2ej

152

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-154

Señor JOSE ESPIRIDION NOLASCO MORALES
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Julio Damy Ríos, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de Ingeniero CIVIL.

APLICACION DE LAS COMPUTADORAS AL ANALISIS ESTRUCTURAL

I. Introducción a los sistemas y programas existentes de análisis estructural.
II. Algebra matricial.
III. Conceptos estructurales básicos.
IV. Ejemplo introductorio.
V. Vectores estructurales.
VI. Elementos estructurales.
VII. Método de los desplazamientos o de las rigideces.
VIII. Método de las fuerzas o de las flexibilidades.
IX. Temas especiales.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 21 de julio de 1983
EL DIRECTOR

Rascón Ch.

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ.

OARCH/RCCH/sho.

APLICACION DE LAS COMPUTADORAS AL ANALISIS ESTRUCTURAL

I N D I C E

INTRODUCCION GENERAL

El advenimiento de las computadoras ha hecho que la ciencia diera un gran salto en todos sus campos, ya no existe área dentro de ella en la cual la computadora no juegue un papel importante. En Ingeniería y en forma especial en la Inge-- niería Estructural, han hecho que los métodos tradicionales de análisis quedasen ya casi obsoletos, dando lugar a nue-- vas teorías que comprendiesen una variedad muy grande de es tructuras que por los métodos anteriormente usados no era - posible encontrar su solución.

Creemos que el fundamento de estas nuevas teorías nace al - "apartarse de los métodos tracionales de análisis que bus-- caron, y buscan actualmente, las respuestas de una estruc-- tura para un determinado tipo de cargas y apoyos. Así, no-- sotros trataremos la forma en que una estructura responde - a cualquier sistema de cargas con cualquier sistema de apo-- yos, siempre y cuando se garantice el equilibrio"( )

Creemos que resulta difícil trabajar con las estructuras -- olvidándose en cierta forma, de las cargas y de los apoyos, pero los métodos tradicionales resultan ser "anticuados e - inadecuados", para usarse con computadoras; mas no así, los nuevos enfoques que "hacen uso de las características de las computadoras, que tienen capacidad de almacenar grandes cantidades de información, operar a alta velocidad, efectuar una serie de operaciones especificadas, realizar decisiones lógicas, y obtener resultados correctos. En álgebra lineal se utiliza con ventaja estas características y de ahí la aplicación actual de los métodos matriciales"( )

No tratamos en el presenté trabajo desarrollar completamente una disciplina tan extensa, como lo es el Análisis Estructural, tratamos de mostrar las bases, calificadas como necesarias, para poder seguir con el estudio de la misma e introducir al estudiante en el campo de la Aplicación de las Computadoras a las Estructuras tema que, por su amplitud, resulta sumamente extenso y complicado a medida que se profundiza en el como para cubrirlo a detalle aquí, y debido también al nivel que se requiere.

Creo que puede ser importante hacer alusión a una idea que logra ahorrar una significante cantidad de tiempo en la solución de problemas, de tipo común, como lo son el análisis de marcos de edificios, generalmente semejantes. Al formar la matriz de rigidez de miembro, considerando carga axial, cortante y flexión, ésta se forma de 6x6 elementos. En este tipo de estructuras la deformación por flexión en la que toma el papel importante en el valor de los elementos mecánicos (momentos si sólo se considera flexión), al considerar sólo carga por flexión en la formación de la matriz de rigidez de miembro, ésta se forma sólo de 2x2 elementos, más un grado de libertad por cada nivel de la estructura. El número de elementos a manejar es contrastante entre una forma y otra de trabajar. El número de localidades de memoria a reservar en un computador y el número de ecuaciones a resolver, es considerablemente menor manejando sólo flexión; el tiempo de ahorro puede llegar a ser importante. Para el diseño de trabes, con la forma sugerida de proceder, sólo contamos con los momentos en los extremos y necesitamos las cortantes; con las cargas sobre los miembros y aplicando estática, se pueden obtener éstas. Para el diseño de columnas necesitamos, además de los momentos, las cargas axiales tomando las cortantes obtenidas para las trabes o considerando el área tributaria de cada una de ellas se obtiene con la aproximación suficiente para resolver este tipo de problemas.

Tratamos en los tres primeros capítulos las bases que hay que tener para una mejor comprensión de los subsecuentes, donde se trata de dar a los Métodos de Rigideces y Flexibilidades el enfoque matricial.

Quiero agradecer al Ing. Julio Damy Ríos, director de este trabajo, su valiosa cooperación. Los apuntes del curso que imparte sobre la materia son la base del presente estudio.

Agradezco también, a la Sra. R. Leonor Nolasco M., su ayuda en la elaboración, tan pesada y difícil, meca-- nográfica del mismo.

Por último quiero hacer un reconocimiento especial -- al Ing. Pierre Lelong Fleury a quien debo gran parte- de mi desarrollo profesional y su ayuda desinteresada.

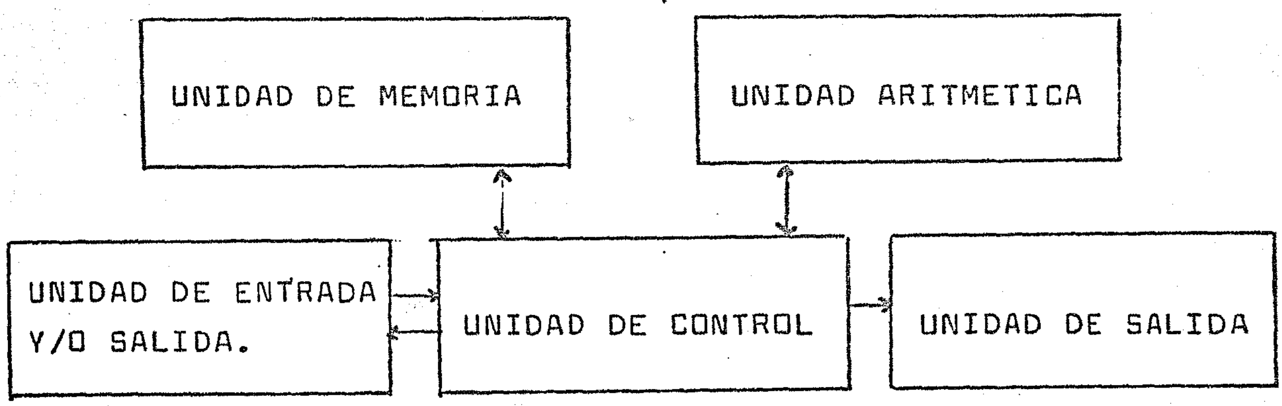
I. INTRODUCCION A LOS SISTEMAS Y PROGRAMAS EXISTENTES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

I.1 INTRODUCCION A LAS COMPUTADORAS.

Una computadora es un instrumento electrónico compuesto, en esencia, de dos partes: Una que comprende todos los dispositivos físicos con que cuenta, llamada ----- "Hardware". Otra que considera a la parte"intelectual" que abarca lo que a programas se refiere, se llama --- "Software".

Un programa es una serie de instrucciones ordenadas de tal forma que cumplen con uno o varios fines específicos.

El funcionamiento y los componentes, de una computadora, podemos resumirlos en el siguiente esquema:



La parte medular de una computadora es la Unidad de -- Control, que no es más que en realidad un programa que dirige la acción de todas las otras unidades, determinando cuándo debe leerse información, cuándo debe es-- cribirse, cuándo y dónde debe almacenarse en la Unidad de Memoria, cuándo debe recobrarse esa información y - cuándo enviarse a la Unidad Aritmética para su proceso, etc.

La tendencia, a futuro, de las Computadoras es sin lugar a dudas, hacia el desplazamiento de las Macrocomputadoras por las Microcomputadoras, que son facilmente transportables, de instalación muy sencilla y no requieren de mecanismos especiales para su funcionamiento como lo requieren las grandes computadoras. Con una capacidad comparable a éstas, las Microcomputadoras tienden a abarcar cada día más el mercado de la computación, donde debido a la diversificación y desunión de las actividades que se desarrollan en el país, es más económico el manejo de éstas.

El desarrollo de sistemas o programas para el Análisis Estructural se encamina hacia las Microcomputadoras, alejándose cada día más por lo económico, el uso de estos programas en Macrocomputadoras.

En un tema tan extenso como lo es éste, pueden decirse y justificarse muchas más cosas que valdrían la pena. Sin embargo tendría que, creo yo, generarse un trabajo del volumen que representa éste o más. Aunque no se trata más el asunto hay que tener presente una cosa: El futuro del Análisis Estructural está en el desarrollo de las computadoras y en que se trabaje en ello.

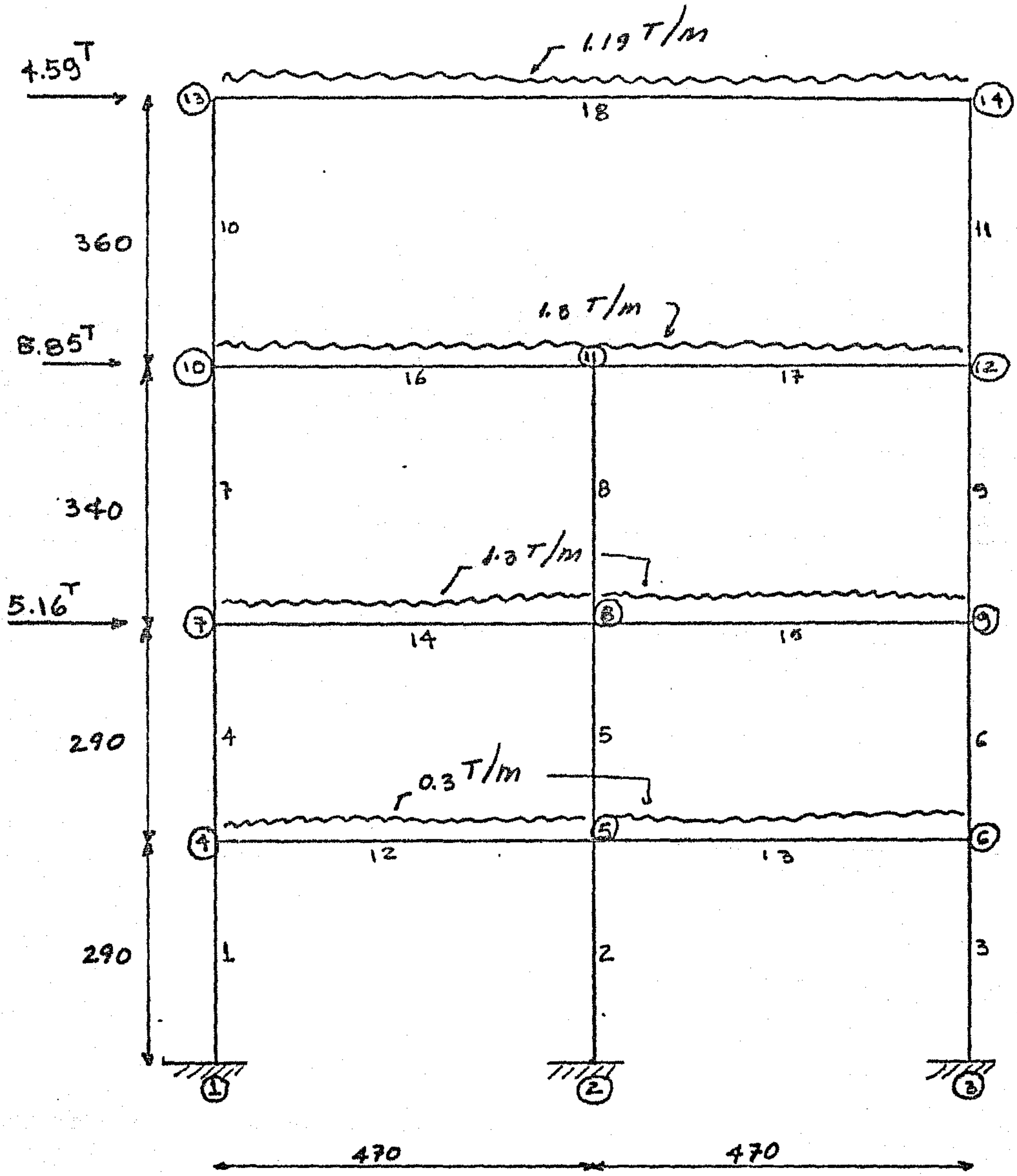
I.2 DESCRIPCION GENERAL Y EJEMPLO DE APLICACION DEL SISTEMA "STRESS".

Structural Enginnering System Solver (STRESS), es un sistema de programación para resolver problemas de Ingeniería Estructural, generado inicialmente para el computador IBM-1130, y adaptado posteriormente al B-6700.

Este sistema aunque en la actualidad resulta costoso debido al demasiado tiempo del computador que consume, llega a ser muy interesante ya que sienta las bases de muchos de los programas que posteriormente se desarrollarían. El sistema está compuesto de dos partes: Una que interpreta y valída los datos de la estructura y otra que realiza operaciones y produce los resultados deseados. Con el sistema podemos analizar estructuras con miembros prismáticos en dos o tres dimensiones, con nudos empotrados o articulados, con condiciones de carga concentrada y distribuida, con movimientos en los apoyos o efectos de temperatura.

El programa usa el Método de las Rigideces para obtener las acciones en los extremos de los miembros, desplazamiento de los nudos, reacciones y desplazamientos de los apoyos. Está escrito en Fortran y Assembler. Este programa generado hace poco más de veinte años, tuvo tanta aceptación que en la actualidad todavía se mantiene en uso.

EJEMPLO: SISTEMA "STRESS"



```
STRUCTURE EJE 1 TESIS JOSE E NOLASCO
TYPE PLANE FRAME
NUMBER OF JOINTS   14
NUMBER OF MEMBERS  18
NUMBER OF SUPPORTS  3
NUMBER OF LOADINGS  2
JOINT COORDINATES
 1      0.00      0.00     S
 2      4.70      0.00     S
 3      9.40      0.00     S
 4      0.00      2.90
 5      4.70      2.90
 6      9.40      2.90
 7      0.00      5.80
 8      4.70      5.80
 9      9.40      5.80
10      0.00      9.20
11      4.70      9.20
12      9.40      9.20
13      0.00     12.80
14      9.40     12.80
MEMBER PROPERTIES PRISMATIC
 1 AX 0.18 IZ 0.0054
 2 AX 0.12 IZ 0.0016
 3 AX 0.18 IZ 0.0054
 4 AX 0.18 IZ 0.0054
 5 AX 0.12 IZ 0.0016
 6 AX 0.18 IZ 0.0054
 7 AX 0.18 IZ 0.0054
 8 AX 0.12 IZ 0.0016
 9 AX 0.18 IZ 0.0054
10 THRU 11 AX 0.18 IZ 0.0054
12 THRU 13 AX 0.10 IZ 0.00133333
14 THRU 18 AX 0.24 IZ 0.00320000
MEMBER INCIDENCES
 1      1      4
 2      2      5
 3      3      6
 4      4      7
 5      5      8
 6      6      9
 7      7     10
 8      8     11
 9      9     12
10     10     13
11     12     14
12      4      5
13      5      6
14      7      8
15      8      9
16     10     11
17     11     12
18     13     14
CONSTANTS E 1414200.0 ALL
```

```
TABULATE ALL
LOADING 1 CARGAS VERTICALES
MEMBER LOADS
12 THRU 13 FORCE Y UNIFORM -0.3
14 THRU 17 FORCE Y UNIFORM -1.3
18 FORCE Y UNIFORM -1.19
LOADING 2 CARGAS POR SISMO
JOINT LOADS
 7 FORCE Y 5.16
10 FORCE X [illegible].85
13 FORCE X 4.59
SOLVE
PROBLEM CORRECTLY SPECIFIED, EXECUTION TO PROCEED.
```

STRUCTURE EJE 1 TESIS JOSE E NOLASCO

LOADING 1 CARGAS VERTICALES

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	12.553	-0.055	-0.08
1	4	-12.553	0.055	-0.07
2	2	13.339	-0.000	0.00
2	5	-13.339	0.000	-0.00
3	3	12.553	0.055	0.08
3	6	-12.553	-0.055	0.07
4	4	11.828	-0.598	-0.52
4	7	-11.828	0.598	-1.21
5	5	11.968	0.000	0.00
5	8	-11.968	-0.000	-0.00
6	6	11.828	0.598	0.52
6	9	-11.828	-0.598	1.21
7	7	8.850	-0.213	-0.87
7	10	-8.850	0.213	0.15
8	8	5.705	0.000	0.00
8	11	-5.705	-0.000	0.00
9	9	8.850	0.213	0.87
9	12	-8.850	-0.213	-0.15
10	10	5.593	-3.031	-3.11
10	13	-5.593	3.031	-7.79
11	12	5.593	3.031	3.11
11	14	-5.593	-3.031	7.79
12	4	-0.543	0.724	0.59
12	5	0.543	0.685	-0.50
13	5	-0.543	0.685	0.50
13	6	0.543	0.724	-0.59
14	7	0.385	2.978	2.08
14	8	-0.385	3.131	-2.44
15	8	0.385	3.131	2.44
15	9	-0.385	2.978	-2.08
16	10	-2.817	3.257	2.96
16	11	2.817	2.852	-2.01
17	11	-2.817	2.852	2.01
17	12	2.817	3.257	-2.96
18	13	3.031	5.593	7.79

18	14	-3.031	5.592	-7.79

APPLIED JOINT LOADS, FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
4	0.000	0.000	0.00
5	-0.000	0.000	0.00
6	0.000	0.000	-0.00
7	-0.000	0.000	0.00
8	0.000	-0.000	0.00
9	-0.000	-0.000	-0.00
10	0.000	-0.000	0.00
11	-0.000	-0.000	0.00
12	0.000	0.000	-0.00
13	0.000	-0.000	0.00
14	-0.000	-0.000	0.00

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	0.055	12.553	-0.08
2	0.000	13.339	0.00
3	-0.055	12.553	0.08

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	ROTATION
4	-0.0000	-0.0001	0.0000
5	0.0000	-0.0002	-0.0000
6	0.0000	-0.0001	-0.0000
7	0.0000	-0.0002	-0.0001
8	0.0000	-0.0004	-0.0000
9	-0.0000	-0.0002	0.0001
10	-0.0000	-0.0003	0.0001
11	0.0000	-0.0005	-0.0000
12	0.0000	-0.0003	-0.0001
13	0.0000	-0.0004	-0.0010
14	-0.0000	-0.0004	0.0010

STRUCTURE EJE 1 TESIS JOSE E NOLASCO

LOADING 2 CARGAS POR SISMO

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	-12.964	7.142	20.12
1	4	12.964	-7.142	0.59
2	2	0.029	4.259	8.05
2	5	-0.029	-4.259	4.29
3	3	12.934	7.193	20.16
3	6	-12.934	-7.193	0.69
4	4	-9.863	5.824	7.21
4	7	9.863	-5.824	9.67
5	5	0.023	7.013	9.22
5	8	-0.023	-7.013	11.11
6	6	9.839	5.756	7.08
6	9	-9.839	-5.756	9.60
7	7	-4.539	3.621	4.79
7	10	4.539	-3.621	7.51
8	8	-0.001	6.227	9.94
8	11	0.001	-6.227	11.22
9	9	4.541	3.588	4.78
9	12	-4.541	-3.588	7.41
10	10	-1.173	2.276	2.69
10	13	1.173	-2.276	5.50
11	12	1.173	2.312	2.80
11	14	-1.173	-2.312	5.52
12	4	-1.317	-3.100	-7.80
12	5	1.317	3.100	-6.76
13	5	1.436	-3.094	-6.75
13	6	-1.436	3.094	-7.78
14	7	2.955	-5.323	-14.47
14	8	-2.955	5.323	-10.54
15	8	2.168	-5.298	-10.51
15	9	-2.168	5.298	-14.39
16	10	7.503	-3.366	-10.21
16	11	-7.503	3.366	-5.61
17	11	1.275	-3.368	-5.61
17	12	-1.275	3.368	-10.21
18	13	2.313	-1.173	-5.50
18	14	-2.313	1.173	-5.52

APPLIED JOINT LOADS, FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
4	-0.000	-0.000	0.00
5	-0.000	-0.000	0.00
6	0.000	0.000	-0.00
7	5.159	0.000	-0.00
8	-0.000	-0.000	0.00
9	0.000	-0.000	0.00
10	8.848	-0.000	0.00
11	-0.000	-0.000	0.00
12	-0.000	-0.000	0.00
13	4.589	0.000	0.00
14	-0.000	-0.000	0.00

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

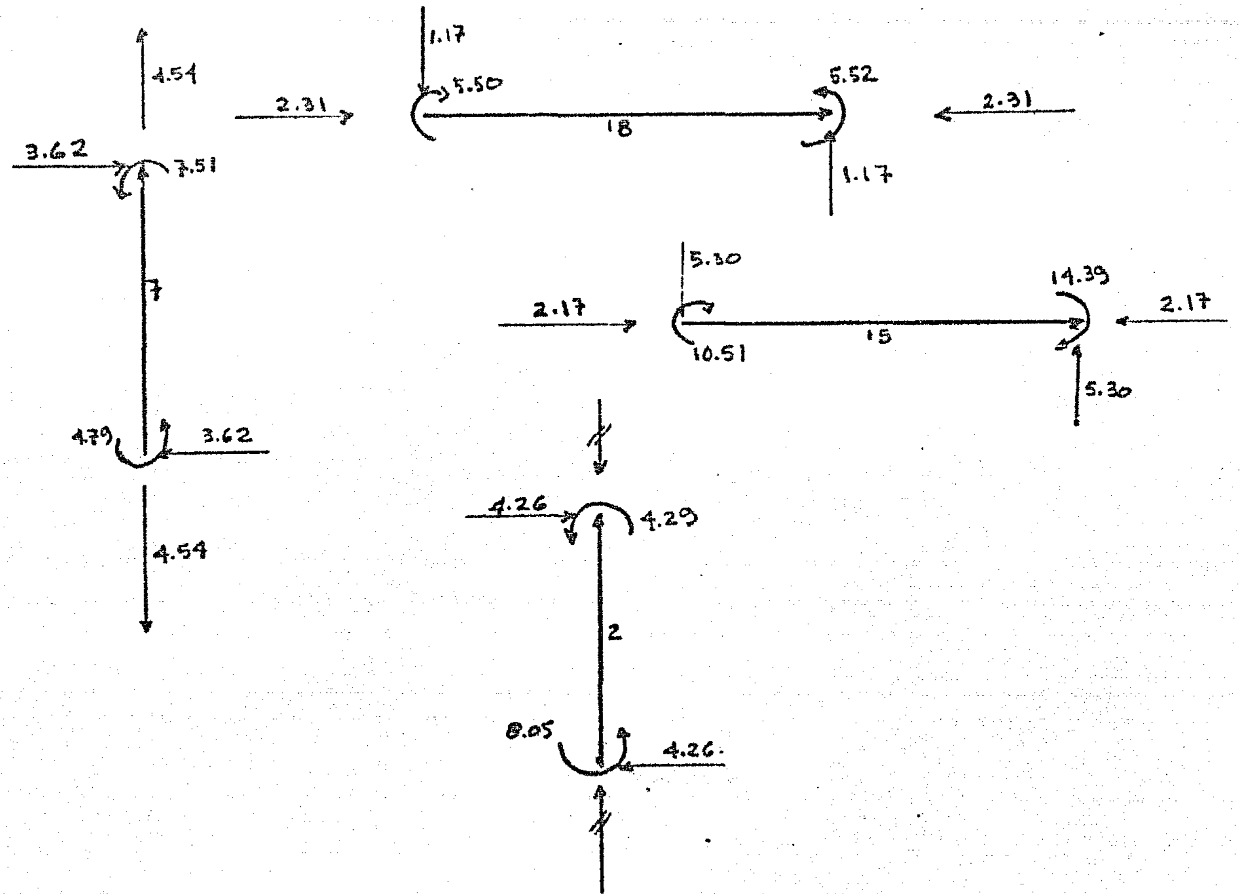
JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	-7.142	-12.964	20.12
2	-4.259	0.029	8.05
3	-7.193	12.934	20.16

FREE JOINT DISPLACEMENTS

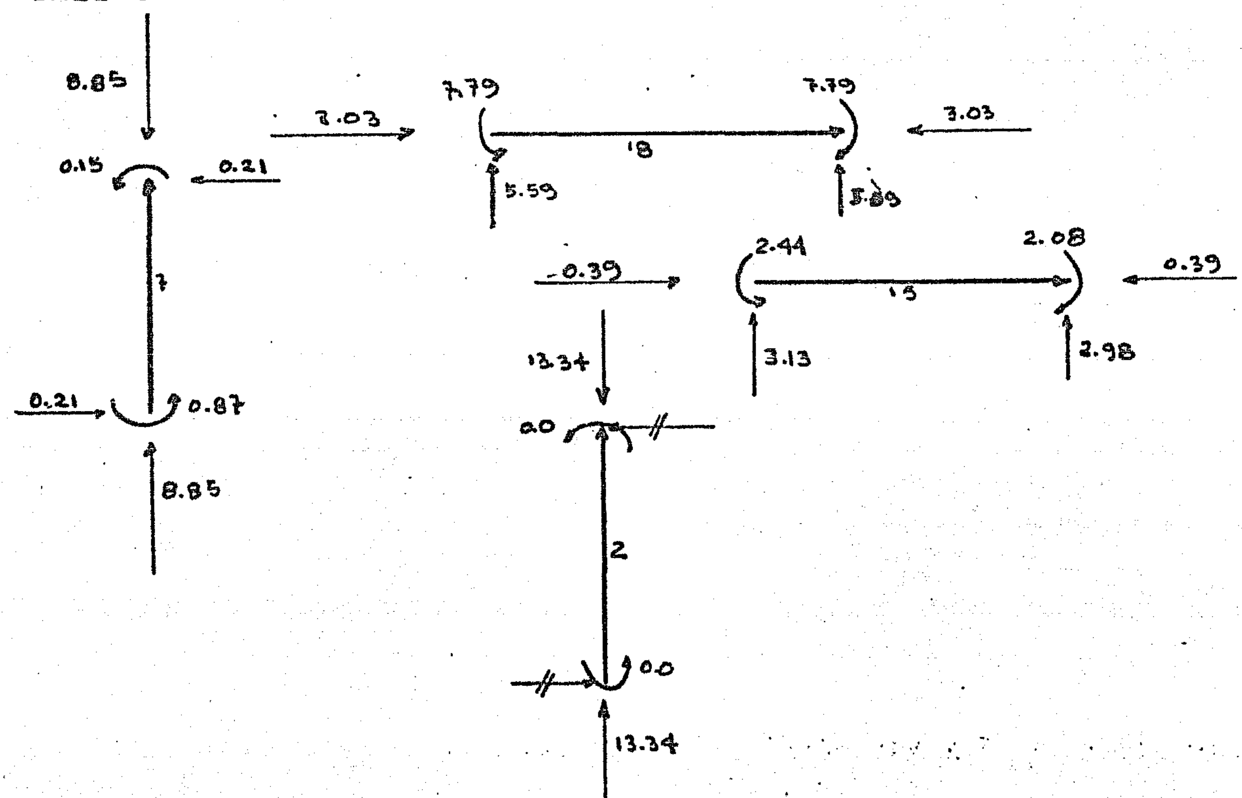
JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	ROTATION
4	0.0072	0.0001	-0.0037
5	0.0073	-0.0000	-0.0024
6	0.0072	-0.0001	-0.0036
7	0.0189	0.0002	-0.0032
8	0.0186	-0.0000	-0.0012
9	0.0188	-0.0002	-0.0032
10	0.0304	0.0003	-0.0026
11	0.0303	-0.0000	-0.0002
12	0.0303	-0.0003	-0.0025
13	0.0398	0.0003	-0.0019
14	0.0398	-0.0003	-0.0019

INTERPRETACION DE RESULTADOS

ANALISIS POR SISMO



ANALISIS POR CARGAS VERTI-
CALES.



I.3 DESCRIPCION GENERAL Y EJEMPLO DE APLICACION DEL SISTEMA "CECAFI-ESTRUCTURAS".

Este Sistema fue desarrollado en la Facultad de Ingeniería -- para el Computador B-6700 de la UNAM, con el fin de poder --- dar a los alumnos un servicio en la solución de problemas --- de tipo académico, en cuanto al análisis de estructuras se re fiere, aunque los límites de su capacidad están por encima -- de cualquiera de estos.

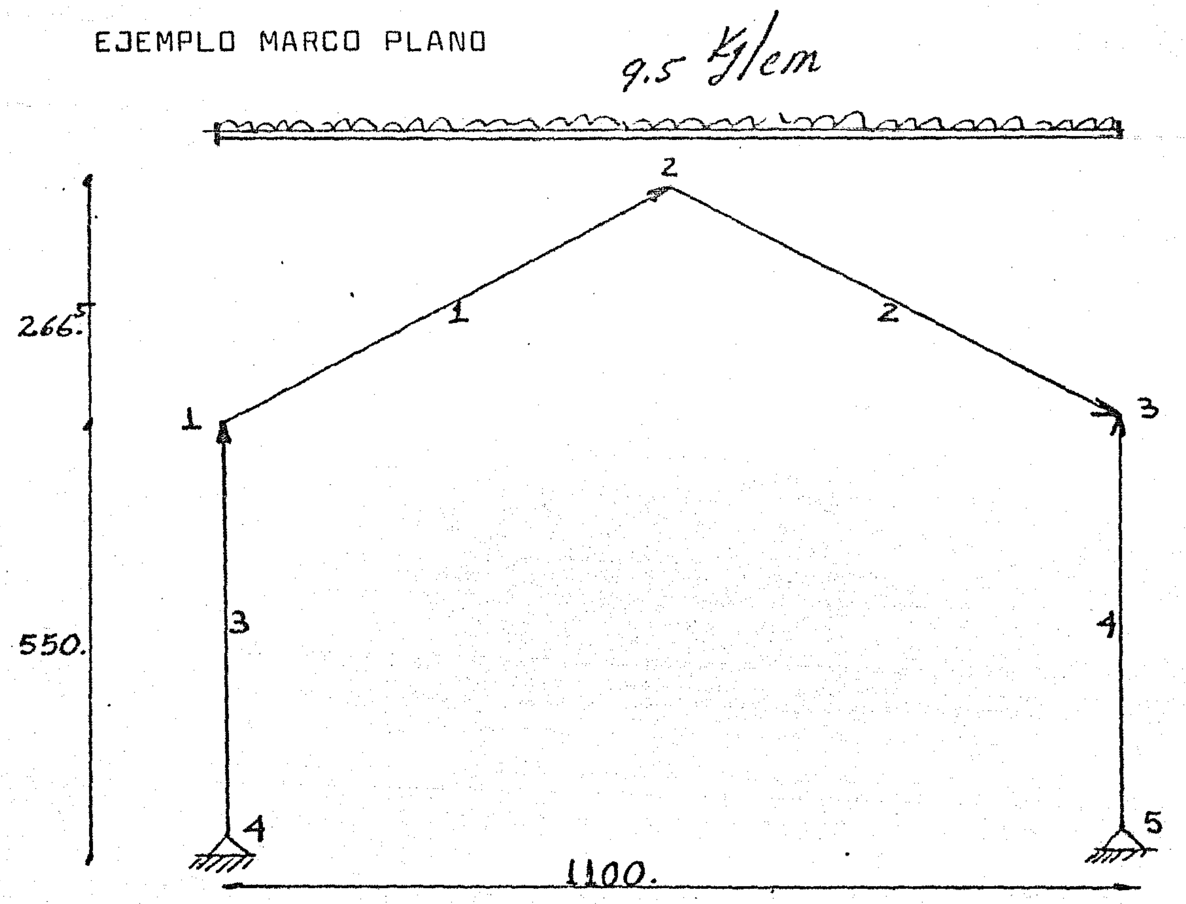
Su autor el Ing. Carlo~~s~~ Ramos Larios, establece la solución - para tres tipos de problemas:

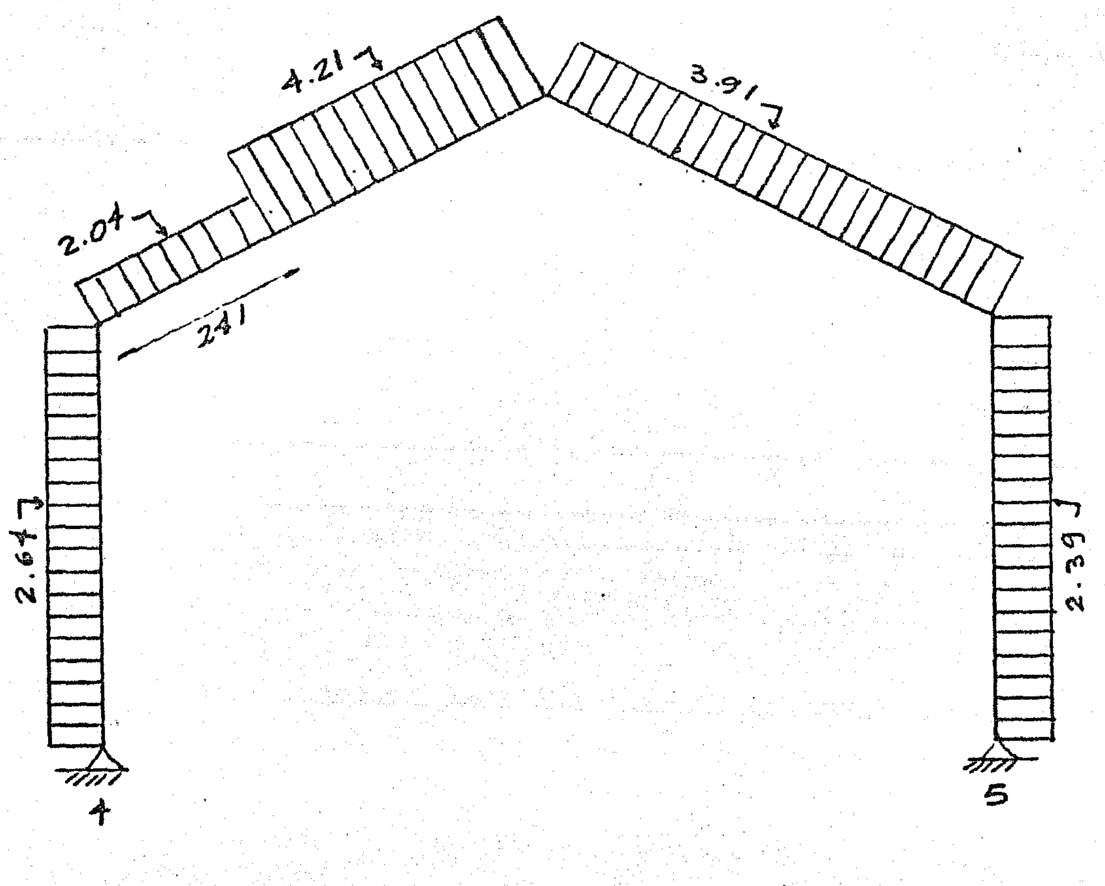
1) ARMADURAS PLANAS (ARPLA)
2) MARCOS PLANOS (MARPLA)
3) ARMADURAS ESPACIALES (ARES)

El Sistema usa el Método de las Rigideces y todas sus partes - están desarrolladas con Lenguaje Algol. Su capacidad se limita a: 1023 Nudos, 1023 Apoyos, 1023 Barras, 10 Condiciones de Carga Independientes y 10 Condiciones de Carga Dependientes -- (Combinaciones).

La forma de dar datos, a este Sistema, es muy semejante a la - usada en el Sistema Stress. Se muestra enseguida un ejemplo - con el fin de dar una idea, más amplia, de la forma en que se- manejan los programas o sistemas existentes sobre el tema.

EJEMPLO MARCO PLANO





M A R C O   P L A N O
DATOS

** ANALISIS MARCO1 **

NUMERO DE NUDOS 5
NUMERO DE APOYOS 0
NUMERO DE BARRAS 4
NUMERO DE CONDICIONES DE CARGA INDEPENDIENTES. . 2
NUMERO DE CONDICIONES DE CARGA DEPENDIENTES. . . 0

PROPIEDADES DE LAS SECCIONES

BARRAS DE	A	AREA NORMAL	MOM. INERCIA CENTROIDAL	AREA EFECTIVA DE CORTANTE
1:	4	20.0000	1257.0000	16.6700

CONSTANTES ELASTICAS

BARRAS DE	A	E	NU
1:	4	2100000.000	0.300

INCIDENCIAS

BARRA	DE	A
1	1	2
2	2	3
3	4	1
4	5	3

COORDENADAS

JUNTA	X	Y
1	0.000	700.000
2	550.000	837.500
3	1100.000	700.000
4	0.000	0.000
5	1100.000	0.000

RESTRICCIONES DE DESPLAZAMIENTO

NUDO	DIRECCION RESTRINGIDA
4	X
4	Y
5	X
5	Y

CONDICIONES DE CARGA

1A.- DISTRIBUCION DE CARGA MUERTA

FUERZAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS EN LOS MIEMBROS EN SISTEMA GLOBAL

BARRA	WY	LA	LB	WX
1	-9.500	0.000	566.927	0.000
2	-9.500	0.000	566.927	0.000

2A.- DISTRIBUCION CARGA POR VIENTO

FUERZAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS EN LOS MIEMBROS EN SISTEMA LOCAL

BARRA	WY	LA	LB	WX
1	-2.040	0.000	241.000	0.000
1	-4.210	241.000	566.900	0.000
2	-3.910	0.000	566.927	0.000
3	2.640	0.000	700.000	0.000
4	2.390	0.000	700.000	0.000

ANCHO MAXIMO DE BANDA= 12

==

M A R C O   P L A N O
RESULTADOS

**** ANALISIS MARCO1 ****

DISTRIBUCION DE CARGA MUERTA

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS

NUDO	DES-X	DES-Y	GIRO-Z
1	-6.8092	-0.0898	-0.0508
2	2.8280E-07	-27.4155	8.9858E-11
3	6.8092	-0.0898	0.0508
4	0.0000	0.0000	0.0399
5	0.0000	0.0000	-0.0399

DESPLAZAMIENTOS DE LOS APOYOS

APOYO	DES-X	DES-Y	GIRO-Z

ELEMENTOS MECANICOS EN LAS BARRAS

BARRA	JUNTA	AXIAL	CORTANTE	MOMENTO
1	1	2253.902	4988.087	683772.160
1	2	-947.652	236.913	663012.296
2	2	947.652	236.913	-663012.296
2	3	-2253.902	4988.087	-683772.165
3	4	5385.807	-976.817	-3.815E-06
3	1	-5385.807	976.817	-683772.160
4	5	5385.807	976.817	0.000
4	3	-5385.807	-976.817	683772.165

EQUILIBRIO DE LOS NUDOS

NUDO	F-X	F-Y	M-Z
1	0.0000	-0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	-0.0000
3	0.0000	-0.0000	0.0000
4			-0.0000
5			0.0000

REACCIONES

APOYO	F-X	F-Y	M-Z
4	976.817	5385.807	
5	-976.817	5385.807	

M A R C O   P L A N O
RESULTADOS

** ANALISIS MARCO1 **

DISTRIBUCION CARGA POR VIENTO

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS

NUDO	DES-X	DES-Y	GIRO-Z
1	-85.3374	-0.0499	0.0275
2	-82.7073	-10.6305	-0.0236
3	-80.0608	-0.0160	0.0672
4	0.0000	0.0000	0.1761
5	0.0000	0.0000	0.1444

DESPLAZAMIENTOS DE LOS APOYUS

APOYO	DES-X	DES-Y	GIRO-Z

ELEMENTOS MECANICOS EN LAS BARRAS

BARRA	JUNTA	AXIAL	CORTANTE	MOMENTO
1	1	1084.884	2817.351	905228.784
1	2	-1084.884	-953.672	248911.487
2	2	508.464	1352.009	-248911.487
2	3	-508.464	864.676	387052.725
3	4	2996.355	-2217.184	-3.481E-05
3	1	-2996.355	369.184	-905228.784
4	5	962.179	-1389.432	1.144E-05
4	3	-962.179	-283.568	-387052.725

EQUILIBRIO DE LOS NUDOS

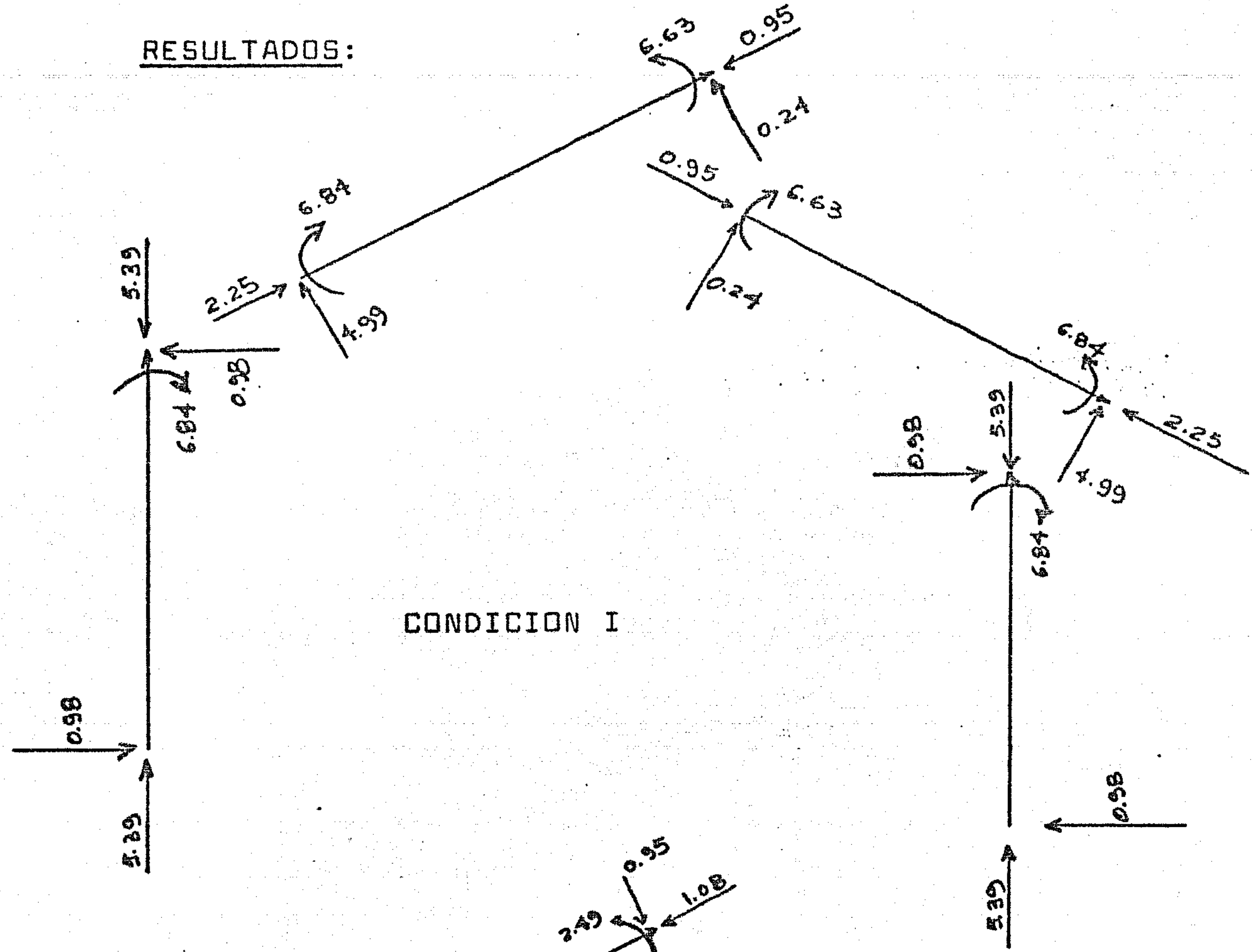
NUDO	F-X	F-Y	M-Z
1	0.0000	-0.0000	-0.0000
2	-0.0001	0.0000	0.0000
3	0.0000	-0.0000	-0.0000
4			-0.0000
5			0.0000

REACCIONES

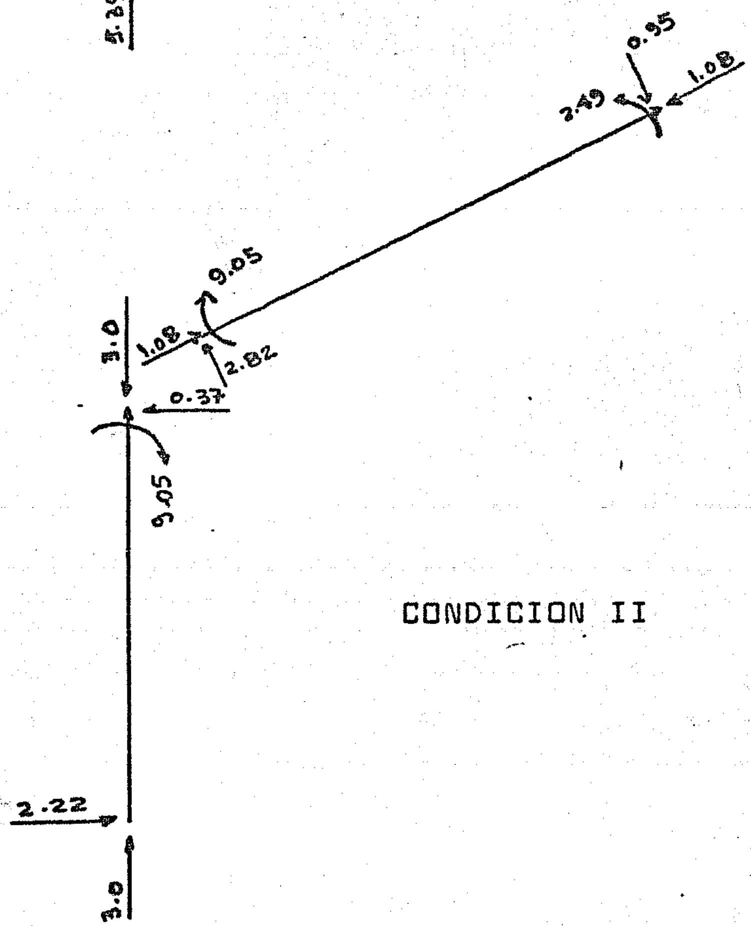
APOYO	F-X	F-Y	M-Z
4	2217.184	2996.355	
5	1389.432	962.179	

```
=================================================================
                              M A R C O   P L A N O
                                TARJETAS LEIDAS
=================================================================

    ** ANALISIS MARCO1 **
-----------------------------------------------------------------
  5 NUDOS, 0 APOYOS, 4 BARRAS, 2 INDEP, 0 DEP
* AREAS EN CENTIMETROS CUADRADOS
* MOMENTOS DE INERCIA EN CENTIMETROS CUARTOS
 1:4 AX 20.0  IZ 1257.0  IY  16.67
# CONSTANTES ELASTICAS : MODULO DE ELASTICIDAD
 1:4 E 2100000.0
#
NO HAY EXPANCION TERMICA
* INCIDENCIAS DE LAS BARRAS
  1   1   2
  2   2   3
  3   4   1
  4   5   3
COORDENASDAS DE LAS JUNTAS (1)
  1 0.0  700.
  2 550.  837.5
  3  1100.0  700.
  4  0.0   0.0
  5  1100.   0.0
 HAY 4 NUDOS RESTRINGIDOS
 EL NUDO 4 EN X 0
 EL NUDO 4 EN Y 1
 EL NUDO 5 EN X 0
 EL NUDO 5 EN Y 1
 NO HAY NUDOS INCLINADOS RESTRINGIDOS
 DISTRIBUCION DE  CARGA MUERTA
 CON 1 TIPO DE CARGA
 TIPO 6 UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN EL SIST. GLOBAL
  1   WY   -9.5
  2   WY   -9.5
#
 DISTRIBUCION CARGA POR VIENTO
CON 1 TIPO DE CARGA
 TIPO 7 UNIFORME SISTEMA LOCAL
  1   WY -2.04 LA 0.0  LB 241.0
  1   WY -4.21  LA 241.0  LB 566.9
  2   WY -3.91
  3   WY  2.64
  4   WY  2.39
#

=================================================================
```

RESULTADOS:



CONDICION I



CONDICION II

ACCIONES DE NUDO SOBRE BARRA

I.4 DESCRIPCION GENERAL DE LOS PROGRAMAS "TABS", "NASTRAN" Y OTROS.

Un estudio de Análisis Estructural que logró tener amplia -- aceptación en México y que es usado todavía con frecuencia - es el Programa para "THE STATIC AND EARTHQUAKE ANALISIS FRAME AND SHEAR WALL THREE DIMENSIONAL BUILDINGS" (TABS); desarrollado en la Universidad de California, (Berkeley, California, E.U.), durante 10 años y con la asistencia técnica y -- económica de varias Compañías.

El procedimiento y el Programa para Computador están desarrollados para análisis estructural lineal de marcos y muros de cortante, de edificios sujetos a cargas estaticas y sísmicas. Los edificios son idealizados como un sistema de marcos y muros independientes e interrelacionados con un Diagrama de -- Piso. Se consideran edificios no simétricos y además no rectangulares, esto se logra considerando a los marcos y a los muros como subestructuras en la formulación con lo que para muchas estructuras la presentación de datos puede ser minimizada, con una significante reducción en el tiempo de Computador.

El Lenguaje usado es Fortran en todo el Programa. Costa de 15 Subrutinas con un módulo principal que en total agrupan - a 1184 instrucciones.

Otro de los Programas que han sido desarrollados para el análisis estructural, es el Programa MSL/NASTRAN (NASA STRUCTURAL ANALISIS); que costa de aproximadamente 430,000 instrucciones agrupadas en 200 módulos o rutinas, comunicados entre sí por un control ejecutivo. El Lenguaje interno del Programa es Fortran aunque hace uso de un Lenguaje superior extra para el manejo de matrices (DMAP).

Este Programa ha sido diseñado para el tratamiento de problemas extensos, con muchos grados de libertad, involucrando en el análisis numérico tres operaciones básicas: Descomposición de Matrices, Extracción de Autovalores e Integración de Ecuaciones diferenciales; o sea, aplicando las técnicas del elemento finito, aproximándose así a un modelo más cercano a la realidad. "Esto conduce a un mejor dimensionamiento de la estructura, pero se requiere poseer un buen conocimiento sobre los fundamentos teóricos de esas técnicas y contar, además, con una buena infraestructura en lo referente a capacidad de cómputo" (   ).

El Programa pude resolver problemas de casi cualquier tipo como pudieran ser de análisis estático y dinámico, análisis de estabilidad, de transferencia de calor, de hidroelasticidad, aereoelasticidad, etc.

Extra, podemos citar una gran variedad de Programas que se encargan no sólo del análisis, sino también del diseño: Programas para el análisis y diseño de Torres de Transmisión, análisis de Puentes, de Chimeneas Industriales, de análisis y diseño de armaduras en el espacio, etc., etc. Sin embargo en México poco de esto se ha hecho y si se ha hecho poco valor se le ha asignado tal que, en este sentido, aunque se pudieran desarrollar grandes cosas mucho, si no es que todo, es importado lo cual hace que en la mayoría de las ocasiones los costos se eleven y la dependencia tecnológica se acreciente.

II. ALGEBRA MATRICIAL

II.1 INTRODUCCION

Aunque en este tema no hacemos un estudio matricial completo y detallado, procuraremos que el estudiante afiance u obtenga los conocimientos necesarios para que adquiera las herramientas y la habilidad requeridas, como indispensables, en los siguientes capítulos sobre el manejo de matrices.

En análisis estructural de la facilidad y la rapidez, con que un sistema de ecuaciones pueda resolverse, depende en muchas ocasiones el que llegue o no a ser costeable un estudio de este tipo. La solución del sistema de ecuaciones representa la mayor parte del tiempo en el proceso de obtención de los elementos mecánicos y deformaciones de una estructura. Para estructuras de pocos grados de libertad puede ser más práctico y más barato el manejo de este tipo de problemas manualmente, mas no así en aquellos problemas en el que el grado de hiperestaticidad se eleva demasiado que ni con el uso de calculadoras de escritorio sería posible su solución; la presencia de computadoras de gran capacidad se hace entonces necesaria y con ello de programas de computador. El realizar programas para resolver sistemas de ecuaciones por alguno de los métodos existentes, puede ser el primer paso para que el alumno se introduzca en el manejo de las computadoras, siendo estas ya una herramienta indispensable en el área de estructuras.

Para problemas de análisis estructural se ha probado que el Método de Cholesky ha llegado a ser el más apto para la solución de sistemas de ecuaciones. Mostramos el diagrama de flujo de la parte importante del Método, con lo cual se puede formar el programa correspondiente si se desea.

Por último, cabe hacer mención, el uso del "Sistema CECAFI-MATRICES" adaptado al computador de la Universidad y con el cual se da una herramienta al alumno que desea evitarse el cálculo fastidioso del manejo de matrices, y una idea de lo que puede llegarse a hacer con un computador.

II.2 ALGEBRA MATRICIAL

a). DEFINICION Y NOTACION

Una matriz es un arreglo rectangular de números u operadores lineales que obedecen a ciertas reglas de tal forma que un arreglo de $m \times n$ es una matriz de m renglones por n columnas, queda denotada como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El elemento situado en el renglón i y en la columna j se representa con la notación a_{ij}.

b). CLASES DE MATRICES

b.1). Matrices Vector. Matrices que constan de un sólo renglón o de una sola columna.

Matriz Columna:

$$\{u\} = [u] = [u_i] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad ; \quad i = 1,m$$

b.2). Matriz Cuadrada. Es aquella en la cual el número de renglones es igual al número de columnas; esto es: $m = n$

b.3) Matriz Diagonal. Es una matriz cuadrada en la -- cual los elementos a_{ij} son cero para toda $i \neq j$.

b.4) Matriz Simétrica. Es una matriz cuadrada tal que sus elementos guardan simetría con respecto a la- diagonal principal es decir $a_{ij} = a_{ji}$ tal que $j \neq i$.

b.5) Matriz Banda. Es una matriz cuadrada tal que los elementos que no son cero están agrupados a los - lados de la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

b.6) Matriz Triangular. Es una matriz cuadrada en la- que todos los elementos a un lado de la diagonal- principal son cero. Se dice que es triangular inferior cuando los elementos que están arriba de - dicha diagonal son cero, en caso contrario, que - los elementos abajo de la diagonal sean cero, se- denomina triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b.7). Matriz Identidad. Es aquella que obedece a la -- propiedad:

$$aij = 1, /; i = j$$

$$aij = 0, /; i \neq j$$

esto es:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Una matriz identidad tiene propiedades análogas a- las propiedades aritméticas de la unidad; así que:

$$IA = AI = A$$

b.8) Matriz Recíproca o Inversa.

Sean las matrices A y B tal que

$$AB = I$$

Se dice entonces que B es la matriz recíproca o -- inversa de A y viceversa. La notación usada a -- efecto es A^{-1} que significa la matriz inversa de - A.

b.9). Matriz Transpuesta. Es una matriz que se obtiene- transponiendo los renglones por las columnas y vi- ceversa. Se denota como A^T , dándose que:

$$A^T ij = Aji$$

c). PROPIEDADES Y OPERACIONES

c.1). Suma de Matrices. La suma de matrices A_{ij} de orden m x n y la matriz B_{ij} de m x n es la matriz $A_{ij} + B_{ij}$ por lo tanto las dos matrices que se suman deben tener el mismo número de renglones y columnas o sea el mismo orden.

c.2). Multiplicación de Matrices. La multiplicación de una matriz A por otra B está dada por:

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{ij}$$

Esto es el elemento C_{ij} se obtiene efectuando el producto del renglón i de la matriz A por la columna j de B.

Nótese que para multiplicar dos matrices se requiere que la primera tenga un número de columnas igual al número de renglones de la segunda.

En general el producto de dos matrices no es conmutativo, por lo que se debe hablar de premultiplicar (C = AT). Si los factores son matrices simétricas se puede efectuar $C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} \cdot B_{jr}$ esto es, productos de renglones por renglones.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 29 \\ 18 & 46 \\ 58 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 75 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 75 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & -50 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.4 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

c.3). Propiedades:

Asociativa: $A(BC) = (AB)C = ABC$
y Distributiva: $A(B+C) = AB + AC$,

y

$$(B+C)A = BA + CA$$

c.4). Lemas:

- El inverso de un producto es el producto de los inversos cambiando el orden de la multiplicación:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

- Una matriz simétrica no singular (su determinante es distinto de cero) es siempre igual al producto de una matriz triangular inferior por su transpuesta.

- La recíproca de una matriz simétrica es simétrica también.

- La recíproca de una matriz triangular inferior es otra triangular inferior con los elementos de la diagonal iguales a los recíprocos de los elementos de la diagonal de la matriz a invertir.

II.3 ECUACIONES MATRICIALES. (DESCRIPCION)

En estática y dinámica estructurales, es común el tener que resolver sistemas de ecuaciones, estos generalmente se presentan del tipo homogéneo (N incógnitas, N ecuaciones) y podemos representarlos como:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\
a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\
a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 + \cdots + a_{3n}\ x_n = b_3 \\
\vdots \\
a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + a_{n3}\ x_3 + \cdots + a_{nn}\ x_n = b_n
\end{array}
$$

donde de acuerdo a la multipliación de matrices y agrupando matricialmente tendremos:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

o simplemente aplicando la Notación Matricial; y donde el significado de los miembros es obvio:

$$\underline{AX = B}$$

Aquí podemos visualizar la solución del sistema de ecuaciones en forma más directa, ya sea aplicando "La Regla de Cramer":

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \text{etc.}$$

o invirtiendo la matriz A tal que si

$$A\,X = B$$

$$X = A^{-1}\,B$$

En este tipo de problemas el concepto de matriz inversa es -- el más comunmente usado por su mejor manejabilidad debido a las características del Sistema de Ecuaciones que en estática y dinámica son especiales y debido también a la facilidad con que-- se pueden computarizar los diferentes métodos de inversión.

II.4 INVERSION DE MATRICES POR EL METODO DE GAUSS-JORDAN

Este método, también conocido como el método de eliminación -- - completa, consiste en convertir a la matriz $\left[A\right]$ que se desea--- en una matriz rectangular tal que la matriz quede formada por - dos partes; $\left[A : I\right]$ esto se logra añadiendo a la derecha, como se muestra, una matriz identidad $\left[I\right]$ del mismo orden que la matriz- $\left[A\right]$. Esta matriz se somete a una serie de eliminaciones tratando de trasladar la matriz $\left[I\right]$ a la izquierda logrando, una vez que la matriz $\left[A\right]$ quede como identidad, que la matriz de la dere-- cha sea $\left[A^{-1}\right]$, esto ~~e~~s: $\left[I : A^{-1}\right]$.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 14/3 & 4/3 & 3/4 \\ 4/3 & 11/3 & 3/8 \\ 3/4 & 3/8 & 9/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi 3 \\ \phi 4 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema quedaría expresada como:

$$\begin{bmatrix} \phi 3 \\ \phi 4 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/3 & 4/3 & 3/4 \\ 4/3 & 11/3 & 3/8 \\ 3/4 & 3/8 & 9/16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 24 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expresión que se puede representar como:

$$X = A^{-1}B$$

Obtengamos A^{-1}

Sea:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 14/3 & 4/3 & 3/4 & 1.0 & 0 & 0 \\ 4/3 & 11/3 & 3/8 & 0 & 1.0 & 0 \\ 3/4 & 3/8 & 9/16 & 0 & 0 & 1.0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{1}) \\ (\underline{2}) \\ (\underline{3}) \end{array}$$

El número a la derecha servirá para indicar el proceso - que se efectúa, en cada renglón, y su orden.

1a. ELIMINACION

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1.0000 & 0.2857 & 0.1607 & 0.2143 & 0 & 0 \\ 0 & 3.2857 & 0.1607 & -0.2857 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.1607 & 0.4420 & -0.1607 & 0 & 1.0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{4}) = (\underline{1})/\ (\ 14/3\ ) \\ (\underline{5}) = (\underline{4})\ *(-4/3)+(\underline{2}) \\ (\underline{6}) = (\underline{4})\ *(-3/4)+(\underline{3}) \end{array}$$

2a. ELIMINACION

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1.0 & 0 & 0.1467 & 0.2391 & -0.0869 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.0489 & -0.0869 & 0.3044 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4341 & -0.1467 & -0.0489 & 1.0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{8}) = (\underline{7})*(-0.2857)+(\underline{4}) \\ (\underline{7}) = (\underline{5})/3.2857 \\ (\underline{9}) = (\underline{7})*(-0.1607)+(\underline{6}) \end{array}$$

3a. ELIMINACION

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1.0 & 0 & 0 & 0.2887 & -0.0704 & -0.3380 \\ 0 & 1.0 & 0 & -0.0704 & 0.3099 & -0.11267 \\ 0 & 0 & 1.0 & -0.3380 & -0.11267 & 2.3036 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\underline{12})=(\underline{10})*(-0.1467)+(\underline{8}) \\ (\underline{11})=(\underline{10})*(-0.0489)+(\underline{7}) \\ (\underline{10})=(\underline{9})/0.4341 \end{array}$$

El sistema de ecuaciones quedaría expresado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \text{o}3 \\ \text{o}4 \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2887 & -0.0704 & -.3380 \\ -0.0704 & 0.3099 & -0.11267 \\ -0'3380 & -0.11207 & 2.3036 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24.0 \\ -12.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi 3 \\ \phi 4 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.7746 \\ -5.4085 \\ -6.7606 \end{bmatrix}$$ (Solución final del problema)

Efectuando algunas consideraciones y observando el procedimiento podemos desarrollar programas de computadoras -- que efectúan el proceso en un tiempo razonable. A continuación se presenta un programa que invierte una matriz - utilizando este método.

```
C     PROGRAMA QUE INVIERTE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN
C     N X N, UTILIZANDO EL METODO DE GAUSS-JORDAN
      DIMENSION  A  (50,50)
      LL=5
      II=6
C     LECTURA E IMPRESION DE DATOS
C     N= ORDEN DE LA MATRIZ
C     LA LECTURA DE LA MATRIZ ES POR RENGLONES, ACEPTANDOSE --
C     LAS TARJETAS DE CONTINUACION QUE SEAN NECESARIAS HASTA -
C     COMPLETAR EL RENGLON.  PARA CADA CAMBIO DE RENGLON HAY -
C     CAMBIO DE TARJETA.
      READ (LL,10)N
 10   FORMAT (I5)
      WRITE (II,20) N, N
 20   FORMAT (1H1, / /, 40X,52H INVERSION DE MATRICES POR EL -
     - METODO DE GAUSS-JORDAN, //. 48X, 28H DATOS DE LA MATRIZ-
      -ORDEN, I3, 1H, I3, /).
      DO 1 I=1,N
      READ (LL,11)  (A(I,J), J=1,N)
    1 CONTINUE
   21 FORMAT (/,10X,8H RENGLON:,I3,/,10F12.4)
C     COMIENZA PROCESO DE INVERSION
C     EL PROGRAMA NO ACEPTA ELEMENTOS EN LA DIAGONAL
C     PRINCIPAL IGUALES A CERO
      DO 3 I=1,N
      IF (A(I,I). EQ.0.0) GO TO 100
```

```
      PIVOTE = A(I,I)
      A(I,I) = 1.0
      DO 2 J=1,N
2     A(I,J)=A(I,J)/PIVOTE
      DO 3 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 3
      ELE=A(J,I)
      A(J,I)=0.0
      DO 3 K=1,N
      A(J,K)=A(J,K)-ELE A(I,K)
    3 CONTINUE
C   TERMINA PROCESO Y COMIENZA LA IMPRESION DE RESULTADOS.
      WRITE (II,22)
   22 FORMAT (///. 45X 40H RESULTADOS DE LA INVERSION DE LA -
      MATRIZ, /)
      DO 4 I=1,N
    4 WRITE (II,21)I,(A(I,J),J=1,N)
      STOP
  100 WRITE (II,23)I,I,
   23 FORMAT (///,10X,29H EL ELEMENTO DE LA MATRIZ, A(,I2,1H,
     -I2,1H), 16H ES IGUAL A CERO)
      STOP
      END
```

II.5 INVERSION POR COFACTORES.

Este método usa como expresión general la regla de Cramer -- que establece que:

$$[A]^{-1} = \frac{[\bar{A}]}{|A|}$$

donde $[\bar{A}]$ es llamada la matriz adjunta de $[A]$ y se forma a partir de la transpuesta de ésta, sus elementos se obtienen cada uno de ellos como resultado de efectuar el determinante- que se forma con los elementos que quedan fuera de la cruz -- renglón- columna que comprende al elemento y efectuando una - interrelación de cambios de signos.

Para que exista una comprensión mejor citamos el siguiente --- ejemplo:

Sea la matriz:

$$Fbb = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} ; \quad Fbb^{t} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Como es una matriz simétrica su transpuesta resulta la misma.

La matriz adjunta será:

$$\overline{Fbb} = \begin{bmatrix} + \frac{L^4}{12E^2I^2} & -0 & +0 \\ -0 & \frac{+L^2}{E^2AI} & \frac{-L^3}{2E^2AI} \\ +0 & \frac{-L^3}{2E^2AI} & \frac{+L^4}{3E^2AI} \end{bmatrix}$$

Aquí por ejemplo, el elemento (3,2) se obtiene de efectuar el determinante formado por los elementos de las columnas 1 y 3 con intersección de los renglones 1 y 2, esto es:

$$\begin{vmatrix} \frac{L}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} \end{vmatrix} = \frac{L^3}{2E^2AI}$$

; Análogamente para los demás elementos

La interrelación de cambio de signos se hace comenzando con -el signo (+), continuando en orden por renglón, cambiando a -(-), después a (+), a(-), etc.

El determinante de la matriz Fbb será:

$$\det \left[Fbb \right] = \left[\frac{L}{EA} \cdot \frac{L^4}{3E^2I^2} - \frac{L^4}{4E^2I^2} \right] = \frac{L^5}{12E^3AI^2}$$

De tal manera que la inversa quedaría como:

$$\left[Fbb \right]^{-1} = \frac{\left[\overline{Fbb} \right]}{\det \left[Fbb \right]} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

El proceso se vuelve fastidioso y prolongado para matrices de-orden mayor a 4x4 y su computarización es complicada, mas --sin embargo en matrices comprendidas dentro de este rango resul ta ser demasiaso práctico.

II.6 METODO DE GAUSS-SEIDEL.

Este método basa su solución en aproximaciones sucesivas para-resolver sistemas de ecuaciones de la forma $[A]\,[X] = [B]$.

Para ilustrar mejor el procedimiento tomaremos un ejemplo:

Considere el siguiente sistema de ecuaciones ordenado:

$$A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z = b_1$$
$$A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z = b_2$$
$$A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z = b_3$$

Despejando de cada una de las ecuaciones la variable de la dia gonal tendremos:

$$X = (b_1 - A_{12}Y - A_{13}Z)/A_{11} \quad \text{--}(1)$$
$$Y = (b_2 - A_{21}X - A_{23}Z)/A_{22} \quad \text{--}(2)$$
$$Z = (b_3 - A_{31}X - A_{32}Z)/A_{33} \quad \text{--}(3)$$

Proponiendo como una primera aproximación, para las variables, en la primera ecuación $Y = 0$ y $Z = 0$ tendremos:

$$X_1 = b_1 / A_{11}$$

Para la segunda ecuación:

$$Y_1 = (b_2 - A_{21}X_1)/A_{22}$$

De igual forma en la tercera:

$$Z_1 = (b_3 - A_{31}X_1 - A_{32}Y_1)$$

Una segunda aproximación a la solución, usando siempre el -- valor más cercano anterior a las variables, sería:

$$X_2 = (b_1 - A_{12}Y_1 - A_{13}Z_1)/A_{11}$$
$$Y_2 = (b_2 - A_{21}X_2 - A_{23}Z_1)/A_{22}$$
$$Z_2 = (b_3 - A_{31}X_2 - A_{32}Y_2)/A_{33}$$

De tal manera que una iésima aproximación quedaría:

$$Xi = (b_1 - A_{12}Y_{i-1} - A_{13}Z_{i-1})/A_{11}$$
$$Yi = (b_2 - A_{21}X_i - A_{23}Z_{i-1})/A_{22}$$
$$Zi = (b_3 - A_{31}X_i\ Y - A_{32}Y_i)/A_{33}$$

El proceso terminaría cuando se cumpliese un cierto grado de error, estando dado esto cuando se presentasen simultáneamente las siguientes igualdades:

$$\left| X_i - X_{i-1} \right| \leq E$$
$$\left| Y_i - Y_{i-1} \right| \leq E$$
$$\left| Z_i - Z_{i-1} \right| \leq E$$

Donde E representa el grado de aproximación requerido, y cuyo valor está dado por el tipo de problema que se estuviese resolviendo.

Una forma de representar el proceso visto, demasiado práctica para la solución manual, y que es utilizada por el Profesor -- Ing. Julio Damy R., en el curso que imparte en la Facultad, -- se explica a continuación:

Tomemos el ejemplo:

$$\begin{array}{lllllllll}
14.33\,_{1} & + & 0.664\,_{3} & + & 0.2867D_1 & + & 0.664D_2 & = & 0 \\
0.667\,_{1} & + & 13.333\,_{3} & + & 0 & + & 0.667D_2 & = & 0 \\
0.75\,_{1} & + & 0 & + & 0.375D_1 & + & 0.667D_2 & = & 25/EI \\
1.333\,_{1} & + & 1.333\,_{3} & & 0 & + & 0.889D_2 & = & 15/EI
\end{array}$$

	1	3	D_1	D_2	
(1)		0.047	-0.020	-0.047	0.0
(2)	-0.050		0.0	-0.050	0.0
(3)	-2.000	0.0		-1.779	66.667
(4)	-1.500	-1.500	0.0		18.875

PARTE No. 1

0.0	0.0	66.667	18.875	1a.
-2.126	-0.737	40.905	21.170	2a.
-1.778	-0.970	35.562	21.000	3a.
-1.593	-0.970	35.500	20.719	4a.
-1.578	-0.957	32.964	20.678	5a.
-1.586	-0.955	33.053	20.686	6a.
-1.588	-0.955	33.043	20.690	7a.

En la parte No. 1 se muestran los valores de los coeficientes no diagonales entre el diagonal para cada ecuación, cambiando su signo si procede, simulando el despeje de la variable diagonal.

En la primera interacción el valor para ϕ_1 se obtiene con los valores $\phi_3 = D_1 = D_2 = 0$, del renglon (1). El valor de ϕ_3 como $0 \times (-0.05)$ y $D_1 = D_2 = 0$, del renglon (2). D_1 del tercer renglón como $0 \times (-2.0) + 0.0(0) + 66.667$ y $D_2 = 0$. D_2 como $0 \times (-1.5) + 0 \times (-1.5) + 99.667\ (0) + 16.875$, del renglón No. (4).

Para la segunda interacción:

$\phi_1 = 0 \times (-0.047) + 66.667(-0.20) + 16.875(0.047) + 0 = 2.126$

$\phi_3 = 2.126(-0.050) + 66.667(0) + 16.875(-0.050) + 0 = 0.737$

$D_1 = 2.126(-2.0) + (-0.737)\ (0) + 16.875(-1.779) + 66.667 = 40.905$

$D_2 = 2.126(-1.5) + (-0.737)(-1.5) + 40.905(0) + 16.875 = 21.170$

Así sucesivamente hasta alcanzar la aproximación requerida.

$\varphi_1 = -1.588, \varphi_3 = -0.955$

$D_1 = 33.043, \quad D_2 = 20.690$ ——— SOLUCION

Cabe señalar que el método converge pronto para elementos, en - valor absoluto, de la diagonal principal mayores que la suma de los restantes elementos del renglón que se trate; cuando no se cumple esto se vuelve demasiado laboriosos. Para estructuras - comunes generalmente se cumple la condición.

Enseguida se muestra un programa de computadora que resuelve -- Sistemas de Ecuaciones por este Método:

```
C       PROGRAMA QUE RESUELVE SISTEMAS DE ECUACIONES
C       POR EL METODO DE GAUSS-SEIDEL
C       A(i,J) COEFICIENTE DE LA VARIABLE QUE OCUPA LA POSICION i,J.
C       B(i,J) = TERMINO INDEPENDIENTE
C       LOS RESULTADOS SE ALMACENAN EN LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL
C       PRINCIPAL DE LA MATRIZ QUE FORMA LOS COEFICIENTES DE LAS
C       VARIABLES
C       NO SE ADMITEN VALORES EN LA DIAGONAL IGUALES A CERO
C       N= ORDEN DE LA MATRIZ
C       LOS DATOS DE A(i,J) SE LEEN POR RENGLON
        DIMENSION A (50,50)
        LL=5
        II=6
C       LECTURA E IMPRESION DE DATOS
        READ (LL, 10) N
10      FORMAT (15)
        WRITE (II,20) N,N
20      FORMMAT (1H1,11, 34X, 63 H SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES
       -POR EL METODO DE GAUSS-SEIDEL)
        DO 1 I=1 N
        READ (LL, 11) (A ( I,J), J=1N)
        WRITE (II,21) I (A(I,J), J=1,N)
1       CONTINUE
```

```
      READ (LL, 11) (B(I), I=1,N)
      WRITE (II,22) (B(I), I=1,N
11    FORMAT (8 F10.5)
21    FORMAT (/, 10X, 8 H RENGLON:, I3, /,5 (10F 12.4) )
22    FORMAT (/,10X, 13H VALORES DE B-,/, 10X, 5 (10F 12.4))
C     COMIENZA PROCESO DE INVERSION
      JN=0
      DO 2 I = 1, N
      IF (A(I,I). EQ.0.0) GO TO 1000
      B (I) = B(I)/A(I,I)
      DO 1 J=1,N
1     A(I,J) =-A(I,J)/A(I,I)
      A(I,I) = 0.0
2     ANT(I) = 9999999.999
10    CONTINUE
      DO 4 I=1,N
      A(I,I)=B(I)
      DO 3 J=1,N
      IF (I.NE.J)A(I,I)=A(I,I)+A(J,J) A(I,J)
3     CONTINUE
      IF ((ABS(A(I,I)-ANT(I)).LE.0.005)JN=JN+1
      ANT(I)=A(I,I)
4     CONTINUE
      IF(JN.EQ.0) GO TO 999
      JN=0
      GO TO 10
1000  WRITE (II,23) I,I
23    FORMAT (///,10X,H EL ELEMENTO DE LA MATRIZ A(,I2,1H,,
     -I2,1H),16H ES IGUAL A CERO.)
      STOP
C     TERMINA PROCESO E IMPRIME RESULTADOS
      WRITE (II,24)
24    FORMAT (///,48X,35H RESULTADO DEL SISTEMA DE ECUACIONES,/)
      DO 5 I = 1,N
5     WRITE (II,25)I,A(I,I)
25    FORMAT (/,10X, 9 H ELEMENTO:, I2, 3 H = , F 12.4)
      STOP
      END
```

II.7 SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL METODO DE CHOLESKY

Este método también llamado Inversión por factorización, se basa en el hecho de que una matriz cuadrada, simétrica y no singular, (su determinante distinto de cero) es siempre igual al producto de una matriz triangular inferior por su transpuesta. Esto es, para un sistema de ecuaciones de la forma:

$$A \quad X \quad = \quad B$$

Se puede obtener otro donde $A = L \; L^T$, tal que:

$$L \; L^T \; X = B$$

el cual puede ser resuelto como:

$$L \quad Y \quad = \quad B \quad \text{----} \quad (1)$$

Y

$$L^T \quad X \quad = \quad Y \quad \text{----} \quad (2).$$

puesto que la matriz L es triangular inferior, una vez obtenida, los valores de la matriz Y se obtienen efectuando, lo podríamos llamar, una "Solución por substitución hacia adelante". Para obtener los valores de la matriz X (Solución Final) bastará con efectuar para la ecuación (2) lo que sería una "Solución por substitución hacia atrás" puesto que ahora se usa L como transpuesta.

Otra alternativa para obtener la solución del sistema de ecuaciones una vez obtenida la matriz triangular inferior L y por supuesto L^T, se observa al poder obtener directamente los elementos de la diagonal principal de la matriz L^{-1} ya que "la inversa de una matriz triangular es otra triangular inferior con los elementos de la diagonal iguales a los recíprocos de los elementos de la diagonal de la matriz a invertir", y con ello de una manera directa se puede obtener una matriz R, Inversa de A :

$$A = L \; L^T$$

$$R = A^{-1} = L^{T\,-1} \; L^{-1}$$

premultiplicando por L^T :

$$L^T \; R = L^T \; L^{T\,-1} \; L^{-1}$$

y por lo tanto:

$$L^T \; R = L^{-1}$$

de donde una vez obtenida la matriz R la solución está dada por:

$$X = R \; B$$

Por último conviene recordar a la hora de obtener la matriz R que "La Inversa de una matriz simétrica también es simétrica".

Tenemos ahora dos caminos para resolver el sistema de ecuaciones, ya sea invirtiendo la matriz A o resolviendo por substituciones, pero ambos caminos necesitan de la obtención de la matriz L, trataremos enseguida dar el algoritmo para su obtención y algunos ejemplos:

$$L \; L^T = A$$

O sea:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \cdots & l_{n4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{bmatrix}$$

Si efectuamos productos e igualamos términos, llegamos a la obtención de las expresiones siguientes, que en suma determinan el algoritmo para la formación de la matriz L :

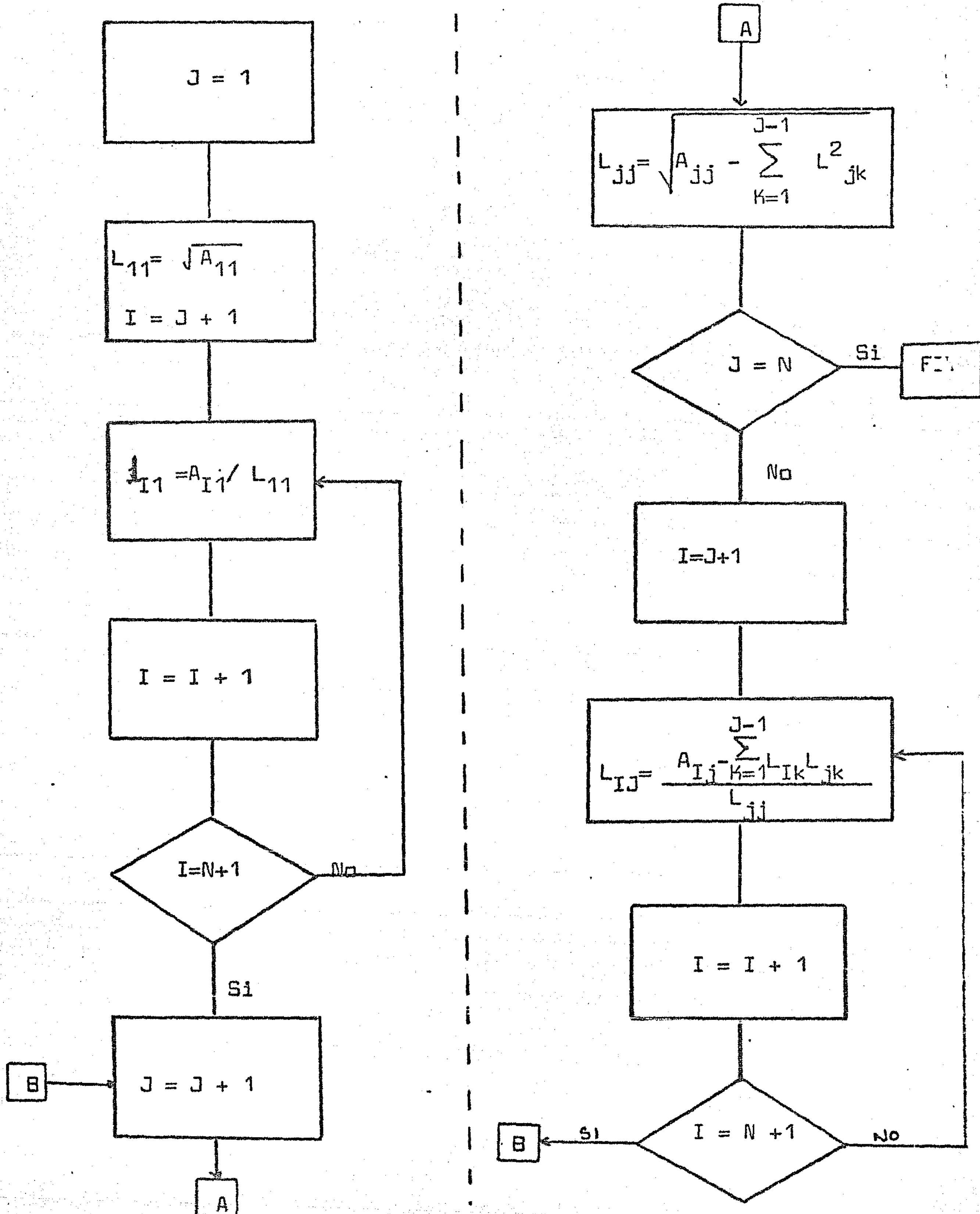
$$1. \quad l_{11} = a_{11}$$

$$2. \quad l_{j1} = a_{1j} / L_{11} \quad ; \quad j = 2,n$$

$$3. \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^{2}} \quad ; \quad i=2,n$$

$$4. \quad l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, l_{jk}}{l_{ii}} ; \quad i \quad 2, \quad J \quad i$$

DIAGRAMA DE FLUJO ( ) PARA COMPUTACION DE LA OBTENCION DE LOS ELEMENTOS DE L .



Ejemplo:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 75 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 75 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & -50 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Solución:

a). Determinación de la matriz L

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{75} = 8.66$$

$$l_{21} = a_{12}/l_{11} = -25 / \sqrt{75} = -2.887$$

$$l_{31} = a_{13}/l_{11} = 0 / \sqrt{75} = 0$$

$$l_{41} = a_{14}/l_{11} = 0 / \sqrt{75} = 0$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{75 - (-2.887)^2} = 8.165$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}\ l_{21}}{l_{22}} = \frac{0 - 0\ (-2.887)}{8.165} = 0$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}\ l_{21}}{l_{22}} = \frac{-5 - -0}{8.165} = -6.124$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{75-0-0} = 8.66$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}\ l_{31} - l_{42}\ l_{32}}{l_{33}} = \frac{25 - 0 - 0}{8.66} = 2.887$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2\ l_{43} - l_{42}^2} = \sqrt{75 - 0 - 37.5 - 8.33} = 5.4$$

Agrupando tendremos:

$$[L] = \begin{bmatrix} 8.66 & 0 & 0 & 0 \\ -2.887 & 8.165 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.66 & 0 \\ 0 & -6.124 & 2.887 & 5.4 \end{bmatrix}$$

b) Determinamos los valores de Y

$$L \quad Y = B$$

$$\begin{bmatrix} 8.66 & 0 & 0 & 0 \\ -2.887 & 8.165 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.66 & 0 \\ 0 & -6.124 & 2.887 & 5.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Los valores de Y estarían dados como:

$$Y_1 = + \; 10 \; / \; 8.66 = 1.155$$

$$Y_2 = 1.155 \; (+2.887) \; / \; 8.165 = 0.408$$

$$Y_3 = 0 \; / \; 8.66 = 0$$

$$Y_4 = (0.408 \; (6.124) + 0.20) \; / \; 5.4 = - \; 3.24$$

c) Por último determinamos los valores de X tal que:

$$L^T \quad X = Y$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} 8.66 & -2.887 & 0 & 0 \\ 0 & 8.165 & 0 & -6.124 \\ 0 & 0 & 8.66 & 2.887 \\ 0 & 0 & 0 & 5.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.155 \\ 0.408 \\ 0 \\ -3.24 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = -3.24 / 5.4 = 0.6$$

$$X_3 = (-2.887 (0.6) + 0) / 8.66 = 0.2$$

$$X_2 = (6.124 (-0.6) + 0.408) / 8.165 = -0.4$$

$$X_1 = (2.887 (-0.4) + 1.155) / 8.66 = 0.0$$

Por lo que la solución final sería:

$$d_{x1} = 0.0$$

$$d_{y1} = -0.4$$

$$d_{x2} = 0.2$$

$$d_{y2} = -0.6$$

III. CONCEPTOS ESTRUCTURALES BASICOS

III.1. INTRODUCCION

Es conveniente hacer notar que la teoría, enseguida desarrollada, ya ha sido estudiada en los cursos de Mecánica de Materiales y Análisis Estructural I. Mostramos un especial interés en los tres principios básicos del Análisis Estructural que de hecho son la esencia del estudio de todo este curso. Las Leyes y tèoremas sobre el trabajo de deformación se muestran más superficialmente, por ser éstas tratadas ampliamente en el curso de Análisis Estructural I donde, además, se ilustra la interrrelación que existe entre estos Teoremas y los métodos de Análisis Estructural (Flexibilidades y Rigideces), temas base de nuestro curso. Cabe sin embargo, mencionar que dichas leyes y teoremas son, en mucho, el fundamento teórico de tales métodos.

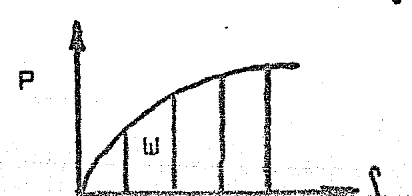
III.2. BASES FUNDAMENTALES DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

- TEOREMAS Y LEYES SOBRE TRABAJO Y ENERGIA

"Si un sistema de fuerzas externas se aplica a un cuerpo, éste se deformará hasta que se presente el equilibrio entre las fuerzas externas aplicadas y las fuerzas internas de cuerpo. En consecuencia el sistema de fuerzas externas realiza un trabajo. Este trabajo se almacena en el cuerpo y es a lo que se llama ENERGIA DE DEFORMACION". ( )

LEY DE CLAPEYRON: Cuando un sistema de fuerzas se aplica a un cuerpo gradualmente, el trabajo desarrollado por la fuerza es:

$$W = P \cdot d\delta$$



TEOREMAS DE CASTIGLIANO:

"La derivada del trabajo de deformación con respecto a una fuerza Fi cualquiera, mide la deformación δi que experimenta el cuerpo de el punto de aplicación y en la dirección de dicha fuerza"

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i$$

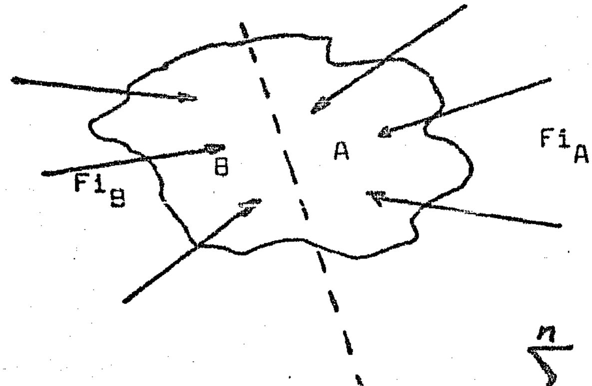
Cuando en lugar de una fuerza Fi se considera un par de fuerzas Mi se dice que:

"La derivada del trabajo de deformación con respecto a un par Mi , mide el ángulo de rotación producido por dicho par en el punto de su aplicación".

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = \emptyset_i$$

TEOREMA DE MAXWEL-BETTI:

"El trabajo que realiza un sistema de fuerzas A debido a los desplazamientos, queen sus puntos de aplicación, le produce un sistemade fuerzas B, es igual al trabajo que realiza el sistema de fuerzas B debido a los desplazamientos, que en sus puntos de aplicación, le produce el sistema de fuerzas A".



$$\sum_{i=1}^{n} F_{iA} \, \delta_{iB} = \sum_{i=1}^{n} F_{iB} \, \delta_{iA}$$

III.3. PRINCIPIOS BASICOS DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

Uno de los objetivos de cualquier análisis estructural es determinar las acciones pertenecientes a la estructura en estudio, como pudieran ser las reacciones en los apoyos y los esfuerzos internos resultantes (momentos flexionantes, fuerzas cortantes, fuerzas normales, etc...). Una solución correcta para cualquiera de estas cantidades debe satisfacer todas las condiciones de equilibrio, no sólo para toda la estructura sino para cualquier parte de ésta, tomada como cuerpo libre.

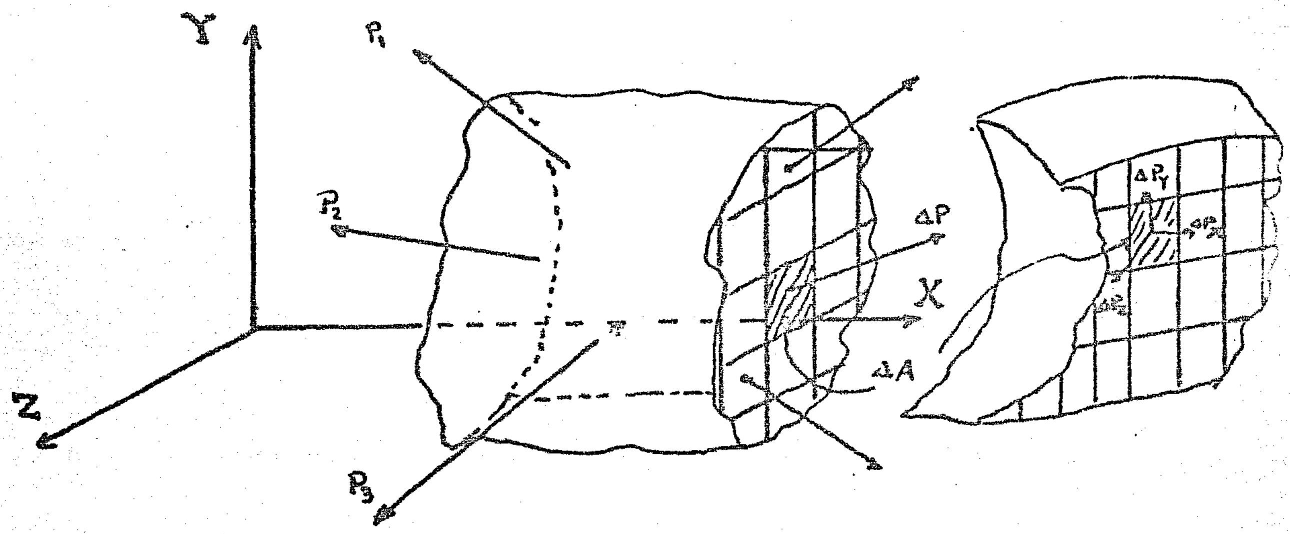
Además de las condiciones de equilibrio, es necesario que en cualquier análisis se satisfagan todas las condiciones de compatibilidad, que se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura, por ejemplo, las ecuaciones de compatibilidad deben estar satisfechas en todos los puntos de apoyo, en donde es necesario que los desplazamientos de la estructura sean congruentes con las condiciones de aopyo (en un apoyo fijo no puede haber traslaciones en los extremos de los miembros que concurren a él).
En el interior de la estructura, otro ejemplo, en una conexión rígida entre dos partes los desplazamientos deben ser los mismos en los dos miembros.

Por último, es necesario considerar las características mecánicas de los materiales con que está hecha nuestra estructura, para esto tomamos en cuenta una ley que nos liga la deformación y las características de los materiales con los esfuerzos en los miembros.

PRINCIPIO DE EQUILIBRIO

Considérese un cuerpo cualquiera sujeto a un sistema de car--

gas cualesquiera que lo mantienen en equilibrio. Considérese, además, una sección transversal de éste.



En general las fuerzas internas que actúan sobre áreas infinitisimales en una sección transversal son de magnitud y dirección variables, o sea, varían de un punto a otro y están inclinadas con respecto al plano de la sección.

Como las componentes del vector de fuerza ΔP por unidad de área ΔA definen el esfuerzo, se tendría que, unicamente para un punto:

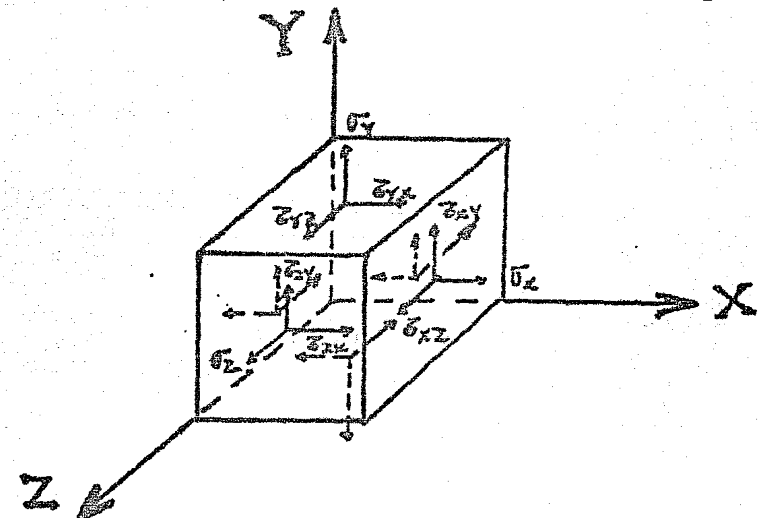
$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Px}{\Delta A} \; ; \; \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Py}{\Delta A} \; ; \; \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Pz}{\Delta A}$$

donde el primer subíndice indica que se considera el plano perpendicular al eje X y el segundo designa la dirección de la componente de esfuerzo. Cuando se tenga el índice repetido el signo τ se cambiará por σ.

Aquí podremos identificar claramente dos cosas: La intensidad de la componente perpendicular a la sección es el esfuerzo nor--

mal en un punto ($\tau_{xx} = \sigma_x$). Y los componentes de intensidad de fuerza que actúan tangencial o paralelamente al plano del elemento de área son los esfuerzos cortantes, --- (τ_{xy}, τ_{xz}).

Si además del plano de corte que interviene en el diagrama - de cuerpo libre de la figura anterior, se pasan a través del cuerpo: un plano a una distancia infinitesimal dx y paralelo al primero, y dos pares de planos adicionales normalmente al primer par y a distancias dy y dz, se separaría del cuerpo un cubo de dimensiones infinitesimales. Todos los -- esfuerzos se pueden identificar en el siguiente diagrama:



Un examen de los símbolosde los esfuerzos muestra que existen tres esfuerzos normales: σ_x, σ_y, σ_z, y seis cortantes τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy}. Tales componentes de esfuerzo pueden agruparse como una matriz.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Y a la cual se le llama "Tensor esfuerzo". Algunas veces -- conviene representar a dicho tensor esfuerzo con subíndices como τ_{ij} donde i y j pueden asumir designaciones de - x, y, y z. Se demuestra, además que el tensor esfuerzo es - simétrico, es decir que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Como un elemento infinitesimal de un cuerpo en equilibrio debe- estar en equilibrio, considérese que se tiene un elemento de -- dimensiones (dx) (dy) (1), (de un espesor unitario en la dirección perpendicular al plano de la figura siguiente), y que se - toma en cuenta la posiblidad de un incremento en los esfuerzos- de una cara de elemento a otra, tendremos que: por ejemplo, --- puesto que la derivada de σ_x en la dirección X es $\partial\sigma x/\partial x$ y se - avanza una distancia dx, el incremento es $(\partial\sigma x/\partial x)dx$. Se -- toma a las derivadas parciales para considerar los cambios en - las diferentes direcciones:

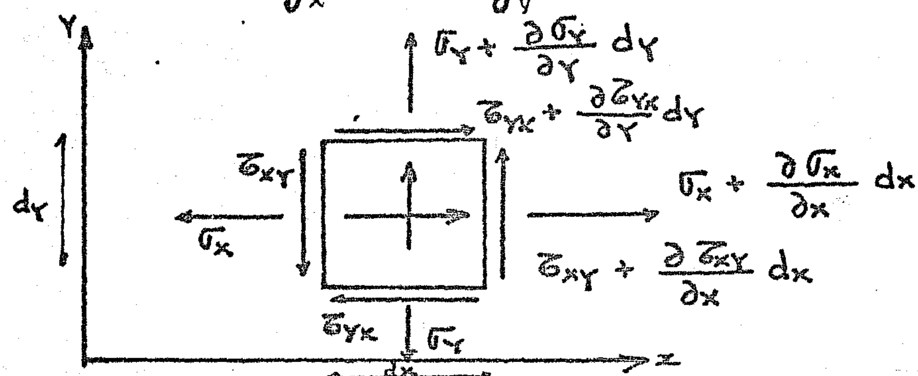
$$\Sigma Fx = 0$$

$$(\sigma x + \frac{\partial\sigma x}{\partial x} dx)\,(dy \times 1) - \sigma x \;(dy + 1) +$$

$$(\tau yx + \frac{\partial\tau yx}{\partial y})\, dy\, (dx \cdot 1) - \tau yx\,(dx \cdot 1) + X\,(dx\, dy \cdot 1) = 0$$

Simplificando y recordando que $\tau yx = \tau xy$ se obtiene que:

$$\frac{\partial\sigma x}{\partial x} + \frac{\tau xy}{\partial y} + X = 0 \;.$$



Análogamente para la dirección Y:

$$\frac{\partial\tau yx}{\partial x} + \frac{\sigma y}{\partial y} + Y = 0$$

donde las fuerzas de inercia o de cuerpo, como las debidas al - peso o a un efecto magnético, se designan con X y Y estando -- referidas a la unidad de volumen del material.

Se puede demostrar que para el caso tridimensional se tendría - algo análogo:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Obsérvese que en las deducciones anteriores no se han utiliza-- do las propiedades mecánicas de los materiales. Esto significa que las ecuaciones son aplicables si el material es elástico -- plástico o vicoelástico.

PRINCIPIO DE CONTINUIDAD

Este principio está intimamente ligado al concepto de deforma-- ción.

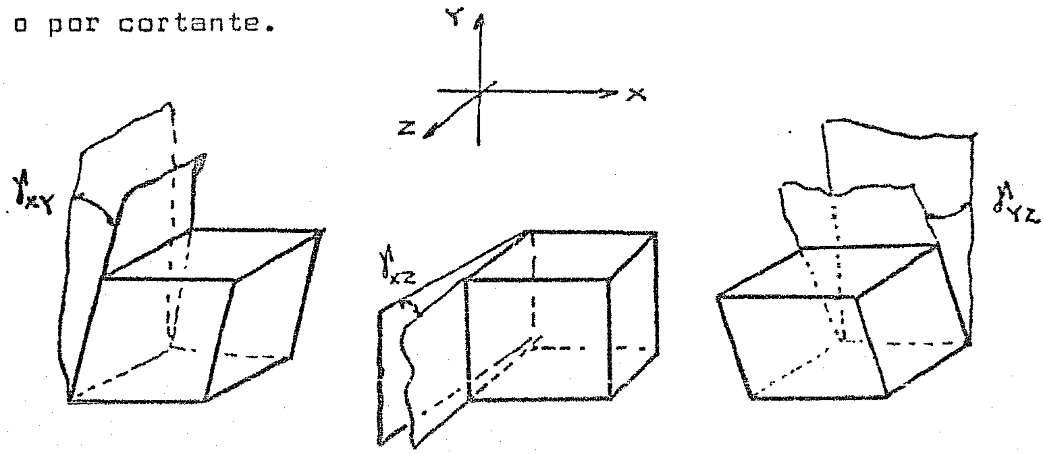
Si "l_o" es la longitud medida entre dos puntos de un cuerpo Y - "l" la longitud entre los mismos puntos, pero después de que -- a ese cuerpo se le ha sometido a acciones externas. El alarga-- miento total sufrido por el cuerpo en la dirección de la medi--- ción será:

$\Delta l = l - l_o$. El alargamiento por unidad de longitud, ε, es:

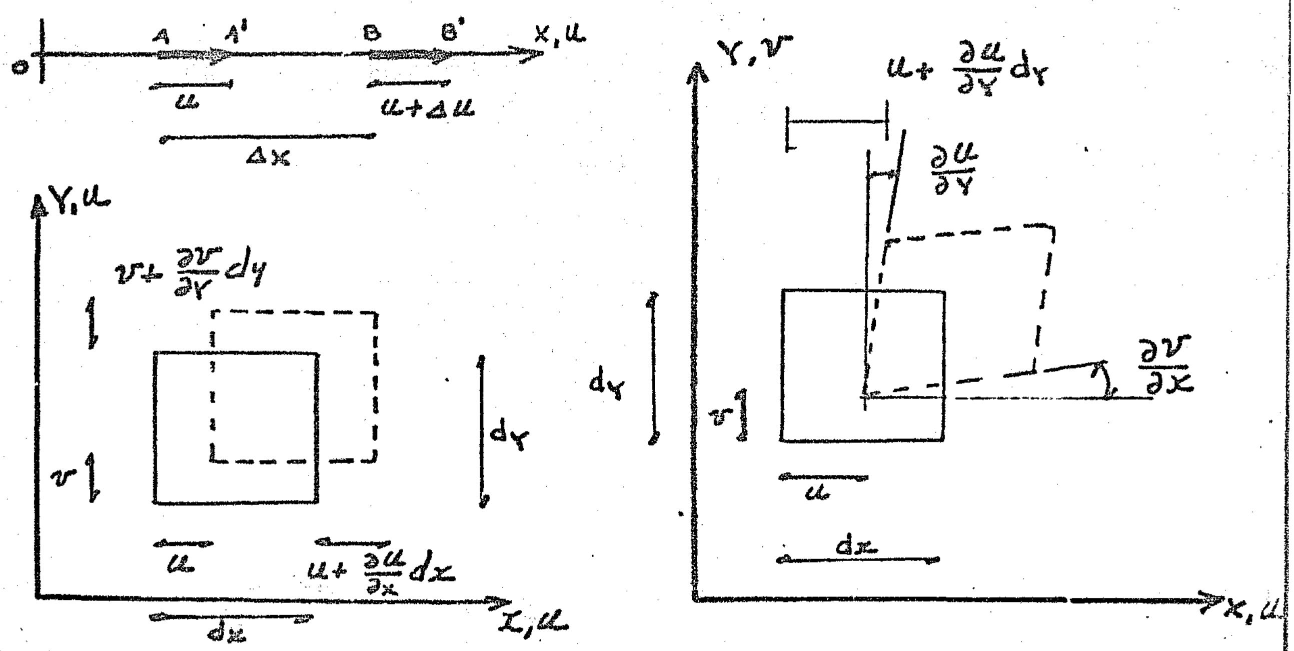
$$\varepsilon = \int_{l_o}^{l} \frac{dl}{l_o} = \frac{\Delta l}{l_o}$$ Y se denomina deformación lineal.

Es obvio qee esta deformación, en un cuerpo situado con referen- cia a un sistema de ejes en el espacio, puede representarse en - tres direcciones perpendiculares entre si, que generalmente se - identifican con los subíndices X, Y y Z.

Asímismo, en un cuerpo se pueden presentar deformaciones que causan un cambio en los ángulos rectos iniciales, entre las líneas del cuerpo, este cambio en el ángulo se define como deformación angular o por cortante.



Puesto que por lo general serían de un punto a otro, las definiciones de deformación deben relacionarse a un elemento infinitesimal. Considérese una deformación lineal como se indica en la figura siguiente:



Como los puntos A y B se mueven a la posición A' y B' respectivamente. El punto A experimenta un desplazamiento U y el punto B, U + ΔU , puesto que además del desplazamiento de cuerpo rígido, U común a todo el elemento Δx, se produce un desplazamiento dentro del elemento. Podemos decir entonces que la deformación lineal es:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Si un cuerpo se deforma en dirección perpendicular (ver en la figura anterior para el caso bidimensional), es necesario cambiar las derivadas ordinarias por parciales, y si en un punto de un cuerpo U , V , y W son las tres componentes de desplazamiento que ocurren, respectivamente en las direcciones X, Y y Z de los ejes coordenados:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \; ; \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \; ; \; \epsilon_{zz} = \epsilon z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

Como se indicó, además de las deformaciones lineales, un elemento también puede experimentar deformación angular (también figura anterior) y puesto que V es el desplazamiento en la dirección Y, a medida que se avanza en la dirección X, $\partial v/\partial x$ es la pendiente del lado inicialmente horizontal del elemento infinitesimal. De igual manera, el lado vertical se inclina un ángulo $\partial u/\partial y$. Con base en ello, el ángulo CDE, inicialmente recto, se reduce en $(\partial v/\partial x) + (\partial u/\partial y)$. Por tanto, para cambios de ángulo pequeños la definición de la deformación angular, relacionada con las coordenadas X, Y, es:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Las definiciones para las deformaciones angulares correspondientes a los planos XZ y YZ son semejantes:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

LEY DE HOOKE

A la relación lineal entre fuerzas y deformaciones se conoce como Ley de Hooke. Al formular esta ley hay que considerar que existen varias componentes de esfuerzo y deformación para lo cual se utiliza el principio de superposición que establece que "el esfuerzo o la deformación resultante en un sistema sometido a varias fuerzas es la suma algebraica de sus efectos cuando se aplican individual o separadamente"( ); lo cual es cierto cuando la deformación está directa y linealmente ligada al esfuerzo que la ocasiona y cuando la deformación debida a una componente de esfuerzo no causa efectos grandes en otras componentes de esfuerzo. Para problemas de Ingeniería se cumplen estos conceptos generalmente.

Relacionando las seis deformaciones con los seis componentes de esfuerzo tendremos:

$$\varepsilon_x = A_{11}\sigma x + A_{12}\sigma y + A_{13}\sigma z + A_{14}\tau xy + A_{15}\tau yz + A_{16}\tau zx$$

$$\varepsilon_y = A_{21}\sigma x + A_{22}\sigma y + A_{23}\sigma z + A_{24}\tau xy + A_{25}\tau yz + A_{26}\tau zx$$

$$\varepsilon_z = A_{31}\sigma x + A_{32}\sigma y + A_{33}\sigma z + A_{34}\tau xy + A_{35}\tau yz + A_{36}\tau zx$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = A_{41}\sigma x + A_{42}\sigma y + A_{43}\sigma z + A_{44}\tau xy + A_{45}\tau yz + A_{46}\tau zx$$

$$\frac{\gamma_{yz}}{2} = A_{51}\sigma x + A_{52}\sigma y + A_{53}\sigma z + A_{54}\tau xy + A_{55}\tau yz + A_{56}\tau zx$$

$$\frac{\gamma_{zx}}{2} = A_{61}\sigma x + A_{62}\sigma y + A_{63}\sigma z + A_{64}\tau xy + A_{65}\tau yz + A_{66}\tau zx$$

En donde: A_{11}, A_{12},..., A_{66} son constantes que guardan simetría con respecto a uno y otro lado de la diagonal y se determinan experimentalmente.

Para materiales isotrópicos homogéneos, (materiales con las mismas propiedades en todas direcciones), se demuestra * que $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $A_{12} = A_{13} = A_{23}$, $A_{44} = A_{55} = A_{66}$ y como $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$ y $A_{23} = A_{32}$, por simetría, se tiene que:

$$\varepsilon x = \frac{\sigma x}{E} - v \frac{\sigma y}{E} - v \frac{\sigma z}{E}$$

$$\varepsilon y = - v \frac{\sigma x}{E} + \frac{\sigma y}{E} - v \frac{\sigma z}{E}$$

$$\varepsilon z = - v \frac{\sigma x}{E} - v \frac{\sigma y}{E} + \frac{\sigma z}{E}$$

$$\gamma xy = \tau xy / G$$

$$\gamma xy = \tau yz / G$$

$$\gamma zx = \tau zx / G$$

donde: $A_{11} = 1/E$, $A_{12} = - v/E$ y $A_{44} = 1/2G$

Aquí, E, es el módulo de elasticidad y representa a la relación entre esfuerzo uniaxial y la deformación lineal. La constante G es el módulo de elasticidad al cortante o módulo de rigidez. Y v es la "Razón de valor (con su signo) de la deformación lineal en dirección lateral a la deformación lineal en dirección axial"( ) esto es:

$$v = - \frac{\varepsilon y}{\varepsilon x} = - \frac{\varepsilon z}{\varepsilon x} = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

Por último, existe una relación que liga a estas tres constantes y queda definida como:

$$G = \frac{E}{2\ (1+v)}$$

* Sokol Nikoff, Mathematical Theory of Elasticity, Pag. 62.

III.4 APLICACION DE LOS TRES PRINCIPIOS BASICOS A ESTRUCTURASi ESQUELETICAS

Hemos desarrollado los principios básicos del análisis estructural, generalizándolos y planteándolos en forma de Sistemas - de Ecuaciones, estos mismos principios los presentamos enseguida, pero en forma matricial, ordenándolos además :

a). EQUILIBRIO

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \\ \underline{Z} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = 0$$

b). CONTINUIDAD

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

c) LEY DE HOOKE

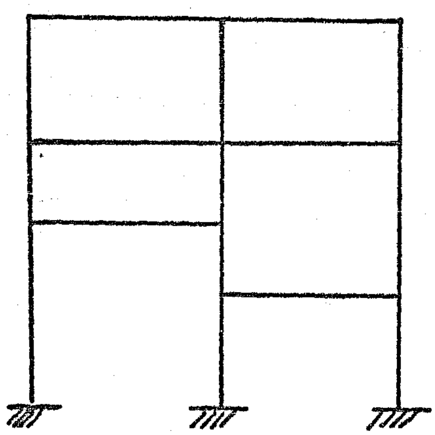
$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}
$$

$$
[\varepsilon] = [D^{-1}][\sigma]
$$

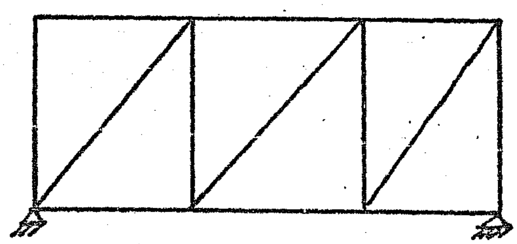
$$
[\sigma] = [D][\varepsilon]
$$

Puesto que en este curso sólo estudiaremos el análisis de estructuras esqueléticas de comportamiento elástico, convendrá describir la interpretación de cada una de estas matrices o vectores en la aplicación de tales estructuras.

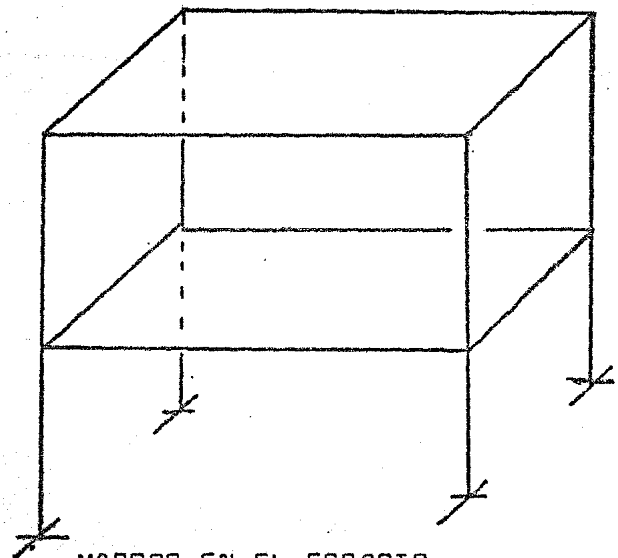
Consideraremos estructuras formadas por elementos prismáticos o cilíndricos unidos de tal manera que en dichas uniones los ejes longitudinales de dichos elementos se intersecten en un punto, (nudos). Cada estructura reticular está formada de miembros que son largos en comparación con las dimensiones de su sección transversal.



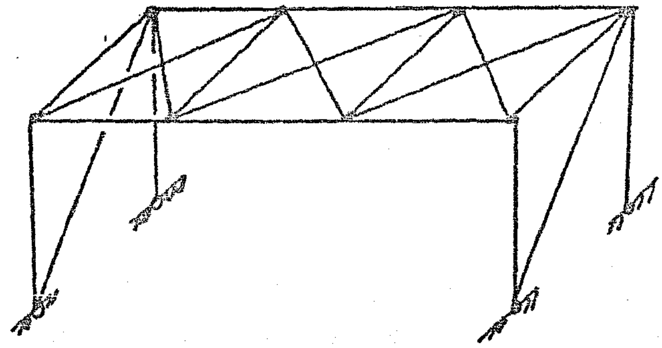
MARCOS PLANOS



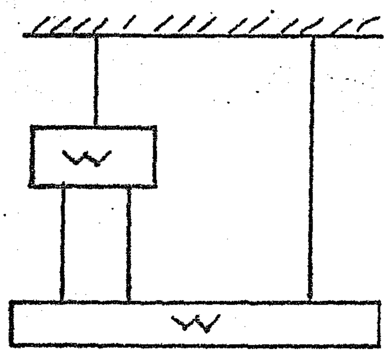
ARMADURAS PLANAS



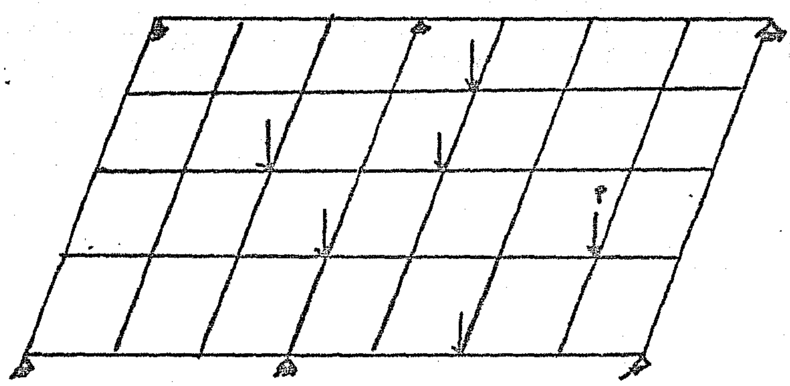
MARCOS EN EL ESPACIO



ARMADURAS EN EL ESPACIO



SISTEMAS A TENSION
O A COMPRESION
UNIDIMENSIONALES



RETICULAS

Con esto en mente podemos establecer que:

- ESFUERZOS.- Generalmente en lugar de obtener esfuerzos se obtienen elementos mecánicos, pues existe una relación -- directa entre ellos.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} N_x \\ V_y \\ M_z \\ \vdots \\ \text{etc.} \end{Bmatrix}$$

- DEFORMACIONES.- Se refiere a deformaciones en los miem-- bros y rotaciones en su sección transversal.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \phi_z \\ \vdots \\ \text{etc.} \end{Bmatrix}$$

- DESPLAZAMIENTOS.- Se refiere a los desplazamientos de un punto dela estructura y como estamos considerando Nudos- a los puntos de intersección de barras: Desplazamientos- de Nudos.

$$d = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ \theta_x \\ \vdots \\ \text{etc.} \end{Bmatrix}$$

- MATRIZ DE CONTINUIDAD O DE COMPATIBILIDAD.- Nos relaciona las deformaciones con los desplazaientos de una es-- tructura. Se usa como transpuesta en la ecuación de -- equilibrio para relacionar cargas o fuerzas aplicadas - con esfuerzo en los miembros.

$$\left[\, A \,\right]$$

- FUERZAS DE CUERPO O DE INERCIA.- Se refiere a las ac-- ciones o solicitaciones que como fuerzas o momentos se- aplican en los nudos.

$$F = \begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ Mz \\ \cdot \\ \cdot \\ etc. \end{Bmatrix}$$

- PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES.- Esta matriz nos proporciona la rigidez o la flexibilidad de una estructura relacionándonos los esfuerzos en los miembros con las deformaciones.

$$[D] = [K] = [f]^{-1}$$

IV. EJEMPLO INTRODUCTORIO

IV.1 INTRODUCCION AL METODO DE LAS RIGIDECES.

R E S U M E N :

a). Continuidad:

$$\left[\varepsilon\right] = \left[A\right]\left[d\right] \qquad - \qquad (1)$$

b). Ley de Hooke:

$$\left[\sigma\right] = \left[D\right]\left[\varepsilon\right]$$

si $\left[\sigma\right] = \left[P\right]$

y $\left[D\right] = \left[K'\right]$

$$\therefore \left[P\right] = \left[K'\right]\left[\varepsilon\right] \qquad - \qquad (2)$$

c). Equilibrio:

$$\left[F\right] = \left[A^T\right]\left[P\right] \qquad - \qquad (3)$$

D E S A R R O L L O :

Sustituyamos (1) en (2)

$$\left[P\right] = \left[K'\right]\left[A\right]\left[d\right] \qquad - \qquad (4)$$

Ahora (4) en (3)

$$\left[F\right] = \left[A^T\right]\left[K'\right]\left[A\right]\left[d\right]$$

Hagamos $\left[K\right] = \left[A^T\right]\left[K'\right]\left[A\right]$

$$\therefore \left[F\right] = \left[K\right]\left[d\right]$$

Nótese que $\left[K \right]$ es función de las caracterísitcas de los materiales y de la geometría de nuestra estructura, por lo que es dato. El vector $\left[F \right]$ representa a las solicitaciones, es también conocida. Por lo tanto, se pueden obtener los desplazamientos de los nudos como:

$$\left[d \right] = \left[K \right]^{-1} \left[F \right] \quad - \quad (5)$$

Y nuestra solución está planteada.

Sustituyendo (5) en (1) se obtienen las deformaciones de los miembros.

$$\left[\varepsilon \right] = \left[A \right] \left[d \right] \quad - \quad (6) \quad \text{(Continuidad).}$$

Sustituyendo (6) en (2) se obtienen los elementos mecánicos o los esfuerzos.

$$\left[P \right] = \left[K \right] \left[\varepsilon \right] \quad - \quad (7) \quad \text{(Ley de Hooke)}$$

Nuestro problema está solucionado.

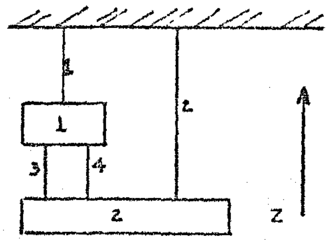
Por último, como una comprobación de nuestros resultados aplicamos equilibrio:

$$\left[F \right] - \left[A^{T} \right] \left[P \right] = 0 \quad --- \quad (8)^{*}$$

* El cambio de signo se debe a que se está considerando que las acciones $\left[F \right]$ se oponen a las reacciones $\left[P \right]$.

IV.2. EJEMPLO INTRODUCTORIO SOBRE EL METODO DE LAS RIGIDECES

Consideremos la siguiente estructura unidimensional:



Eje de referencia. Z

Barras trabajando a fuerza axial.

Se tiene una estructura formada por cuatro barras ($N_B=4$) y dos nudos ($N_n=2$)

1. Obtengamos la matriz $\left[K\right] = \left[A\right]^T\left[K'\right]\left[A\right]$

a) Aplicamos continuidad para obtener $\left[A\right]$

Sean $\left[\varepsilon\right] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$, las deformaciones de las cuatro barras.

$\left[d\right] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$, los desplazamientos (verticales) de los mudos.

Por inspección de la figura :

$$e_1 = d_1$$

$$e_2 = d_2$$

$$e_3 = -d_1 + d_2$$

O sea:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \text{ esto es } \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(MATRIZ DE CONTINUIDAD)}$$

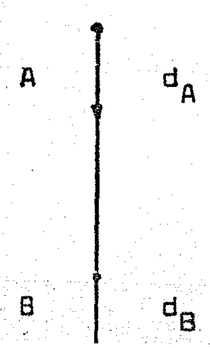
N O T A : Observe que para una barra i cualquiera.

$$e_i = d_b - d_A$$

Tal que:

d_A = Desplazamiento de su nudo superior

d_b = Desplazamiento de su nudo inferior



$$e_i = d_B - d_A$$

b). Apliquemos Ley de Hooke para obtener $\left[K'\right]$

Sean:

$$\left[P\right] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$, las fuerzas axiales en las barras.

Por Ley de Hooke:

$$\begin{aligned} P_1 &= k_1 \; e_1 \\ P_2 &= k_2 \; e_2 \\ P_3 &= k_3 \; e_3 \\ P_4 &= k_4 \; e_4 \end{aligned}$$

(k_i = Rigidez de la barra i)

Esto es:

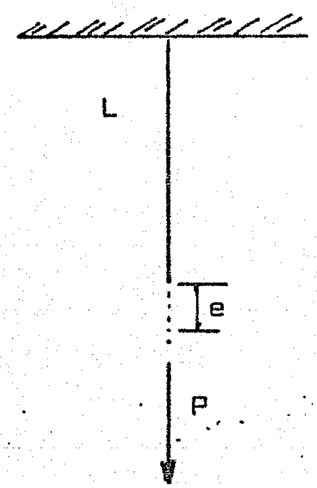
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ & & & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \left[P\right] = \left[K'\right] \left[\varepsilon\right]$$

Donde:

$$K' = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ & & & k_4 \end{bmatrix}$$

(Matriz (diagonal)de rigidez de las barras).

N O T A : Se llama rigidez k_i de una barra i cualquiera, a la relación entre su fuerza axial resistente y su alargamiento.



$$\frac{p}{e} = k \text{ , o bién } \quad p = k\,e$$

Para una barra sujeta a una fuerza axial, $k = E\,A/L$

A= Area de su sección

Consideremos que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1.0$ Ton./cm.

$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

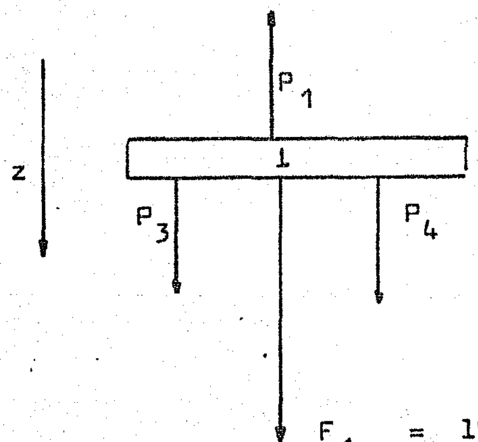
c). Obviamente $\left[A^T \right]$ se puede obtener directamente, por ser la transpuesta de $\left[A \right]$, pero para ejemplificar mejor ésto, -- consideramos que no conocemos $\left[A \right]$.

Aplicando equilibrio tendremos:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$, las cargas aplicadas en los nudos.

En nuestro ejemplo basta con cumplir $\sum F_z = 0$, para cada nudo.

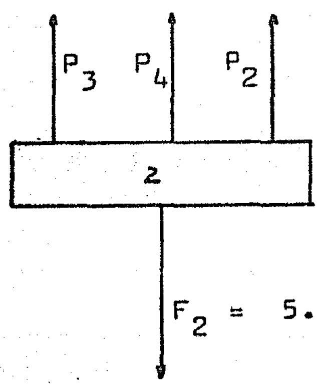
Aislemos al nudo 1 (supongamos positivas a las fuer_ zas en las barras, esto es a tensión).



$$F_1 = P_1 - P_3 - P_4 \;, (F_z = 0)$$

$F_1 = 10$ Ton.

Aislemos al nudo 2



$$F_2 = P_2 + P_3 + P_4$$

$F_2 = 5.0$ Ton.

O bien:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} ; \; [F] = [A^T][P]$$

Donde:

$$\left[A^{T}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{(Matriz de equilibrio)}$$

Observe que se cumple que la transpuesta de la matriz de continuidad es igual a la matriz de equilibrio.

Obteniendo $K = A^{T} \; K' \; A$

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que $\left[K\right]$ es simétrica *

2. Obténgase los desplazamientos en los nudos.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \left[K\right] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo: $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

O bien:

$$10 = 3d_1 - 2d_2$$

$$5 = 2d_1 + 3d_2$$

[* Lo que es muy simple de demostrar en general.

Si $K = A^T K' A$ se sigue que $K^T = A^T K'^T A$

pero $K' = K'^T$ (por ser diagonal), por consiguiente:

$K^T = A^T K' A = K$]

Resolviendo el Sistema:

$d_1 = 8$ cmts.

$d_2 = 7$ cmts.

ó $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

3. Deformaciones en los miembros:

$$[e] = [A][d] \quad \text{(Continuidad)}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Fuerzas en los miembros:

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Se comprueba el equilibrio:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$10 - 10 = 0$$

$$5 - 5 = 0$$

IV.3. INTRODUCCION AL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

Consideremos la ecuación de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} .$$

Definimos como estructura Isostática a aquella en que con sólo la ecuación de equilibrio se pueden obtener los elementos mecánicos en las barras $\left[P \right]$. Esta definición implica que $\left[A \right]^T$ sea cuadrada y no singular. En nuestro ejemplo $\left[A \right]^T$ no es cuadrada (2 x 4), esto es, tenemos dos ecuaciones con cuatro incógnitas. Se define como estructura hiperestática a aquella en la que $\left[A \right]^T$ es rectangular de orden $N_n \times N_b$ (N_n = No. de Nudos, N_b = No. de Barras) y tal que $N_b > N_n$ y además que de ella, se pueda obtener una matriz cuadrada de $N_n \times N_n$ elementos y no singular.

A continuación trataremos de explicar esta definición:

a). Si $\left[A \right]^T$ es cuadrada y no singular se pueden obtener todos los elementos $\left[P \right]$, por equilibrio como:

$$\left[P \right] = \left[\left[A \right]^T \right]^{-1} \left[F \right] .$$

Por Ley de Hooke las deformaciones.

$$\left[\varepsilon \right] = \left[K' \right]^{-1} \left[P \right] .$$

$\left[K' \right]^{-1}$ existe ya que siempre es diagonal, y suponemos elementos de sección no nula.

Y de continuidad los desplazamientos de los nudos, como:

$$\left[d \right] = \left[A \right]^{-1} \left[\varepsilon \right]$$

o bien como; (sustituyendo):

$$\left[d \right] = \left[A \right]^{-1} \left[k' \right]^{-1} \left[\left[A \right]^T \right]^{-1} \left[F \right]$$

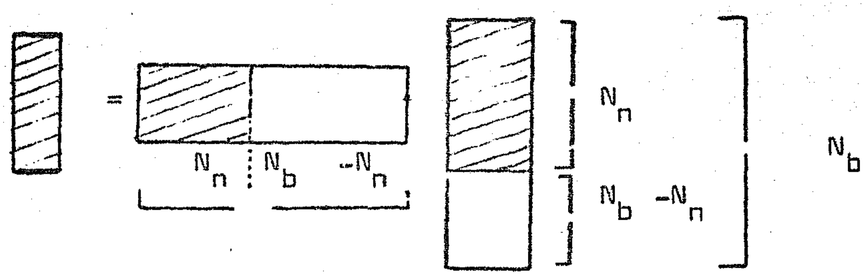
de donde se deduce que:

$$\left[K\right]^{-1} = \left[A\right]^{-1} \left[k'\right]^{-1} \left[\left[A\right]^{T}\right]^{-1} = \left[\left[A\right] \left[k'\right] \left[A^{T}\right]\right]^{-1}$$

lo cual es solamente válido para estructuras isostáticas.

b). Si la estructura es hiperestática, la matriz $\left[A\right]^{T}$ es rectangular $N_n \times N_b$, por lo que en el ecuación de equilibrio $\left[F\right] = \left[A\right]^{T} \left[P\right]$ tenemos más incógnitas que ecuaciones; para que exista cuando menos una solución (estructura estable), será necesario que se puedan "inventar" $N_b - N_n$ valores de $\left[P\right]$ y calcular los restantes.

$$\left[F\right] = \left[A\right]^{T} \left[\bar{P}\right]$$



Por lo cual para la matriz cuadrada $N_n \times N_n$ que se puede obtener, se determina que no tiene renglones linealmente dependientes. - Existen N_n barras que forman una estructura isostática y estable; las columnas de $\left[A\right]^{T}$ correspondientes a esas barras forman una matriz no singular.

Aclaremos estas ideas con nuestros ejemplos:

Se tiene:

$$N_b = 4 \quad y \quad N_n = 2$$

$$\left[A\right]^{T} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -- 1 \\ -- 2 \end{array} \quad \text{(Nudos)} \\ \begin{array}{cccc} \;\,1 & \;\,2 & \;\;\;3 & \;\;\;4 \end{array} \end{array}$$

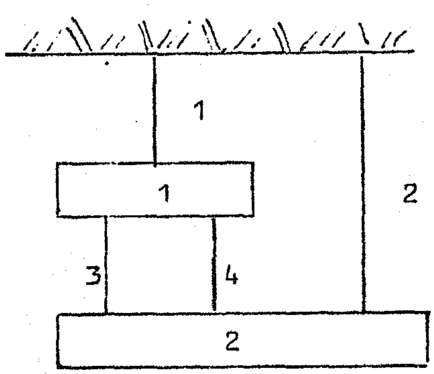
Nuestra ecuación de equilibrio es:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Podemos dar a P_3 y P_4 cualquier valor y calcular los valores de P_1 y P_2, ya que la matriz formada por las columnas 1 y 2 de $[A]^T$ no es singular

$$\text{DET} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Decimos que las barras 3 y 4 son las barras redundantes y las 1 y 2, forman lo que podríamos llamar la estructura primaria.



$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ - Estructura Primaria.

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ - Barras Redundantes.

Efectivamente, podemos contar las barras 3 y 4 (o darle cualquier valor a sus fuerzas axiales) y la estructura será estable.

A la matriz cuadrada de $N_n \times N_n$ que se forma de $[A]^T$ se le llama $[Ao]^T$ y al resto $[A_R]^T$.

$$\boxed{A}^T = \left[[Ao]^T \;\vdots\; [A_R]^T \right]$$

$$\left[(N_n \times N_n) \;\vdots\; (N_n \times (N_B - N_n)) \right]$$

En nuestro ejemplo:

$$[Ao]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [A_R]^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que hay varias posibilidades de estructura primaria; por ejemplo:

Barras $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, cuya matriz $[Ao]^T$ será:

$$[Ao]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (1a. y 3a. columna de } [A]^T \text{)}$$

$$\det [Ao]^T = 1 \neq 0.$$

Otras posibilidades podrían ser: $\boxed{1}$, $\boxed{4}$; $\boxed{2}$, $\boxed{3}$; $\boxed{2}$, $\boxed{4}$.

No se puede escoger como estructura primaria a la $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ porque

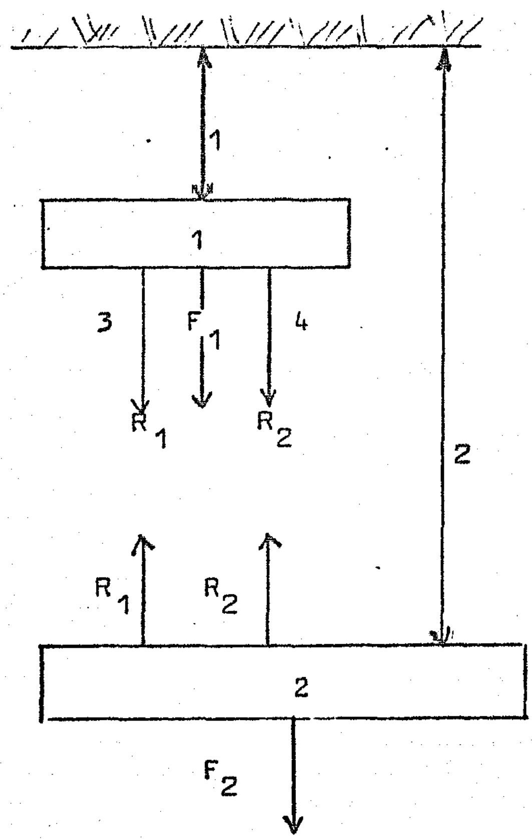
$$[Ao]^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \det [Ao]^T = 0$$

Efectivamente, cortando a $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ la estructura es inestable.

IV.4 EJEMPLO INTRODUCTORIO AL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Con el concepto de estructura primaria podemos desarrollar otro método para resolver el problema estructural, usando los tres principios fundamentales pero en otro orden (Equilibrio, Ley de Hooke, Continuidad).

Consideremos al mismo ejemplo y elijamos a $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ como la estructura primaria, ($\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ serán las barras redundantes).



Cortemos a las barras 3 y 4, y supongamos que en esos cortes obran fuerzas desconocidas R_1 y R_2 (Las Redundantes), que obviamente serán los valores de P_3 y P_4 respectivamente.

a) Equilibrio. Nuestras ecuaciones de equilibrio serán:

$$F_1 = P_1 - R_1 - R_2$$

$$F_2 = P_2 + R_1 + R_2$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

si: $\begin{bmatrix} P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$

y $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$

Se tiene:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} A_R \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_o \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

De estas ecuaciones podemos despejar a $\begin{bmatrix} P_o \end{bmatrix}$ ya que $\begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T$ no es singular.

$$\begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}.$$

En nuestro ejemplo:

$$\begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Pero tenemos que :

$$P_3 = R_1$$
$$P_4 = R_2$$

Por consiguiente:

$$\left[\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación podemos escribirla como:

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \qquad - \quad (9)$$

donde $\begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{bmatrix} Ao \end{bmatrix}^T\right]^{-1} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$; $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} - \begin{bmatrix} Ao^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_R^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \end{array}\right]$

b). Ley de Hooke. Para este principio se tiene que:

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}$$

pero $\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix}$ es cuadrada y no singular por lo que existe su inversa $\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix}^{-1}$ que llamaremos $\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$ (Matriz de flexibilidades de las barras); obviamente que $\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$ es también diagonal (como $\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix}$ y tal que $f_i = 1/k_i$.

Así que:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} \quad - \quad (10)$$

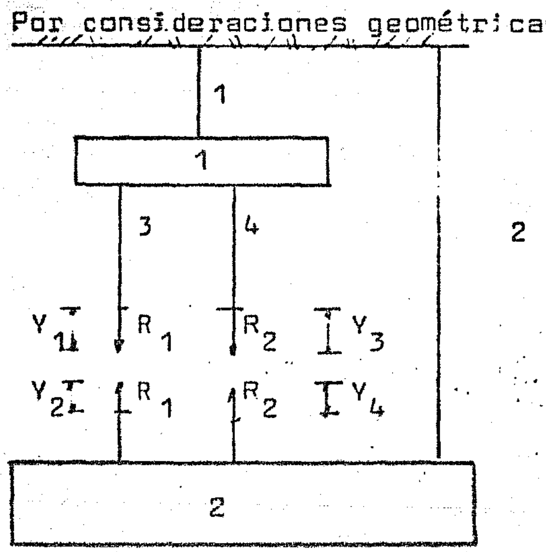
Sustituyendo (9) en (10)

$$\begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad -(11)$$

c). Continuidad. Consideremos a los desplazamientos relativos de R_1 y R_2 como nuevos desplazamientos, llamémosles U_1 y U_2 respectivamente.

$$\begin{bmatrix} U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Por consideraciones geométricas obtenemos:



d_1, d_2, U_1 y U_2, a partir de e_1, e_2, e_3 y e_4 .

$$d_1 = e_1$$

$$d_2 = e_2$$

$$U_1 = Y_1 + Y_2 \quad :$$

$$U_2 = Y_3 + Y_4$$

Si

$$Y_1 = e_1 + e_3 \;;\quad Y_2 = -e_2$$

$$Y_4 = -e_2 \;;\quad Y_3 = e_1 + e_4$$

$$\therefore\quad U_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$U_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \hline U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

pero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}^T$$

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \qquad -(12)$$

$$\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \qquad -(13)$$

Los valores de $\begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$ deberán de ser nulos ya que los cortes en las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ no existen; ésta es la condición de continuidad.

Sistituyendo la ecuación (11) en la (13), se obtiene :

$$\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

pero como $\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = 0$, se puede despejar $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$, ya que la matriz - - - - - $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$ es cuadrada y no singular, quedando:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = -\left[\begin{bmatrix} b_R{}^T & f & b_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_R{}^T & f & bo & F \end{bmatrix}\right] \quad - (14)$$

Ecuación que nos da los valores de las redundantes $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$.

Sistituyendo esta ecuación en la (9)

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} b_R{}^T & f & b_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_R{}^T & f & bo \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} bo \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_R{}^T & f & b_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_R{}^T & f & bo \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

(15) $\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$ Ecuación con la cual determinamos los elementos mecánicos, en los miembros.

Donde :

$$\begin{bmatrix} b \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} bo \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_R{}^T & f & b_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_R{}^T & f & bo \end{bmatrix}\right]$$

Para obtener las deformaciones en los miembros; sustituimos en la ecuación (10).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \quad - (16)$$

Y si substituimos en la cuación (12) obtendremos los desplazamientos en los nudos.

$$\left[d \right] = \left[bo \right]^{T} \left[f \right] \left[b \right] \left[F \right] \quad -(17)$$

Se puede demostrar y es obvio que así debe ser, que:

$$\left[bo \right]^{T} \left[f \right] \left[b \right] = \left[K \right]^{-1}$$

(Inverso de la matriz de rigidez dela estructura).

Apliquemos los resultados anteriores a nuestro ejemplo.

$$\text{Si } \left[bo \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \left[b_R \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \quad \left[f \right] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$\left[b_R^{\,T} \;\; f \;\; b_R \right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo:

$$\left[b_R^{\,T} \;\; f \;\; b_R \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Obtengamos $-\left[b_R^T \; f \; b_R\right] \left[b_R^T \; f \; bo\right] =$

$$- \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Obtenemos, ahora, $\left[b\right]$;

$$\left[b\right] = \left[\left[bo\right] + \left[b_R\right] \left[-\left[b_R^T \; f \; b_R\right] \left[b_R^T \; f \; bo\right]\right]\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\left[b\right] = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculamos los esfuerzos con la ecuación (15)

$$\left[P\right] = \left[b\right]\left[F\right] \quad ; \quad \left[F\right] = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[P\right] = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{(ton.)}$$

Y los desplazamientos con la ecuación (17)

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{(cmts.)}$$

Resultados que concuerdan con los obtenidos por el método de las rigideces.

R E S U M E N :

Tenemos ya los elementos necesarios para poder establecer un procedimiento :

1) Necesitamos elegir una estructura isostática de la hiperestática, numerando nudos y barras, tal que las barras redundantes sean las últimas en numerarse.

2) Determinar la matriz ${}^{t}\left[A\right]$, tal que:

$$\left[A\right]^T = \left[Ao^T \; ; \; A_R^T\right]$$

3) Obtener:

$$\left[bo\right] = \begin{bmatrix} \left[Ao^T\right]^{-1} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$$

4) Determinar:

$$\left[b_R\right] = \begin{bmatrix} -\left[Ao^T\right]^{-1}\left[A_R^T\right] \\ \hdashline \left[I\right] \end{bmatrix}$$

5) Construir la matriz de flexibilidades

$$\left[f\right] = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{EA}\right)_1 & & & \\ & \left({}^{4}EA\right)_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix}$$

6) Se obtiene $\left[R\right]$ como:

$$\left[R\right] = -\left[b_R^T \; f \; b_R\right]^{-1}\left[b_R^T \; f \; bo\right]\left[F\right]$$

Obsérvese que $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$ también se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} b_R{}^T & f & b_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} b_R{}^T & f & bo \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

7) Por equilibrio se obtiene $\begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

8) Por Ley de Hooke las deformaciones en los miembros

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$$

9) Y por Continuidad los desplazamientos en los nudos :

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bo \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}$$

10) Por último convendrá comprobar los resultados como:

$$\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

V. VECTORES ESTRUCTURALES

V.1.- Generalización de los Vectores Fuerza y Desplazamiento.

Tratando de dar un significado más amplio a estos -- conceptos mostramos las Fuerzas y los Desplazamientos que - se presentan en los diferentes tipos de estructuras reticulares existentes.

- Estructuras Unidimensionales:

$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix}$, Fuerza Aplicada en el nudo j.

$\begin{bmatrix} d_j \end{bmatrix}$; Desplazamiento del nudo j.

- Armaduras Planas.

$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \end{bmatrix}$$

- Armadura en el Espacio.

$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{jz} \end{bmatrix}$$

- Marco Plano.

$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \\ \theta_{jz} \end{bmatrix}$$

- Marco en el Espacio.

$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{jz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{bmatrix}$$

- Malla Plana o Retícula.

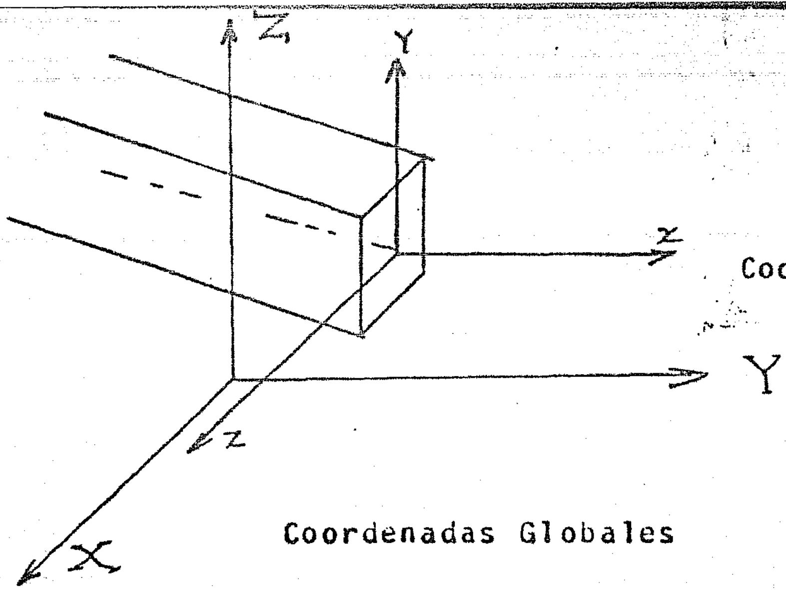
$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{jz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \end{bmatrix}$$

En donde las Fuerzas aplicadas y los Desplazamientos ocurren en la dirección que el subíndice indica.

V.2.- Transformación de Coordenadas.

Frecuentemente los Vectores de Fuerza y Desplazamiento los referimos a sistemas de ejes coordenados globales, - sin embargo, las acciones, (deformaciones y Esfuerzos) que-se provocan sobre los miembros de la estructura, es necesario referirlas a sistemas coordenados locales para conocer-directamente el sentido físico de tales acciones.

Tratando de hacer compatibles las operaciones vectoriales, dichos vectores se someten a procesos de transformación, cuyo significado es un cambio de coordenadas, de tal-manera que para tal efecto podemos considerar dos tipos de-transformación: De Rotación y de Traslación.



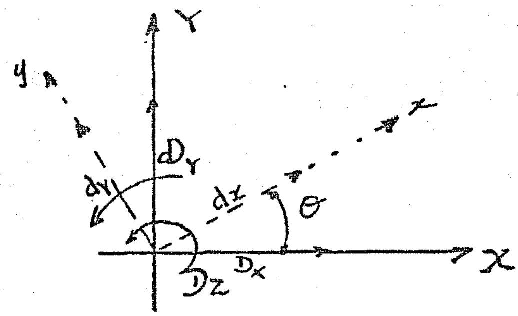
Coordenadas Locales

Coordenadas Globales

a).- Rotación.

Espacio Bidimensional.

En la figura siguiente se aprecia como las coordenadas $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$ se convierten $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$ girando un ángulo θ . Esto se expresa matemáticamente de la siguiente manera:



$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos & \text{sen} & 0 \\ -\text{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}$$

Esto es, si consideramos a las coordenadas globales $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$ y a las coordenadas locales $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$, se tendría que para pasar de unas a otras:

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} .$$

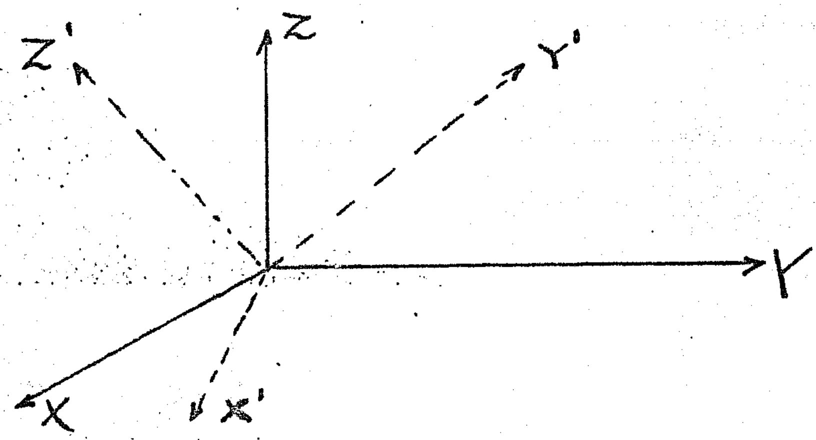
Espacio Tridimensional.

Es este caso el más complicado de todos ya que comprende la utilización de nueve ángulos para poder efectuar la transformación. Sin embargo existen algoritmos que ponen a dicha transformación en función de un sólo ángulo, lo cual es mucho más fácil de manejar. Para consultar tales transformaciones habrá que dirigirse a la referencia número: 6 .

La Rotación queda definida con la matríz Λ_3 donde:

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{x'} & \cos\beta_{x'} & \cos\gamma'_{x'} \\ \cos\alpha_{y'} & \cos\beta_{y'} & \cos\gamma'_{y'} \\ \cos\alpha_{z'} & \cos\beta_{z'} & \cos\gamma'_{z'} \end{bmatrix}$$

α, β, γ' = Angulos que forman los ejes X', Y', Z' con los ejes X, Y, y Z'



La Matriz de Transformación para vectores de seis componenetes sería:

$$[T] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_3 \end{array}\right]$$

$$V' = T \quad V$$

V' = Vector referido al sistema X', Y', Z'

V = Vector referido al sistema X, Y, Z

Por último, hay que hacer notar que la matriz Λ es ortogonal, esto es:

$$\Lambda^{T} = \Lambda^{-1}$$

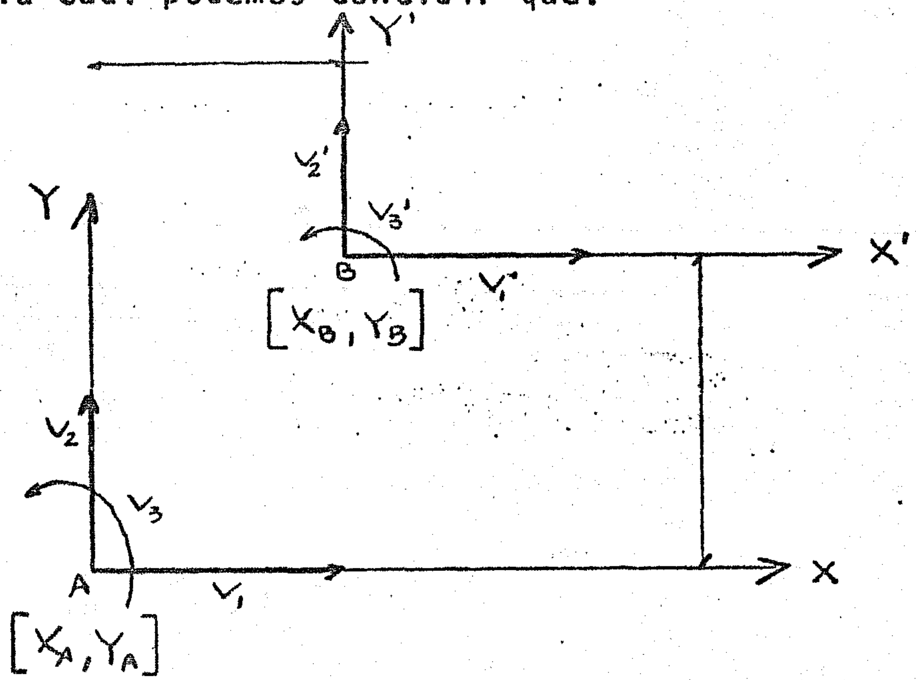
Resultado interesante que nos presenta en forma general, que siendo:

$$V' = T \cdot V \quad . \text{ se puede obtener}$$

$$V = T^{T} \cdot V' \quad .$$

b).- <u>Traslación</u>.

Un sistema coordenado también se puede trasladar de-- un punto A a otro B , como se indica en la figura siguiente, de la cual podemos concluír que:



$$V_1' = V_1 - bV_3$$

$$V_2' = V_2 + aV_3$$

$$V_3' = V_3'$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$V' = H \quad V$$

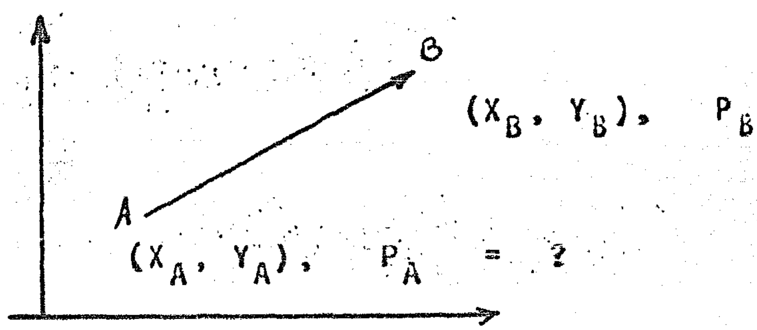
donde: $-b = (Y_A - Y_B)$

$a = -(X_A - X_B)$

V.3 .- Matrices de Transporte.

V.3.1.- Matriz de Transporte de Fuerzas.

En forma general podemos plantear el concepto de tal matriz, como:



Sea el conjunto de fuerzas P_B aplicado en B se requiere transportar al punto A . Por Estática se obtiene el siguiente resultado,

$$\begin{bmatrix} P_{AX} \\ P_{AY} \\ M_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (Y_A - Y_B) & -(X_A - X_B) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{BX} \\ P_{BY} \\ M_{BZ} \end{bmatrix}$$

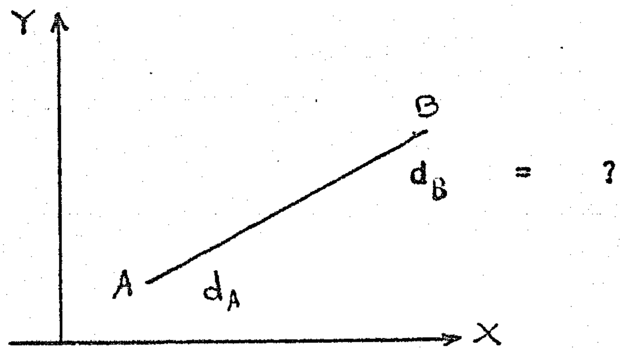
O sea:

$$\begin{bmatrix} P_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_B \end{bmatrix} .$$

$\begin{bmatrix} H_{BA} \end{bmatrix}$ = Matriz para transportar fuerzas de B a A .

V.3.2.- Matriz de Transporte de Desplazamientos.

El problema lo plantearemos en forma análoga al anterior.



Supongamos que a A se le da un desplazamiento d_A , cuanto vale d_B si la barra $\overline{AB}$ se considera rígida, por geometría se tiene:

$$\begin{bmatrix} d_{BX} \\ d_{BY} \\ \theta_{BZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (Y_A - Y_B) \\ 0 & 1 & -(X_A - X_B) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{AX} \\ d_{AY} \\ \theta_{AZ} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} d_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{BA} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_A \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} H_{BA} \end{bmatrix}^T$ = Matriz para transportar desplazamientos de A a B .

VI. ELEMENTOS ESTRUCTURALES

VI.1.- Definición del Elemento Barra.

Se ha manejado indistintamente el término "Barra", en- los capítulos anteriores, creo que conviene aquí hacer un -- resúmen de las características de éste elemento estructural- para que pueda ser considerado como tal y puedan ser aplicables los teoremas, principios o Leyes a los que se ha hecho- referencia.

Las barras se representan gráficamente por su eje, el- cual se define como: "El lugar geométrico de los centros de- gravedad de todas y cada una de las secciones transversales- de la pieza" (1). Y deben cumplir con las siguientes condiciones:

1).- "Su longitud debe ser cuando menos cinco veces mayor, que la menor de las dimensiones transversa-- les de dicha barra" (1).

2).- "Su radio de curvatura debe ser cuando menos cinco veces mayor que la menor de las dimensiones -- transversales de la barra en la sección considerada" (4).

3).- La mayor dimensión de cualquier sección transversal de ésta, debe ser menor o igual a cuatro ve-- ces la menor dimensión de dicha sección.

Atendiendo a su eje las barras pueden clasificarse en:

a) Espaciales.- Son aquellas cuyo eje es una línea alabeada cualquiera.

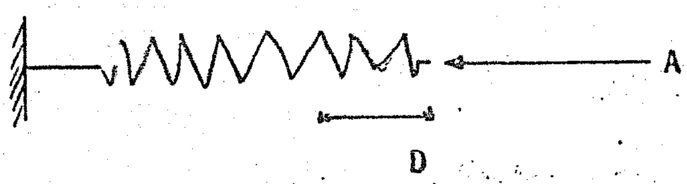
b) Planas.- Son aquellas en las cuales los ejes "Y" de todas las secciones transversales de éstas se en--- cuentran en un plano único, esto es el eje de la -- barra esta contenido en dicho plano único.

A la barra plana de eje recto se le llama "viga".

Salvo que se especifique lo contrario los elementos con que trabajamos son "barras planas".

VI.2.- Propiedades de Rigidez y Flexibilidad en Barras.

La relación que existe entre las acciones y los desplazamientos es el punto más importante del Análisis Estructural. Una forma muy conveniente de expresar esta relación es mediante ecuaciones de acción y desplazamiento. Considerece el resorte linealmente elástico mostrado en la siguiente figura:



La Acción A comprime al resorte produciendo el desplazamiento D del extremo de éste. La relación en A y D puede expresarse mediante la ecuación de desplazamiento:

$$D = FA$$

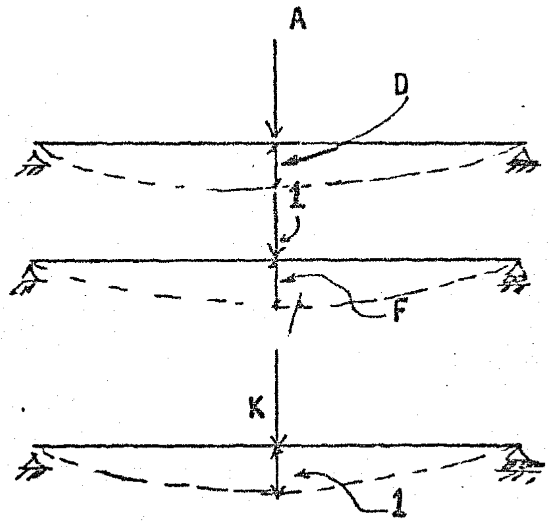
Donde F es la Flexibilidad del resorte, y se define como el desplazamiento producido por un valor unitario de A.

La relación anterior puede expresarse también por una ecuación de acción que expresa a A en función de D:

$$A = K D$$

En este caso K es la rigidez del resorte, la que se define como la acción necesaria para producir un desplazamiento unitario.

Las mismas relaciones generales que se aplican al resorte son válidas para cualquier estructura linealmente -- elástica que esté sujeta a una sola acción. Un ejemplo se da en la siguiente figura, donde se muestra una viga libremente apoyada.

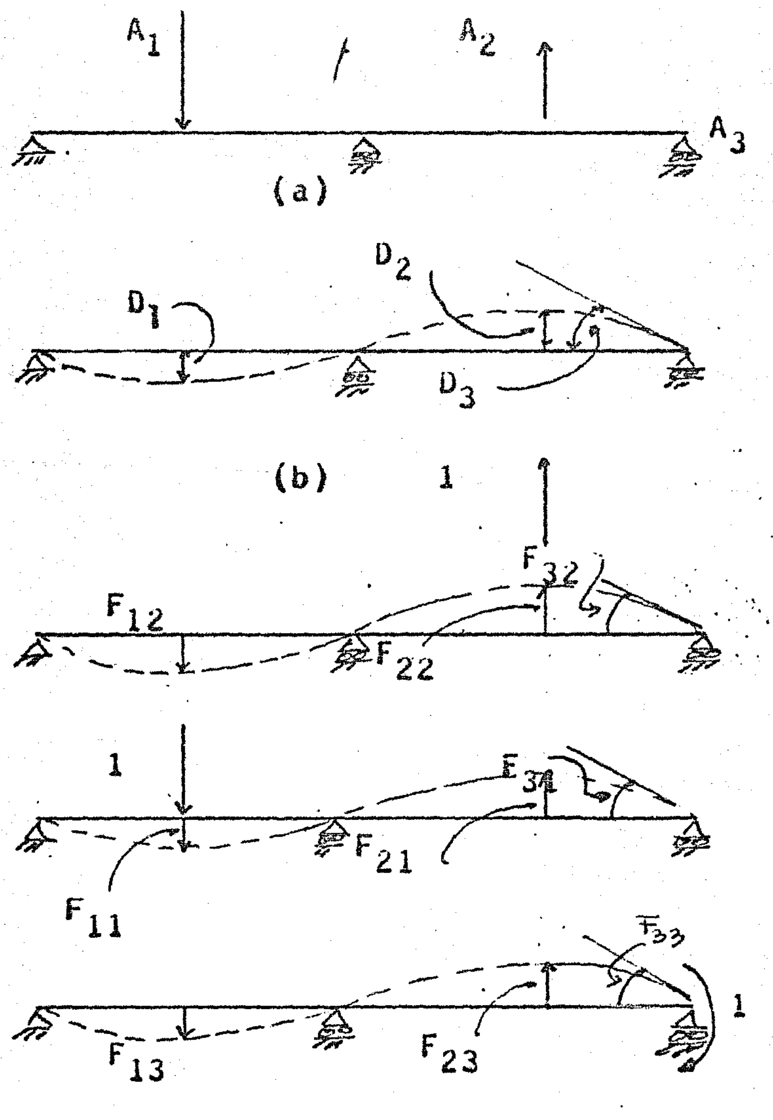


El desplazamiento D mostrado en la figura es la de--- flexión vertical en el punto donde actua A. La flexibilidad F es el desplazamiento producido por un valor unitario de - la carga. La rigidez K, igual a la inversa de la Flexibilidad, es la acción necesaria para producir un valor unitario del desplazamiento.

$$D = \frac{L^3}{48\ EI}\ A \quad ; \quad F = \frac{L^3}{48\ EI}$$

$$A = \frac{48\ EI}{L^3}\ D \quad ; \quad K = \frac{48\ EI}{L^3}$$

Considérese ahora un ejemplo más general en el que la estructura está sujeta a tres cargas. La forma (elástica)- producida por las cargas que actuan sobre la viga (A_1, A_2,- A_3) simultáneamente, producen los desplazamientos D_1, D_2, - D_3. Utilizando el Principio de Superposición, que en general establece "que los efectos producidos por varias causas pueden obtenerse combinando los efectos debidos a las causas individuales", cada uno de los desplazamientos puede expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a las cargas A_1, A_2, A_3, actuando separadamente.



Por ejemplo, el desplazamiento D_1 está dado por la expresión:

$$D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$$

en donde D_{11} es el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por A_1, D_{12} es el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por A_2 y D_{13} el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por A_3. De modo similar se pueden escribir dos ecuaciones adicionales para D_2 y D_3. Aquí cada desplazamiento es directamente proporcional a una de las carga. Esto es, por ejemplo, D_{12} es causado por A_2 y por lo tanto es igual a A_2 multiplicada por un cierto coeficiente que llamaremos F_{12}, D_{13} será igual a A_3 por F_{13}, etc. Explícitamente, por lo anterior, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$D_1 = F_{11} A_1 + F_{12} A_2 + F_{13} A_3$$

$$D_2 = F_{21} A_1 + F_{22} A_2 + F_{23} A_3$$

$$D_3 = F_{31} A_1 + F_{32} A_2 + F_{33} A_3$$

Cada miembro derecho de las ecuaciones anteriores es un desplazamiento que está escrito en la forma de un coeficiente multiplicado por la acción que produce el desplazamiento, a dicho coeficiente se le llama coeficiente de flexibilidad.

Si en vez de expresar los desplacamientos en términos de las acciones, expresamos ecuaciones que describan las acciones en términos de los desplazamientos, obtenemos el siguiente resultado:

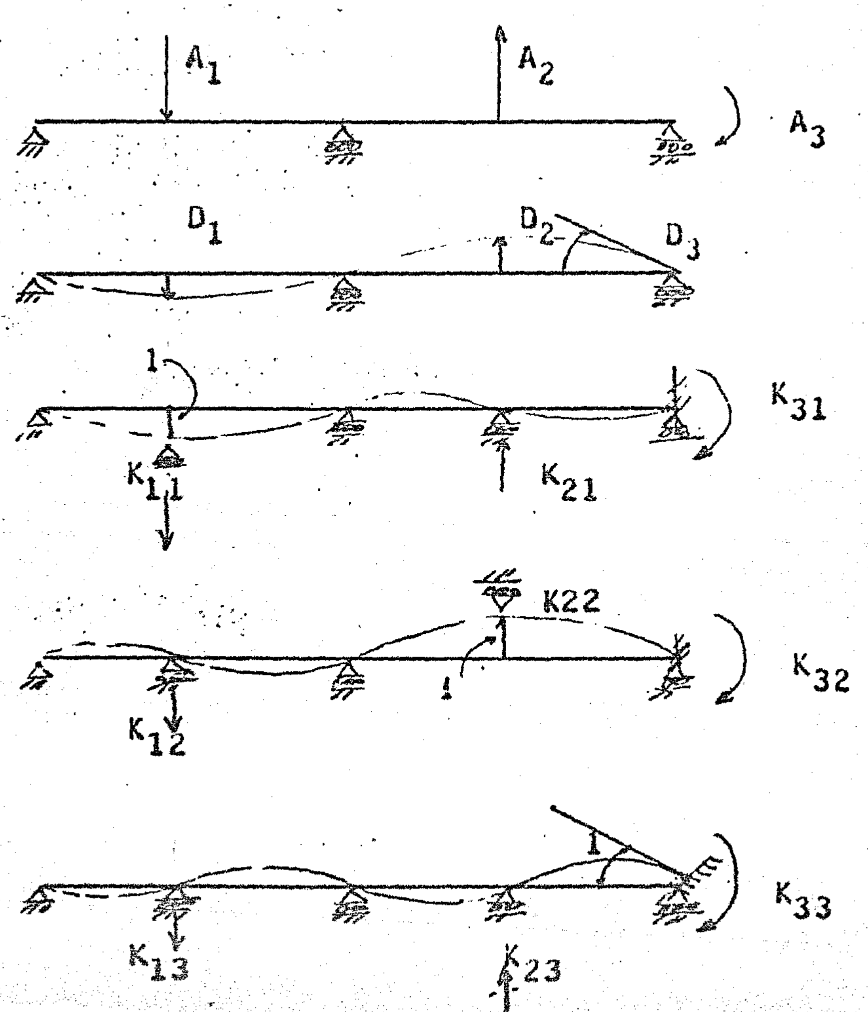
$$A_1 = K_{11}\ D_1 + K_{12}\ D_2 + K_{13}\ D_3$$

$$A_2 = K_{21}\ D_1 + K_{22}\ D_2 + K_{31}\ D_3$$

$$A_3 = K_{31}\ D_1 + K_{32}\ D_2 + K_{33}\ D_3$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse, por ejemplo, resolviendo el sistema de ecuaciones anteriormente presentadas.

Como se estableció anteriormente, la rigidez representa una acción debida a un desplazamiento unitario; por lo tanto el coeficiente K_{11} representará la acción correspondiente a A_1 cuando se introduce un desplazamiento unitario en D_1, en tanto que los desplazamientos D_2 y D_3 se mantienen igual a cero. De igual manera K_{12} es la acción correspondiente a A_1 causada por un desplazamiento unitario en D_2 cuando D_1 y D_3 son iguales a cero. La interpretación física de los coeficientes de rigidez se ilustra en la siguiente figura:



La discución se puede generalizar pudiéndose obtener, para una estructura sujeta a cualquier número de acciones y desplazamientos, las ecuaciones correspondientes para un número n de ecuaciones y para un número n de desplazamientos.

Las ecuaciones de desplazamiento pueden quedar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
D_1 &= F_{11} A_1 + F_{12} A_2 + \cdots\cdots + F_{1n} A_n \\
D_2 &= F_{21} A_1 + F_{22} A_2 + \cdots\cdots + F_{2n} A_n \\
&\vdots \\
D_n &= F_{n1} A_1 + F_{n2} A_2 + \cdots\cdots + F_{nn} A_n
\end{aligned}$$

Que expresadas matricialmente darían:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdots \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$D = F\ A$$

Donde F es llamada la Matriz de Flexibilidad de la estructura.

De igual forma las ecuaciones de acciones podemos expresarlas de la siguiente manera:

$$
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot\cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot\cdot \\ D_n \end{bmatrix}
$$

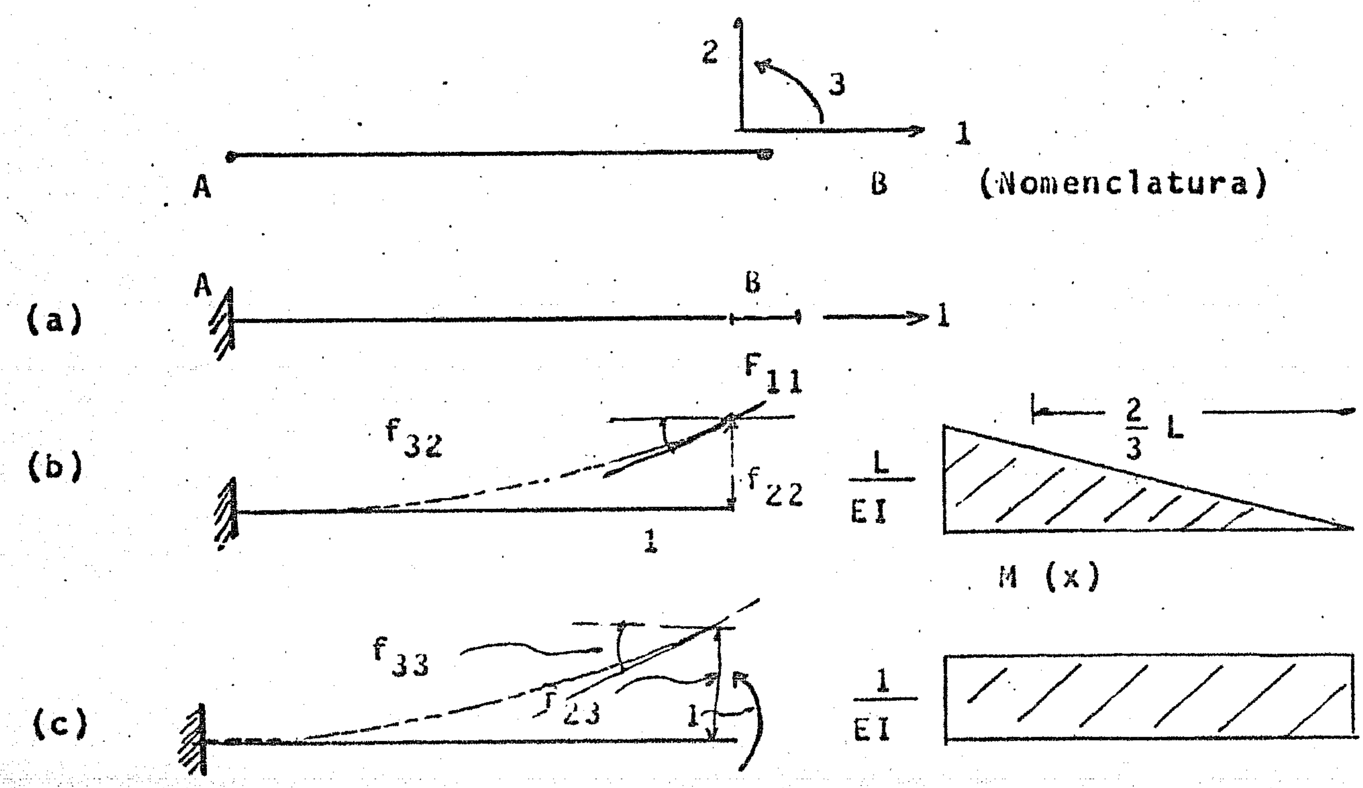
$$A = K\,D$$

K = Matriz de Rigidez de la Estructura.

VI.3.- Formación de la Matriz de Flexibilidad de una Barra.

Se muestra enseguida la formación de la Matriz de Flexibilidad del extremo de una barra, no se profundiza más en ella debido a que en los próximos temas se usa muy poco, - - aunque puede ampliarse y generalizarse el concepto tan grandemente como se amplía el de rigidez.

Obtengamos la Matriz de Flexibilidades aplicando fuerzas unitarias en el extremo B de una barra.



Los Desplazamientos originados por la aplicación de fuerzas unitarias serán los siguientes:

$$\begin{bmatrix} f_{DD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

f_{11} = Desplazamiento originado en la dirección 1 provocado por una fuerza unitaria aplicada en la dirección 1.

$$f_{11} = \frac{L}{EA}$$

$$f_{32} = \text{Al Area de Momentos} = \frac{L \times L}{EI \times 2} = \frac{L^2}{2EI}$$

f_{22} = Al producto del Area de Momentos por el brazo de palanca al punto donde se quiere conocer el desplazamiento.

$$f_{22} = \frac{L^2}{2EI} \times \frac{2}{3} = \frac{L^3}{3\ EI}$$

Similarmente para los demás desplazamientos.

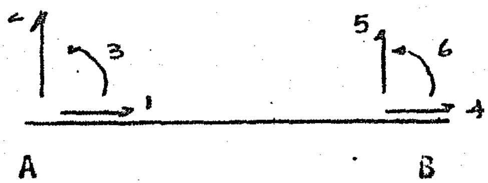
$$f_{33} = \frac{1}{EI} \times L = \frac{L}{EI}$$

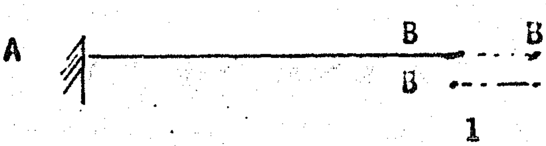
$$f_{23} = \frac{L}{EI} \times \frac{L}{2} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$
\begin{bmatrix} f_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}
$$

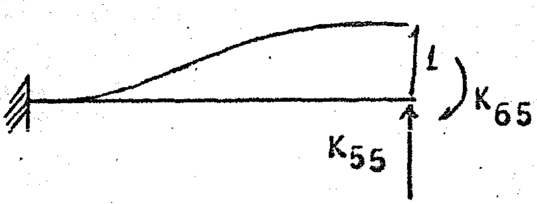
VI.4.- Formación de la Matriz de Rigidez de Nudo.

La Matriz de Rigidez de una barra la formaremos a partir de la obtención de la rigidez de uno de sus extremos, - de igual manera que para la Matriz de Flexibilidades del Capítulo anterior, consideramos un miembro con uno de sus extremos empotrado y libre el otro, pero en este caso aplicaremos desplazamientos unitarios y determinaremos las fuerzas-necesarias para producrilos; como ya se sabe estas fuerzas-se llaman coeficientes de rigidez y forman parte de la Matriz General de Rigideces de la Estructura.



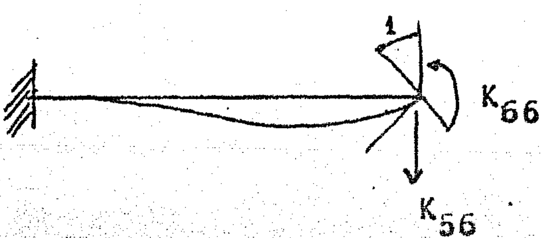


$$K_{44} = \frac{EA}{L}$$



$$K_{55} = \frac{12\ EI}{L^3}$$

$$K_{65} = -\ \frac{6\ EI}{L^2}$$



$$K_{56} = -\ \frac{6\ EI}{L^2}$$

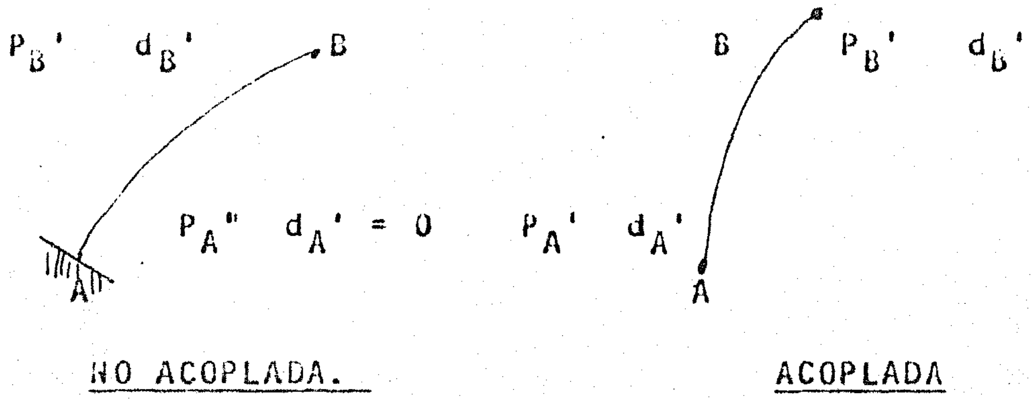
$$K_{66} = \frac{4\ EI}{L}$$

Agrupando tenemos que:

$$
K_{Db} = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12\ EI}{L^3} & -\frac{6\ EI}{L^2} \\
0 & -\frac{6\ EI}{L^2} & \frac{4\ EI}{L}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \\
\begin{array}{ccc} (4) & \quad (5) & \quad (5) \end{array} &
\end{array}
$$

A la matriz así obtenida, la consideraremos Rigidez - "No Acoplada" de barras de sección constante.

VI.5.- Relación entre rigideces "No Acopladas" y rigideces "Acopladas".



La relación existente entre las fuerzas y los desplazamientos en un miembro está dada por la Ecuación:

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \end{bmatrix} \qquad (I)$$

Esto es:

$$F_A = k_{AA}\, d_A + k_{AB}\, d_B \qquad (1)$$

$$F_B = k_{BA}\, d_A + k_{BB}\, d_B \qquad (2)$$

Por equilibrio tenemos que:

$$F_A = - H_{BA}\, F_B$$

Sustituyendo en (2) :

$$F_A = - H_{BA}\, F_B = - H_{BA}\,(k_{BA}\, d_A + k_{BB}\, d_B)$$

Comparando con la ecuación (1):

$$k_{AA} = - H_{BA} \quad k_{BA} \qquad (3)$$

$$k_{AB} = - H_{BA} \quad k_{BB} \qquad (4)$$

Si tenemos que por simetría :

$$k_{BA} = k_{AB}^{T} \qquad\qquad k_{BA} = (-H_{BA}\, k_{BB})^{T}$$

$$k_{BA} = - k_{BA}^{T} \quad H_{BA}^{T}$$

Pero como $k_{BB} = k_{BB}^{T}$, entonces:

$$k_{BA} = - k_{BB} \quad H_{BA}^{T} \qquad (5)$$

Sustituyendo éste valor en (3)

$$k_{AA} = - H_{BA} \,(-k_{BB}\, H_{BA}^{T})$$

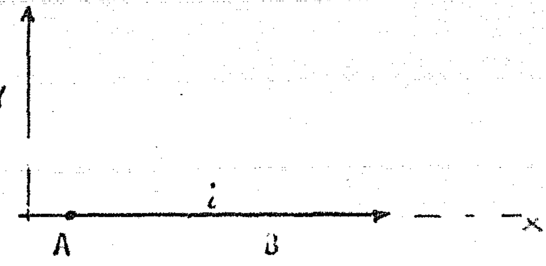
$$k_{AA} = H_{BA} \quad k_{BB} \quad H_{BA}^{T} \qquad (6)$$

Por lo tanto, sustituyendo los valores correspondientes en la EC (I) :

$$\begin{bmatrix} k_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} H_{BA}\, k_{BB}\, H_{BA}^{T} & - H_{BA}\, k_{BB} \\ \hline -k_{BB} \quad H_{BA}^{T} & k_{BB} \end{array}\right]$$

$\begin{bmatrix} k_{AB} \end{bmatrix}$, es la llamada Matriz "Acoplada" del miembro - A - B , donde

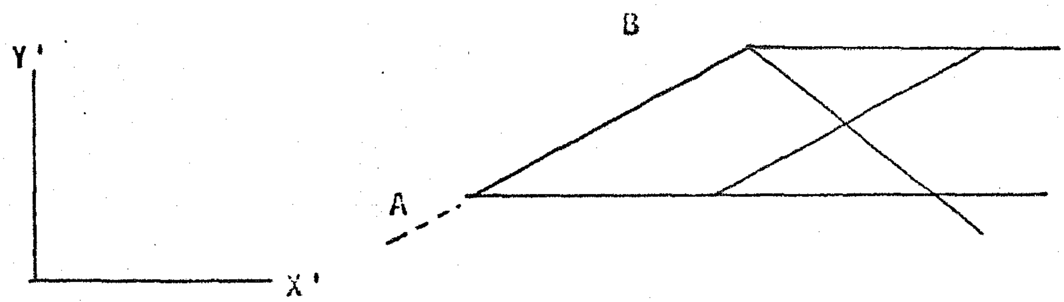
$$\left[H_{BA}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{bmatrix} \; ;$$



"Conociendo la matriz acoplada de las barras que forman una estructura bastará referirlas al Sistema Global de la misma y aplicar el Método de la Suma, para obtener la Matriz de Rigidez K de la Estructura:

VI.6.- Ensamble de la Matriz de Rigideces.

VI.6.1.- Regla de la Suma.



Considérese la barra A - B de una estructura cualquiera. Sea k_{AB} su rigidez acoplada y referida al sistema global X - Y'.

Siendo:

$$k'_{AB} = \begin{bmatrix} k'_{AA} & k'_{AB} \\ k'_{BA} & k'_{BB} \end{bmatrix}$$

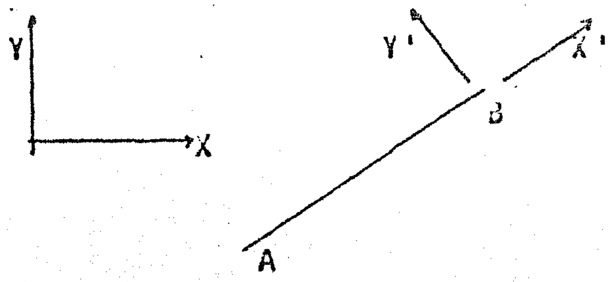
La Matriz ensamblada de la estructura se obtendrá mediante la siguiente expresión:

$$K = \sum_{j=1}^{n_B} \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} k'_{AAj} & k'_{ABj} \\ \hline k'_{BAj} & k'_{BBj} \end{array}\right] & \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \\ \begin{array}{cc} A \qquad & \qquad B \end{array} & \end{array}$$

La Ejemplificación de esta expresión se dará en los ejemplos del tema siguiente.

VI.6.2.- Generalización de La Matriz A

Para una barra, cualquiera, hemos observado que:



$$F_B^1 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$F_A^1 = - H'_{BA} \; F'_B$$

Y además, que los desplazamientos ó un vector en general al referirlo a ejes locales de un miembro, se tiene que:

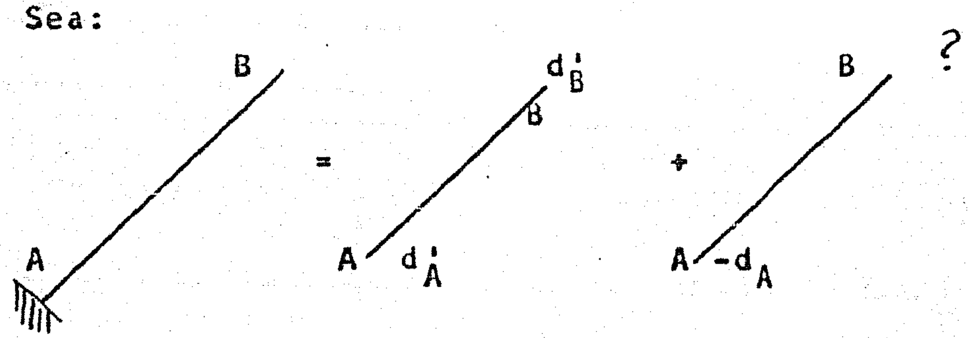
$$d'_A = T \; d_A \qquad\qquad d'_B = T \; d_B$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} \cos & \text{sen} & 0 \\ -\text{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

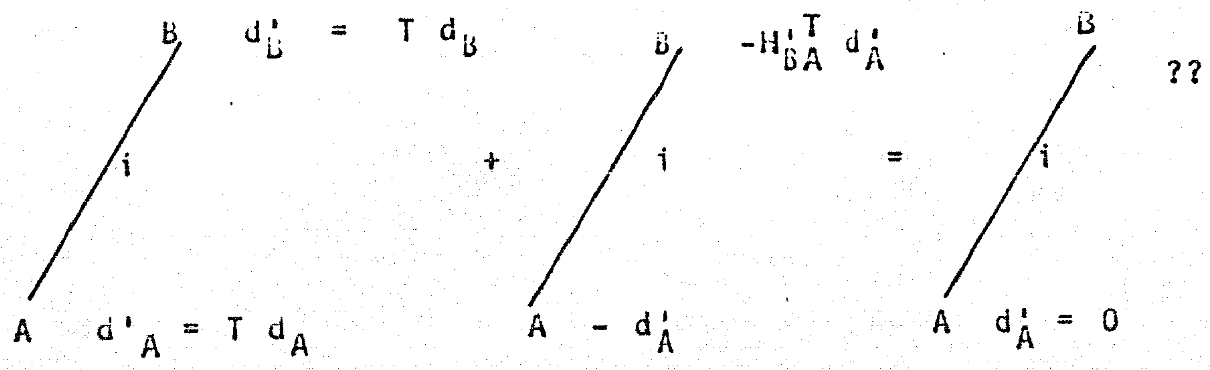
Todo ésto podemos representarlo de la forma siguiente:

Sea:



$$? = H'^{T}_{BA}\ (-d'_A) = -\ H'_{BA}\ d'_A$$

Luego entonces:



Por lo tanto:

$$?? = T\ d_B - H'^{T}_{BA}\ d'_A = T\ d_B - H'^{T}_{BA}\ T\ d_A = e_i$$

Ordenando:

$$e_i = \begin{bmatrix} -\ H'^{T}_{BA}\ T & & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \end{bmatrix}$$

Y puesto que

$$e_i = a_i \cdot d$$

Entonces

$$[a_i] = \begin{bmatrix} \underbrace{-\ H'^{T}_{BA}\ T}_{\text{NUDO A}} & \Big| & \underbrace{T}_{\text{NUDO B}} \end{bmatrix}$$

Esto es, podemos obtener la Matriz $[A]$ de orden $3n_B$ x $3n_N$, a partir de la Matriz $[a_i]$ de cada uno de sus miembros;

de tal forma que si:

$$[K'] = \begin{bmatrix} k_{bb1} & & & \\ & k_{bb2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_{bbn} \end{bmatrix}$$

; k_{bbi} = matriz de Rigidez "no aceptada" de la barra i.

Se tiene que:

$$[K] = [A]^T [K'] [A]$$

La solución de la estructura se obtendrá como:

$$[d] = [K]^{-1} [F]$$

$$[e'] = [A] [d]$$

$$[p] = [K'] [e]$$

Obteniéndose sólo P_B , en coordenadas locales de cada barra. P_A se obtendrá por Estática.

$$[P_A] = - [H'_{BA}] [P_B]$$

donde:

$$[H'_{BA}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{bmatrix}$$ (barra recta, coordenadas locales).

VII. METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DE LAS RIGIDECES.

VII.1 CONCEPCION GENERAL DEL METODO DE LAS RIGIDECES

En el capítulo IV se planteó la forma general para resolver estructuras por este método, en este capítulo aplicaremos esas -- mismas ideas en la solución de armaduras planas y Marcos planos, plantearemos varias alternativas de solución y aprovecharemos - ciertas características de algunas estructuras especiales que - ayudan a su más pronta solución.

Resumen:

a). Determinamos los desplazamientos de los nudos, una vez determinada la Matriz de Rigideces $\left[K\right]$ de la estructura:

$$\left[d\right] = \left[K\right]^{-1} \left[F\right]$$

donde

$$\left[K\right] = \left[A\right]^{T} \left[K'\right] \left[A\right]$$

Obsérvese que también puede plantearse la Solución como --- la resolución de un sistema de ecuaciones:

$$\left[K\right] \left[d\right] = \left[F\right]$$

b). Determinamos las deformaciones de los miembros por continuidad, como:

$$\left[\epsilon\right] = \left[A\right] \left[d\right]$$

c). Resolvemos la estructura encontrando los elementos mecáni-- cos en los miembros:

$$\left[p\right] = \left[K'\right] \left[\epsilon\right] \qquad \text{(Ley de Hooke)}$$

d). Comprobaremos nuestros resultados planteando el equilibrio de nuestra estructura:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(Ec. de equilibrio)}$$

VII.2 APLICACION DEL METODO A ARMADURAS PLANAS

INTRODUCCION:

Una armadura es una estructura formada por barras que sólo trabajan a fuerza axial, los nudos son articulaciones y las fuerzas externas se aplican solo en los nudos; cada nudo se puede desplazar en dos direcciones y las fuerzas externas pueden tener dos componentes.

Vectores estructurales.

a). Desplazamientos: Los desplazamientos dj tendrán dos componentes djx, djy.

Orden de $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$: $2\ n_N \times n_C$

n_N = No. de Nudos.

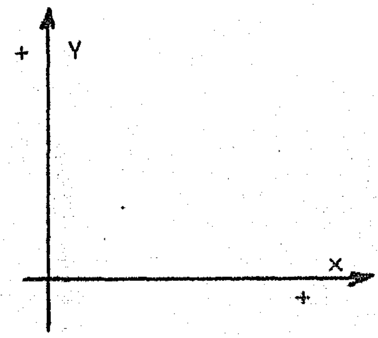
n_C = No. de Condiciones de Carga.

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

b). Fuerzas: Las fuerzas Fj tendrán dos componentes Fjx, Fjy.

Orden de $[F]$: $2n_N \times n_C$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ --- \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$



c). Deformaciones: Las deformaciones serán los alargamientos a acortamientos de las barras.

Orden de ε : $n_B \times n_C$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

\+ Alargamiento
\- Acortamiento

d). Fuerzas en las Barras: Las fuerzas en las barras serán - fuerzas axiales soalmente.

Orden de $[p]$: $n_B \times n_C$

$$[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

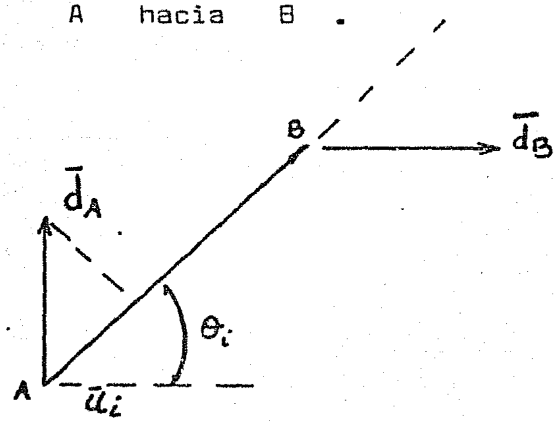
\+ Tensión
\- Compresión

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

a). Continuidad.

$$\{\varepsilon\} = [A]\{d\}$$

Obtengamos el valor de e_i para una barra i cualquiera - en función de los desplazamientos de sus nudos extremos -- A y B . Sea $\bar{u}_i$ un vector unitario pararelo a la barra i, consideraremos que la barra está orientada de -- A hacia B .



El alargamiento e_i será i-- gual a:

$$e_i = \mathrm{Proy}_{ui}\ \bar{d}_B - \mathrm{Proy}_{ui}\ \bar{d}_A$$

Pero:

$$\bar{d}_B = \begin{bmatrix} d_{Bx} \\ d_{By} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{d}_A = \begin{bmatrix} d_{Ax} \\ d_{Ay} \end{bmatrix} \quad ; \quad u_i = \begin{bmatrix} \cos\ \theta_i \\ \mathrm{sen}\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i \\ S_i \end{bmatrix}$$

por geometría se tiene que:

$$\mathrm{Proy}_{ui}\ \bar{d}_B = \bar{d}_B \cdot \bar{u}_i = d_{Bx}\ C_i + d_{By}\ s_i$$

Analogamente:

$$\mathrm{Proy}_{ui}\ \bar{d}_A = d_{Ax}\ C_i + d_{Ay}\ s_i$$

Por lo tanto:

$$e_i = d_{Bx}\ {}_{i} + d_{By}\ s_i - (d_{Ax}\ c_i + d_{Ay}\ s_i)$$

esto es:

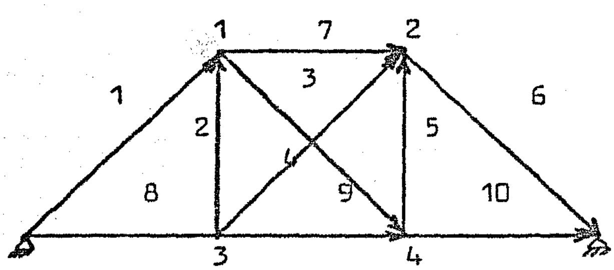
$$\begin{bmatrix} e_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_B \end{bmatrix}$$

de aquí, podemos obtenerla regla para obtener el renglón i de la matriz A que corresponde a los coeficientes de la deformación e_i

$$\text{Renglón } i \quad \begin{bmatrix} \\ e_i \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -u_i^T & +u_i^T \\ \\ A & B \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \vdots \\ d_A \\ \vdots \\ d_B \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix}$$

(Cada columna doble de A corresponde a un nudo)

Ejemplo:



$$u_1^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} =$$

$$u_2^T = u_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3^T = u_6^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$u_7^T = u_8^T = u_9^T - u_{10}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A =

NUDO →	1		2		3		4		BARRA
	0.71	0.71							1
	0	1			0	-1			2
	-0.71	0.71					0.71	-0.71	3
			0.71	0.71	-0.71	-0.71			4
			0	1			0	-1	5
			-0.71	0.71					6
	-1	0	1	0					7
					1	0			8
					-1	0	1	0	9
							-1	0	10

NOTAS:

a) En las barras cuyo nudo A o B es un apoyo, no se considera a éste como nudo.

b) Los blancos son cero

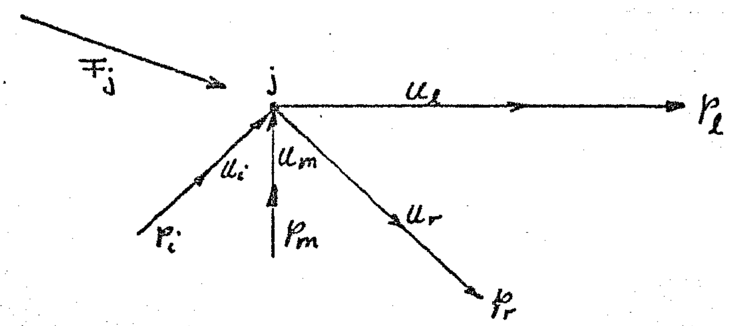
c) El orden dela matriz será: $n_B \times 2n_N$

b). LEY DE HOOKE

$$\left[P \right] = \left[K' \right] \left[\varepsilon \right]_{k_{ii}}$$

donde $\left[K' \right]$ es una Matriz Diagonal, $k_{ii} = \dfrac{E_i \, A_i}{L_i}$

c) EQUILIBRIO



Considérese un nudo (j) cualquiera de una armadura plana, al cual concurren un número n de barras y al que se le aplica una fuerza $\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix}$; si orientamos de antemano el sentido de las fuerzas en las barras, para lograr en el nudo el equilibrio tendríamos que:

$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_i \end{bmatrix} P_i + \begin{bmatrix} \mathcal{U}_m \end{bmatrix} P_m - \begin{bmatrix} \mathcal{U}_R \end{bmatrix} P_r - \begin{bmatrix} \mathcal{U}_l \end{bmatrix} P_l$$

Expresión de la cual se obtiene la regla para formar por renglones (dobles) la matriz $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T$: Cada columna corresponde a una barra i, si ésta sale del nudo le corresponde $-\begin{bmatrix} \mathcal{U}_i \end{bmatrix}$, si entra al nudo le corresponde $+\begin{bmatrix} \mathcal{U}_i \end{bmatrix}$.

$$\text{Renglón j (doble)} \quad \begin{bmatrix} \\ F_j \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & & & \\ -\mathcal{U}_i & +\mathcal{U}_m & -\mathcal{U}_r & -\mathcal{U}_l \\ & & & \end{bmatrix} \\ \text{Barra} \longrightarrow \; i \qquad m \qquad r \qquad l \end{array} \begin{bmatrix} \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \\ \vdots \\ P_r \\ \vdots \\ P_l \\ \vdots \end{bmatrix}$$

NOTAS:

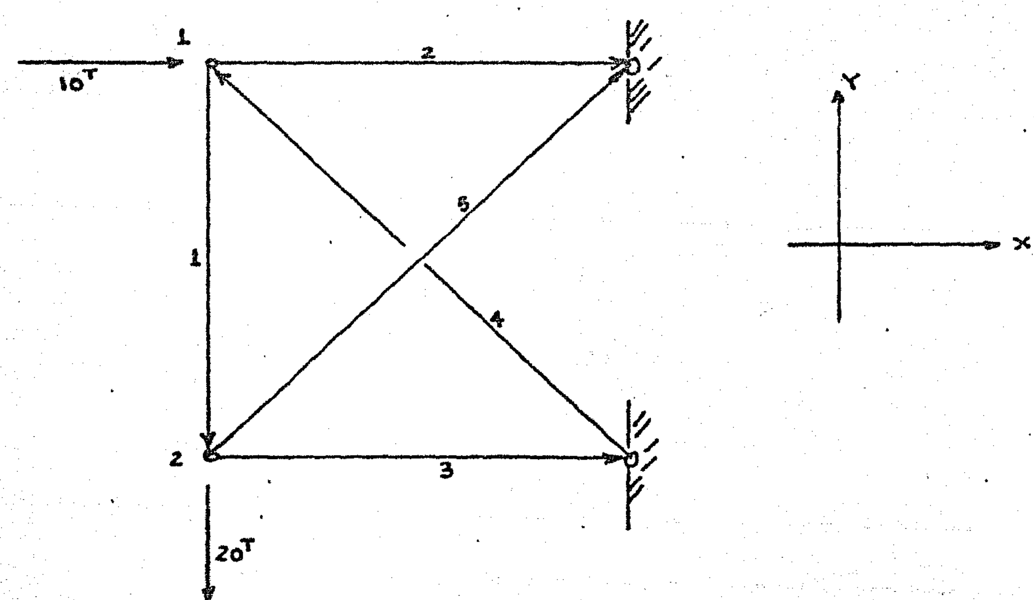
a) A los nudos que no inciden en el nudo j les corresponde un vector nulo.

b) Es obvio que esta regla coincide con la regla para formar por renglones a la matriz $\left[A \right]$

c) El orden de $\left[A^T \right]$ será: $2n_N \times n_B$

d) <u>EJEMPLOS</u>:

1. Sea la armadura de la figura siguiente en que $R = \dfrac{EA}{L} = 50$ ton/cm; (cte)



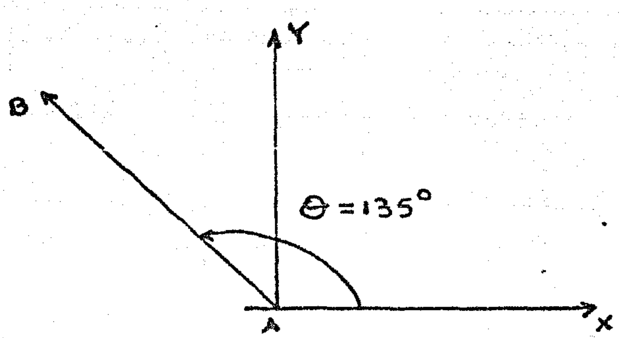
a) Determinamos la matriz de Rigideces

$$\left[K \right] = \left[A \right]^T \left[K' \right] \left[A \right]$$

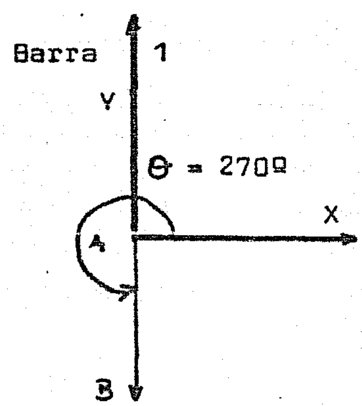
$$[K'] = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{L}\right)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{EA}{L}\right)_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{EA}{L}\right)_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{EA}{L}\right)_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{EA}{L}\right)_5 \end{bmatrix}$$

Obtenemos la matriz A , de orden ,
por renglones

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.707 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad \left[u_i^T\right] = \left[\cos\theta \ \ \operatorname{sen}\theta\right]$$



BARRA 2



$$
[K'] = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} = 50 \cdot [I]
$$

$$
[K] = [A]^T \; [K'] \; [A] = 50 \, [A]^T [I][A] = 50 \, [A]^T \, [A]
$$

$$
[K] = 50 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.7071 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.70 \end{bmatrix}
$$

$$
[K] = 50 \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 0 & -1.0 \\ 0 & & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -1.0 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = (\text{ Matriz de Rigideces })
$$

b) Determinamos los desplazamientos, eligiendo resolver el - Sistema de ecuaciones, planteamos que:

$$
\begin{bmatrix} 75 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 75 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 75 & -25 \\ 0 & -50 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}
$$

(Ver ejemplo del Método de Cholesky)

Resolviendo:

$$\begin{matrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \end{matrix} = \begin{matrix} 0.0 \\ -0.4 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{matrix}$$

c) Calculamos las deformaciones de los miembros

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.7 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.4 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.0 \\ -0.2 \\ -0.2828 \\ 0.2828 \end{bmatrix}$$

d) Encontramos las fuerzas en las Barras

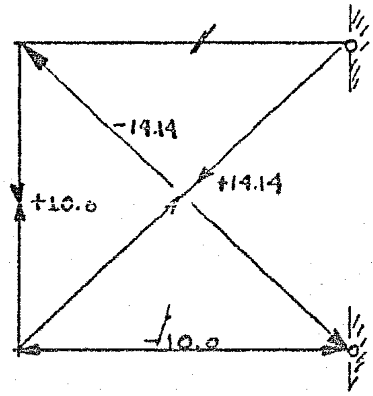
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.0 \\ -0.2 \\ -0.2828 \\ 0.2828 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 0.0 \\ -10.0 \\ -14.142 \\ 14.142 \end{bmatrix}$$

e) Comprobamos resultados

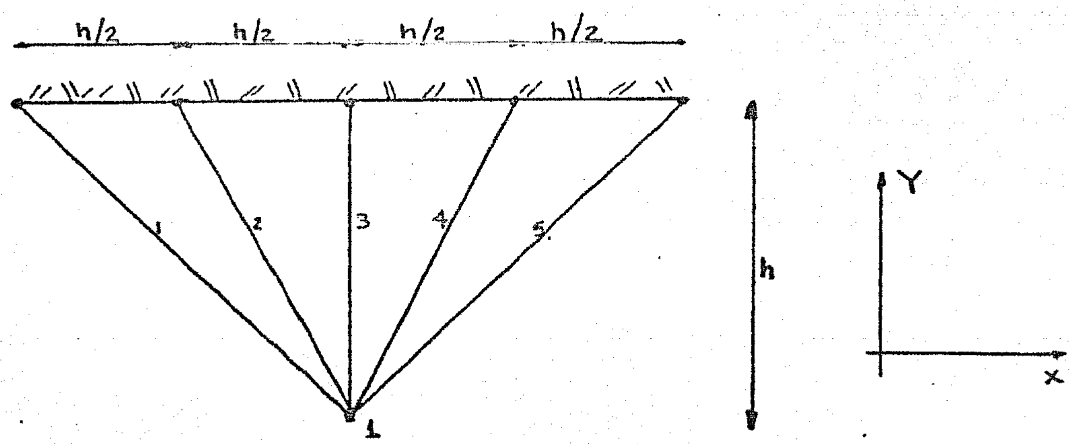
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0.707 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.0 \\ 0.0 \\ -10.0 \\ -14.142 \\ 14.142 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -20 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(Se comprueba el equilibrio)}$$

f) Representación de resultados finales:



Ejemplo.- Resolver la siguiente armadura:



a) Determinamos la matriz de rigidez $[K] = [A]^T [k] [A]$ y con ella los desplazamientos.

Por consideraciones geométricas obtenemos los vectores -- $[\vec{u}_j]^T$.

$$[u_1]^T = [0.70.71 \quad -0.7071] \; ; \; [u_2]^T = [0.447 \quad -0.894]$$

$$[u_3]^T = [0 \quad -1] \; ; \; [u_4]^T = [-0.447 \quad -0.894]$$

$$[u_5]^T = [-0.7071 \quad -0.7071]$$

formamos la matriz $[A]$ por renglones

$$[A] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.447 & -0.894 \\ 0 & -1. \\ -0.447 & -0.894 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

obtenemos $[K']$: $K_i' = EA/_{Li}$ (EA = cte)

$K_1 = K_5 = 0.707 \; EA/h$; $K_2 = K_4 = 0.894 \; EA/h$; $= \frac{EA}{h}$

(observe que $/ u_{ir} / / h = 1/Li$)

Por consiguiente $[K'] = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0.7071 & & & & \\ & 0.894 & & & \\ & & 1.000 & & \\ & & & 0.894 & \\ & & & & 0.7071 \end{bmatrix}$

obteniendo $[K] = [A]^T [K] [A]$

$$[K] = \frac{EA}{h}\begin{bmatrix} 1.064 & 0 \\ 0 & 3.136 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo la Matriz de Rigidez resultó diagonal, por lo tanto la obtención de $[d]$ será muy fácil:

$$d_{1x} = \frac{F_{1x}}{1.064}\left(\frac{h}{EA}\right)$$

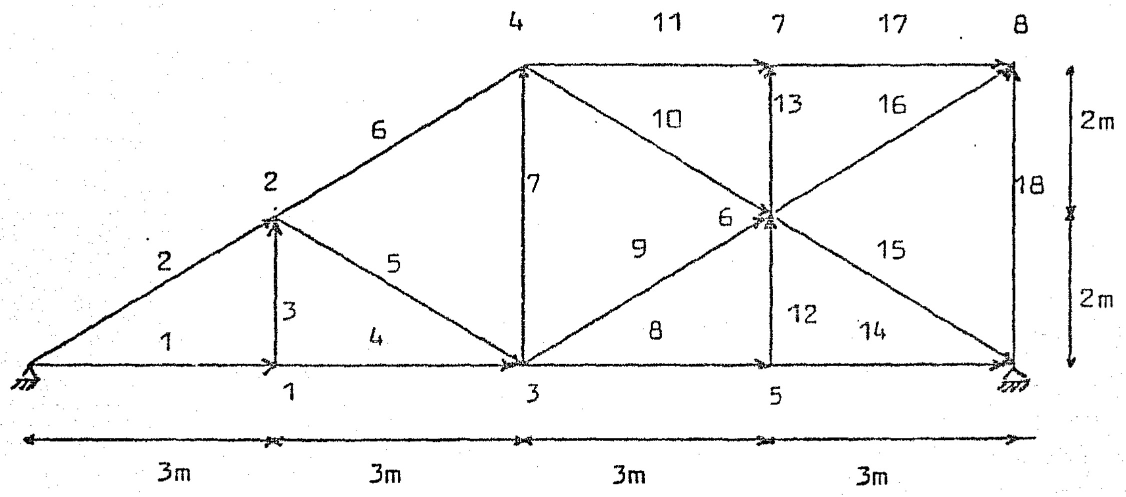
$$d_{1y} = \frac{F_{1y}}{3.136}\left(\frac{h}{EA}\right) \quad \text{ya que } [K]^{-1} = \frac{h}{EA}\begin{bmatrix} 1/1.064 & 0 \\ 0 & 1/3.136 \end{bmatrix}$$

Observe que en este ejemplo $n_N = 1$; $n_B = 5$

y: $n_B - 2n_N = 3 > 2n_N$

o sea, que por este método tendremos menos incógnitas ($2n_N$) que por el método de fuerzas ($n_B - 2n_N$). Esto en general no es cierto para armaduras convencionales, en que se tiene comunmente que $n_B - 2n_N < 2n_N$ y por lo tanto el método más conveniente de emplear es el Método de las fuerzas.

Ejemplo: Obtener la matriz $\left[A \right]$ por Renglones



Siendo $a_i = \left[-\; u_i^t \;\vdots\; u_i^t \right]$; donde $\left[u_i \right] = \left[\cos\theta \;\vdots\; \mathrm{sen}\,\theta \right]$

A B

Se tiene por ejemplo que:

- Para el renglón 1. (Miembro 1, $\theta = 0°$)

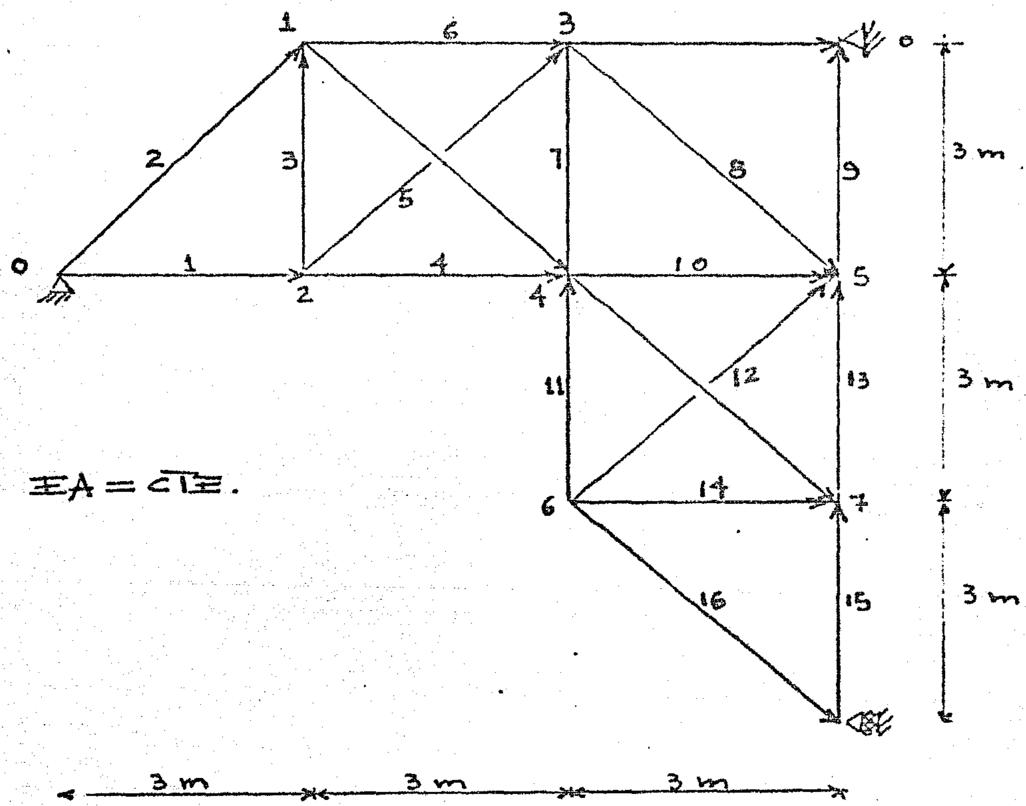
$$a_i = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & \cos 0° & \mathrm{sen}\; 0° \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

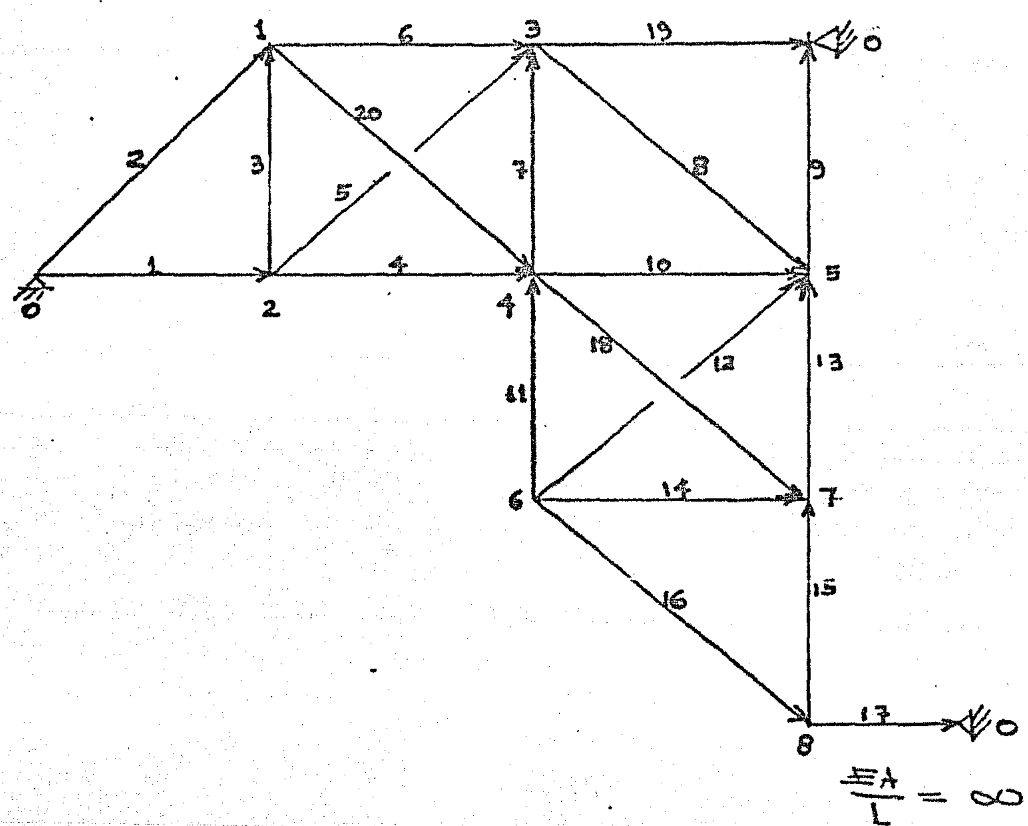
- Para el renglón 2. (Miembro 2, $\theta = 45°$)

$$a_i = \left[\begin{array}{cc:cc} -\cos 45^0 & -\,\mathrm{sen}\; 45^0 & \cos 45^0 & \mathrm{sen}\; 45^0 \end{array} \right]$$

	1		2		3		4		5		6		7		8	
1	1	0														
2			0.832	0.554												
3	0	-1	0	1												
4	-1	0			1	0										
5			-0.832	0.554	0.832	-0.554										
6			-0.832	-0.554			0.832	0.554								
7					0	-1	0	1								
8					-1	0			1	0						
9					-0.832	-0.554					0.832	0.554				
10							-0.832	0.554			0.832	-0.554				
11							-1	0					1	0		
12									0	-1	0	1				
13											0	-1	0	1		
14									-1	0						
15											-0.832	0.554				
16											-0.832	-0.554			0.832	0.554
17													-1	0	1	0
18															0	1

Ejemplo: Plantear la Matriz de Rigideces de la sig_iente -- armadura:





=

Barra \ Nudo	1		2		3		4		5		6		7		8	
1			1	0												
2	0.71	0.71														
3	0	1	0	-1												
4			-1	0			1	0								
5			-0.71	-0.71	0.71	0.71										
6	-1	0			1	0										
7					0	1	0	-1								
8					-0.71	0.71			0.71	-0.71						
9									0	-1						
10							-1	0	1	0						
11							0	1			0	1				
12									0.71	0.71	-0.71	-0.71				
13									0	1			0	-1		
14											-1	0	1	0		
15													0	1	0	-1
16											-0.71	0.71			0.71	-0.71
17															-1	0
18							-0.71	0.71					0.71	0.71		
19					-1	0										
20	-0.71	0.71					0.71	-0.71								

$[K^s] =$

0.333																			
	0.236																		
		0.333																	
			0.333																
				0.236															
					0.333														
						0.333													
							0.236												
								0.333											
									0.333										
										0.333									
											0.236								
												0.333							
													0.333						
														0.333					
															0.236				
																α			
																	0.236		
																		0.333	
																			0.236

$\times EA$

$[A]^T[K^s] =$

	0.167	0			-0.333														-0.167
	0.167	0.333																	0.167
0.333		0	-0.333	-0.167															
		-0.333	0	-0.167															
				0.167	0.333	0	-0.167											-0.333	
				0.167	0	0.333	0.167											0	
			0.333			0			-0.333	0							-0.167		0.167
			0			-0.333			0	0.333							0.167		-0.167
							0.167	0	0.333		0.167	0							
							-0.167	-0.333	0		0.167	0.333							
										0	-0.167		-0.333		-0.167				
										-0.333	-0.167		0		0.167				
												0	0.333	0			0.167		
												-0.333	0	0.333			-0.167		
														0	.167	--			
														-0.333	-0.167	0			

$\times EA$

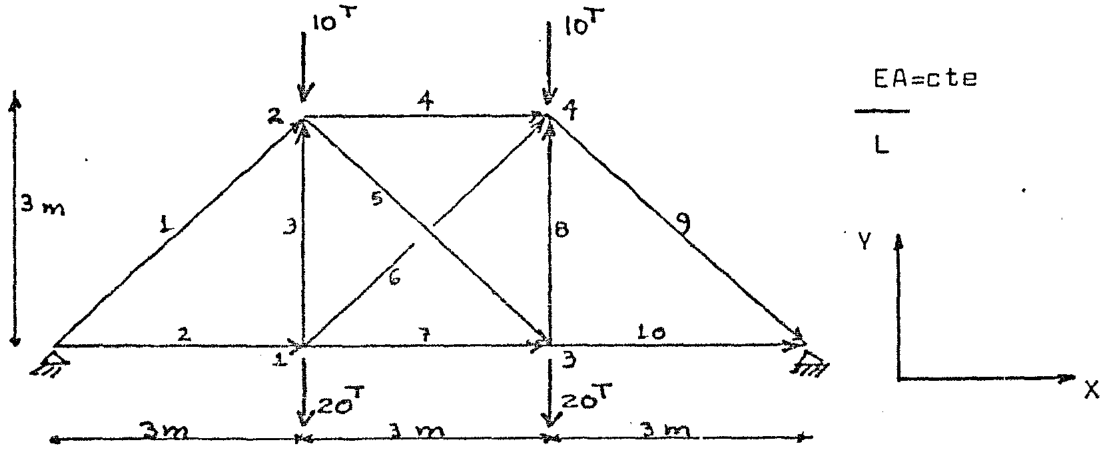
[K] =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.569	0	0	0	-0.333	0	-0.118	-0.118	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.569	0	-0.333	0	0	0.118	-0.118	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.785	0.118	-0.118	-0.118	-0.333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-3333	0.118	0.4512	-0.118	-0.118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-0.333	0	-0.118	-0.118	0.902	0	0	0	-0.118	0.118	0	0	0	0	0	0
6	0	0	-0.118	-0.118	0	0.236	0	-0.333	0.118	-0.118	0	0	0	0	0	0
7	-0.118	0.118	-0.333	0	0	0	0.902	-0.236	-0.333	0	0	0	-0.118	0.118	0	0
8	0.118	-0.118	0	0	0	-0.333	-0.236	0.902	0	0	0	-0.333	0.118	-0.118	0	0
9	0	0	0	0	-0.118	0.118	-0.333	0	0.569	0.333	-0.118	-0.118	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0.118	-0.118	0	0	0	0.902	-0.118	0.118	0	-0.333	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.118	-0.118	0.569	0	-0.333	0	-0.118	0.118
12	0	0	0	0	0	0	0	-0.333	-0.118	0.118	0	0.569	0	0	0.118	-0.118
13	0	0	0	0	0	0	-0.118	0.118	0	0	-0.333	0	0.4512	-0.118	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0.118	-0.118	0	-0.333	0	0	-0.118	0.785	0	-0.333
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.167	0.118	0	0	0	-0.167
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.118	-0.118	0	-0.333	-0.167	0.4512

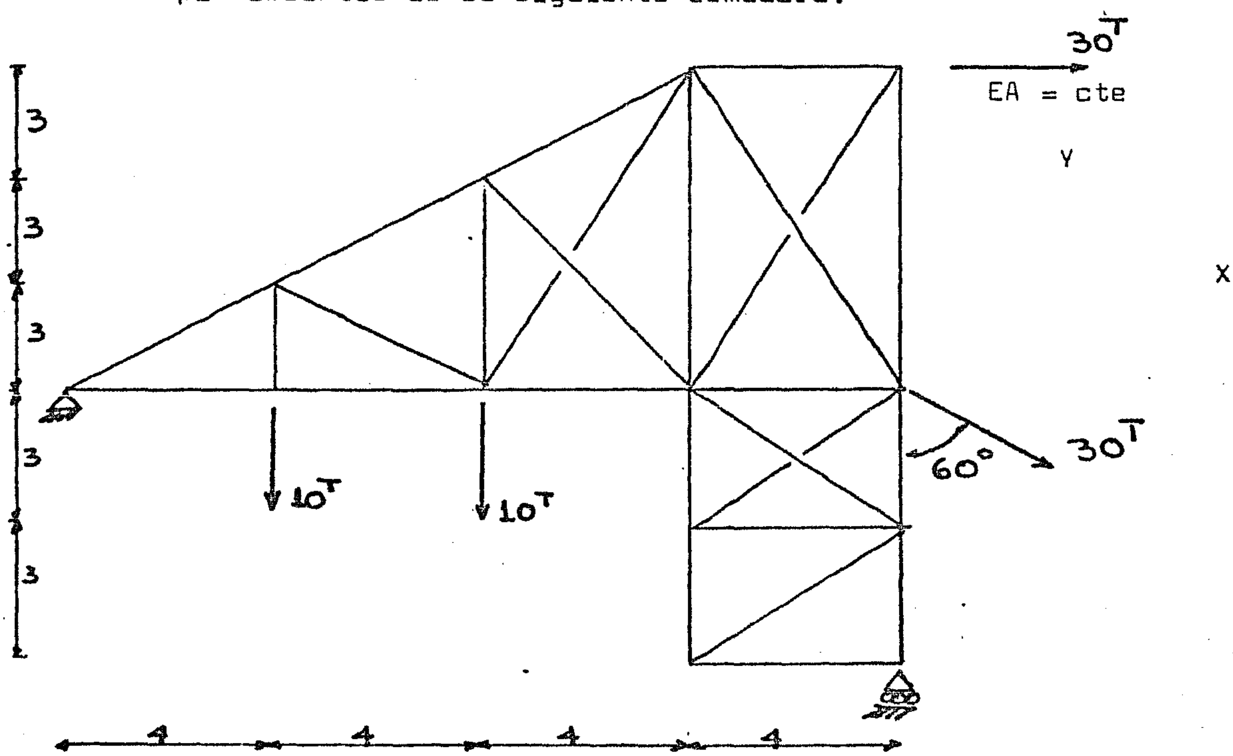
× EA

Ejercicios:

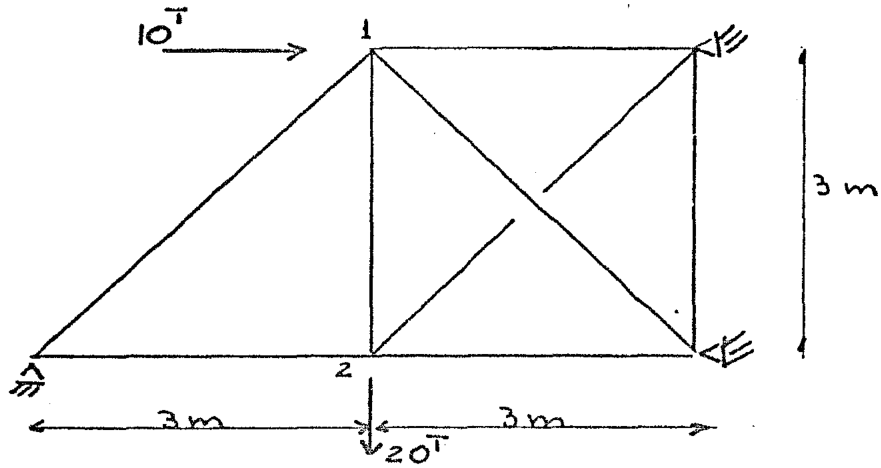
1). Dada la armadura de la figura siguiente, resolverla:



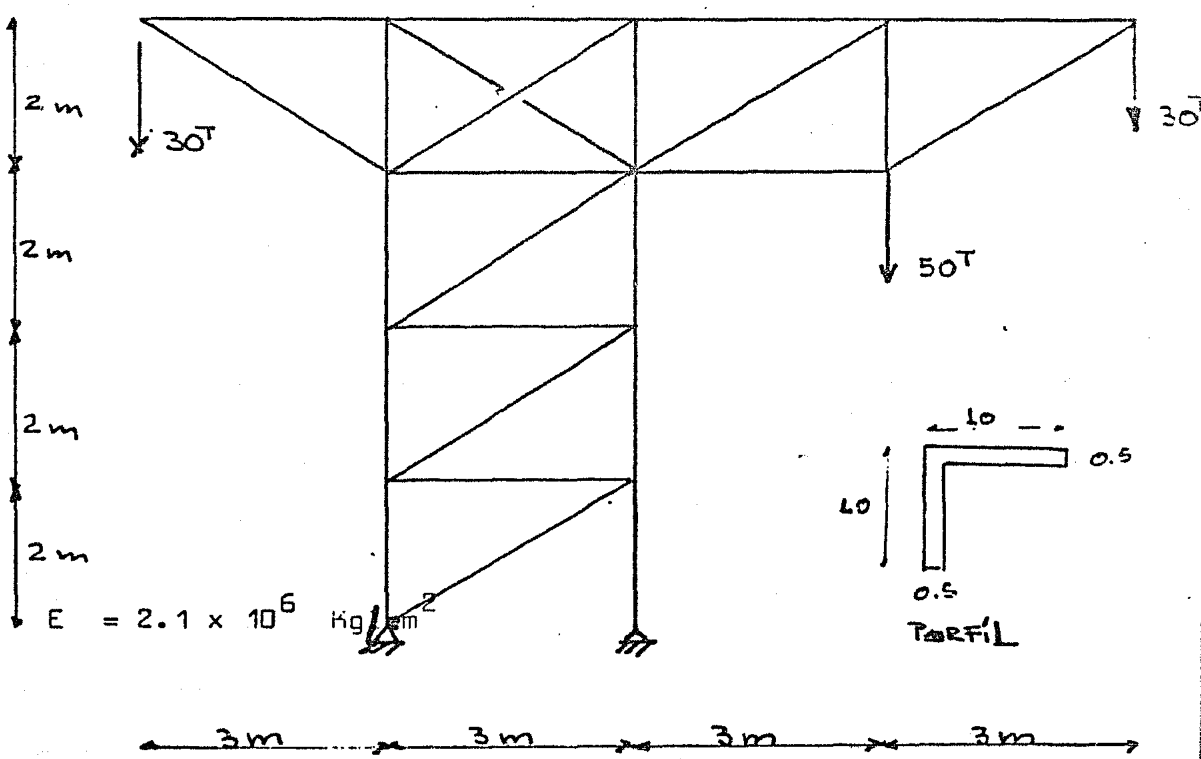
2) Plantear el Sistema de Ecuaciones para obtener los desplazamientos de la siguiente armadura:



3) Resolver la siguiente armadura:



4) Usando "CECAFI-MATRICES" resolver la siguiente armadura:



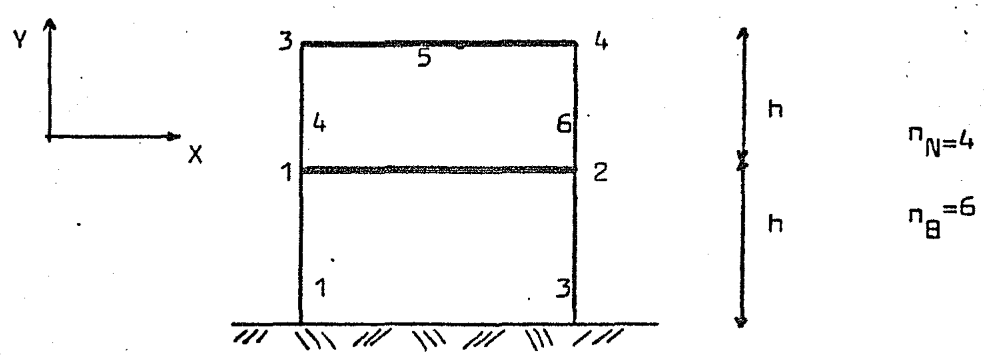
$E = 2.1 \times 10^6$ Kg/cm^2

VII.3 APLICACION DEL METODO A MARCOS PLANOS

INTRODUCCION

Entenderemos por marco plano a una estructura formada por ---- miembros en un sólo plano y que tienen su eje de simetría en - el mismo, de tal manera que los esfuerzos resultantes, en una- sección cualquiera de un miembro del marco, consisten generalmente de un par de flexión, una fuerza cortante y una fuerza - axial. Las deformaciones significativas en este tipo de es--- tructuras son las debidas a flexión, y fuerza axial si los --- elementos son esbeltos; en este capítulo estudiaremos marcos - formados por barras en las que sólo consideraremos deformación por flexión, sin considerar acortamientos o alargamientos de - las mismas.

Como un ejemplo de marco plano tenemos el siguiente pórtico:



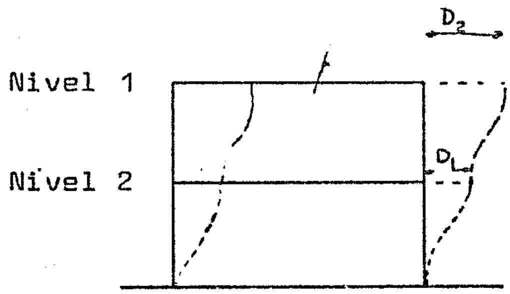
Este marco está formado por seis barras que se conectan en --- cuatro nudos, observando que los nudos son nudos elásticos.

VECTORES ESTRUCTURALES

a) Desplazamientos. $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$.

En los marcos planos, por considerarse flexión en las ba-- rras solamente, se considera a los giros (ϕ) de los nu--

dos como desplazamiento. Al <u>no considerarse acortamiento o alargamiento</u> de las barras, los desplazamientos de los nudos son muy limitados, a cada desplazamiento lineal le llamaremos un grado de libertad; en nuestro ejemplo los nudos no tienen desplazamientos dy por estar impedidos por las columnas; los desplazamientos dx serán iguales para los nudos 1 y 2 (D_1) y para los nudos 3 y 4 (D_2) por no deformarse axialmente las trabes, a estos desplazamientos (D_1, D_2) por tanto, se les llamará desplazamientos de los nudos 1 y 2. Para el ejemplo se tiene que:



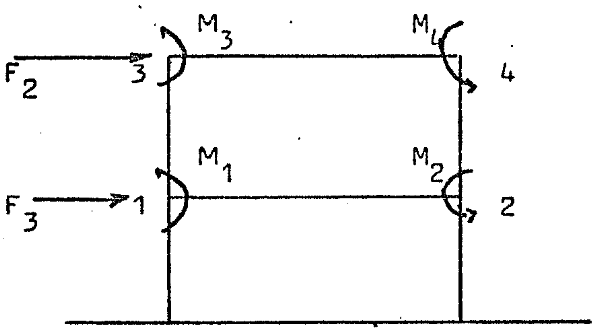
$$d = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

D^+ (+) φ

Converción de signos.

b) Fuerzas $\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$.

Las fuerzas $\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$ serán momentos externos aplicados en los nudos (M_1, M_2, ..., M_N) y fuerzas paralelas a los grados de libertad de la estructura, para el ejemplo serán fuerzas horizontales aplicadas en los niveles 1 y 2.



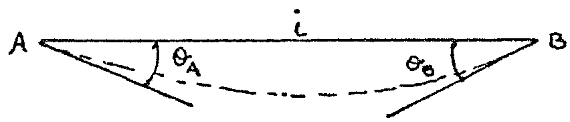
$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

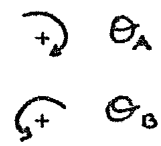
F + (+) M

Converción de signos.

c) Deformaciones $\left[\varepsilon\right]$

Lo más conveniente será considerar como las deformaciones de las barras a las deformaciones angulares θ_A , θ_B (se supondrán orientadas las barras $\overrightarrow{AB}$) medidas a partir - de la recta que une a A y B después de deformarse - la barra





Conversión de -- signos.

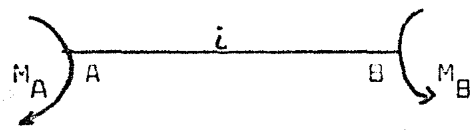
$$\left[e_i\right] = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

en nuestro ejemplo:

$$\left[\varepsilon\right] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{A3} \\ \theta_{B3} \\ \theta_{A4} \\ \vdots \\ \theta_{A6} \\ \theta_{B6} \end{bmatrix} \; ; \; (2n_B \times n_C)$$

d) Elementos Mecánicos en las Barras p .

Para ser congruentes con la definición de las deformaciones, definiremos como fuerzas en las barras a los momentos flexionantes en los extremos de la misma A y B .



M_A ↷+ Conversión de signos.

M_B ↶+

$$[p_i] = \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}$$

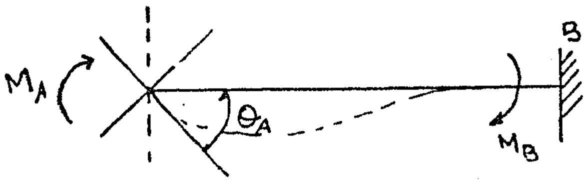
Por lo tanto, para el ejemplo:

$$[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ \vdots \\ M_{A6} \\ M_{B6} \end{bmatrix} \quad ; \text{ orden } 2n_B \times n_C$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DELAS BARRAS

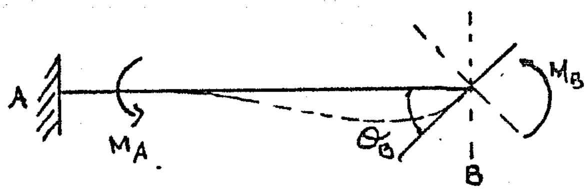
Por el hecho de tener dos componentes de deformación y de fuerza en las barras, la relación lineal entre ellas será ahora una matriz de 2 x 2.

$$\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$



$$M_A = \frac{4E\ I}{L} \quad A$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} \quad A$$



$$M_A = \frac{2EI}{L} \quad B$$

$$M_B = \frac{4EI}{L} \quad B$$

De acuerdo con la converción de signos adoptada:

$$M_A = \frac{4EI}{L}\theta_A - \frac{2\ EI}{L}\theta_B$$

$$M_B = \frac{2EI}{L}\theta_A + \frac{4EI}{L}\theta_B$$

o sea que:

$$\begin{bmatrix} k_i \end{bmatrix} = \frac{E_i\ I_i}{L_i} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

donde:

E_i = Módulo de elasticidad dela barra

I_i = Momento de Inercia de la sección transversal de la barra de sección

L_i = Longitud de la barra recta.

La matriz K' de la estructura que estábamos considerando como ejemplo será:

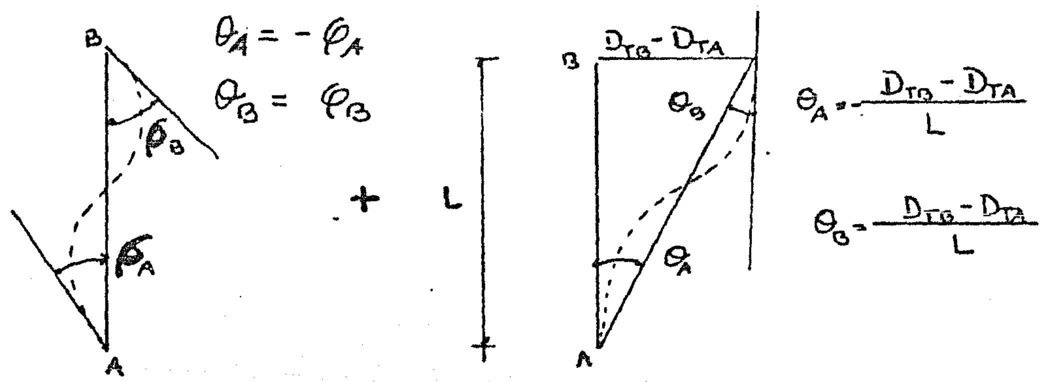
$$\left[K' \right] = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_6 \end{bmatrix}$$; orden – $2_B \times 2$

<u>Principios fundamentales.</u>

a). Continuidad.

$$\left[\varepsilon \right] = \left[A \right] \left[d \right]$$

La deformación de una barra será función de los giros de los nudos extremos (φ_A, φ_B) y de los des-- plazamientos transversales de las mismas (D_{TA}, D_{TB}).



o sea:

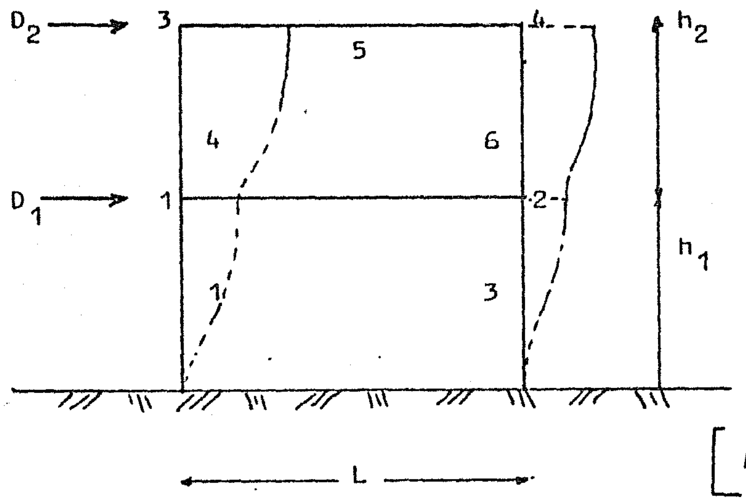
$$\theta_A = -\varphi_A + \frac{D_{TA}}{L} - \frac{D_{TB}}{L}$$

$$\theta_B = +\varphi_B - \frac{D_{TA}}{L} + \frac{D_{TB}}{L}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{Ai} \\ \\ \theta_{B_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/L & -1/L \\ \\ 0 & 1 & -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ D_{TA} \\ D_{TB} \end{bmatrix}$$

Apliquemos estas fórmulas a cada uno de los elementos del marco de nuestro ejemplo. De esta forma se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$, obsérvese que cada columna de $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$ corresponde a un valor de $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$ y cada renglón doble a un valor $\begin{bmatrix} e_i \end{bmatrix}$



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & D_1 & D_2 \end{array} \\
\left[A\right] = &
\begin{array}{c}
e_1 \\ \\ e_2 \\ \\ e_3 \\ \\ e_4 \\ \\ e_5 \\ \\ e_6 \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & -1/h_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1/h_1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/h_1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & +1/h_1 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1/h_2 & -1/h_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1/h_2 & -1/h_2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & +1/h_2 & -1/h_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1/h_2 & 1/h_2
\end{array}\right]
\end{array}
$$

El orden de $[A]$ será : $2\eta_B \times (\eta_N + \eta_D)$

b) Ley de Hooke.

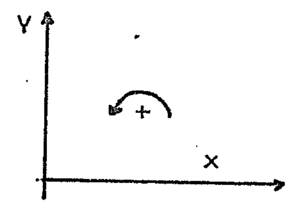
De aquí obtendremos los esfuerzos en las barras (Momentos en los extremos).

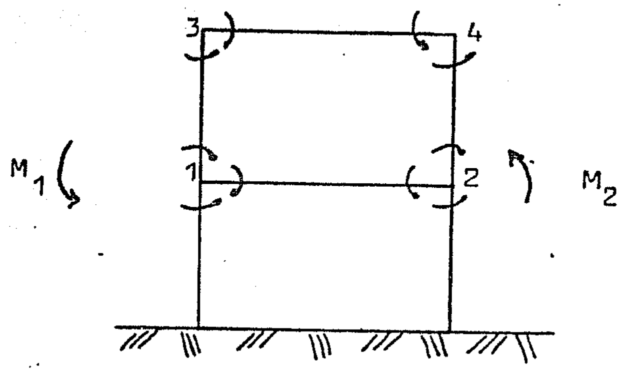
$$\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} .$$

c) Equilibrio.

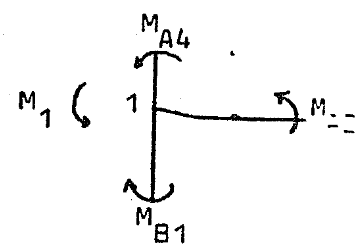
$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix}$$

Es interesante obtener directamente A por considera--- ciones de equilibrio unicamente, esto es:





$\Sigma M = 0$



Nudo 1

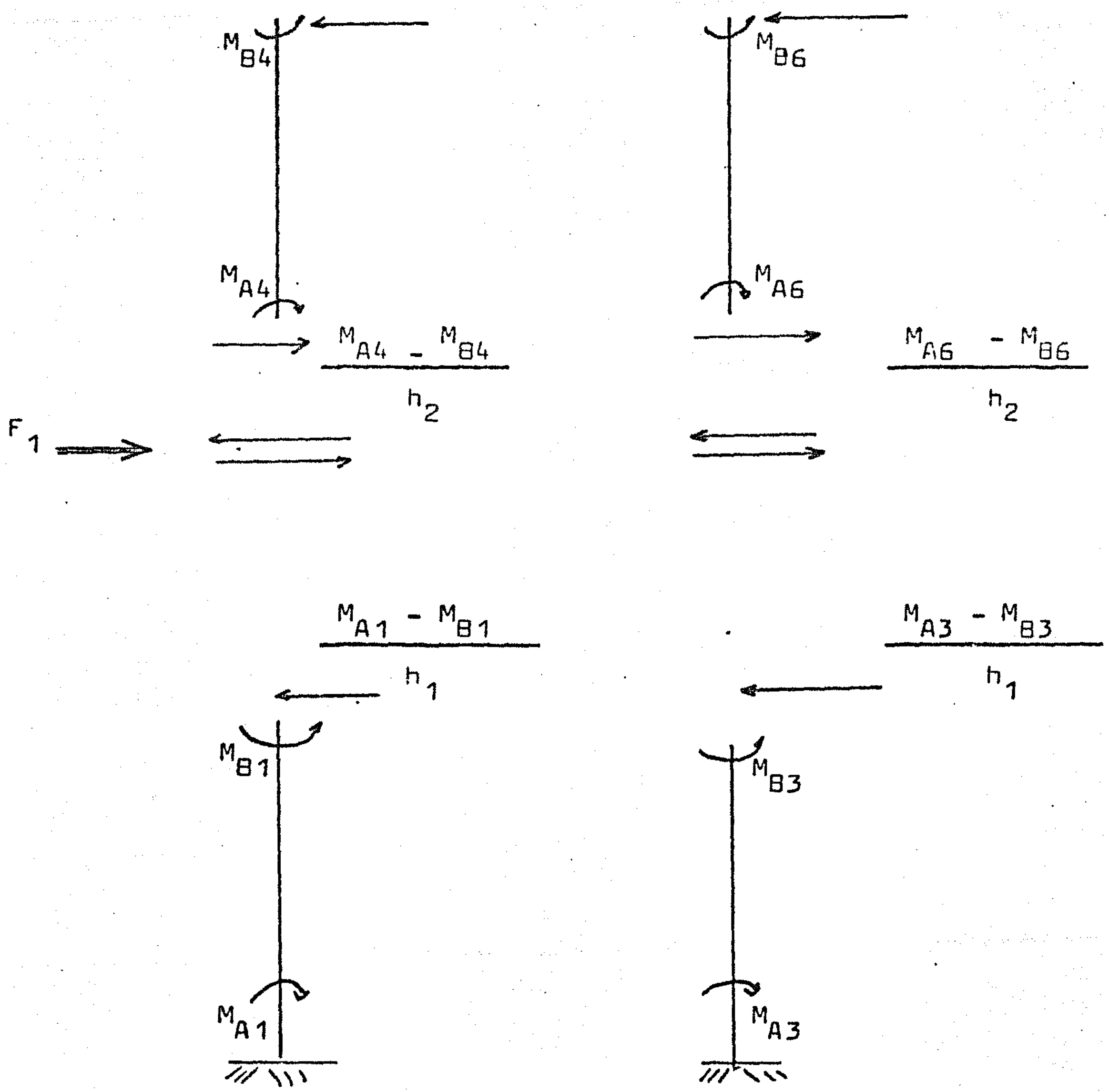
$$M_1 = M_{B1} - M_{A2} - M_{A4}$$

Nudo 2

$$M_2 = M_{B2} + M_{B3} - M_{A6}$$

$\vdots$

etc.

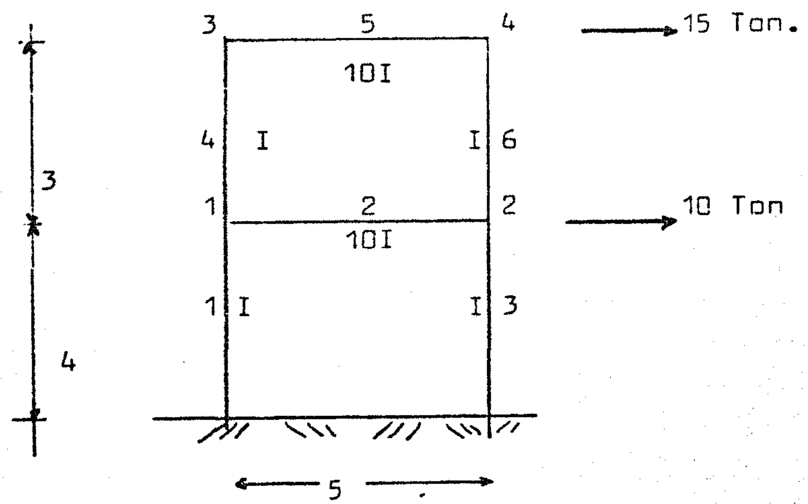


$\sum$ Fuerzas en nivel 1 = 0

$$F_1 = -\left(\frac{M_{A1} - M_{B1}}{h_1}\right) - \left(\frac{M_{A3} - M_{B3}}{h_1}\right) + \left(\frac{M_{A4} - M_{B4}}{h_2}\right) + \left(\frac{M_{A6} - M_{B6}}{h_2}\right)$$

Ejemplos sobre el Método de Rigideces

1). Resolver por el Método de Rigidez el siguiente marco:



a). Se obtienen los desplazamientos una vez obtenida la matriz de Rigidez de la estructura.

$$[K'] = EI \times \begin{bmatrix}
1.0 & -0.5 & & & & & & & & & & \\
-0.5 & 1.0 & & & & & & & & & & \\
 & & 8.0 & -4.0 & & & & & & & & \\
 & & -4.0 & 8.0 & & & & & & & & \\
 & & & & 1.0 & -0.5 & & & & & & \\
 & & & & -0.5 & 1.0 & & & & & & \\
 & & & & & & 1.333 & -0.667 & & & & \\
 & & & & & & -0.667 & 1.333 & & & & \\
 & & & & & & & & 8.0 & -4.0 & & \\
 & & & & & & & & -4.0 & 8.0 & & \\
 & & & & & & & & & & 1.333 & -0.667 \\
 & & & & & & & & & & -0.667 & 1.333
\end{bmatrix}$$

$$14.333\varphi_1 + 0.667\varphi_3 - 0.292\,D_1 + 0.667\,D_2 = 0$$

$$0.667\varphi_1 + 13.333\varphi_3 - 0.667\,D_1 + 0.667\,D_2 = 0$$

$$-0.584\varphi_1 - 1.333\varphi_3 + 1.264\,D_1 - 0.889\,D_2 = 10/_{EI}$$

$$1.333\varphi_1 + 1.333\varphi_3 - 0.889\,D_1 + 0.889\,D_2 = 15/_{EI}$$

Resolviendo:

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.90 \\ -2.90 \\ -0.991 \\ -0.991 \\ 72.333 \\ 95.00 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}$$ (Desplazamientos de los nudos.

b). Obtención de las deformaciones en las barras:

$$\left[\varepsilon \right] = \left[A \right] \left[d \right]$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{B2} \\ \theta_{A3} \\ \theta_{B3} \\ \theta_{A4} \\ \theta_{B4} \\ \theta_{A5} \\ \theta_{B5} \\ \theta_{A6} \\ \theta_{B6} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & -0.333 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.333 & 0.333 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0.333 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.333 & 0.333 \end{array}\right] \begin{bmatrix} -2.90 \\ -2.90 \\ -0.991 \\ -0.991 \\ 72.333 \\ 85.00 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}$$

$$
[A] = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & -0.333 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -0.333 & 0.333 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0.33 & -0.33 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -0.33 & 0.33
\end{bmatrix}
$$

$$
[A]^T [K'] [A] = \begin{bmatrix}
10.333 & 4.0 & 0.667 & 0 & -0.2917 & 0.667 \\
4.0 & 10.333 & 0 & 0.667 & -0.292 & 0.667 \\
0.667 & 0 & 9.333 & 4.0 & -0.667 & 0.667 \\
0 & 0.667 & 4.0 & 9.333 & -0.667 & 0.667 \\
-0.292 & -0.292 & -0.667 & -0.667 & 1.264 & 0.889 \\
0.667 & 0.667 & 0.667 & 0.667 & 0.889 & 0.889
\end{bmatrix} EI \text{ (Matri de Rigi}
$$

Planteando el sistema de ecuaciones:

$$
[K] \, [d] = [F]
$$

Y simplificando por simetría:

$$
\varphi_1 = \varphi_2
$$

$$
\varphi_3 = \varphi_4
$$

$$
\begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{B2} \\ \theta_{A3} \\ \theta_{B3} \\ \theta_{A4} \\ \theta_{B4} \\ \theta_{A5} \\ \theta_{B5} \\ \theta_{A6} \\ \theta_{B6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.0833 \\ +15.1833 \\ +2.90 \\ -2.90 \\ -18.0833 \\ +15.1833 \\ -4.656 \\ +6.546 \\ +0.991 \\ -0.991 \\ -4.656 \\ +6.546 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}
$$

c) Elementos Mecánicos sobre las Barras:

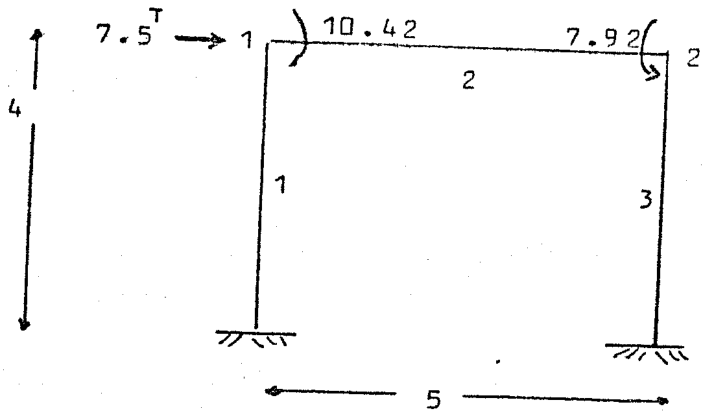
$$
[p] = [K'] \; [\varepsilon]
$$

$$
\begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \\ M_{A4} \\ M_{B4} \\ M_{A5} \\ M_{B5} \\ M_{A6} \\ M_{B6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.67 \\ +24.22 \\ +34.80 \\ -34.80 \\ -25.67 \\ +24.22 \\ -10.58 \\ +11.85 \\ +11.85 \\ -11.85 \\ -10.58 \\ +11.85 \end{bmatrix}
$$

d) El equilibrio se comprueba aplicando equilibrio.

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = 0$$

2) Resolver el siguiente ejemplo:



$EI_c = 40\ 000$ ton m²

$EI_T = 60\ 000$ ton m²

a) Se determinan los desplazamientos de los nucos.

1) Matriz de Rigidez

$$\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40\ 000 & -20\ 000 & & & & \\ -20\ 000 & 40\ 000 & & & & \\ & & 48\ 000 & -24\ 000 & & \\ & & -24\ 000 & 48\ 000 & & \\ & & & & 40\ 000 & -20\ 000 \\ & & & & -20\ 000 & 40\ 000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi_1 & \varphi_2 & D_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \end{array}$$

$$K = \begin{bmatrix} 88\,000 & 24\,000 & 15\,000 \\ 24\,000 & 88\,000 & 15\,000 \\ 15\,000 & 15\,000 & 15\,000 \end{bmatrix}$$

$$88\,000_{1} + 24\,000_{2} + 15\,000D_{1} = 10.42$$
$$24\,000_{1} + 88\,000_{2} + 15\,000D_{1} = 7.92$$
$$15\,000_{1} + 15\,000_{2} + 15\,000D_{1} = 7.50$$

Resolviendo

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.040 \\ 0.0008 \\ 0.459 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

b). Determinación de las deformaciones de los Miembros.

$$\begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{B2} \\ \theta_{A3} \\ \theta_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1148 \\ +0.1547 \\ -0.04 \\ 0.0008 \\ -0.1148 \\ +0.1156 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

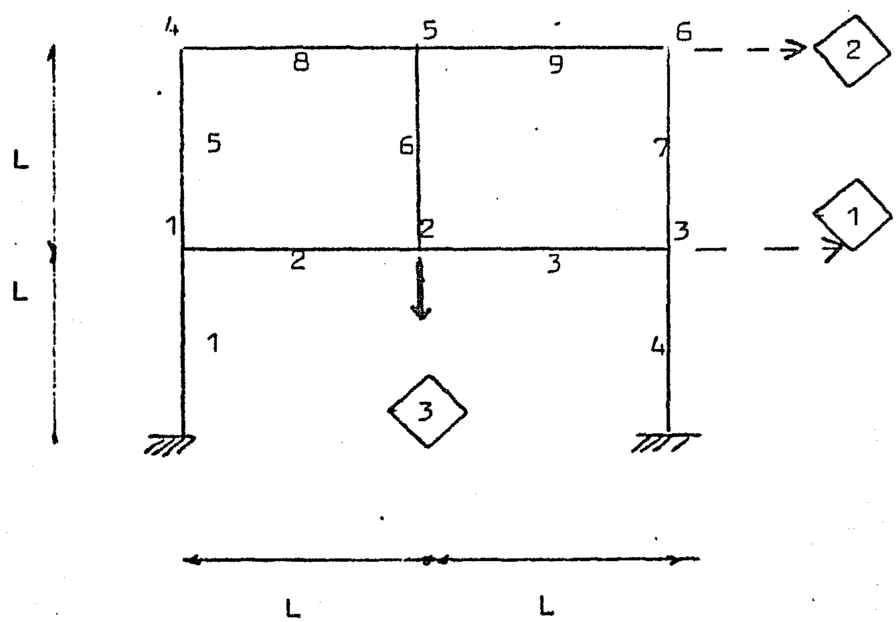
c) Obtención de los Momentos.

$$\begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.687 \\ 8.485 \\ -1.935 \\ 0.997 \\ 6.905 \\ 6.922 \end{bmatrix}$$

d) Los resultados se comprueban como:

$$\begin{bmatrix} 10.42 \\ 7.92 \\ 7.50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -0.25 & 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.687 \\ 8.485 \\ -1.935 \\ 0.997 \\ 6.905 \\ 6.922 \end{bmatrix} = \text{C}$$

3) Determinar la Matriz de Rigidez del siguiente -- marco.



Se tienen dos grados horizontales (D_1, D_2) y uno vertical (D_3), por lo tanto $n_D = 3$

a) Se obtiene la matriz de continuidad A aplicando la fórmula:

$$\begin{bmatrix} e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/L & -1/L \\ 0 & 1 & -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ D_{TA} \\ D_{TB} \end{bmatrix}$$

esto es:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	D_1	D_2	D_3
						1	-1/L		
1	1						1/L		
	-1								-1/L
2		1							1/L
3		-1							1/L
			1						-1/L
4							-1/L		
			1				1/L		
5	-1						1/L	-1/L	
				1			-1/L	1/L	
6		-1					1/L	-1/L	
					1		-1/L	1/L	
7			-1				1/L	-1/L	
						1	-1/L	1/L	
8				-1					-1/L
					1				1/L
9					-1				1/L
						1			-1/L

b) Se obtiene la Matriz de Rigidez $\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_9 \end{bmatrix}$$

donde $\left[k_i \right] = \dfrac{EI}{L_i} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$;

c) Se obtiene $\left[K \right] = \left[A \right]^T \left[K' \right] \left[A \right]$, efectuando multiplicaciones matriciales tegemos:

$$
\left[K \right] = \frac{EI}{L} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
12 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6/L & 6/L \\
2 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & -6/L & 6/L & 0 \\
0 & 2 & 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6/L & -6/L \\
2 & 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & -6/L & 6/L & 6/L \\
0 & 2 & 0 & 2 & 12 & 2 & -6/L & 6/L & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & -6/L & 6/L & -6/L \\
\hline
0 & -6/L & 0 & -6/L & -6/L & -6/L & 60/L^2 & -36/L^2 & 0 \\
6/L & 6/L & 6/L & 6/L & 6/L & 6/L & -36/L^2 & 36/L^2 & 0 \\
6/L & 0 & -6/L & 6/L & 0 & -6/L & 0 & 0 & 48/L^2
\end{array} \right]
$$

Obtención directa de la Matriz $\left[K \right]$

Recordando la interpretación física de la matriz $\left[K \right]$ podemos obtener un procedimiento que nos permite crear directamente esta Matriz sin tener que recurrir al producto $\left[A \right]^T \left[K' \right] \left[A \right]$ para la obtención de ella.

De la ecuación de Equilibrio,

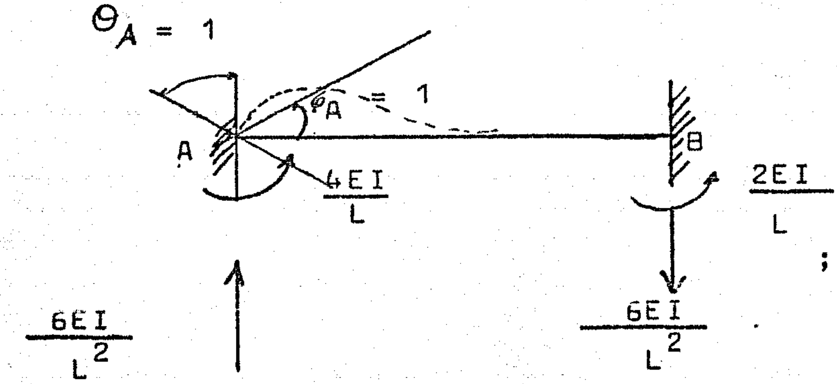
$$\left[F \right] = \left[K \right] \left[d \right]$$

si $\left[d \right] = \left[I \right]$ obtenemos $\left[F \right] = \left[K \right]$

esto es que la Matriz de Rigidez está formada por las fuerzas que hay que aplicar a la estructura para obtener desplazamientos unitarios.

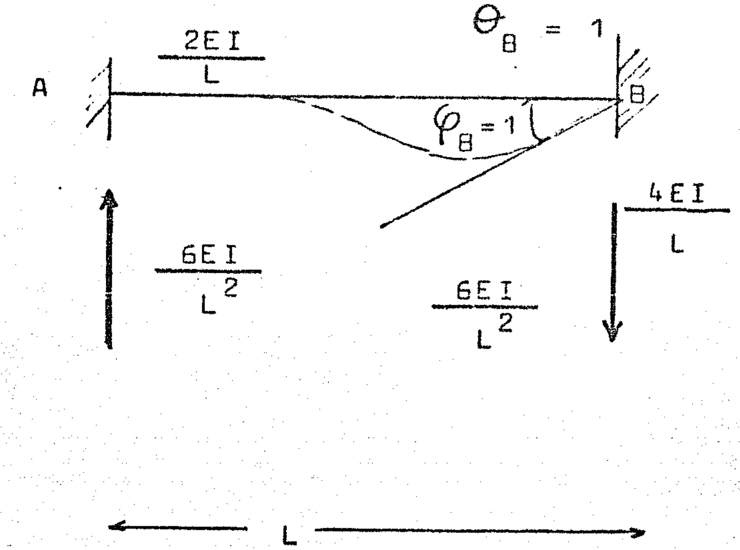
Para poder aplicar esta interpretación habrá que obtener la matriz completa de una barra recta (no se consideran acortamientos de los miembros).

a) $\varphi_A = 1 \quad (\theta_A = -1)$

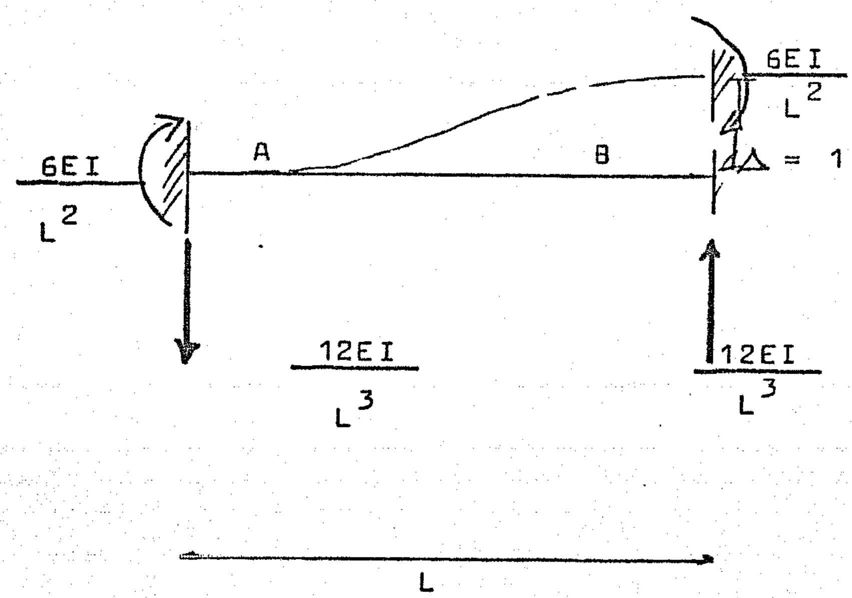


; $\frac{6EI}{L^2} = \frac{1}{L}\left[\frac{4EI}{L} \ldots\right.$

b) $\varphi_B = 1, \ (\theta_B = +1)$



c) $\Delta = 1$



En resumen:

$$\overline{M}_A = \frac{4EI}{L}\varphi_A + \frac{2EI}{L}\varphi_B - \frac{6EI}{L^2}\Delta$$

$$\overline{M}_B = \frac{2EI}{L}\varphi_A + \frac{4EI}{L}\varphi_B - \frac{6EI}{L^2}\Delta$$

$$\overline{F}_A = \frac{6EI}{L^2}\varphi_A + \frac{6EI}{L^2}\varphi_B - \frac{12EI}{L^3}\Delta$$

$$\overline{F}_A = -\frac{6EI}{L^2}\varphi_A - \frac{6EI}{L^2}\varphi_B + \frac{12EI}{L^3}\Delta$$

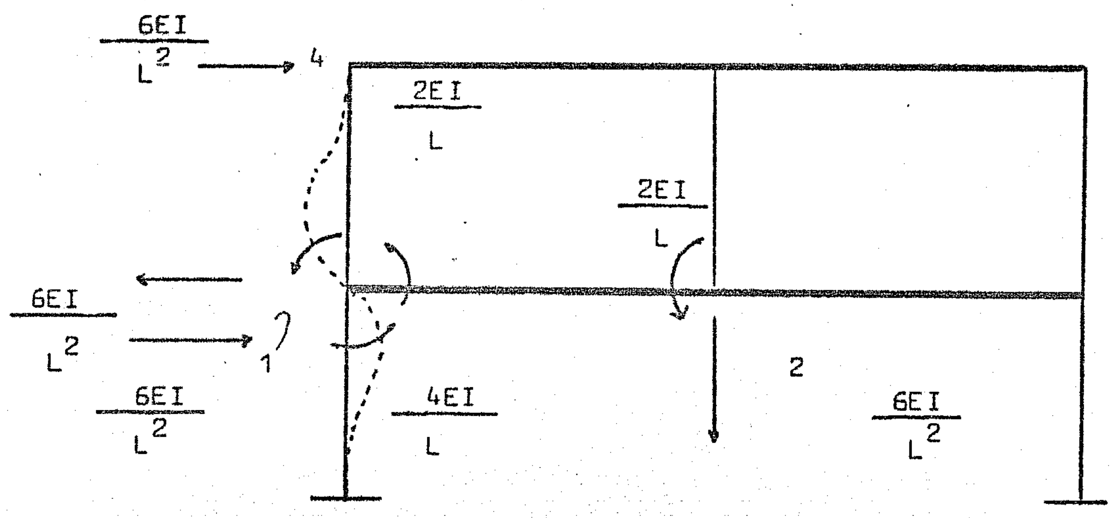
donde $\overline{M}_A$, $\overline{M}_B$ <u>momentos externos</u> en A y B $[\circlearrowleft +]$
y $\overline{F}_A$ y $\overline{F}_B$ son <u>fuerzas externas</u> en A y B

($A \longrightarrow B$ $\uparrow +$), o bien:

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_A \\ \overline{M}_B \\ \overline{F}_A \\ \overline{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-6EI}{L^2} & +\frac{12\,EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Con estos resultados anteriores obtengamos la 1a. columna de $\left[K\right]$ del ejemplo anterior.

$$\varphi_1 = 1 \quad , \quad \varphi_2 = \varphi_3 \ldots = D_3 = 0$$



$$M_1 = 3 \times \frac{4EI}{L} = \frac{12EI}{L}$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L}$$

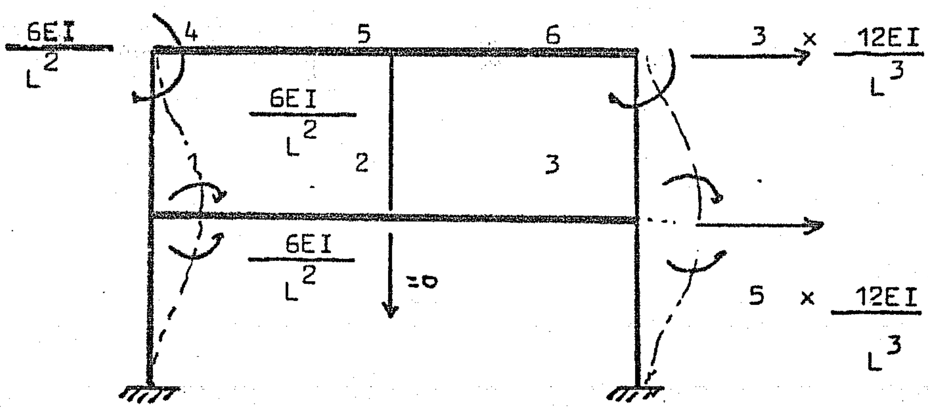
$$M_4 = \frac{2EI}{L}$$

$$F_1 = -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} = 0$$

$$F_2 = \frac{6EI}{L^2}$$

Obtengamos la 7a. columna de K

$$D_1 = 1, \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = D_2 = D_3 = 0$$



$D_1 = 1$

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$M_3 = 0$$

$$M_4 = -\frac{6EI}{L^2}$$

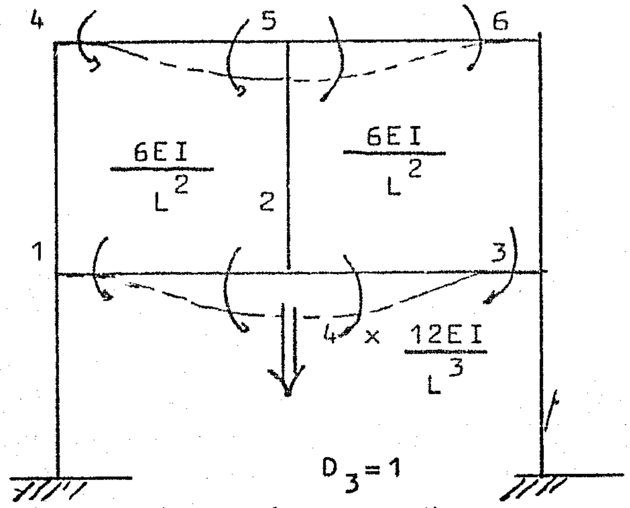
$$M_5 = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$M_6 = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$F_1 = \frac{60EI}{L^3}$$

$$F_2 = \frac{36EI}{L^3}$$

Obtengamos la 9a. columna:



$$M_1 = \frac{6EI}{L^2}$$

$$M_2 = 0$$

$$M_3 = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$M_4 = \frac{6EI}{L^2}$$

$$M_5 = 0$$

$$M_6 = -\frac{6EI}{L^2}$$

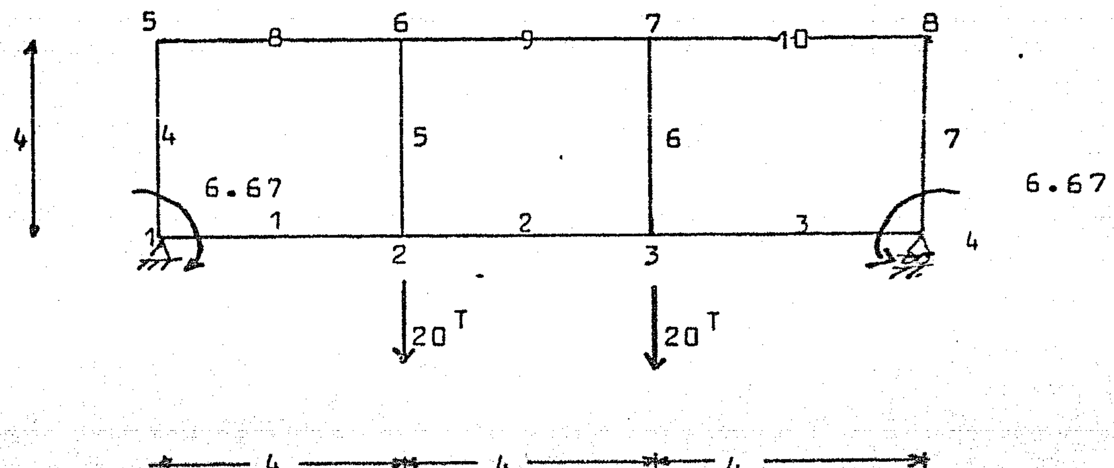
$$F_1 = 0$$

$$F_2 = 0$$

$$F_3 = \frac{48\ EI}{L^3}$$

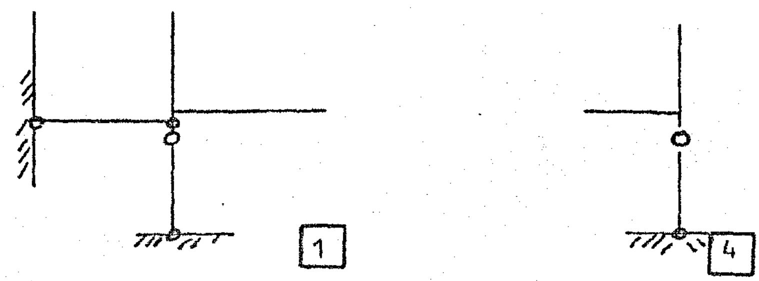
3) Ejemplo. Vigas Vierendel.

Obténganse los elementos mecánicos de la siguiente estructura.



a). Obténgase los desplazamientos de los nudos.

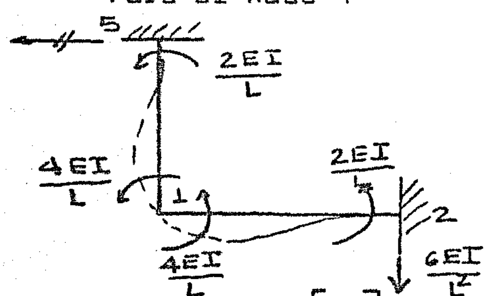
Los apoyos 1 y 4 son de la siguiente forma:



En este problema tenemos dos grados de libertad verticales (D_1, D_2) y uno horizontal cuyo desplazamiento será nulo $(D_3=0)$ por simetría de las cargas y de la estructura.

Obtengamos $\left[K \right]$ directamente:

Para el nudo 1



No se considera la fuerza en el nudo 5 porque se considera que los desplazamientos horizontales van a ser nulos, $(D_3 = 0)$.

La Matriz $\left[K \right]$ quedaría :

$\left[K \right] = \frac{EI}{L}$

8	.2			2				1.5	0
2	12	2			2			0	1.5
	2	12	2			2		-1.5	0
		2	8				2	0	-1.5
2				8	2			1.5	0
	2			2	12	2		0	1.5
		2			2	12	2	-1.5	0
			2			2	8	0	-1.5
1.5	0	-1.5	0	1.5	0	-1.5	0	3.0	-1.5
0	1.5	0	-1.5	0	1.5	0	-1.5	-1.5	3.0

Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

observamos que por simetría se tiene que:

$$\varphi_1 = -\varphi_4 \; ; \; \varphi_2 = -\varphi_3 \; ; \varphi_5 = -\varphi_8 \; ; \varphi_6 = -\varphi_7$$

$$D_1 = D_2$$

por lo tanto se tienen <u>cinco</u> ecuaciones de la siguiente -- forma:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_5 \\ M_6 \\ F_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 & 1.5 \\ 2 & 10 & 0 & 2 & 1.5 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & 1.5 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ D_1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.31 \\ -2.49 \\ 2.49 \\ 4.31 \\ -3.16 \\ -2.78 \\ 2.78 \\ 3.16 \\ 26.07 \\ 26.07 \end{bmatrix} \times \frac{L}{EI}$$

b) Obténgase las deformaciones de los miembros :

La Matriz de Continuidad para la estructura quedaría como:

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & D_1 & D_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc|c|c}
-1 & & & & & & & & -1/L & \\
 & 1 & & & & & & & 1/L & \\
\hline
 & -1 & & & & & & & 1/L & -1/L \\
 & & 1 & & & & & & -1/L & 1/L \\
\hline
 & & -1 & & & & & & & 1/L \\
 & & & 1 & & & & & & -1/L \\
\hline
-1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
\hline
 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
\hline
 & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & -1 & & & & -1/L & \\
 & & & & & 1 & & & 1/L & \\
\hline
 & & & & & -1 & & & 1/L & -1/L \\
 & & & & & & 1 & & -1/L & 1/L \\
\hline
 & & & & & & -1 & & & 1/L \\
 & & & & & & & 1 & & -1/L
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Obtengamos $\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}$ de la mitad de la estructura :

$$
\begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 4.03 \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.49 \\ 2.49 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 \\ -3.16 \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.49 \\ -2.78 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.36 \\ 3.74 \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} e_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.78 \\ 2.78 \end{bmatrix}
$$

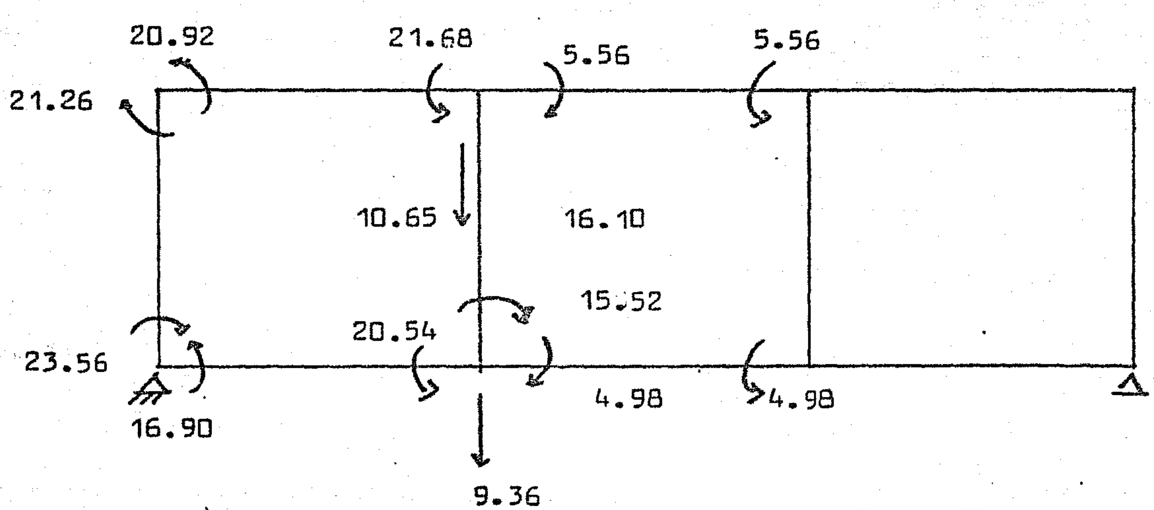
c) Se calculan los Momentos mecánicos aplicando equilibrio:

$$\begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.90 \\ 20.54 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.98 \\ 4.98 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.56 \\ -21.26 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.52 \\ -16.10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.92 \\ 21.69 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.56 \\ 5.56 \end{bmatrix}$$

d) Comprobando el equilibrio directamente:



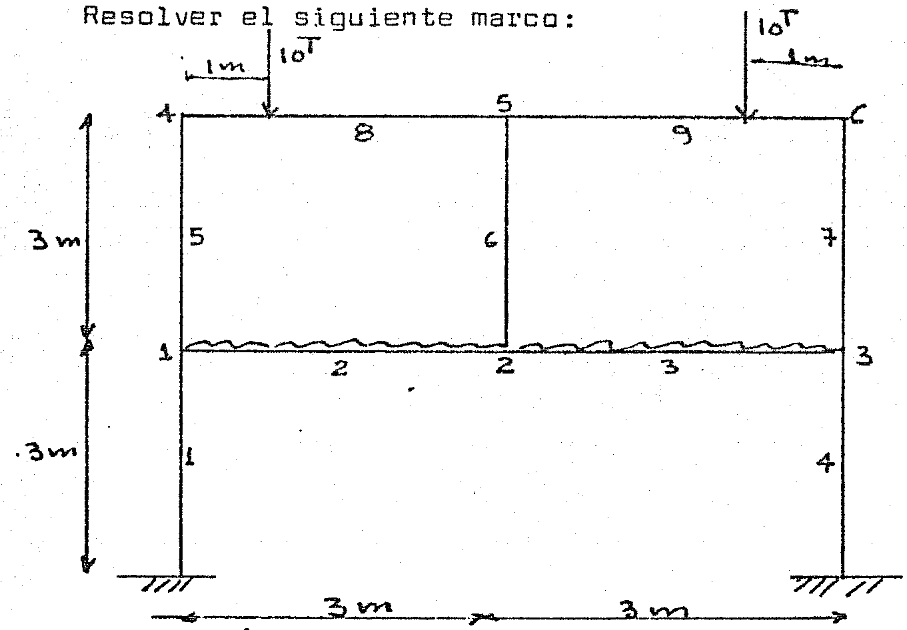
(Acciones de Nudo Sobre Barra)

VII.4 PROBLEMAS DE APLICACION COMUN

VIII.4.1 MARCOS CON CARGAS SOBRE LOS MIEMBROS

Ejemplo:

Resolver el siguiente marco:

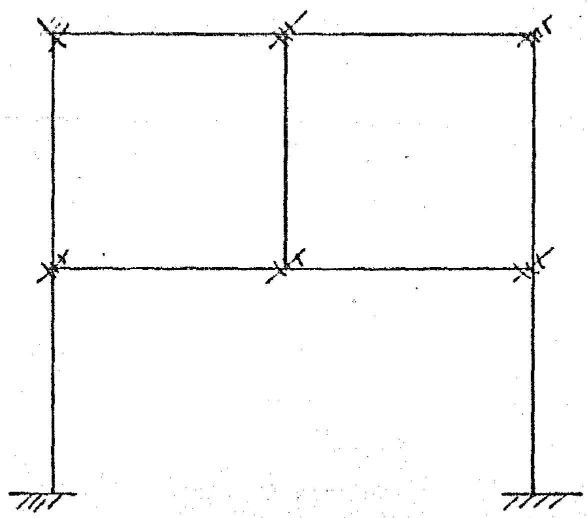


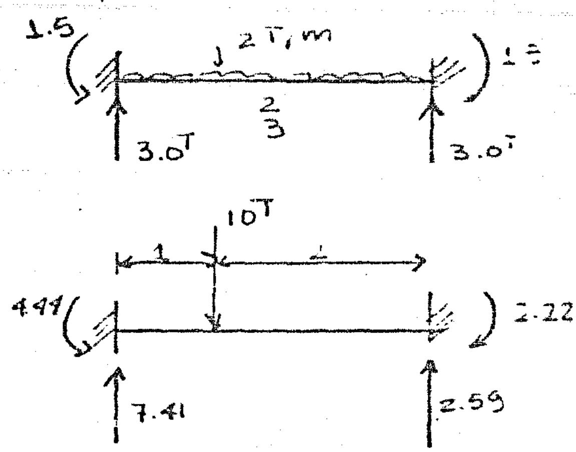
La solución para este tipo de problemas se basa en superponer dos estados de equilibrio de la estructura :

Estado I:

Se supone $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = 0$. Todos los nudos estarán empotrados, o sea, no existen giros ni desplazamientos.

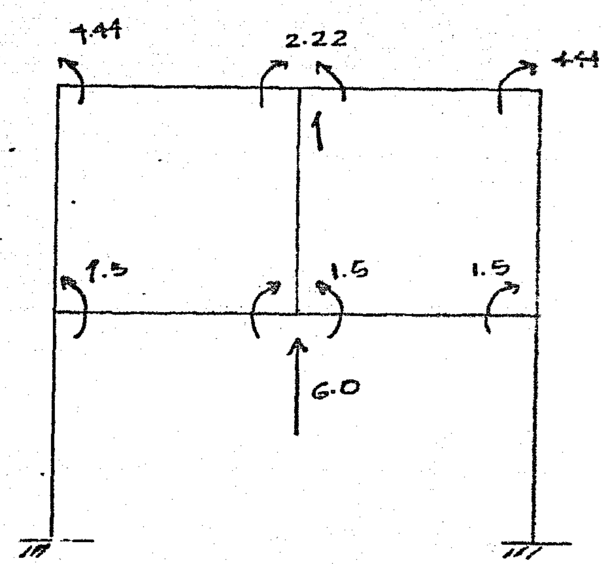
Se obtienen las "Fuerzas de Fijación" que haya que aplicar para mantener este estado.

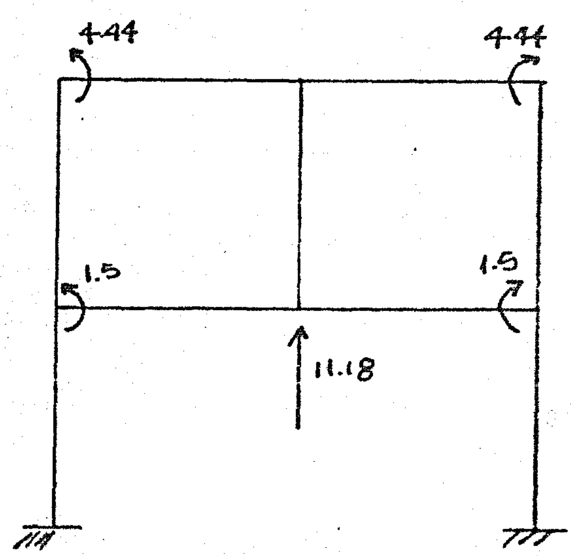




esto es:

$$
\begin{bmatrix} P_1 \\ \\ P_2 \\ \\ P_3 \\ \\ P_4 \\ \\ P_5 \\ \\ P_6 \\ \\ P_7 \\ \\ P_8 \\ \\ P_9 \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -1.5 \\ -1.5 \\ -1.5 \\ -1.5 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -4.44 \\ -2.22 \\ -2.22 \\ -4.44 \end{bmatrix} \quad ;
$$

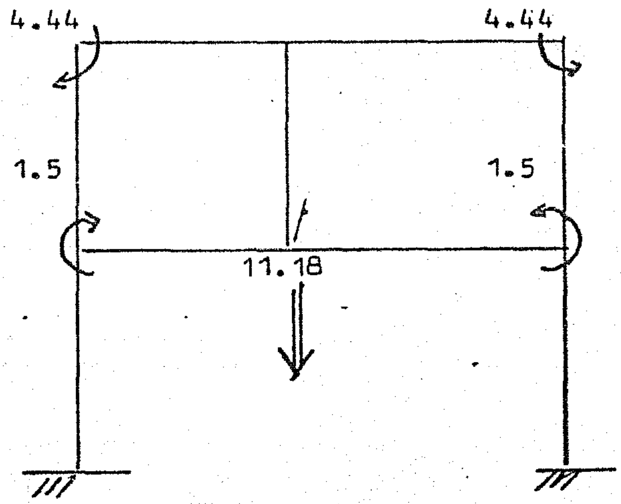




"FUERZAS DE FIJACION"

Estado II:

Se aplican las fuerzas de fijación a la estructura y se resuelve el marco, obteniendo los desplazamientos d y con ello los elementos mecánicos p'.



$$\begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ +1.5 \\ -4.44 \\ 0 \\ +4.44 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 11.18 \end{bmatrix}$$

Por simetría se tiene que:

$$\varphi_1 = -\varphi_3 \neq 0 \qquad \varphi_2 = \varphi_5 = 0$$

$$\varphi_4 = -\varphi_6 \neq 0 \qquad D_1 = D_2 = 0$$

$$D_3 \neq 0$$

Tomando la Matriz de Rigidez del ejemplo resuelto anteriormente, y reduciendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

$$4\varphi_1 + 0.667\varphi_4 + 0.667D_3 = -1.50/EI$$

$$0.667\varphi_1 + 2.667\varphi_4 + 0.667D_3 = -4.44/EI$$

$$1.333\varphi_1 + 1.333\varphi_4 + 1.778D_3 = 11.18/EI$$

Resolviendo el Sistema de Ecuaciones:

$$\varphi_1 = -1.446$$
$$\varphi_4 = -3.870$$
$$D_3 = 10.276$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.446 \\ 0.0 \\ 1.446 \\ -3.870 \\ 0.0 \\ 3.870 \\ \hline 0.0 \\ 0.0 \\ 10.276 \end{bmatrix}$$

(Desplazamientos de los Nudos)

Las deformaciones en los miembros, serían para la mitad de la estructura:

$$\theta_{A1} = 0 \quad ; \quad \theta_{A2} = 1.446 - 10.276/_3 = 1.979$$
$$\theta_{B1} = -1.446 \quad ; \quad \theta_{B2} = 0 + 10.276/_3 = 3.43$$

$\theta_{A5} = 1.446$; $\theta_{A8} = 3.87 - 10.276/_3 = 0.445$

$\theta_{B5} = -3.870$; $\theta_{B8} = 0 + 10.276/_3 = 3.485$

y los elementos mecánicos, (Momentos):

$$\left[k_i\right] = \begin{bmatrix} 1.333 & -0.667 \\ -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$\left[p'_1\right] = \begin{bmatrix} 0.96 \\ -1.93 \end{bmatrix} ; \quad \left[p'_2\right] = \begin{bmatrix} -4.92 \\ 5.89 \end{bmatrix}$$

$$\left[p'_5\right] = \begin{bmatrix} 4.55 \\ -6.12 \end{bmatrix} ; \quad \left[p'_8\right] = \begin{bmatrix} -1.69 \\ 4.27 \end{bmatrix}$$

Estado Final :

Será la suma del Estado I y el Estaso II, esto es:

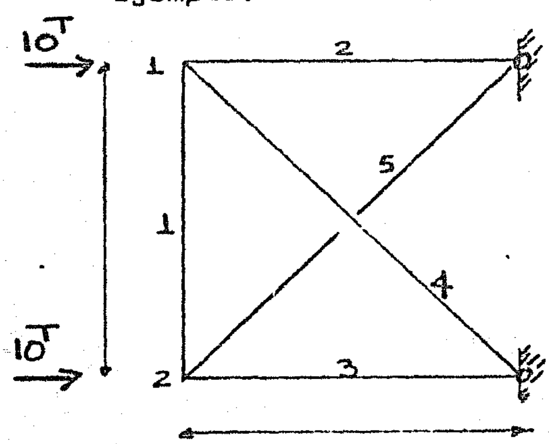
$$\left[p\right] = \left[p\right] + \left[p'\right]$$

$$\begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ \hline M_{A2} \\ M_{B2} \\ \hline M_{A3} \\ M_{B3} \\ \hline M_{A4} \\ M_{B4} \\ \hline M_{A5} \\ M_{B5} \\ \hline \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \hline -1.5 \\ -1.5 \\ \hline -1.5 \\ -1.5 \\ \hline 0.0 \\ 0.0 \\ \hline 0.0 \\ 0.0 \\ \hline \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.96 \\ -1.93 \\ \hline -4.92 \\ 5.89 \\ \hline 5.89 \\ -4.92 \\ \hline 0.96 \\ -1.93 \\ \hline 4.55 \\ -6.12 \\ \hline \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96 \\ -1.93 \\ \hline -6.42 \\ 4.39 \\ \hline 4.39 \\ -6.42 \\ \hline 0.96 \\ -1.93 \\ \hline 4.55 \\ -6.12 \\ \hline \vdots \end{bmatrix}$$

M_{A6}	0.0	0.0	0.0
M_{B6}	0.0	0.0	0.0
M_{A7}	0.0	4.55	4.55
M_{B7}	0.0	-6.12	6.12
M_{A8}	-4.44	-1.69	-6.13
M_{B8}	-2.22	4.27	2.05
M_{A9}	-2.22	4.27	2.05
M_{B9}	-4.44	-1.69	-6.13

VII.4.2 OBTENCION DIRECTA DE LOS ELEMENTOS MECANICOS "SIN RECURRIR" A LA MATRIZ A .

Ejemplo: ARMADURA PLANA:



$$\frac{EA}{L} = CTE = 50 \text{ Ton/cm.}$$

OBS : Se revisarán tres conceptos importantes:
1) Matriz acoplada.
2) Método de la Su-
3) Simetría de la Es-tructura.

Para una armadura la matriz de rigidez en el extremo B de uno de sus miembros referida a un sistema local de ejes coordenados es:

$$k'_{BB} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Referida a un Sistema Global se tiene:

$$k_{BB} = T^T \cdot k_{BB} \cdot T$$

donde:

$$T^T = \begin{bmatrix} \cos & -\mathrm{sen} \\ +\mathrm{sen} & \cos \end{bmatrix}.$$

Matriz de transformación de un Sistema Local de Referencia a un Sistema Global de Referencia.

Por simplificación tomaremos:

$$T^T = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad k_{BB} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

$$k_{BB} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Puesto que la Matriz Acoplada de un miembro está dada por: La expresión:

$$\overline{k}_{AB} = \left[\begin{array}{c|c} H_{AB}\, k_{AB}\, H_{BA}^T & -H_{BA}\, k_{BA} \\ \hline -H_{BA}\, k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right]$$

donde

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Por no existir rotaciones)

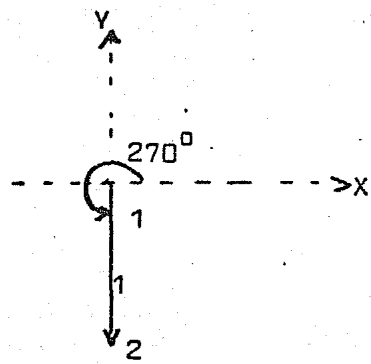
La Matriz Acoplada de un miembro en una armadura planta queda -- como:

$$\overline{K}_{AB} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right]$$

En nuestro ejemplo:

a) Barra $\boxed{1}$ 1 $\rightarrow$ 2 ($\theta = 270^{\circ}$)

$$K_{2-1} = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad 2 \end{array} \end{array}$$



b) Barra $\boxed{2}$ 1 $\rightarrow$ 0 ($\theta = 0^{\circ}$)

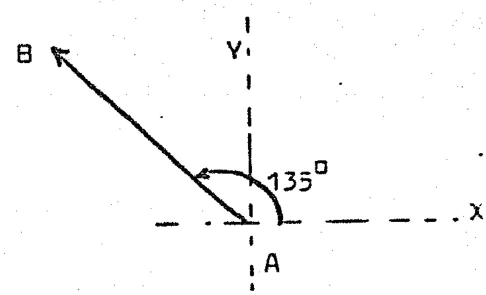
$$K_{1-0} = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \\ 0 \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad 0 \end{array} \end{array}$$

c) Barra $\boxed{3}$ 2 $\longrightarrow$ 0 ($\theta = 0^{\circ}$)

$$K_{2-0} = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ \\ 0 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2 & \qquad 0 \end{array} & \end{array}$$

d) Barra $\boxed{4}$ 0 $\longrightarrow$ 1 ($\theta = 135^{\circ}$)

$$K_{0-1} = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ \hline -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} 0 & \qquad 1 \end{array} & \end{array}$$



e) Barra $\boxed{5}$ 2 $\longrightarrow$ 0 ($\theta = 45^{\circ}$)

$$K_{2-0} = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ \hline -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ \\ 0 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2 & \qquad 0 \end{array} & \end{array}$$

Aplicando el Método de la Suma obtenemos:

$$K = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} 0+1+0.5 & 0+0-0.5 & 0 & 0 \\ 0+0-0.5 & 1+0+0.5 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0+1+0.5 & 0+0+0.5 \\ 0 & -1 & 0+0+0.5 & 1+0+0.5 \end{array} \right]$$

Si $\frac{EA}{L} = 50$ ton/cm.

$$K = \left[\begin{array}{cccc} 1.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.5 \end{array} \right] \times 50$$

Observe que es la misma Matriz que la obtenida en el ejemplo - anterior.

Planteando el Sistema de Ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 75 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 75 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & -50 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{I})$$

Por otro lado por Simetría tenemos que:

$$d_{1x} = d_{2x}$$

$$d_{1y} = -d_{2y}$$

tomando las dos primeras ecuaciones de (I) y sustituyendo valores:

$$\boxed{1} \qquad 75\, d_{1x} - 25\, d_{1y} + 0 + 0 = 10$$

$$\boxed{2} \qquad -25\, d_{1x} + 75\, d_{1y} + 0 - 50\,(-d_{1y}) = 0$$

de ec. 2

$$d_{1x} = 5\, d_{1y}$$

Sustituyendo en ec. 1

$$75 \left[5\, d_{1y} \right] - 25\, d_{1y} = 10$$

$$d_{1y} = 10 \,/\, 350 = 0.02857$$

$$\therefore \quad d_{1x} = 5\,(0.02857) = 0.14286$$

Por lo que los desplazamientos quedan como:

$$\begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14286 \\ 0.02857 \\ +0.14286 \\ -0.02857 \end{bmatrix}$$

Observe que por simetría el número de ecuaciones se reduce a la mitad con lo que los cálculos se reducen enormemente.

Obtención de los elementos mecánicos:

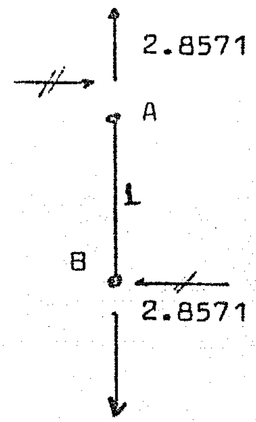
$$\left[p \right] = \left[\tilde{K}_{AB} \right] \left[\tilde{d}_{AB} \right]$$

Elementos Mecánicos Referidos al Sistema Global de Referencia.

Para el miembro $\boxed{1}$:

$$
\left[\tilde{p}\right] = \frac{EA}{L}\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0.14286 \\ 0.02857 \\ 0.14286 \\ -0.02857 \end{array}\right] = 50\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0.05714 \\ 0 \\ -0.05714 \end{array}\right]
$$

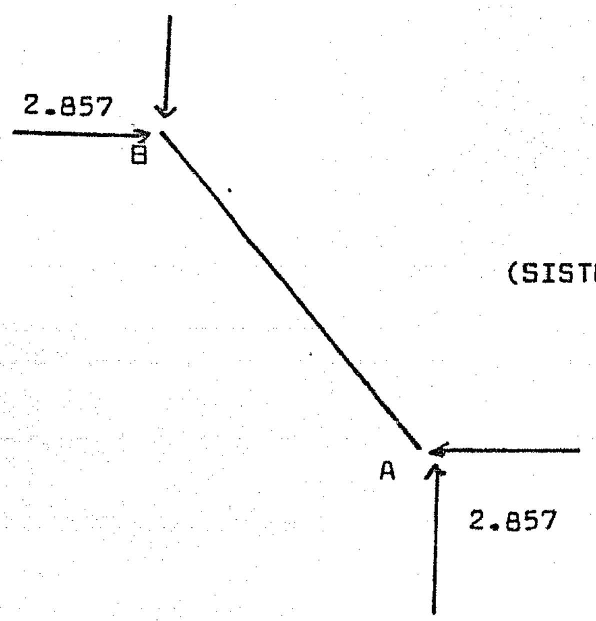
$$
\left[\begin{array}{c} \tilde{p}_{1x} \\ \tilde{p}_{1y} \\ \tilde{p}_{2x} \\ \tilde{p}_{2y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2.8571 \\ \hline 0 \\ -2.8571 \end{array}\right]
$$



(SISTEMA GLOBAL)

Para el miembro 4 :

$$
\left[\tilde{p}\right] = 50\left[\begin{array}{cccc} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ \hline -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0.0 \\ 0.0 \\ \hline 0.14286 \\ 0.02857 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -2.857 \\ 2.857 \\ \hline 2.857 \\ -2.857 \end{array}\right]
$$



(SISTEMA GLOBAL)

Los elementos mecánicos referidos al Sistema Global de Ejes Coordenados resultan generalmente difícil de interpretar, - por lo que habrá que transformarlos a los ejes locales de - referencia. Esto se logra facilmente aplicando la Matriz - de transformación $\left[T \right]$, esto es:

$$\left[p \right] = \left[T' \right] \left[\tilde{p} \right] \qquad \text{donde: } \left[T \right] = \begin{bmatrix} \cos & \text{sen} \\ -\text{sen} & \cos \end{bmatrix}$$

De tal forma que para el Miembro $\boxed{1}$, ($\theta = 270^{\circ}$):

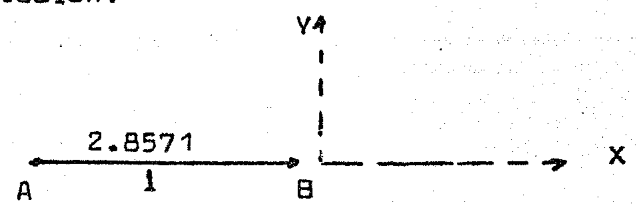
a) Extremo A

$$\begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2.8571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.8571 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Extremo B

$$\begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.8571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8571 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpretación:



Para el Miembro $\boxed{4}$ ($\theta = 135^{\circ}$)

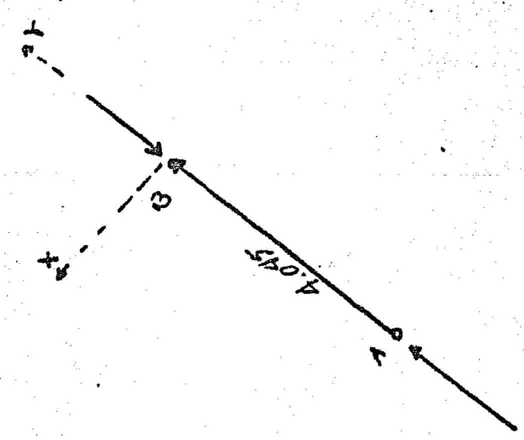
a) Extremo A

$$\begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.8571 \\ 2.8571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0405 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Extremo B

$$\begin{bmatrix} p_{ox} \\ p_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.8571 \\ -2.8571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0405 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpretación



Observe que en forma general podemos establecer que la Matriz de Transformación puede quedar como:

$$\left[\,T\,\right] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} \cos & \text{sen} & & \\ -\text{sen} & \cos & 0 & \\ & 0 & \cos & \text{sen} \\ & & -\text{sen} & \cos \end{array}\right] & \begin{array}{c} A \\ \\ \\ B \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad B \quad \end{array} & \end{array}$$

Asímismo, que aquí estamos obteniendo acciones de Nudo sobre miembro y no de miembro sobre nudo.

Resumen del procedimiento:

1). Obtenemos la Matriz de Rigidez Acoplada de cada uno de- los miembros.

2). Obtenemos la Matriz de Rigidez de la Estructura por el Método de la Suma.

3). Resolvemos el sistema de ecuaciones o invertimos la -- Matriz de Rigidez, para obtener los desplazamientos de los Nudos.

4). Obtenemos los Elementos Mecánicos de los miembros refe ridos a un Sistema Global de Coordenadas.

5). Transformamos los Elementos Mecánicos de los miembros al Sistema Local de Referencia.

Ejemplo : MARCO PLANO

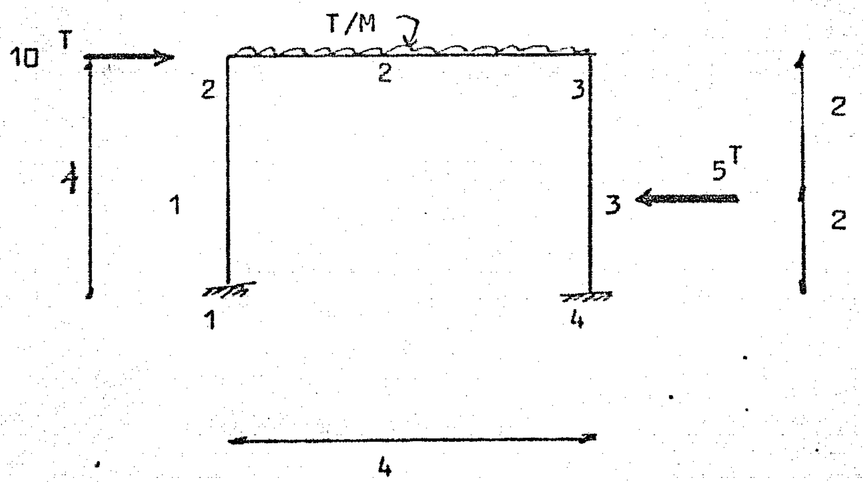
Conocida la Matriz de Rigidez Acoplada de las barras de una estructura referida a los ejes locales de las mismas, bastará recordar que en forma general para pasar de coordenadas - locales a globales, se tiene qué :

$$K_{AA} = T^T K'_{AA} T$$

$$K_{BA} = T^T K'_{BA} T, \text{ etc.}$$

Para obtener la Matriz Acoplada, referida a coordenadas globales, de las barras a las cuales con sólo aplicar la Regla de la Suma proporcionan la Matriz de Rigidez de la Estructura $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$.

Sea el siguiente Marco

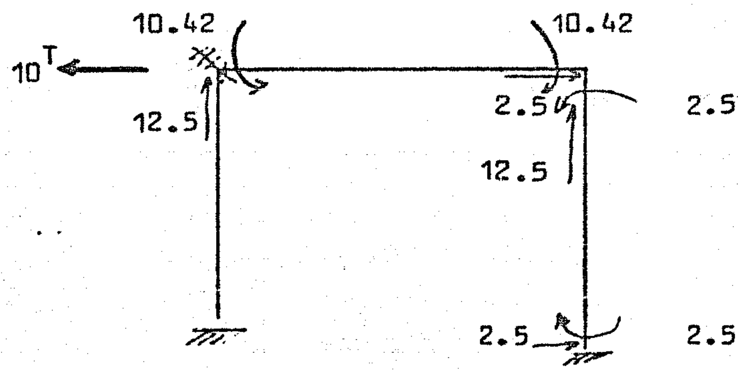


$EI_c = 40\,000 \text{ ton.m}^2$

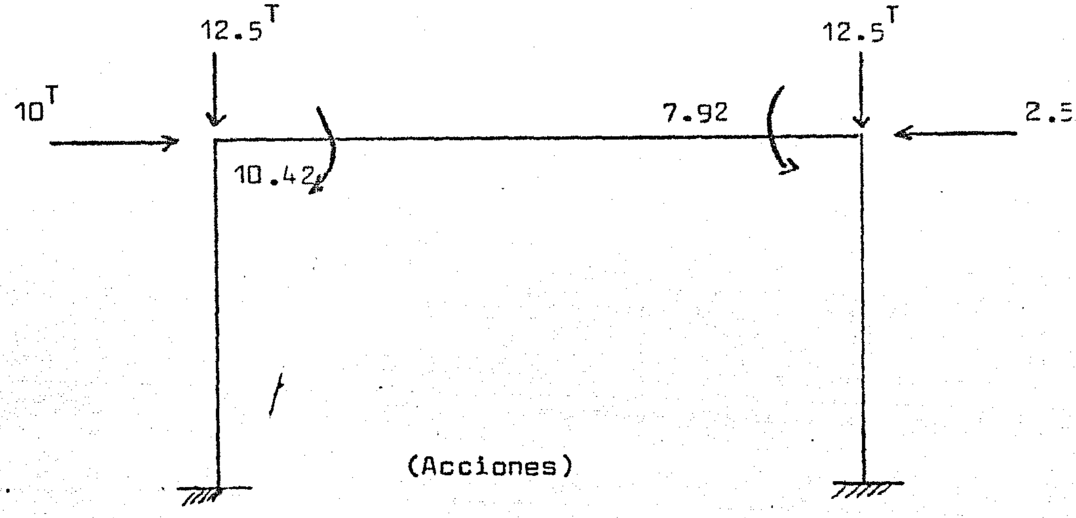
$EI_T = 60\,000 \text{ ton.m}^2$

$EA_c = 10\,000 = EA_T$

De la Estructura se obtiene el <u>Estado I</u> y con ello las "Fuerzas de Fijación".



Aplicando a la Estructura las "Fuerzas de Fijación" para obtener el Estado II.



Tratando de ejemplificar el procedimiento que se sigue en algunos textos americanos para la obtención de los elementos mecánicos -- por el Método de Rigideces, consideraremos la Matriz de Rigidez - completa de la barra, conteniendo los efectos de Flexión, Fuerza-Axial y Cortante.

La Matriz, de una barra cualquiera, Acoplada y referida a ejes locales es:

$$\left[\overrightarrow{K_{AB}}\right] = \begin{bmatrix} K'_{AA} & K'_{AB} \\ K'_{BA} & K'_{BB} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]$$

Si la Matriz de Transformación a ejes globales es:

$$T = \begin{bmatrix} \cos & \operatorname{sen} & 0 \\ -\operatorname{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene, aplicando estos conceptos a nuestro ejemplo, que para la:

BARRA $\boxed{1}$ (0 - 1) y BARRA 3 (0 - 2)

$\theta = 90^0$;

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{AB} = \left[\begin{array}{cccccc} 2500 & 0 & 0 & -2500 & 0 & 0 \\ 0 & 7500 & 15000 & 0 & -7500 & 15000 \\ 0 & 15000 & 40000 & 0 & -15000 & 20000 \\ \hdashline -2500 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & -7500 & -15000 & 0 & 7500 & -15000 \\ 0 & 15000 & 20000 & 0 & -15000 & 40000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \longrightarrow 0-1 \\ \boxed{3} \longrightarrow 0-2 \end{array} \qquad K_{AB} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 7500 & 0 & -15000 & -7500 & 0 & -15000 \\ 0 & 2500 & 0 & 0 & -2500 & 0 \\ -15000 & 0 & 40000 & 15000 & 0 & 20000 \\ \hline -75000 & 0 & 15000 & 7500 & 0 & 15000 \\ 0 & -2500 & 0 & 0 & 2500 & 0 \\ -15000 & 0 & 20000 & 15000 & 0 & 40000 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \qquad\qquad \underline{0} \qquad\qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad \underline{1} \\ & \qquad\qquad \underline{2} \end{array} \end{array}$$

BARRA 2 (1 - 2) , $\theta = 0^{\circ}$: $T = I$

$$K_{1-2} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2500 & 0 & 0 & -2500 & 0 & 0 \\ 0 & 11250 & 22500 & 0 & -11250 & 22500 \\ 0 & 22500 & 60000 & 0 & -22500 & 30000 \\ \hline -2500 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & -11250 & -22500 & 0 & 11250 & -22500 \\ 0 & 22500 & 30000 & 0 & -22500 & 60000 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \qquad\qquad \underline{1} \qquad\qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad \underline{2} \end{array} \end{array}$$

Aplicando el Método de la Suma obtenemos la Matriz $\left[\ K\ \right]$ de la Estructura.

$$
K = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
10000 & 0 & 15000 & -2500 & 0 & 0 \\
0 & 13750 & 22500 & 0 & -11250 & 22500 \\
15000 & 22500 & 100000 & 0 & -22500 & 30000 \\
\hline
-2500 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 15000 \\
0 & -11250 & -22500 & 0 & 13750 & -22500 \\
0 & 22500 & 30000 & 15000 & -22500 & 100000
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \underline{1} \\ \\ \\ \\ \underline{2} \end{array} \\
\begin{array}{cc} \qquad\qquad 1 \qquad\qquad & \qquad\qquad 2 \qquad\qquad \end{array} &
\end{array}
$$

Obtenemos los desplazamientos de los nudos como:

$$
\left[\quad K \quad\right]
\left[\begin{array}{c}
d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \hline d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
10 \\ -12.5 \\ -10.42 \\ \hline -2.5 \\ -12.5 \\ 7.92
\end{array}\right]
$$

Resolviendo el sistema por Gauss-Seidel se tiene que:

$$
\left[\begin{array}{c}
d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \hline d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
2.2540 \\ -4.2162 \\ -0.7610 \\ \hline 0.4880 \\ -5.7940 \\ -0.1208
\end{array}\right]
\times \frac{1}{1000}
$$

Para la barra $\boxed{1}$ los elementos mecánicos serán:

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P \\ \hdashline P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ & K_{0-1} & \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 2.2540 \\ -4.2162 \\ -0.7610 \end{bmatrix} \frac{1}{1000} = \begin{bmatrix} -5.49 \\ 10.54 \\ 18.59 \\ \hdashline 5.49 \\ -10.54 \\ 3.37 \end{bmatrix}$$

Estos mismos elementos pero referidos al Sistema de ejes local del miembro son:

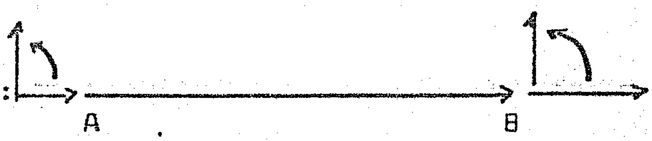
$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{0} \\ \hdashline P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hdashline & & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} -5.49 \\ 10.54 \\ 18.59 \\ \hdashline 5.49 \\ -10.54 \\ 3.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.54 \\ 5.49 \\ 18.59 \\ \hdashline -10.54 \\ 5.49 \\ 3.37 \end{bmatrix}$$

Como los Elementos Mecánicos debido al <u>Estado I</u> (Fuerzas de Fijación de la barra 1) son iguales a cero, los elementos obtenidos anteriormente son los resultados finales para este miembro.

Para la barra $\boxed{2}$ los Elementos Mecánicos se obtienen directamente referidos al eje local de la barra ya que $[T] = [I]$.

$$\begin{bmatrix} P_{1x}\\ P_{1y}\\ P_{1}\\ P_{2x}\\ P_{2y}\\ P_{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K_{1-2} & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.2540\\ -4.2162\\ -0.7610\\ 0.4880\\ -5.7940\\ -0.1208\end{bmatrix}\times\frac{1}{1000} = \begin{bmatrix}4.415\\ -2.09\\ -13.78\\ -4.415\\ 2.09\\ 5.42\end{bmatrix}$$

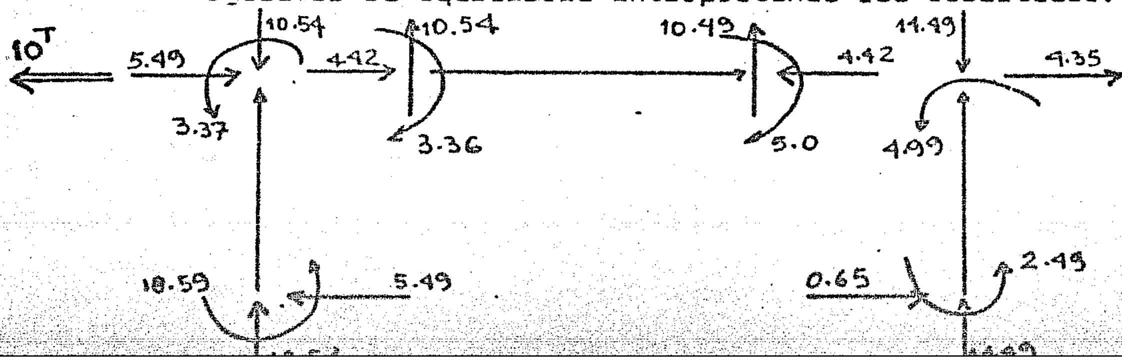
Los resultados finales para esta barra serán la suma de las Fuerzas de Fijación más los resultados obtenidos.

Nomenclatura: 

(Positivos)

$$\begin{bmatrix}0\\ 12.5\\ 10.42\\ 0\\ 12.5\\ -10.42\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4.42\\ -2.09\\ -13.78\\ -4.42\\ 2.09\\ 5.42\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.42\\ 10.41\\ -3.36\\ -4.42\\ 14.59\\ -5\end{bmatrix}$$

Checamos el equilibrio interpretando los resultados:



VIII. METODO DE LAS FUERZAS O DE LAS FLEXIBILIDADES

VIII.1.- Concepción General del Método de las Fuerzas.

Se han establecido ya los conceptos básicos del Método de las Flexibilidades o de las Fuerzas; se ha manejado el concepto de estructura primaria, y se ha establecido el orden para aplicar los tres principios básicos del Análisis Estructural en la solución de problemas de éste tipo. Es necesario para poder estudiar los siguientes temas, repasar tales conceptos y para ello consultar los capítulos IV.3 y IV.4, con especial atención en el resúmen de éste último capítulo.

Podemos establecer que, en escencia, el método de las Flexibilidades se reduce a lo siguiente:

a) Determinamos las acciones redundantes $\left[R \right]$

b) Aplicamos Equilibrio para poder obtener los esfuerzos en las barras.

c) Determinamos las deformaciones en las barras aplicando la Ley de Hooke.

d) Obtenemos los desplazamientos de los nudos aplicando el principio de Continuidad.

e) Y comprobamos los resultados corroborando la condición de continuidad en los miembros redundantes, como:

$$\left[b_R^T \right] \left[\epsilon \right] = \left[u \right] = 0$$

Es válido señalar que el método es bastante general y puede aplicarse a cualquier tipo de estructuras reticulares no importando su grado de complejidad. Sin embargo, enfocamos el método a la solución de armaduras planas, siendo en éstas donde se facilita más su aplicación.

VIII.2.- Aplicación del Método a Armaduras Planas.

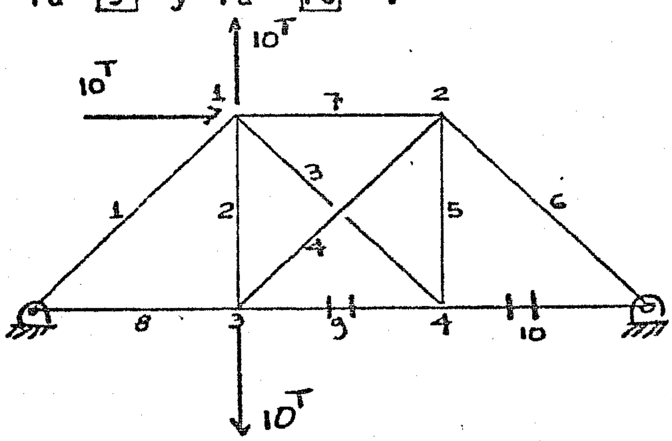
De igual manera que para el capítulo de Método de Rigideces correspondiente a armaduras (VII.2), podemos establecer que una armadura queda definida como una estructura forma da por barras que sólo trabajan a fuerza axial, los nudos -- son articulaciones y las fuerzas externas se aplican sólo en los nudos; cada nudo se puede desplazar en dos direcciones y las fuerzas externas tienen dos componentes. Por ésto, son- también extensibles los conceptos referentes a la parte de - Vectores Estructurales del mismo capítulo.

Son importantes, en esta parte, los conceptos de hiperestaticidad y estabilidad de las estructuras ya que una - "estructura primaria" se forma a partir de una estructura hiperestática y son condiciones que debe cumplir: ser isostática y estable.

Principios Fundamentales.

a) Equilibrio.-

Para elegir teóricamente a la "estructura primaria" se podrá usar el criterio desarrollado anteriormente, o sea- que las $2n_N$ barras que forman la estructura primaria sean - tales que $\left[A_0 \right]^T$ sea no singular; obviamente éste criterio no es práctico, por lo que la elección de la estructura- primaria la haremos por consideraciones estáticas sencillas; en el siguiente ejemplo elegiremos como estructura primaria- a la formada por las barras $\boxed{1}$ a $\boxed{8}$ siendo las redundantes la $\boxed{9}$ y la $\boxed{10}$.



La ecuación de equilibrio será:

$$\left[P \right] = \left[b_0 \right] \left[F \right] + \left[b_R \right] . \left[R \right]$$

donde:

$$\left[R \right] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}; \quad P_9 = R_1, \; P_{10} = R_2$$

A continuación veremos una forma simple de obtener $\left[b_o \right]$ y $\left[b_R \right]$

Supongamos que en la estructura primaria se tiene que - -

$$\left[R \right] = 0 \quad y \quad \left[F \right] = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{Renglón } i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Las componentes de F todas nulas, menos la i-ésima con valor unitario).

por lo tanto:

$$\left[p \right] = \left[bo \right] \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{Renglón } i \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bo_{1i} \\ bo_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ bo_{ji} \\ \cdot \\ bo_{n_B i} \end{bmatrix}$$

(Columna i-ésima de $\left[bo \right]$)

O sea, que las fuerzas axiales para esa condición de carga - corresponde a la columna i-ésima de $\left[b_o \right]$; por consiguiente para obtener $\left[b_o \right]$ habrá que resolver la estructura $2n_N$ veces con $\left[F \right] = \left[I \right] =$:

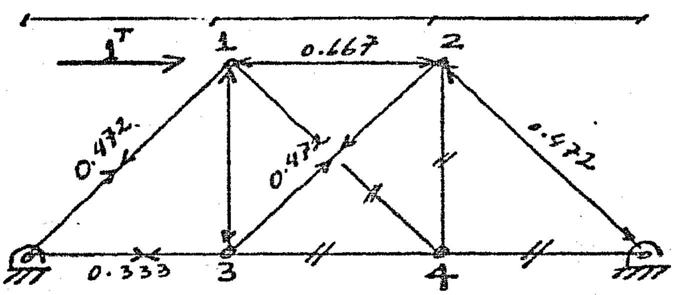
$$[F] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Matríz identidad)

$2n_N$ condiciones de carga.

El razonamiento anterior, se justifica si en la ecuación de equilibrio se hace $[R] = 0$ y $[F] = [I]$ $\therefore$ $[p] = [b_o]$.

Apliquemos este procedimiento a nuestro ejemplo:

Columna 1 de $[b_o]$; $[F] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$; ($F_{1x} = 1$, $F_{1y} = F_{2x} = \ldots = 0$)



Para resolver la estructura seccionamos a la armadura en la barra $\boxed{6}$ y tomamos momentos en el apoyo izquierdo, obteniéndo así la fuerza en $\boxed{6}$; las demás fuerzas las encontramos por el método de los Nodos.

$$
\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.472 \\ -0.333 \\ 0.0 \\ +0.472 \\ 0.0 \\ -0.472 \\ -0.667 \\ +0.333 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \qquad (\text{ 1a. columna de } b_o \text{ }).
$$

Así, en forma análoga obtenemos las demás barras de $\begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix}$, - (la 2a. con $F_{1y} = 1$; $F_{1x} = F_{2x} = F_{2y} = \ldots = 0$).

$$
\begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
+0.472 & +0.944 & +0.472 & +0.472 & 0.0 & +0.944 & 0.0 & +0.472 \\
-0.333 & +0.333 & -0.333 & -0.333 & 0.0 & -0.667 & -1.000 & -0.333 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & +1.414 & 0.0 \\
+0.472 & -0.472 & +0.472 & +0.472 & 0.0 & -0.472 & +1.414 & +0.472 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.000 & -1.000 \\
-0.472 & +0.472 & -0.472 & +0.944 & 0.0 & +0.472 & 0.0 & +0.944 \\
-0.667 & +0.667 & +0.333 & +0.333 & 0.0 & +0.667 & -1.000 & +0.333 \\
+0.333 & -0.333 & +0.333 & +0.333 & +1.000 & -0.333 & +1.000 & +0.333 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}
$$

o sea,

$$
\begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{bmatrix} A_o^T \end{bmatrix}}{0} \end{bmatrix}^{-1}
$$

La regla para obtener $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$ es similar, esto es:

En la ecuación de equilibrio :

$$
\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}
$$

Sea :

$$
\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = 0 \qquad y \qquad \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}
$$

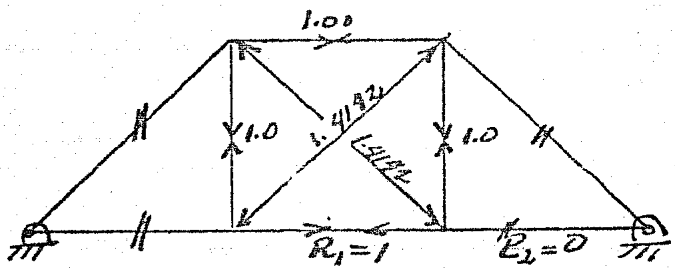
Por lo tanto :

$$\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$$

O sea : Las columnas de $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$ son las fuerzas axiales obtenidas por redundantes unitarias aplicadas en la estructura -- primaria.

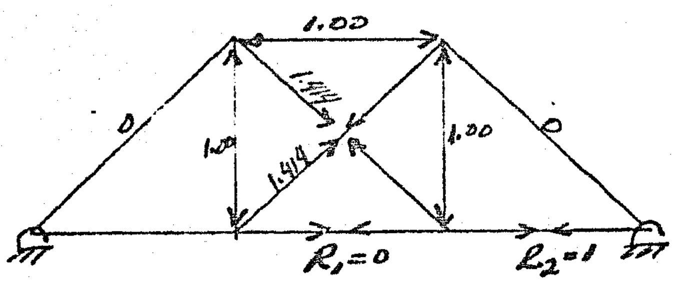
En el ejemplo $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$ tendrá dos columnas : la la. para $R_1 = 1$, $R_2 = 0$ y la 2a. para $R_1 = 0$ y $R_2 = 1$..

1a. Columna de $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$.



$$\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ +1.000 \\ -1.414 \\ -1.414 \\ +1.000 \\ 0.0 \\ +1.000 \\ 0.0 \\ +1.000 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

2a. Columna de $\begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$.



$$\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -1.000 \\ +1.414 \\ +1.414 \\ -1.000 \\ 0.0 \\ -1.000 \\ +1.000 \\ 0.0 \\ +1.000 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto :

$$b_R = \left[\begin{array}{c|c} 0.0 & 0.0 \\ +1.000 & -1.000 \\ -1.414 & +1.414 \\ -1.414 & +1.414 \\ +1.000 & -1.000 \\ 0.0 & 0.0 \\ +1.000 & -1.000 \\ 0.0 & +1.000 \\ \hline +1.000 & 0.0 \\ 0.0 & +1.000 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\left[A_o^T\right]^{-1}\left[A_R^T\right] \\ \hline \left[I\right] \end{array}\right]$$

Es necesario hacer notar que para resolver una estructura por el método de las fuerzas en la cual no se piden todos los desplazamientos d, no es necesario obtener la matriz b_o completa, si no el valor de b_o F, el cual se puede obtener directamente resolviendo la estructura primaria con las fuerzas F y $R = 0$. A los valores así obtenidos se les llama p_o esto es "fuerzas axiales isostáticas"; la ecuación de equilibrio, que venimos manejando, se transforma entonces en:

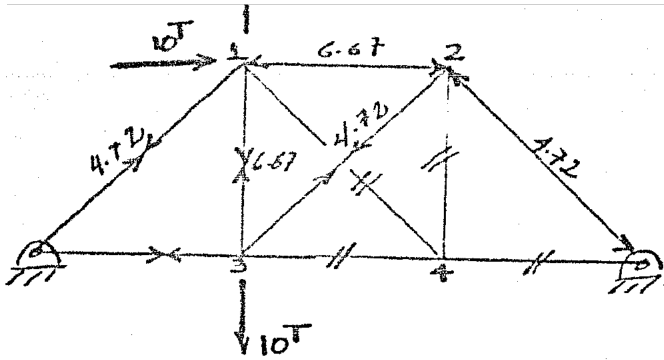
$$\left[P\right] = \left[Po\right] + \left[b_R\right]\left[R\right]$$

donde Po son las fuerzas axiales en la estructura primaria cuando obran sobre ésta las fuerzas reales $\left[F\right]$ con redundantes $\left[R\right]$ nulos:

Puesto que en nuestro ejemplo $\left[F\right]$ es igual a:

$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \text{(ton.)}$$

Para obtener $\left[Po\right]$ resolvemos a la estructura primaria con estas fuerzas:



$$[Po] = \begin{bmatrix} +4.72 \\ +6.67 \\ 0.0 \\ +4.72 \\ 0.0 \\ -4.72 \\ -6.67 \\ +3.33 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

b) Ley de Hooke.

$$[\varepsilon] = [f]\,[p]$$

donde $[f]$ es diagonal y $f_{ii} = \dfrac{L_i}{E_i\ A_i}; = \dfrac{1}{R_{ii}}$.

Supongamos que en nuestro ejemplo : $f_1 = f_2 = \ldots f_{10} = 1.0$

esto es $[f] = [I]$.

c) Continuidad.

Se llegó anteriormente a establecer que:

$$[d] = [b_o^T]\ [\varepsilon]$$

$$[u] = [b_R^T]\ [\varepsilon]$$

Observando la condición de continuidad para la cual $[u] = 0$ y sustituyendo la ecuación de la Ley de Hooke y Equilibrio en esta última ecuación, obtenemos que:

$$[b_R^T]\,[f]\,[b_R]\,[R] + [b_R^T]\,[f]\,[Po] = 0$$

De la cual se obtienen las acciones redundantes $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$.

En el momento que podemos obtener $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$, se tiene prácticamente la solución de nuestra estructura. La Ecuación de Equilibrio nos permite obtener los esfuerzos en las barras, la Ley de Hooke las deformaciones, y continuidad los desplazamientos en los nudos y la comprobación de los resultados para $\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = 0$.

Resolviendo nuestro ejemplo tenemos que:

a) Determinamos $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} b_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.00 & -7.00 \\ -7.00 & 9.00 \end{bmatrix}; \quad (\text{ cm/ton. })$$

$$\begin{bmatrix} b_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Po \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.67 \\ +10.00 \end{bmatrix} \quad (\text{ cms }).$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 8.00 & -7.00 \\ -7.00 & 9.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.67 \\ +10.00 \end{bmatrix} = 0$$

Resolviendo :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.435 \\ -1.450 \end{bmatrix} \quad (\text{ Ton. })$$

b) Sustituyendo en la ecuación de Equilibrio :

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.72 \\ 6.67 \\ 0.0 \\ 4.72 \\ 0.0 \\ -4.72 \\ -6.67 \\ +3.33 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ +1.000 & -1.000 \\ -1.414 & +1.414 \\ -1.414 & +1.414 \\ +1.000 & -1.000 \\ 0.0 & 0.0 \\ +1.000 & -1.000 \\ 0.0 & +1.000 \\ +1.000 & 0.0 \\ 0.0 & +1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.435 \\ -1.450 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 4.72 \\ 7.79 \\ -1.44 \\ +3.28 \\ +1.02 \\ -4.72 \\ -5.65 \\ +1.88 \\ -0.44 \\ -1.45 \end{bmatrix} \; ; \; (\text{ Ton. }).$$

c) Aplicando la Ley de Hooke.

Como : $\left[f \right] = \left[I \right] \therefore \left[\varepsilon \right] = \left[p \right]$.

d) Si deseamos obtener <u>todos</u> los desplazamientos de d , aplicando continuidad, tenemos:

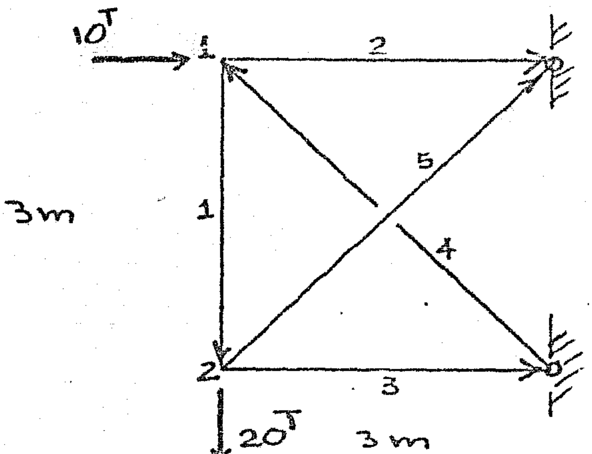
$$\left[d \right] = \left[b_o^T \right] \left[\varepsilon \right] = \begin{bmatrix} 7.67 \\ -1.01 \\ 2.04 \\ -4.29 \\ 1.88 \\ -8.78 \\ 1.45 \\ -5.31 \end{bmatrix}$$

Si sólo se hubiecen deseado algunos valores de $\left[d \right]$, sólo - habría necesidad de obtener las columnas correspondientes de $\left[b_o \right]$; por ejemplo: si solo hubiecemos deseado obtener d_{3x}, - tendríamos que obtener la 5a. columna de $\left[b_o \right]$ (resolviendo la estructura primaria con $F_{3x} = 1.0$), y multiplicar la - - transpuesta de esta columna por el vector $\left[\varepsilon \right]$.

En forma general :

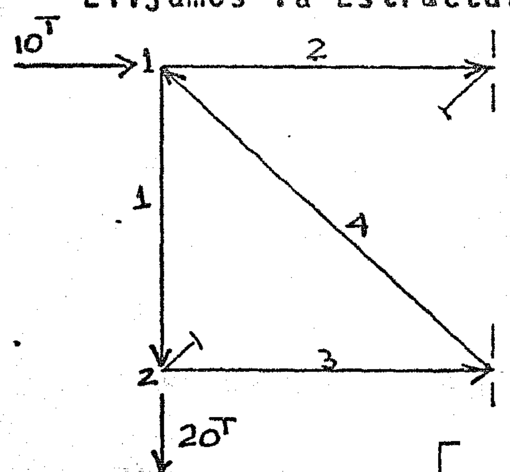
$$\left[d_R\right] = b_{oR}^{T} \cdot e \qquad ; \text{ donde } b_{oR} \text{ es la K-ésima columna de } \left[\, bo \,\right] .$$

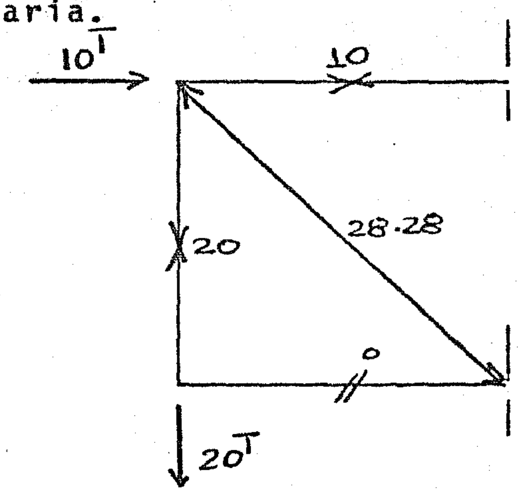
EJEMPLO: Resolver la siguiente armadura por el método de - las flexibilidades. Obténgase sólo el desplaza-- miento vertical en el nudo 2 .



$$\frac{EA}{L} = CTe = 50 \text{ Ton./cm.}$$

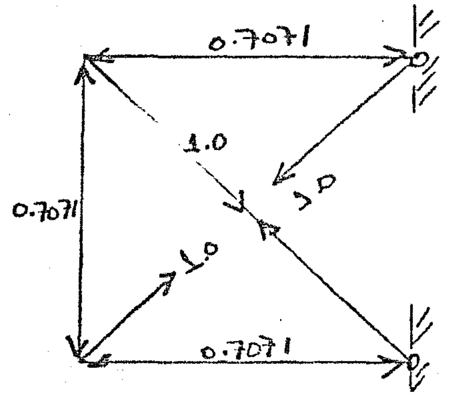
Elijamos la Estructura Primaria.





$$\left[Po\right] = \begin{bmatrix} +20.00 \\ +10.00 \\ 0.0 \\ -28.28 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Obtengamos b_R



$$[b_R] = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ -0.7071 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Se obtienen las redundantes R como :

$$[b_R^T]\,[f]\,[b_R]\,[R_1] + [b_R^T]\,[f]\,[Po] = 0$$

Si $\dfrac{EA}{L} = 50 \implies \dfrac{L}{EA} = \dfrac{1}{50}$

$$\therefore\ [f] = \frac{1}{50}[I]$$

$$[b_R^T][f][b_R] = 3.5 \times \frac{1}{50}$$

$$[b_R][f][Po] = \frac{-49.497}{50}$$

$$\frac{3.5}{50} R_1 = \frac{49.497}{50} \qquad R_1 = \underline{\underline{14.142}}$$

Los esfuerzos en las barras quedan como:

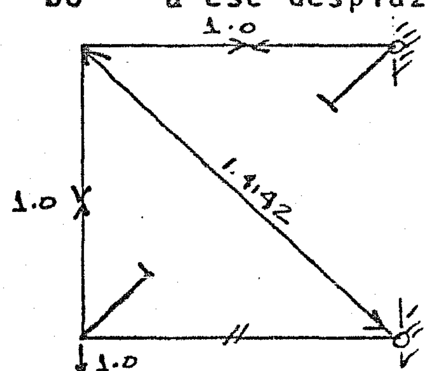
$$
\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +20.00 \\ +10.00 \\ 0.0 \\ -28.28 \\ 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ -0.7071 \\ +1.0000 \\ +1.0000 \end{bmatrix} \times \quad 14.142
$$

$$
\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +10.00 \\ 0.0 \\ -10.00 \\ -14.142 \\ +14.142 \end{bmatrix} \qquad (\text{ Tons. })
$$

Las deformaciones en los miembros las obtenemos directamente como:

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.00 \\ 0.0 \\ -10.00 \\ -14.14 \\ +14.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 0.0 \\ -10.00 \\ -14.14 \\ +14.14 \end{bmatrix} \times \frac{1}{50}
$$

Y para obtener el desplazamiento vertical del nudo 2 - - aplicamos a la estructura primaria una carga unitaria en - esa dirección; para obtener la columna correspondiente de- bo a ese desplazamiento:



$$
\begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & +1.0000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +1.0000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0.0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1.4142 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0.0 \end{bmatrix}
$$

El desplazamiento d_{2y} será :

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.0 & -1.4142 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +10.0 \\ 0.0 \\ -10.0 \\ -14.14 \\ +14.14 \end{bmatrix} \times \frac{1}{50}$$

$$d_{2y} = \frac{30}{50} = \underline{\underline{0.60 \text{ cms.}}}$$

(en la dirección de la fuerza - unitaria aplicada).

IX. TEMAS ESPECIALES

IX.1.- Comentarios a los Métodos de las Flexibilidades y de Rigideces.

Los métodos de las Flexibilidades y de las Rigideces son muy parecidos en su formulación matemática; puesto que ambos se basan en la aplicación de los tres principios básicos del análisis y usan como punto de partida que es aplicable el de superposición de causas y efectos, pero difieren notablemente en su interpretación física. Aunque no se ha profundizado, como se merecía, en ambos métodos (considerando, en los ejemplos, estructuras no ortogonales, espaciales, apoyos incompletos en marcos, efectos que provoca la temperatura, desplazamientos en los apoyos, etc.), mencionaremos algunas características que hay que tomar en cuenta cuando tratemos de computarizar alguno de ellos.

El método de las Flexibilidades necesita de la selección previa de una estructura isostática, separando las barras redundantes de la estructura elegida, lo cual nos empuja a tener que elegir entre varias alternativas. En el Método de las Rigideces nunca existe duda alguna en la elección de la estructura pues ésta se considera fija en todos sus nudos y no hay posibilidad de selección. Sin embargo, cabe hacer mención que el método de las Flexibilidades es fácilmente aplicable a estructuras en las que el grado de hiperestaticidad es pequeño en comparación con el número de barras que se tiene. Por ejemplo, en Armaduras planas generalmente la cantidad de barras redundantes es mucho menor - que aquellas que forman una armadura isostática; más no así en marcos donde el número de redundantes es alto.

Se han ingeneado algunos métodos, basados en la eliminación de Jordan, para elegir redundantes y obtener A_o^T -- para cualquier tipo de estructura, (J. Robinson, "Automatic Selection Of Redundancies in the Matriz Force Method: the -- Rank Technique", Car. Aeron Space J, 11:9-12 (1965)), lo -- cual facilita la aplicación de las computadoras al Método de las Flexibilidades, pero debido a la facilidad conque puede-programarse el Método de las Rigideces se ha venido trabajando más tiempo en él, y es por ésto que sea el método que generalmente se usa en los programas de computación.

Por último, cabe hacer notar, que es necesario, al -- tratar de resolver una estructura, observar las ayudas con - que se cuenta para cada caso particular, (simetría, desplazamientos de nudos realmente necesarios, etc.) para poder elegir entre uno u otro método de Análisis Estructural.

IX.2.- Obtención Directa de las Reacciones y Efecto de Desplazamiento en los Apoyos.

Sean $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} d_A \end{bmatrix}$ los desplazamientos en los apoyos -- (en general $d_A = 0$), si consideráramos ha estos como nudos, en el Método de las Rigideces, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} d \\ d_a \end{bmatrix}$$

$$(K_{12} = K_{21}^T).$$

Esto es:

$$F = K_{11}\, d + K_{12}\, dA \quad - \quad (1)$$

$$R = K_{21}\, d + K_{22}\, dA \quad - \quad (2)$$

de la ecuación (1):

$$d = K_{11}^{-1}\, F - K_{11}^{-1}\, K_{12}\, dA \quad - \quad (3)$$

de la ecuación (2), hay que observar si $d_A = 0$ las reacciones quedarían como:

$$\boxed{R = K_{21}\, d}$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la (2) obtenemos:

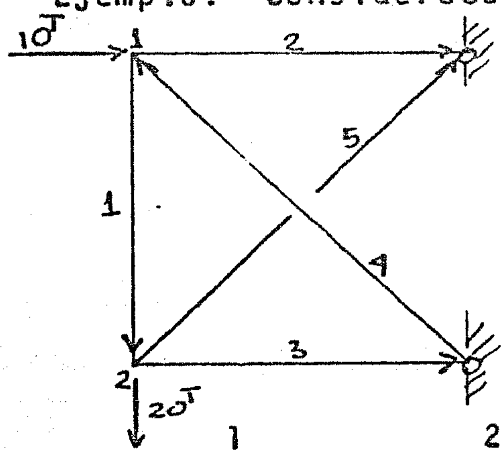
$$R = K_{21}\, K_{11}^{-1}\, F + K_{22} - K_{21}\, K_{11}^{-1}\, K_{12}\, d_A$$

observe que si $F = 0$

$$R = K\, d_A$$

donde $K = K_{22} - K_{21}\, K_{11}^{-1}\, K_{12}$, contracción de la Matriz $\left[K \right]$.

Ejemplo: Considerece el ejemplo desarrollado anteriormente:



La Matriz A se obtiene por renglones, considerando a los apoyos como nudos.

$$\begin{array}{c} \quad\quad 1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad 3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad 4 \\ \left[A \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.71 & 0.71 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.71 & -0.71 \\ 0.0 & 0.0 & -0.71 & -0.71 & 0.71 & 0.71 & 0.0 & 0.0 \end{array} \right] \end{array}$$

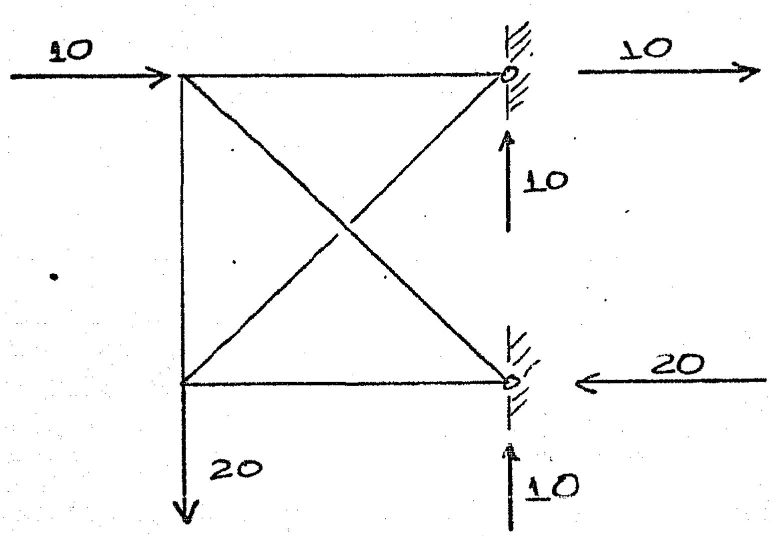
$$\left[K^{a} \right] = 50 \left[I \right]$$

$$
\begin{bmatrix} A^{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K^{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = 50 \times \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1.5 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & -1 & 0.0 & -0.5 & 0.5 \\
-0.5 & 1.5 & 0.0 & -1 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & -0.5 \\
0.0 & 0.0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -1 & 0.0 \\
0.0 & -1 & 0.5 & 1.5 & -0.5 & -0.5 & 0.0 & 0.0 \\
\hline
-1 & 0.0 & -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\
-0.5 & 0.5 & -1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & -0.5 \\
0.5 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.5
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}
$$

Si conocemos que $\begin{bmatrix} d_A \end{bmatrix} = 0$ y $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.4 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}$

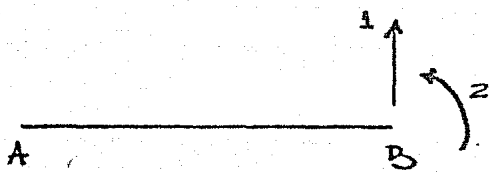
$$
\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = K_{21} \quad d = 50 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ -0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ -20.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}
$$



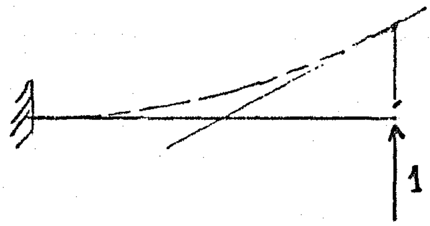
IX.3.- MOdificación por Efecto de Deformación de Cortante en la Matriz de Rigidéz.

- Barras con Deformación por Flexión y Cortante.

Consideremos la barra $\overline{AB}$ empotrada en A .

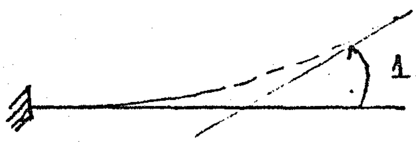


1º.- Necesitamos conocer los desplazamientos d_B debidos a una fuerza vertical unitaria.



$d_B = ?$

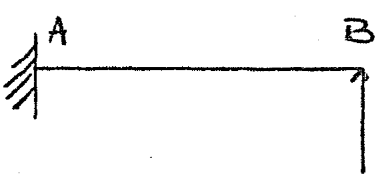
2º.- Necesitamos conocer los desplazamientos d_B debidos a un momento unitario aplicado en B .

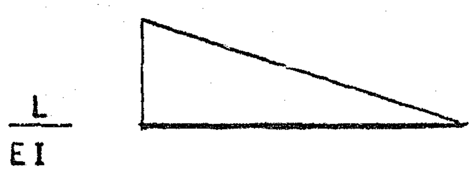


$d_B = ?$

<u>1er. Caso.</u>

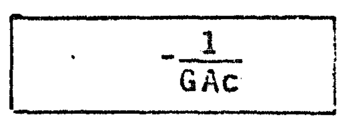
Estructura real:





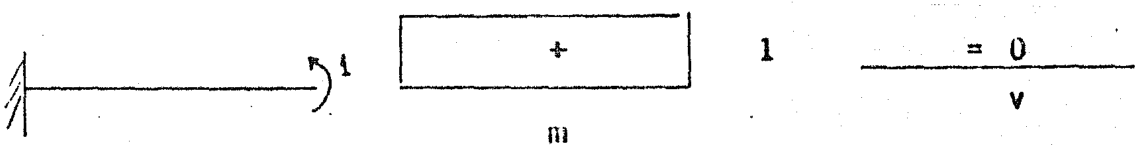
M/EI

V/GAc



Estructura virtual:

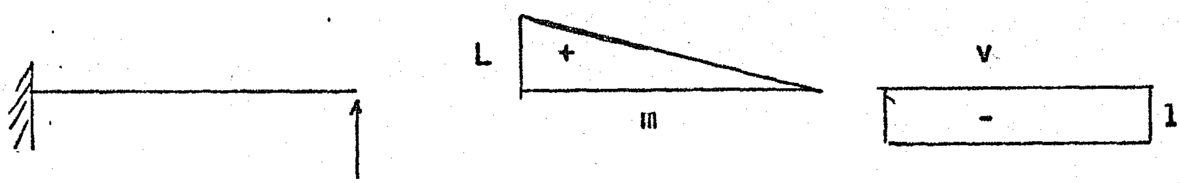
a) Giro:



$$\varphi_{B1} = \int \frac{Mm}{EI}\, ds + \int \frac{Vv\,ds}{GAc}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{B1} = \frac{L^2}{2EI}}}$$

b) Desplazamiento:



$$dy_{B1} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GAc}$$

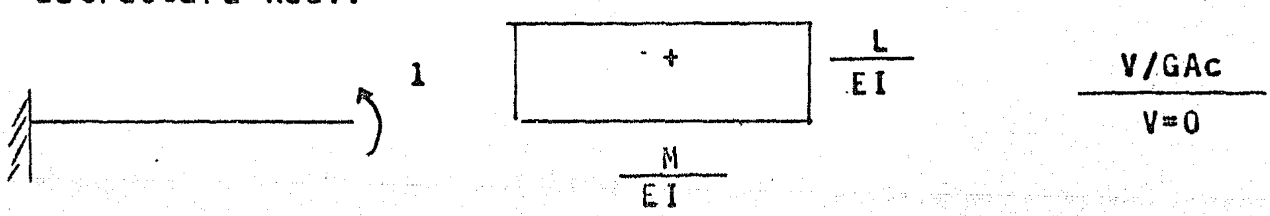
sí : $c = 6\ (1 + v)\ (I / Ac\ L^2)$

$c = 6f\ (1 + v)\ (I / A\ L^2)$

$$\underline{\underline{dy_{B1} = \frac{L^3}{3EI}\ (1 + c).}}$$

<u>2º.- Caso.</u>

Estructura Real.



Tomando las virtuales del caso anterior:

$$\varphi_{B2} = \frac{L}{EI} \quad ; \quad dy_2 = L^2/\,2EI$$

Ordenando:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & \\ \left[f_{BB} \right] = & & \left[\begin{matrix} L^3/3EI\ (1 + c) \\ L^2/2EI \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} L^2/2EI \\ L/EI \end{matrix}\right] & \begin{matrix} dy_B \\ \varphi_B \end{matrix} \\ & & 1 & 2 & \end{array}$$

Si recordamos que:

Flexibilidad: Es aquello que al multiplicar por el par y la fuerza en B permite obtener los desplazamientos:

$$\begin{bmatrix} \varphi_B \\ dy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_B \\ Fy_B \end{bmatrix}$$

Rigidez: Es aquello que al multiplicar por los desplazamientos permite obtener las fuerzas.

$$\begin{bmatrix} \mu_B \\ Fy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_B \\ dy_B \end{bmatrix}$$

Podemos invertir $\left[f_{BB} \right]$ y obtener $\left[k_{BB} \right]$.

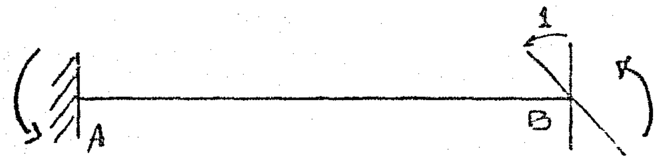
Efectuando operaciones:

$$\left[k_{BB} \right] = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)} \\ -\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)} & \dfrac{4EI\ (1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix}$$

En esta matriz de Rigideces no se consideró el efecto por deformación axial, el cual puede ser anexado manejándolo como anteriormente se hizo, no sufre modificaciones por este concepto.

Cuando sólo tomamos en cuenta los efectos por flexión y queremos incluír el efecto de la deformación por cortante, se tiene que:

Aplíquese un giro unitario en B



$$\frac{4EI}{L} \quad \frac{1+c}{1+4c}$$

$$-\frac{2EI}{L} \quad \frac{(1-2c)}{(1+4c)} \qquad -\frac{6\ EI}{L^2(1+4c)}$$

Donde la reacción que aparece en el extremo A se obtiene tomando momentos en ese punto.

De igual manera si giramos en A y tomamos momentos en B, podemos establecer lo siguiente:

Si se tiene una barra con sección constante, los momentos extremos son directamente proporcionales a las deformaciones angulares en esos puntos, esto es:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{bmatrix}$$

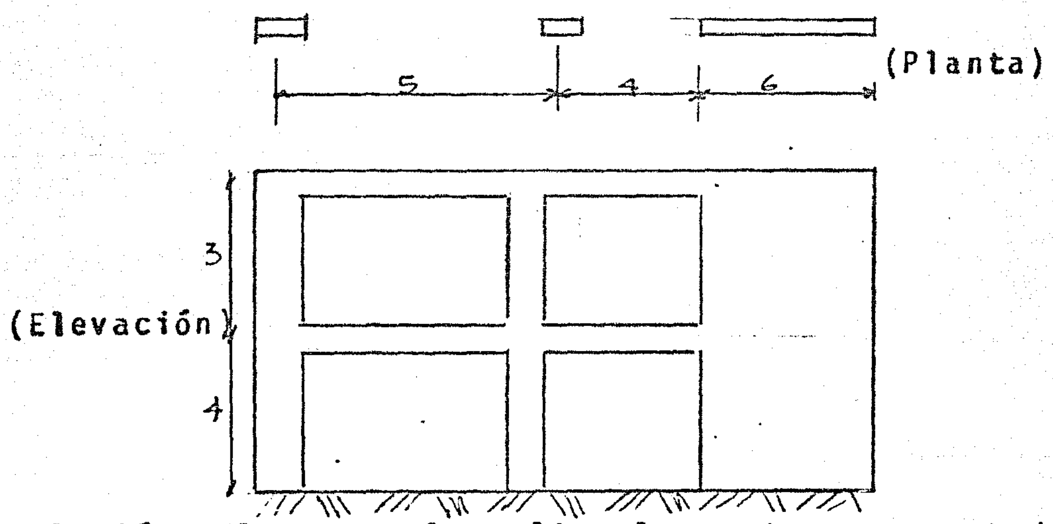
donde $\begin{bmatrix} K^1 \end{bmatrix}$ es igual a :

$$
\left[K^1 \right] = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI\ (1 + c)}{L\ (1 + 4c)} & - \dfrac{2EI}{L} \dfrac{(1 - 2c)}{(1 + 4c)} \\[2ex] - \dfrac{2EI}{L} \dfrac{(1 - 2c)}{(1 + 4c)} & \dfrac{4EI\ (1 + c)}{L\ (1 + 4c)} \end{bmatrix}
$$

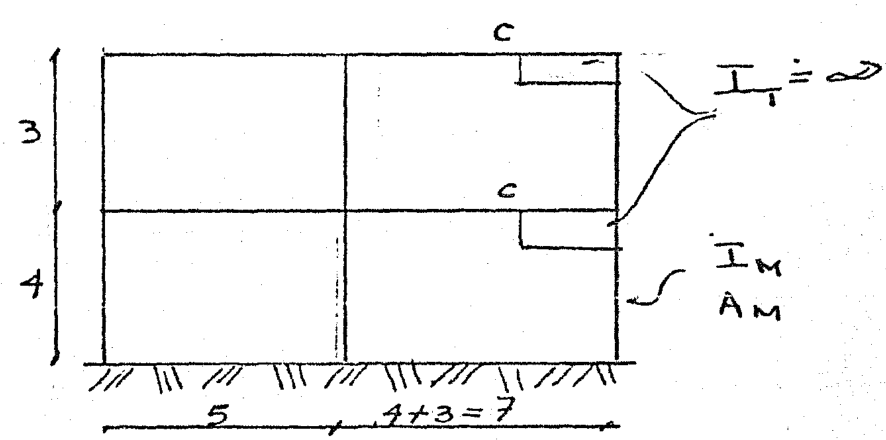
O expresada de otra forma:

$$
\left[K^1 \right] = \begin{bmatrix} 2\ (1 + c) & -\ (1 - 2c) \\ -\ (1 - 2c) & 2\ (1 + c) \end{bmatrix} \frac{2EI}{L(1 + 4c)}
$$

Aplicación: Considere el siguiente marco.



Solución: El marco al analizarlo queda representado de la- siguiente forma:



Al analizar la estructura bajo condición de carga horizontal convendrá adoptar la configuración anterior, ya sea -- considerando nudos en los puntos c o tratando a las trabes como barras de sección variable; al muro se le analizará tomando los efectos de flexión más cortante. Bajo condición de carga vertical podrá considerarse a las trabes en- los puntos c empotradas.

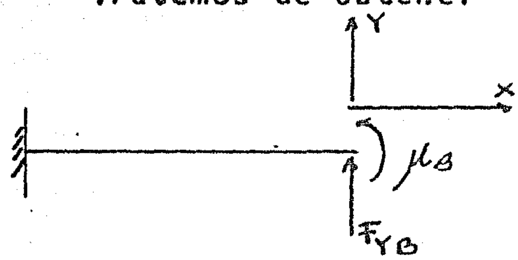
IX.4.- Rigidez de Barras de Sección Variable.

(Solo Flexión)

Sea una barra A - B tal que EI = Variable.

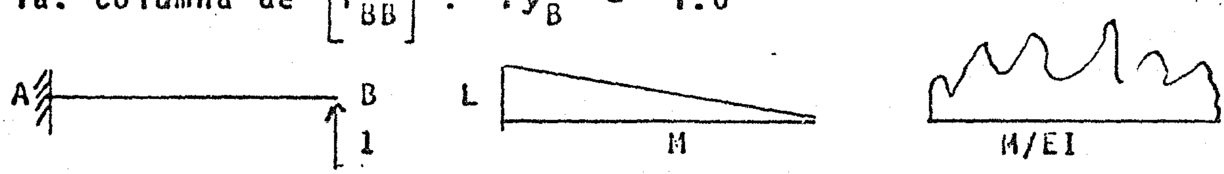
$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

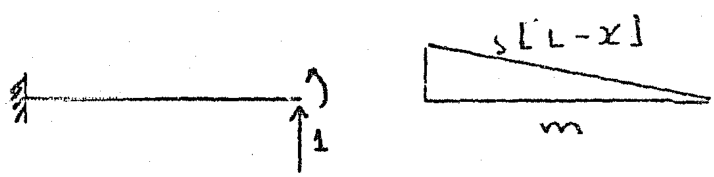
Tratemos de obtener $\begin{bmatrix} f_{BB} \end{bmatrix}$.



$$\begin{matrix} dy_B \\ \varphi_B \end{matrix} = f_{BB} \begin{matrix} Fy_B \\ \mu_B \end{matrix}$$

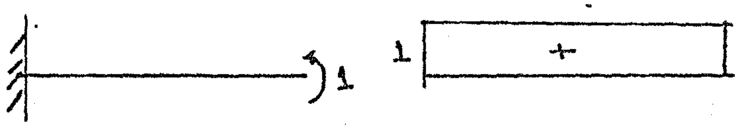
1a. Columna de $\begin{bmatrix} f_{BB} \end{bmatrix}$: $Fy_B = 1.0$



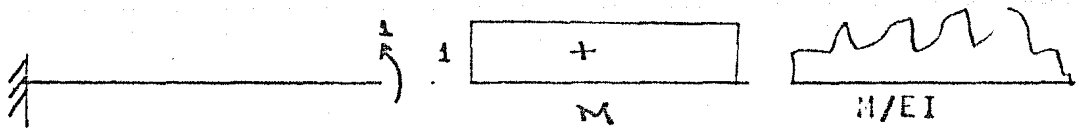


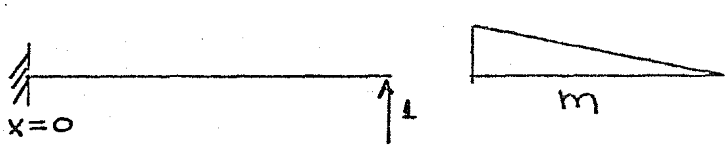
$$dy_B = \int \frac{(L-x)^2}{EI}\, dx$$

$$\varphi_B = \int \frac{(L-x)}{EI}\, dx$$

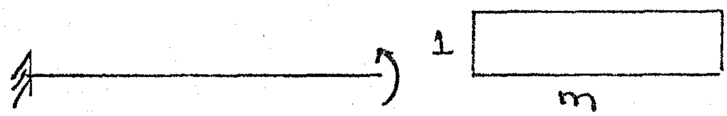


2a. Columna de $\left[f_{BB}\right]$; $\mu_B = 1$.





$$dy_B = \int_L \frac{(L - x)}{EI}\, dx$$



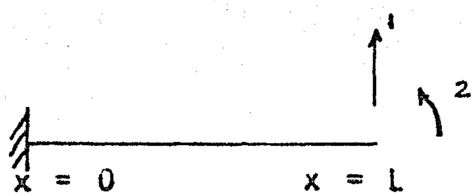
$$\varphi_B = \int \frac{dx}{EI}$$

Resumiendo:

$$\left[f_{BB}\right] = \begin{bmatrix} \int \frac{(L - x)^2}{EI}\, dx & \int \frac{(L - x)}{EI}\, dx \\ \int \frac{(L - x)}{EI}\, dx & \int \frac{dx}{EI} \end{bmatrix}$$

O sea :

$$\left[f_{BB}\right] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

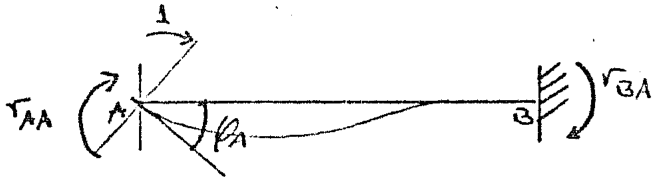


Para obtener $\left[k_{BB}\right]$ sólo tendremos que invertir f_{BB}, esto es:

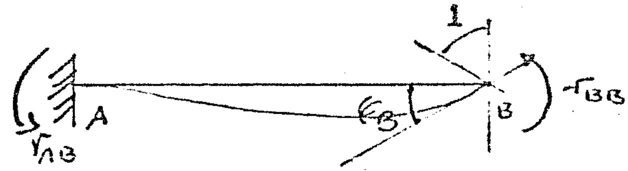
$$\left[k_{BB}\right] = \begin{bmatrix} f_{22} & -f_{21} \\ -f_{12} & f_{11} \end{bmatrix} \times \frac{1}{f_{11}\, f_{22} - f_{12}^2}\ ;\ f_{12} = f_{21}$$

$$DeT = f_{11}\, f_{22} - f_{12}^2$$

Para el caso en que sólo manejamos los giros en los extremos de las barras, trataremos de obtener la Matriz de Rigidez del miembro $\overline{AB}$ ante deformaciones angulares.



(giro en A)



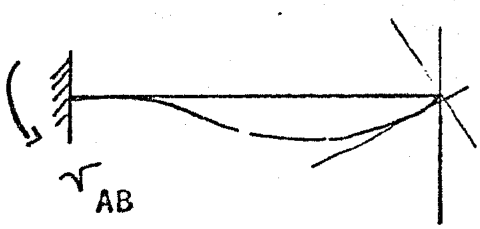
(giro en B)

NOTA: $r_{AB} = r_{BA}$.

Por lo tanto:

$$\left[K^{1}_{AB}\right] = \begin{bmatrix} r_{AA} & -r_{AB} \\ -r_{BA} & r_{BB} \end{bmatrix}.$$

A continuación se obtiene $_{AA}$, $_{AB}$, $_{BA}$ en función de - $\left[k_{BB}\right]$.



$$r_{BB} = \frac{f_{11}}{f_{11}\ f_{22} - f_{12}^{2}} = \frac{f_{11}}{DET}$$

$$r_{AB}$$

$$\frac{f_{12}}{DeT} = \frac{f_{21}}{DeT}$$

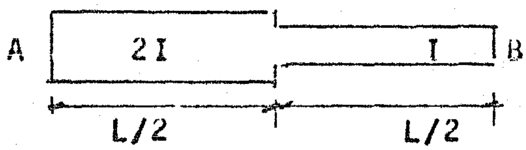
Tomando momentos con respecto a A :

$$\Upsilon_{AB} = \Upsilon_{BA} = \frac{f_{12}\, L - f_{11}}{DET}$$

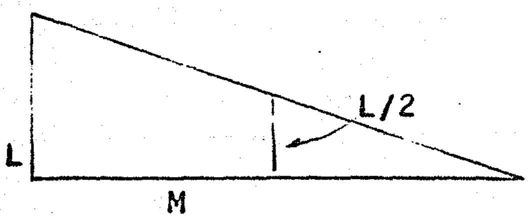
Υ_{AA}, se obtiene en forma parecida :

$$\Upsilon_{AA} = \frac{f_{22}\, L^2 - 2\, f_{12}\, L + f_{11}}{f_{11}\, f_{22} - f_{12}^2} = \frac{f_{22}\, L^2 - 2\, f_{12}\, 1 + f_{11}}{DeT.}$$

EJEMPLO:

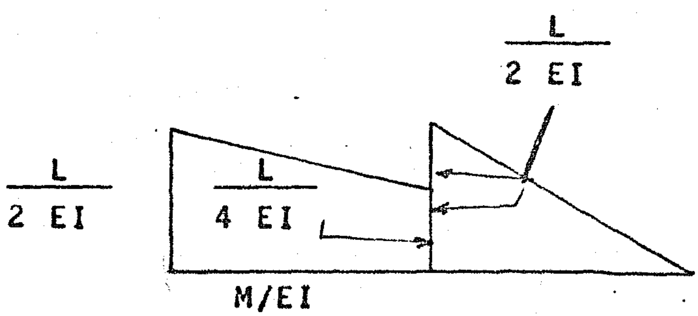


$$f_{11} = \int_L \frac{(L - x)^2}{EI}\, dx = \int_L (L - x)\, \frac{(L - x)}{EI}\, dx.$$



$$f_{11} = \frac{1}{6}\, (L/2) \left[\frac{L^2}{EI} + \frac{L^2}{4EI} + \frac{L^2}{4EI} + \frac{L^2}{4EI} \right]$$

$$+ \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2} \times L/_{2EI} \Big/ 2$$



$$f_{11} = \left[\frac{L^3}{EI} \right] \left[\frac{7}{48} + \frac{1}{24} \right] = \underline{\underline{\frac{3}{16}\; \frac{L^3}{EI}}}$$

$$f_{22} = \int \frac{dx}{EI} = \sum \left[\frac{AS}{EI} \right]_i$$

$$f_{22} = \frac{L}{4EI} + \frac{L}{2EI} = \underline{\underline{\frac{3L}{4EI}}}$$

$$f_{12} = \frac{(L-x)}{EI}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{L}{2} \times \frac{1}{2EI} \times \frac{3}{2}L + \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{EI} \times \frac{L}{2}$$

$$f_{12} = \frac{L^2}{EI}\left[\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right] = \underline{\underline{\frac{5}{16}\,\frac{L^2}{EI}}} = f_{21}$$

$$DeT = f_{11}\,f_{22} - f_{12}^2$$

$$= \frac{3L}{4EI} \times \frac{3}{16} \times \frac{L^3}{EI} - \frac{25}{256} \times \frac{L^4}{(EI)^2} \quad \frac{11}{256} \times \frac{L^4}{(EI)^2}$$

$$r_{AA} = \frac{3/4 - 5/8 + 3/16}{11/256} \times \frac{EI}{L} = \underline{\underline{\frac{80}{11}\,\frac{EI}{L}}}$$

$$r_{BB} = \frac{3/16}{11/256} \times \frac{EI}{L} = \underline{\underline{\frac{48}{11}\,\frac{EI}{L}}}$$

$$r_{AB} = r_{BA} = \frac{5/16 - 3/16}{11/256} = \underline{\underline{\frac{32}{11}\,\frac{EI}{L}}}$$

$$\underline{\underline{\left[K^2\right] = \begin{bmatrix} 80/11 & -32/11 \\ -32/11 & 48/11 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}}}$$

B I B L I O G R A F I A

1. MECANICA APLICADA. ESTATICA Y RESISTENCIA DE MATERIALES.
   JAIME TORRES H.
   PRESENTACION Y SERVICIOS DE INGENIERIA, S.A.
   DICIEMBRE 1980, MEXICO, D.F.

2. ANALISIS ESTRUCTURAL
   RODOLFO LUTHE GARCIA
   PRESENTACION Y SERVICIOS DE INGENIERIA, S.A.
   1974, MEXICO, D.F.

3. INTRODUCCION A LA MECANICA DE SOLIDOS
   EGOR P. POPOV.
   EDITORIAL LIMUSA, MEXICO. 1978.

4. ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES, TEORIA DE LAS ESTRUCTURAS
   HEBERTO CASTILLO MARTINEZ
   TERCERA EDICION, MEXICO, D.F. 1963.

5. ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES
   JAMES M. GERE, WILLIAM WEAVER, JR.
   C.E.C.S.A., MEXICO, 1967.

7. COMPUTER METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS
   FRED W. BEAFAIT, WILLIAM H. ROWAN, JR.,
   PETER G. HOADLEY, ROBERTO M. HACKETT.
   PRENTICE, HALL, INC.

7. APUNTES SOBRE INTRODUCCION AL ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS
JULIO DAMY RIOS
C.E.C., UNAM, MARZO 1974

8. APUNTES DEL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL II
JULIO DAMY RIOS
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM, 1979

9. STATIC AND EARTHWUAKE ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL FRAME AND SHEAR WALL BUILDINGS.
E.L. WILSON AND H.H. DOVEY.
REPORT No. EERC 72-1
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY, CALIFORNIA, U.S.

10. STRUCTURAL ENGINEERING SYSTEM SOLVER (STRESS)
A USER'S MANUAL, IBM 1130

11. INSTRUCTIVO DEL SISTEMA "CECAFI/ESTRUCTURAS"
CARLOS A. RAMOS LARIOS
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM, 1979.