Laplace (ec 2.13), da lugar a la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 f}{d z^2} - k^2 f = 0$$

cuya solución general es

$$f = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

donde A y B son constantes; sustituyendo en la ec 2.25, se tiene

$$\phi = (Ae^{kz} + Be^{-kz}) \sin(kx - \sigma t)$$

sustituyendo esta última en las condiciones de frontera dadas por las ecs 2.14 y 2.19, se tiene

$$Ae^{-kd} - Be^{kd} = 0 \quad (2.26a)$$

y

$$(\sigma^2 - gk) A + (\sigma^2 + gk) B = 0 \quad (2.26b)$$

a partir de la ec 2.26a, haciendo

$$Ae^{-kd} = Be^{kd} = \frac{D}{2}$$

la función potencial (ec 2.25) se escribe como

$$\phi = \frac{D}{2} \left(e^{k(z+d)} + e^{-k(z+d)} \right) \sin(kx - \sigma t)$$

recordando la definición de coseno hiperbólico, se tiene

$$\phi = D \cosh k(z+d) \sin(kx - \sigma t) \quad (2.27)$$

a partir de la ec 2.20 y tomando en cuenta las ecs 2.21 y 2.27, se tiene

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t) = \frac{\sigma}{g} D \cosh kd \cos(kx - \sigma t)$$

de donde

$$D = \frac{ag}{\sigma} \frac{1}{\cosh kd} = \frac{a\sigma}{k} \frac{1}{\sinh kd}$$

sustituyendo en la ec 2.27, se obtiene la ecuación final para la función potencial

$$\phi = \frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \sigma t) \quad (2.28a)$$

o

$$\phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(kx - \sigma t) \quad (2.28b)$$

Para determinar la celeridad de la ola, se parte de las ecs 2.26; donde, para obtener una solución diferente de la trivial, esto es $A \neq 0$ y $B \neq 0$, debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} e^{-kd} & -e^{kd} \\ \sigma^2 - gk & \sigma^2 + gk \end{vmatrix} = 0$$

calculando el determinante, se obtiene la siguiente relación

$$\sigma^2 = gk \tanh kd \quad (2.29)$$

teniendo en cuenta que

$$c = \frac{\sigma}{k} \quad (2.30a)$$

sustituyendo la ec 2.29 en la 2.30a, se llega a

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd} \quad (2.30b)$$

sustituyendo la ec 2.23 en la 2.30b, se tiene

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}} \quad (2.30c)$$

recordando que

$$c = \frac{L}{T} \quad (2.30d)$$

la ec 2.30c, se escribe como

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (2.30e)$$

y, a partir de las ecs 2.30d y 2.30e, la longitud de ola se obtiene como

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (2.31)$$

la cual proporciona el valor de la longitud en forma implícita, por lo que es necesario un proceso iterativo (aproximaciones sucesivas) para obtener dicho valor.

Con base en la ec 2.28b, y tomando en cuenta las ecs 2.10, se determinan los componentes horizontal y vertical de la velocidad de una partícula.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos (kx - \sigma t) \quad (2.32)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{akg}{\sigma} \frac{\sinh k(z+d)}{\cosh kd} \sin (kx - \sigma t) \quad (2.33)$$

las correspondientes componentes de la aceleración se obtienen mediante las primeras derivadas con respecto al tiempo de las velocidades, ésto es

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin (kx - \sigma t) \quad (2.34)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = - agk \frac{\sinh k(z+d)}{\cosh kd} \cos (kx - \sigma t) \quad (2.35)$$

A continuación se presenta un resumen de otros resultados de interés de la teoría lineal.

- desplazamiento horizontal de partícula

$$\xi = - \frac{H}{2} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin (kx - \sigma t)$$

- desplazamiento vertical de partícula

$$\zeta = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos (kx - \sigma t)$$

- Presión

$$p = - \rho g z + \frac{1}{2} \rho g H \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos (kx - \sigma t)$$

- Energía

$$E = \frac{\rho g H^2}{8} L$$

De acuerdo a la clasificación de olas presentada en el apartado 2.2, éstas pueden localizarse en aguas profundas, intermedias y bajas, según sea el valor de la relación d/L . Las ecuaciones deducidas anteriormente para la teoría lineal son válidas para aguas intermedias. Para aguas profundas y bajas dichas ecuaciones admiten simplificaciones.

Dado que generalmente las estructuras fuera de costa se ubican a profundidades relativamente grandes, a continuación se presenta un resumen de resultados para la teoría lineal váli-

dos para aguas profundas.

Se considera que las olas se localizan en aguas profundas cuando se satisface que

$$\frac{d}{L} \geq \frac{1}{2}$$

para esta condición puede comprobarse que

$$\tanh kd \rightarrow 1$$

y

$$kd \rightarrow \infty$$

tomando en cuenta las anteriores consideraciones en las expresiones para la teoría lineal se obtienen los siguientes resultados.

- función potencial

$$\phi_0 = \frac{a\sigma}{k} e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

- relación de dispersión

$$C_0^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \frac{g}{k}$$

- celeridad

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi}$$

- longitud

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$

- superficie libre del agua

$$\eta = a \cos (kx - \sigma t)$$

- velocidad horizontal de partícula

$$u_o = a\sigma e^{kz} \cos (kx - \sigma t)$$

- velocidad vertical de partícula

$$w_o = a\sigma e^{kz} \sin (kx - \sigma t)$$

- aceleración horizontal de partícula

$$\dot{u}_o = a\sigma^2 e^{kz} \sin (kx - \sigma t)$$

- aceleración vertical de partícula

$$\dot{w}_o = - a\sigma^2 e^{kz} \cos (kx - \sigma t)$$

El subíndice 'o' en el anterior juego de ecuaciones, indica la validez de éstas sólo para aguas profundas.

A partir de las ecuaciones generales (aguas intermedias) y en combinación con las propias para aguas profundas, se obtienen las siguientes relaciones de interés

$$\frac{C}{C_o} = \tanh kd$$

$$\frac{L}{L_o} = \tanh kd$$

de donde

$$\frac{C}{C_o} = \frac{L}{L_o}$$

2.3 Oleaje irregular

En el apartado anterior (2.2) se analizó el fenómeno de oleaje considerando conocidos el período, altura y longitud del mismo. También se consideró que el oleaje podía representarse mediante una función regular y periódica (oleaje monocromático) proponiendo, para el caso de la teoría lineal en particular, una función coseno.

Sin embargo, observando el mar, se puede comprobar inmediatamente que el oleaje no presenta la forma de una cosenoide sino formas irregulares.

Se define como oleaje irregular al oleaje que se presenta en la naturaleza, el cual exhibe un comportamiento aleatorio y, por lo tanto, no se le puede representar mediante una sola función regular.

Para estudiar este tipo de oleaje es necesario disponer de registros reales con base en los cuales se efectúan análisis de tipo estadístico, espectral y espectral-estadístico.

Así como el objetivo en predicción del oleaje es determinar las características de éste (longitud, período y altura) mediante análisis de registros meteorológicos, el objetivo del análisis de registros de oleaje es también la determinación de dichas características y además, efectuar inferencias asociadas con los análisis estadísticos y/o espectrales.

2.3.1 Análisis estadístico

Su objetivo es obtener alturas y períodos característicos del oleaje, entre otros los denominados significantes, mediante análisis directo del registro de oleaje o efectuando inferencias a partir de una distribución de probabilidad.

En este enfoque se dispone de un registro similar al de la figura 2.3, en el cual se indica la disposición de alturas y períodos de acuerdo al criterio de discretización que se sigue en cualquier registro de tiempo, definiendo así las alturas como las máximas distancias entre los valores máximo y mínimo para cada período; este último queda definido como el tiempo que transcurre entre dos puntos de cruce consecutivos en el eje del tiempo en dirección ascendente (ver fig 2.3).

El análisis directo del registro consiste en obtener alturas características tomando en cuenta algunas de las alturas del registro y, a partir de los períodos asociados a dichas alturas, obtener períodos característicos.

Una vez ordenadas las alturas de ola de mayor a menor, la expresión que se emplea es

$$\bar{H}_{1/n} = \frac{\sum_{i=1}^{NL} H_i}{NL} \quad (2.36)$$

sujeta a

$$H_i > H_{i+1}, \quad i = 1, N \quad (2.37)$$

donde

$$NL = \frac{N}{n}$$

N número de datos

n valor característico de la ola ($i \leq n \leq N$)

H_i altura i del registro

Asociado a cada H_i se tiene un período T_i , por lo que la expresión para obtener los períodos característicos es análoga a la de las alturas, es decir

$$\bar{T}_{1/n} = \frac{NL \sum_{i=1}^n T_i}{NL} \quad (2.38)$$

Existen tres valores de n que definen características importantes del oleaje; dichos valores son:

para $n=1$, \bar{H} y se denomina altura media

para $n=N$, $H_{\text{máx}}$ y se denomina altura máxima

para $n=3$, $\bar{H}_{1/3}$ y se denomina altura significativa

y de igual manera (para $n=1, N$ y 3) se obtienen los valores medio, máximo y significativo del período.

Un análisis alternativo para determinar alturas y períodos característicos del oleaje es el que se hace con base en una distribución de probabilidad.

De acuerdo con varios autores (refs 4 y 22) la distribución de probabilidad que siguen las alturas de ola es una distribución Rayleigh mientras que las elevaciones de la superfi-

cie libre siguen una distribución normal o de Gauss.

Debido a que en este trabajo las alturas de ola son de interés primario, se presenta la teoría de probabilidad para una distribución Rayleigh.

La expresión que define la densidad de probabilidad para una distribución Rayleigh es

$$p(x) = \frac{x}{a^2} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2a^2} \right\} \quad \text{para } x \geq 0 \quad (2.39a)$$

y

$$p(x) = 0 \quad \text{para } x < 0 \quad (2.39b)$$

donde a^2 es el parámetro de la distribución.

La función de distribución acumulada o distribución de probabilidad queda definida como

$$P(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x) dx \quad (2.40)$$

sustituyendo la ec 2.39a en la anterior, se tiene

$$P(x \leq x_0) = P(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{x}{a^2} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2a^2} \right\} dx \quad (2.41)$$

haciendo

$$u = -\frac{x^2}{2a^2}$$

de donde

$$du = -\frac{x}{a^2} dx$$

sustituyendo e integrando la ec 2.41, se tiene

$$P(x_0) = 1 - \exp \left\{ - \frac{x_0^2}{2a^2} \right\} \quad (2.42)$$

La figura 2.4 muestra la distribución de probabilidad Rayleigh, ilustrando las ecs 2.39 y 2.42 .

En toda distribución de probabilidad resulta de interés conocer los momentos estadísticos con respecto al origen y la media.

La expresión que define el momento de orden n con respecto al origen es

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (2.43)$$

El momento de orden n con respecto a la media se obtiene como

$$E((x - \mu_x)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^n p(x) dx \quad (2.44)$$

donde μ_x es la media de los datos y queda definida como el momento de primer orden con respecto al origen, es decir

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (2.45)$$

La variancia σ^2 se define como el momento de segundo orden con respecto a la media, es decir

$$\sigma^2 = E((x - \mu_x)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \quad (2.46)$$

la desviación estándar σ se obtiene como la raíz cuadrada de la variancia.

De acuerdo a la distribución de probabilidad en estudio y tomando en cuenta la ec 2.43, el momento de primer orden con respecto al origen (media) es

$$\mu_x = E(x) = \int_0^{\infty} x \frac{x}{a^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2}\right\} dx \quad (2.47)$$

integrando, se tiene

$$\mu_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \quad (2.48)$$

y el de segundo orden (media de los cuadrados) es

$$\overline{x^2} = E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{x}{a^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2}\right\} dx \quad (2.49)$$

integrando se obtiene

$$\overline{x^2} = 2a^2 \quad (2.50)$$

La variancia se obtiene, de acuerdo a la ec 2.46, como

$$\sigma^2 = E((x - \mu_x)^2) = E(x^2) - \mu_x^2 = \overline{x^2} - \mu_x^2 \quad (2.51)$$

Para estimar el parámetro a^2 de la distribución Rayleigh se pueden emplear varios métodos (de momentos, mínimos cuadrados

y máximo-verosimilitud). En este trabajo se emplea el método de momentos tomando en cuenta el de segundo orden, por lo que, a partir de la ec 2.50

$$a^2 = \frac{\overline{x^2}}{2} \quad (2.52)$$

Por otra parte, a partir de los n datos obtenidos del registro, el momento de segundo orden $\overline{x^2}$, se obtiene como

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (2.53)$$

sustituyendo en la ec 2.52, se tiene

$$a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n} \quad (2.54)$$

Para aquellos casos en los que la media es nula ($\mu_x = 0$), tomando en cuenta la ec 2.51, se cumple que

$$\sigma^2 = E(x^2) = \overline{x^2} \quad (2.55)$$

por lo que la ec 2.52 se escribe también como

$$a^2 = \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.56)$$

La ec 2.40 define la probabilidad de no excedencia del valor x_0 ; recordando que el área bajo toda curva de distribución de probabilidad es unitaria, la probabilidad de excedencia $Q(x \geq x_0)$, se define como

$$Q(x \geq x_0) = Q(x_0) = 1 - P(x \leq x_0) = 1 - P(x_0) \quad (2.57)$$

haciendo

$$P(x_{1/n}) = P(x_0) = 1 - 1/n \quad (2.58)$$

y por lo tanto

$$Q(x_{1/n}) = Q(x_0) = 1/n. \quad (2.59)$$

se pueden inferir valores a partir de una probabilidad determinada. Para una distribución Rayleigh, tomando en cuenta la ec 2.42, se tiene

$$Q(x_{1/n}) = 1/n = \exp \left\{ - \frac{x_{1/n}^2}{2a^2} \right\} \quad (2.60)$$

En la figura 2.5 se muestran los valores de $x_{1/n}$, $P(x_{1/n})$ y $Q(x_{1/n})$.

El valor cuya probabilidad de ser igualado o excedido es $1/n$ se determina, a partir de la ec 2.60, como

$$x_{1/n} = \sqrt{-2a^2 \ln 1/n} \quad (2.61)$$

Para hallar el valor promedio $\bar{x}_{1/n}$, fig 2.5, cuya probabilidad de ser igualado o excedido es $1/n$, se tiene

$$\bar{x}_{1/n} = \frac{\int_{x_{1/n}}^{\infty} x p(x) dx}{1/n} = n \int_{x_{1/n}}^{\infty} x p(x) dx \quad (2.62)$$

Integrando la ecuación anterior, se tiene

$$\bar{x}_{1/n} = \sqrt{2a^2 \ln n} + \frac{n\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\ln n}) \right) \quad (2.63)$$

donde

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\{-t^2\} dt ; \quad (x = \sqrt{\ln n}) \quad (2.64)$$

A partir de las ecs 2.63 y 2.64, se pueden obtener los valores característicos del oleaje; en especial para $n=1$ y $n=3$, se obtienen los valores de la altura media y significativa, respectivamente.

Así, para la altura media ($n=1$), se tiene

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{2\pi a^2}}{2} \quad (2.65)$$

la altura significativa se obtiene como

$$\bar{H}_{1/3} = 1.416 \sqrt{2a^2} \quad (2.66)$$

Para hallar los valores característicos del período, Bretschneider (1959) propone la siguiente distribución de probabilidad, válida para aguas profundas ($d/L \geq 1/2$)

$$P(T_0) = 1 - e^{-0.675 \left(\frac{T_0}{\bar{T}} \right)^4} ; \quad (T_0 \geq 0) \quad (2.67)$$

donde \bar{T} es la media de los períodos.

Para fines prácticos, el período significativa se obtiene como

$$\bar{T}_{1/3} = 1.1 \bar{T} \quad (2.68)$$

2.3.2 Análisis espectral

Para emplear este método se debe disponer de un registro de oleaje el cual se discretiza de acuerdo a un intervalo de tiempo seleccionado. En la figura 2.6 se muestra un registro tipo.

El objetivo de este análisis es determinar parámetros espectrales mediante los cuales se puede representar el registro original como una suma de funciones armónicas; además, según se verá en el apartado 2.3.3, a partir de la relación de dichos parámetros con características estadísticas, pueden inferirse valores asociados a una determinada probabilidad.

El análisis espectral tiene como base el empleo de la transformada de Fourier. Según se dijo, mediante este análisis se llega a representar el registro de oleaje como una suma de funciones armónicas, que en este caso son senoides. En la figura 2.7 se esquematiza lo dicho anteriormente.

Con referencia a la fig 2.7, el registro real $x(t)$ (IR) puede expresarse como la suma de n componentes $(1, 2, 3, \dots, n)$, cada una con su propia amplitud a_i , frecuencia f_i y ángulo de fase ϕ_i , es decir

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (2.69)$$

donde

$$x_i(t) = a_i \text{ sen } (2\pi f_i t + \phi_i) \quad (i=1, n) \quad (2.70)$$

La transformada de Fourier se emplea para determinar los valores de a_i y ϕ_i ; el número de componentes y las frecuencias asociadas se obtienen a partir de la densidad de potencia espectral, misma que se calcula con la transformada.

La transformada de Fourier constituye una transformación lineal y sirve para describir el comportamiento de una señal que existe en el dominio del tiempo, dentro del dominio de la frecuencia.

Una señal periódica $x(t)$ puede representarse por medio de una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] e^{j2\pi n f_0 t} \quad (2.71)$$

De acuerdo con el teorema de la integral de Fourier, existe una representación similar a la ec 2.71 para señales no periódicas dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] e^{j2\pi f t} df \quad (2.72)$$

la cual se obtiene mediante un razonamiento heurístico a partir de la ec 2.71 haciendo que el período T_0 tienda a infinito y por lo tanto $n f_0$ tienda a f .

Se define como la transformada de Fourier de $x(t)$

$$X(f) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.73)$$

la cual constituye la integral dentro del paréntesis rectangular en la ec 2.72 .

Tomando en cuenta la ec 2.72, se establece que $x(t)$ puede encontrarse mediante la transformada inversa de Fourier de $X(f)$, es decir

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.74)$$

La ec 2.73 constituye una integración sobre todo el tiempo mientras que la ec 2.74 es una integración sobre todos los valores de la frecuencia; a este par de ecuaciones se le conoce como par de transformadas de Fourier.

La señal $x(t)$ puede discretizarse, de acuerdo a un intervalo de tiempo Δt constante (ver fig 2.6), determinando así un conjunto de N valores discretos x_i . La transformada de Fourier para valores discretos queda definida, a partir de la ec 2.73, como

$$X_i = F(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k i/N} ; (i=1, N-1) \quad (2.75)$$

Para valores discretos, la densidad de potencia espectral (de dos lados) se define como

$$S'_x(f_i) \Delta f = |X_i|^2 \quad (2.76)$$

donde, tomando en cuenta que X_i es generalmente complejo

$$|X_i|^2 = (X_{i \text{ REAL}})^2 + (X_{i \text{ IMAG}})^2 \quad (2.77)$$

Para determinar el valor de la transformada de Fourier X_i y por lo tanto la densidad de potencia $S'_x(f_i) \Delta f$ existen varios métodos; uno de los más usuales es el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT). El tratamiento matemático que se sigue en este y otros métodos proporciona el valor de la densidad de manera simétrica, cubriendo un rango de frecuencia de $-\infty < f < \infty$ estableciéndose la siguiente relación

$$S'_x(f_i) \Delta f = S'_x(-f_i) \Delta f \quad (2.78)$$

donde $S'_x(f_i) \Delta f$ ó $S'_x(-f_i) \Delta f$ es la densidad de potencia espectral "de dos lados" definida de acuerdo a la ec 2.76 .

Dado que las frecuencias negativas no tienen significado, conviene definir la densidad de potencia espectral "de un solo lado" como

$$S_x(f_i) \Delta f = 2 S'_x(f_i) \Delta f \quad (2.79)$$

o bien

$$S_x(f_i) \Delta f = 2 |X_i|^2 \quad (2.80)$$

la cual queda definida en el rango de frecuencias de $0 \leq f < \infty$.

Considerando que en este trabajo se emplea el algoritmo de la transformada rápida de Fourier; para un conjunto discreto de datos, el intervalo de frecuencia se obtiene como

$$\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} \quad (2.81)$$

donde

N número de datos

Δt intervalo de tiempo

conviene que N sea un número resultado de elevar el número dos a una potencia entera, es decir

$$N = 2^\gamma \quad (\gamma = 1, 2, \dots) \quad (2.82)$$

Las frecuencias asociadas a cada dato se obtienen como

$$f_i = \frac{i-1}{N \Delta t} \quad (i=1, \frac{N}{2} + 1) \quad (2.83)$$

la restricción para el valor de i obedece a que la densidad de potencia tiene valores simétricos. La frecuencia máxima se obtiene para $i = N/2 + 1$; sustituyendo en la ec 2.83, se tiene

$$f_{\text{máx}} = \frac{1}{2 \Delta t} \quad (2.84)$$

para los valores simétricos (negativos), se tiene la siguiente relación

$$f_i = - f_{N-i+2} \quad (i = \frac{N}{2} + 2, N) \quad (2.85)$$

El espectro de un solo lado de $x(t)$ es la representación gráfica de la relación que existe entre la densidad de potencia espectral, ec 2.80, y la frecuencia; en la figura 2.8 se muestra un espectro tipo.

Al igual que en probabilidad y estadística, en teoría espectral, tomando en cuenta el espectro (fig 2.8), se define el momento espectral de orden n con respecto al origen como

$$m_n = \int_0^{\infty} f_i^n S_x (f_i) df \quad (2.86)$$

para $n=0$, se define el momento de orden cero m_0 el cual resulta igual a la variancia σ^2 de los datos x_i obtenidos del registro, ésto es

$$m_0 = \int_0^{\infty} S_x (f_i) df = \sigma^2 \quad (2.87)$$

Analizando la ec 2.87 se deduce que la variancia σ^2 queda definida como el área bajo el espectro, lo cual resulta de gran utilidad, según se verá más adelante.

Para poder representar el registro de tiempo (fig 2.6) según la ec 2.70, se determina el número de componentes (senoides) de acuerdo al número de máximos (picos) que tenga el espectro (fig 2.8), es decir, si el espectro presenta n picos, el registro se representa como la suma de n senoides. Asociadas a todos los máximos, antes mencionados, se

encuentran las frecuencias de los componentes. Para determinar la amplitud a_i y ángulo de fase ϕ_i de cada una de ellas se tiene

$$a_i = 2 |x_i| \quad (2.88)$$

y

$$\phi_i = \text{ang tan} \left\{ - \frac{X_i \text{ REAL}}{X_i \text{ IMAG}} \right\} \quad (2.89)$$

De acuerdo a lo anteriormente expuesto y tomando en cuenta las ecs 2.88 y 2.89, es posible expresar un registro de oleaje (irregular) como una suma de senoides según la ec 2.69. Para obtener funciones coseno se tiene la relación

$$\text{sen } A = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + A \right) \quad (2.90)$$

2.3.3 Análisis espectral-estadístico

Este análisis consiste en combinar algunos de los resultados obtenidos en los apartados 2.3.1 y 2.3.2. El objetivo del mismo es establecer un criterio para obtener valores asociados a una determinada probabilidad con los cuales efectuar un diseño que contemple valores extremos.

Según se dijo en el apartado 2.3.1, las alturas de ola siguen una distribución Rayleigh. Por otra parte, mediante la forma del espectro de oleaje y los momentos espectrales asociados a éste, se define el parámetro ancho de banda, por me

dio del cual se puede estimar que tan bueno es el ajuste de las alturas a una distribución Rayleigh; para hallar el ancho de banda ϵ^2 , se tiene

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \quad (2.91)$$

donde m_0 , m_2 y m_4 son los momentos espectrales de primer, segundo y cuarto orden respectivamente. A partir de la ec 2.86 y para un conjunto de N valores discretos, la expresión que define a los momentos es

$$m_n = \sum_{i=1}^{N/2+1} f_i^n S_x(f_i) \Delta f \quad (2.92)$$

donde f_i es la frecuencia asociada al dato i (ec 2.83) y $S_x(f_i) \Delta f$ es la densidad de potencia espectral definida de acuerdo con la ec 2.80.

En particular, para $n=0$, la ec 2.92 define la variancia, es decir

$$m_0 = \sum_{i=1}^{N/2+1} S_x(f_i) \Delta f = \sigma^2 \quad (2.93)$$

A partir del valor de ϵ^2 , se dice que si éste se aproxima a la unidad, la distribución que siguen los datos es del tipo Gauss o normal y si se aproxima a cero, la distribución es Rayleigh, ésto es

$$\text{si } \epsilon^2 \rightarrow 1 \quad ; \quad \text{distribución normal} \quad (2.94a)$$

$$\text{si } \epsilon^2 \rightarrow 0 \quad ; \quad \text{distribución Rayleigh} \quad (2.94b)$$

Por otra parte, considerando que la media de las alturas de ola es nula, tomando en cuenta las ecs 2.50 y 2.55, se puede decir que

$$\sigma^2 = 2 a^2 \quad (2.95)$$

por lo que, a partir de la ec 2.93, se establece que

$$m_0 = 2 a^2 \quad (2.96)$$

El anterior resultado (ec 2.96) es importante debido a que relaciona los resultados de los análisis espectral y estadístico.

La ec 2.61 también se puede escribir como

$$x_{1/n} = \sqrt{2 a^2 \ln n} = \sqrt{\ln n} \sqrt{2 a^2} \quad (2.97)$$

por lo que, tomando en cuenta la ec 2.96, la anterior se escribe como

$$x_{1/n} = \sqrt{\ln n} \sqrt{m_0} \quad (2.98)$$

Sin embargo, la anterior ecuación supone que los datos del registro siguen una distribución Rayleigh, ésto es que $\epsilon^2 = 0$. Para tomar en cuenta el que la distribución de probabilidad de dichos datos no sea precisamente una Rayleigh, se propone determinar un factor correctivo como

$$F.C. = \frac{m_2}{(m_0 m_4)^{1/2}} \quad (2.99)$$

el cual se introduce en la expresión de inferencia estadística (ec 2.98) por lo que se tiene

$$x_{1/n} = \text{F.C.} \sqrt{\ln n} \sqrt{m_0} \quad (2.100)$$

Esta última expresión es la que se emplea para inferir valores asociados a una determinada probabilidad en combinación con el análisis espectral.

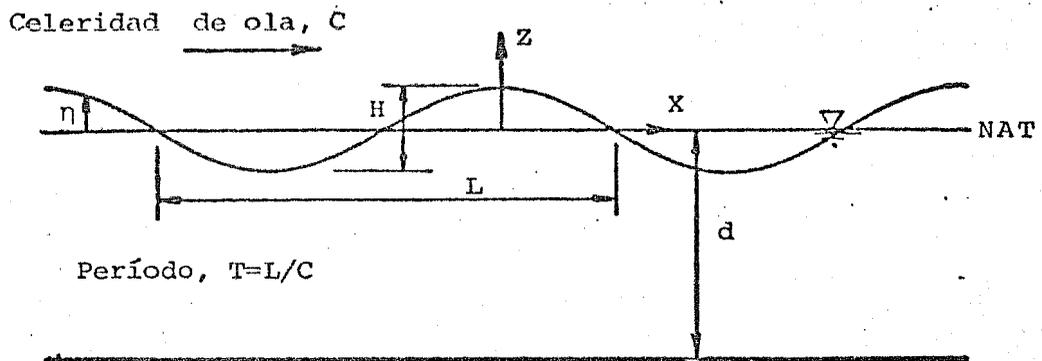


Fig. 2.1 Características físicas de una ola.

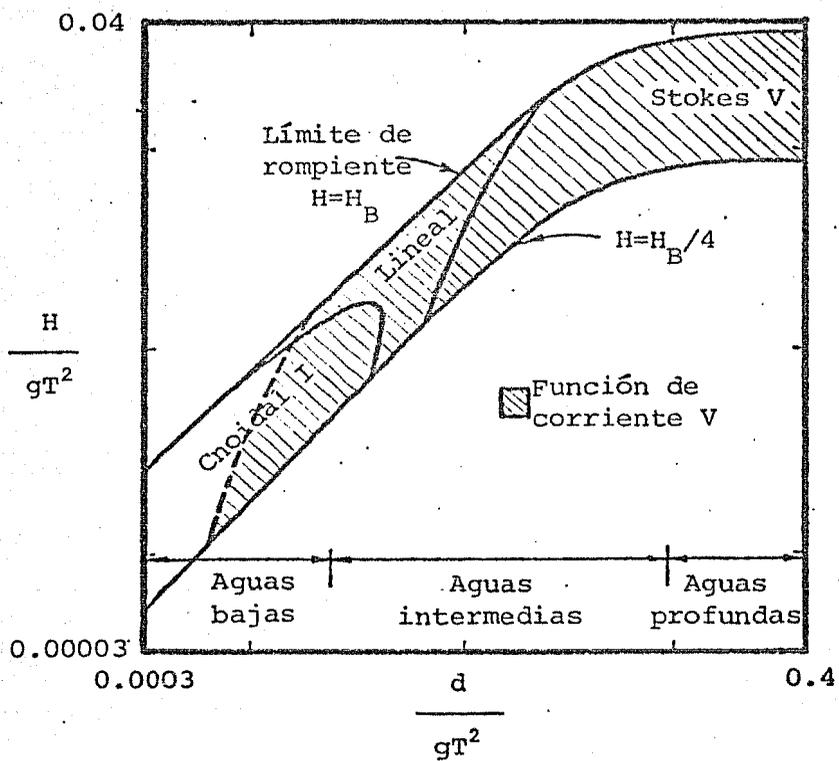


Fig. 2.2 Rangos de aplicación de algunas teorías.

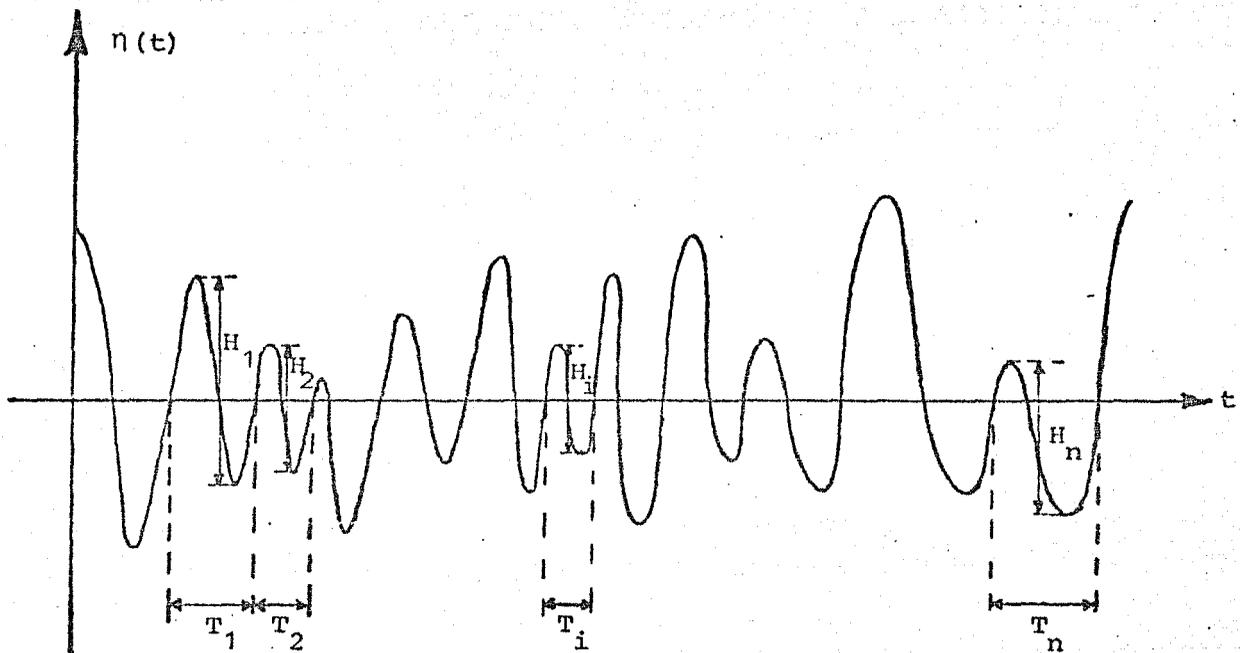


Fig. 2.3 Discretización de un registro de oleaje.
Análisis estadístico.

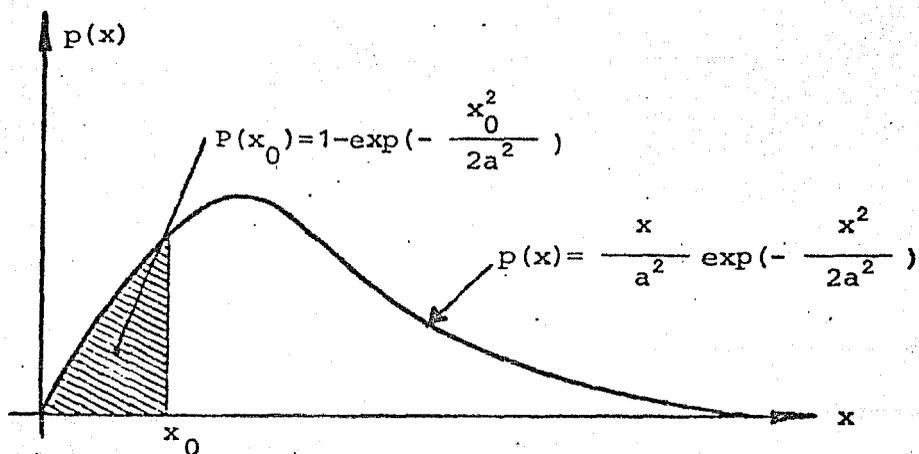


Fig. 2.4 Distribución de probabilidad Rayleigh.

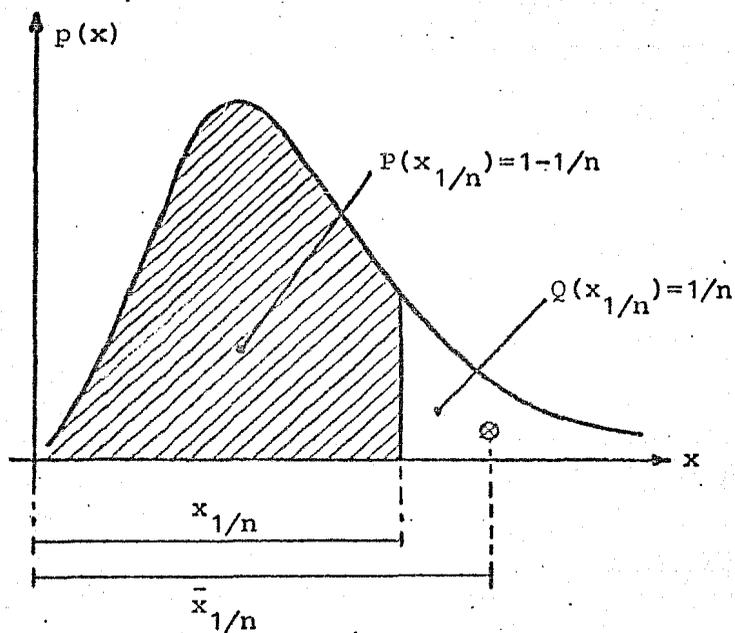


Fig. 2.5 Probabilidad de excedencia y no excedencia.

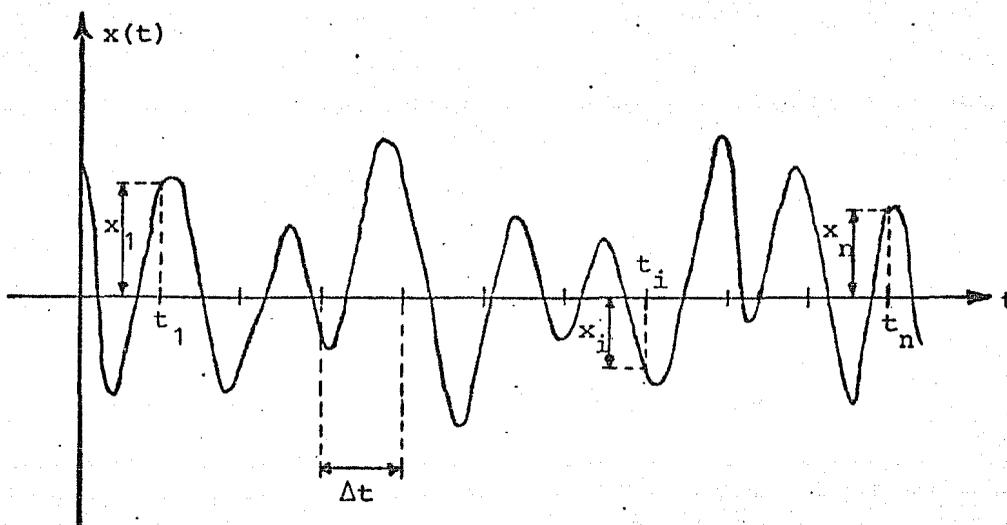


Fig. 2.6 Discretización de un registro de oleaje.
Análisis espectral.

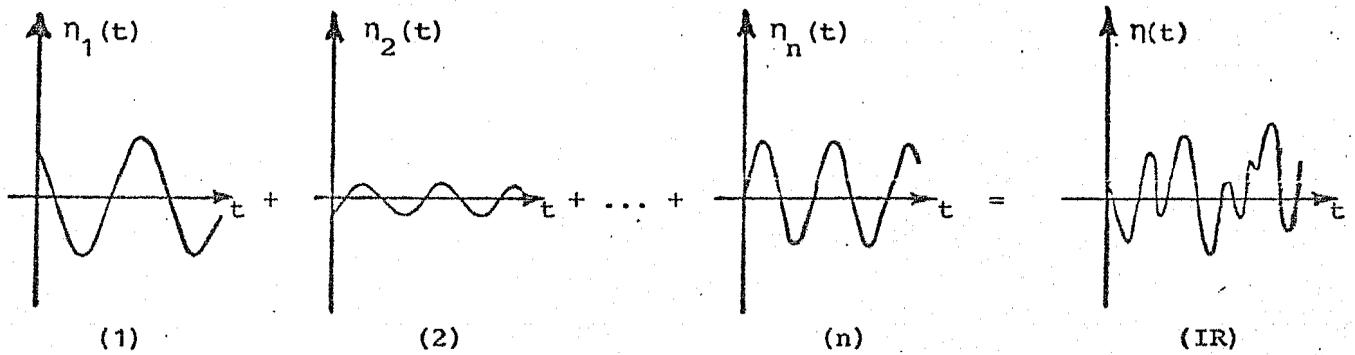


Fig. 2.7 Representación de un registro de oleaje.
Suma de senoides.

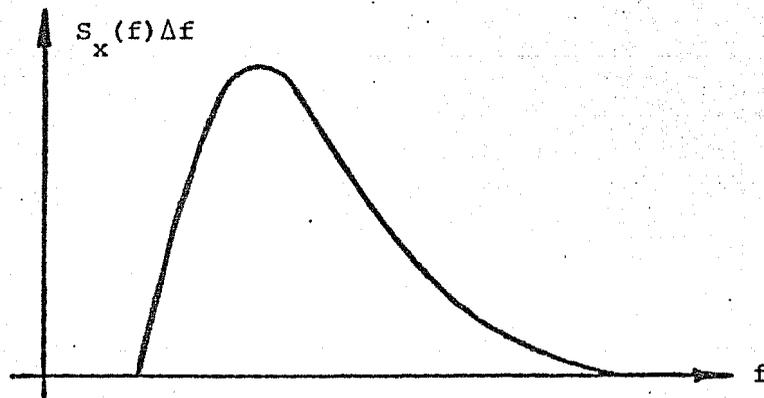


Fig. 2.8 Espectro tipo (de un sólo lado).

3. FUERZAS Y MOMENTOS FLEXIONANTES DEBIDOS A OLEAJE SOBRE UN CILINDRO CIRCULAR VERTICAL ESBELTO.

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo 1, las pilas que forman parte de la mayoría de las estructuras fuera de costa, pueden clasificarse en esbeltas (delgadas) y robustas (gruesas). La razón de esta clasificación obedece a que las ecuaciones que gobiernan el flujo a través de un cilindro esbelto, son diferentes a las correspondientes para un cilindro robusto. En este trabajo, se analiza sólo el caso de una pila esbelta aislada, para el cual se consideran aplicables las ecuaciones de Laplace y de Morison.

Se admite que una pila es esbelta cuando se cumple la siguiente relación

$$\frac{D}{L} \leq 0.20$$

donde

D diámetro de la pila

L longitud de la ola

Para relaciones mayores (pila robusta) debe tomarse en cuenta la difracción. En el estudio de un flujo a través de un cilindro robusto, ya no es aplicable la ecuación de Laplace ni la de Morison; para este caso se emplea la ecuación de Helmholtz (ref 6).

3.1 Ecuación de Morison

La ecuación de Morison, et al (1950) se ha empleado durante varios años para calcular la fuerza que genera el oleaje sobre una pila esbelta. Aunque se han desarrollado otras expresiones para el cálculo de fuerzas, se ha visto, con resultados experimentales, que la ecuación de Morison proporciona valores más aproximados a los reales. Por ello, resulta más conveniente tratar de mejorar dicha ecuación, en vez de tratar de desarrollar alguna otra; mejorar en el sentido de introducir otro término (de error por ejemplo), definir de manera más precisa los valores de los coeficientes C_d y C_m , definir mejor la velocidad y aceleración de las partículas de fluido, etc.

En la ecuación de Morison, se considera que la fuerza que ejerce el oleaje sobre un cilindro circular vertical esbelto está formada por una fuerza de arrastre o empuje y otra de

inercia o masa.

La fuerza de arrastre se obtiene a partir de la ecuación de impulso o de análisis dimensional. Para el caso de una pila esbelta la expresión resultante es

$$f_d = \rho C_d \frac{D}{2} u|u| \quad (3.1)$$

donde

- f_d fuerza de arrastre, por unidad de longitud
- ρ densidad del fluido
- C_d coeficiente hidrodinámico de arrastre
- D diámetro de la pila
- u velocidad horizontal de una partícula de fluido

El valor teórico del coeficiente C_d , para un cilindro, es igual a uno, sin embargo, como se ve más adelante, éste varía de acuerdo con las características del flujo y de la pila.

La fuerza de inercia se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, y como su nombre lo indica es la fuerza que se genera sobre un obstáculo debida al cambio de velocidad que el fluido sufre en presencia de éste; para una pila esbelta se tiene

$$f_i = \rho C_m \frac{\pi D^2}{4} \dot{u} \quad (3.2)$$

donde

- C_m coeficiente hidrodinámico de masa o inercia
- \dot{u} aceleración horizontal de una partícula de fluido

El valor teórico del coeficiente C_m , para un cilindro, es igual a dos aunque, al igual que C_d , varía de acuerdo con las características de la pila y del flujo.

Morison, et al, heurísticamente, propone obtener la fuerza que se genera sobre una pila esbelta como la suma de la fuerza de inercia más la de arrastre; su ecuación se escribe como

$$f = f_i + f_d = \rho C_m \frac{\pi D^2}{4} \dot{u} + \rho C_d \frac{D}{2} u |u| \quad (3.3)$$

Analizando esta ecuación, no resulta matemáticamente muy confiable sumar un término de primer orden con uno de segundo; sobre todo tomando en cuenta la naturaleza semiempírica de cada uno de ellos. Sin embargo, según se dijo, hasta la fecha es la expresión que 'mejores' resultados ha proporcionado. En la ref 22 se presenta una crítica de la ecuación de Morison.

Uno de los principales problemas en la aplicación de la ecuación de Morison es la determinación de la velocidad y aceleración de una partícula de fluido u y \dot{u} , respectivamente. Según se dijo en el capítulo 2, existen varias teorías de oleaje, cada una de las cuales proporciona diferentes valores de u y \dot{u} ; ésto hace que la confiabilidad de los valores obtenidos con la ecuación de Morison (para diseño), no sólo dependa de la ecuación en sí y de los coeficientes C_d y C_m , sino también de la teoría de oleaje seleccionada para el cálculo de la velocidad y aceleración.

3.1.1 Coeficientes hidrodinámicos C_d y C_m

Los coeficientes hidrodinámicos C_d y C_m son parámetros adimensionales que se introducen en las expresiones de las fuerzas de arrastre e inercia para relacionar los resultados experimentales con los teóricos. Según se mencionó, los valores teóricos de dichos coeficientes son 1 y 2, respectivamente. Sin embargo, de resultados experimentales, se ha demostrado que en muy pocas ocasiones los valores reales de estos coeficientes coinciden con los teóricos (refs 22 y 27); es por ello que se recurre a determinarlos experimentalmente.

Para valuar C_d y C_m experimentalmente, se pueden emplear registros medidos de fuerzas (o presiones) o gráficas (o tablas) determinadas por varios autores. Cuando se dispone de mediciones de fuerzas, pueden emplearse métodos como el de coeficientes-promedio de Fourier o el de mínimos cuadrados (ref 22). Por otro lado, existen gráficas y tablas que han sido elaboradas por varios autores en las cuales se muestra la variación de C_m y C_d con respecto de parámetros adimensionales que, a su vez, están asociados a características cinemáticas y físicas tanto del oleaje como de la pila (refs 22 y 27).

De acuerdo con varios autores (refs 10 y 22), los coeficientes C_d y C_m dependen del No. de Reynolds, No. de Keulegan-Carpenter, rugosidad relativa, efectos de proximidad, parámetros que especifican las características del movimiento de las partículas de fluido, etc. Debido a la dependencia de al

gunos de estos parámetros y de los coeficientes C_d y C_m en sí de las características cinemáticas del flujo, se deduce que la selección de C_d y C_m también depende de la teoría seleccionada para determinar las velocidades y aceleraciones del flujo; por ello se sugiere que para valuar C_d y C_m se use una teoría de oleaje que sea equivalente (o la misma) a la teoría empleada para obtener las condiciones de oleaje.

El criterio que se sigue en este trabajo es el que sugiere el U.S. Army CERC (ref 25) el cual toma en cuenta los resultados experimentales obtenidos por varios autores.

Para determinar C_d se emplea la línea continua que se muestra en la fig 3.1, misma que se expresa como

$$C_d = 1.2 \quad \text{para } Re \leq 2 \times 10^5 \quad (3.4a)$$

$$C_d = 7.8606 - 0.5457 \ln Re \quad \text{para } 2 \times 10^5 \leq Re \leq 5 \times 10^5 \quad (3.4b)$$

$$C_d = 0.7 \quad \text{para } 5 \times 10^5 \leq Re \leq 1 \times 10^7 \quad (3.4c)$$

Para los valores de C_m se tiene

$$C_m = 2.0 \quad \text{para } Re \leq 2.5 \times 10^5 \quad (3.5a)$$

$$C_m = 2.5 - \frac{Re}{5 \times 10^5} \quad \text{para } 2.5 \times 10^5 \leq Re \leq 5 \times 10^5 \quad (3.5b)$$

$$C_m = 1.5 \quad \text{para } Re \geq 5 \times 10^5 \quad (3.5c)$$

donde

$$Re = \frac{uD}{\nu} \quad (3.6)$$

- u velocidad del flujo
- D diámetro de la pila.
- v viscosidad cinemática

3.2 *Análisis con oleaje monocromático*

De acuerdo con la ecuación de Morison, la fuerza depende de la velocidad y aceleración del flujo; para oleaje monocromático éstas se definen según la teoría lineal. Lo anterior no implica que la ecuación de Morison sea válida solamente para cuando se emplea teoría lineal; puede emplearse cualquier teoría para determinar las características del oleaje y los coeficientes hidrodinámicos y con ello calcular la fuerza mediante la ecuación de Morison.

En este enfoque se obtienen fuerzas considerando valores característicos (constantes) de altura, longitud y período del oleaje, razón por la cual la fuerza sólo depende del tiempo; debido a ello, para determinar la fuerza máxima (para diseño) se emplea el criterio de la primera derivada. De acuerdo con lo anterior se deduce que este enfoque es determinístico ya que proporciona sólo un valor de la fuerza para características específicas del oleaje.

3.2.1 Fuerza total

Para determinar la fuerza total que ejerce el oleaje sobre una pila circular esbelta, se integra la ecuación de Morison

a lo largo de la profundidad d a la que se encuentra la pila, en la fig 3.2 se muestra la disposición de las fuerzas sobre la pila y las variables que intervienen.

Sustituyendo las ecs 2.32 y 2.34 en la ecuación de Morison (ec 3.3), se tiene

$$f = \rho C_m \frac{\pi D^2}{4} \left[agk \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \operatorname{sen}(kx-\sigma t) \right] + \rho C_d \frac{D}{2} \cdot \left[\frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(kx-\sigma t) \right] \left| \left[\frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(kx-\sigma t) \right] \right| \quad (3.7)$$

Fijando un sistema de ejes coordenados tal como se muestra en la fig 3.2 ($x=0$) y agrupando términos, la ec 3.7 se escribe como

$$f = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} ak \frac{(-\operatorname{sen} \sigma t)}{\cosh kd} \cosh k(z+d) + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot \left[\frac{ak}{\sigma} \frac{1}{\cosh kd} \right]^2 \cos \sigma t | \cos \sigma t | \cosh^2 k(z+d) \quad (3.8)$$

La expresión para obtener la fuerza total es

$$F = \int_{-d}^0 f dz \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ec 3.8 en la 3.9 y separando constantes, se tiene

$$F = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} ak \frac{(-\operatorname{sen} \sigma t)}{\cosh kd} \int_{-d}^0 \cosh k(z+d) dz + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot \left[\frac{ak}{\sigma} \frac{1}{\cosh kd} \right]^2 \cos \sigma t | \cos \sigma t | \int_{-d}^0 \cosh^2 k(z+d) dz \quad (3.10)$$

integrando y reduciendo términos (tomando en cuenta la ec 2.29 y las relaciones entre las funciones hiperbólicas) se llega a

$$F = G_m J_m (-\text{sen } \sigma t) + G_d J_d \cos \sigma t |\cos \sigma t| \quad (3.11)$$

donde

$$G_m = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} H \quad (3.12)$$

$$J_m = \frac{1}{2} \tanh kd \quad (3.13)$$

$$G_d = C_d \frac{\gamma}{2} DH^2 \quad (3.14)$$

$$J_d = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2 kd}{\sinh 2 kd} \right) \quad (3.15)$$

La ec 3.11 proporciona la fuerza total para cualquier instante; el primer término representa la fuerza total de inercia mientras que el segundo representa la de arrastre.

En el diseño de pilas esbeltas se requieren determinar las condiciones más desfavorables; es por ello que resulta de interés conocer el valor máximo de la fuerza total.

Para determinar la fuerza total máxima se emplea el criterio de la primera derivada. A partir de la ec 3.11, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial t} = G_m J_m \frac{\partial}{\partial t} (-\text{sen } \sigma t) + G_d J_d \frac{\partial}{\partial t} (\cos^2 \sigma t) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = G_m J_m \left[\sigma (-\cos \sigma t) \right] + G_d J_d \left[2\sigma \cos \sigma t (-\text{sen } \sigma t) \right] = 0 \quad (3.17)$$

Simplificando se llega a

$$\cos \sigma t (G_m J_m + 2 G_d J_d \sin \sigma t) = 0 \quad (3.18)$$

La ecuación 3.11 puede escribirse como

$$F = G_m J_m M_m + G_d J_d M_d \quad (3.19)$$

donde

$$M_m = -\sin \sigma t \quad (3.20)$$

$$M_d = \cos \sigma t \quad |\cos \sigma t| \quad (3.21)$$

Analizando la ec 3.18, se establecen dos condiciones para las cuales las ecs 3.20 y 3.21 toman diferentes valores que determinan la fuerza total máxima; de acuerdo con lo anterior, se tiene

$$\text{Si } G_m J_m \geq 2 G_d J_d \quad (3.22)$$

$$M_m = 1 \quad (3.23)$$

$$M_d = 0 \quad (3.24)$$

$$\text{Si } G_m J_m < 2 G_d J_d \quad (3.25)$$

$$M_m = z \quad (3.26)$$

$$M_d = 1 - z^2 \quad (3.27)$$

donde

$$z = \frac{G_m J_m}{2 G_d J_d} \quad (3.28)$$

Considerando las restricciones dadas por las ecs 3.22 y 3.25 y sustituyendo los valores de M_m y M_d (ecs 3.23 y 3.24 ó 3.26 y 3.27, según sea el caso) en la ec 3.19, se determina la fuerza total máxima.

3.2.2 Momento flexionante total

Para tener una idea más completa acerca del efecto del oleaje sobre una pila, es conveniente conocer el momento flexionante total que se genera en la base de la pila. La expresión que se emplea para determinar el momento flexionante total es

$$M = \int_{-d}^0 (z+d) f dz \quad (3.29)$$

Sustituyendo la ec 3.8 en la anterior, se tiene

$$M = \int_{-d}^0 (z+d) \left[C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} ak \frac{(-\text{sen } \sigma t)}{\cosh kd} \cosh k(z+d) + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot \left(\frac{ak}{\sigma} \frac{1}{\cosh kd} \right)^2 \cos \sigma t |\cos \sigma t| \cosh^2 k(z+d) \right] dz \quad (3.30)$$

Agrupando términos y separando constantes la ec 3.30 se escribe como

$$M = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} ak \frac{(-\text{sen } \sigma t)}{\cosh kd} \int_{-d}^0 (z+d) \cosh k(z+d) dz + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot \left(\frac{ak}{\sigma} \frac{1}{\cosh kd} \right)^2 \cos \sigma t |\cos \sigma t| \int_{-d}^0 (z+d) \cosh^2 k(z+d) dz \quad (3.31)$$

integrando y reduciendo términos se llega a

$$M = (G_m M_m J_m S_m + G_d M_d J_d S_d) d \quad (3.32)$$

donde G_m , M_m , J_m , G_d , M_d y J_d están definidas de acuerdo con las ecs 3.12, 3.20, 3.13, 3.14, 3.21 y 3.15 respectivamente y

$$S_m = 1 + \frac{1 - \cosh kd}{kd \sinh kd} \quad (3.33)$$

$$S_d = \frac{1}{2} + \frac{1}{8 J_d} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh 2 kd}{2 kd \sinh 2 kd} \right) \quad (3.34)$$

d profundidad media del agua

Admitiendo que la fuerza y el momento flexionante máximos totales están en fase (ocurren al mismo tiempo); el momento máximo total se determina siguiendo el mismo criterio de la fuerza, esto es, tomando en cuenta los valores de M_m y M_d de acuerdo con las restricciones de cada caso (ecs 3.22 a 3.27).

Finalmente para obtener la posición de la fuerza con respecto al fondo se emplea la expresión

$$B = \frac{M}{F} \quad (3.35)$$

donde

- B altura sobre el fondo donde actua F
- F fuerza sobre la pila (puede ser la máxima)
- M momento flexionante (puede ser el máximo)

3.2.3 Procedimiento de cálculo

Se presenta el método para determinar fuerza y momento flexionante máximos totales así como la posición de dicha fuerza.

1. Se conocen H , T , D y d
2. Se calculan L , k y σ con las ecs 2.31, 2.23 y 2.24, respectivamente y se comprueba que $D/L \leq 0.20$ (pila delgada)
3. Se calcula el número de Reynolds con la ec 3.5 empleando la velocidad máxima, la cual se obtiene con la ec 2.32 para $z = 0$ y $\cos(kx - \sigma t) = 1$
4. De acuerdo con el número de Reynolds, se determinan C_d y C_m a partir de las ecs 3.4 y 3.5 (C_d también se obtiene de la fig 3.1)
5. Se calculan G_m , J_m , S_m , G_d , J_d y S_d , con las ecs 3.12, 3.13, 3.33, 3.14, 3.15 y 3.34, respectivamente
6. Se calcula Z con la ec 3.28
7. Se seleccionan M_m y M_d con las ecs 3.23 y 3.24 ó 3.26 y 3.27 tomando en cuenta las restricciones dadas por 3.22 y 3.25
8. Se calculan la fuerza y el momento flexionante máximos totales con las ecs 3.19 y 3.32, respectivamente
9. Se calcula la posición de la fuerza máxima total con la ec 3.35 .

3.3 Análisis con oleaje irregular

El cálculo de la fuerza y momento flexionante inducidos por un oleaje monocromático sobre una pila esbelta se hace empleando la ecuación de Morison y definiendo la velocidad y aceleración según la teoría lineal.

Para el caso de oleaje irregular es necesario desarrollar otras expresiones para la velocidad y aceleración de una partícula de fluido considerando esta clase de oleaje.

Según se mencionó en el apartado 2.3, mediante análisis espectral es posible expresar un registro de tiempo como una suma de funciones coseno de la forma

$$g(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \alpha_2) + \dots + A_n \cos(2\pi f_n t + \alpha_n)$$

Si dicho registro corresponde a uno de oleaje irregular (real) $\eta_I(t)$, fig 3.3, se deduce que dicho registro puede expresarse como

$$\eta_I(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \alpha_2) + \dots + a_n \cos(2\pi f_n t + \alpha_n) \quad (3.36)$$

Considerando, por facilidad, que los ángulos de fase α_i , ($i = 1, n$), son nulos y tomando en cuenta que $\sigma_i = 2\pi f_i$, ($i = 1, n$), la ecuación anterior se escribe como

$$\eta_I(t) = a_1 \cos \sigma_1 t + a_2 \cos \sigma_2 t + \dots + a_n \cos \sigma_n t \quad (3.37)$$

De acuerdo con la teoría lineal de oleaje, la ecuación para la superficie libre del agua $\eta(t)$ (ec 2.21) es

$$\eta(t) = a \cos(kx - \sigma t)$$

Fijando un sistema de ejes ortogonales sobre la pila (fig 3.2), la ecuación anterior se escribe como

$$\eta(t) = a \cos(-\sigma t) = a \cos \sigma t \quad (3.38)$$

Tomando en cuenta las ecs 3.37 y 3.38, puede verse que la superficie libre del agua de un oleaje irregular se considera como la suma de funciones que expresan cada una la superficie libre del agua de un oleaje monocromático; de acuerdo con ello, la ec 3.37 se escribe como

$$\eta_I(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) + \dots + \eta_n(t) \quad (3.39)$$

donde

$$\eta_i(t) = a_i \cos \sigma_i t \quad (i=1, n)$$

Introduciendo el símbolo de sumatoria, el oleaje irregular se expresa como

$$\eta_I(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cos \sigma_i t \quad (3.40)$$

De acuerdo con la teoría lineal de oleaje, asociada a cada componente de oleaje $\eta_i(t)$, existe una función potencial ϕ_i ; tomando ésto en cuenta y considerando la ec 3.40, el potencial ϕ_I asociado al oleaje irregular $\eta_I(t)$ está dado por la suma de potenciales asociados a cada componente $\eta_i(t)$, ($i = 1, n$); a

partir de ello, el potencial ϕ_I se define como

$$\phi_I = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (3.41)$$

Considerando la definición de la velocidad horizontal u (ec 2.10a) y tomando en cuenta la ec 3.41, se obtiene la velocidad u_I de una partícula de fluido para oleaje irregular; es decir

$$u_I = \frac{\partial}{\partial x} (\phi_I) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi_i) \right) = \sum_{i=1}^n u_i \quad (3.42)$$

La aceleración \dot{u}_I , se obtiene como

$$\dot{u}_I = \frac{\partial}{\partial t} (u_I) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} u_i = \sum_{i=1}^n \dot{u}_i \quad (3.43)$$

De acuerdo con la teoría lineal, la velocidad y aceleración están dadas por las ecs 2.32 y 2.34, sustituyéndolas en las ecs 3.42 y 3.43, se tiene

$$u_I = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i g k_i}{\sigma_i} \frac{\cosh k_i (z+d)}{\cosh k_i d} \cos \sigma_i t \quad (3.44)$$

y

$$\dot{u}_I = \sum_{i=1}^n \dot{u}_i = \sum_{i=1}^n -a_i g k_i \frac{\cosh k_i (z+d)}{\cosh k_i d} \sin \sigma_i t \quad (3.45)$$

Las dos anteriores ecuaciones determinan la velocidad y aceleración para un oleaje irregular definido de acuerdo con la ec 3.40 .

3.3.1 Fuerza total

Para determinar la fuerza por unidad de longitud sobre una pila se propone escribir la ecuación de Morison como

$$f_I(t) = \rho C_m \frac{\pi D^2}{4} \dot{u}_I + \rho C_d \frac{D}{2} u_I |u_I| \quad (3.46)$$

Sustituyendo las ecs 3.44 y 3.45 en la 3.46, se tiene

$$f_I(t) = \rho C_m \frac{\pi D^2}{4} \left(\sum_{i=1}^n -a_i g k_i \frac{\cosh k_i (z+d)}{\cosh k_i d} \operatorname{sen} \sigma_i t \right) + \rho C_d \frac{D}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^n \frac{a_i g k_i}{\sigma_i} \frac{\cosh k_i (z+d)}{\cosh k_i d} \cos \sigma_i t \right| \sum_{j=1}^n \frac{a_j g k_j}{\sigma_j} \frac{\cosh k_j (z+d)}{\cosh k_j d} \cos \sigma_j t \quad (3.47)$$

El subíndice 'j' se emplea únicamente para separar los términos correspondientes al valor absoluto de la velocidad.

La ec 3.47 se escribe también como

$$f_I(t) = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i k_i \frac{(-\operatorname{sen} \sigma_i t)}{\cosh k_i d} \cosh k_i (z+d) + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j k_i k_j}{\sigma_i \sigma_j \cosh(k_i d) \cosh(k_j d)} \left| \cos \sigma_i t \right| \cos \sigma_j t \cosh k_i (z+d) \cosh k_j (z+d) \quad (3.48)$$

La expresión para obtener la fuerza total es

$$F_I = \int_{-d}^0 f_I(t) dz \quad (3.49)$$

Sustituyendo la ec 3.48 en la 3.49 y separando constantes, se tiene

$$F_I = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i k_i \frac{(-\text{sen} \sigma_i t)}{\cosh k_i d} \int_{-d}^0 \cosh k_i (z+d) dz + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j k_i k_j}{\sigma_i \sigma_j \cosh(k_i d) \cosh(k_j d)} \left| \cos \sigma_i t \right| \cos \sigma_j t \cdot$$

$$\cdot \int_{-d}^0 \cosh k_i (z+d) \cosh k_j (z+d) dz \quad (3.50)$$

integrando y reduciendo términos se llega a

$$F_I = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i \tanh k_i d (-\text{sen} \sigma_i t) + C_d \gamma \frac{D}{4} g \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j k_i k_j}{\sigma_i \sigma_j \cosh(k_i d) \cosh(k_j d)} \left| \cos \sigma_i t \right| \cos \sigma_j t \left(F_i + \frac{\text{senh}((k_i + k_j) d)}{k_i + k_j} \right) \quad (3.51)$$

donde

$$F_i = \frac{\text{senh}((k_i - k_j) d)}{(k_i - k_j)} \quad \text{para } i \neq j \quad (3.52a)$$

$$F_i = d \quad \text{para } i = j \quad (3.52b)$$

La ec 3.51 proporciona la fuerza total producida por un oleaje irregular de n componentes.

3.3.2 Momento flexionante total

Al igual que en oleaje monocromático, la expresión que se emplea para obtener el momento flexionante total es

$$M_I = \int_{-d}^0 (z+d) f_I(t) dz \quad (3.53)$$

Sustituyendo la ec 3.48 y ordenando términos, se tiene

$$M_I = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i k_i \frac{(-\text{sen} \sigma_i t)}{\cosh k_i d} \int_{-d}^0 (z+d) \cosh k_i (z+d) dz + C_d \gamma \frac{D}{2} g \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j k_i k_j}{\sigma_i \sigma_j \cosh(k_i d) \cosh(k_j d)} \left| \cos \sigma_i t \right| \left| \cos \sigma_j t \right| \cdot$$

$$\int_{-d}^0 (z+d) \cosh k_i (z+d) \cosh k_j (z+d) dz \quad (3.54)$$

integrando y reduciendo términos, se llega a

$$M_I = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} d \sum_{i=1}^n a_i \tanh k_i d (-\text{sen} \sigma_i t) \left(1 + \frac{1 - \cosh k_i d}{k_i d \sinh k_i d} \right) + C_d \gamma \frac{D}{4} g \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j k_i k_j}{\sigma_i \sigma_j \cosh(k_i d) \cosh(k_j d)} \left| \cos \sigma_i t \right| \left| \cos \sigma_j t \right| \left(\frac{d \sinh((k_i + k_j)d)}{k_i + k_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \cosh((k_i + k_j)d)}{(k_i + k_j)^2} + M\dot{I} \right) \quad (3.55)$$

donde

$$M\dot{I} = \frac{d \sinh((k_i - k_j)d)}{k_i - k_j} + \frac{1 - \cosh((k_i - k_j)d)}{(k_i - k_j)^2} \text{ para } i \neq j \quad (3.56a)$$

$$M\dot{I} = \frac{d^2}{2} \text{ para } i=j \quad (3.56b)$$

La ec 3.55 proporciona el momento flexionante total producido por oleaje irregular, a partir de ésta y de la ec 3.51 se obtienen valores de la fuerza y el momento flexionante para diferentes tiempos; con base en los valores así generados, se efectúan

túa un análisis espectral-estadístico y se determinan los valores máximos totales (de diseño).

3.3.3 Procedimiento de cálculo

Se presenta el procedimiento para determinar la fuerza y momento flexionante máximos totales sobre una pila asociados a una determinada probabilidad; para ello se considera que se dispone de un registro de oleaje del lugar donde se desean conocer las características hidrodinámicas del flujo.

1. Además de disponer de un registro de oleaje y establecer una probabilidad de excedencia, se conocen D y d
2. De un análisis del registro de oleaje, se selecciona un intervalo de tiempo Δt , de manera que se contemplen valores tanto máximos como mínimos y de acuerdo con éste, se discretiza el registro en N datos (se recomienda que N sea igual a 2 elevado a una potencia entera).
3. Se calculan los valores de la transformada de Fourier y las frecuencias de los N datos (ec 2.75); para la transformada, puede emplearse el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) (ref 20); las frecuencias se obtienen a partir de las ecs 2.83 y 2.84
4. Se calculan las densidades de potencia con la ec 2.80 y se dibuja el espectro (ver apartado 2.3.2)
5. Según los máximos del espectro, se determina el número

- de componentes n , sus correspondientes frecuencias y los valores de las transformadas asociadas a dichas frecuencias
6. Se calculan las amplitudes y ángulos de fase de los componentes con las ecs 2.88 y 2.89, respectivamente; con ellos y las frecuencias, el oleaje se expresa como una suma de senoides. Para obtener cosenoides se recurre a la ec 2.90 y así el oleaje se representa según la ec 3.36
 7. De acuerdo con el intervalo de tiempo determinado, se calculan la fuerza y el momento flexionante totales para varios instantes con la ecs 3.51 y 3.55
 8. Se calcula la transformada de Fourier de las fuerzas y momentos obtenidos en 7 (puede variar el intervalo de tiempo) con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier o la ec 2.75
 9. Se calculan las densidades de potencia espectral de las fuerzas y momentos flexionantes con la ec 2.80 y se dibujan sus respectivos espectros
 10. Se calculan los momentos de los espectros de primer, segundo y cuarto orden con la ec 2.92
 11. Se calculan los anchos de banda de los espectros con la ec 2.91 y a partir de ellos se determina a que tipo de distribución se ajustan los valores de las fuerzas y momentos flexionantes (ecs 2.94)
 12. Se calculan los factores correctivos para las fuerzas y

momentos flexionantes con la ec 2.99

13. Se calculan la fuerza y momento flexionante máximos totales asociados a una probabilidad de excedencia de $1/n$ con la ec 2.100

En el capítulo 4, se presenta un ejemplo de aplicación de este método; en él se presenta de manera más objetiva el procedimiento de cálculo para su mejor comprensión.

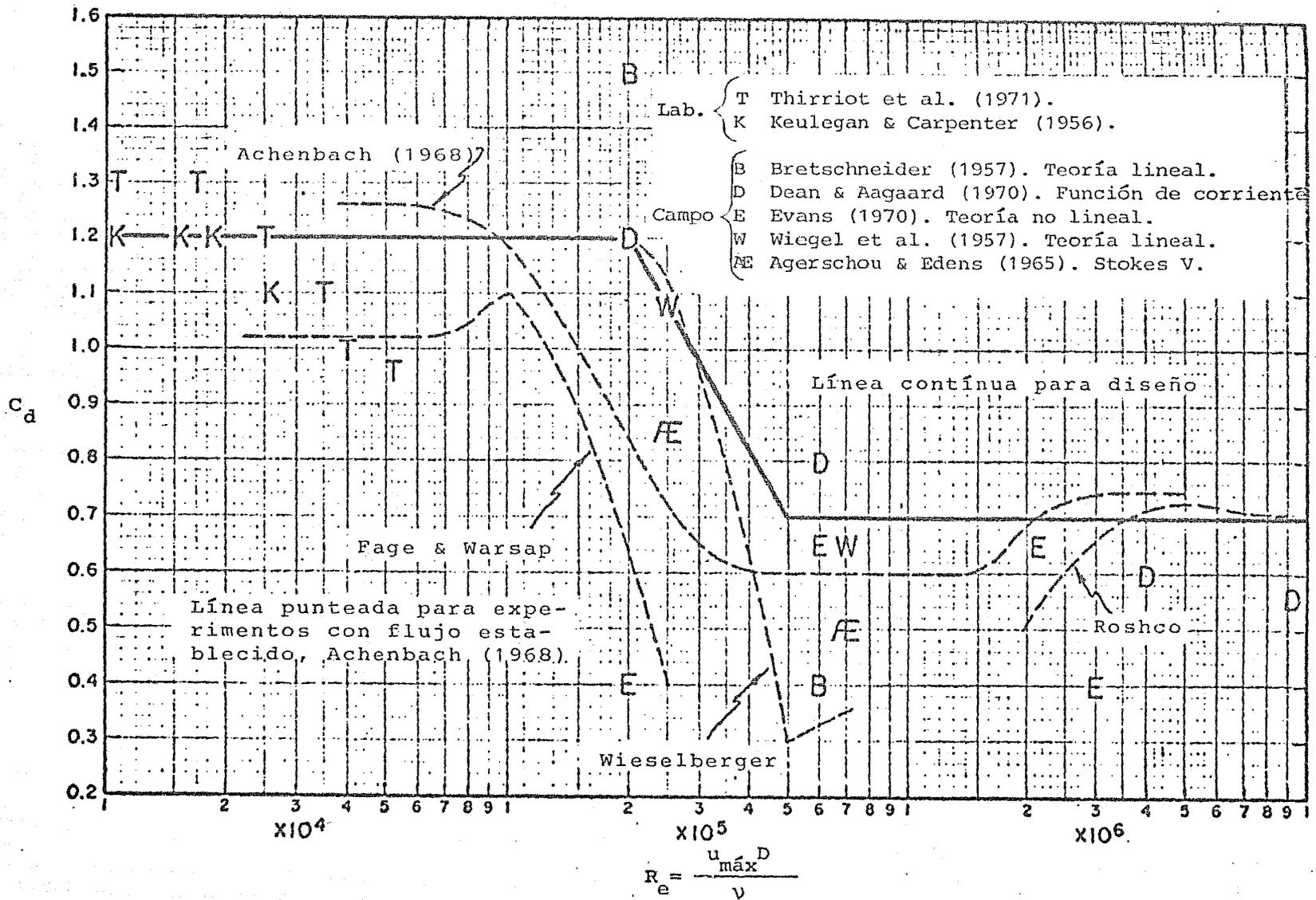


Fig. 3.1 Relación entre el coeficiente C_d y el No. de Reynolds.

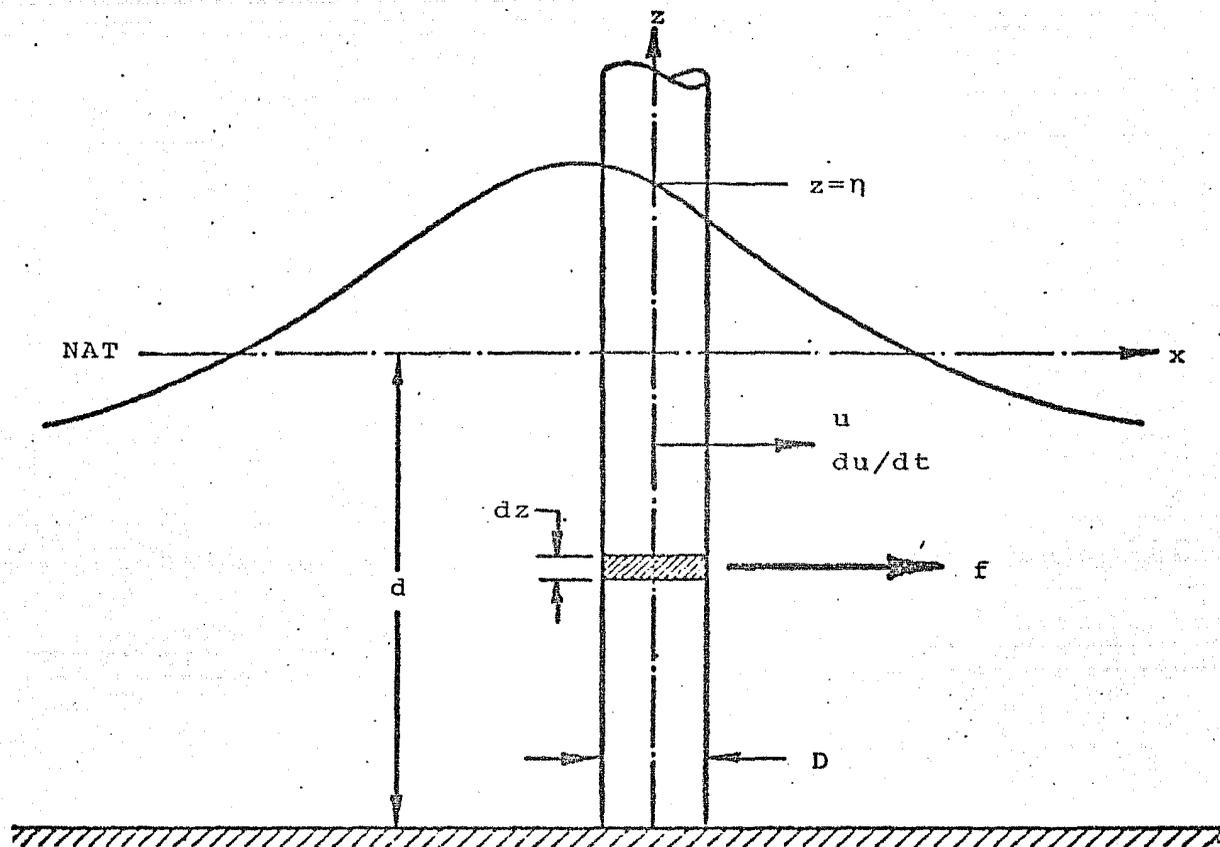


Fig. 3.2 Disposición de los parámetros para la determinación de la fuerza sobre una pila esbelta sujeta a oleaje.

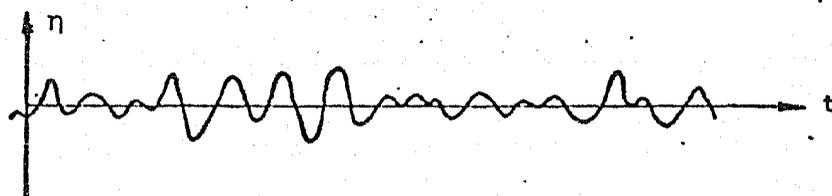


Fig. 3.3 Registro de oleaje irregular.

4. EJEMPLOS DE APLICACION

En este capítulo se plantean dos ejemplos de aplicación de los conceptos y ecuaciones desarrollados en los anteriores capítulos.

En el primer ejemplo, se determinan los valores de la fuerza y el momento máximos totales provocados por un oleaje monocromático sobre una pila, así como la posición de la fuerza máxima. Para resolver este problema es necesario tener como datos la altura de ola H , el período del oleaje T , la profundidad media del mar d y el diámetro de la pila D .

La altura de ola y el período se obtienen a partir de registros de oleaje o mediante métodos de predicción de oleaje. La profundidad media se obtiene de la batimetría del lugar y el diámetro, en caso de un problema de diseño, se propone y

se revisa; en caso de un problema de revisión, es dato.

El segundo ejemplo consiste en calcular los valores máximos totales de la fuerza y el momento inducidos por un oleaje irregular sobre una pila. También se calcula la posición de la fuerza máxima total. Los valores máximos totales se calculan para una determinada probabilidad de excedencia. En este caso se tienen como datos el diámetro de la pila D , la profundidad media d y un registro de oleaje (ver fig 4.3).

La determinación de el diámetro de la pila y la profundidad media se efectúa según se mencionó anteriormente. El registro de oleaje se obtiene directamente en el lugar de interés empleando dispositivos que registren la variación de la superficie libre del agua con respecto al tiempo.

4.1 Pila delgada sujeta a oleaje monocromático

En la fig 4.1 se muestra una estructura fuera de costa compuesta por una columna de concreto y una plataforma de operaciones. La columna tiene 2 m de diámetro y 30 m de altura. La profundidad del agua es de 25 m.

Se desea conocer la fuerza total máxima y su ubicación con respecto al fondo así como el momento flexionante total máximo, a los que se ve sometida la estructura en presencia de un oleaje cuya altura es de 8.5 m y período de 11.4 seg. Despreciar el efecto de la plataforma.

- Solución

De acuerdo con el procedimiento propuesto en el apartado 3.2.3, se tiene:

1. Datos

$$H = 8.5 \text{ m}$$

$$T = 11.4 \text{ seg}$$

$$D = 2 \text{ m}$$

$$d = 25 \text{ m}$$

2. Cálculo de L , k y σ y comprobación de que $D/L \leq 0.20$

a) cálculo de L

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} = \frac{9.81(11.4)^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi(25)}{L}$$

mediante aproximaciones sucesivas, se obtiene

$$L = 155.43 \text{ m}$$

b) cálculo de k

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{155.43}$$

$$k = 0.0404 \text{ 1/m}$$

c) cálculo de σ

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{11.4}$$

$$\sigma = 0.5512 \text{ 1/seg}$$

d) comprobación de que $D/L \leq 0.20$

$$\frac{D}{L} = \frac{2}{155.43}$$

$$D/L = 0.01 < 0.20$$

por lo que se concluye que la pila es esbelta

3. Cálculo de R_e

a) cálculo de la velocidad máxima, $U_{\text{máx}}$

$$U_{\text{máx}} = \frac{gk}{\sigma} a = \frac{(9.81)(0.0404)}{0.5512} \left(\frac{8.5}{2} \right)$$

$$U_{\text{máx}} = 3.058 \text{ m/s}$$

b) cálculo de R_e ($\nu = 9.29 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, para agua salada)

$$R_e = \frac{U_{\text{máx}} D}{\nu} = \frac{(3.058)(2)}{9.29 \times 10^{-7}}$$

$$R_e = 6.6 \times 10^6$$

4. Cálculo de C_d y C_m

a) de acuerdo con las ecs 3.4

$$C_d = 0.7$$

b) de acuerdo con las ecs 3.5

$$C_m = 1.5$$

5. Cálculo de G_m' , J_m' , S_m' , G_d' , J_d' , S_d' ($\gamma = 1031.13 \text{ kg/m}^3$)

a) cálculo de las constantes k_d y $2k_d$

$$k_d = (0.0404)(25) = 1.0106$$

$$2k_d = (2)(1.0106) = 2.0212$$

$$b) G_m = C_m \gamma \frac{\pi D^2}{4} H = (1.5)(1031.13) \frac{\pi (2)^2}{4} (8.5)$$

$$G_m = 41\,302.23 \text{ kg}$$

$$c) J_m = \frac{1}{2} \tanh kd = \frac{1}{2} \tanh (1.0106)$$

$$J_m = 0.3830$$

$$d) S_m = 1 + \frac{1 - \cosh kd}{kd \sinh kd} = 1 + \frac{1 - \cosh (1.0106)}{(1.0106) \sinh (1.0106)}$$

$$S_m = 0.5386$$

$$e) G_d = C_d \frac{\gamma}{2} DH^2 = (0.7) \frac{1031.13}{2} (2)(8.5)^2$$

$$G_d = 52\,149.40 \text{ kg}$$

$$f) J_d = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2.0212}{\sinh (2.0212)} \right)$$

$$J_d = 0.1931$$

g)

$$S_d = \frac{1}{2} + \frac{1}{8J_d} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh 2kd}{2kd \sinh 2kd} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(8)(0.1931)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh (2.0212)}{(2.0212) \sinh (2.0212)} \right)$$

$$S_d = 0.5783$$

6. Cálculo de Z

$$Z = \frac{G_m J_m}{2 G_d J_d} = \frac{(41\,302.25)(0.3830)}{(2)(52\,149.40)(0.1931)}$$

$$Z = 0.7854$$

7. Cálculo de M_m y M_d

a) cálculo de $G_m \cdot J_m$ y $2 G_d J_d$

$$G_m J_m = (41\ 302.23) (0.3830)$$

$$G_m J_m = 15\ 818.75\ \text{kg}$$

$$2G_d J_d = (2) (52\ 149.40) (0.1931)$$

$$2G_d J_d = 20\ 140.10\ \text{kg}$$

b) determinación de M_m y M_d

$$\text{como } G_m J_m < 2G_d J_d$$

$$M_m = Z = 0.7854$$

$$M_d = 1 - Z^2 = 1 - (0.7854)^2$$

$$M_d = 0.3831$$

8. Cálculo de $F_{\text{máx}}$ y $M_{\text{máx}}$

a)

$$F_{\text{máx}} = G_m J_m M_m + G_d J_d M_d = (41\ 302.23) (0.3830) (0.7854) + \\ + (52\ 149.40) (0.1931) (0.3831)$$

$$F_{\text{máx}} = 16\ 282\ \text{kg}$$

b)

$$M_{\text{máx}} = (G_m J_m M_m S_m + G_d J_d M_d S_d) d = [(41\ 302.23) (0.3830) (0.7854) \cdot \\ \cdot (0.5386) + (52\ 149.40) (0.1931) (0.3831) (0.5783)] 25$$

$$M_{\text{máx}} = 223\ 065\ \text{kg-m}$$

9. Cálculo de B

$$B = \frac{M_{\text{máx}}}{F_{\text{máx}}} = \frac{223065}{16282}$$

$$B = 13.7 \text{ m}$$

4.2 Pila delgada sujeta a oleaje irregular

En un canal de arrastre⁽¹⁾, se tiene el modelo de una pila cuyo diámetro es de 0.108 m con una profundidad de 1.45 m (ver fig 4.2). Mediante un cierto mecanismo se genera un oleaje irregular cuyo registro se muestra en la fig 4.3 .

Determinar la fuerza y el momento máximos provocados por dicho oleaje para una probabilidad de excedencia de 1/100.

- Solución

De acuerdo con el procedimiento propuesto en el apartado 3.3.3, se tiene

1. Datos

$$D = 0.108 \text{ m}$$

$$d = 1.45 \text{ m}$$

$$1/n = 1/100$$

registro de oleaje (ver fig 4.3)

2. Selección de Δt , N y discretización del registro

a) observando el registro se considera

$$\Delta t = 0.5 \text{ seg}$$

(1) En el Instituto de Ingeniería de la UNAM

b) cálculo de N ($\gamma = 6$; propuesto)

$$N = 2^{\gamma} = 2^6$$

$$N = 64 \text{ datos}$$

c) en la tabla 4.1, se presentan los 64 valores obtenidos de la discretización del registro.

3. Cálculo de X_i y f_i

Empleando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier, se obtiene la transformada X_i , $i = 1, 64$, de los datos de la tabla 4.1. En la tabla 4.2 se presentan los valores de la transformada y sus correspondientes frecuencias (1).

4. Cálculo de $S_{\eta}(f_i) \Delta f$

Con los valores de X_i (tabla 4.2), se obtiene

$$S_{\eta}(f_i) \Delta f = 2 |X_i|^2 \quad (i = 1, N/2+1)$$

En la tabla 4.2 se presentan los valores de la densidad de potencia.

A partir de los valores de f_i y los correspondientes de $S_{\eta}(f_i) \Delta f$ (de la tabla 4.2), se obtiene el espectro que se muestra en la fig 4.4

5. Obtención del número de componentes, sus frecuencias y las correspondientes transformadas.

(1) ya que X_i es simétrica, se presentan valores para $i=1, N/2+1$

- a) Analizando el espectro (fig 4.4), puede verse que éste presenta 4 máximos (picos), por lo que se concluye que el número de componentes para representar el registro de oleaje es 4.
- b) Tomando en cuenta los 4 máximos del espectro, se obtienen sus respectivas frecuencias

$$f_1 = 0.65625$$

$$f_2 = 0.71875$$

$$f_3 = 0.84375$$

$$f_4 = 0.9375$$

- c) De la tabla 4.2 y con las frecuencias, se obtienen las respectivas transformadas

$$X_1 = -0.00562858 + 0.00608949 j$$

$$X_2 = -0.00468718 + 0.00717505 j$$

$$X_3 = -0.00088521 + 0.03072298 j$$

$$X_4 = 0.01055226 + 0.00434346 j$$

6. Cálculo de a_i y ϕ_i . Representación del registro de oleaje

- a) Cálculo de a_i

$$a_i = 2|X_i| = 2 \sqrt{X_{i\text{REAL}}^2 + X_{i\text{IMAG}}^2} \quad (i=1,4)$$

tomando en cuenta los valores de X_i , inciso 5, se tiene

$$a_1 = 2 \sqrt{(-0.5629 \times 10^{-2})^2 + (0.6089 \times 10^{-2})^2}$$

$$a_1 = 0.016585 \text{ m}$$

$$a_2 = 2 \sqrt{(-0.4687 \times 10^{-2})^2 + (0.7175 \times 10^{-2})^2}$$

$$a_2 = 0.017141 \text{ m}$$

$$a_3 = 2 \sqrt{(-0.0885 \times 10^{-2})^2 + (3.0723 \times 10^{-2})^2}$$

$$a_3 = 0.061471 \text{ m}$$

$$a_4 = 2 \sqrt{(1.0552 \times 10^{-2})^2 + (0.4348 \times 10^{-2})^2}$$

$$a_4 = 0.022826 \text{ m}$$

b) Cálculo de ϕ_i

$$\phi_i = \text{ang tan} \left(- \frac{X_{i\text{REAL}}}{X_{i\text{IMAG}}} \right) \quad (i=1,4)$$

$$\phi_1 = \text{ang tan} \left(- \frac{-0.5629 \times 10^{-2}}{0.6089 \times 10^{-2}} \right) = \text{ang tan } 0.9243$$

$$\phi_1 = 0.7461 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \text{ang tan} \left(- \frac{-0.4687 \times 10^{-2}}{0.7175 \times 10^{-2}} \right) = \text{ang tan } 0.6533$$

$$\phi_2 = 0.5787 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = \text{ang tan} \left(- \frac{-0.0885 \times 10^{-2}}{3.0723 \times 10^{-2}} \right) = \text{ang tan } 0.0288$$

$$\phi_3 = 0.0288 \text{ rad}$$

$$\phi_4 = \text{ang tan} \left(- \frac{1.0552 \times 10^{-2}}{0.4348 \times 10^{-2}} \right) = \text{ang tan } -2.4267$$

$$\phi_4 = -1.1799 \text{ rad}$$

c) Para representar el registro de oleaje como una suma de funciones coseno, se tiene

$$\text{sen } A = \cos (3\pi/2 + A)$$

por lo que el oleaje se representa como (ver tabla 4.3)

$$\eta_I(t) = 0.01666 \cos(2\pi(0.65625)t + 5.4585) + 0.01714 \cos(2\pi(0.71875)t + 5.2911) + \\ + 0.06147 \cos(2\pi(0.84375)t + 4.7412) + 0.02283 \cos(2\pi(0.9375)t + 3.5325)$$

7. Cálculo de F_I y M_I para diferentes tiempos

Empleando un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.5$ seg y a partir de los valores de la tabla 4.3, el diámetro $D = 0.108$ m, la profundidad $d = 1.45$ m, la densidad del agua $\rho = 105.1098$ kgm/m³ y la aceleración de la gravedad $g = 9.81$ m/s² se obtiene, empleando un programa de mini-computadora, la tabla 4.4, donde se presentan, además de las fuerzas y momentos flexionantes, las alturas de ola obtenidas a partir de la ecuación determinada en el inciso 6.

8. Cálculo de la transformada de las fuerzas y momentos flexionantes totales X_{M_i} y X_{F_i} , respectivamente.

Tomando en cuenta los primeros 64 valores de las fuerzas y momentos de la tabla 4.4, se calcula la transformada de Fourier de los mismos empleando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (ref 20). En la tabla 4.5 se presentan los valores de las transformadas y sus correspondientes frecuencias (ver nota pág 82).

9. Cálculo de la densidad de potencia espectral de las fuerzas y momentos flexionantes totales $S_M(f_i)\Delta f$ y $S_F(f_i)\Delta f$, respectivamente.

Al igual que para el oleaje, a partir de las transformadas de las fuerzas y momentos flexionantes, se obtienen

$$S_M(f_i)\Delta f = 2 |X_{M_i}|^2 \quad (i=1, N/2+1)$$

$$S_F(f_i)\Delta f = 2 |X_{F_i}|^2 \quad (i=1, N/2+1)$$

En la tabla 4.5 se presentan los valores de dichas densidades de potencia.

Con base en los valores de $S_M(f_i)\Delta f$ y $S_F(f_i)\Delta f$ y las correspondientes frecuencias, se obtienen los espectros de las fuerzas y momentos flexionantes; dichos espectros se presentan en las figs 4.5 y 4.6, respectivamente.

10. Cálculo de m_0 , m_2 y m_4 de los espectros de fuerzas y momentos flexionantes.

Para el cálculo de los momentos se emplea la regla de Simpson, la cual al combinarla con la ec 2.92 da lugar a las siguientes expresiones

$$m_{n,F} = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{N/2+1} f_i^n \cdot S_F(f_i)\Delta f \cdot K_i' \right) \quad n=0,2,4$$

$$m_{n,M} = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{N/2+1} f_i^n \cdot S_M(f_i)\Delta f \cdot K_i' \right) \quad n=0,2,4$$

donde K'_i es el correspondiente multiplicador de Simpson. En las tablas 4.6 y 4.7 se presentan los cálculos necesarios para la aplicación de las anteriores ecuaciones.

Debido a que los valores significativos de la densidad de potencia están comprendidos entre $i=21$ e $i=32$, los valores restantes se desprecian tanto en el espectro de fuerzas como en el de momentos flexionantes. Es por ello que las sumatorias van sólo desde $i=21$ hasta $i=32$.

a) Para las fuerzas, de la tabla 4.6 se obtiene

- de la columna 4

$$\sum_{i=21}^{32} S_F(f_i) \Delta f \cdot K'_i = 3.3549$$

- de la columna 8

$$\sum_{i=21}^{32} S_F(f_i) \Delta f \cdot f_i^2 \cdot K'_i = 2.3217$$

- de la columna 12

$$\sum_{i=21}^{32} S_F(f_i) \Delta f \cdot f_i^4 \cdot K'_i = 1.6348$$

por lo que

$$m_{0,F} = \frac{1}{3} (3.3549)$$

$$m_{0,F} = 1.1183$$

$$m_{2,F} = \frac{1}{3} (2.3217)$$

$$m_{2,F} = 0.7739$$

$$m_{4,F} = \frac{1}{3} (1.6348)$$

$$m_{4,F} = 0.5449$$

b) Para los momentos flexionantes, de la tabla 4.7 se obtiene

- de la columna 4

$$\sum_{i=21}^{32} S_M(f_i) \Delta f \cdot K'_i = 4.0976$$

- de la columna 8

$$\sum_{i=21}^{32} S_M(f_i) \Delta f \cdot f_i^2 \cdot K'_i = 2.8596$$

- de la columna 12

$$\sum_{i=21}^{32} S_M(f_i) \Delta f \cdot f_i^4 \cdot K'_i = 2.0267$$

por lo que

$$m_{0,M} = \frac{1}{3} (4.0976)$$

$$m_{0,M} = 1.3659$$

$$m_{2,M} = \frac{1}{3} (2.8596)$$

$$m_{2,M} = 0.9532$$

$$m_{4,M} = \frac{1}{3} (2.0267)$$

$$m_{4,M} = 0.6756$$

11. Cálculo de ϵ^2 de los espectros de fuerzas y momentos flexionantes.

Los anchos de banda de los espectros de fuerzas y momentos están respectivamente dados por

$$\epsilon_F^2 = 1 - \frac{(m_{2,F})^2}{m_{0,F} \cdot m_{4,F}}$$

$$\epsilon_M^2 = 1 - \frac{(m_{2,M})^2}{m_{0,M} \cdot m_{4,M}}$$

a) Para las fuerzas, se tiene

$$\epsilon_F^2 = 1 - \frac{(0.7739)^2}{(1.1183)(0.5449)}$$

$$\epsilon_F^2 = 0.0172$$

Debido a que $\epsilon_F^2 \rightarrow 0$, puede decirse que la distribución de probabilidad que siguen las fuerzas es de tipo Rayleigh.

b) Para los momentos flexionantes, se tiene

$$\epsilon_M^2 = 1 - \frac{(0.9532)^2}{(1.3659)(0.6756)}$$

$$\epsilon_M^2 = 0.0154$$

Al igual que las fuerzas, $\epsilon_M^2 \rightarrow 0$, por lo que la distribución de probabilidad a la que se ajustan los momentos flexionantes es también Rayleigh.

12. Cálculo de F.C para las fuerzas y momentos flexionantes.

Los factores correctivos se calculan como

$$F.C._F = \frac{m_{2,F}}{(m_{0,F} \cdot m_{4,F})^{1/2}}$$

$$F.C._M = \frac{m_{2,M}}{(m_{0,M} \cdot m_{4,M})^{1/2}}$$

a) Para las fuerzas, se tiene

$$F.C._F = \frac{0.7739}{((1.1183)(0.5449))^{1/2}}$$

$$F.C._F = 0.9914$$

b) Para los momentos flexionantes, se tiene

$$F.C._M = \frac{0.9532}{((1.3659)(0.6756))^{1/2}}$$

$$F.C._M = 0.9923$$

13. Cálculo de $F_{\text{máx}}$ y $M_{\text{máx}}$ para $1/n = 1/100$

A partir de la ec 2.100, las expresiones para $F_{\text{máx},1/n}$ y $M_{\text{máx},1/n}$ son

$$F_{\text{máx},1/n} = F.C._F \sqrt{\text{Ln } n} \sqrt{m_{0,F}}$$

$$M_{\text{máx},1/n} = F.C._M \sqrt{\text{Ln } n} \sqrt{m_{0,M}}$$

a) Cálculo de $F_{\text{máx},1/100}$

$$F_{\text{máx},1/100} = (0.9914) \sqrt{\text{Ln}(100)} \sqrt{1.1183}$$

$$F_{\text{máx},1/100} = 2.25 \text{ kg}$$

b) Cálculo de $M_{\text{máx},1/100}$

$$M_{\text{máx},1/100} = (0.9923) \sqrt{\text{Ln}(100)} \sqrt{1.3659}$$

$$M_{\text{máx},1/100} = 2.49 \text{ kg-m}$$

Si se quiere saber la posición de la fuerza, se emplea la ec 3.35

$$B = \frac{M}{F}$$

$$B = \frac{2.49}{2.25}$$

$$B = 1.11 \text{ m} \quad (\text{desde el fondo})$$

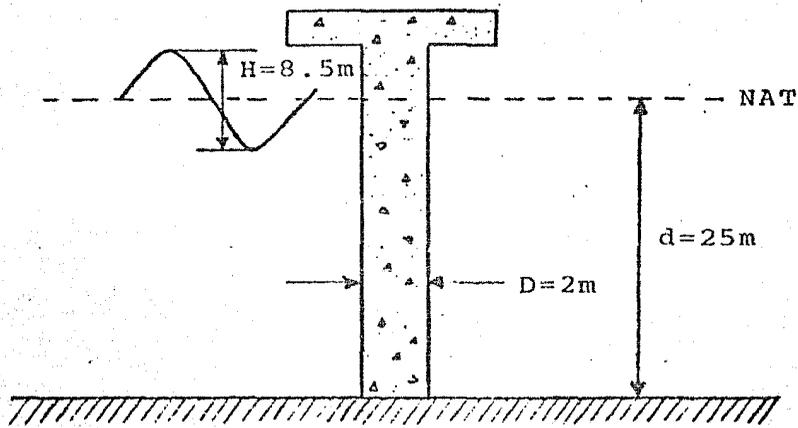


Fig. 4.1 Ejemplo 1.

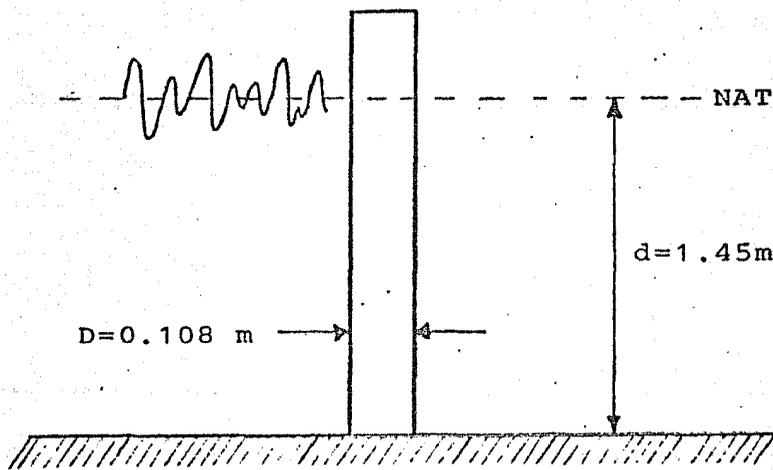
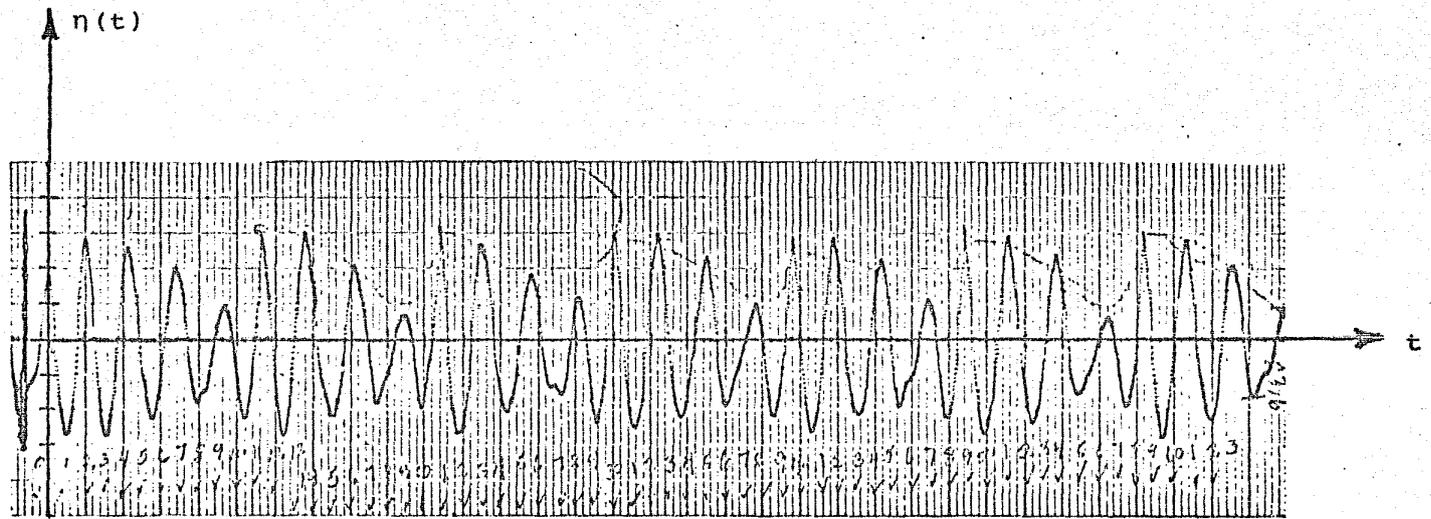


Fig. 4.2 Ejemplo 2.



0.5 seg
 Escala: \square 0.035 m

Fig. 4.3 Ejemplo 2. Registro de oleaje irregular.

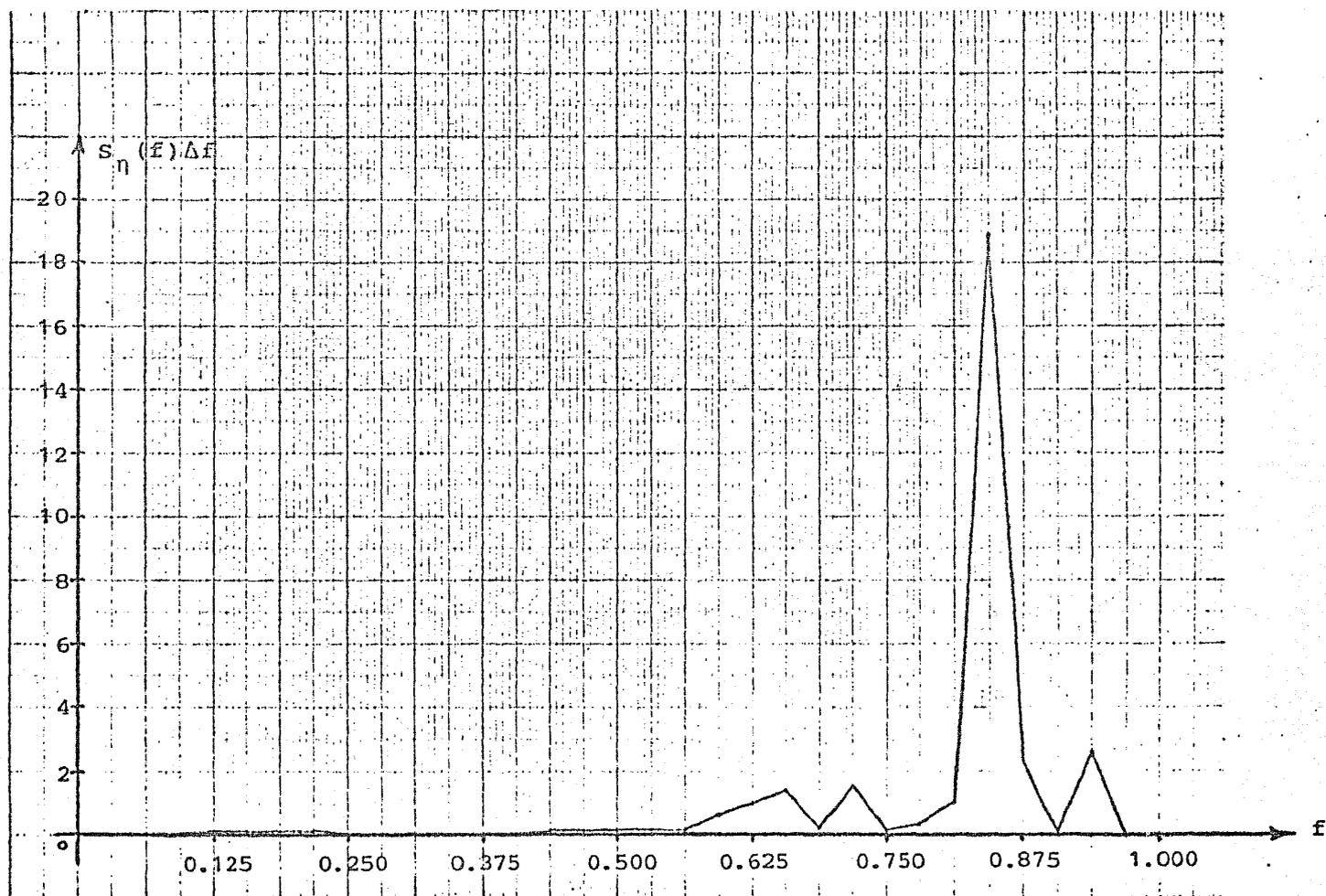


Fig. 4.4 Ejemplo 2. Espectro de oleaje.

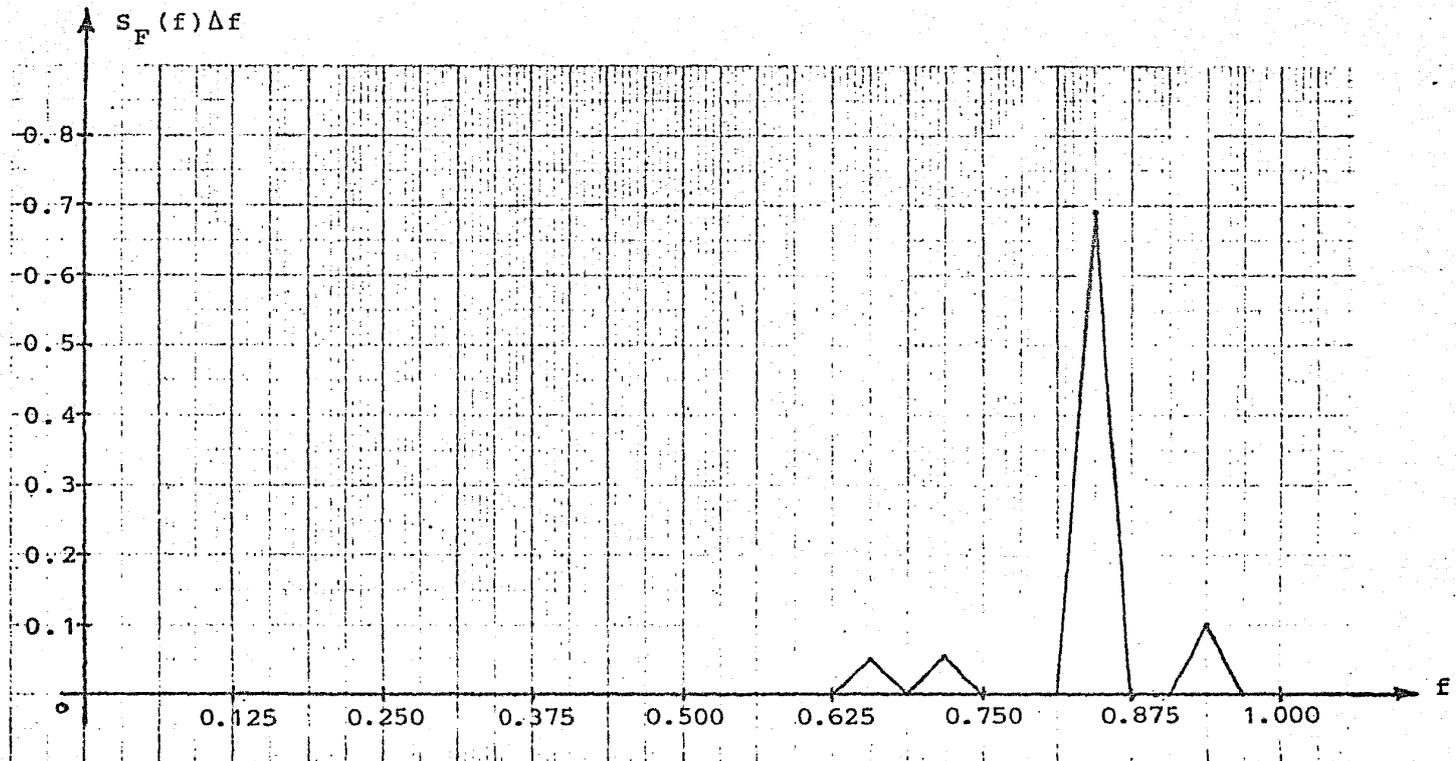


Fig. 4.5 Ejemplo 2. Espectro de fuerzas.

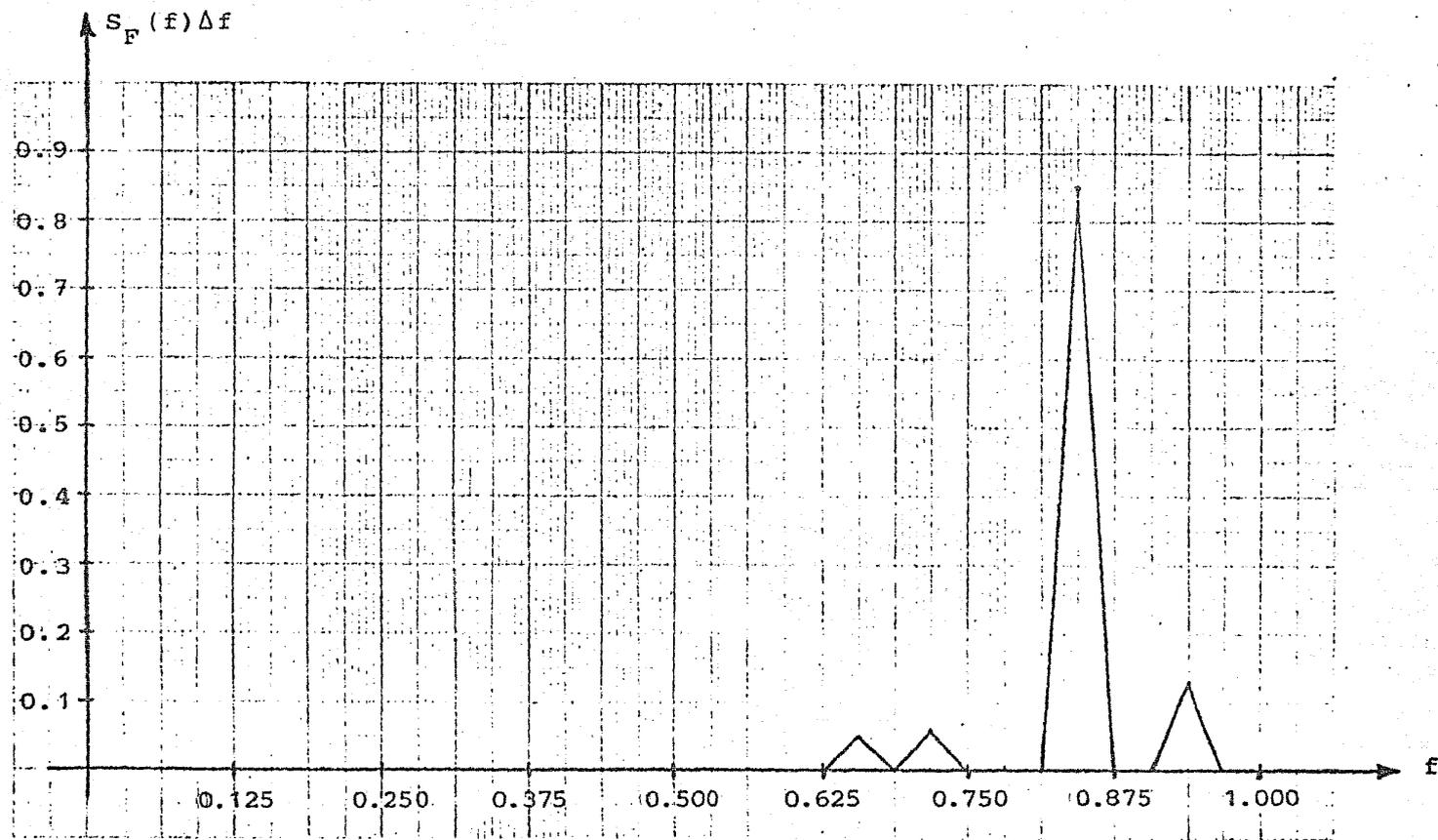


Fig. 4.6 Ejemplo 2. Espectro de momentos.

TABLA 4.1

No. i	Tiempo t_i , en seg	Elevación de la SLA x_i , en m	No. i	Tiempo t_i , en seg	Elevación de la SLA x_i , en m
1	0.0	0.0592	33	16.0	0.0487
2	0.5	-0.0940	34	16.5	-0.0070
3	1.0	0.0940	35	17.0	-0.0557
4	1.5	-0.0905	36	17.5	0.0766
5	2.0	0.0661	37	18.0	-0.0627
6	2.5	-0.0348	38	18.5	-0.0104
7	3.0	-0.0418	39	19.0	0.0070
8	3.5	0.0557	40	19.5	-0.0278
9	4.0	-0.0592	41	20.0	0.0139
10	4.5	0.0209	42	20.5	-0.0627
11	5.0	-0.0453	43	21.0	0.0731
12	5.5	0.0139	44	21.5	-0.0731
13	6.0	-0.0487	45	22.0	0.0487
14	6.5	0.0000	46	22.5	-0.0313
15	7.0	0.0522	47	23.0	-0.0383
16	7.5	-0.0766	48	23.5	0.0313
17	8.0	0.0592	49	24.0	-0.0731
18	8.5	-0.0174	50	24.5	0.0696
19	9.0	-0.0384	51	25.0	-0.0870
20	9.5	0.0209	52	25.5	0.0940
21	10.0	-0.0627	53	26.0	-0.0453
22	10.5	0.0696	54	26.5	-0.0209
23	11.0	-0.0870	55	27.0	0.0487
24	11.5	0.0870	56	27.5	-0.0522
25	12.0	-0.0522	57	28.0	0.0000
26	12.5	-0.0348	58	28.5	-0.0174
27	13.0	0.0348	59	29.0	0.0070
28	13.5	-0.0487	60	29.5	-0.0418
29	14.0	0.0313	61	30.0	-0.0035
30	14.5	-0.0731	62	30.5	0.0487
31	15.0	0.0905	63	31.0	-0.0766
32	15.5	-0.0835	64	31.5	0.0661

TABLA 4.2

No. i	Tiempo t_i , en seg	Frecuencia f_i , en 1/seg	Transformada oleaje X_i , en m	Densidad de potencia $S_{\eta}(f_i) \Delta f$, en m^2/s
1	0.0	0.00000	$-6.0438 \times 10^{-3} + 0.0000$	0.0000
2	0.5	0.03125	$9.6607 \times 10^{-4} + 9.5549 \times 10^{-4}$	0.0191×10^{-4}
3	1.0	0.06250	$1.2654 \times 10^{-3} + 6.3094 \times 10^{-6}$	0.0400×10^{-4}
4	1.5	0.09375	$8.6190 \times 10^{-4} - 2.3785 \times 10^{-4}$	0.0149×10^{-4}
5	2.0	0.12500	$2.3630 \times 10^{-3} - 5.7883 \times 10^{-4}$	0.1184×10^{-4}
6	2.5	0.15625	$1.4809 \times 10^{-3} - 5.8287 \times 10^{-4}$	0.0507×10^{-4}
7	3.0	0.18750	$1.9039 \times 10^{-3} + 6.4622 \times 10^{-4}$	0.0809×10^{-4}
8	3.5	0.21875	$-1.3569 \times 10^{-3} + 1.7171 \times 10^{-3}$	0.0958×10^{-4}
9	4.0	0.25000	$6.8238 \times 10^{-4} + 1.1047 \times 10^{-3}$	0.0337×10^{-4}
10	4.5	0.28125	$2.4071 \times 10^{-3} - 5.4429 \times 10^{-4}$	0.1218×10^{-4}
11	5.0	0.31250	$-1.8706 \times 10^{-4} + 1.6668 \times 10^{-4}$	1.2555×10^{-7}
12	5.5	0.34375	$-2.5522 \times 10^{-4} + 7.8235 \times 10^{-4}$	0.0135×10^{-4}
13	6.0	0.37500	$3.6473 \times 10^{-4} + 1.6765 \times 10^{-4}$	3.2227×10^{-7}
14	6.5	0.40625	$1.3958 \times 10^{-4} + 6.7431 \times 10^{-4}$	9.4836×10^{-7}
15	7.0	0.43750	$2.8812 \times 10^{-4} + 1.7706 \times 10^{-3}$	0.0644×10^{-4}
16	7.5	0.46875	$2.2306 \times 10^{-4} - 3.0928 \times 10^{-3}$	0.0995×10^{-4}
17	8.0	0.50000	$-2.7344 \times 10^{-4} + 2.2859 \times 10^{-3}$	0.1060×10^{-4}
18	8.5	0.53125	$1.3607 \times 10^{-3} - 8.1086 \times 10^{-4}$	0.0502×10^{-4}
19	9.0	0.56250	$1.6585 \times 10^{-3} + 1.3622 \times 10^{-3}$	0.0921×10^{-4}
20	9.5	0.59375	$7.3270 \times 10^{-3} + 1.1744 \times 10^{-3}$	0.5951×10^{-4}
21	10.0	0.62500	$6.8527 \times 10^{-3} - 1.3870 \times 10^{-3}$	0.9777×10^{-4}
22	10.5	0.65625	$-5.6286 \times 10^{-4} + 6.0895 \times 10^{-3}$	1.3752×10^{-4}
23	11.0	0.68750	$-5.3505 \times 10^{-4} + 3.3868 \times 10^{-3}$	0.2351×10^{-4}
24	11.5	0.71875	$-4.6872 \times 10^{-4} + 7.1751 \times 10^{-3}$	1.4690×10^{-4}
25	12.0	0.75000	$1.6082 \times 10^{-4} + 1.9734 \times 10^{-3}$	0.1296×10^{-4}
26	12.5	0.78125	$-1.4498 \times 10^{-4} + 3.9894 \times 10^{-3}$	0.3187×10^{-4}
27	13.0	0.81250	$2.7877 \times 10^{-4} + 7.1297 \times 10^{-3}$	1.0182×10^{-4}
28	13.5	0.84375	$-8.8521 \times 10^{-4} + 0.030722978$	1.8894×10^{-3}
29	14.0	0.97500	$2.3884 \times 10^{-3} - 0.010408532$	2.2808×10^{-4}
30	14.5	0.90625	$2.1191 \times 10^{-3} - 1.1163 \times 10^{-3}$	0.1147×10^{-4}
31	15.0	0.93750	$0.010552257 + 4.3485 \times 10^{-4}$	2.6052×10^{-4}
32	15.5	0.96875	$-1.3104 \times 10^{-3} - 6.1568 \times 10^{-4}$	0.0419×10^{-4}
33	16.0	1.00000	$1.5719 \times 10^{-3} + 1.0099 \times 10^{-8}$	0.0494×10^{-4}

TABLA 4.3

Número de componente i	Amplitud a_i , en m	Frecuencia f_i , en 1/seg	Angulo de fase ¹ ϕ_i , en rad
1	0.016585	0.65625	0.7461
2	0.017141	0.71875	0.5787
3	0.061471	0.84375	0.0288
4	0.022826	0.93750	-1.1799

(1) recuerdese que para obtener funciones coseno se debe recurrir a la ec 2.90

No.	Tiempo t_i , en seg	Oleaje η_i , en m	Fuerza total F_i , en kg	Momento total M_i , en kg-m
1	0	1.29833035E-03	1.82416236	1.97629623
2	.5	.0683789388	-1.89087811	-1.69208733
3	1	-.195216747	.470742765	.451327415
4	1.5	.108397657	.73175428	.826345488
5	2	-.0747443287	-1.39797931	-1.52938438
6	2.5	.0317382382	1.472121	1.64337261
7	3	-4.0295063E-03	-1.17632054	-1.36927527
8	3.5	-5.84528213E-03	.951660222	1.14136213
9	4	.0134697379	-.907895402	-1.05438468
10	4.5	-.0314358354	.83187856	.906648635
11	5	.054632641	-.456898528	-.460153581
12	5.5	-.0647372258	-.181605535	-.223104324
13	6	.0493326108	.786631042	.823171351
14	6.5	-.0145124815	-1.02444734	-1.08991031
15	7	-.0206282096	.783225928	.835637871
16	7.5	.0403973855	-.25229339	-.264484216
17	8	-.0425122705	-.32072017	-.375312025
18	8.5	.0333102231	.719117236	.828491067
19	9	-.0165844769	-.976461505	-1.10731864
20	9.5	-9.60740088E-03	1.14640139	1.26612638
21	10	.0447354801	-.997120538	-1.05540563
22	10.5	-.0774923287	.418051588	.39173042
23	11	.0899847127	.478311957	.584211865
24	11.5	-.0729069548	-1.26460006	-1.42129788
25	12	.035989574	1.52356096	1.6929321
26	12.5	-1.09748588E-03	-1.37380925	-1.5621586
27	13	-.0189866304	1.07971534	1.27984758
28	13.5	.0233784381	-.896631377	-1.067255
29	14	-.0351510121	.837602768	.931406694
30	14.5	.0601381661	-.627650813	-.626766248
31	15	-.0843604336	0	0
32	15.5	.0826161862	.653406517	1.06536544
33	16	-.0435069051	-1.55594888	-1.66929235
34	16.5	-.0155881461	1.52385862	1.61284159
35	17	.0595848199	-.630888059	-.657271574
36	17.5	-.0636389753	-.40137126	-.420495889
37	18	.0325989434	.942499554	.981024873
38	18.5	6.17422794E-03	-.883050081	-.941207758
39	19	-.029193085	.506402711	.578331559
40	19.5	.0311397031	-.193209047	-.249626389

No.	Tiempo t_i , en seg	Oleaje n_i , en m	Fuerza total F_i , en kg	Momento total M_i , en kg-m
41	20	-.0308079783	0	0
42	20.5	.0402613663	0	0
43	21	-.0545503426	-.405266266	-.54803898
44	21.5	.0557502593	1.88509788	1.18459703
45	22	-.0317863409	-1.53419926	-1.71836041
46	22.5	-.0109187992	1.76310571	1.88027498
47	23	.0529671895	-1.3969468	-1.44285444
48	23.5	-.0784012962	.63188911	.695666708
49	24	.0847206446	.14444628	.186960575
50	24.5	-.0781010168	-.714315884	-.841781219
51	25	.0622364041	1.08027626	1.24151518
52	25.5	-.0351512802	-1.3922242	-1.56271873
53	26	-2.59009464E-03	1.43242766	1.57683646
54	26.5	.0395798635	-.898434708	-1.08329681
55	27	-.0577721196	.229010598	.255303248
56	27.5	.0476125329	.483434882	.473786574
57	28	-.0185753727	-.685403119	-.70653923
58	28.5	-7.72804435E-03	.514141465	.554339606
59	29	.0169043292	-.21739799	-.270408013
60	29.5	-.0143924688	0	0
61	30	.0175047432	-.0961894862	-.0897473413
62	30.5	-.0347068862	0	0
63	31	.0520214541	.541937532	.787708882
64	31.5	-.0448122743	-1.32784484	-1.51190383
65	32	1.2985393E-03	1.82416236	1.97829824
66	32.5	.0603789386	-1.60987815	-1.68268738
67	33	-.105216745	.470742849	.451327513
68	33.5	.108397657	.731754182	.826345379
69	34	-.0747443301	-1.39797923	-1.5293843
70	34.5	.0317382377	1.47212101	1.64337282
71	35	-4.0295071E-03	-1.17632053	-1.36927526
72	35.5	-5.845281E-03	.951060218	1.14136212
73	36	.013409738	-.907695444	-1.05436471
74	36.5	-.0314358337	.831878635	.806648718
75	37	.0546326405	-.458898598	-.460153659
76	37.5	-.064737227	-.181605481	-.223104266
77	38	.0483326123	.766631011	.823171317
78	38.5	-.0145124858	-1.02444737	-1.08991035
79	39	-.0208282118	.783225958	.835637104
80	39.5	.0403973869	-.252293425	-.264484254
81	40	-.0425122705	-.320720148	-.375312

TABLA 4.5

No. i	Tiempo t_i , en seg	Frecuencia f_i , en 1/seg	Transformada fuerzas X_{F_i} , en kg	Transformada momentos X_{M_i} , en kg-m	Densidad de potencia fzas. $S_F(f_i)\Delta f$, en kg^2/s	Densidad de potencia mtos. $S_M(f_i)\Delta f$, en $(\text{kg-m})^2/\text{s}$
1	0.0	0.00000	$-1.49 \times 10^{-3} + 0.00$	$4.44 \times 10^{-6} + 0.00$	0.0000	0.0000
2	0.5	0.03125	$-1.62 \times 10^{-3} - 7.68 \times 10^{-4} j$	$-1.41 \times 10^{-3} - 1.50 \times 10^{-3} j$	6.4483×10^{-6}	8.5052×10^{-6}
3	1.0	0.06250	$1.53 \times 10^{-3} + 7.93 \times 10^{-4} j$	$2.54 \times 10^{-3} + 2.88 \times 10^{-3} j$	1.2590×10^{-6}	2.9565×10^{-5}
4	1.5	0.09375	$-3.01 \times 10^{-3} - 2.59 \times 10^{-4} j$	$-4.52 \times 10^{-3} - 3.26 \times 10^{-4} j$	3.1527×10^{-5}	6.2129×10^{-5}
5	2.0	0.12500	$2.90 \times 10^{-3} - 8.29 \times 10^{-4} j$	$5.90 \times 10^{-3} + 6.79 \times 10^{-3} j$	1.8156×10^{-5}	7.0534×10^{-5}
6	2.5	0.15625	$-4.74 \times 10^{-4} + 4.06 \times 10^{-3} j$	$-6.28 \times 10^{-4} + 1.62 \times 10^{-4} j$	4.5205×10^{-5}	8.4120×10^{-5}
7	3.0	0.18750	$8.80 \times 10^{-3} - 1.33 \times 10^{-3} j$	$9.37 \times 10^{-3} + 4.00 \times 10^{-3} j$	5.0860×10^{-5}	2.0771×10^{-5}
8	3.5	0.21875	$2.02 \times 10^{-3} + 1.86 \times 10^{-3} j$	$2.58 \times 10^{-3} + 2.44 \times 10^{-3} j$	1.5100×10^{-5}	2.5160×10^{-5}
9	4.0	0.25000	$-1.25 \times 10^{-3} + 2.91 \times 10^{-3} j$	$-2.94 \times 10^{-3} + 6.91 \times 10^{-3} j$	2.0022×10^{-5}	1.1266×10^{-4}
10	4.5	0.28125	$-3.23 \times 10^{-3} + 1.49 \times 10^{-3} j$	$-5.34 \times 10^{-3} + 6.85 \times 10^{-4} j$	2.5251×10^{-5}	5.7896×10^{-5}
11	5.0	0.31250	$8.55 \times 10^{-4} + 3.06 \times 10^{-3} j$	$-5.33 \times 10^{-5} + 5.84 \times 10^{-3} j$	2.0180×10^{-5}	6.8148×10^{-5}
12	5.5	0.34375	$-4.89 \times 10^{-3} + 1.77 \times 10^{-3} j$	$-7.79 \times 10^{-3} + 1.61 \times 10^{-3} j$	1.7705×10^{-5}	1.2657×10^{-4}
13	6.0	0.37500	$5.24 \times 10^{-3} + 2.49 \times 10^{-3} j$	$-1.76 \times 10^{-3} + 2.59 \times 10^{-3} j$	1.2966×10^{-5}	1.9569×10^{-5}
14	6.5	0.40625	$-4.22 \times 10^{-3} + 3.20 \times 10^{-3} j$	$-4.90 \times 10^{-3} + 2.98 \times 10^{-3} j$	5.6016×10^{-5}	6.5813×10^{-5}
15	7.0	0.43750	$-1.25 \times 10^{-3} - 2.06 \times 10^{-4} j$	$-4.77 \times 10^{-3} - 3.40 \times 10^{-3} j$	1.1575×10^{-5}	6.8676×10^{-5}
16	7.5	0.46875	$4.59 \times 10^{-3} - 7.78 \times 10^{-4} j$	$6.98 \times 10^{-3} - 3.75 \times 10^{-4} j$	4.3395×10^{-5}	1.2559×10^{-4}
17	8.0	0.50000	$-3.18 \times 10^{-4} + 1.99 \times 10^{-3} j$	$-1.37 \times 10^{-3} - 4.41 \times 10^{-3} j$	2.8212×10^{-7}	4.1452×10^{-6}
18	8.5	0.53125	$1.18 \times 10^{-3} + 8.51 \times 10^{-5} j$	$2.28 \times 10^{-3} + 9.00 \times 10^{-3} j$	1.4774×10^{-4}	1.7253×10^{-4}
19	9.0	0.56250	$1.41 \times 10^{-3} + 4.22 \times 10^{-3} j$	$2.65 \times 10^{-3} - 2.33 \times 10^{-3} j$	3.9997×10^{-6}	2.4858×10^{-5}
20	9.5	0.59375	$4.94 \times 10^{-3} - 2.86 \times 10^{-3} j$	$8.25 \times 10^{-3} - 2.68 \times 10^{-3} j$	6.5211×10^{-5}	1.5046×10^{-4}
21	10.0	0.62500	$6.26 \times 10^{-3} + 1.55 \times 10^{-3} j$	$8.04 \times 10^{-3} - 3.55 \times 10^{-4} j$	8.3169×10^{-5}	1.2962×10^{-4}
22	10.5	0.65625	$0.1292527 + 0.0909015 j$	$0.1318998 + 0.0853692 j$	0.049938676	0.049370905
23	11.0	0.68750	$-2.23 \times 10^{-4} + 1.48 \times 10^{-4} j$	$-9.79 \times 10^{-5} + 3.92 \times 10^{-4} j$	1.4354×10^{-7}	3.2718×10^{-7}
24	11.5	0.71875	$0.1512070 + 0.0666265 j$	$0.1587026 + 0.0638086 j$	0.054605301	0.058516095
25	12.0	0.75000	$3.40 \times 10^{-3} - 4.92 \times 10^{-4} j$	$6.40 \times 10^{-3} + 1.30 \times 10^{-5} j$	2.3537×10^{-5}	8.1861×10^{-5}
26	12.5	0.78125	$-5.57 \times 10^{-4} - 2.51 \times 10^{-3} j$	$-1.73 \times 10^{-3} - 9.78 \times 10^{-5} j$	1.3250×10^{-5}	6.0083×10^{-6}
27	13.0	0.81250	$-1.05 \times 10^{-3} - 1.18 \times 10^{-3} j$	$-1.91 \times 10^{-4} - 2.44 \times 10^{-3} j$	5.0030×10^{-6}	1.2013×10^{-5}
28	13.5	0.84375	$0.5808235 - 0.0751866 j$	$0.6454153 - 0.0942026 j$	0.686017891	0.850870046
29	14.0	0.87500	$4.11 \times 10^{-4} - 1.40 \times 10^{-4} j$	$-4.98 \times 10^{-4} - 1.85 \times 10^{-4} j$	4.2602×10^{-6}	7.3498×10^{-6}
30	14.5	0.90625	$-1.78 \times 10^{-4} - 2.21 \times 10^{-4} j$	$-1.06 \times 10^{-3} + 7.09 \times 10^{-4} j$	1.6058×10^{-7}	3.2420×10^{-6}
31	15.0	0.93750	$0.0549364 - 0.2122787 j$	$0.0609070 - 0.2484862 j$	0.096160551	0.130910115
32	15.5	0.96875	$-6.56 \times 10^{-3} - 4.12 \times 10^{-9} j$	$-0.0116741 - 5.76 \times 10^{-9} j$	1.1991×10^{-4}	3.3896×10^{-4}
33	16.0	1.00000	$6.31 \times 10^{-3} + 2.81 \times 10^{-9} j$	$2.10 \times 10^{-3} + 2.78 \times 10^{-9} j$	7.9589×10^{-7}	8.8134×10^{-6}

TABLA 4.6

i	(1) f_i	(2) $S_F(f_i)\Delta f$	(3) K'_i	(4) (2)×(3)	(5) f_i^2	(6) $f_i^2 \cdot S_F(f_i)\Delta f$	(7) K'_i	(8) (6)×(7)	(9) f_i^4	(10) $f_i^4 \cdot S_F(f_i)\Delta f$	(11) K'_i	(12) (10)×(11)
21	0.62500	8.3169×10^{-5}	1	8.3169×10^{-5}	0.390625	3.2488×10^{-5}	1	3.2488×10^{-5}	0.152588	1.2691×10^{-5}	1	1.2691×10^{-5}
22	0.65625	0.049939	4	0.199756	0.430664	0.021507	4	0.086028	0.185472	0.009262	4	0.037048
23	0.68750	1.4354×10^{-7}	2	2.8708×10^{-7}	0.472656	6.7845×10^{-8}	2	1.3569×10^{-7}	0.223404	3.2067×10^{-8}	2	6.4134×10^{-8}
24	0.71875	0.054605	4	0.21842	0.516602	0.028209	4	0.112836	0.266877	0.014573	4	0.058292
25	0.75000	2.3537×10^{-5}	2	4.7074×10^{-5}	0.562500	1.3240×10^{-5}	2	2.6480×10^{-5}	0.316406	7.4473×10^{-6}	2	1.4895×10^{-5}
26	0.78125	1.3250×10^{-5}	4	2.6500×10^{-5}	0.610352	8.0872×10^{-6}	4	3.2349×10^{-5}	0.372529	4.9360×10^{-6}	4	1.9744×10^{-5}
27	0.81250	5.0030×10^{-6}	2	1.0006×10^{-5}	0.660156	3.3028×10^{-6}	2	6.6056×10^{-6}	0.435806	2.1803×10^{-6}	2	4.3606×10^{-6}
28	0.84375	0.686018	4	2.744072	0.711914	0.488386	4	1.953544	0.506822	0.347689	4	1.390756
29	0.87500	4.2602×10^{-6}	2	8.5204×10^{-6}	0.765625	3.2617×10^{-6}	2	6.5234×10^{-6}	0.586182	2.4973×10^{-6}	2	4.9946×10^{-6}
30	0.90625	1.6058×10^{-7}	4	3.2116×10^{-7}	0.821289	1.3188×10^{-7}	4	5.2752×10^{-7}	0.674516	1.0831×10^{-7}	4	4.3324×10^{-7}
31	0.93750	0.096161	2	0.192322	0.878906	0.084517	2	0.169034	0.772476	0.074282	2	0.148564
32	0.96875	1.1991×10^{-4}	1	1.1991×10^{-4}	0.938477	1.1253×10^{-4}	1	1.1253×10^{-4}	0.880738	1.0561×10^{-4}	1	1.0561×10^{-4}
Σ				3.354866				2.32166				1.634823

TABLA 4.7

i	(1) f_i	(2) $S_M(f_i)\Delta f$	(3) K_i'	(4) $(2)\times(3)$	(5) f_i^2	(6) $f_i^2 \cdot S_M(f_i)\Delta f$	(7) K_i'	(8) $(6)\times(7)$	(9) f_i^4	(10) $f_i^4 \cdot S_M(f_i)\Delta f$	(11) K_i'	(12) $(10)\times(11)$
21	0.62500	1.2962×10^{-4}	1	1.2962×10^{-4}	0.390625	5.0633×10^{-5}	1	5.0633×10^{-5}	0.152588	1.9778×10^{-5}	1	1.9778×10^{-5}
22	0.65625	0.049371	4	0.197484	0.430664	0.021262	4	0.085048	0.185472	0.009157	4	0.036628
23	0.68750	3.2718×10^{-7}	2	6.5436×10^{-7}	0.472656	1.5464×10^{-7}	2	3.0928×10^{-7}	0.223404	7.3093×10^{-8}	2	1.4619×10^{-7}
24	0.71875	0.058516	4	0.234064	0.516602	0.030229	4	0.120916	0.266877	0.015617	4	0.062468
25	0.75000	8.1861×10^{-5}	2	1.6372×10^{-4}	0.562500	4.6047×10^{-5}	2	9.2094×10^{-5}	0.316406	2.5901×10^{-5}	2	5.1808×10^{-5}
26	0.78125	6.0083×10^{-6}	4	2.4033×10^{-5}	0.610352	3.6672×10^{-6}	4	1.4669×10^{-5}	0.372529	2.2383×10^{-6}	4	8.9532×10^{-6}
27	0.81250	1.2013×10^{-5}	2	2.4026×10^{-5}	0.660156	7.9305×10^{-6}	2	1.5861×10^{-5}	0.435806	5.2353×10^{-6}	2	1.0471×10^{-5}
28	0.84375	0.85087	4	3.403480	0.711914	0.605746	4	2.422984	0.506822	0.431240	4	1.72496
29	0.87500	7.3498×10^{-6}	2	1.4700×10^{-5}	0.765625	5.6272×10^{-6}	2	1.1254×10^{-5}	0.586182	4.3083×10^{-6}	2	8.6166×10^{-6}
30	0.90625	3.2420×10^{-6}	4	1.2968×10^{-5}	0.821289	2.6626×10^{-6}	4	1.0650×10^{-5}	0.674516	2.1868×10^{-6}	4	8.7472×10^{-6}
31	0.93750	0.130910	2	0.261820	0.878906	0.115058	2	0.230116	0.772476	0.101125	2	0.202250
32	0.96875	3.3896×10^{-4}	1	3.3896×10^{-4}	0.938477	3.1811×10^{-4}	1	3.1811×10^{-4}	0.880738	2.9853×10^{-4}	1	2.9853×10^{-4}
Σ				4.0976				2.8596				2.0267

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. Se presentan dos métodos, según el tipo de oleaje, para el cálculo de fuerzas y momentos flexionantes máximos totales inducidos sobre una pila delgada sometida a oleaje. En ambos casos, el análisis se efectúa a partir de la teoría lineal. El autor sugiere efectuar un análisis similar empleando otra teoría (por ejemplo, Stokes 2).
2. El análisis se hizo considerando como única sollicitación el efecto del oleaje sobre una pila esbelta. Se sugiere, como alternativa de análisis a futuro, incluir los efectos de las corrientes subyacentes y oleaje en dos direcciones.
3. Analizando la fig 2.2, se establece que la teoría lineal proporciona buenos resultados cuando se aplica en aguas

profundas e intermedias; para aguas bajas los resultados no son tan satisfactorios, aunque no por ello no aplicables.

4. Las mediciones en campo y laboratorio deben efectuarse con cuidado, ya que de la calidad de éstas depende la confiabilidad de los parámetros obtenidos del análisis de las mismas.
5. El análisis espectral es una herramienta poderosa que permite manejar analíticamente señales periódicas y aperiódicas. Considerando que el oleaje irregular es aperiódico, se establece que este análisis es el idóneo para analizar el comportamiento de dicho oleaje. Además, también se emplea, relacionado con análisis estadístico, para el análisis hidrodinámico.
6. La ec 2.96 se establece relacionando los resultados de la teoría estadística con la espectral considerando el espectro de un solo lado. Cabe mencionar que la expresión equivalente que se presenta en la literatura (refs 18 y 22) es diferente ya que para su deducción se emplea el espectro de dos lados.
7. Se subraya que la teoría expuesta en el capítulo 3 es válida sólo para pilas esbeltas ($D/L \leq 0.20$), lo cual es muy frecuente encontrar en la práctica. Para otros casos se tendrá que contemplar el efecto de difracción.

8. Con base en el comportamiento observado de las estructuras construidas con pilas esbeltas hasta la fecha, se concluye que la ecuación de Morison, empleada en el diseño de dichas estructuras, proporciona buenos resultados.
9. Debido a la naturaleza empírica de los coeficientes C_d y C_m , se sugiere que para su determinación se efectúen pruebas en modelos y mediciones en prototipo; sobre todo por la gran dispersión que se tiene en los resultados hasta la fecha.
10. El análisis hidrodinámico con oleaje monocromático es un análisis determinístico ya que se hace con base en valores de altura de ola y período constantes y únicos (significantes) y proporciona sólo un valor de la fuerza y momento flexionante.
11. En el apartado 3.3, se plantea la hipótesis (ec 3.41) con base en la cual se deducen las expresiones para la velocidad y aceleración de una partícula de fluido para oleaje irregular. Para admitir dicha hipótesis, se considera que si la función potencial ϕ_i asociada a una componente i del oleaje irregular es diferenciable, entonces la función potencial ϕ_I asociada al oleaje irregular también lo es ya que la función potencial ϕ_i es escalar y lineal. Debido a lo anterior se concluye que las ecs 3.44 y 3.45 son válidas para el oleaje irregular.

12. Para poder efectuar el análisis hidrodinámico con oleaje irregular, se modifica la ecuación de Morison, tomando en cuenta las ecs 3.44 y 3.45. Lo anterior da lugar a la ec 3.46.
13. Con las ecuaciones de la fuerza y momento flexionante totales para oleaje irregular, se obtiene un registro "sintético" de fuerzas (no medido) y, efectuando un análisis espectral-estadístico sobre dicho registro, se obtienen los valores máximos totales.
14. Dada la representación analítica del oleaje irregular, ésta se considera más apegada a la realidad que la dada por el oleaje monocromático.
15. Los valores obtenidos con la ecuación de Morison considerando valores significantes de la altura de ola y período, resultan mayores que los obtenidos con el método propuesto (ec 2.100, para $n=3$).

De acuerdo con los resultados mencionados, se establece que un diseño hecho con base en características significantes de oleaje esta "sobrado" con respecto a uno hecho con el método propuesto. A reserva de continuar investigando, puede subrayarse la importancia del ahorro de dinero que se tendría efectuando el diseño y construcción con los resultados de la teoría propuesta.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

1. Abramowitz M. y Stegun I.A., "Handbook of Mathematical Functions", Dover, U.S., 1965.
2. Barnette G.A., "Producción de Petróleo en el Mar", Revista Ingeniería, Facultad de Ingeniería-UNAM, Vol. XLIX, No. 2, 1979, pp 33-53.
3. Benjamin J.R. y Cornell C.A., "Probabilidad y Estadística en Ingeniería Civil", McGraw Hill, Colombia, 1981.
4. Borgman L.E., "Wave Forces on Piling for Narrow-Band Spectra", Journal of the Waterways and Harbors Division, ASCE, Vol. 91, Agosto 1965, pp 65-90.
5. Bruun P., "North Sea Offshore Structures", Ocean Engineering, Vol. 3, No. 5, U.S., 1976.
6. Cruz S.C. y Sánchez B.J.L., "Hidrodinámica de Estructuras Robustas Sometidas a Oleaje", Informe preliminar, Instituto de Ingeniería-UNAM, México, 1981.
7. Fuentes Mariles O.A., "Notas de la Clase de Métodos Numéricos en Hidráulica", DEPMI-UNAM (no publicadas), México, 1981.
8. Fuentes Mariles O.A., "Notas de la Clase de Hidráulica Marítima y de Estuarios", DEPMI-UNAM (no publicadas), México, 1982.

9. Fuentes M.O.A. y Padilla C.J., "Fuerza de Diseño de una Pila Sometida a Oleaje Irregular", Memorias X Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Vol. 2, México, Octubre 1982, pp 44-55.
10. Garrison C.J., "A Review of Drag and Inertia Forces on Circular Cylinders", Offshore Technology Conference, Mayo 1980, pp 205-218.
11. Gracia Sánchez J., "Estudio Piloto de un Canal de Arrastre", Informe, Instituto de Ingeniería-UNAM, México, 1980.
12. Horikawa K., "Coastal Engineering", John Wiley & Sons., Japan, 1978.
13. Hwei P. Hsu, "Análisis de Fourier", Fondo Educativo Interamericano, E.U., 1973.
14. Levi L.E., "Mecánica de los Fluidos, introducción teórica a la hidráulica moderna", UNAM, México, 1965.
15. Lin Y.K., "Probabilistic Theory of Structural Dynamics", McGraw Hill, U.S., 1967.
16. Maisel L., "Probabilidad y Estadística", Fondo Educativo Interamericano, E.U., 1973.
17. Morison J.R., O'brien M.P., Johnson J.W. y Schaff S.H., "The Force Exerted by Surface Waves on Piles", Petroleum

- Transactions, No. 189, 1950, pp 149-154.
18. Price W.G. y Bishop R.E.D., "Probabilistic Theory of Ship Dynamics", Chapman and Hall, U.S., 1974.
 19. Quinn Alonso DeF., "Design and Construction of Ports and Marine Structures", McGraw Hill, U.S., 1972.
 20. Sánchez Bribiesca J.L., "Doce Algoritmos para Resolver Problemas de Hidráulica", Instituto de Ingeniería-UNAM, No. 412, México, 1978.
 21. Sánchez Bribiesca J.L., "Análisis Hidrodinámico de Estructuras y Vehículos Marinos", Instituto de Ingeniería-UNAM, No. 446, México, 1981.
 22. Sarpkaya T. e Isaacson M., "Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures", Van Nostrand, U.S., 1981.
 23. Silvester R., "Coastal Engineering", Elsevier Scientific Publishing, Vol. 1, The Netherlands, 1979.
 24. Spiegel M.R., "Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas", McGraw Hill, México, 1970.
 25. U.S. Army, Coastal Engineering Research Center, "Shore Protection Manual", U.S. Army, Corps of Engineers, Vol. II, U.S., 1977.

26. Vis F.C., "Orbital Velocities in Irregular Waves", Sydney, Marzo 1980, pp 120-121.
27. Wiegel R.L., "Oceanographical Engineering", Prentice Hall, U.S., 1964.
28. Yuan Jen, "Laboratory Study of Inertia Forces on a Pile", Journal of the Waterways and Harbors Division, ASCE, Vol. 94, Febrero 1968, pp 59-76.