

24  
134



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**Facultad de Ingeniería**

**FUNDAMENTOS DE LA TEORIA ELASTICA  
PARA EL DISEÑO DE LOSAS**

**TESIS PROFESIONAL**

**RAFAEL MENDOZA GARCIA**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N T R O D U C C I O N

En el presente trabajo se desarrollan las bases para el análisis de estructuras de losas y placas planas, por medio de la teoría elástica, de acuerdo a numerosas investigaciones y desarrollos matemáticos, dando por resultado diversos métodos de análisis y el uso de modelos. La solución de estos métodos, se fundamenta en un procedimiento general, que establece la ecuación de la elástica de la losa, por medio de la ecuación de Lagrange.

Los métodos antes descritos, toman en cuenta el tipo de carga y distribución, para diferentes situaciones de los tableros (esquina, extremo e interior), así como de los distintos tipos de apoyos (columna, vigas y columnas, etc.).

De los resultados de esta teoría, se derivan los métodos de análisis siguientes; el método directo y el de el marco equivalente. Su aplicación depende de las condiciones que deben cumplir y de la exactitud que se quiera lograr.

Para la distribución de los momentos, se hicieron varios estudios, sobresaliendo los de Sutherland y Appleton, los cuales se representaron en gráficas, de tal modo que al entrar con un valor de rigidez de viga  $\frac{I_2}{l^2} / I_1$ , se tiene un porcentaje del momento que toma la franja de columna, y el resto correspondiente al 100 %, lo toman dos mitades de la franja central.

Quizá de todos los mecanismos de falla que se presentan en este tipo de losas, el más importante, es el debido al esfuerzo cortante por penetración. Por esta razón se describen las variables principales que afectan la resistencia del cortante, para este tipo de falla.

Cuando el concreto, por sí sólo, no es capaz de tomar el esfuerzo cortante requerido, hay varias formas de hacer el refuerzo, - recomendando las siguientes; estribos, collares, horquillas, acero estructural de secciones I o canal.

Y por último se presentan los trabajos de Hanson, referentes a - los efectos de las aberturas y ductos de servicio, en estas losas.

Se presentan dos ejemplos donde se aplican los criterios expuestos, uno de la teoría elástica y otro de el método del marco -- equivalente.

C A P I T U L O I

BASES DE LA TEORIA ELASTICA

En este capítulo nos ocuparemos de algunas bases en los métodos y problemas del análisis de la teoría elástica, en las estructuras de placas.

Se incluye alguna información sobre el uso de modelos, y se describen brevemente métodos numéricos, usando ecuaciones diferenciales, y métodos aproximados.

### TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS

Las deformaciones elásticas de placas isotrópicas con carga normal a su plano, están regidas por una ecuación diferencial parcial, de cuarto orden:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q/D \quad \text{EC. 1.1}$$

donde:  $w$  = deflexión de la placa en la dirección de la carga, en el punto  $(x, y)$ .

$q$  = carga aplicada en la placa por unidad de área, en función de  $x, y$ .

$D$  = rigidez a flexión de la placa  
 $= Eh^3 / [ 12 (1-u^2) ]$

$E$  = módulo de Young del material de la placa

$h$  = espesor de la placa

$u$  = relación de Poisson

## EQUILIBRIO

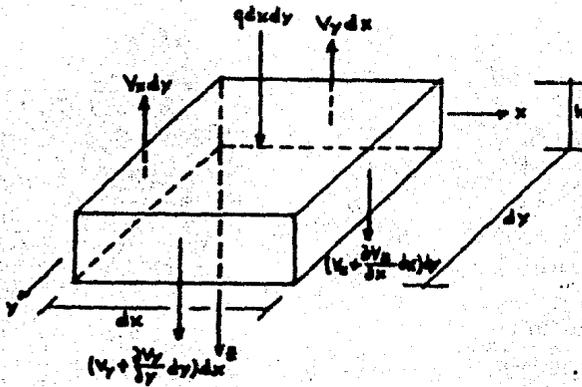
La ecuación 1.1. se encuentra siguiendo un proceso de dos pasos, el primero considera equilibrio y el segundo, la compatibilidad de deformaciones. Las fuerzas que actúan en un elemento diferencial de losa, se muestran en la fig. 1.1. Todas las acciones de la losa se dan por unidad de ancho y tienen que ser multiplicadas por las dimensiones del elemento, para obtener las fuerzas que actúan sobre éste. Para claridad estas fuerzas se dividen en dos grupos; de superficie y fuerza cortante fig. 1.1a, y de flexión y momento torsionante, fig. 1.1b. Nótese que la fuerza cortante  $V_x$  actúa en la misma cara del elemento que el momento  $m_x$ . Este fig. 1.1, fuerzas que actúan en el elemento diferencial de la losa, a) fuerzas de superficie y cortante, b) vectores de flexión y momento torsionante.

Momento necesitará refuerzo en la dirección x. Los momentos se dan en forma vectorial, usando la regla del tornillo de la mano derecha. El vector representa el momento actuando en una cara, con el momento tendiendo a producir rotación alrededor del eje de la flecha. La longitud del vector representa la magnitud del momento, y el vector puede sumarse gráficamente o de otra manera.

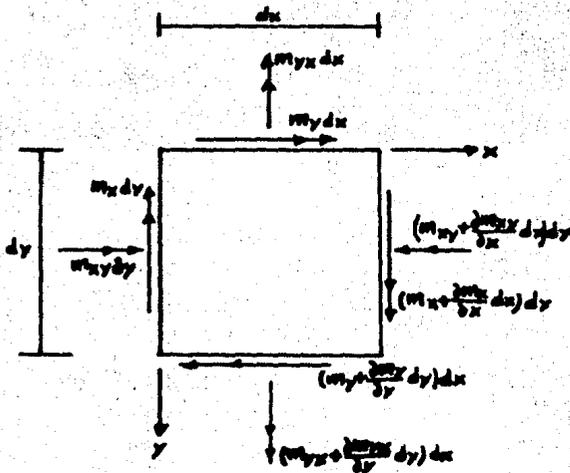
Tanto los momentos  $m_x$  como  $m_y$  de la fig. 1.1b, son momentos positivos, produciendo compresión en la superficie superior de la losa.

El equilibrio se satisface, sí:

$$\sum F_z = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \quad \text{EC. 1.2.}$$



(a)



(b)

FIG. 1. | FUERZAS QUE ACTUAN EN EL ELEMENTO DIFERENCIAL DE LA LOSA, a) FUERZAS DE SUPERFICIE Y CORTANTE b) VECTORES DE FLEXION Y MOMENTO DE TORSION.

Tomando momentos alrededor del eje de las "x" y despreciando los términos de orden superior, se tiene:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x \quad \text{EC. 1.3}$$

Así mismo con la suposición de que  $m_{xy} = m_{yx}$  ya que  $Z_{xy} = Z_{yx}$ , en cada uno de los planos horizontales, a cualquier distancia "z" de la superficie neutra, teniéndose:

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = v_y \quad \text{EC. 1.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.3 y 1.4 en la ecuación 1.2, se tiene la ecuación de equilibrio de la placa:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial m_y}{\partial y^2} = q \quad \text{EC. 1.5}$$

Esta ecuación es simplemente una ecuación de equilibrio, y es independiente del estado de elasticidad o plasticidad, de la relación de Poisson, sea que la placa fuera isotrópica u ortrópica.

## RELACIONES MOMENTO-DEFORMACION

La compatibilidad de las deformaciones en las losas, se rigen bajo las siguientes suposiciones:

1. El material debe estar sujeto a la Ley de Hooke y ser isotrópico.
2. La deflexión debe ser pequeña con relación a el espesor de la losa.
3. Cualquier línea recta perpendicular a la superficie central de la losa, antes de la deformación, permanente recta y normal a la superficie central, después de la deformación.
4. Los esfuerzos directos normales a la superficie central, se desprecian.

Las relaciones fuerza-deformación, se pueden formular como sigue:

Considera un elemento diferencial de losa, ver fig. 1.2, sujeto a los momentos  $m_x$ . Los momentos flexionantes del elemento en un segmento de curva, con curvatura  $\theta_x = 1/R_x$ , donde  $R_x$  es el radio de curvatura en la dirección "x". La curvatura también puede expresarse como:

$$\theta_x = \epsilon_x / z \quad (\text{radianes / unidad de longitud}) \quad \text{EC. 1.6}$$

donde:  $\epsilon_x$ , es la deformación en la dirección "x" en una fibra a una distancia "z" de la superficie neutra.

La curvatura también se define como:

$$\theta_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{EC. 1.7}$$

igualando la ecuación 1.6 con la 1.7 se tiene:

$$\epsilon_x = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{EC. 1.8}$$

esta expresión también se aplica cuando el momento  $m_y$ , actúa en el elemento, así como  $m_x$ , dado que  $-\partial^2 w / \partial x^2$  es la curvatura en la dirección "x" debido tanto a  $m_x$  y  $m_y$ . Igualmente:

$$\epsilon_y = - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{EC. 1.9}$$

la que también se aplica al caso general, cuando  $m_x$  y  $m_y$  están actuando.

La relación general esfuerzo-deformación, para un material linealmente elástico, se da para cualquier resistencia del material, como:

$$f_x = \frac{E}{1-u^2} (\epsilon_x + u\epsilon_y) \quad \text{EC. 1.10a}$$

$$f_y = \frac{E}{1-u^2} (\epsilon_y + u\epsilon_x) \quad \text{EC. 1.10b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1-u^2}{2(1+u)} \frac{E}{\gamma} \gamma_{xy} \quad \text{EC. 1.10c}$$

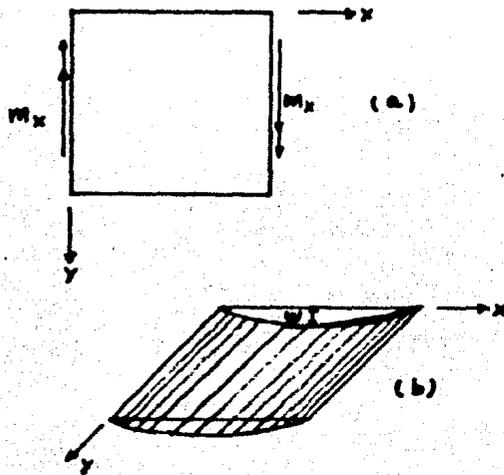


FIG. 1.2  
 a) MOMENTO APLICADO  
 POR UNIDAD DE ANCHO  
 b) DEFORMACION

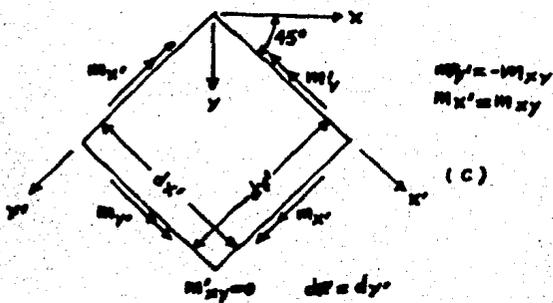
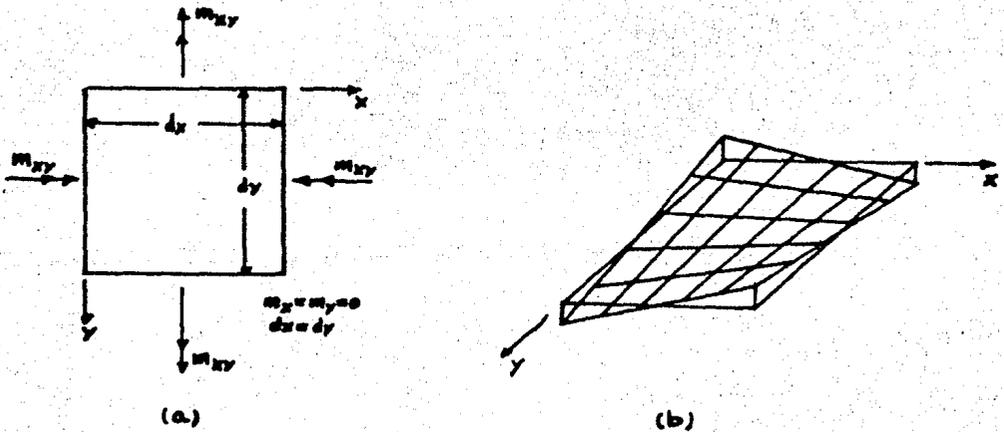


FIG. 1.3.- a) MOMENTO DE TORSION POR UNIDAD DE ANCHO  
 b) DEFORMACION, c) SISTEMA EQUIVALENTE

Entonces, el esfuerzo  $f_x$  en una fibra a una distancia "z" de la superficie neutra, se puede expresar en términos de la curva - como:

$$f_x = -z \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad \text{E.C. 1.11}$$

El momento por unidad de ancho en la dirección "x", puede obtenerse integrando el primer momento de  $f_x$  alrededor de la superficie neutra del peralte de la placa:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} f_x z \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} - \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) z^2 \, dz \\ &= \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Introduciendo  $D = E h^3 / 12(1-\mu^2)$  como el factor de rigidez de la placa, se tiene:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad \text{E.C. 1.12}$$

$$y \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad \text{E.C. 1.13}$$

La aplicación del momento torsionante en un elemento diferencial de losa, se tiene en la fig. 1.3a, y produce una deformación del tipo asiento de silla, fig. 1.3b.

Los momentos torsionantes deben ser iguales o sea  $m_{xy} = m_{yx}$ , y tener ambos la dirección que se indica en la fig. 1.3a o dirección opuesta, de cualquier modo, el equilibrio de los esfuerzos cortantes no se puede mantener.

La relación momento torsionante - deformación, se obtiene de diferentes maneras. Una de ellas es reemplazar el sistema mostrado en la fig. 1.3a por el sistema equivalente mostrado en la fig. 1.3c. Este sistema de reemplazo tiene la ventaja de estar sujeto a un momento flexionante solamente, el cual es también el momento flexionante principal. La relación momento flexionante - deformación, la que ya se vió, se escribe como:

$$M_{x'} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + u \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} \right) \quad \text{E.C. 1.14}$$

$$M_{y'} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + u \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} \right) \quad \text{E.C. 1.15}$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse y dar la curvatura en las direcciones "x" y "y", nótese que  $m_{x'} = m_{xy}$ ,  $m_{y'} = -m_{xy}$ , y  $m_{x''} = m_{y'}$ .

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = - \frac{(M_{x'} - u M_{y'})}{D(1-u^2)} = - \frac{M_{xy}}{D(1-u)} \quad \text{E.C. 1.16}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = - \frac{(M_{y'} - u M_{x'})}{D(1-u^2)} = - \frac{M_{yx}}{D(1-u)} \quad \text{E.C. 1.17}$$

La deformación relativa para los ejes x,y en términos de la curvatura relativa para los ejes x',y' se puede expresar como:

$$- \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( - \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} \right) \quad \text{E.C. 1.18}$$

Sustituyendo la ec. 1.16 y 1.17 en la 1.18 y resolviendo para  $m_{xy}$  se tiene:

$$M_{xy} = - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} D(1-u) \quad \text{E.C. 1.19}$$

el término  $\partial^2 W / \partial x \partial y$  representa la distorsión o torsión, o sea la razón del cambio de pendiente en la dirección "x" como un movimiento en la dirección "y".

Sustituyendo las ecs. 1.12, 1.13 y 1.19 en la ecuación de equilibrio 1.5 nos conduce a la ecuación de Lagrange (E.C. 1.1).

La ecuación de transformación dada como la ecuación 1.18 es un caso especial para un desplazamiento de ejes a 45° simplificada de una expresión más general.

En la fig. 1.4 se desea encontrar la curvatura y deformación relativa para los ejes  $x'$  -  $y'$ , suponiendo que se conocen para los ejes  $x$ - $y$ .

Primero la diferencia en deflexión entre los puntos a y b se tiene como:

$$\partial W = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy \quad \text{EC. 1.20}$$

La pendiente en la dirección  $x'$  es entonces:

$$\begin{aligned} \partial W / \partial x' &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dx'} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dx'} \\ &= \frac{\partial W}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial W}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \quad \text{EC. 1.21} \end{aligned}$$

de esto se nota que:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \quad \text{EC. 1.22}$$

la derivada parcial segunda con respecto a  $x'$  da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \right) \left( \frac{\partial W}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial W}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad \text{EC. 1.23} \end{aligned}$$

La pendiente en la dirección  $y'$  se tiene sustituyendo  $(\theta + 90^\circ)$  por  $\theta$  en la ec. 1.21:

$$\frac{\partial W}{\partial y'} = - \frac{\partial W}{\partial x} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial W}{\partial y} \cos \theta \quad \text{EC. 1.24}$$

Tomando la derivada parcial segunda con respecto a  $y'$  da:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad \text{EC. 1.25}$$

la deformación relativa para los ejes  $x' - y'$  se tiene tomando la derivada parcial de la ec 1.24 con respecto a "x":

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \theta \right) \left( - \frac{\partial W}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial W}{\partial y} \cos \theta \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \cos 2\theta \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad \text{E. C. 1.26}\end{aligned}$$

Para el caso considerado arriba, ( $2\theta = 90^\circ$ ) que elimina el segundo término de la ec. 1.26. El término,  $(\partial^2 W / \partial x^2 + \partial^2 W / \partial y^2)$  es independiente del ángulo  $\theta$  y la suma es algunas veces referida a la curvatura media.

## RELACIONES CORTANTE - DEFORMACIÓN

Sustituyendo los momentos flexionantes y torsionantes ecuaciones 1.12, 1.13 y 1.19 en las ecs. 1.3 y 1.4 se tienen las siguientes fuerzas cortantes, por unidad de ancho:

$$V_x = -D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{E. C. 1.27}$$

$$V_y = -D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad \text{E. C. 1.28}$$

## CONDICIONES DE FRONTERA

En un borde fijo no hay ni deformaciones ni rotaciones. Si el borde está a lo largo de la dirección "y", las condiciones de frontera se pueden expresar matemáticamente como:

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \partial W / \partial x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{E. C. 1.29}$$

En un borde simplemente apoyado no hay deflexión, pero el borde tiene libertad de giro y por lo tanto no hay momento a flexión perpendicular a el borde. Si el borde está en la dirección "y" las condiciones de frontera pueden expresarse como:

$$M_x = 0 = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

donde:  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$  por inspección nos lleva a:

$$\left. \begin{array}{l} W = 0 \\ \partial^2 W / \partial x^2 = 0 \end{array} \right\} \text{ E. c. 1.30}$$

Si el borde es libre (si lo hay), no hay ni momento ni reacción, no obstante la deflexión y rotación pueden ocurrir. Las expresiones de las condiciones de frontera, serán:

$$m_x = 0$$

$$m_{xy} = 0$$

$$V_x = 0$$

El momento torsionante produce una reacción componente  $V_x$ , que puede ser determinada para reemplazar el momento torsionante  $m_{xy}$  (la cual es la resultante del esfuerzo cortante horizontal en la losa) que actúa en la misma longitud 'dy' por un par equivalente de fuerzas verticales, como se ve en la figura 1.5. Esto da una fuerza resultante, por unidad de longitud, de:

$$V'_x = \left[ -(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy) + m_{xy} \right] \frac{1}{dy} = -\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \text{E. c. 1.31}$$

La reacción total es entonces el cortante menor de la componente del momento torsionante:

$$R_x = V_x - V'_x = V_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \text{E. c. 1.32}$$

igualando  $m_x = 0$  y  $R_x = 0$ , se tienen las condiciones de frontera:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ E. c. 1.33}$$

En un borde apoyado y restringido elásticamente, la ec. 1.33 cumple con las ecuaciones de compatibilidad, y cuando se multiplica por (-D) se establece una igualdad en función de la flexión de la viga y rigidez torsional y claros que tiendan a cero.

## REACCIONES

Sobre las bases discutidas anteriormente, es evidente que la reacción en un borde apoyado, Es el cortante, más o menos, la contribución del momento de torsión y se escribe como:

$$R_x = V_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] \quad \text{E. C. 1.34}$$

$$R_y = V_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad \text{E. C. 1.35}$$

En un borde empotrado en la dirección "y" no hay momento torsionante ya que  $\partial W / \partial x = 0$ , a lo largo del borde y consecuentemente  $\partial^2 W / \partial x \partial y = 0$ . El momento de torsión, forma una contribución definida en la reacción en un apoyo de un borde simplemente apoyado y puede incrementarse o decrecer la fuerza, por unidad de longitud. Como en una esquina que forma un ángulo recto, donde dos bordes simplemente apoyados se interceptan y  $R_x$  y  $R_y$  se aproximan a cero. Sin embargo, el momento torsionante alcanza un máximo en la esquina y como resultado se tiene una fuerza desequilibrada  $m_{xy}$ , actuando verticalmente en el extremo del lado de la losa, como se ve en la fig. 1.5b. Hay efectivamente dos fuerzas semejantes que actúan justamente en la esquina de la losa, de tal modo que una está contribuida por cada uno de los lados que se interceptan, como se ve en la fig. 1.5c, dando una fuerza de esquina de:

$$R_o = 2m_{xy} = -2D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad \text{E. C. 1-36}$$

## LA RELACIÓN DE POISSON

La relación de Poisson se presenta como una variable significativa en muchas de las ecuaciones de placas, aún cuando ésta siempre ha sido considerada como cero al trabajar con losas de concreto reforzado tal como se indica más adelante. Esto es razonable para una losa agrietada, y se debe tomar en cuenta que todas las losas se -

agrietan al acercarse a la carga de colapso. Y por otro lado, - tiene muy poca influencia en el estado de esfuerzos de la estructura.

La influencia de la relación de Poisson sobre el comportamiento de una losa agrietada de concreto reforzado, se espera que sea - menor que en el caso de una placa homogénea, ya que al considerar un elemento sujeto al esfuerzo de tensión en las losas se trata - realmente de un cruce de varillas de acero que no están correcta- mente conectadas y que ni siquiera están necesariamente en contacto. Por consiguiente, el esfuerzo en el acero en dirección "X" puede afectar el esfuerzo en el acero en dirección 'y', sólo si - se transmite a través del concreto; y no se espera que ésto sea - una transferencia eficiente debido a la presencia del agrietamiento y a las enormes diferencias en los valores de los módulos de - Young de los materiales. La relación de Poisson tendrá cierta influencia en los esfuerzos de comprensión de concreto, pero éstos esfuerzos de comprensión no controlan el diseño en la mayoría de- los sistemas de losas. Existe una influencia menor de la relación de Poisson en las losas rígidas, tal como se refleja en el término  $D$  en la ecuación 1.1 pero ésta es mucho menor que las variaciones esperadas en los módulos de concreto de Young. La relación de -- Poisson podría ser importante en una losa reforzada con una placa de acero en vez de varillas.

El valor "verdadero" de  $u$  para una losa, sin lugar a duda, varía - sobre el área de la losa, dependiendo de la magnitud del agrieta- miento. Si se hace  $u = 0.15$  para el concreto, este valor será co- rrecto únicamente para una losa no agrietada y supuestamente sólo- para los esfuerzos del concreto. Y se acerca a cero, mientras que la losa se aproxima a un estado de agrietamiento total. Un expe- rimento para determinar el valor más adecuado de  $u$  tuvo que haber

sido realizado con mucho cuidado, ya que las pequeñas variaciones en propiedades importantes tal como E, podrían fácilmente ocultar los resultados.

Sin embargo, un estudio analítico realizado por Jofriet sugirió un experimento que puede ser de utilidad, encontrándose que el momento  $m_x$  en la dirección del claro corto en un tablero típico interior rectangular de una losa sin vigas, es muy sensible a  $u$  en la posición marcada en la fig. 1.6. Para  $u = 0$  hay un momento negativo, pero para  $u=0.05$  es cero y para todos los valores grandes de  $u$  el momento es positivo. El que esto sea posible se puede observar con ayuda de la ecuación 1.12, considerando que el factor de la curvatura en la dirección '-Y' sería más grande que en la dirección 'X' y de signo opuesto.

Haciendo caso omiso del efecto de  $u$  en  $D$ , ya que es menor, el valor específico de la relación de Poisson, que fue seleccionada, tiene una influencia en la solución de la ec. 2.1, sólo si entra en las condiciones de frontera de la placa. No tiene influencia en el caso de losas empotradas y simplemente apoyadas, pero es de alguna consecuencia en losas con bordes libres o restringidos elásticamente, como se indicó en la ec. 1.33.

En los casos donde las condiciones de frontera no incluyen la relación de Poisson, los momentos para un valor  $u$  pueden fácilmente determinarse a partir de los momentos para otro valor, y es conveniente resolver para el caso de  $u=0$  y los momentos obtenidos para otros valores de  $u$  según sea necesario. Si  $m_{x0}$ ,  $m_{y0}$ ,  $m_{xy0}$ ,  $W_0$  son los momentos y deformación para  $u=0$ , las mismas cantidades para valores finitos de  $u$  son:

$$\begin{aligned}
 m_{xu} &= m_{xo} + um_{yo} \\
 m_{yu} &= m_{yo} + um_{xo} \\
 m_{xyu} &= (1 - u) m_{xyo} \\
 W_u &= (1 - u^2) W_o
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} m_{xu} \\ m_{yu} \\ m_{xyu} \\ W_u \end{aligned}} \right\} \text{E. C. 1.37}$$

Las ecuaciones 1.37 se tienen a partir de las ecuaciones 1.1, - 1.13, 1.13 y 1.19, siempre que se recuerde que  $W$ , y consecuentemente las derivadas de  $W$ , son más pequeñas que  $(1 - u^2)$ .

#### MOMENTOS ACTUANDO EN UN ANGULO CON LOS EJES COORDENADOS

Lo descrito anteriormente tiene gran interés para encontrar los momentos en las direcciones "X" y "y" junto con los momentos de torsión correspondientes. En algunas ocasiones es necesario encontrar momentos de flexión y de torsión actuando en otras direcciones, y para determinar los momentos principales, o sea los momentos ortogonales que actúan en las caras de un elemento de losa, el cual está libre de momentos de torsión.

Considerese el elemento de losa mostrado en la fig. 1.7a, con los momentos flexionantes y de torsión, actuando como muestran los vectores.

Las magnitudes de los momentos que actúan en una sección inclinada un ángulo  $\alpha$  con el eje "y" se puede encontrar aislando el cuerpo libre que se encuentra en la fig: 1.7b, se suman las componentes  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$ , en las direcciones "n" y "t", para encontrar el momento flexionante ' $m_n$ ' y el momento torsionante ' $m_t$ ' que actúan en la sección inclinada. Este cálculo es exactamente similar a la solución de un problema general de un esfuerzo en dos dimensiones, y resultan las mismas ecuaciones. Los momentos por unidad de ancho, se dan en las siguientes expresiones:

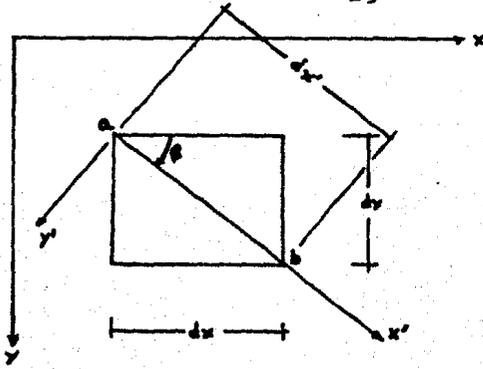


FIG. 1.4.- ELEMENTO DIFERENCIAL DE LOSA, ORIENTADO EN UN NUEVO SISTEMA DE EJES COORDENADOS.

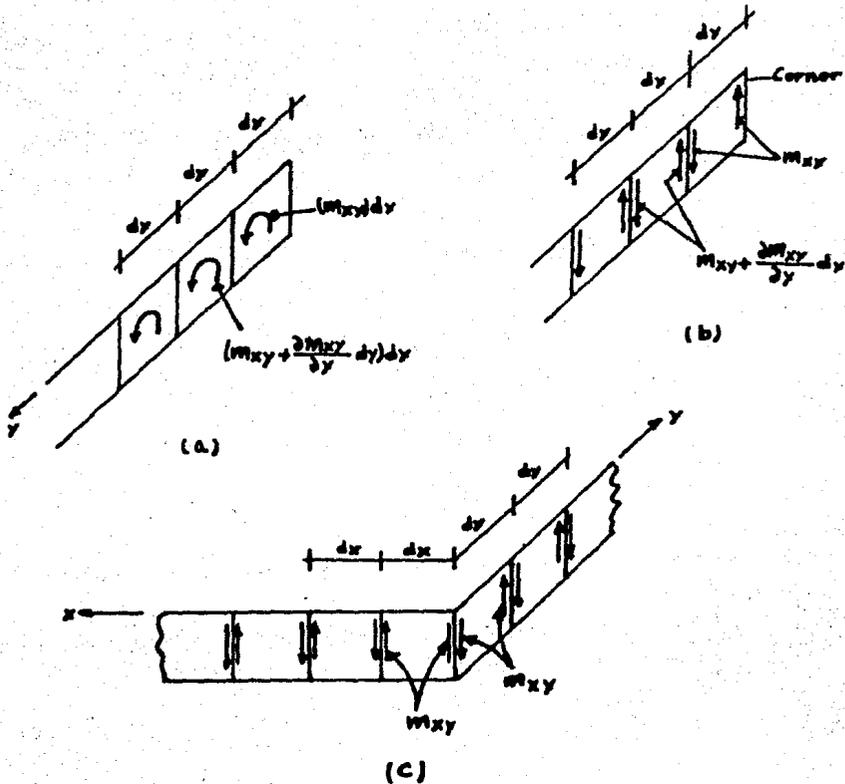


FIG. 1.5.- REEMPLAZO DEL MOMENTO DE TORSION POR UN PAR  
 a) MOMENTO DE TORSION, b) PAR EQUIVALENTE,  
 c) FUERZAS EN LA ESQUINA DE LA LOSA.

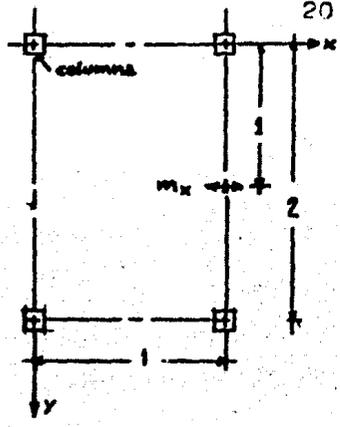


FIG.1.6.- TABLERO INTERIOR RECTANGULAR INDICANDO LA POSICION DE  $M_x$  PARA CUANDO LA RELACION DE POISSON'S ES CRITICA

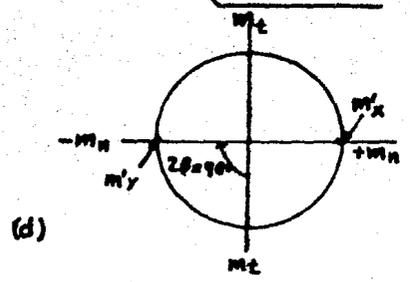
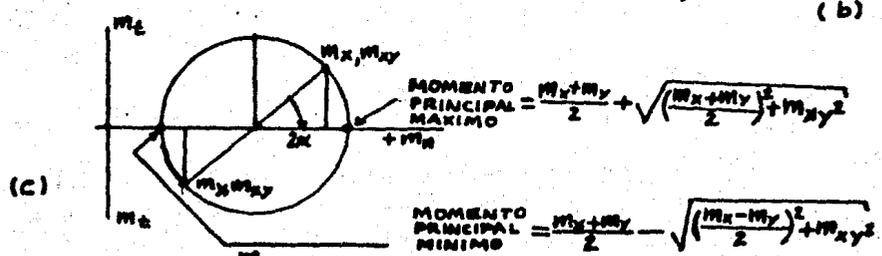
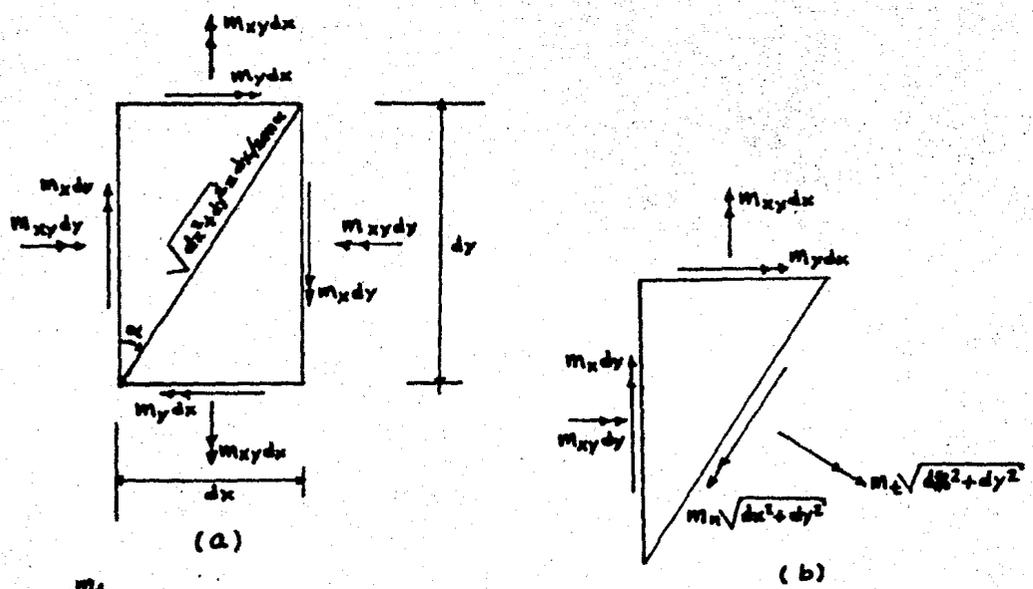


FIG.1.7.- OBTENSION DE LOS MOMENTOS PARA UN ANGULO ' $\alpha$ ' CON EL EJE 'y'  
 a) ELEMENTO DIFERENCIAL DE LOSA  
 b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE PARA EL ' $\alpha$ '  
 c) MOMENTOS PRINCIPALES POR EL CIRCULO DE MOHR.  
 d) CIRCULO DE MOHR.

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ &= M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad \text{E.c. 1.38a}$$

$$\begin{aligned} M_t &= (M_x - M_y) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha - M_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad \text{E.c. 1.38b}$$

El ángulo  $\alpha$  del eje "y" al plano del momento principal, se obtiene con:

$$\tan 2\alpha = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad \text{E.c. 1.38c}$$

Tal vez para estas ecuaciones, una forma más conveniente de resolverlas es a través del círculo de Mohr, como se muestra en fig. 1.7c. La fig. 1.7d muestra dicho círculo asociado con la transformación usada en la fig. 1.3.

Los esfuerzos tangenciales relativos a los ejes coordenados girados a través del ángulo  $\beta$  del eje "x", se encuentra usando las siguientes ecuaciones, las que se obtuvieron de considerar el equilibrio vertical, como se muestra en la fig. 1.8):

$$V_{x'} = V_x \cos \beta + V_y \sin \beta \quad \text{E.c. 1.39a}$$

$$V_{y'} = V_x \sin \beta + V_y \cos \beta \quad \text{E.c. 1.39b}$$

## MÉTODOS DE SOLUCIÓN

El procedimiento general para resolver un problema de una losa elástica, es determinar la ecuación para la elástica de la losa y luego combinar las derivadas de la deflexión, y así obtener las fuerzas internas.

La forma de la elástica debe satisfacer tanto la EC. de Lagrange (EC. 1.1), como las ecuaciones de las propiedades de las condiciones de frontera.

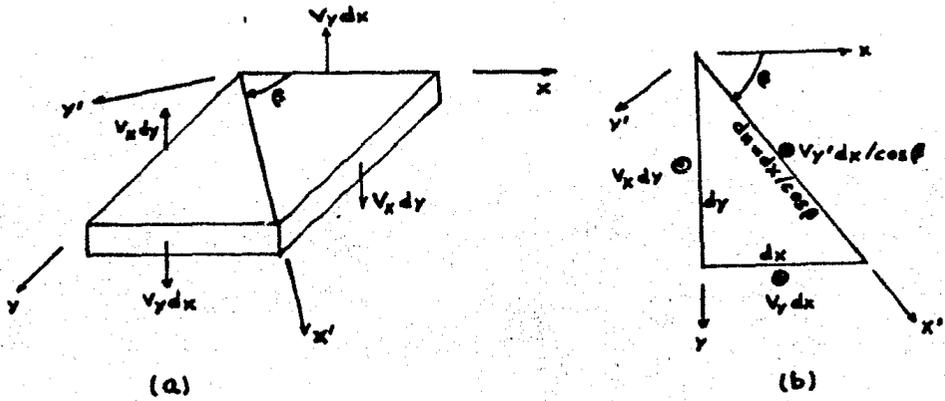


FIG. 1.8, FUERZAS CORTANTES EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL, a) ELEMENTO DE LOSA CON FUERZAS CORTANTES, b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

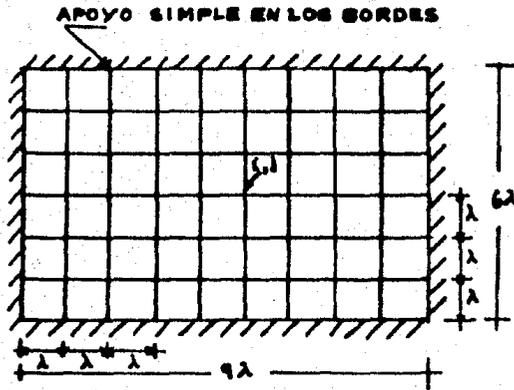


FIG. 1.9.- SUBDIVISION DE UNA LOSA RECTANGULAR PARA APLICAR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

Este procedimiento es el que nos lleva a la solución de una ecuación diferencial general, para una viga;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{EI}$$

E. c. 1.40

y las condiciones de frontera asociadas.

Cada ingeniero civil resuelve de forma rutinaria la ec. 1.40, al usar varias técnicas simples, pero desafortunadamente la solución a la ec. de Lagrange, no es muy directa. Se han encontrado soluciones de forma particular a la ec. 1.1., para un número muy limitado de losas, como placas circulares con cargas asimétricas, -- algunas placas elípticas, y algunas placas triangulares, pero la lista es corta y no ayuda mucho a los estructuristas.

Las primeras soluciones a la ec. de Lagrange las obtuvo Navier - en 1820, al usar la serie de Fourier, para describir la deflexión y la carga de placas rectangulares simplemente apoyadas, bajo -- cargas arbitrarias.

La forma general de la función de la deflexión, es:

$$W = qC \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

E. c. 1.41

donde: C = constante

$A_{mn}$  = es una variable que depende de los enteros m y n y de la relación de los lados del tablero, A y b.

El concepto de energía para soluciones de placas, fue desarrollado por Ritz, que se basa en el principio de que la energía total de una placa deformada, sea mínima, cuando existe el equilibrio. Las soluciones se encuentran por lo general, en forma de solución de serie, pero existe más libertad en la elección de las series que se usarán, siempre que las funciones satisfagan las condiciones de frontera del problema.

Se han seleccionado coeficientes para los términos sucesivos en las series para minimizar la energía total en el sistema. El método de Galerkin cae dentro de esta clase general. Los términos en las series polinominales o trigonométricos y tales series como las funciones de Bessel y Hankel, han sido usadas para obtener soluciones de problemas particulares.

En el código ACI-77, las disposiciones para el diseño de estructuras de losas, tuvieron una influencia muy importante en los estudios realizados en Sutherland.

Debido a la gran complejidad de los métodos exactos en el análisis de placas que se han descrito se ha realizado un gran esfuerzo para desarrollar métodos aproximados de análisis.

## MODELOS ELÁSTICOS

Otro método tradicional de hacer la distribución de momentos en placas, es por medio del uso de modelos elásticos, en una gran gama de materiales como yeso, vidrio, plástico y vulcanita.

Para el análisis de losas complejas, se usan este tipo de modelos, aplicando procedimientos numéricos y modernas calculadoras electrónicas. De este modo se obtiene una información más cuantitativa y precisa en la distribución de los momentos flexionantes de los modelos que han servido en el desarrollo de los modernos medios en la medida de las deformaciones, los modelos elásticos son de gran ayuda en la investigación y diseño de placas y losas.

## MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas fue introducido por Nielsen en 1920, como una alternativa en los métodos de solución de placas. Estos resultados fueron usados por Westergaard y Slater, con modificaciones a corregir para capiteles de columnas circulares, para obtener las distribuciones de momentos, usados en el código ACI, para estructuras de losas planas adaptadas a la versión 1963, de dicho código.

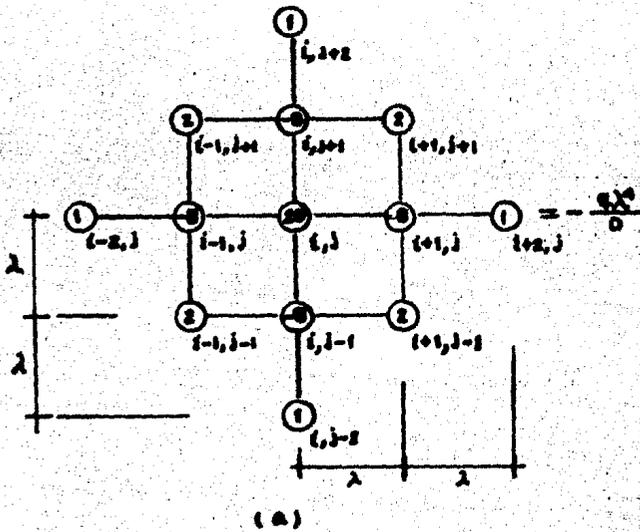
El método de diferencias finitas reemplaza la ecuación en derivadas parciales de cuarto orden de Lagrange, por una serie de ecuaciones algebraicas lineales simultaneas, para la deflexión de un número finito de puntos en la superficie de la losa.

Mucha información básica sobre el uso del método, ha sido proporcionada por Jensen, en su informe sobre una investigación de losas de puentes esviejados, con bordes rígidos.

Para aplicar este método a una losa o un tablero de losa, se divide ésta, en un número adecuado de cuadros (o también pueden ser rectángulos, paralelogramos, etc.) como se muestra en la fig. 1.9.

La deflexión de cada nudo interior se debe determinar, dando 40 puntos a la losa de la fig. Si la carga está uniformemente distribuida y la losa es de un espesor uniforme, para éste caso particular se puede hacer una reducción del número de deflexiones desconocidas a 12.

Las ecuaciones de diferencias se escriben para cada punto de la intersección de la cuadrícula. Esto puede hacerse manualmente haciendo uso del operador de la ecuación de diferencias, o molécula, como se ve en la fig. 1.10a en cada punto. La ecuación en función de la deflexión  $W$ , para cada punto  $i, j$ , se muestra en la fig. 1.10b.



$$20w_{i,j} - 8(w_{i,j+1} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}) + w_{i,j+2} + w_{i,j-2} + w_{i-2,j} + w_{i+2,j} = -\frac{q\lambda^2}{D}$$

(b)

FIG. 1.10.- a) OPERADOR DE DIFERENCIAS FINITAS PARA UN PUNTO TÍPICO INTERIOR, b) ECUACION DE DIFERENCIAS FINITAS PARA EL PUNTO  $i, j$ .

Se escribe una ecuación para cada punto de deflexión desconocida, y se resuelve el grupo de ecuaciones simultáneas para las deflexiones desconocidas.

El número de cuadrículas que se deben tomar en consideración, depende de la precisión que se quiera, de la prueba de ensayo y de la capacidad de la máquina computadora.

Dentro de los métodos de diferencias finitas, el modelo físico - que más se usa, es sin duda el de la ANALOGIA DE LA PLACA, que - consiste en una estructura formada por una serie de barras rígidas ortogonales conectadas por varios resortes y los momentos -- flexionantes y torsionantes se piensa que actúan en ésta estructura reemplazando a la placa.

El autor de éste modelo fue Newmark. Descripciones completas de las propiedades y el uso del modelo de la analogía de la placa, son proporcionadas por Ang y Newmark, en una descripción sobre - el exitoso procedimiento de distribución de momentos para losas, realizado por Ang y Prescott. Este modelo se analiza punto por punto, y se obtiene un conjunto de ecuaciones exactamente iguales a las ecuaciones diferenciales antes vistas y se resuelven de la misma manera. El método tiene la capacidad de tomar en - cuenta condiciones de límite muy complejas, el cual fue usado por Simmonds, para obtener los momentos, cortantes y deflexiones, en una serie de losas de 9 tableros, apoyadas en vigas flexibles unidas a columnas flexibles.

Una ventaja de estos modelos físicos, para el análisis de placas, es que los resortes del modelo, se comparten de acuerdo a las relaciones elasto-plásticas, esfuerzo-deformación o momento-curvatura.

En los inicios de la era de la computación, a finales de los años 50's y a principios de los 60's se usaron varios métodos basados en diferencias finitas y analogía de placas, se usaron ampliamente en estudios de detalles, como la distribución de esfuerzos alrededor de la columna en losas sin vigas, efectos de rigideces -- de flexión y torsión de vigas y efectos de rigideces de columnas para la distribución de momentos de losas. Muchas de las disposiciones descritas en el código ACI-77, para el diseño de estructuras de losas, se pueden remontar directa o indirectamente a esos estudios.

### MÉTODOS APROXIMADOS

Numerosos métodos aproximados para el análisis de losas, han sido propuestos, desarrollados, y usados en los últimos años. Muchos de éstos aparecieron antes de la era de las computadoras.

La sustitución de una losa por una serie de vigas ortogonales, - con una viga en cada dirección por lo menos, es uno de los recursos más antiguos que se han usado.

Los momentos flexionantes que se obtengan, pueden diferir considerablemente de la distribución teórica elástica actual, debido a la omisión del término de las ecuaciones parciales mixtas, en el estado de equilibrio de la losa, de la ec. 2.5.

Siess y Newmark, desarrollaron un procedimiento de distribución de momento, para una losa de varios tableros apoyada en vigas sin flexionarse. Este procedimiento es directamente comparable a el de distribución de momentos de vigas realizado por Cross, excepto que los factores de distribución de momentos, son aproximados, -- donde todos los momentos negativos están equilibrados y los momentos positivos se calculan usando otra serie de factores aproximados. Se puede tomar en cuenta la rigidez torsional de las vigas de apoyo.

A medida que las vigas permanecen rígidas a la flexión, el método da valores razonablemente exactos para el momento, suficientes para los propósitos de diseño.

El principal problema es que pocas vigas son verdaderamente rígidas, aún cuando los muros de carga satisfacen esta limitación, y los momentos en los tableros de borde y esquina, resultan particularmente sensibles a pequeñas deformaciones de los apoyos.

Vanderbilt, presentó un método aproximado, para el cálculo de las deflexiones de losas continuas, con y sin vigas, en los que se combinan varios aspectos de análisis de marcos, y soluciones conocidas de placas rectangulares simplemente apoyadas. El efecto del agrietamiento debido a las rigideces se tomó en cuenta en forma empírica. El procedimiento pudo probablemente también ser usado para el cálculo de momentos, pero esto nunca se hizo, tal vez porque en ese tiempo se desarrolló el método del análisis del marco equivalente.

Método del marco equivalente. Este método se aplicó por varios años, hasta que en 1963 el código del ACI lo incluye en sus disposiciones, para losas planas y placas planas.

En el año 1977, es revisado este método del marco equivalente por dicho código, se amplía y se incluye para losas en dos direcciones.

El análisis del marco equivalente permite una determinación de la distribución de los momentos negativos y positivos, tomando en cuenta la variación en longitud y carga de varios claros y rigideces de apoyo, pero no da alguna información sobre las distribuciones cuando actúan fuerzas laterales, a través de las losas o las vigas.

La versión ACI-77 en cuanto a las disposiciones del análisis del marco equivalente, se basaron en los trabajos de Corley y Corley y Jirsa.

## C A P I T U L O II

### RESULTADOS DE LA TEORIA ELASTICA

## I N T R O D U C C I O N

Antes de describir los métodos de diseño de losas. Ya sea el método directo o el del marco equivalente, conviene saber la procedencia de los requisitos para análisis y diseño hechos por el código ACI.

Estos requisitos se basaron en muchos factores, incluyendo los resultados de estudios analíticos de los momentos por la teoría elástica, los resultados de pruebas de varias estructuras tanto en modelos y prototipos a escala, los análisis de resistencia de varios tipos de estructuras de losas, usando la teoría de las líneas de fluencia, y la experiencia de sucesos y fallas en estructuras de losas que se han ido acumulando durante los últimos tres cuartos de siglo.

El código ACI-71 contiene algunos cambios con relación a las últimas ediciones. El cambio más importante es el de la unificación de los métodos de diseño para todas las losas, con y sin vigas. Como un resultado de esto, todos los tipos de losas girarán en torno a los mismos factores de seguridad, que es una reforma importante, ya que una losa apoyada en vigas fue significativamente más fuerte que una losa sin vigas, aún cuando ambas tengan la misma carga viva y muerta, y la misma calidad de materiales.

Una corta historia de la evolución del código, dá alguna perspectiva a la complejidad de la tarea de revisar completamente en forma ordenada una sección de dicho código. En 1956 se inició una larga investigación en la universidad de Illinois. Se ensayaron cinco losas con nueve tableros a escala, con diversos diseños. Los resultados de estas pruebas fueron descritos por Sozen

y Siess. Se hicieron ensayos a placas planas pero a diferente - escala de la anterior, realizadas por la Asociación del Cemento Portland, siendo un gran complemento en la serie de estas pruebas. Una extensiva investigación analítica se realizó al mismo tiempo, y cientos de estructuras de losas, fueron analizadas - con técnicas numéricas.

El volumen de trabajos analíticos y experimentales fueron completados en 1962. La formulación de los requisitos propuestos en el código, se llevaron al mismo tiempo, usando primeramente los resultados de los estudios analíticos, con una muy importante correlación con los resultados experimentales. La reunión del comité 421 del ACI y ASCE sobre pisos de losas de concreto reforzado, se le dió la responsabilidad de mejorar el capítulo 13 del ACI-71.

Se llevaron siete años en la evolución de dicho capítulo, así como discusiones y regateos entre los puntos de vista teóricos y prácticos, y entre la necesidad de hacerlo general y simple, siguiendo las publicaciones anteriores del capítulo 13 como la -- parte del código ACI-71. El capítulo 13 de este código dá dos - procedimientos de diseño para sistemas de losas, y son el método de diseño directo y el del marco equivalente.

#### **EL MÉTODO DE DISEÑO DIRECTO**

Para un sistema de losas, con y sin vigas, y con carga vertical sólomente, debe satisfacer los siguientes requisitos:

1. En cada dirección debe existir un mínimo de tres claros continuos.
2. Los tableros deben ser rectangulares, con una relación de claro largo a corto, no mayor de 2.

3. Las longitudes de los claros de tableros sucesivos en cada dirección, no deben diferir en más de 1/3 de la longitud del claro mayor.
4. Las columnas pueden estar desalineadas un máximo de 10% del claro (en la dirección del desalineamiento) a partir del eje que una los centros de las columnas sucesivas.
5. Todas las cargas deben ser únicamente gravitacionales, y estar distribuidas de manera uniforme en todo el tablero. La carga viva no debe exceder de 3 veces la carga muerta.
6. Para un tablero con vigas entre los apoyos en todos los lados, la rigidez relativa de las vigas en dos direcciones perpendiculares,

$$\frac{\alpha_1 l_2^2}{\alpha_2 l_1^2}$$

no debe ser menor que 0.2, ni mayor que 5.0, o sea:

$$0.2 < \frac{\alpha_1 l_2^2}{\alpha_2 l_1^2} < 5.0$$

7. Tal como lo permite la sección 8.4 ACI-77, la redistribución de momentos no debe aplicarse a los sistemas de losas diseñadas por medio del método de diseño directo (ver sección 13.6.7).
8. Pueden aceptarse variaciones a las limitaciones (a las condiciones anteriores) siempre que se demuestre por medio del análisis, que satisfacen los requisitos de la sección 13.3.1 o sea, que se satisfagan las condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica, si se demuestra que la resistencia de diseño en cada sección, es por lo menos igual a la resistencia requerida en las secciones 9.2 y 9.3 y que se cumplan todas las condiciones de servicio, incluyendo los límites especificados para las deflexiones.

Los sistemas de losas que no cumplan con éstas condiciones, o que aún cumpliéndolas se desean diseñar con un método más exacto, o cuando se tienen cargas laterales, se usa el método del marco equivalente.

El método de diseño directo da reglas para la determinación del momento estático total de diseño y su distribución entre secciones de momento negativo y positivo.

El método del marco equivalente, define un marco equivalente para hacer el análisis estructural para determinar los momentos negativos y positivos que actúan en el sistema de losa. Ambos métodos usan el mismo procedimiento para dividir los momentos originados entre las franjas central y de columna de la losa y las vigas.

El espesor de una losa de entrepiso se puede determinar antes de realizar el diseño, ya que el peso de las losas es una parte importante de la carga muerta de la estructura.

La resistencia al cortante de losas sin vigas, es frecuente un factor de control, y la losa puede tener un espesor suficiente para suministrar una adecuada resistencia al cortante. Una forma menos frecuente, es determinar el espesor por los requisitos de momento flexionante y ésto nos lleva a los espesores mínimos dados en el código ACI-63.

## DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE DISEÑO DIRECTO

Anteriormente se dieron las condiciones que debe cumplir este método.

Antes de realizar el análisis para aplicar este método, es necesario determinar el peralte preliminar "h" de la losa para el --

control de las deflexiones de acuerdo con los requisitos de peralte mínimo de la sección 9.5.3.

En los sistemas de losas sin trabes, se recomienda para el análisis, verificar primero la resistencia al cortante de la losa, en las cercanías de las columnas u otros apoyos, según la sección 11.11 del código.

Determinado el peralte de la losa, se obtiene el momento estático total factorizado en cada claro, dividiendo el momento estático total factorizado, entre los momentos positivos y negativos dentro de cada claro, y distribuyendo el momento positivo y negativo entre la franja de columna y la franja intermedia dentro de cada claro.

#### MOMENTO ESTÁTICO TOTAL FACTORIZADO,

Es la suma absoluta de los momentos positivo en el centro del claro y el promedio de los momentos negativos en los apoyos, basados en una distribución uniforme de la carga a través de la franja de diseño, entre el paño de los apoyos, en la dirección en que se determinan los momentos.

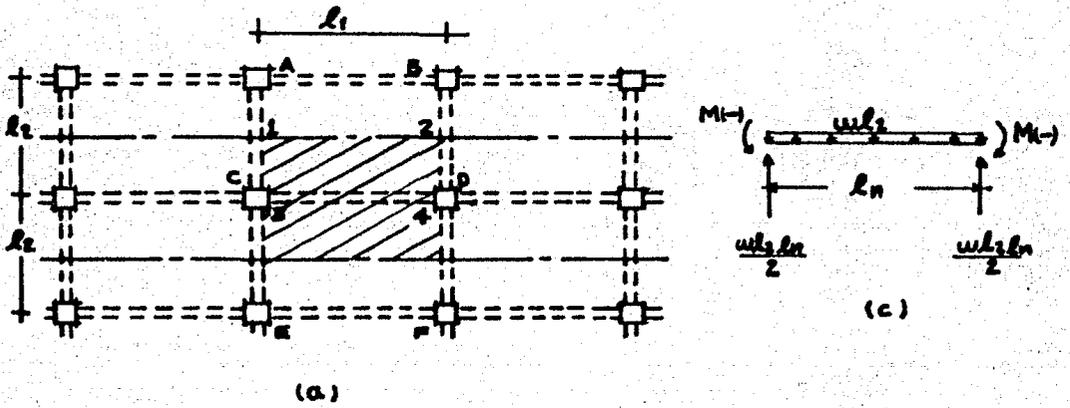
Este momento se expresa como:

$$M_o = \frac{w l_2 l_n^2}{8} \quad \text{EC.2,1}$$

dónde:  $w$  = carga uniformemente distribuida por unidad de área

$l_2$  = claro de centro a centro de columnas o ancho del tablero considerado en la dirección transversal.

$l_n$  = claro libre de cara a cara de los apoyos, en la dirección considerada.



ANALIZANDO EL TABLERO INTERIOR COMO UN CUERPO LIBRE:

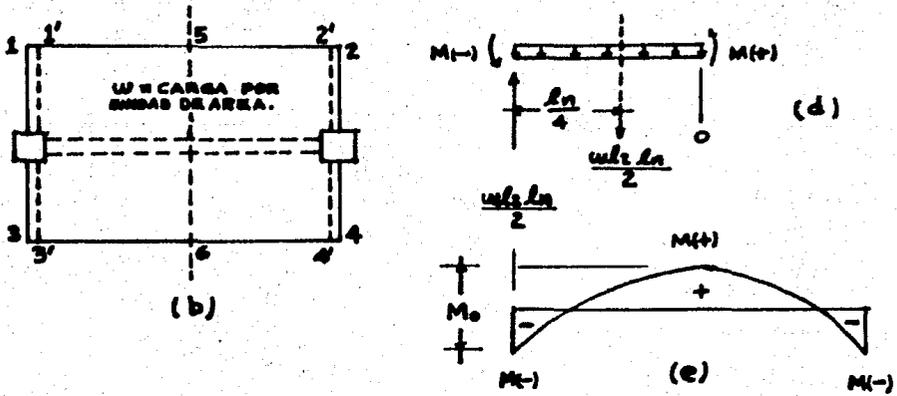


FIG. 2.1

Esta fórmula se obtiene de la siguiente manera:

Considerese el siguiente tablero interior de un piso de losa actuando en dos direcciones, como se muestra en la siguiente figura 2.1.

La carga que actúa en la fig. (c) es  $wl_2$  por unidad de longitud en la dirección del claro largo.

La carga que actúa hacia arriba en las líneas 1'-3' o 2'-4' es  $\frac{wl_2 l_n}{2}$ , donde  $l_n$  es el claro que se toma a partir de la cara de las columnas o apoyos.

Si el momento negativo  $M(-)$ , y el positivo  $M(+)$ , son valores numéricos de los momentos flexionantes positivos, a lo largo de las líneas 1'-3' y 5-6, el momento de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la figura (d), requiere que:

$$M_o = M(-) + M(+) = \frac{wl_2 l_n^2}{8} \quad \text{EC.2.2.}$$

El ACI, usa la notación  $M_o$ , para encontrar  $M(-) + M(+)$  y llama  $M_o$  al momento estático total factorizado. Y establece que la suma absoluta del momento positivo y el promedio de los momentos negativos factorizados en cada dirección no serán menores que ' $M_o$ ' o sea:

$$\frac{M(-)_{IZQ} + M(-)_{DER}}{2} + M(+) \geq M_o = \frac{wl_2 l_n^2}{8} \quad \text{EC.2.3.}$$

donde:  $w$  = carga factorizada por unidad de área

$l_n$  = claro central en la dirección que se determinan los momentos, medido centro a centro de los apoyos, pero no menor que  $0.65 l_1$ ,

- $l_1$  = claro longitudinal en la dirección que se determinan los momentos, medido centro a centro de los apoyos.
- $l_2$  = claro transversal, medido centro a centro de los apoyos.

En construcciones de losas planas los entrepisos de losas que se apoyan en capiteles redondos, el ACI sugiere el procedimiento de considerar los apoyos circulares como apoyos cuadrados, teniendo la misma área.

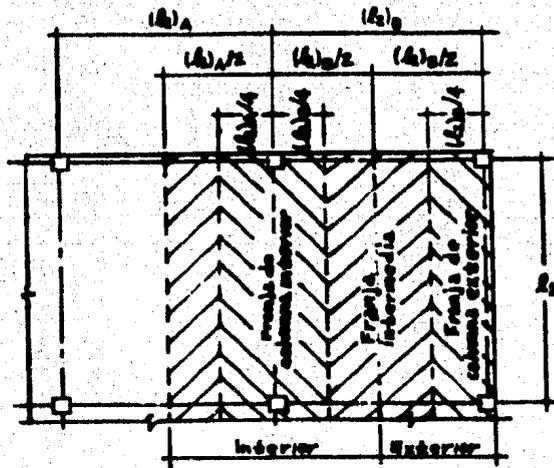
En el diseño de losas que actúan en dos direcciones, el valor de  $M_o$ , debe primero ser dividido entre  $M(-)$  y  $M(+)$ , si cada extremo del claro está restringido de igual forma, o se divide entre  $[M(-) IZQ + M(-) DER] / 2$  y  $M(+)$ , si los extremos del claro se restringen de diferente manera. Entonces los momentos  $M(-) IZQ$ ,  $M(-) DER$  y  $M(+)$  serán distribuidos transversalmente a lo largo de las líneas 1-3 o 1'-3', 2-4 ó 2'-4' y 5-6 respectivamente. Esta última distribución es una función de la rigidez relativa a la flexión entre la losa y la viga incluida.

En seguida se presentan las figuras 2.2 y 2.3, que nos indican cómo obtener las franjas de diseño y cómo considerar los apoyos para obtener las secciones críticas para el momento negativo de diseño.

#### MOMENTOS FACTORIZADOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

La distribución de los momentos negativos y positivos adoptada para un tablero interior en el ACI-77 para el método de diseño directo, es de,  $0.65 M_o$ , para el momento negativo y  $0.35 M_o$  para el momento positivo. Para los claros extremos la distribución del momento estático se controla por la rigidez relativa de la columna exterior equivalente o sea por la rigidez de la columna de borde reducida por la influencia de la flexibilidad torsional de la viga secundaria. Estas recomendaciones son las mismas que las del código ACI-71.

a) FRANJA DE COLUMNA PARA  $l_2 \leq l_1$



b) FRANJA DE COLUMNA PARA  $l_2 > l_1$

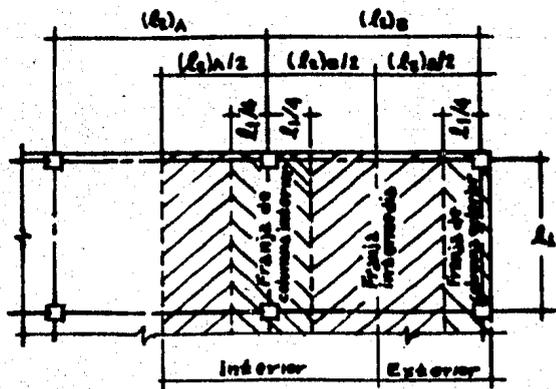
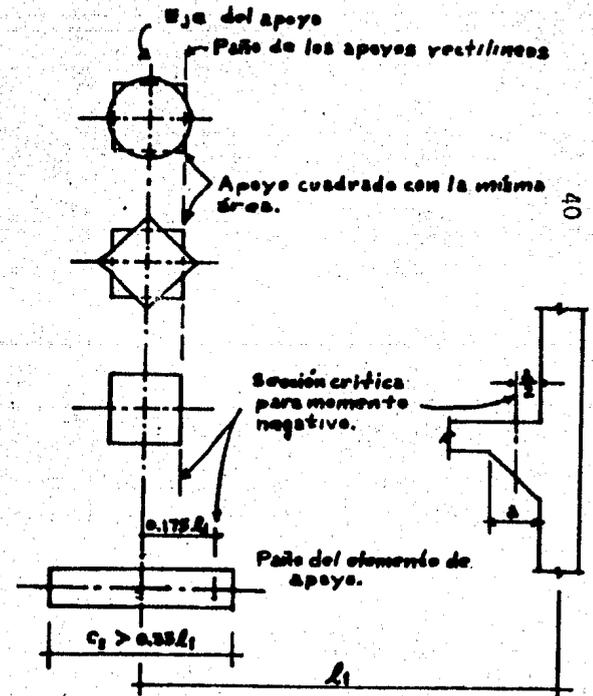


FIG. 2.3.- SECCIONES CRÍTICAS PARA MOMENTO NEGATIVO DE DISEÑO.



APYOS INTERIORES  
Y EXTERIORES CON  
COLUMNAS O MUROS.

APYOS EXTERIORES  
CON BASTILAS O  
MENSULAS.

La distribución del momento de un claro extremo es esencialmente la que resulta de un sólo ciclo de distribución de los momentos negativos de empotramiento en el borde de la estructura, más el que se transporta a la primera sección del momento negativo interior.

Por tanto la distribución de momento es:

$$\text{momento negativo interior} = M_o \left( 0.75 - \frac{0.10}{1+(1/\alpha_{ec})} \right) = M_o (0.75 - 0.10\delta)$$

$$\text{momento de diseño positivo} = M_o \left( 0.63 - \frac{0.28}{1+(1/\alpha_{ec})} \right) = M_o (0.63 - 0.28\delta)$$

$$\text{momento negativo exterior} = M_o \frac{0.65}{1+(1/\alpha_{ec})} = 0.65\delta M_o.$$

donde  $\alpha_{ec} = \frac{k_{ec}}{\sum(k_s + K_b)}$  = rigidez relativa columna exterior equivalente.

$k_{ec}$  = rigidez a flexión de una columna equivalente (momento entre rotación unitaria).

$k_b$  = rigidez a flexión de la viga.

$k_s$  = rigidez a flexión de la losa

$\delta = 1/[1 + (1/\alpha_{ec})]$  sustituyendo aquí  $\alpha_{ec}$ , se tiene:

$$= \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{1}{K_{ec}/(K_s + K_b)} \right) \right]} = K_{ec}/(K_{ec} + K_s + K_b)$$

Este factor  $\gamma$  para la distribución en el claro extremo se basa en la relación entre la columna equivalente y las rigideces de la losa y vigas en una junta exterior,  $\propto$  ec.

Las distribuciones de momentos se presentan gráficamente en la siguiente figura 2.4 si los momentos negativos en los dos lados de un apoyo no son iguales, las secciones sobre ambos lados del apoyo, se diseñan para el momento más grande, ver nudo 2, a menos que un análisis, tome en cuenta la rigidez relativa de ambos claros y los apoyos estén hechos para determinar la distribución del momento desequilibrado. La sección crítica para momento negativo, se toma a través de la línea de la cara de la columna y extendiéndose perpendicularmente a el claro en la dirección considerada como se demuestra en la línea A-A de la figura, 2.5.

Cuando el ancho transversal de un apoyo es igual o mayor que  $3/4$  del ancho de la franja de diseño (de la fig. 2.6),  $C_2 \geq 3/4 l_{2d}$ , el ACI en su sección 13.6.4.3, señala que el momento negativo factorizado se distribuya uniformemente a través de la franja de diseño del tablero y la longitud en la dirección del claro que se analiza. Una excepción de esto es cuando un apoyo tiene un gran ancho transversal.

Una franja de columna en la parte exterior de un claro extremo, se necesita que resista el momento negativo total factorizado, en la franja de diseño, a menos que se pongan trabes de borde. Esto se ilustra en la fig. 2.4.

Secuela para el cálculo del parámetro  $\gamma$  :

1. La sección transversal de la losa, vigas y columnas, se puede suponer uniforme en toda su longitud. Como los errores causados por la simplificación de dichos elementos tienden a eliminarse entre si, es preciso simplificar tanto el sistema viga-losa como el de columnas, o ninguno.

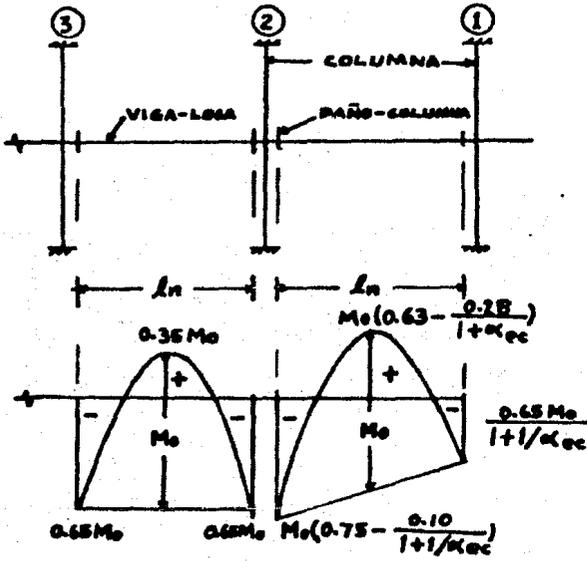


FIG. 2.4

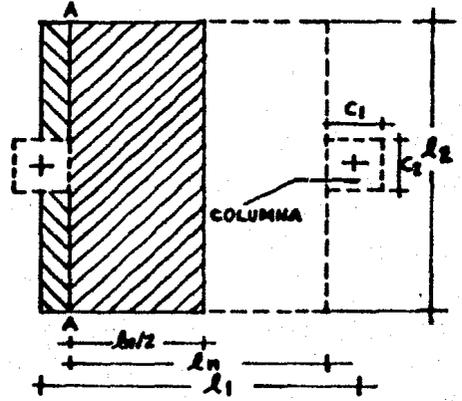


FIG. 2.5

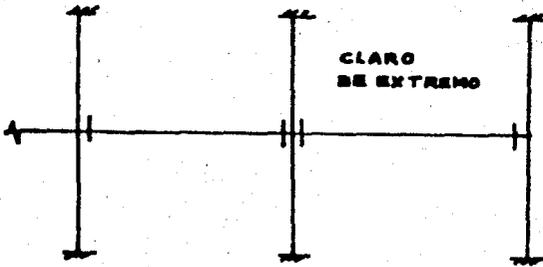
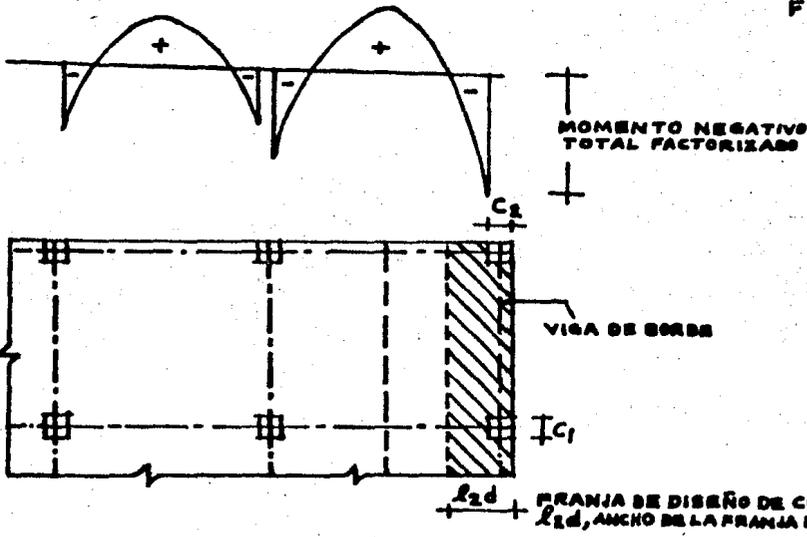


FIG. 2.6



FRANJA DE DISEÑO DE COLUMNA  
 $l_{2d}$ , ANCHO DE LA FRANJA DE DISEÑO DE COLUMNA

2. Cuando las vigas cubren un claro entre columnas, no es necesario aumentar la rigidez torsional de los miembros adyacentes a torsión, como lo requeriría la sección 13. 7. 5.4.
3. Se puede utilizar el mismo factor  $\gamma$  para una franja exterior de diseño (ver fig. 2.2.), como se calculó para una franja interior de diseño, en el caso de que la columna de esquina tenga el mismo paño que la columna exterior de la franja interior de diseño.

La rigidez de la columna equivalente  $K_{ec}$  en términos de la flexibilidad se expresa como:  $\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\sum K_c} + \frac{1}{\sum K_t}$  o sea aquí se usa el término  $\sum K_t$  en vez de  $K_t$ , que viene en la fórmula 2.6 del ACI actual, esto se hace con el fin de simplificar la expresión.

Otra forma de expresar la rigidez de la columna equivalente es:

$$K_{ec} = \sum k_c \times \sum K_t / (\sum K_c + \sum K_t)$$

La rigidez para un sólo miembro a torsión es:

$$K_t = \frac{9E_c s C}{[1_2(1 - \frac{C_2}{1_2})]^3}$$

En éstas dos últimas fórmulas  $\sum K_c$  es la suma de las rigideces de la columna real arriba y abajo de la losa en la junta que se analiza,  $K_t$  rigidez a torsión de un miembro sujeto a torsión,  $E_c s$  es el módulo de elasticidad del concreto de una losa,  $C_2$  dimensión de una columna, capitel o cartela rectangular equivalente, medida transversalmente a la dirección del claro que se analiza, y por último la constante de torsión "C" se determina con la fórmula:

$$c = \sum (1 - 0.63 \frac{x}{y}) \frac{x^3 y}{3} = \sum x^4 (\frac{y}{3x} - 0.21)$$

En esta fórmula se tiene:

- $x$  = menor dimensión de la parte rectangular de una sección transversal
- $y$  = mayor dimensión de la parte rectangular de una sección transversal.

Estos miembros sujetos a torsión deben cumplir con las siguientes condiciones (sec. 13.7.5.1 del código), pero antes se supone que estos miembros tienen una sec. transv. efe. en toda su longitud que es la mayor de:

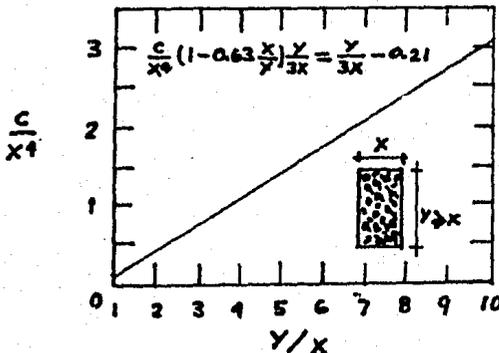
a) una porción de losa que tenga un ancho igual al de la columna, ménsula o capitel, en la dirección del claro para el cual se determinan los momentos.

b) Para sistemas monolíticos o totalmente compuestos, la porción de losa especificada en el inciso anterior, más la parte de la viga transversal arriba y abajo de la losa.

c) La viga transversal que se muestra en las figuras 2.7.

Para encontrar el valor de la constante de torsión "C" como ya se dijo, se subdivide la sección transversal de los miembros sujetos a torsión en rectángulos (ver comentarios del código, en la sec. 13.7.5., fig. 13.14).

Para calcular la constante "C" se puede hacer uso de la gráfica 2.1. (pág. 158, fig. 4.11 de la referencia 1).



GRAFICA 2.1

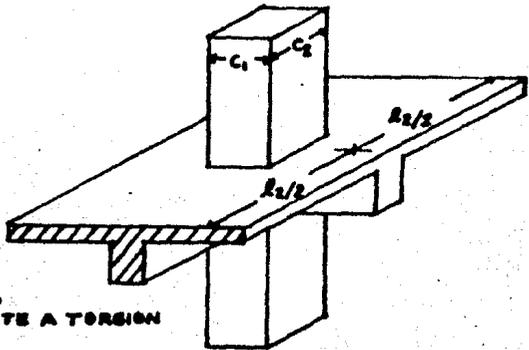
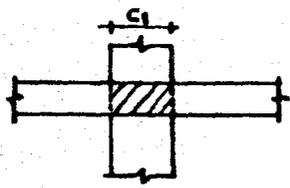


FIG. 2.7

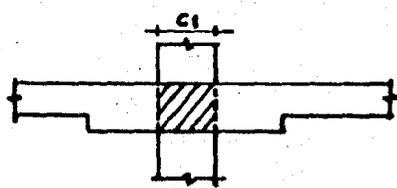
MIEMBRO  
ADYACENTE A TORSION

SECCIONES TRANSVERSALES TIPO, DE MIEMBROS ADYACENTES A TORSION:



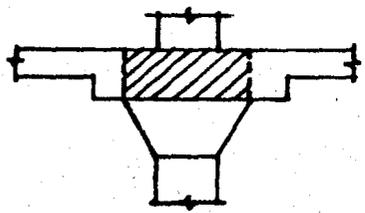
CONDICION a)

FIG. 2.7.1



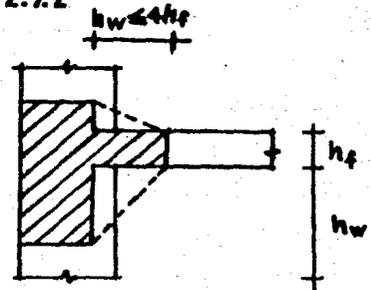
CONDICION b)

FIG. 2.7.2



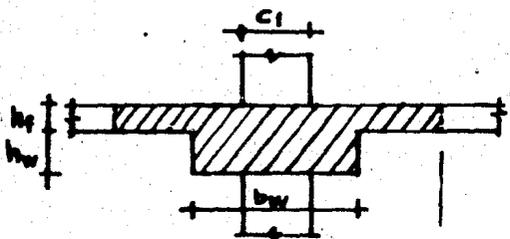
CONDICION d)

FIG. 2.7.3



CONDICION c)

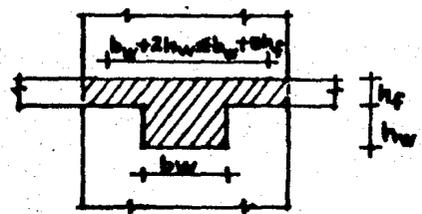
FIG. 2.7.4



$$b_w + 2h_w \leq b_w + 8h_f$$

CONDICION c)

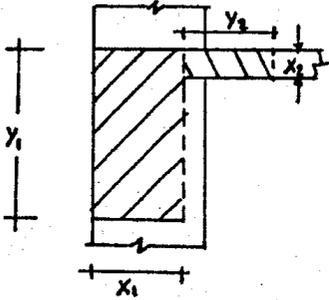
FIG. 2.7.5



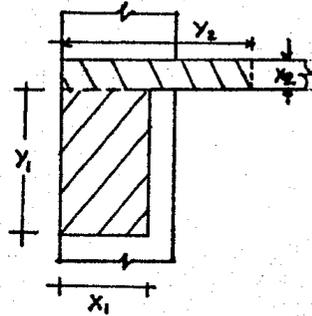
CONDICION a) + b)

FIG. 2.7.6

Al hacer la subdivisión de los rectángulos, se tomará el valor mayor de "C" que de (1) ó (2).



(1)



(2)

en éste caso, "C" es la mayor de (1) ó (2).

## DISTRIBUCIONES DE LOS MOMENTOS DE DISEÑO

### MOMENTOS FACTORIZADOS EN FRANJAS DE COLUMNA

Las distribuciones de los momentos de diseño, puede hacerse según las especificaciones 13.6.4 del código, para el caso de losas que cumplan las restricciones del método de diseño directo, y también para losas analizadas por el método del marco equivalente, si los tableros de las losas tienen relaciones  $l_1/l_2 = 2$  o menores, y que satisfagan las restricciones de la rigidez relativa de la viga en las dos direcciones, dadas por el método de diseño directo.

Las distribuciones de las secciones de momento positivo y negativo interior, basadas en los momentos de la teoría elástica, se grafican contra el parámetro de rigidez de la viga  $\alpha_1 \left( \frac{l_2}{l_1} \right)$  en las figuras 2.8 a 2.12.

En el código ACI-77 las curvas fueron reemplazadas por funciones bilineales, las cuales resultaron muy buenas representaciones de las curvas y se describieron fácilmente en matemáticas o en forma tabular. Estas curvas no se usaron, ya que están sujetas a errores de lectura (aproximación) y por lo tanto no son usadas en el código mencionado.

Se hicieron algunos intentos para descubrir ecuaciones aproximadas para el ajuste de curvas, con poco éxito.

Los momentos de distribución del código para momentos negativo y positivo interior se presentan en las figuras 2.13 a 2.15, paralelamente con los momentos teóricos, para un tablero interior cuadrado y para ambos claros de un tablero interior rectangular con relaciones de  $l_1/l_2 = 2$ . Las más grandes diferencias significativas ocurren cuando  $\alpha_1(l_2/l_1)$  es cercano a 1.0, cuando los valores del código para momentos de vigas, son generalmente también altos. Cuando  $\alpha_1(l_2/l_1) \approx 1/2$ , los momentos de vigas del código, son generalmente bajos, pero de igual manera, las vigas son generalmente también pequeñas para ser prácticas, ya que resultan antieconómicas, sin ningún beneficio significativo de la viga.

FIG. 2.8.- MOMENTO-RIGIDEZ DE LA VIGA, PARA  $l_1/l_2 = 2.0$

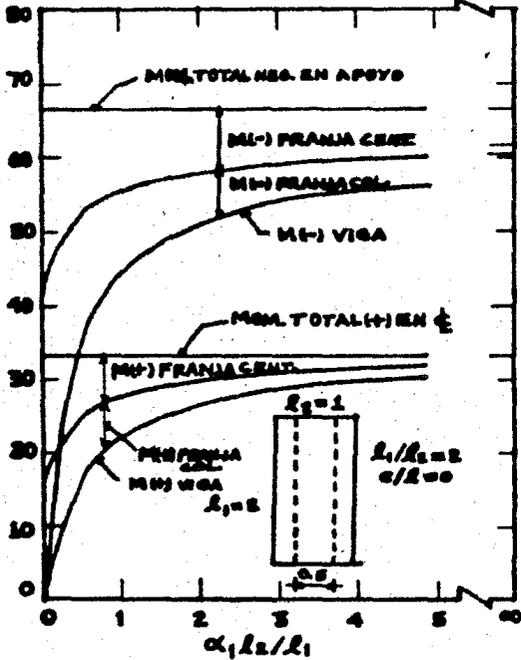


FIG. 2.9.- MOMENTO-RIGIDEZ DE LA VIGA, PARA  $l_1/l_2 = 1.25$

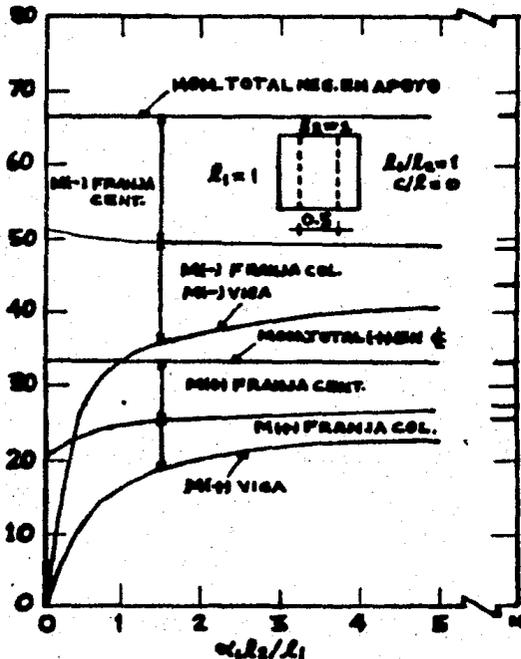
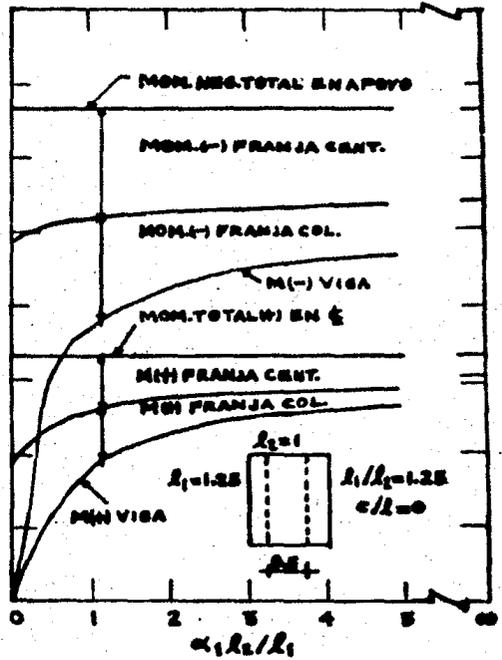


FIG. 2.10.- MOMENTO-RIGIDEZ DE LA VIGA PARA  $l_1/l_2 = 1.0$

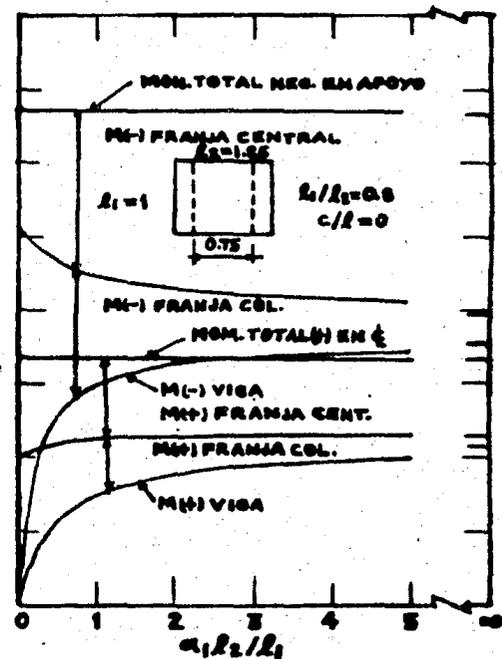


FIG. 2.11.- MOMENTO-RIGIDEZ DE LA VIGA PARA  $l_1/l_2 = 0.8$

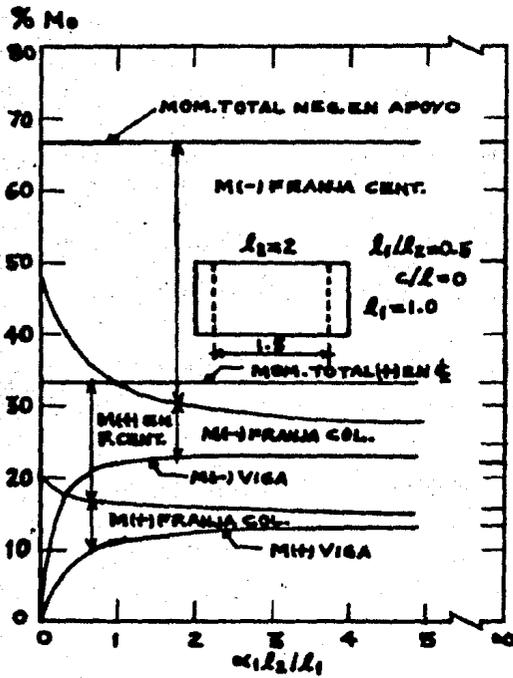


FIG. 2.12.- MOMENTO-RIGIDEZ DE LA VIGA, PARA  $l_1/l_2 = 0.5$

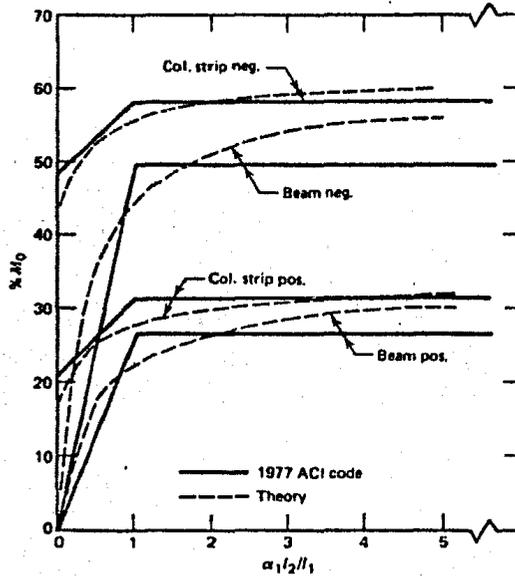


FIG. 2.13.-MOMENTOS TEORICOS Y DE DISEÑO CONTRA RIGIDEZ DE VIGA DE UN TABLERO INTERIOR PARA  $l_1 / l_2 = 2.0$

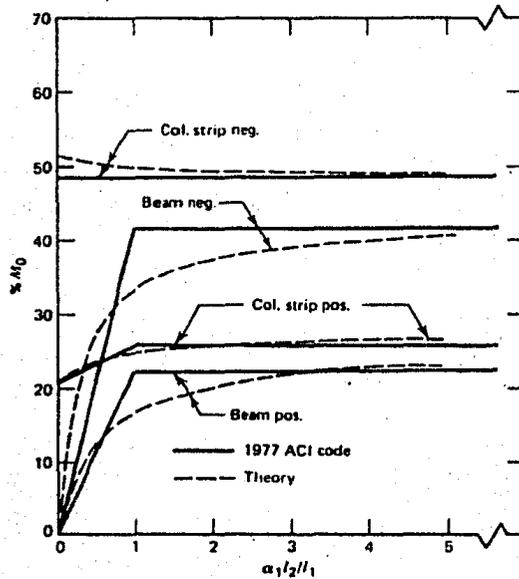


FIG. 2.14.-MOMENTOS TEORICOS Y DE DISEÑO CONTRA RIGIDEZ DE VIGA DE UN TABLERO INTERIOR PARA  $l_1 / l_2 = 1.0$

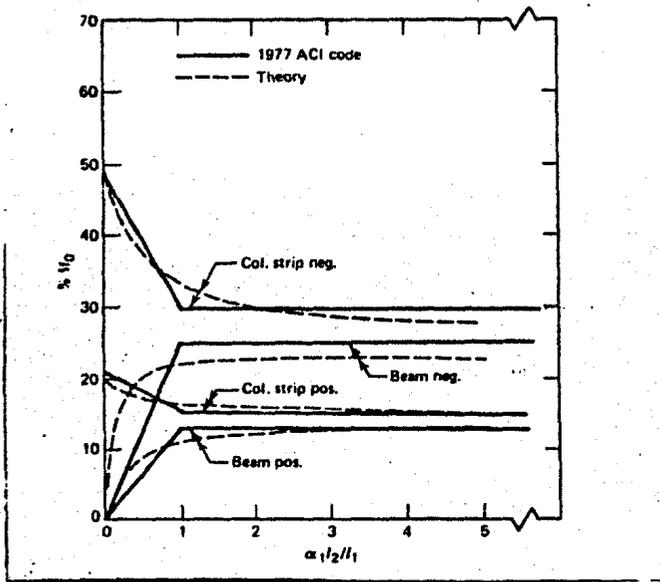


FIG. 2.15.—MOMENTOS TEÓRICOS Y DE DISEÑO CONTRA RIGIDEZ DE VIGA DE UN TABLERO INTERIOR, PARA  $l_1/l_2 = 0.5$

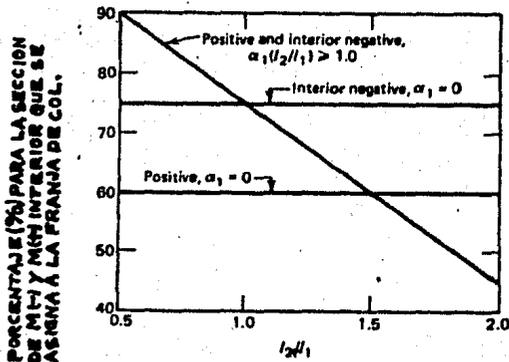


FIG. 2.16.— $M(+)$  Y  $M(-)$  EXTERIOR DE FRANJA DE COLUMNA EN FUNCION DE  $\alpha_1 (l_2/l_1)$  Y  $l_2/l_1$

En seguida se presentan las tablas que dan los porcentajes para la distribución de momentos en franjas de columna y central.

TABLA 2.1  
PORCENTAJES DE MOMENTOS POSITIVOS

L2/L1	0,5		1,0		2,0	
	franja colum.	franja cent.	franja colum.	franja cent.	franja colum.	franja cent.
$\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} = 0$	60	40	60	40	60	40
$\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} \geq 1,0$	90	10	75	25	45	55

TABLA 2.2  
PORCENTAJE DE MOMENTOS NEGATIVO INTERIORES

L2/L1	0,5		1,0		2,0	
	franja colum.	franja cent.	franja colum.	franja cent.	franja colum.	franja cent.
$\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} = 0$	75	25	75	25	75	25
$\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} \geq 0$	90	10	75	25	45	55

TABLA 2.3  
PORCENTAJES DE MOMENTOS NEGATIVOS EXTERIORES

L2/L1	0,5		1,0		2,0		
	franja colum.	franja cent.	franja colum.	franja cent.	franja colum.	franja cent.	
$\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} = 0$	$\beta_t = 0$	100	0	100	0	100	0
	$\beta_t \geq 2,5$	75	25	75	25	75	25
$\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} \geq 0$	$\beta_t = 0$	100	0	100	0	100	0
	$\beta_t \geq 2,5$	90	10	75	25	45	55

Los momentos de la franja de columna, incluyen los momentos de la viga, con la división entre viga y losa, como se determinará después. La distribución de momentos positivo y negativo interior, son una función sólo de la rigidez a flexión de la viga  $\alpha_1$  y la relación  $l_2/l_1$ . La distribución del momento negativo interior, es una función de la rigidez a la torsión de la viga de borde,  $\beta_t$ ; la rigidez a la flexión de cualquier viga interior,  $\alpha_1$ , formando parte de la columna de borde, y la relación,  $(l_2/l_1)$ .

Se admite hacer interpolaciones lineales en los valores de las tablas anteriores. Esta distribución de momentos también se tiene de las figs. 216 y 217.

Otra forma de distribuir los momentos en una franja de columna es la siguiente (ver pág. 152, ref. 2):

para un momento negativo ;

$$\text{para un apoyo interior: } 75 + 30(\alpha_1 l_2/l_1) (1 - l_2/l_1) \quad \text{EC.2.4}$$

$$\text{Para un apoyo exterior: } 100 - 10\beta_t + 12\beta_t(\alpha_1 l_2/l_1) (1 - l_2/l_1) \quad \text{EC.2.5}$$

$$\text{Para un momento positivo } 60 + 30(\alpha_1 l_2/l_1) (1.5 - l_2/l_1) \quad \text{EC. 2.6}$$

Nota, cuando  $\alpha_1 l_2/l_1 > 1.0$ , tomar 1.0, en las ecuaciones anteriores.

Cuando  $\beta_t > 2.5$ , tomar 2.5, en la ecuación 2.5

$$\text{donde } \beta_t = \frac{Ecb^3}{2Ecls^3}$$

en las cuales el porcentaje del momento que se asigna a la franja de columna se traza contra la relación  $l_2/l_1$ , tanto para las secciones de momento positivo y negativo y para los casos con y sin vigas.

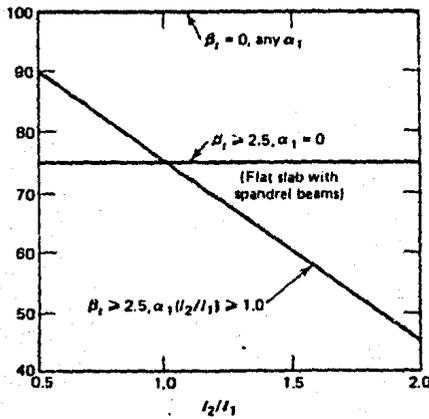


FIG. 2.17. —  $M(-)$  EXTERIOR DE FRANJA DE COLUMNA EN FUNCIÓN  $\beta_1$ ,  $\alpha_1(l_2/l_1)$  Y  $l_2/l_1$

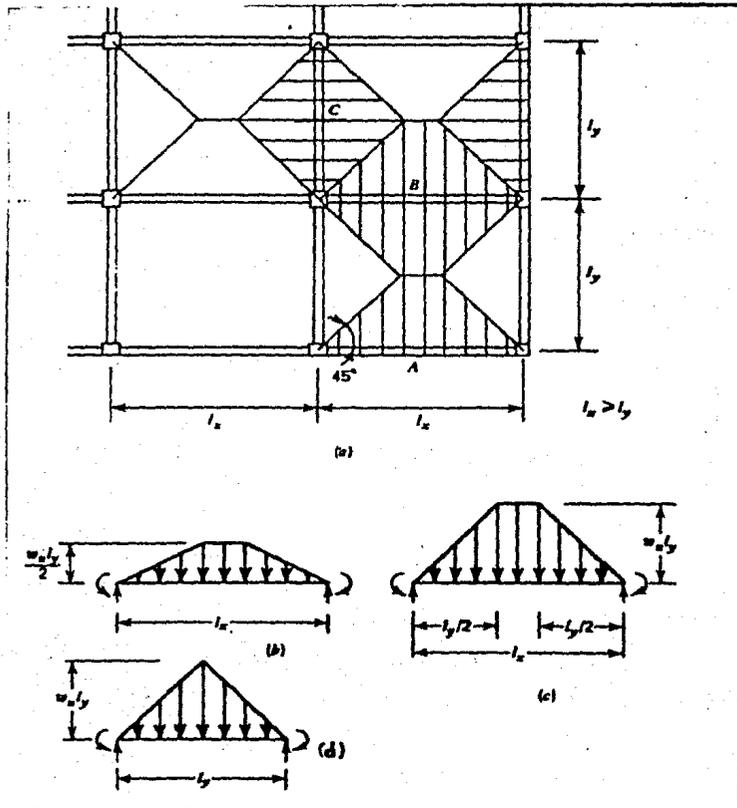


FIG. 2.18. — DETERMINACION DE CARGAS PARA EL CALCULO DE CORTANTE EN LOGAS CON VIGAS RIGIDAS.  
 a) AREA DE LA CARGA TRIBUTARIA PARA EL CORTANTE DE LA VIGA, b) CARGA EN LA VIGA 'A', c) CARGA EN LA VIGA 'B', d) CARGA EN LA VIGA 'C'

Si no hay vigas de borde, es necesario poner suficiente refuerzo dentro de una franja de ancho  $C_2 + 2d$  (es decir, el ancho de la columna más un peralte efectivo de la losa a cada lado de la columna).

Se encontró que en más casos el requisito de refuerzo mínimo, gobierna en las franjas centrales de las secciones de momento negativo exterior, aún cuando las losas tienen cargas fuertes. Un importante efecto de esto, es minimizar los momentos de torsión que pueden ser desarrollados en las vigas secundarias.

Cuando  $\beta_t = 2.5$ , la distribución de momento negativo exterior es la misma, como en una sección de momento negativo interior, según los estudios de momentos elásticos. Sin embargo es muy remoto que cualquier viga de concreto reforzado, podrá razonablemente tener una cierta rigidez torsional alta, si es diseñada sólo para la carga de la losa más el peso del muro de relleno, así este límite es hipotético en la mayor de las observaciones.

Una variación lineal del momento negativo exterior con  $\beta_t$ , no es probablemente correcta, pero será lo suficiente exacto para los propósitos de diseño, dentro del actual rango de  $\beta_t$ , encontrándose valores idóneos. Jofriet, en sus estudios de losas, con vigas de borde, sugiere una variación implicando el término  $\beta_t / (1 + \beta_t)$ .

#### MOMENTOS FACTORIZADOS EN VIGAS

Una vez que han sido determinados los momentos de las franjas de columna, se pueden conocer los momentos de la viga.

Cuando en una franja de columna hay una viga entre columnas, el momento factorizado que se asigne a la franja de columna, debe distribuirse una parte de éste a la sección de la losa y otra a la sección de la viga. Por tanto la cantidad de momento

factorizado de la franja de columna que ha de resistir la viga, varía linealmente entre 0 y 85%, si  $\alpha_1 \frac{l_2}{l_1}$  varía entre 0 y 1.0. o sea, esto quiere decir que si  $\alpha_1 \frac{l_2}{l_1} \geq 1$ , se asigna a la viga el 85% del momento factorizado de la franja de columna y a la losa le corresponde el 15% restante. Se debe de revisar que la sección de la viga resista las cargas aplicadas directamente a ésta. Para valores de  $\alpha_1 \frac{l_2}{l_1}$  comprendidos entre 0 y 1.0, el porcentaje del momento que debe resistir la viga, se obtiene por interpolación lineal.

De los estudios de Sutherland y Appleton, los cuales se basaron en pruebas de losas de tablero rectangulares, cuyos resultados se presentan en las figuras 2.8 a 2.12, se tiene lo siguiente:

Los momentos en vigas, franjas de columnas, y franja central, se presentaron contra el factor de rigidez relativa de viga  $\alpha_1 \frac{l_2}{l_1}$ .

Los datos de las figs. 2.8 a 2.12, son para la combinación específica de rigidez a flexión de vigas, dada por la expresión:

$$\frac{EcbIb1}{EcbIb2} = \frac{l_1}{l_2}$$

En otras palabras, los momentos de inercia de las vigas son proporcionales a sus claros.

Un incremento en la rigidez de viga, siempre causa un aumento en el momento de 1-a franja de columna y puede ser factible considerar la franja de columna y viga como una unidad. Incrementando la rigidez de viga causa reducciones en el momento de la franja central, a lo largo del claro del tablero rectangular, y se incrementa en los momentos de la franja central, en los claros cortos.

Para realizar el diseño de la viga, se necesita conocer la fuerza cortante. Las especificaciones del ACI-77, recomiendan que para vigas con  $\alpha_1 \left( \frac{l_2}{l_1} \right) \geq 1.0$ , deben estar dimensionadas para resistir un esfuerzo cortante originado por las cargas gravitacionales afectadas por el factor de carga, sobre una superficie que se define en la figura 2.18.

Para valores  $\alpha_1 \left( \frac{l_2}{l_1} \right)$ , entre 1.0 y 0, la parte de carga soportada por la capacidad a esfuerzos cortantes de la viga, debe encontrarse por interpolación lineal.

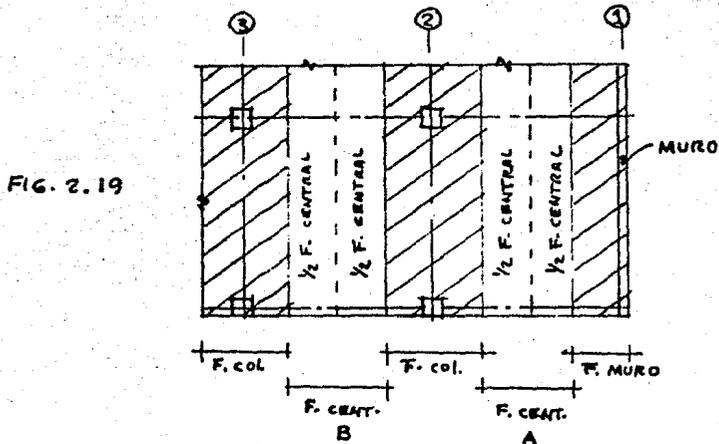
La parte restante de la carga de la superficie rayada se supone, que se transmite directamente a través de la losa a las columnas situadas en las cuatro esquinas del tablero.

Para bajas rigideces de vigas, las fuerzas cortantes obtenidas de las áreas tributarias, para el caso de una viga rígida, puede reducirse linealmente a cero, siempre que  $\alpha_1$  tienda a cero.

Las distribuciones de carga de la figura 2.18, dan buenas aproximaciones para las cargas aplicadas, para vigas muy rígidas, según se tiene de los resultados de la teoría elástica.

### MOMENTOS FACTORIZADOS EN FRANJAS CENTRALES

Para entender la distribución del momento en estas franjas conviene hacer la siguiente 2.19.



Los momentos de las franjas centrales, es la parte restante que se tiene al hacer la distribución de los momentos factorizados de las franjas de columna. Esta parte o porcentaje se tiene de las tablas 2.1 a 2.3. Sin embargo, observese en la figura que hay un caso en el que un 1/2 de la franja central, es adyacente y paralela a un borde apoyado en un muro. Por tanto la franja central 'A' debe -- ser capaz de resistir el doble del momento asignado a la mitad de la franja central derecha del eje 2.

## MOMENTOS FACTORIZADOS EN COLUMNAS Y MUROS

Momentos en apoyos interiores. La sección 13.6.9 del código instruye al diseñador, a proporcionar los apoyos interiores de columnas y muros para los momentos que se producen por las cargas afectadas, <sup>por el factor de carga</sup> que se tienen en la losa, y da una ecuación para obtener el momento en la columna interior, a menos que se haga un sólo análisis más general para el cálculo de éste.

En claros interiores, los momentos negativos en la losa se determinan, suponiendo que se halla presente toda la carga muerta y toda la carga viva. Para el cálculo de la columna, resulta una condición de carga más importante si no actúa parte de la carga viva. De acuerdo con ello, el código exige que las columnas interiores resistan un momento de:

$$M_i = \frac{0.08[(w_d + 0.5w_l)l_2(l_n)^2 - w'_d l'_2 (l'_n)^2]}{1 + (1/\alpha_{ec})} = 0.08\gamma[w_l l_2 l_n^2 / 2 + w_d l_2 l_n^2 - w'_d l'_2 (l'_n)^2] \quad \text{E.C. 2.7}$$

donde:  $w_d$  = carga muerta de diseño (incluyendo el factor de carga).

$w_l$  = carga viva de diseño (incluyendo el factor de carga).

Las literales  $w_l$ ,  $w_d$ ,  $l^2$  y  $l_n$ , se refieren al más largo de los dos claros adyacentes a la columna que se analiza y  $w'_d$ ,  $l'^2$  y  $l'_n$  se refieren al claro más corto.

El término ' $\gamma$ ' que se vio al principio de éste capítulo, es para una columna interior, es preciso utilizar la rigidez de la viga y la losa para el claro a cada lado de la columna. Por lo tanto para columnas interiores el término  $\gamma$  se expresa como:

$$\gamma = \frac{K_{ec}}{[K_{ec} + 2(K_s + K_b)]}$$

El factor 0.08 es aproximadamente  $1/12$  del factor usado en la ecuación para el momento de empotramiento de una viga prismática con carga uniforme. El término  $1/[1 + (1/\alpha_{ec})]$  es el factor de distribución del momento combinado para las columnas.

El momento "M" que se calculó con la fórmula anterior, se divide entre las columnas arriba y abajo de la losa, en proporción directa a sus rigideces, como se hace en el método del marco equivalente.

Los momentos en la columna interior, encontrados con la fórmula anterior, generalmente serán menores que los que se tienen del análisis del marco equivalente para una misma estructura, a lo menos mientras que la carga viva sea lo suficientemente grande para que se tome en cuenta los requisitos de carga modelo. Esto ocurre porque el método de diseño directo en la ecuación anterior considera  $1/2$  de la carga viva de diseño, y en cambio el método del marco equivalente considera  $3/4$  de la carga viva de diseño, como las intensidades de las cargas parciales apropiadas.

El uso de la columna equivalente es muy complejo y tendrán que hacerse aproximaciones de sus rigideces. Cualquier aproximación que da a una columna rígida, la cual es algunas veces alta, es conservativa, pero presumiblemente aceptable, ya que incrementa el momento de diseño de la columna. Consecuentemente, malas aproximaciones para la rigidez equivalente, serán aceptables para la columna interior que para la columna de borde, ya que tanto los momentos de la losa y la columna, se ven influenciados por la rigidez de la columna equivalente de borde.

Momentos en apoyos exteriores. Estos momentos se obtienen con la siguiente expresión:

$$M_e = M_f + (3.25 + 0.75j) (e/ln) M_o \quad \text{EC. 2.8}$$

donde:  $M_f$  = momento exterior negativo factorizado en el paño del apoyo.

$$e = C1/2 \leq 0.175l_1 \text{ (ver fig. 2.3).}$$

En seguida se dan expresiones (ver pág. 156. ref. 2) para obtener los momentos resistidos en las columnas superior e inferior (basados en las rigideces relativas de la columna):

Momento resistido por la columna superior;

$$M_a = (1 - 0.75h/l_c) \left[ (K_c)_a / \sum K_c \right] (M_e \text{ o } M_i) \quad \text{EC. 2.9.}$$

Momento resistido por la columna inferior;

$$M_b = \left[ (1 - 0.75(2a-h)/l_c) \right] \left[ (K_c)_b / \sum K_c \right] (M_e \text{ o } M_i) \quad \text{EC. 2.10.}$$

donde:  $(1 - 0.75 h/l_c)$  = factor para reducir el momento en la unión de columna y la viga-losa por encima de la junta.

$[1 - 0.75(2a-h)l_c]$  = factor para reducir el momento en la unión de la columna y la viga-losa por debajo de la junta.

$a$  = peralte de la viga-losa

$h$  = peralte total de la losa

$(K_c)_a$  = rigidez a flexión de la columna superior.

$(K_c)_b$  = rigidez a flexión de la columna inferior.

$\sum K_c$  = suma de rigidez a flexión de las columnas

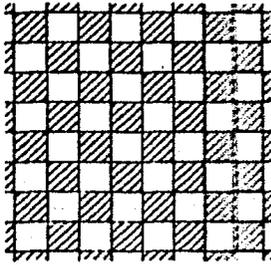
$M_e, M_i$  = ECS. 2.7 y 2.8.

## DISPOSICIONES PARA LOS EFECTOS DE LOS MODELOS DE CARGA

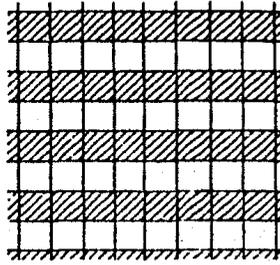
El método de diseño directo, puede considerar varios casos de carga modelo. El ACI da al diseñador dos opciones; 1) proporcionar ciertas rigideces mínimas de columna, así de este modo aislar un claro de los efectos de la carga del siguiente claro, ó 2) incrementar los momentos positivos de diseño para tomar en cuenta los efectos de las cargas modelo. El propósito es producir una estructura en la que el esfuerzo promedio en el refuerzo del momento de la carga de servicio (considerando toda la carga viva y toda la carga muerta), por los efectos de las cargas parciales.

La resistencia de la losa no es por lo general un problema de cargas parciales, sino de un agrietamiento excesivo y/o de flexión, posiblemente. Se hicieron estudios con dos tipos diferentes de cargas parciales, la de tablero de ajedrez y la de franja. Cada una tiene un comportamiento en diferentes tipos de estructuras, dependiendo de la relación  $l_2 / l_1$ , del tablero, rigidez a flexión de la viga, rigidez a torsión de la viga y rigidez a flexión de la columna.

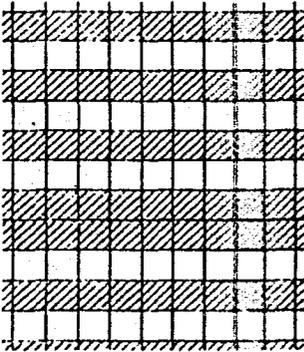
El arreglo de los tableros con carga y sin carga, para casos en que se producen momentos máximos de la losa, se muestran en la fig. 2.20, las dos cargas para el momento máximo positivo de la losa fig. 2.20 a y b) son unas de las que se han considerado en la literatura, y sus soluciones son fácilmente accesibles, al menos para el caso de rigidez a flexión de columnas igual a cero. Las cargas que producen el momento teórico máximo negativo de la losa (fig. 2.20 c y e), en general no han sido analizadas a causa de los problemas matemáticos, y en su lugar se han sustituido las cargas modelo, que producen momentos máximos ligeramente más bajos (fig. 2.20 d y f). Sin embargo esto no es una gran limitante,



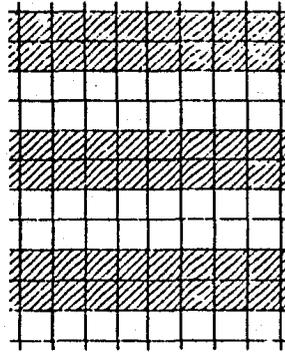
(a)



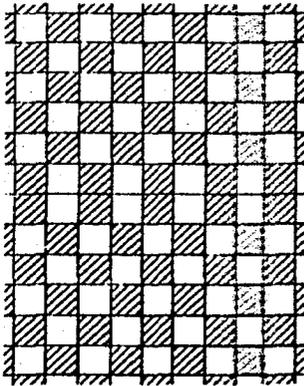
(b)



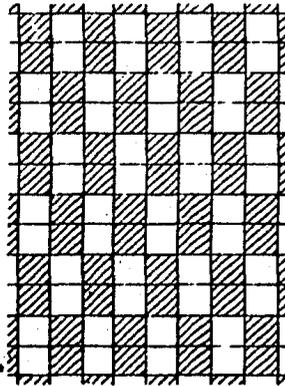
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 2.20

ya que el incremento en los momentos positivos de la losa, son - mucho más importantes que cualquier incremento potencial en los momentos negativos de la losa. Las cargas que se muestran en las figs. 2.20 b, e y f, también producen los momentos positivos máximos en las vigas, y las franjas cargadas (figs. 2.20 c y d) producen los momentos negativos máximos en vigas. La carga de tablero de ajedrez para momentos negativos en vigas, no ha sido demostrada.

Adicionalmente, a las características generales estructurales, la relación de carga viva a carga muerta o carga móvil a carga total es muy importante en la determinación del significado cargas modelo. Las cargas modelo son obviamente de mucha importancia potencial en una estructura en la que la carga viva es varias veces la carga muerta, que en una estructura en la que la carga viva es -- sólo parte de la carga muerta.

La relación de la carga viva a carga muerta puede ser tomada con la siguiente expresión, que sigue la notación del ACI, donde sea aplicable, para la relación de momento efectivo y cargas modelo;

$$\gamma = \frac{\text{MAXM}}{\text{DLM} + \text{LLM}} = \frac{\gamma_1 + \beta_a}{1 + \beta_a}$$

donde: MAXM = momento de la carga muerta más el momento máximo de la carga viva modelo.

DLM = momento de la carga muerta

LLM = momento de la carga viva, con todos los tableros cargados.

$\gamma_1$  = momento máximo de la carga viva modelo / LLM

$\beta_a$  = DLM/LLM = carga muerta / carga viva

Las cargas modelo especificadas en la sección 13.7.6.3 del ACI, - usando un 75% (3/4) de la carga viva, en las cargas modelo, nos llevan a valores variables de  $\gamma$ , con los máximos valores fluctuando entre 1.21 para  $\beta_a = 4/3$ , a 1.38 para  $\beta_a = 1/3$ , en ambos casos con muy baja rigidez de columna. Resultan valores más pequeños a medida que la rigidez de la columna aumenta. Esta conclusión se basa en un valor de  $\gamma_1 = 2.0$  mientras sea válido para un tablero típico interior. Usando el 100% de la carga viva nos lleva a valores de  $\gamma = 1.43$  y 1.75 respectivamente, para los mismos dos casos anteriores.

Estudios más a fondo, de los efectos de las cargas parciales de - momentos de estructuras de losas, realizados por Jirsa, dan la tabla 13.6.10 del ACI-77. Este estudio se basó en soluciones desarrolladas por Jirsa y Gamble, los cuales se obtuvieron de los - reportes de otros investigadores vistos en el capítulo anterior.

Las franjas de carga modelo, son más importantes para momentos positivos que para la carga modelo tablero de ajedrez, por dos razones; primera, éstas producen un gran incremento en el momento positivo, a menos que la rigidez de la viga sea grande, segunda, la probabilidad de lograr una distribución de carga en -- una estructura que se aproxime a la franja de carga, será mucho mayor que la probabilidad de lograr una carga tablero de ajedrez, especialmente en el caso de estructuras con mucha carga viva, como bodegas.

Adicionalmente, los casos de franja de carga, producen los momentos máximos de la viga.

La rigidez de columna mínima  $\alpha_{\min}$  que es adecuada para limitar el incremento en momentos positivos, se da en la tabla 2.4. -- (tabla 13.6.10, ACI-77).

Los valores de la tabla anterior fueron tomados de un conjunto de figuras semejantes a las de las figuras 2.21 - 2.23.

#### METODO DEL MARCO EQUIVALENTE

Historia. Este método fue propuesto por Peabody en 1948 y se incorporó en ediciones posteriores del código ACI, como método de diseño elástico. Para el ACI-77 aparece perfeccionado - con el nombre de : método del marco equivalente.

El método del marco equivalente, considera que las estructuras tradicionales, se pueden sustituir por sistemas de estructuras, idealizadas por marcos ortogonales.

El ancho de cada marco equivalente está limitado por las líneas que pasan por los puntos medios entre columnas.

La definición de marco equivalente se interpreta en la figura 2.24. = fig 2.2

TABLA 2.4

Cuando  $\beta_a = W_{M.S.}/W_{V.S.} < 2$  se debe cumplir:  
 1) el factor  $\alpha_c = \frac{\sum K_c}{\sum (K_s + K_b)}$ , no sea menor que  $\alpha_{min}$ .

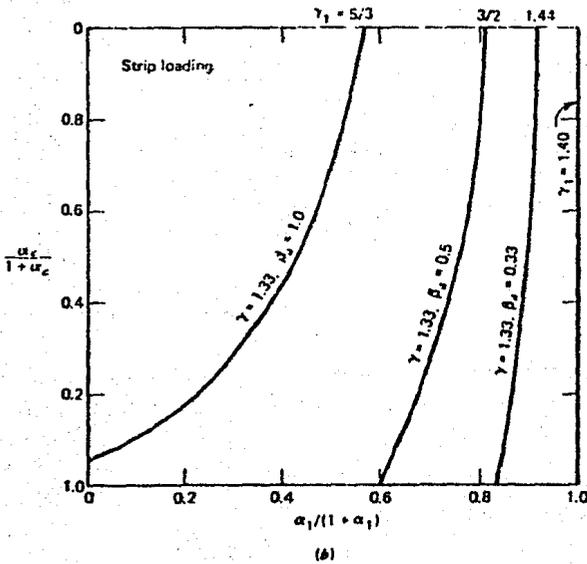
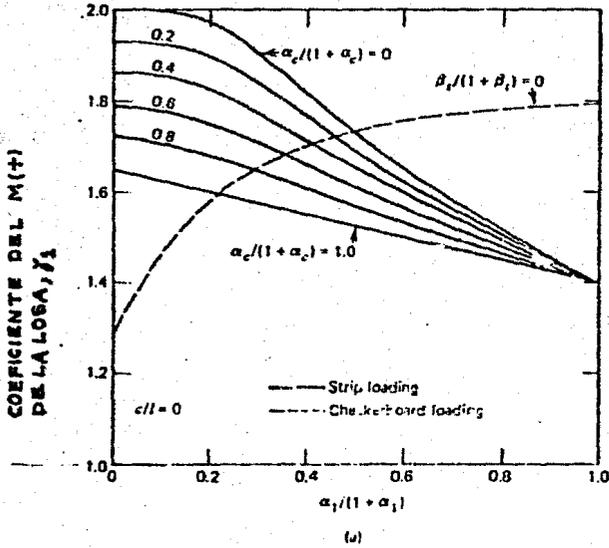
VALORES DE  $\alpha_{min}$

$\beta_a$	$l_2/l_1$	Rigidez relativa de vigas $\alpha = \frac{E_c b I_b}{E_c s I_s}$				
		0	0.5	1.0	2.0	4.0
2.0	0.5-2.0	0	0	0	0	0
1.0	0.5	0.6	0	0	0	0
	0.8	0.7	0	0	0	0
	1.0	0.7	0.1	0	0	0
	1.25	0.8	0.4	0	0	0
	2.0	1.2	0.5	0.2	0	0
0.5	0.5	1.3	0.3	0	0	0
	0.8	1.5	0.5	0.2	0	0
	1.0	1.6	0.6	0.2	0	0
	1.25	1.9	1.0	0.5	0	0
	2.0	4.9	1.6	0.8	0.3	0
0.33	0.5	1.8	0.5	0.1	0	0
	0.8	2.0	0.9	0.3	0	0
	1.0	2.3	0.9	0.4	0	0
	1.25	2.8	1.5	0.6	0.2	0
	2.0	13.0	2.6	1.2	0.5	0.3

2) si  $\alpha_c < \alpha_{min}$ , los momentos positivos ultimos en los tableros soportados por esas columnas deben multiplicarse por el coeficiente:

$$\delta_s = 1 + \frac{2 - \beta_a}{4 + \beta_a} \left( 1 - \frac{\alpha_c}{\alpha_{min}} \right)$$

FIG. 2.21.- EFECTOS DE LAS CARGAS MODELO PARA  $M(\pm)$  DE LOSA, CON  $l_1/l_2 = 0.5$ , a)  $\gamma_1$  CONTRA RIGIDEZ DEL APOYO, b)  $\beta_a$  PERMISIBLE CONTRA RIGIDEZ DEL APOYO.



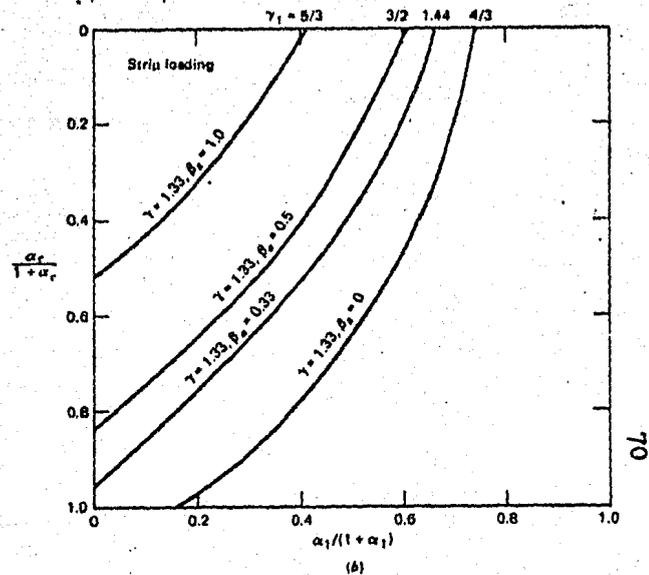
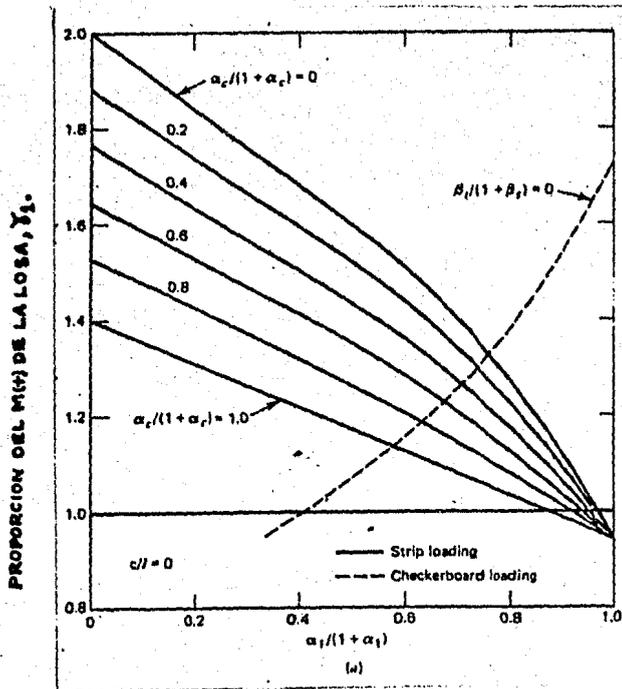


FIG. 2.22.- EFECTO DE LAS CARGAS MODELO PARA  $M(+)$  DE LOSA, CON  $l_1/l_2 = 1.0$ , a)  $\gamma_1$  CONTRA RIGIDEZ DEL APOYO, b)  $\beta_c$  PERMISIBLE CONTRA RIGIDEZ DEL APOYO.

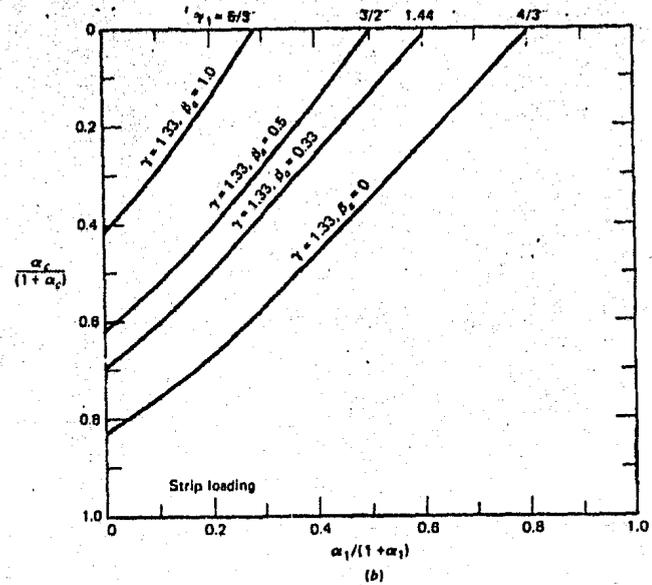
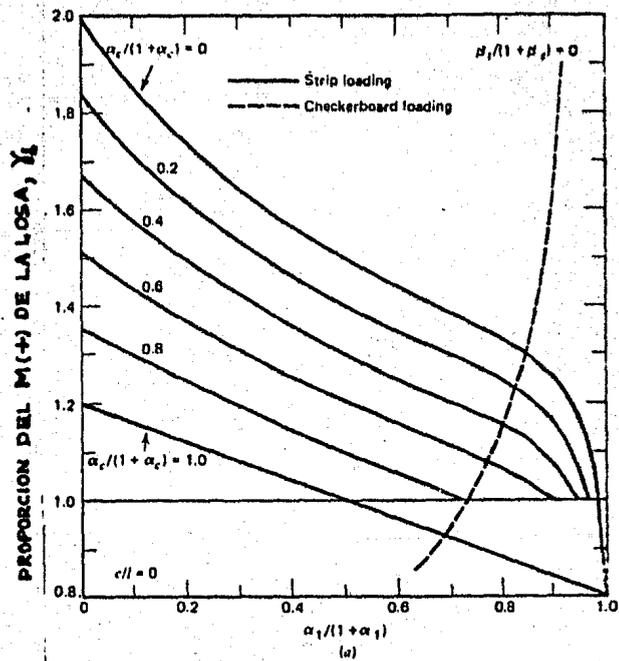


FIG. 2.23.- EFECTO DE LAS CARGAS MODELO PARA M(x) DE LOSA CON  $l_1/l_2 = 2.0$ , a)  $\gamma_1$ -RIGIDEZ DEL APOYO, b)  $\beta_1$  PERMISIBLE - RIGIDEZ DEL APOYO.

Para las franjas de diseño se debe de tomar la menor de  $l_1$  ó  $l_2$ , para evitar la tendencia de que el momento se concentre en el eje de la columna, cuando el claro de la franja de diseño, sea menor que su ancho.

Las franjas de diseño se deben hacer en las dos direcciones. Las columnas de los marcos equivalentes, son las columnas reales pero modificadas o sea considerando los miembros adyacentes sujetos a torsión (las que ejercen las vigas sobre la losa).

El sistema de pisos sin vigas, se supone que hay una viga cuyo peralte es igual al de la losa y cuyo ancho es igual al de la columna o capitel en la dirección del marco equivalente.

En sistemas de piso con vigas, se supone que las vigas transversales, son vigas "T" o "L", cuyo ancho de patín es igual a la -- proyección de la viga, encima o debajo de la losa, tomando la -- mayor, pero sin exceder cuatro veces el espesor de la losa.

Esto se ilustra para los diferentes casos en las figs. 2.7.1 a - 2.7.6. Cuando las losas se apoyan en vigas, las vigas de los -- marcos equivalentes y su ancho respectivo de losa, forman una viga equivalente.

El método del marco equivalente es aplicable cuando no se cumpla al menos una de las limitaciones del método de diseño directo, o bien que se quiera hacer un diseño más exacto.

En seguida se presentan los pasos a seguir, del método del marco equivalente:

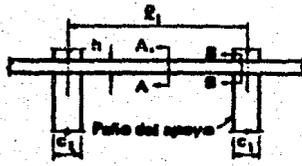
1. CADA MARCO EQUIVALENTE, SE FORMA DE LA LOSA QUE SE (CON O SIN VIGAS, EN EL EJE DE COLUMNAS) LIMITA LATERALMENTE POR LAS LINEAS CENTRALES DE LOS TABLEROS A CADA LADO DE LOS EJES DE LAS COLUMNAS.

Cálculo de las rigideces. Se basan en los siguientes puntos:

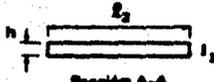
- a) El momento de inercia de la unión viga-losa, entre los paños de los apoyos, se basa en el área bruta de la sección transversal de concreto. La variación del momento de inercia a lo largo del eje de la viga-losa entre los apoyos, también se tome (sec. 13.7.3.2).
- b) Un apoyo se define como una columna, un capitel, una ménsula o un muro. En este método de diseño, una viga no se considera como un apoyo.
- c) El momento de inercia de la unión viga-losa, desde el paño del apoyo hasta el eje del mismo, se considera igual al momento de inercia de la unión viga-losa en el paño del apoyo, dividida entre el valor  $(1-C_2/l_2)^2$ , (sec. 13.7.3.3.).

En seguida se dan las secciones para el cálculo de las rigideces ( $K_{sb}$ ), de la unión viga-losa, figura 2.25.

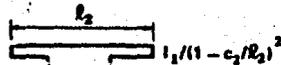
El término  $(1-C_2/l_2)^2$ , es el factor de amplificación, que al aplicarse al momento de inercia entre el paño del apoyo y el eje de éste, hace que la losa-trabe, tenga cuando menos un elemento de apoyo dentro del claro. Consecuentemente, los factores de rigidez y de transporte, así como los momentos de empotramiento basados en las consideraciones generales -- para miembros prismáticos uniformes, no pueden aplicarse a miembros del sistema viga-losa.



Sistema de losas sin vigas



Sección A-A



Sección B-B

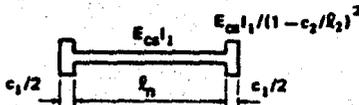
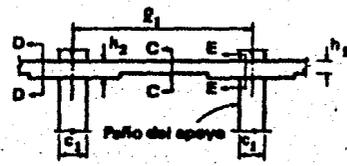
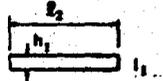


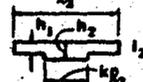
Diagrama de rigideces de las vigas-losas equivalentes



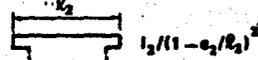
Sistema de losas con fibras



Sección C-C



Sección D-D



Sección E-E

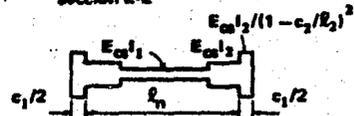
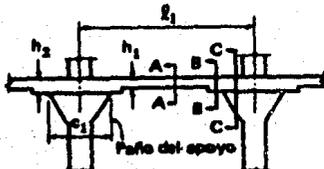
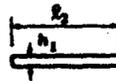


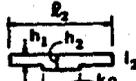
Diagrama de rigideces de las vigas-losas equivalentes



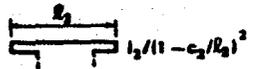
Sistema de losa-columna con capital



Sección A-A



Sección B-B



Sección C-C

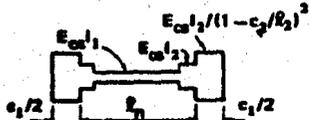
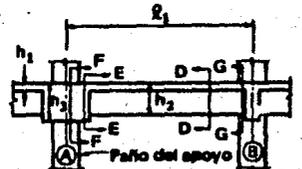
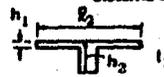


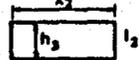
Diagrama de rigideces de las vigas-losas equivalentes



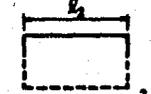
Sistema de losas con viga



Sección D-D



Sección E-E



Sección F-F



Sección G-G

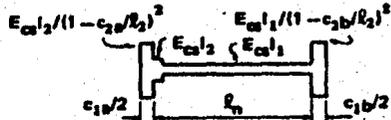


Diagrama de rigideces de las vigas-losas equivalentes

FIG. 2.25.—SECCIONES PARA EL CALCULO DE LA RIGIDEZ ( $K_{cb}$ ) DE VIGA-LOSA

El cálculo de los coeficientes de rigideces, factores de transporte y coeficientes de momentos de empotramiento, para los distintos casos de geometría y carga, se obtienen de las tablas (de la ref. 2, págs. 200-213) y 2 páginas 116 y 119.

## 2. RIGIDEZ DE LA COLUMNA EQUIVALENTE

La rigidez de la columna equivalente se da como:

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\sum K_c} + \frac{1}{\sum K_t}$$

$$K_{ec} = \frac{\sum K_c \sum K_t}{\sum K_c + \sum K_t}$$

la tabla anterior puede utilizarse para determinar la rigidez de la columna real y los factores de transporte.

## 3. MIEMBROS SUJETOS A TORSIÓN.

Las secciones más comunes de miembros adyacentes sujetos a torsión (ver figs. 2.7.1 a 2.7.6) se vieron en el método de diseño directo.

La rigidez de un miembro sujeto a torsión ( $K_t$  se tiene de:

$$K_t = \frac{9EcsC}{l_2 [1 - (C_2/l_2)]^3} \quad \text{EC. 2.11}$$

donde:  $Ecs$  = módulo de elasticidad del concreto de una losa, y las literales  $C_2$  y  $l_2$ , ya se definieron en el método de diseño directo.

Si las vigas forman marco con el apoyo en la dirección en que se determinan los momentos, es necesario incrementar la rigidez a torsión ( $K_t$ ) en la ecuación anterior, de la siguiente forma:

$$K_{ta} = \frac{K_t I_{sb}}{I_s}$$

donde:  $K_{ta}$  = rigidez a la torsión incrementada debido a la viga paralela

$$I_s = \ell_2 h^3 / 12$$

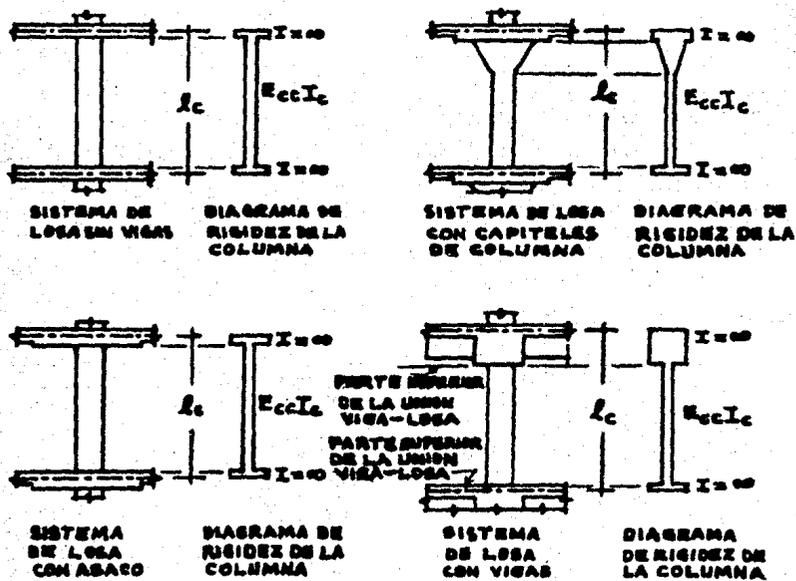
$I_{sb}$  = momento de inercia de la viga-losa, o sea incluyendo la porción del alma de la viga que se extiende por arriba y por abajo de la losa.

La rigidez de la columna equivalente  $K_{ec}$ , considerando el cambio de  $K_t$  por la rigidez a torsión modificada ( $K_{ta}$ ), así como el de  $K_c$  por  $K_{ct}$ , es:

$$K_{ec} = \frac{[(K_{ct} + K_{cb}) (k_{ta} + K_{ta})]}{[(K_{ct} + K_{cb}) + (K_{ta} + K_{ta})]} \quad \text{EC.2.12}$$

donde:  $K_{ct}$  = rigidez a la flexión del extremo superior, para -- una columna inferior.

$K_{cb}$  = rigidez a la flexión del extremo inferior, para -- una columna superior.



SECCIONES PARA CALCULAR LA RIGIDEZ DE LA COLUMNA,  $K_c$

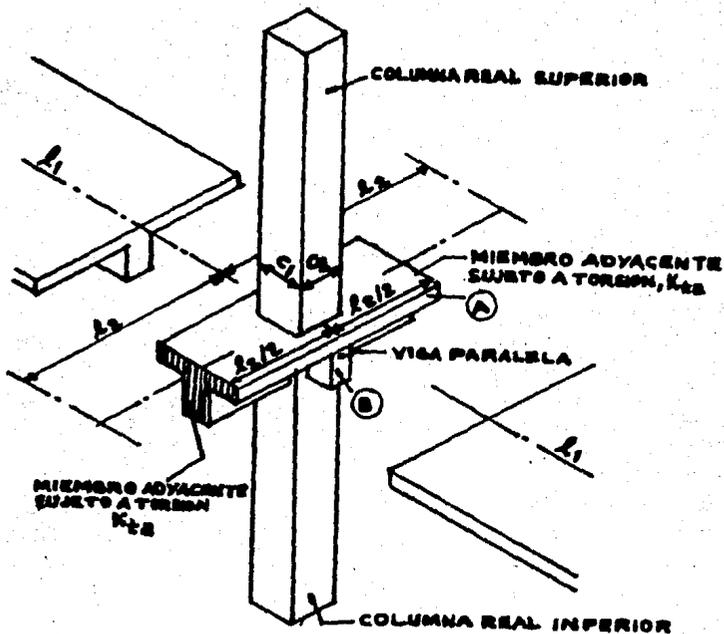


FIG. 2.26  
COLUMNA EQUIVALENTE

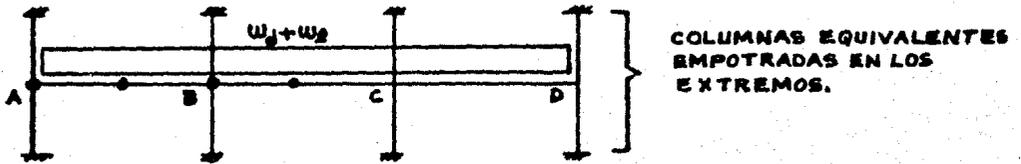
#### 4. DISTRIBUCIÓN DE LAS CARGAS VIVAS.

Una vez que se han calculado las rigideces de la columna equivalente y la viga, se puede efectuar el análisis estructural del marco equivalente, pero hay que hacer ciertas consideraciones de la carga viva.

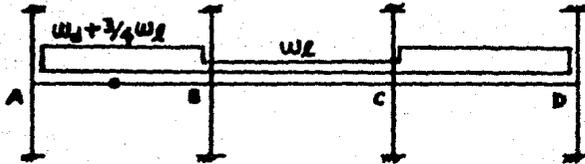
Si se conoce la distribución de la carga viva, el análisis se hace para dicha carga. Si no es así, se debe cumplir:

- a) Si la carga viva de servicio  $W_v \leq 3/4 W_M$ ,  $W_M$ , carga muerta de servicio, sólo es necesario analizar el patrón de carga 1, de la fig. 2.27) con la carga viva factorizada en todos los claros, para los momentos factorizados positivos y negativos.
- b) Si la relación  $(W_v / W_M) > 3/4$ , es necesario analizar los cinco patrones de carga mostrados. El momento positivo máximo factorizado, en un claro dado, se calcula suponiendo que el claro está cargado con  $(3/4) W_v + W_M$ , los claros adyacentes (claros alternados) se cargan sólo con la  $W_M$ , ésto se ilustra en la figura. El momento negativo máximo factorizado, se calcula, suponiendo que dos claros adyacentes están cargados con  $W_M + 3/4 W_v$ , y los claros adyacentes a éstos se cargan solamente con la  $W_M$ , pero en ningún caso los momentos de diseño deben considerarse menores que los que se presentan cuando la carga viva total de diseño, está en todos los claros, o sea el patrón 1).

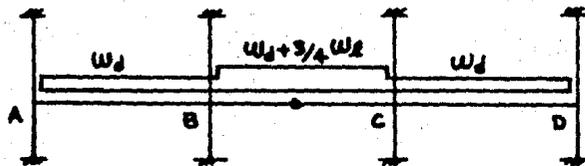
- 1) PATRON DE CARGA PARA LOS MOMENTOS DE DISEÑO EN TODOS LOS CLAROS, CON  $w_L \leq \frac{3}{4} w_D$



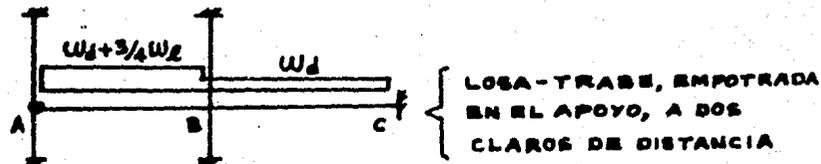
- 2) PATRON DE CARGA PARA MOMENTO POSITIVO DE DISEÑO EN EL CLARO AB\*



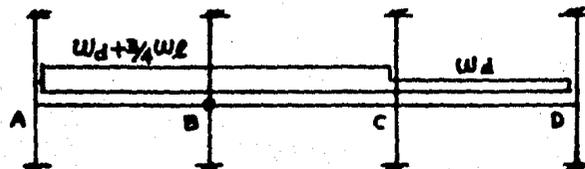
- 3) PATRON DE CARGA PARA MOMENTO POSITIVO DE DISEÑO EN EL CLARO BC\*



- 4) PATRON DE CARGA PARA MOMENTO NEGATIVO DE DISEÑO EN EL APOYO A\*



- 5) PATRON DE CARGA PARA MOMENTO NEGATIVO DE DISEÑO EN EL APOYO B\*



\* LOS MOMENTOS DE DISEÑO NO DEBEN SER MENORES QUE EL PATRON DE CARGA PRESENTADO EN 1).

FIG. 2.27.-ANALISIS PARCIAL DE UN MARCO, CON CARGA VERTICAL.

## 5. DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS FACTORIZADOS.

Las expresiones para los factores de distribución de momento (FD) en la unión, usando la rigidez de una columna equivalente ( $K_{ec}$ ). Estos factores de distribución FD, se usan directamente al hacer la distribución del momento.

Rigidez de la columna equivalente (ver la siguiente figura).

$$K_{ec} = \sum K_c \times \sum K_t / (\sum K_c + \sum K_t) \quad E. C. 2.13$$

$$= [(K_{cb} + K_{ct})(K_t + K_{\bar{t}})] / [(K_{cb} + K_{ct}) + (K_t + K_{\bar{t}})]$$

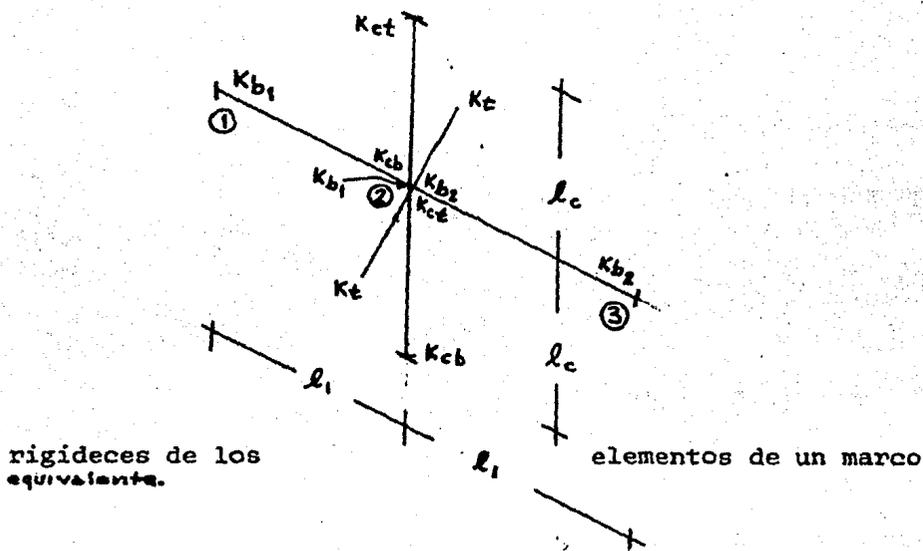
Factor de distribución de viga - losa:

$$FD_{2-1} = K_{b_1} / (K_{b_1} + K_{b_2} + K_{ec})$$

$$FD_{2-3} = K_{b_2} / (K_{b_1} + K_{b_2} + K_{ec})$$

Factor de distribución de la columna equivalente (momento desequilibrado de la viga-losa):

$$FD = K_{ec} / (K_{b_1} + K_{b_2} + K_{ec})$$



El momento desequilibrado para la columna equivalente en los ciclos de distribución del momento, se distribuye en las columnas arriba y abajo de la losa en proporción a la rigidez de la columna real en la unión.

De la sec. 13.7.7.6 del código se debe cumplir:

Porción del momento de desequilibrio para la columna superior.

$$= K_{cb} / (K_{cb} + K_{ct})$$

Porción del momento de desequilibrio para la columna inferior.

$$= K_{ct} / (K_{cb} + K_{ct})$$

Los momentos negativos factorizados de diseño, deben tomarse en los paños de los apoyos rectilíneos, pero no a una distancia mayor de  $0.175 l_1$ , a partir del centro del apoyo. Esto es con el fin de prevenir una reducción indebida en el momento de diseño para apoyos angostos.

Los miembros que funcionan como un apoyo ya han sido definidos anteriormente, así como sus secciones.

#### RESISTENCIA POR CORTANTE, SIN USAR NINGUN TIPO DE REFUERZOS, SEGÚN ACI.

El ACI-77 recomienda que el diseño de las secciones sujetas a cortante, sin refuerzo por cortante, se basa en :

$$V_u \leq \phi V_c \quad \text{EC. 2.14.}$$

Donde  $V_u$ , es la fuerza cortante factorizada en la sección considerada,  $\phi$ , es el factor de reducción de resistencia -- para el cortante ( $=0.85$ ), y  $V_c$ , es la resistencia de la fuerza cortante nominal, suministrada por el concreto.

La resistencia de la fuerza cortante nominal, de losas de concreto del peso normal, en dos direcciones se da como:

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta_c}\right) \sqrt{f'_c} b_o d [lb] \leq 4 \sqrt{f'_c} b_o d [lb]$$

donde:  $\beta_c$ , es la relación de lado largo a corto, del área de la carga concentrada o de la reacción,  $f'_c$ , es la resistencia del -- cilindro de concreto a compresión (psi),  $d$ , es la distancia de -- las fibras más alejadas a el centroide del refuerzo de tensión de la losa (in), y  $b_o$ , es el perímetro de la sección crítica (in).

Cuando se usa concreto ligero, el término  $\sqrt{f'_c}$ , en la ec anterior se multiplica por 0.75, para cualquier concreto ligero, ó -- por 0.85, para concreto ligero de arena.

Para un área de carga de cualquier forma, la sección crítica se -- se encuentra de tal modo que su longitud es mínima, y que no se -- aproxima a  $d/2$ , de la periferia del área cargada. La sección --- crítica para columnas de diferentes formas, como se ilustra en el comité 426 del ASCE-ACI, se muestran en la fig. 2.28. Nótese que éste comité, sugiere que un área cargada de forma circular se -- reemplaza por un área de carga, de forma rectangular de igual perímetro.

Los códigos actuales, ignoran la diferencia, pero tiene que demos -- trarse finalmente que un área circular cargada, es capaz de trans -- mitir considerablemente más fuerza cortante, que un área cuadrada que tenga el mismo perímetro. La mejoría de la resistencia a --

cortante, es aparentemente un resultado de no tener concentraciones de esfuerzos, que ocurren en las esquinas de las columnas rectangulares. La misma serie de pruebas demostraron claramente, que al incrementar la resistencia a flexión de la losa, puede aumentarse la capacidad del cortante, como fue demostrado por Moe y otros.

Fig. 2.28 sección crítica para cortante en losas.

En la ec. anterior, el esfuerzo cortante nominal último en la sección crítica es  $4\sqrt{f'_c}$  psi ( $0.33 f'_c$  N/mm<sup>2</sup>)

donde:  $\beta_c$ , es la relación del lado largo a corto, de una columna rectangular, que está en el rango de 1 a 2. Para  $\beta_c > 2$ , el esfuerzo cortante nominal último, se reduce linealmente a  $2\sqrt{f'_c}$  psi ( $0.17 f'_c$  N/mm<sup>2</sup>) cuando  $\beta_c \rightarrow \infty$ , que es el esfuerzo cortante nominal último, para la acción en una dirección. El esfuerzo cortante nominal último, cuando  $\beta_c > 2$ , es un promedio de la más compleja situación actual, en las que el esfuerzo de falla varía desde  $4\sqrt{f'_c}$  psi, cerca de los extremos del área cargada, hasta descender a  $2\sqrt{f'_c}$  psi, o menor a lo largo de los lados largos, entre los dos extremos. Para otras formas de área cargada diferentes de la rectangular,  $\beta_c$  se toma como la relación de la dimensión más grande del área efectiva cargada, a la dimensión más corta del área efectiva cargada, las direcciones de las dimensiones forman un ángulo recto. El área cargada efectiva, es el área que encierra totalmente el área real de carga para que el perímetro sea mínimo. El término  $\beta_c$ , para un área de carga en forma de L, se muestra en la fig. 2.29

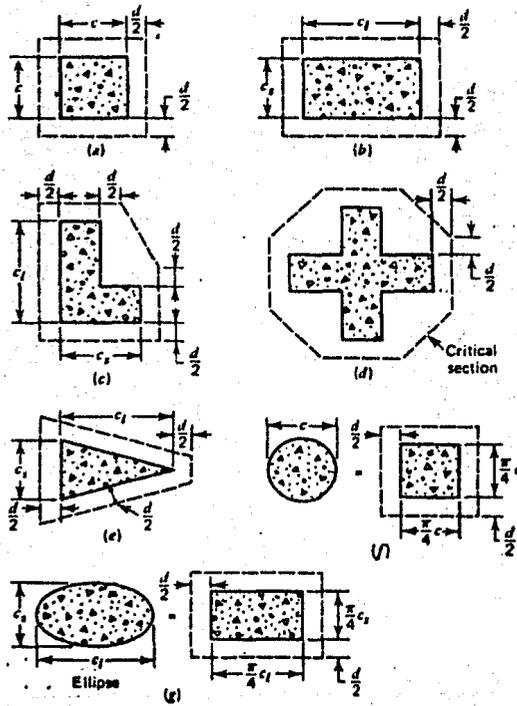
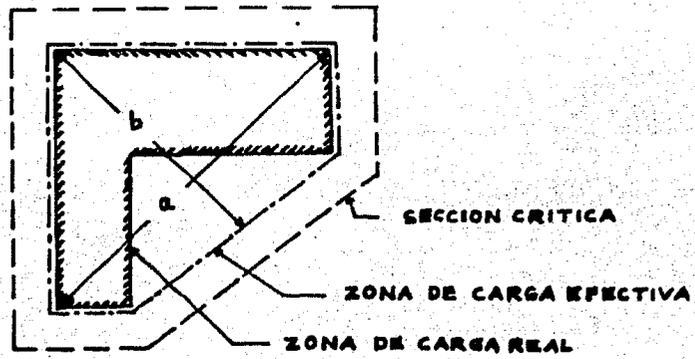


FIG. 2.28



$$\theta_c = \frac{a}{b}$$

FIG. 2.29, VALOR DE  $\theta_c$  PARA UNA ZONA DE CARGA NO RECTANGULAR

El peralte efectivo  $d$ , en la ec.  $V_u \leq \phi V_c$  no está explícitamente definido para refuerzo en dos direcciones en el código ACI, pero el comité ASCE-ACI, sugiere que 'd' se tome como:

$$d = \frac{A_{s1}d_1 + A_{s2}d_2}{A_{s1} + A_{s2}} \quad 2.16$$

donde:  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ , son las áreas del refuerzo de tensión que atraviesan la sección crítica en direcciones perpendiculares 1 y 2, respectivamente, y  $d_1$  y  $d_2$ , los peraltes efectivos de los refuerzos  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ , respectivamente. El término 'd', es igual a el peralte efectivo promedio del acero, si el área cargada es aproximadamente cuadrada, y las proporciones del refuerzo aproximadamente iguales para las direcciones 1 y 2.

#### RESISTENCIA POR CORTANTE, USANDO DIVERSAS FORMAS DE REFUERZO.

La resistencia a cortante y ductilidad de las losas, se puede incrementar con el uso de refuerzo por cortante, en las siguientes formas; barras inclinadas, alambres, estribos, ó capitles de acero estructural. Las barras dobladas y estribos, deben detallarse cuidadosamente con un anclaje apropiado. Algunas formas de refuerzo por cortante usadas en el pasado, no fueron plenamente efectivas, debido al anclaje deficiente. La fig. 2.30 muestra algunos tipos efectivos de refuerzo por cortante.

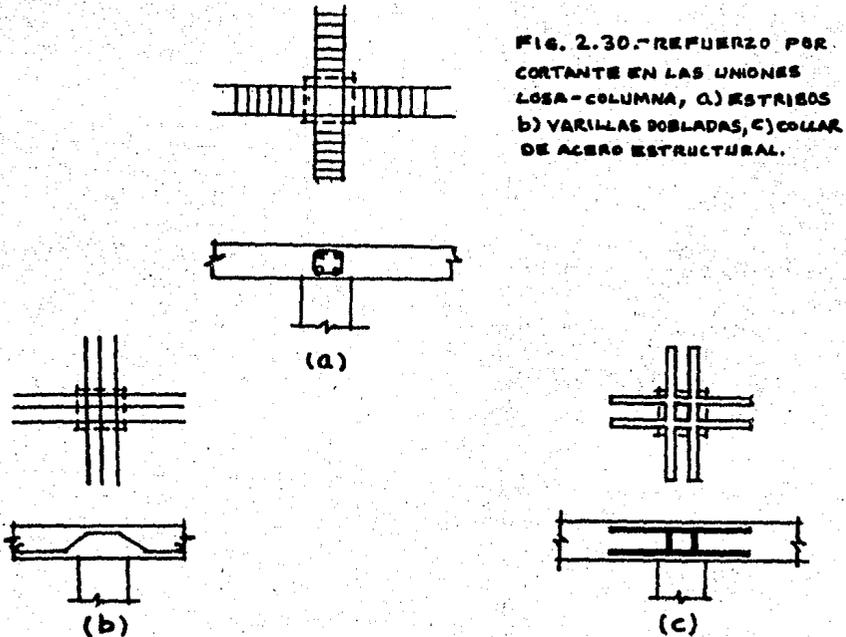
Refuerzo por cortante con estribos y barras dobladas. El ACI-77, recomienda que el diseño de secciones con estribos ó barras dobladas, se base en :

$$V_u \leq \phi V_n$$

donde:  $V_u$ , es la fuerza cortante factorizada, en la sección considerada,  $\phi$  es el factor de reducción de resistencia para -

cortante ( $=0.85$ ), y  $V_n$ , es la resistencia del cortante nominal de la sección.

La resistencia del cortante nominal, de losas de concreto de peso normal, se da como:



donde:  $f'_c$ , es la resistencia del cilindro de concreto a compresión (psi),  $'d'$ , la distancia de las fibras de compresión más alejadas a el centroide del refuerzo de tensión en la losa,  $b_o$ , es el perímetro de la sección-crítica, situado de tal forma que no se acerque mucho a  $d/2$  del perímetro del área cargada (in), y  $V_s$ , es la fuerza cortante que toma el acero por cortante, dado en las dos ecuaciones siguientes.

La resistencia al cortante se revisará en la sección crítica, a lo largo del perímetro  $b_o$ , definida anteriormente.

El cortante que necesita ser tomado por  $V_s$ , se hace más pequeño en secciones más alejadas del área cargada (es decir, para valores de  $b_o$ , en secciones a más de  $d/2$  de la periferia del área cargada), y el refuerzo por cortante se continuará, fuera del área cargada, hasta que no sea mayor que el requerido.

El esfuerzo cortante nominal último en la sección crítica, con refuerzo por cortante, se toma como  $2\sqrt{f'c}$  psi ( $0.17\sqrt{f'c}$  N/mm<sup>2</sup>), ya que aproximadamente para este esfuerzo, comienza a formar grietas por la tensión diagonal (grietas por cortante en el alma) y el refuerzo por cortante se considera que toma toda la fuerza cortante, sobre ésta carga. El máximo esfuerzo cortante nominal último, lo puede tomar el concreto, y el refuerzo por cortante no se permite que sea mayor de  $6\sqrt{f'c}$  psi ( $0.5\sqrt{f'c}$  N/mm<sup>2</sup>).

Cuando se usa concreto ligero, el término  $\sqrt{f'c}$ , en la ec. 2.17 se debe multiplicar por 0.75 para cualquier <sup>concreto</sup>aligerado y 0.85, - para concreto con arena ligera.

Cuando el refuerzo por cortante es perpendicular a el eje, se usa:

$$V_s = A_v f_y \frac{d}{s} \quad \text{EC. 2.18}$$

donde:  $A_v$ , es el área del refuerzo por cortante dentro de una distancia "S",  $f_y$ , es el esfuerzo de fluencia del refuerzo por cortante, "d", es el peralte efectivo del acero longitudinal de la losa, y "s", es la separación

del refuerzo por cortante a lo largo del acero de la losa. - La separación de los estribos no debe ser mayor que  $d/2$ . Debe ir una varilla de la losa en cada esquina del estribo, y los estribos deben ir bien anclados en cada varilla, para desarrollar la resistencia de la fluencia del estribo. La fig. 2.30a muestra un arreglo típico de estribos. Para los arreglos particulares mostrados en la fig. anterior,  $A_v$  en la ec. 2.18 es el área de las ocho ramas del estribo. La fuerza cortante tomada por los estribos es  $V_s$ , en la sección crítica a  $d/2$ , de la periferia del área cargada, y también se toma  $V_s$ , en todas las secciones más allá de la periferia del área cargada, hasta que los estribos sean discontinuos, suponiendo que "s" permanece fija.

Los estribos cerrados son preferidos, debido a un mayor incremento en ductilidad de la losa, para la carga última. Los estribos inclinados, también se usan para refuerzo por cortante, en éste caso la ec. 2.18 se modifica multiplicando el miembro derecho de la ecuación por  $(\sin \alpha + \cos \alpha)$ , donde  $\alpha$ , es el ángulo entre los estribos inclinados y las varillas longitudinales de la losa.

Cuando el refuerzo por cortante consiste de un sólo grupo de varillas dobladas, se tiene que:

$$V_s = A_v f_y \sin \alpha \quad \text{E.C. 2.19.}$$

donde:  $A_v$ , es el área del refuerzo por cortante,  $f_y$ , la resistencia de la fluencia del refuerzo por cortante, y  $\alpha$ , el ángulo entre las varillas inclinadas y las varillas

longitudinales de la losa.

Las varillas dobladas cruzarán la sección crítica, y se anclarán en cada extremo, para desarrollar su fluencia. La fig. 2.30 b, muestra un arreglo típico. Para el arreglo particular de tres varillas en cada dirección, mostrado en la fig. anterior, Av en la ec. 2.19, es el área de las 12 varillas. Las varillas dobladas a  $45^\circ$  en el arreglo mostrado en dicha figura, toma la fuerza cortante a través de la sección crítica a  $d/2$  de la cara de la columna.

Los estribos cerrados son preferidos como refuerzo por cortante, más que las varillas dobladas, ya que éstas tienen que anclarse cuidadosamente, asegurándose que intercepte con efectividad las grietas producidas por la tensión diagonal.

#### COLLARES DE ACERO ESTRUCTURAL PARA CORTANTE

El refuerzo por cortante formado de secciones estructurales en "I" o en sección canal, se pueden usar en estas losas.

El collar se forma soldando las secciones de cuatro brazos idénticos, en ángulos rectos. Los brazos deben ser continuos a través de la sección de la columna. En la fig. 2.30 se muestra un arreglo típico. Los extremos de cada brazo del collar pueden doblarse en un ángulo mayor de  $30^\circ$  con respecto a la horizontal, previniendo que el momento resistente de la sección adelgazada, pueda resistir la fuerza cortante atribuida a el brazo. La relación  $\alpha_v$  de la rigidez a la flexión de cada brazo del collar a la rigidez a flexión de la sección de losa compuesta agrietada de un ancho  $(C_2 + d)$  no deberá ser menor que 0.15. El diseño del collar se basa en dos criterios básicos. Primero, el collar tendrá resistencia a la flexión adecuada para tomar el cortante que se produce a lo largo de los

brazos. Segundo, los esfuerzos cortantes en el concreto, próximos a el extremo de los brazos, serán limitados. La presencia del collar hace que el refuerzo longitudinal de la losa para momento negativo en la franja de columna, pueda ser reducido.

El momento plástico de resistencia requerido para cada brazo del collar, se calcula con la siguiente ecuación (basada en reportes de pruebas):

$$M_p = \frac{V_u}{8\phi} \left[ h_v + \alpha_v \left( l_v - \frac{c_1}{2} \right) \right] \quad \text{EC. 2.20}$$

donde:  $\phi = 0.9$ , es el factor de reducción de resistencia para flexión.

$V_u$  = fuerza cortante total factorizada, que toma la conexión.

$h_v$ , peralte de los brazos del collar a través de la sección.

$l_v$ , longitudinal de los brazos del capitel, del centro de este.

$C_1$ , Magnitud del rectángulo o el área cargada rectangular equivalente, medida en la dirección del brazo.

La ecuación anterior se encontró suponiendo que la fuerza cortante vertical está distribuida a lo largo de un brazo del collar (ver fig. 2.31b), que está implícitamente basado en las fuerzas aplicadas que se muestran en la fig. 2.31c. La fuerza cortante a lo largo de cada brazo se toma como  $\alpha_v V_c / 4$ , donde  $V_c$ , es la fuerza cortante del agrietamiento por tensión diagonal en la losa.

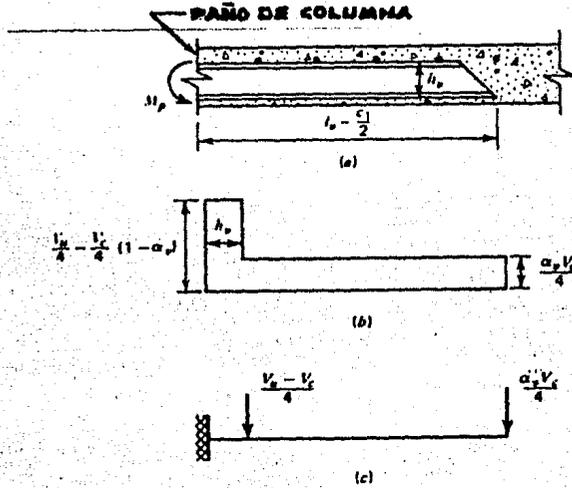


FIG. 2.31. - DISTRIBUCION IDEALIZADA, DE LA FUERZA CORTANTE VERTICAL, ACTUANDO EN UN BRAZO DEL COLLAR. (a) BRAZO DEL COLLAR EN LA LOSA, (b) DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE SUPUESTO, PARA EL BRAZO DEL COLLAR. (c) FUERZAS SUPUESTAS, ACTUANDO EN EL BRAZO DEL COLLAR.

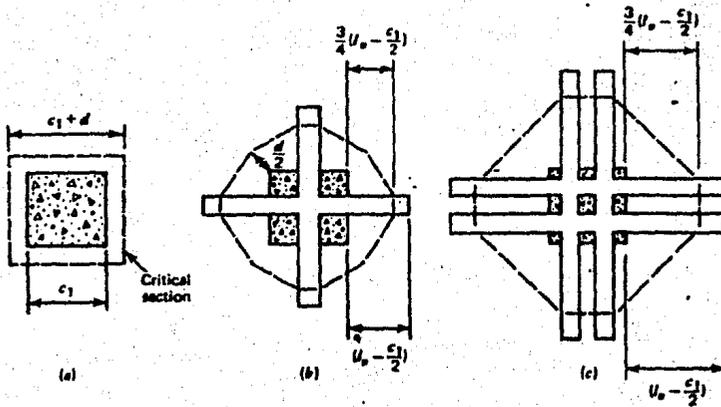


FIG. 2.32. - LOCALIZACION DE LA SECCION CRITICA, CON COLLARES DE ACERO ESTRUCTURAL. (a) SIN COLLAR, (b) COLLAR PEQUEÑO, (c) COLLAR GRANDE.

La fuerza cortante máxima en la cara de la columna se toma como  $(V_u/4) - (V_c/4 (1 - \alpha_v))$ , donde el primer término es la fuerza cortante total que se toma en el paño de la columna y el segundo término es la fuerza cortante en el paño de la columna, que se considera lo toma la zona de compresión del concreto, de la losa. El segundo término tiende a cero para un collar de brazos pesados, y tiende a  $V_c/4$  para un collar de brazos ligeros.

La longitud  $l_v$ , de cada brazo por cortante, se calcule al -- prolongar los brazos lo suficiente para que  $V_u$ , no sea mayor -- que  $\phi 4 \sqrt{f'_c} b_o d$  (lb), en las siguientes secciones críticas. La sección crítica se considera a través de cada brazo del collar en  $3/4 [l_v - (C_1/2)]$  de la cara de la columna y está -- ubicada de tal modo que  $b_o$  sea mínimo, pero no debe acercarse a  $d/2$  de la periferia de la sección de la columna. Lo antes -- dicho se describe en la fig. 2.32.

### INFLUENCIA DE LAS ABERTURAS, BORDES LIBRES Y DUCTOS DE SERVICIO

Cuando las aberturas de losas están localizadas a una distancia menor que diez veces el espesor de la losa del área cargada, o cuando las aberturas en placas planas o losas planas, se encuentran en franjas de columna, el código ACI nos dice que la sección crítica de la losa para cortante, debe ser modificada. -- La parte de la sección crítica comprendida por las proyecciones radiales de los extremos de las aberturas al centroide del área cargada, se considera ineficaz en el cálculo de  $b_o d$ .

La parte eficaz de la sección crítica para las áreas de carga próximas a las aberturas y bordes libres, se muestran con líneas punteadas, en la siguiente figura.

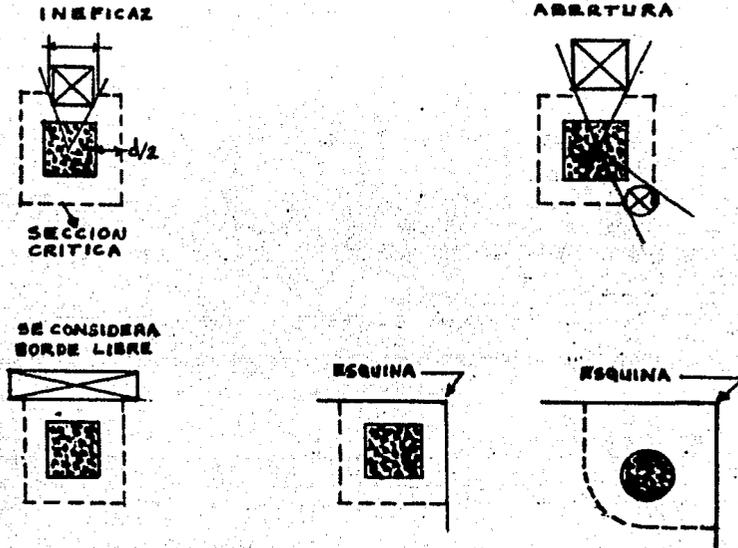


fig. 2.33 efectos de las aberturas y bordes libres en secciones críticas para cortante.

Cuando la abertura en losas planas , quede en una franja de columna, se investigarán los efectos con base en el perímetro efectivo reducido, de la siguiente manera:

- a) Si no se usa refuerzo de collar de cortante, el perímetro -- efectivo es  $= (b_o - x)$ .
- b) Si se usa refuerzo de collar el perímetro efectivo es  $= (b_o - x/2)$ .

A continuación se presentan los casos más comunes de aberturas en un sistema de losas sin vigas (del ACI-77), siguiente figura.

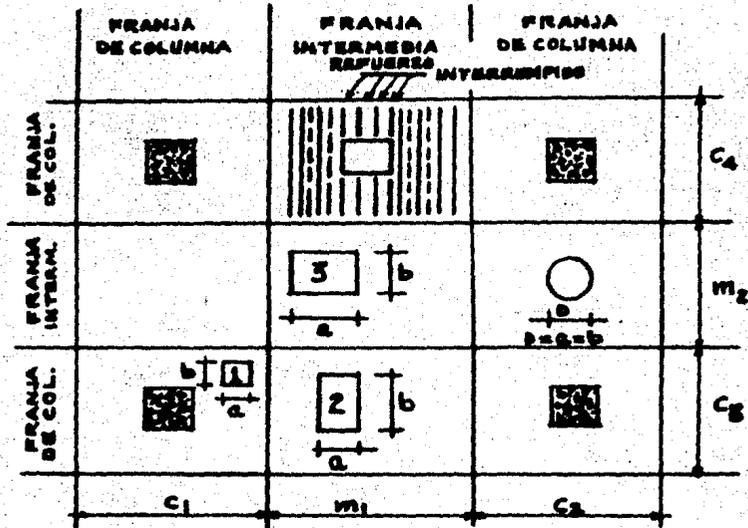
La influencia de los ductos de servicio dentro de losas próximas a columnas de entrepiso de placas planas, ha sido investigada por Hanson, con losas de 8 pulg. de espesor, en losas de un sistema de ductos de dos niveles, con ductos de sección -- transversal de 7 1/4 pulg. por 1 3/8 pulg. ó 3 1/8 pulg. - 1 3/8 pulg. Los ductos se tomaron en el plano horizontal de la losa cerca del peralte medio, pero totalmente en el lado de tensión del eje neutro de la losa.

De estudios se encontró que al poner un ducto cerca del extremo del brazo de un collar, reduce la efectividad del collar - por lo que se recomienda no usar ductos cerca de estos extremos.

#### TRANSFERENCIA DEL MOMENTO NO EQUILIBRADO ENTRE LOSA Y COLUMNA

El reglamento especifica que el momento no equilibrado entre losa y columna, se transfiera por excentricidad del cortante - (sec. 11.12.2) y por flexión (sec. 13.3.4) en la unión losa -- columna. Este mecanismo se ilustra en la siguiente figura:

En una junta monolítica de losa y columna, se produce transferencia de momento entre los extremos de la losa y la columna. Los momentos pueden producirse por cargas laterales aparte de las ya conocidas como son las de viento, sismo y también por cargas gravitacionales no equilibradas. La fuerza cortante - en los extremos de las columnas y a lo largo de éstas, puede considerarse en el diseño del refuerzo lateral en las columnas (sec. 11.12.1.1.).



ABERTURA	RESTRICION	REFERENCIA DEL ACI.
1	$a \leq \frac{1}{8} c_1$ $b \leq \frac{1}{8} c_3$	13.5.2.2
2	$a \leq \frac{1}{4} m_1$ $b \leq \frac{1}{4} c_3$	13.5.2.3
3	$a \leq m_1$ $b \leq m_2$	13.5.2.1

Los resultados por Hanson, y Hanson, demostraron que cerca del 60% del momento es transferido por flexión y el resto lo toma el esfuerzo cortante no equilibrado, cerca de la periferia de la sección crítica a  $d/2$  de la cara de la columna. El código del ACI (sec. 13.3.4) recomienda que el momento total factorizado  $M_u$ , se divida en un momento transferido por flexión  $M_f$ , y otro que se transfiere por cortante  $M_v$  (sec. 11.12.2.3). de tal modo que:

$$M_f = \frac{M_u}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C_1+d}{C_2+d}}} \quad \text{E.C. 2.21}$$

$$\therefore M_v = M_u - M_f \quad \text{E.C. 2.22}$$

El momento  $M_f$  es el que se transfiere a través de un ancho de losa de  $(C_2 + 3h)$ . Donde  $h$  es el peralte total de losa o abaco. La concentración del refuerzo en éste ancho puede lograrse, reduciendo la separación de las varillas o aumentando el refuerzo para resistir este momento.

Si  $C_1 = C_2$ , la ec.2.21 queda así  $M_f = 0.60 M_u$

Si  $C_2 = 2C_1$  y  $C_1 = d$ , la ec. 2.21 queda así:  $M_f = 0.648 M_u$

Parece razonable que cuando  $C_2$  es mayor que  $C_1$ , el momento transferido por flexión sea mayor, ya que el ancho efectivo de la losa  $(C_2 + 3h)$  que resiste el momento es relativamente más grande.

En este trabajo se harán uso de las siguientes ecuaciones y gráficas (págs. 159-161, de la referencia 2):

fracción de momento no equilibrado, transferido por excentricidad del cortante;

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C_1+d}{C_2+d}}} \quad \text{EC. 2.23}$$

Y el de flexión es:

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C_1+d}{C_2+d}}} \quad \text{EC. 2.24}$$

Las ecuaciones anteriores se resumen en la siguiente gráfica:  
(3.2.1)

El momento no equilibrado en el apoyo exterior de un claro extremo, no se calculará por lo general, en el centroide de la sección crítica de transferencia, al realizar el análisis del marco. Por lo tanto lo primero que hay que hacer, es transferir el momento no equilibrado a dicho centroide de transferencia.

En el método de diseño directo, donde el momento no equilibrado de la columna exterior de un claro extremo está localizado en el paño de la columna, el momento en el centroide de la sección crítica se calcula con  $M_u = M_f + (3.25 + 0.75\gamma)(e/ln) M_o$

donde:  $M_u$  = momento negativo exterior factorizado en el paño de la columna.

$$e = C_1 + C - a, \text{ considerando el signo que resulte.}$$

Se supone que los esfuerzos por cortante varían linealmente respecto al centroide de la sección crítica (ver sec. 11.12.2.4) la distribución de esfuerzos se supone como se ilustra en la figura 2.35.

El esfuerzo cortante máximo afectado por el factor de carga, se calcula con las siguientes expresiones:

$$V_{uAB} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma V M_u C_{AB}}{J_c}$$

$$V_{uCD} = \frac{V_u}{A_c} - \frac{\gamma V M_u C_{CD}}{J_c}$$

donde los parámetros  $A_c$ ,  $J_c$  y  $C$ , se tienen de la figura anterior.  
(GRAFICA 3.2.2)

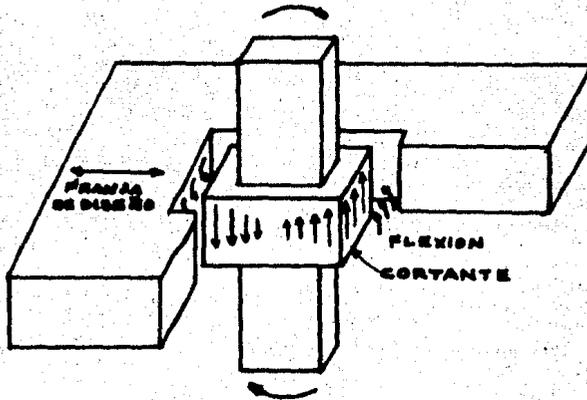
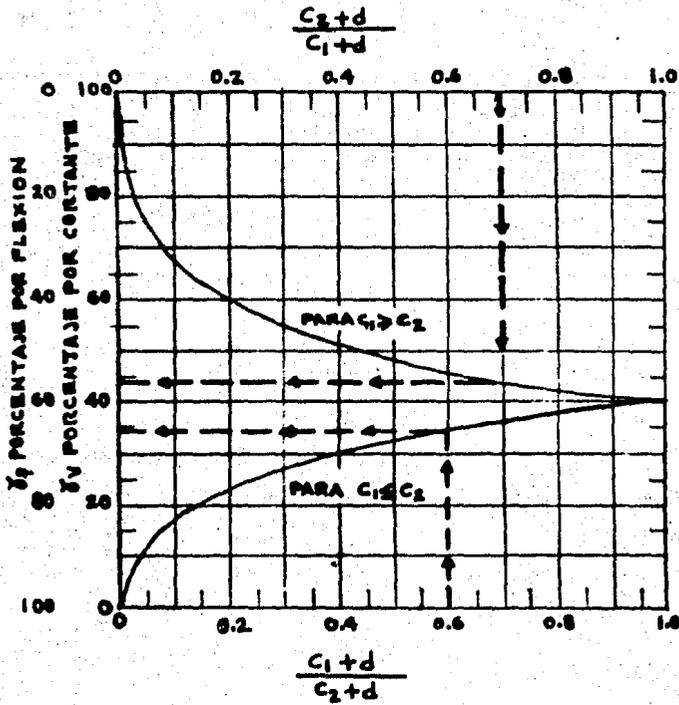
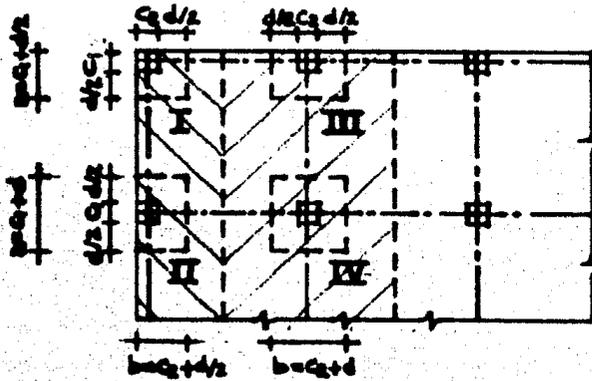


FIG. 2.55 TRANSFERENCIA DE MOMENTO NO EQUILIBRADO

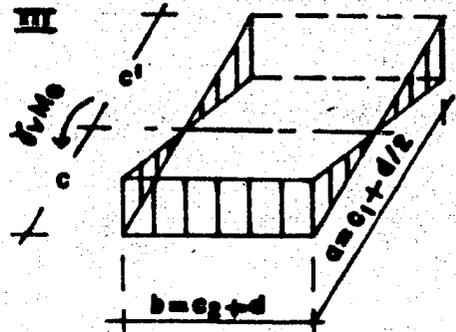
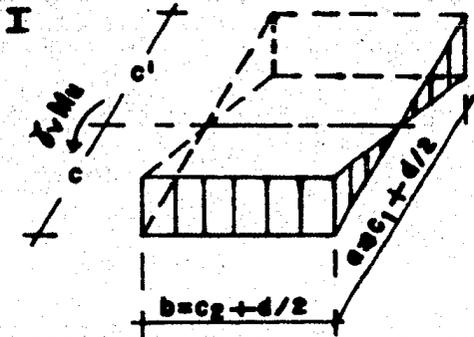


GRAFICA 3.2.1

PROPIEDADES DE LA SECCION PARA CALCULAR EL ESFUERZO CORTANTE

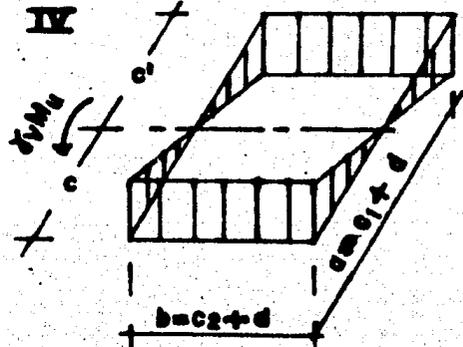
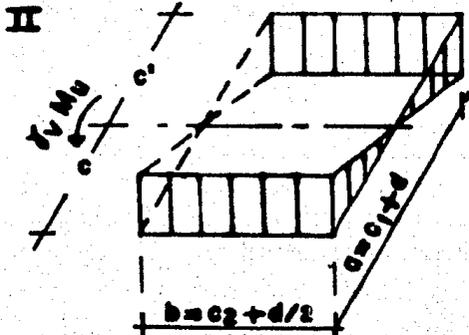


En cualquier caso la excentricidad es:  $e = c_1 + c - s$ , con el signo que resulte (+)  $e'$  (-).



$A_c = (a+b)d$   
 $J/c = (ad(a+4b) + d^3(a+b)/a) / 6$   
 $J/c' = (a^2d(a+4b) + d^3(a+b)/(a+2b)) / 6$   
 $e = c_1^2 / (2(a+b)), c' = a(c+2b) / (2(a+b))$

$A_c = (2a+b)d$   
 $J/c = (2ad(a+2b) + d^3(2a+b)/a) / 6$   
 $J/c' = (2a^2d(a+2b) + d^3(2a+b)/(6(a+b))) / 6$   
 $e = c_1^2 / (2a+b), c' = a(a+b) / (2a+b)$



$A_c = (a+2b)d$   
 $J/c = J/c' = (ad(a+3b) + d^3) / 6$   
 $e = c_1^2 / 2$

$A_c = 2(a+b)d$   
 $J/c = J/c' = (ad(a+3b) + d^3) / 3$   
 $e = c_1^2 / 2$

GRAFICA 3.2.2

# C A P I T U L O III

## EJEMPLOS DE APLICACION

## EJEMPLO 3.1. Análisis de la teoría elástica.

Calcular los momentos y deflexiones de una losa rectangular simplemente apoyada, sujeta a una carga patrón de tipo senosoidal, como se muestra en la fig. 3.1a.

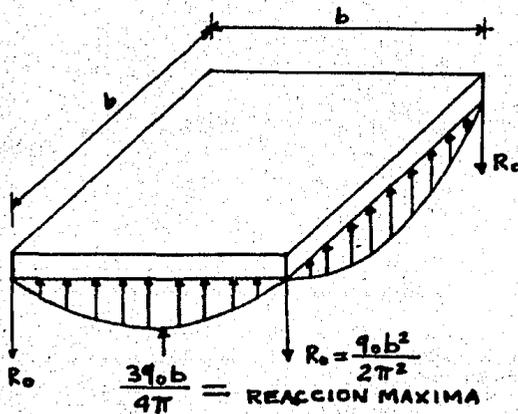
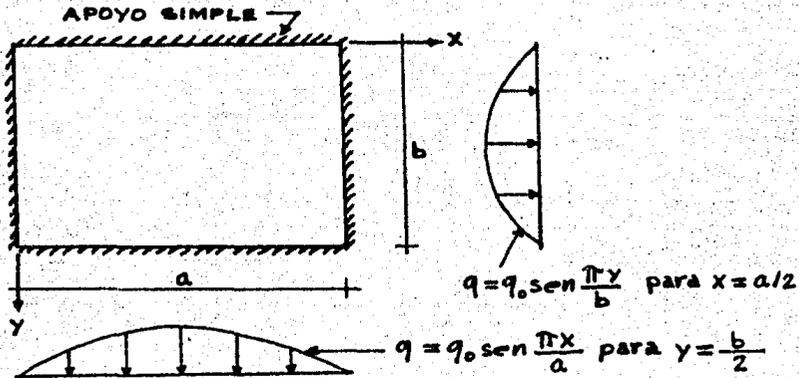


Figura 3.1, placa rectangular, a) carga senoidal, b) reacciones de una placa cuadrada simplemente apoyada, donde  $u=0$ .

solución:

la carga por unidad de área se expresa como:

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad \text{EC. 3.1}$$

es necesario encontrar una función para la deflexión, que satisfaga, tanto la ec. de Lagrange (ec.1.1,) como la ec. de las condiciones de frontera EC (1.30).

En las condiciones de frontera se requiere, que  $W = 0$ , para  $x = 0$ ,  $x = a$  y  $y = 0$ ,  $y = b$ .

Así, también se requiere que  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$ , para  $x = 0$  y  $x = a$  y que  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ , para  $y = 0$  y  $y = b$ . Por tanto la función de la deflexión es:

$$W = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad \text{EC. 3.2}$$

que satisface tanto a la ec. 1.1, como a las condiciones de frontera, ya que tanto la función de la deflexión y todas las derivadas parciales de segundo y cuarto orden con respecto a "x" o "y" son iguales a cero, en los bordes de la losa. El problema entonces es encontrar la constante "C", y una vez conocida ésta, se sustituye W en las expresiones para las fuerzas internas y reacciones.

Por tanto la ec. 1.1, queda:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad \text{EC.3.3}$$

derivando la función de la deflexión (EC. 3.2):

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = C \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = C \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = C \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

sustituyendo estas derivadas en la ec. 3.3:

$$C \frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} = \frac{q_0}{b} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

Se resuelve esta ecuación para encontrar el valor de "C", entonces:

$$C = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4}\right)} = \frac{q_0 b^4}{\pi^4 D} \frac{1}{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]^2} \quad \text{EC.3.4}$$

y consecuentemente la deflexión de la losa, es:

$$W = \frac{q_0}{4D} \frac{1}{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

entonces la deflexión queda en función de la carga, el claro a la cuarta potencia, la rigidez a flexión de la losa, así como para el caso de una viga, y la deformación de la losa.

La flecha máxima se presenta en el centro del claro de la losa y el perfil varía en una curva senoidal en ambas direcciones. Ahora, ya se está en posibilidades de determinar las fuerzas internas, por ejemplo,  $m_x$  de la ec. 1.12:

$$m_x = -D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

pero  $W = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$  (EC. 3.2.)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = C \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \right]$$

$$= C \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left[ \cos \frac{\pi x}{a} \left( \frac{\pi}{a} \right) \right]$$

$$= C \left( \frac{\pi}{a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = C \left( \frac{\pi}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \cos \frac{\pi x}{a} \right]$$

$\therefore$

$$= -C \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right]$$

$$= C \left( \frac{\pi}{b} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = C \left( \frac{\pi}{b} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \cos \frac{\pi y}{b} \right]$$

$$= -C \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\therefore m_x = -D \left[ -C \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} - u C \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right]$$

y sustituyendo el valor de la constante "C" (ec. 3.4):

$$\Rightarrow M_x = +q_0 \frac{b^4}{\pi^2 [(b/a)^2 + 1]^2} \left( \frac{1}{a^2} + \mu \frac{1}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

de igual manera:

$$M_y = +q_0 \frac{b^4}{\pi^2 [(b/a)^2 + 1]^2} \left( \frac{1}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

para obtener el momento torsionante

$$M_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} D(1-\mu) \quad (\text{ec. 1.19})$$

se necesita calcular la derivada parcial mixta de la deflexión ( $w$ ), por tanto;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ c \left( \frac{\pi}{b} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right\} \\ &= c \left( \frac{\pi}{b} \right) \left( \frac{\pi}{a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ &= c \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

por tanto la ecuación del momento torsionante, queda:

$$M_{xy} = - \left[ c \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right] D(1-\mu), \text{ y sustituyendo } c:$$

$$M_{xy} = - \left[ \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{b^4}{[(b/a)^2 + 1]^2} \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right] D(1-\mu) = -q_0 \frac{b^4(1-\mu)}{\pi^2 a [(b/a)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

Los momentos flexionantes son máximos en el centro del claro de la losa, y tienden a cero, cuando se aproximan a las esquinas, donde los momentos torsionantes alcanzan su máximo valor.

Para una losa cuadrada, con carga senoidal, el momento flexionante máximo y el momento torsionante, tienen el mismo valor numérico (si la carga está uniformemente distribuida, los momentos torsionantes son grandes).

El cortante se tiene de la ec. 1.27:

$$V_x = -D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -c \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right\} \\ &= -c \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left( \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\pi}{a} \right) \\ &= -c \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -c \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right\} \\ &= -c \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left( \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\pi}{a} \right) \\ &= -c \left( \frac{\pi^3}{ab^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

SUSTITUYENDO ESTAS DERIVADAS PARCIALES, SE TIENE:

$$V_x = -D \left[ -c \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} - c \left( \frac{\pi^3}{ab^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right]$$

Y SUSTITUYENDO EL VALOR DE LA CONSTANTE "c":

$$\begin{aligned} &= -D \left[ - \left( \frac{q_0 b^4}{\pi^4 D} \frac{1}{[(b/a)^2 + 1]^2} \right) \left( \frac{\pi^3}{a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} - \left( \frac{q_0 b^4}{\pi^4 D} \frac{1}{[(b/a)^2 + 1]^2} \right) \left( \frac{\pi^3}{ab^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right] \\ &= \left[ D \frac{q_0 b^4}{\pi^4 D} \frac{\pi^3}{a^2} \frac{1}{[(b/a)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} + D \frac{q_0 b^4}{\pi^4 D} \frac{\pi^3}{ab^2} \frac{1}{[(b/a)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right] \\ &= \frac{q_0 b^4}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left[ \frac{1/a^3}{[(b/a)^2 + 1]^2} + \frac{1/ab^2}{[(b/a)^2 + 1]^2} \right] \\ &= q_0 \frac{b^4}{\pi} \frac{1/a^3 + 1/ab^2}{[(b/a)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

La reacción se calcula con la ec. 1.34:

$$R_x = V_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-u) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right]$$

sustituyendo las parciales y siguiendo el procedimiento anterior se llega a:

$$R_x = q_0 \frac{b^4}{\pi} \frac{(1/a^3) + (2-u)(1/ab^2)}{[(b/a)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

donde  $x = 0$  ó  $x = a$ , pero no valores intermedios entre 0-a. El cálculo del cortante  $V_y$  y de la reacción  $R_y$ , se obtienen de la misma manera.

Para una losa cuadrada con  $u = 0$ ,  $y = b/2$   $x=0$ , y  $a=b$  se tiene:

$$\begin{aligned} R_x &= q_0 \frac{b^4}{\pi} \frac{(1/b^3) + (2-0)(1/b^3)}{[(b/b)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi(0)}{b} \operatorname{sen} \frac{\pi(b/2)}{b} \\ &= q_0 \frac{b^4}{\pi} \frac{1}{b^3} \frac{1+2}{(1^2+1)^2} \cos(0) \operatorname{sen} \pi/2 \\ &= q_0 \frac{b}{\pi} \frac{3}{4} = 3q_0 (b/4\pi) \text{ que es la reacción máxima} \\ &\text{(ver figura 3.1.b).} \end{aligned}$$

y la reacción total de  $x=0$  A  $y=b$ , en  $x=0$  ó  $x=a$

$$\text{es } R_x = 6q_0 \frac{(b^2)}{4}$$

Consecuentemente la reacción total, en los cuatro lados de la losa es  $6q_0 (b^2/\pi^2)$ . La discrepancia entre la carga total y la reacción total distribuida, es debida a las fuerzas de esquina,  $R_0$ , de la EC. 1.36, se tiene:

$R_0 = 2m_{xy}$ , sustituyendo  $m_{xy}$  (EC. 1.19):

$$= -2D (1-u) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= -2D (1-u) \left[ c \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right], \text{ para } \dots u = 0$$

$$= -2D \left\{ q_0 \frac{b^4}{\pi^4 D} \frac{1}{[(b/a)^2 + 1]^2} \right\} \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$= -2 q_0 \frac{b^3}{\pi^2 a} \frac{1}{[(b/a)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

como para una losa cuadrada  $a=b$ , y además en una esquina  $x=0, y=0$  ó  $x=a, y=b$ , sustituyendo estos valores en la EC. anterior, se tiene:

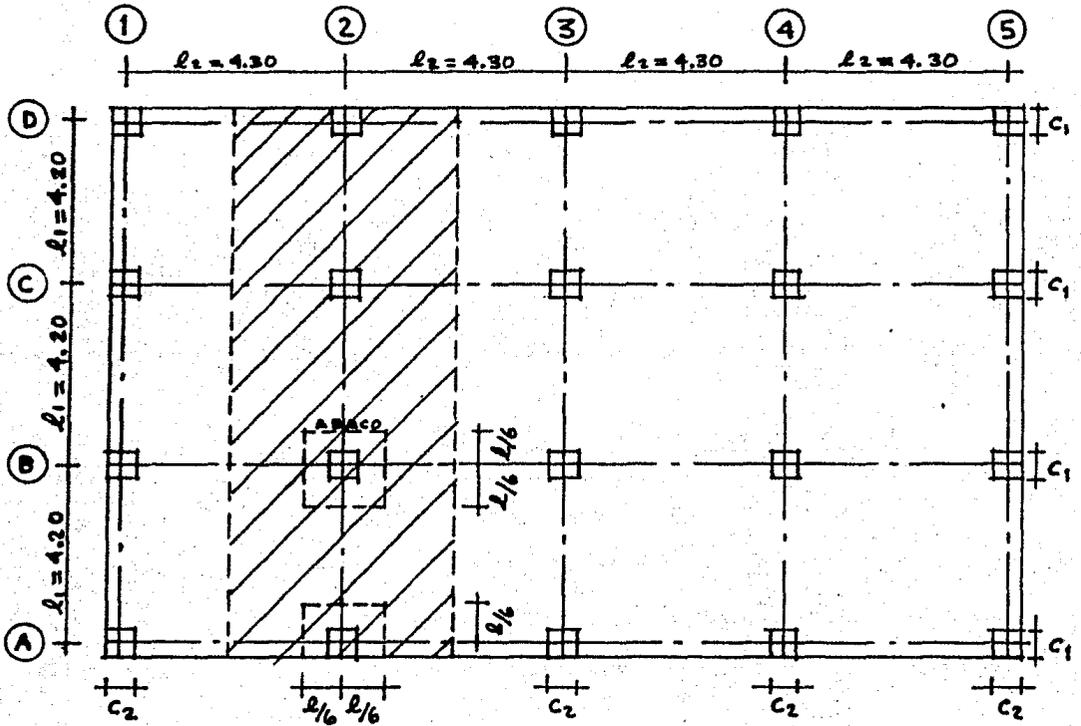
$$R_0 = -2q_0 \frac{b^3}{\pi^2 (b)} \frac{1}{[(b/b)^2 + 1]^2} \cos \frac{\pi(0)}{(b)} \cos \frac{\pi(0)}{b}$$

$$= -2q_0 \frac{b^2}{\pi^2} \frac{1}{[1+1]^2} \cos(0) \cos(0)$$

$$= -2q_0 \frac{b^2}{\pi^2} \frac{1}{4} (1) (1)$$

$$= -q_0 \frac{b^2}{2\pi^2} \text{ que es la reacción en la esquina. (ver fig. 3.1.b).}$$

**3.2. DISEÑO DE UNA LOSA PLANA DE ENTREPISO DE CONCRETO  
REFORZADO, SIN VIGAS**



## DATOS

$f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$  (losas)  
 $= 300 \text{ "}$  (columnas)

$f_y = 4200 \text{ "}$

columnas 40 x 40

altura de entrespiso: 3.0 m.

## ESTIMACIÓN DE LA CARGA

Losa maciza de concreto (h = 12 cm) =	288.0	Kg/m <sup>2</sup>
P/R	20.0	"
Firme (e = 2 cm).	40.0	"
Loseta vinilica	5.0	"
Plafond de yeso (e = 2 cm).	30.0	"
Cancelería para división	50.0	"
Herrería y vidrio	30.0	"
WM	463.0	Kg/m <sup>2</sup>
W <sub>v</sub> (supuesta)	200.0	"
W <sub>t</sub>	663.0	Kg/m <sup>2</sup>

## 1. DISEÑO PRELIMINAR DEL PERALTE DE LA LOSA (H)

## 1.1. CONTROL DE DEFLEXIONES

El peralte total mínimo, para losas sin vigas, se obtiene de:

$$h_{min} = l_n (800 + 0.07 f_v) / 36,000, \text{ (EC. 9.12 AC1).}$$

$l_n$ , claro en el sentido más largo = 430 cm.

$$f_v = 4200 \text{ Kg./cm}^2.$$

Se debe cumplir:

- a) Para losas sin vigas ó ábacos,  $h \geq 12.5$  cm.
- b) Para losas sin vigas, pero con ábacos que satisfagan la sección 9.5.3.2,  $h \geq 10$  cm.
- c) Para losas que tengan vigas en los cuatro bordes, con un valor de  $\alpha_m$  por lo menos, igual a dos...  $h \geq 9$  cm.

9.5.3.1

$$h_{\min} = 430 (800 + 0.07 \times 4200) 36\ 000 \approx 13.1 \text{ cm} > 10 \text{ BIEN}$$

De la sección 9.5.3.2 AC1, para un sistema de losas sin vigas, que tengan ábacos que se extiendan en cada dirección a partir del eje de apoyo a una distancia no menor de  $1/6 'h'$ . Se podrá reducir 'h' un 10%,

el peralte total es entonces:

$$h = 13.1 \times 0.90 = 12.0 \text{ cm. bien, ya que fue el peralte supuesto.}$$

el peralte efectivo es:  $d = 9 \text{ cm.}$

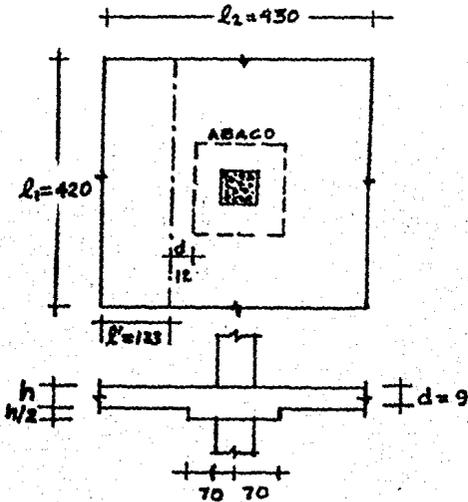
NOTA. Como resultó una losa de un peralte de 13 cm. no se considera económico, por esta razón se optó usar --- ábacos, con un espesor de  $1/2 h$ . Por lo tanto, se propone una losa de 12 cm. de espesor.

## 1.2. RESISTENCIA DE LA LOSA AL ESFUERZO CORTANTE

### 1.2.1 CARGA ÚLTIMA

carga muerta factorizada	$463 \times 1.4 = 648.2 \text{ Kg/cm}^2$
carga viva factorizada	$200 \times 1.7 = 340.0 \text{ ''}$
carga última	$988.2 \text{ ''}$

## 1.2.2 REVISIÓN DEL CORTANTE DE LA LOSA CON ABACO EN LA DIRECCION DE $l_1$ .



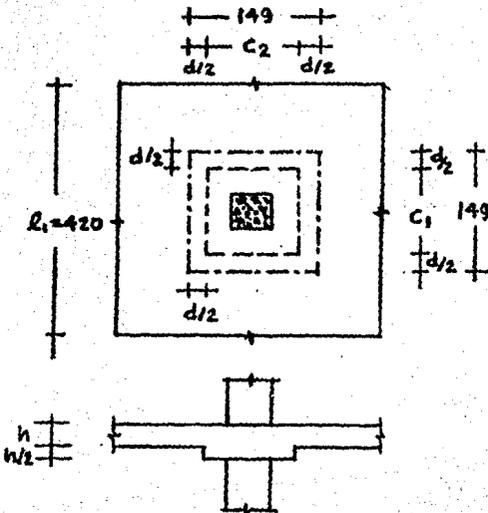
a) como viga ancha

$$\begin{aligned} V_u &= W_{tu} \times b \times l^2 \\ &= 988.2 \times 1.0 \times 1.33 = \\ & \quad 1.3 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_c &= \phi (0.53 \sqrt{f'c} b_w d) \\ &= 0.85 (0.53 \sqrt{250} \times 100 \times 9 \\ & \quad = 6.4 \text{ T} \end{aligned}$$

$\therefore 1.3 < 6.4$  bien

$b_w$  = Es el ancho del alma de la viga, en este caso es 1.0 m.



b) Por penetración

$$\begin{aligned} V_u &= W_{tu} [l_2 \times l_1 - (c_1 + d) \\ & \quad (C_2 + d)] \\ &= 988.2 [4.3 \times 4.2 - \\ & \quad (1.49) (2.49)] \\ &= 15.6 \text{ T.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_c &= \phi (1.1 \sqrt{f'c} b_o d) \\ b_o &= 2 (149) + 2 \\ & \quad (149) = 596. \\ &= 0.85 (1.1 \sqrt{250} \times 596 \\ & \quad \times 9) = 79.3 \text{ T.} \end{aligned}$$

$\therefore 15.6 < 79.3$  bien.

De esta revisión se tiene que el peralte propuesto de la losa y el ábaco son suficientes para resistir el cortante.

## 2. RIGIDEZ A LA FLEXIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL MARCO EQUIVALENTE

### 2.1 RIGIDEZ A LA FLEXIÓN DE LA VIGA- LOSA (Ksb) EN AMBOS EXTREMOS.

$$K_{sb} = K E_c I_s / l_1$$

K, se obtiene de la tabla 1

Ecs, módulo de elasticidad del concreto de la losa.

I<sub>s</sub>, momento de inercia respecto al eje centroidal - de la sección total de la losa.

l<sub>1</sub>, longitud del claro en la dirección en que se determinan los momentos de inercia, medida de paño a paño de los apoyos.

obtención de K:

$$C_{N1} = 40, l_1 = 420, C_{N1}/l_1 = 40/420 \doteq 0.10$$

$$C_{N2} = 40, l_2 = 430, C_{N2}/l_2 = 40/430 \doteq 0.09$$

Entrando con estos valores a la tabla 1, se tiene:

$$K = K_{NF} = 6.02$$

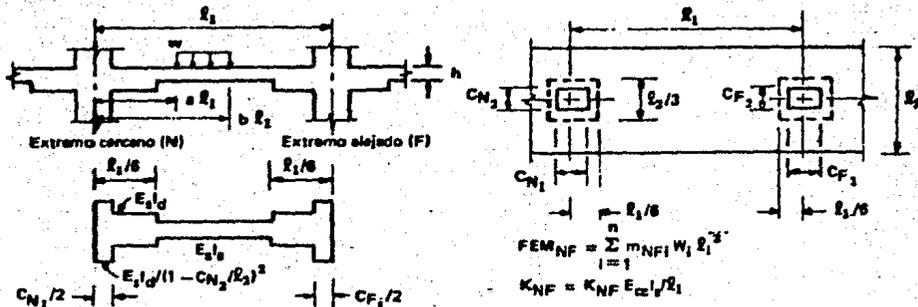
$$F. T. = C_{NF} = 0.5.99 \text{ (se usa en el análisis)}$$

$$m = M_{NF} = 0.0935 \text{ (se usa en el inciso 3.2.2).}$$

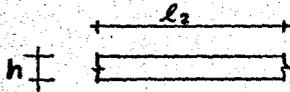
$$E_c = 15000 \sqrt{f'c} = 15000 \sqrt{2.50} = 2.37 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2.$$

TABLA I

CONSTANTES DE DISTRIBUCION PARA VIGAS-LOSA  
(ESPESOR DEL ABACO = 0.50 h)



$C_{N1}/R_1$	$C_{N2}/R_2$	Factores de rigidez $K_{NF}$	Factores de transporte $C_{NF}$	Coeficiente de carga uniforme del momento de empotramiento ( $m_{NF1}$ )	Coeficiente del momento de empotramiento ( $m_{NF}$ ) para $(b-a) = 0.2$				
					$a=0.0$	$a=0.2$	$a=0.4$	$a=0.6$	$a=0.8$
$C_{F1} = C_{N1}; C_{F2} = C_{N2}$									
0.00	—	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.00	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.10	6.04	0.60	0.0938	0.0167	0.0341	0.0282	0.0128	0.0018
0.10	0.20	6.24	0.61	0.0940	0.0170	0.0347	0.0285	0.0125	0.0017
	0.30	6.43	0.61	0.0952	0.0173	0.0353	0.0287	0.0123	0.0016
	0.00	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.10	6.22	0.61	0.0942	0.0168	0.0346	0.0285	0.0126	0.0018
0.20	0.20	6.62	0.62	0.0957	0.0172	0.0356	0.0290	0.0123	0.0016
	0.30	7.01	0.64	0.0971	0.0177	0.0366	0.0294	0.0120	0.0014
	0.00	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.10	6.37	0.61	0.0947	0.0168	0.0348	0.0287	0.0126	0.0018
0.30	0.20	6.95	0.63	0.0967	0.0172	0.0362	0.0294	0.0123	0.0016
	0.30	7.57	0.65	0.0986	0.0177	0.0375	0.0300	0.0119	0.0014
$C_{F1} = 0.5C_{N1}; C_{F2} = 0.5C_{N2}$									
0.00	—	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.00	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.10	6.00	0.60	0.0945	0.0167	0.0343	0.0285	0.0130	0.0020
0.10	0.20	6.16	0.60	0.0962	0.0170	0.0350	0.0291	0.0132	0.0020
	0.00	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.10	6.15	0.60	0.0957	0.0169	0.0348	0.0290	0.0131	0.0020
0.20	0.20	6.47	0.62	0.0967	0.0173	0.0360	0.0300	0.0134	0.0020
$C_{F1} = 2C_{N1}; C_{F2} = 2C_{N2}$									
0.00	—	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.00	5.84	0.59	0.0926	0.0164	0.0335	0.0279	0.0128	0.0020
	0.10	6.17	0.60	0.0907	0.0166	0.0337	0.0273	0.0116	0.0015



$$I_s = 12h^3/12 = 430 (12)^3/12 = 6.19 \times 10^4 \text{ cm}^4.$$

$$\begin{aligned} \therefore K_{sb} &= 6.02 \times 2.37 \times 10^5 \times 6.19 \times 10^4 / 420 \\ &= 5.49 \times 10^8 \text{ Kg - cm.} \end{aligned}$$

## 2.2 RIGIDEZ A LA FLEXIÓN DE LAS COLUMNAS REALES ( $K_c$ ) EN AMBOS EXTREMOS

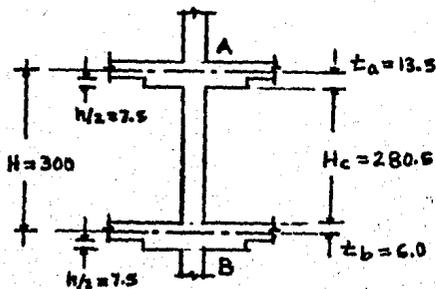
$$K_c = KE_{cc}I_c/l_c$$

K, se obtiene de la tabla 2

$E_{cc}$ , módulo de elasticidad del concreto de la columna.

$l_c$ , longitud de la columna

obtención de K:



$$\left. \begin{aligned} \frac{t_a}{t_b} &= \frac{13.5}{6} = 2.2 \\ \frac{H}{H_c} &= \frac{300}{280.6} = 1.07 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{DE TABLA 2} \\ K = K_{AB} = 4.94 \\ F.T. = C_{AB} = 0.528 \end{array}$$



$$E_{cc} = 15000 \sqrt{f'c} = 15000 \sqrt{300} = 2.59 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_c = \frac{C_2 C_1^3}{12} = \frac{40 (40)^3}{12} = 2.13 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$l_c = 300 \text{ cm.}$$

$$\therefore k_c = 4.94 \times 2.59 \times 10^5 \times 2.13 \times 10^5 / 300 = 9.08 \times 10^8 \text{ Kg-cm.}$$

### 2.3 RIGIDEZ A LA TORSIÓN ( $K_T$ ), DEL MIEMBRO ADYACENTE.

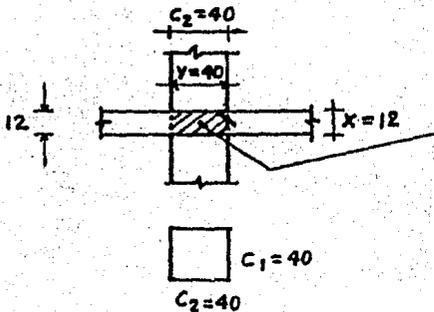
$$K_t = 9 E_{cs} C / (12 (1 - C_2/l_2)^3), \text{ (EC. 13.7).}$$

$$E_{cs} = 2.37 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$C$ , constante de la sección transversal para definir las propiedades torsionantes. Ver la sección 13.7.5 de los comentarios del ACI.

$$= \frac{2}{3} (1 - 0.63 x/y) x^3 y / 3, \text{ (EC. 13.8).}$$

$C_2 = 40$ ,  $l_2 = 430$ . (Ver la siguiente figura)  $x$ ,  $y$ , menor y mayor dimensión de la parte rectangular, de una sección transversal, respectivamente.



miembro adyacente sujeto a torsión.



$$c = 1 (1 - 0.63 \times 12/40) 12^3 \times 40/3$$

$$= 1.86 \times 10^4$$

$$K_t = 9 \times 2.37 \times 10^5 \times 1.86 \times 10^4 / (430 (1 - 40/430)^3)$$

$$= 1.23 \times 10^8 \text{ Kg - cm.}$$

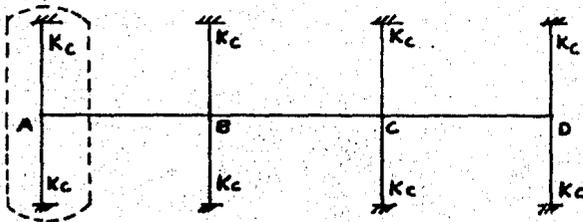
## 2.4 RIGIDEZ DE LA COLUMNA EQUIVALENTE ( $K_{EC}$ )

$$K_{ec} = \frac{\sum K_c \times \sum K_t}{(\sum K_c + \sum K_t)} \quad (\text{EC.13.6}).$$

$$= \frac{2 \times (9.08 \times 10^8) \times 2 (1.23 \times 10^8)}{(2 \times 9.08 \times 10^8 + 2 \times 1.23 \times 10^8)}$$

$$= 2.93 \times 10^8 \text{ Kg-cm.}$$

## 2.5 RESUMEN DE RIGIDECES (EN POTENCIA DE $10^8$ )



donde:

$$K_c = 9.08$$

$$K_{sb} = 5.49$$

$$K_{ec} = 2.93.$$

## 2.6 FACTORES DE DISTRIBUCIÓN (FD) DE LA UNIÓN DE LA VIGA-LOSA

### 2.6.1 EN LA UNIÓN EXTERIOR (NUDOS A Y D)

$$\begin{aligned} FDA &= K_s b_{AB} / (K_s b_{AB} + K_{ec}) \\ &= 5.49 / (5.49 + 2.93) = 0.65 \end{aligned}$$

$$FDD \doteq 0.65$$

### 2.6.2 EN LA UNIÓN INTERIOR (NUDOS B Y C)

$$\begin{aligned} FDB &= K_s b_{BA} / (K_s b_{BA} + K_s b_{BC} + K_{ec}) \\ &= 5.49 / (5.49 + 5.49 + 2.93) = 0.39 \end{aligned}$$

$$FDC = 0.39$$

## 3. ANÁLISIS PARCIAL DE LA ESTRUCTURA DEL MARCO EQUIVALENTE.

### 3.1. REVISIÓN DE LA CARGA VIVA (DE LA SEC. 13.7.6):

$$\begin{aligned} W_v &\leq 3/4 W_M \\ 200 &\leq 3/4 (463) = 341.2 \text{ Kg/m}^2 \text{ bien} \end{aligned}$$

### 3.2. CARGA FACTORIZADA Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

#### 3.2.1. CARGA ÚLTIMA (VER INCISO 1.2.1)

### 3.2.2. MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO (ME) PARA LA VIGALOSA,

$$ME = m (w_{tu}) l_2 l_1^2$$

$$m = 0.935 \quad (\text{del inciso 2.1}).$$

$$w_{tu} = 0.988 \text{ T/m}^2$$

$$l_1 = 420 \text{ cm.}$$

$$l_2 = 430 \text{ cm.}$$

$$ME = 0.0935 (0.988) 4.3 \times (4.2)^2 = 7.0 \text{ t-m.}$$

### 3.3 CARGA POR METRO LINEAL

$$W = w_{tu} \times \text{ancho equiv.}$$

$$= \frac{988.2 \text{ k}}{\text{m}^2} \times 4.30 \text{ m} = 4.25 \text{ t/ml.}$$

### 3.4 MOMENTOS POSITIVOS EN EL CENTRO DEL CLARO SE OBTIENEN DE LA SIGUIENTE FÓRMULA:

$$M_E = M_S - 1/2 (M_I + M_D)$$

$M_I$ , momento final en el extremo izquierdo, en valor absoluto.

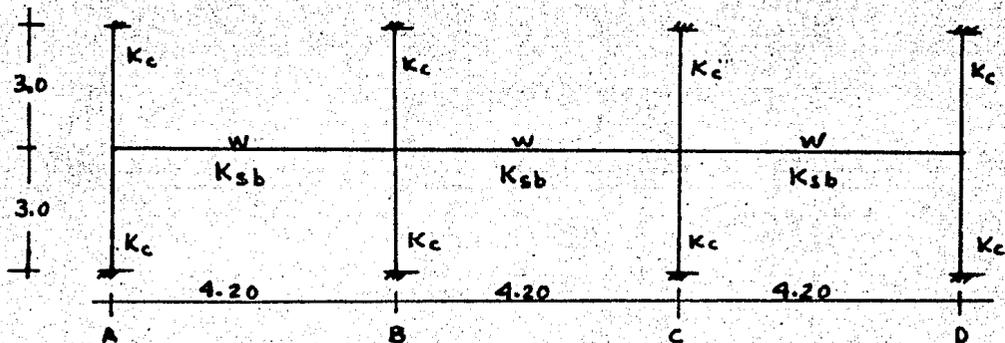
$M_D$ , Momento final en el extremo derecho, en el valor absoluto.

$M_S = w l^2 / 8$  (como viga simp. apoyada).

ANALISIS POR EL METODO DE CROSS

$W = 4.25 \text{ t/m}^2$

$K_c = 9.08 \times 10^8, K_{sb} = 5.49 \times 10^8 \text{ Kg-cm}$



CONCEPTO	CI	CS	TI
FD			0.65
FT			0.599
ME			+7.0
1D			-4.85
1T			0
2D			+1.06
2T			+0.63
3D			+0.24
Mf			+2.23
V <sub>i</sub>			+8.9
V <sub>h</sub>			-0.8
V <sub>f</sub>			+8.1

TD	CI	CS	TI
0.39			0.39
0.599			0.599
-7.0			-7.0
0			0
+2.72			0
-1.06			+1.06
			-0.63
-0.24			+0.24
-5.58			-6.23
-8.9			-8.9
-0.8			0
-9.7			-8.9

TD	CI	CS	TD
0.39			0.39
0.599			0.599
-7.0			+7.0
0			0
0			-2.72
+1.06			+1.06
			-0.63
+0.24			+0.24
-6.23			+5.58
-8.9			+8.9
0			+0.8
-8.9			+9.7

TD	CI	CS
0.65		
0.599		
-7.0		
+4.85		
0		
+0.63		
-0.24		
-2.23		
-8.9		
+0.8		
-8.1		

\* M(+)

+5.5

+3.0

+5.0

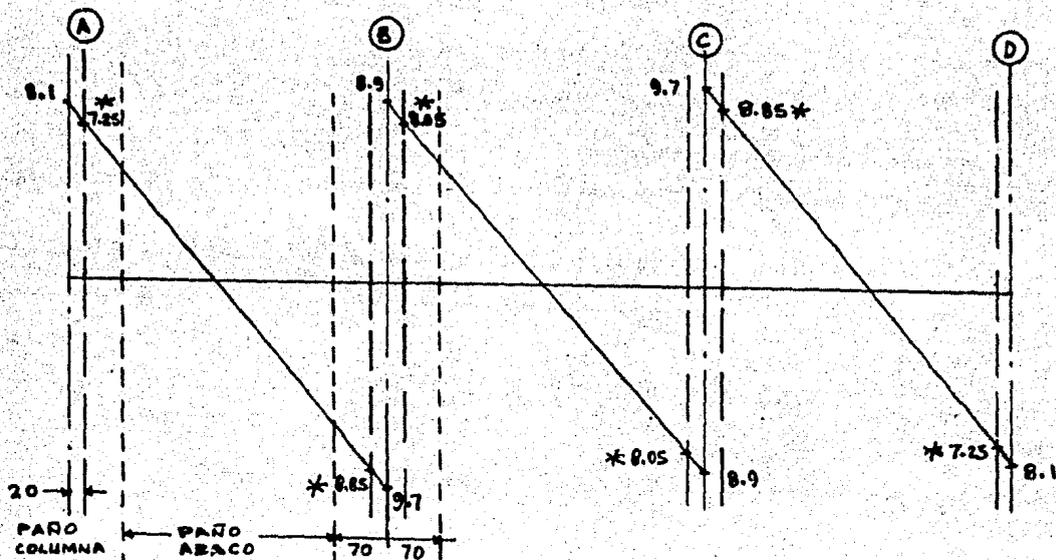


FIG. 4.a

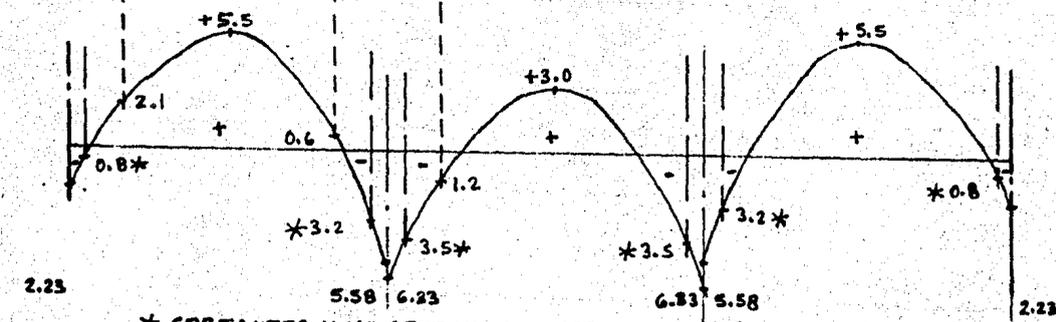


FIG. 4.b

\* CORTANTES Y MOMENTOS ULTIMOS DE DISEÑO

NOTA. Cuando los momentos en los extremos no son iguales, el momento máximo en el claro, no se presenta en el centro, pero su valor es cercano al encontrado en ese punto.

\* Cálculo de los momentos positivos en el centro del claro.

$$M (\text{t-m})_{AB} = \frac{4.25 (4.2)^2}{8} - \frac{(2.23 + 5.58)}{2} = 5.5 \text{ t-m.}$$

$$M (\text{t-m})_{BC} = \frac{4.25 (4.2)^2}{8} - \frac{(6.33 + 6.33)}{2} = 3.0 \text{ t-m.}$$

#### 4. DIAGRAMAS DE CORTANTE Y MOMENTO (FIGS. 4.A Y 4.B).

Los cortantes y momentos se toman en los paños de columnas. -  
Los momentos deben estar comprendidos en una distancia que sea  $0.175 l_1$  del centro de los apoyos interiores (SEC. 13.7.7.1)

o sea  $\frac{C_1}{2} \leq 0.175 l_1$  (SEC. 11.11).

$$\Rightarrow \frac{40}{2} \leq 0.175 (420) = 73.5 \text{ bien.}$$

#### 5. MOMENTOS DE DISEÑO

Se tienen en la fig. 4.b y deben cumplir las especificaciones de la SEC. 13.7.7.4

$$M_o = \frac{w_{tu} l_2 l_n^2}{8} = 0.988 \times 4.3 (3.8)^2 = 7.7 \text{ t-m (EC. 13.3)}$$

$$l_n = 3.8 > 0.65 l_1 = 0.65 (4.2) = 2.7 \text{ bien}$$

donde:  $l_n$  es de paño a paño de columnas.

claro extremo :  $M (+) + (M_I + M_D) / 2$

$$5.5 + (0.8 + 3.2) / 2 = 7.5 < 7.7 \text{ bien}$$

claro interior:  $3.0 + (3.5 + 3.5) / 2 = 6.5 < 7.7 \text{ bien}$

## 6. DISTRIBUCIÓN DE LOS MOMENTOS DE DISEÑO (A PAÑO DE COLUMNA)

Esta distribución se hace usando las figuras 3.16 y 3.17 entrando con los siguientes parámetros:

	A			B			C			D
	CLARO EXTREMO			CLARO INTERIOR			CLARO EXTREMO			
MOMENTO	0.80	5.5	3.2	3.5	3.0	3.5	3.2	5.5	0.80	
% F. Col.	100	60	75	75	60	75	75	60	100	
% F. Cent.	0	40	25	25	40	25	25	40	0	
MOMENTOS DISTRIBUIDOS										
F. Col.	0.80	3.3	2.4	2.6	1.8	2.6	2.4	3.3	0.80	
F. Cent.	0	2.2	0.8	0.9	1.2	0.9	0.8	2.2	0	

$$l_2/l_1 = 430/420 \approx 1.0$$

$$\alpha_1 = 0, \text{ ya que no hay vigas, y } \alpha_1(l_2/l_1) = 0$$

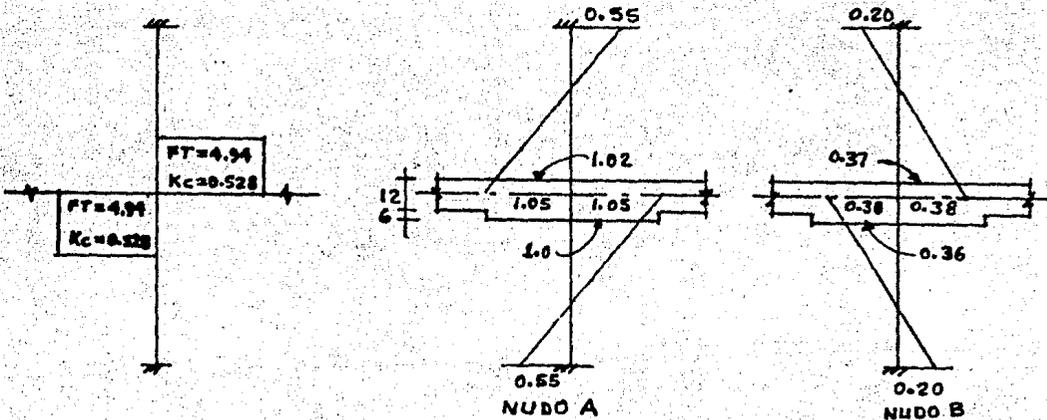
$\beta_t = 0$ , por no haber elemento rigidizante en el extremo, perpendicular a la dirección en estudio.

7. MOMENTOS EN LAS COLUMNAS.

Columna exterior: momento no equilibrado (nudo A) = 2.23 t-m

Columna interior: momento no equilibrado (nudo B) = 0.75 t-n

donde: 0.75 = 6.33 - 5.88



Nudo A

$$FD_A = \frac{K_c}{K_c + K_c + K_t}$$

$$= \frac{9.08}{9.08 + 9.08 + 1.23} = 0.47$$

$$M = 0.47 \times 2.23 = 1.05 \text{ t-m}$$

$$M_{sup} = 1.05 \times 0.528 = 0.55$$

$$M_{inf} = 0.55$$

Nudo B

$$FD_B = \frac{K_c}{K_c + K_c}$$

$$= \frac{9.08}{9.08 + 9.08} = 0.5$$

$$M = 0.5 \times 0.75 = 0.38 \text{ t-m}$$

$$M_{sup} = 0.38 \times 0.528 = 0.20 \text{ t-m}$$

$$M_{inf} = 0.20 \text{ t-m}$$

## 8. ESFUERZOS CORTANTES DESARROLLADOS POR LA TRANSFERENCIA A LA COLUMNA DEL MOMENTO NO EQUILIBRADO

De la sec. 11.12.2.4 del ACI en sus comentarios se tiene que el esfuerzo cortante es:

$$V_{u_C} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u}{j/c}$$

$$\delta \quad V_{u_{C'}} = \frac{V_u}{A_c} - \frac{\gamma_v M_u}{j/c'}$$

dónde:  $A_c$ ,  $c$ ,  $j/c$ ,  $j/c'$ ; se tienen de la gráfica (\*) y  $\gamma_v = 0.40$  de la gráfica 3.2.1.

### 8.1 REVISIÓN EN LA COLUMNA EXTERIOR 2-A, QUE CORRESPONDE AL CASO III DE LA GRÁFICA 3.2.2

$$\text{De análisis} \quad \begin{cases} V_u = 7.25 \text{ t-m} \\ M_u = 0.8 \text{ t-m} \end{cases}$$

del caso III.

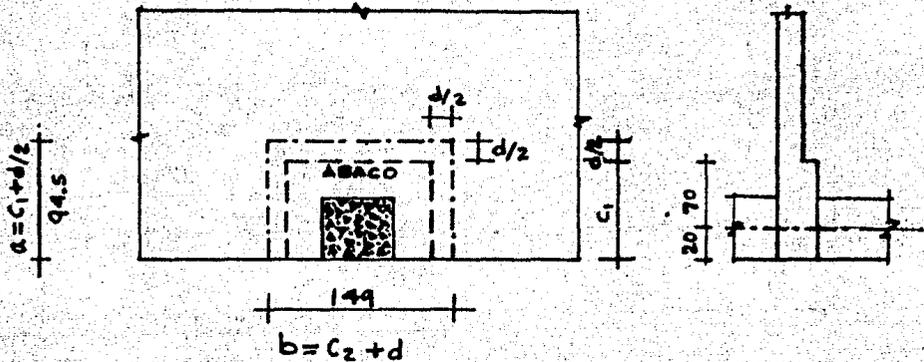
$$A_c = (2a + b)d$$

$$j/c = [2ad(a+2b) + d^3(2a+b)/a] / 6$$

$$j/c' = [2a^2d(a+2b) + d^3(2a+b)] / [6(a+b)]$$

$$c = a^2 / (2a + b).$$

\* GRÁFICA ANTERIOR 3.2.2



sustituyendo valores:

$$AC = (2a + b) d = 2 \times 94.5 + 149) 9 = 3042 \text{ cm}^2.$$

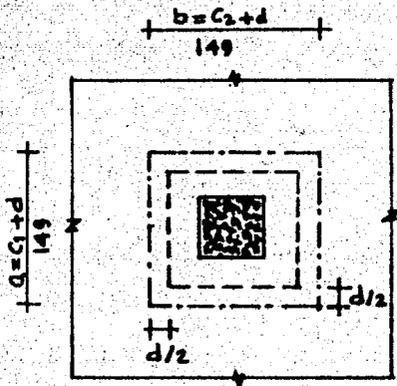
$$j/c = \left[ \frac{2(94.5) \cdot 9 \cdot (94.5 + 2 \times 149) + 9^3 (2 \times 94.5 + 149)}{94.5} \right] / 6 = 111,708.32 \text{ cm}^3.$$

$$j/c' = \left[ \frac{2(94.5)^2 \cdot 9 \cdot (94.5 + 2 \times 149) + 9^3 (2 \times 94.5 + 149)}{6(94.5 + 149)} \right] = 43,352.92 \text{ cm}^3$$

$$V_{u_c} = \frac{7250}{3042} + \frac{0.40 \times 0.8 \times 10^5}{111,708.32} = 2.7 \text{ Kg/cm}^2 \text{ rige}$$

$$V_{u_{c'}} = \frac{7250}{3042} - \frac{0.40 \times 0.8 \times 10^5}{43,352.92} = 1.6 \text{ Kg/cm}^2.$$

## 8.2 REVISIÓN DE LA COLUMNA INTERIOR 2-B CASO IV DE LA GRÁFICA 3.2.2



En donde:

$$A_c = 2(a+b)d$$

$$= 2(149 + 149)9 = 5364 \text{ cm}^2.$$

$$j/c = j/c' = [ad(a+3b) + d^3] / 3$$

$$= 149 \times 9 (149 + 3 \times 149) + 9^3 / 3$$

$$= 266,655 \text{ cm}^3.$$

$$V_u = 8.85 \text{ T y } M_u = 3.2 \text{ T-m.}$$

$$V_{uc} = \frac{8850}{5364} + \frac{0.40 \times 3.2 \times 10^5}{266,655}$$

$$= 1.65 + 0.48 = 2.13 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$V_{uc} = 1.65 - 0.48 = 1.17 \text{ Kg/cm}^2.$$

de donde se tiene que el cortante que rige es el del caso III, donde  $V_{uc} = 2.7 \text{ Kg/cm}^2$ .

### 8.3 REVISIÓN DEL CORTANTE (SEC. 11.12.2.4)

$$1) V_p = \frac{\phi (2 + \frac{4}{\beta_c})}{1.57} 0.27 \sqrt{f'c}$$

$$= \frac{0.85 (2 + \frac{4}{1.57})}{1.57} 0.27 \sqrt{250} = 16.5 > 2.7 \text{ bien}$$

$$2) V_p = 1.1 \sqrt{f'c}$$

$$= 1.1 \sqrt{250} = 17.4 > 2.7 \text{ bien.}$$

$\beta_c = \frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}}$ , de la sec. crítica del caso III donde rige el cortante.

$$= \frac{149}{94.5} = 1.57$$

con lo que se tiene, que la losa con abaco y las dimensiones consideradas, no necesitan refuerzo por cortante.

### 9. DISEÑO POR FLEXIÓN

Para este diseño se tienen del punto 6, los momentos distribuidos, con los que se formará una tabla para el diseño de la losa.

La separación del refuerzo por flexión, se tiene de las restricciones siguientes:

$$S \left\{ \begin{array}{l} 3h \\ 45 \\ b/\#Vs \end{array} \right\} \text{ SEC. 7.65 rige la menor.}$$

Esta separación resulta a veces muy grande y además en la construcción se debe seguir una cierta modulación, o sea una separación práctica ( $S_p$ ), recomendándose que  $S_p \leq 30$  cm.

Además la SEC. 13.4.2 del reglamento dice:

$S \leq 2h$  en la sec. crítica.

También se necesita una cantidad mínima de acero por contracción y temperatura.

$$P_{min_t} = 0.002$$

		(A)		(B)	
PAJO COL.	$M_1$	0.8	5.5	3.2	3.5
PAJO ABACO	$M_2$	-	5.5	-	1.2
	% F. Col	100	60	75	75
	% F. Cent.	0	40	25	25

} VER DIAGRAMA DE MOMENTOS

MOMENTOS DISTRIBUIDOS

F. Col	$M_1$	0.8	3.3	2.4	2.6	1.8
	$M_2$	-	3.3	-	0.9	1.8
F. Cent.	$M_1$	0	2.2	0.8	0.9	1.2
	$M_2$	-	2.2	-	0.3	1.2

Para el diseño de la losa, se debe considerar que el momento no equilibrado (MN.E.) entre losa y columna, se transfiere por excentricidad del cortante (SEC. 11.12.2) y por flexión (SEC. 13.3.4).

La fracción del MN.E. por flexión, lo toma un ancho de  $C_2 + 3h$ , - válido sólo para M (-).

## DISEÑO POR FLEXION DE LA FRANJA DE COLUMNA

FRANJA  $C_2+3h$

(A)=(B) (B)=(C)

$M_1$ : MOM. PARO DE COLUMNA

(A) \* (B) \*

$M_2$ : MOM. PARO DE ABACO

(A) \* (B) \*

MOMENTO	0.48	0.18
h	18	18
d	15	15
$b = C_2 + 3h$	94	94
$Q = M/bd^2f'_c$	0.009	0.0034
$\rho$	0.009	0.0034
$P = \rho f'_s / f_y$	0.002	0.002
$A_s = \rho b d$	2.82	2.82
# VARILLAS	3#4	3#4
$A_{sREAL}$	3.81	3.81
S	31	31
$S_{REAL}$	25	25

0.16	3.3	RIGI	1.21	1.8
18	12		18	12
15	9		15	9
60.5	215		60.5	215
0.0047	0.076		0.036	0.041
0.0047	0.076		0.036	0.041
0.002	0.0045		0.002	0.0024
1.81	8.70		1.81	4.64
2#4	7#4		2#4	4#4
2.54	8.9		2.54	5.08
30.2	30.7		30.2	36

—	3.3	—	0.36	1.8
	12		12	12
	9		9	9
	215		60.5	215
<p style="text-align: center;">RIGEN LOS MOMENTOS <math>M_1</math></p>				

$M_{NO\ EQ.} = M Y_p$   
 $M_{(A)=(B)} = 0.3 \times 0.6 = 0.18$   
 $M_{(B)=(C)} = 0.3 \times 0.6 = 0.18$   
 $s \begin{cases} 3h \\ b/\#V_s \end{cases}$

$s \begin{cases} 3h \\ 45 \\ b/\#V_s \end{cases}$

\* VER SIGUIENTE HOJA

APOYO

MOMENTO

Ⓐ

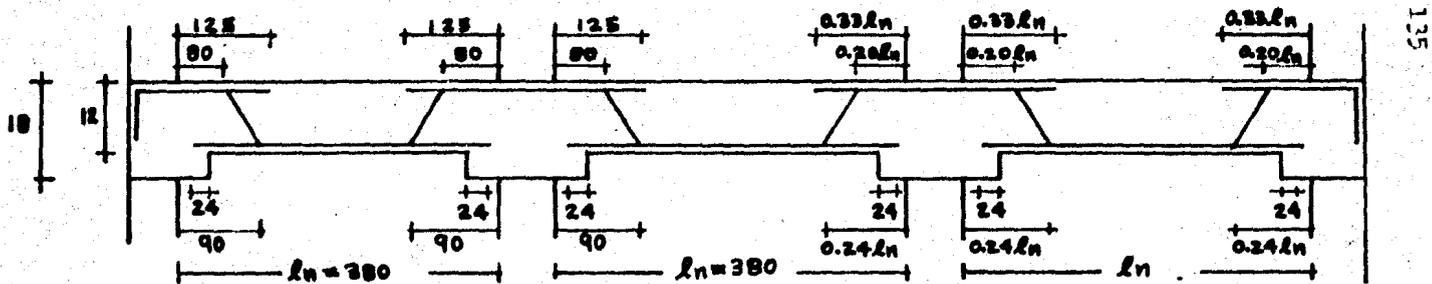
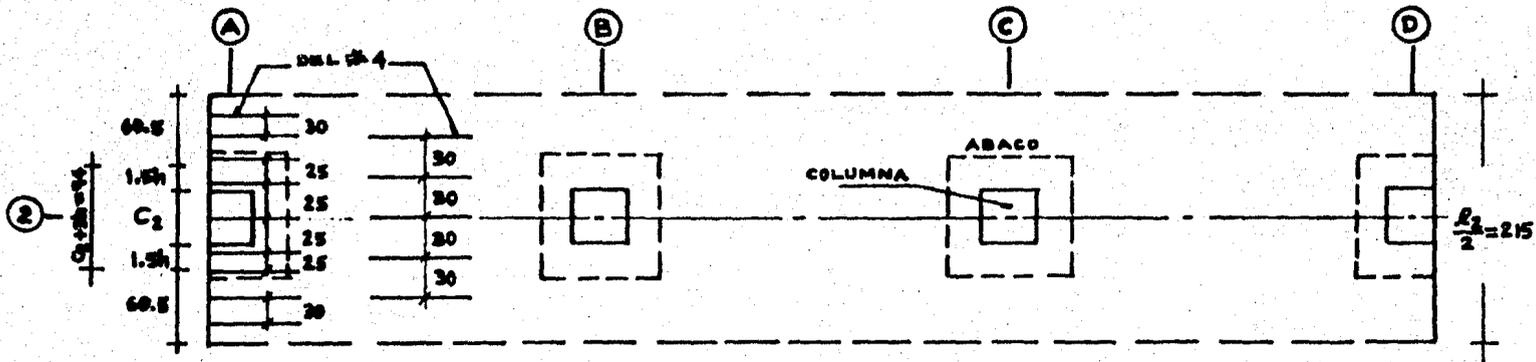
$$\frac{m_1 - M_{N.E.}}{2} = \frac{0.8 - 0.48}{2} = 0.16 \text{ T-m}$$

Ⓑ

$$\frac{m_1 - M_{N.E.}}{2} = \frac{2.6 - 0.18}{2} = 0.18 \text{ T-m}$$

Ⓒ

$$\frac{m_2 - M_{N.E.}}{2} = \frac{0.9 - 0.18}{2} = 0.36 \text{ T-m}$$



ARMADO CON VARILLAS DEL #4

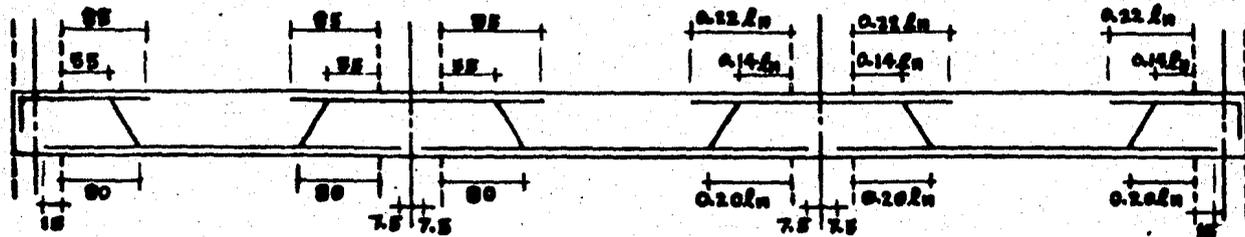
FRANJA DE COLUMNA

**DISEÑO POR FLEXION  
DE LA FRANJA CENTRAL  
M, I PAÑO DE COLUMNA**

(A)

(B)

MOMENTO	0	2.2	RIGE	0.9	1.2
<b>h</b>	12	12		12	12
<b>d</b>	9	9		9	9
<b>b = l<sub>s</sub> / 4</b>	9	9		9	9
<b>q = M / b d<sup>2</sup> f<sub>c</sub></b>	0	0.10		0.04	0.06
<b>q</b>	0	0.11		0.04	0.06
<b>p = q f<sub>s</sub> / f<sub>c</sub></b>	0.002	0.0023		0.0023	0.0026
<b>A<sub>s</sub> = p b d</b>	1.93	6.29		2.23	3.48
<b># VARILLAS</b>	2#4	5#4		2#4	3#4
<b>A<sub>SREAL</sub></b>	2.54	6.35		2.54	3.81
<b>S</b>	36	21.5		36	35.8
<b>S<sub>REAL</sub></b>	30	20		30	30



## CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo, presenta los fundamentos en que se basan los métodos de diseño de losas, contemplando aquellos casos en que el peralte de las trabes está restringido, o no lo hay. Estas losas son propias para salvar claros relativamente grandes, y se emplean en estructuras de; oficinas, hoteles, almacenes, losas de cimentación, etc.

La teoría expuesta se apoya en los estudios realizados por investigadores que dieron aportaciones al código del ACI. Cabe destacar que las gráficas para la distribución de momentos, deducidas por Sutherland y Appleton, no tuvieron mucha aceptación, ya que conducen a errores de aproximación al hacer la lectura. Por esta razón se adiciona la tabla de la distribución de momentos del ACI-77, así como unas ecuaciones en función de los parámetros de rigidez  $\alpha$  y  $\beta$ t.

Se deduce de lo descrito anteriormente, que es recomendable para el caso de aberturas que se dejan para escaleras y ductos de servicio, que estos se coloquen de preferencia, fuera del perímetro de la sección crítica y en la intersección de las franjas centrales. Además, el acero que se interrumpe en una abertura, se debe distribuir en todo lo ancho de ésta.

Finalmente, se dan algunas ventajas y desventajas que se tienen en estas losas.

**Ventajas:**

Se reduce el altura de entrepiso, y por tanto la de la estructura.

Se reduce la carga muerta.

La cimbra resulta más fácil de colocar.

Se facilita la colocación de las instalaciones, debido a que hay pocas vigas o bien se eliminan.

**Desventajas:**

Los análisis que aquí se presentan, son para carga vertical.

Si actúa carga lateral, la estructura debe rigidizarse con muros o contraventeo, para evitar excesivos desplazamientos de entrepiso.

**BIBLIOGRAFIA**

1. Reinforced concrete slabs, de: park, R y gamble
2. Diseño de estructuras de concreto conforme al reglamento ACI-318-77, tomo 2 edición del IMCYC.
3. Reglamento de las construcciones de concreto reforzado - ACI-318-77.
4. Aspectos fundamentales del concreto reforzado.

**Autores:**

Oscar M. González Cuevas  
Francisco Robles  
Juan Casillas  
Roger Díaz de Cossio