



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

283  
117

PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS  
DE ARMADURAS EN 3 DIMENSIONES

## TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de  
INGENIERO CIVIL

presenta

**RODOLFO LOPEZ BUENDIA**

México, D. F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

I.- Introducción.	1
II.- Método Matricial Usado.	3
II.1.- Generalidades.	3
II.2.- Selección de un método de Análisis.	5
II.3.- Aplicación del Método de las Rigideces en Armaduras de Tres Dimensiones.	7
III.- Solución al Sistema de Ecuaciones.	36
III.1.- Descripción General.	37
III.2.- Obtención de $L$ y $L^T$ .	39
III.3.- Proceso de Solución del Sistema de Ecuaciones.	42
IV.- Descripción del Programa.	43
IV.1.- Programa Principal.	47
IV.2.- Subrutinas.	56
IV.3.- Entrada y Salida de Datos.	60
V.- Programa AATD.	69
V.1.- Programa Principal.	69
V.2.- Subrutinas.	71
V.3.- Listado General de Instruccio- nes del Programa AATD.	72

VI.- Ejemplo de Aplicación.	81
VI.1.- Ejemplo para Verificación de Resultados.	81
VI.2.- Ejemplo Práctico.	98
Bibliografía.	121

## I.- INTRODUCCION.

Entre los logros de mayor alcance en la ingeniería estructural está la capacidad de analizar automáticamente - casi todo tipo de estructuras, con un elevado grado de -- precisión y a un costo razonable. La aparición de la computadora digital ha hecho posible este perfeccionamiento.

El propósito de este trabajo es precisamente la utilización de la computadora electrónica digital en la solución de un tipo muy particular de estructuras: las armaduras en tres dimensiones. Las armaduras con nudos articulados constituyen una forma estructural común en la práctica del diseño de estructuras, se usan en puentes, techos de claros grandes y en muchas aplicaciones especiales en que se soporten maquinaria y equipo.

Se desarrollará un programa de computadora que arroje como resultados, una vez definida la forma de la armadura, las fuerzas a las que estará sujeta cada barra de dicha estructura, los desplazamientos en los nudos (puntos donde se unen varias barras y en donde se consideran aplicadas las solicitaciones) y las reacciones en los apoyos dado un sistema de fuerzas o solicitaciones específicas.

El lenguaje de computadora utilizado para la elaboración del citado programa será el FORTRAN IV, por considerarse especialmente adecuado para los fines perseguidos. Se utilizará una computadora Burroughs B-6700, sistema -- computacional de gran capacidad y que se encuentra localizado en el Centro de Servicios de Computo del Instituto -- de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Sistemas de -

la U.N.A.M., en Ciudad Universitaria.

## II.- METODO MATRICIAL USADO.

### II.1.- GENERALIDADES.

Al aparecer las computadoras, se crearon de inmediato métodos de análisis adecuados para el cálculo en computadoras.

Existen dos métodos principalmente usados en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, los cuales son: el Método de las Flexibilidades (o de las Fuerzas) y el Método de las Rigideces (o de Los Desplazamientos). Tanto el Método de las Fuerzas como el de los Desplazamientos utilizan relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas que existen en una estructura.

A continuación se presenta una descripción general, bastante breve y somera, sobre la forma en que se plantea cada uno del métodos antes mencionados, sin intentar agotar de ninguna manera cada tema y con el único fin de proporcionar una visión de las alternativas de solución que tienen.

En su forma más simple, el Método de las Fuerzas tiene como objetivo la determinación de un conjunto cuidadosamente elegido de fuerzas desconocidas y pares llamados "redundantes", las cuales no pueden ser obtenidas con las ecuaciones de la estática. El número de fuerzas redundantes se llama "Grado de Indeterminación Estática" de la estructura. La esencia del método consiste en la superposición de los desplazamientos, que se expresan en función de sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Las --

magnitudes de las fuerzas desconocidas se determinan con los desplazamientos conocidos o con las condiciones de -- compatibilidad de deformaciones. Una vez evaluadas las re-- dundantes, las ecuaciones de equilibrio se pueden usar pa-- ra determinar todas las fuerzas internas, momentos y pa-- res necesarios en el proceso de diseño. En una estructura con " $N$ " redundantes, los desplazamientos se deben calcu-- lar para  $(N+1)$  sistemas de carga, o sea, un análisis para la carga real y " $N$ " análisis para los efectos de cada una de las redundantes. Para satisfacer la compatibilidad es necesario establecer y resolver " $N$ " ecuaciones simultá-- neas lineales, en donde cada ecuación expresa una condi-- ción conocida de los desplazamientos finales en la estruc-- tura cargada.

En el Método de las Rigideces es necesario resolver -- primero un conjunto de los desplazamientos desconocidos -- de la estructura, en vez de las fuerzas redundantes desco-- nocidas. Las cantidades desconocidas en el Método de las Rigideces son los desplazamientos de la estructura, que -- definen completamente su perfil deformado ante un siste-- ma de cargas externas. El análisis de una estructura con " $N$ " ecuaciones de equilibrio que son funciones lineales -- de los " $N$ " desplazamientos desconocidos. Cada ecuación -- expresa el equilibrio entre una fuerza externa y las fuer-- zas internas, expresadas en función de desplazamientos -- desconocidos, de los elementos de la estructura afectados por dicha carga.

Cualquier estructura se puede analizar mediante cual-- quiera de los dos procedimientos que se han esbozado muy

someramente en los párrafos anteriores, aunque, para una estructura determinada, alguno de los dos es más adecuado o eficiente dependiendo de las características particulares del modelo por analizar.

## II.2.- SELECCION DE UN METODO DE ANALISIS.

Los procedimientos para el análisis de un sistema estructural indeterminado, por cualquiera de los dos métodos básicos (Rigideces o Flexibilidades), revelan que --- existen muy pequeñas diferencias en la filosofía fundamental de ambos. Por esta razón la elección de un método sobre otro depende de muchos factores incluyendo el tipo de estructura en cuestión, la facultad para hacer análisis basados en la computadora y la preferencia personal del ingeniero responsable del análisis. Sin embargo se pueden hacer resaltar algunos detalles que ayudan en el momento de escoger el proceso de análisis para implementar en un programa de computadora.

La elección de las redundantes para el Método de las Fuerzas es difícil de automatizar, ya que hay tantas alternativas como redundantes y la selección de ellas tiene un efecto significativo sobre la naturaleza y cantidad del esfuerzo de cálculo requerido. Esto representa una gran dificultad cuando se van a analizar sistemas a gran escala por medio de los programas de computadora para uso

general.

Con el Método de las Rigideces no hay duda sobre la selección de las cantidades desconocidas, ya que sólo existe una posible estructura restringida. Las incógnitas son siempre los desplazamientos nodales.

En el Método de las Fuerzas, la dificultad se eliminaría con la elaboración de programas formulados para un tipo especial de estructura. Sin embargo, la elección de la estructura primaria particular (estructura sin redundantes) puede verse influida por los tipos de carga que se vayan a considerar, ya que éstos también pueden afectar la precisión. Las tendencias actuales indican que es más conveniente usar programas generales para el análisis estructural.

Existen, naturalmente, ciertas ventajas y desventajas en ambos tipos de solución, sin embargo si se va a usar una computadora para el análisis, la manera en que el conjunto de ecuaciones requeridas sea formulado, llega a ser el factor más importante en la selección del Método de Análisis.

Para tener un programa efectivo, los cálculos necesarios para desarrollar las ecuaciones para el análisis, no deben ser peculiares para una geometría particular, de manera que cada estructura llegue a ser una operación única, deberán ser repetitivos en su naturaleza. El método de análisis seleccionado para programarse, debe requerir tan pocas decisiones del usuario como sea posible y ser general en su aplicación.

El Método de las Rigideces sigue un procedimiento bastante organizado, bien definido y con muy pocas variaciones dependiendo de la estructura analizada, por lo que la mayor parte de los programas usados en el análisis estructural se basan en él aunque, en general, produce más incognitas que en el Método de las Fuerzas. Esta aparente desventaja se compensa, en mucho, con la generalidad y simplicidad de los programas obtenidos.

En este trabajo, cuyo fin es el de la aplicación de la computadora electrónica al análisis de un tipo de estructura en especial las armaduras, se implementará el Método de las Rigideces por considerarse el más adecuado, según las razones antes expuestas.

### II.3.- APLICACION DEL METODO DE LAS RIGIDECES EN ARMADURAS DE TRES DIMENSIONES.

#### II.3.a).- BREVE HISTORIA DEL METODO.

El Método Directo de las Rigideces comenzó a desarrollarse en forma organizada, a partir de la década de 1950 como resultado de la aparición de la computadora digital.

Al principio de dicha década, Samuel Levy sugirió algunas de las ventajas de un método de los desplazamientos usando coeficientes de influencia para el análisis de las estructuras de los aviones. Al mismo tiempo, varias otras personas estaban elaborando una variedad de procedimientos para el análisis con base en métodos matriciales, con objeto de aprovechar la computadora.

Este confuso conjunto de métodos se consolidó algo -- con el tiempo. Hacia 1954 Turner, Clough, Martin y Topp -- presentaron el primer tratamiento del Método Directo de -- las Rigideces. Demostraron que la matriz de rigideces, un ordenamiento de los coeficientes de influencia de rigidez que se usan para determinar los desplazamientos, se pue-- den plantear como la superposición de las rigideces de -- los elementos o miembros ("Regla de la Suma").

### II.3.b).- CARACTERÍSTICAS DE LAS ARMADURAS.

La característica principal de una armadura, es que -- su funcionamiento está controlado por las deformaciones -- axiales de las barras, esto quiere decir que todas las ba -- rras trabajan exclusivamente a fuerza axial, lo cual se -- logra trabajando con todas las barras que forman la es--- tructura doblemente articuladas y colocando las fuerzas -- que actuen en los nudos.

Por lo general se supone que la armadura está unida -- por pasadores, sin rozamiento. En circunstancias normales aún si llega a ocurrir alguna flexión debido a nudos par-- cialmente rígidos, el funcionamiento de la armadura no se afecta gran cosa.

Las armaduras se analizan con facilidad por el Método de las Rigideces. Una armadura en el espacio tiene sólo -- tres grados de libertad en cada nudo: traslación en cada una de las direcciones de las coordenadas del sistema de referencia (sistema global) que se asocie a la estructu-- ra en cuestión. Por lo tanto, la matriz de rigideces bási

ca del miembro se determina definiendo tres grados de libertad en cada uno de los extremos de las barras de la armadura.

La solución de dicho sistema estructural comprenderá, en consecuencia, la obtención de la fuerza axial (tensión o compresión) que esté actuando en cada barra que forma la estructura, así como de los desplazamientos de los nudos y las reacciones en los apoyos.

### II.3.c).- DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE LAS RIGIDECES.

Como ya se dijo anteriormente, el Método Directo de las Rigideces es un procedimiento muy organizado y conceptualmente sencillo para el análisis de todo tipo de estructuras. La implementación del mismo se lleva a cabo con facilidad y en forma adecuada usando un planteamiento matricial.

A continuación se describirá dicho planteamiento, así como las matrices y vectores que en él intervienen.

En primer lugar es conveniente definir algunos términos utilizados para describir estructuralmente una armadura, como son: barra, nudo y apoyo.

Por "BARRA" se entenderá cada uno de los elementos estructurales encargados de transmitir las fuerzas externas o solicitaciones a que se encuentra sujeta una armadura, a los apoyos de la misma. Dichos elementos poseen un eje longitudinal recto, que pasa por el centro de gravedad de su sección transversal y están limitados por dos nudos o por un nudo y un apoyo. Estos extremos de la barra deben ser articulados. La sección transversal de cada

una de las barras deberá ser constante a todo lo largo de la pieza.

En la figura II.1, se muestra la forma en que se presentarán las barras de una armadura.

En esta figura, A y B representan los extremos inicial y final respectivamente de la barra, la cabeza de flecha señala al extremo final. Cada barra tiene un número de identificación  $i$  que la distingue de los demás elementos que forman la estructura. Las barras siempre serán representadas por líneas rectas;  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_z$  designan los ángulos que forma la barra con cada uno de los ejes globales que sirven para dar orientación y localización a la armadura.

Los "NUDOS" serán aquellos puntos de la estructura donde se unen los extremos de dos o más barras. Se entiende que estos puntos tienen un desplazamiento libre en cualquier dirección y que forman articulaciones.

Los nudos dentro de una armadura tendrán una numeración secuencial y serán los únicos lugares en donde se considerarán aplicadas las fuerzas externas que actúan en la estructura.

Los "APOYOS" serán aquellos puntos donde se unen dos o más barras con los elementos encargados de transmitir al suelo o a otras estructuras las fuerzas o solicitaciones externas que actúan en una armadura.

Los apoyos no tienen desplazamiento en ninguna dirección o solo tienen desplazamiento en una o dos direcciones paralelas a los grados de libertad de la estructura, pero no en las tres direcciones. Cuando el apoyo no tiene desplazamiento en ninguna dirección se denomina "Apoyo --

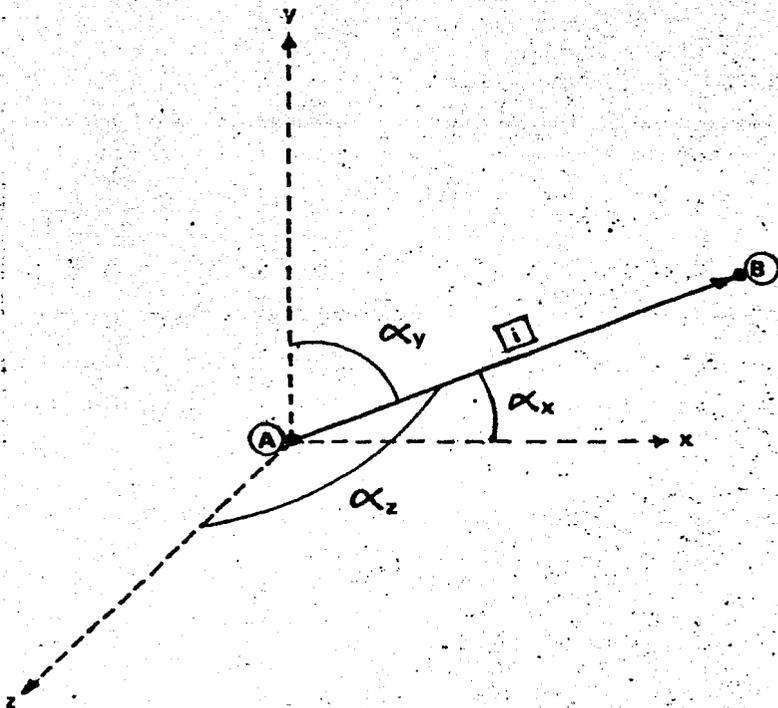


Figura II.1

Completo" y no se toma como un nudo más de la armadura; - en el caso en que tenga algún tipo de desplazamiento se dice que es un "Apoyo Incompleto" y se trata como un nudo más de la armadura, pero con ciertas restricciones de movimiento.

El número de barras que tenga una armadura se designará como " $n_B$ ", el número de nudos que posea será " $n_N$ " y el número de apoyos por " $n_A$ ".

#### VECTORES ESTRUCTURALES.-

Se trata en general de matrices de una sola columna y que en ciertos casos se transforman en matrices de más columnas.

La determinación de estos vectores estructurales constituye el objetivo principal del análisis estructural ya que, una vez que se conocen, se puede establecer el estado de esfuerzos y deformaciones a que se encuentra sujeta una armadura ante un sistema dado de sollicitaciones externas.

Los principales vectores usados en el análisis estructural son los siguientes.

a).- Vector de Fuerzas Externas  $\{F\}$ .

Está constituido por todas y cada una de las fuerzas externas que se encuentran actuando en los nudos de una armadura. Su configuración general es la siguiente:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{nNx} \\ F_{nNy} \\ F_{nNz} \end{Bmatrix}$$

en donde  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  y  $F_{iz}$  representan el valor de las fuerzas aplicadas en el nudo ① en la dirección de cada uno de los ejes globales que orientan la estructura, el sentido de acción de cada fuerza estará determinado por el signo de la misma. En el caso de fuerzas cuya dirección de acción no sea paralela a alguno de los ejes globales, serán sus componentes respecto de dichos ejes lo que se incluirán en el vector de fuerzas.

Resulta obvio que el vector de fuerzas será de orden  $3n_N \times 1$ , aunque en forma general debería ser de  $3n_N \times NCC$ , - donde NCC es el número de condiciones de carga que actu-

en sobre la estructura. Esto quiere decir que cada columna representaría un conjunto dado de solicitaciones que actúan a un mismo tiempo.

Los valores de las fuerzas externas casi siempre son datos con los que se cuenta para el análisis.

b).- Vector de Desplazamientos de los Nudos  $\{d\}$ .

Este vector contiene los valores de los desplazamientos que sufre cada nudo de la armadura en cada una de las direcciones del sistema global de referencia, por lo tanto su forma general es:

$$\{d\} = \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n_x} \\ d_{n_y} \\ d_{n_z} \end{array} \right\}$$

en donde  $d_{ix}$ ,  $d_{iy}$  y  $d_{iz}$  son las magnitudes del desplazamiento del nudo (i) en cada dirección, y el sentido del mismo está dado por el signo que tenga el valor.

Nuevamente el tamaño del vector será de  $3n_N \times 1$ , pero si se tuvieran varias condiciones de carga el orden sería de  $3n_N \times NCC$  y cada columna de la matriz contendría el valor de los desplazamientos nodales en la condición de carga correspondiente.

Los valores de este vector en general son las incógnitas del análisis y son ocasionados por la acción de las fuerzas externas en los nudos.

c).- Vector de Fuerzas en las Barras  $\{p\}$ .

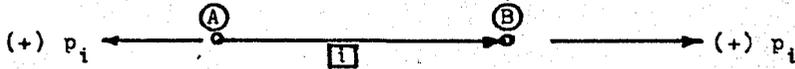
En párrafos anteriores se estableció que una de las características de las armaduras es que todos los elementos estructurales que las forman trabajan exclusivamente a fuerza axial. El vector  $\{p\}$  será el que contenga el valor de la fuerza axial actuante en cada una de las barras de la estructura; su configuración será la siguiente:

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{n_B} \end{array} \right\}$$

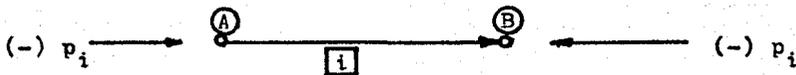
en donde  $p_i$  representa el valor de la fuerza a que se encuentra sujeta la barra  $[i]$ .

Para definir el tipo de fuerza axial actuante en una barra se adoptará la siguiente convención de signos:

El signo positivo (+) del valor, indicará que la fuerza es de Tensión.



El signo negativo (-) del valor, indicará que la fuerza es de Compresión.



La fuerza resultante en cada barra es, en general, -- una incógnita que resulta de la aplicación en los nudos -- de un sistema específico de fuerzas externas. Encontrar -- los valores de este vector es uno de los principales objetivos del análisis estructural, ya que son los que más directamente están involucrados en el diseño de la pieza -- que forma cada barra.

Para una sola condición de carga actuando en la estructura, el tamaño del vector  $\{P\}$  será  $n_B \times 1$ , para más -- condiciones de carga el tamaño será de  $n_B \times n_{CC}$ .

d).- Vector de Deformaciones de La Barra  $\{e\}$  .

La fuerza axial actuante en cada barra origina una -- deformación de la misma en la dirección de dicha fuerza,

ya sea acortamiento o alargamiento, cuyo valor constituye uno de los elementos del vector  $\{e\}$ . Por consiguiente el vector  $\{e\}$  se define como el conjunto de deformaciones -- axiales de las barras de una armadura, su forma general -- será:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n_B} \end{Bmatrix}$$

donde " $e_i$ " representa el valor de la deformación axial de la barra  $\boxed{i}$ . El vector  $\{e\}$  tendrá orden de  $n_B \times 1$  para -- una sola condición de carga y de  $n_B \times n_{CC}$  para más condicio -- nes.

Para mantener una congruencia con la definición de -- signos establecida para el vector  $\{o\}$ , se adoptará la -- siguiente convención respecto de la figura II.2.

El signo (+) del valor de  $e_i$  indicará alargamiento de la pieza.

El signo (-) del valor de  $e_i$  indicará acortamiento de la pieza.

Se asume la hipótesis de que estas deformaciones son tan pequeñas que no tiene influencia en el cálculo si se toma la longitud original del elemento,  $L_i$  en la figura -- II.2, o la que resulta después de la deformación,  $L_i \pm e_i$ .

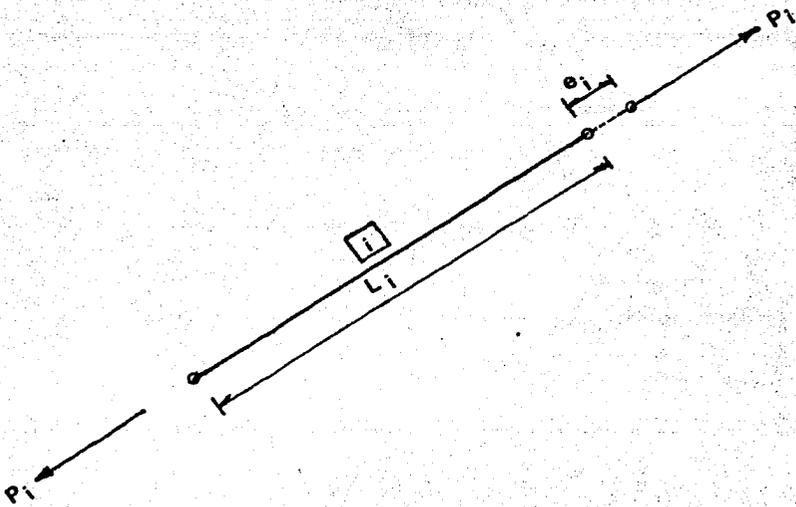


Figura II.2

PRINCIPIOS ESTRUCTURALES DEL METODO DE LAS RIGIDEZES.-

El desarrollo de este método de análisis esta basado en la aplicación de tres conceptos básicos y sumamente -- sencillos. Dichos fundamentos son: El Principio de Continuidad, El Principio del Comportamiento Elástico Lineal y, El Principio del Equilibrio Nodal. A continuación se describe brevemente cada uno de ellos.

El Principio de Continuidad o de la Compatibilidad de las Deformaciones establece que si se conocen los desplazamientos que sufren los nudos de una estructura, se pueden conocer las deformaciones que ocurren en cada elemento de la misma, ya que unos y otras están directamente -- relacionados. El desplazamiento de cada nudo origina una determinada deformación axial en cada una de las barras -- que concurren a él, que se obtiene multiplicando el valor de dicho desplazamiento por el coseno del ángulo que forma con la barra y se le asocia el signo que le corresponda según la convención establecida para las deformaciones. Así la deformación total de una barra estará dada -- por la suma de las deformaciones que origine cada uno de sus nudos extremos en ella:

$$e \quad \boxed{i} = d_{Ax} \cos \alpha_x + d_{Ay} \cos \alpha_y + d_{Az} \cos \alpha_z + \\ + d_{Bx} \cos \alpha_x + d_{By} \cos \alpha_y + d_{Bz} \cos \alpha_z \quad \text{Ec. III}$$

donde  $d_A$  y  $d_B$  representan el desplazamiento del nudo inicial y final, respectivamente, de la barra  $\boxed{i}$  en cada --

una de las direcciones de los ejes globales de referencia. Se asume, y es fácil de demostrar, que si los desplazamientos son pequeños cualquiera de ellos que sea perpendicular a una barra, no le origina deformación axial.

La ecuación II.1 se puede formar para cada una de las barras de la armadura, y todas las ecuaciones así creadas se pueden poner en una expresión matricial que sería:

$$\{e\} = [a] \{d\} \quad \text{--- Ec. II.2}$$

en donde  $[a]$  sería una matriz de orden  $n_B \times 3n_N$  llamada Matriz de Continuidad y que estaría compuesta por los valores de los cosenos correspondientes a cada barra, en cada renglón colocando ceros en los lugares correspondientes a los cosenos para los nudos que no delimitan a la barra. - Resulta evidente que la Matriz de Continuidad depende únicamente de la linealidad de la geometría de la estructura.

El principio del Comportamiento Elástico Lineal expresa que los materiales de que están formadas las barras de las armaduras se trabajarán en su rango elástico-lineal de la curva esfuerzo-deformación (fig. II.3) y que tienen la propiedad de ser isotrópicos y homogéneos, es decir, - que poseen las mismas características en todas las direcciones. Esto conduce a que sea válida la aplicación de la Ley de Hooke la cual considera que existe una relación lineal entre las fuerzas y deformaciones, o bien, entre esfuerzos y deformaciones unitarias como se muestra en el diagrama de esfuerzo-deformaciones unitaria de la figura II.3.

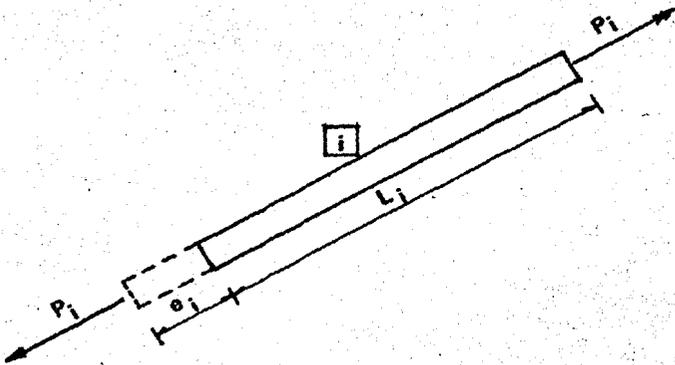
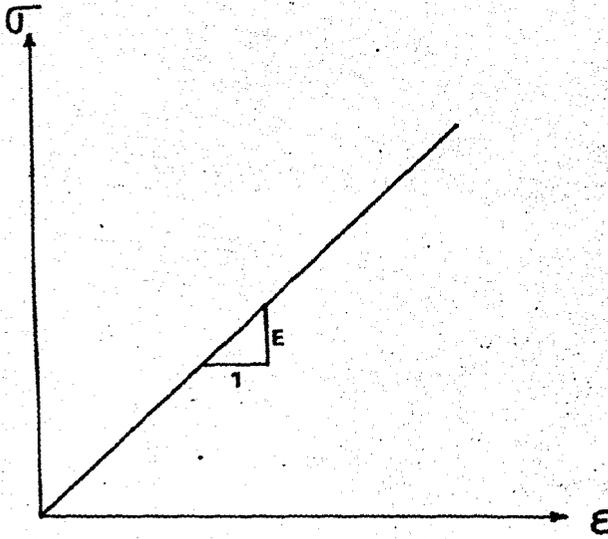


Figura II.3

en donde:

- $\sigma$  = Esfuerzo axial de una barra  
 $\epsilon$  = Deformación axial de la misma barra  
 $E$  = Pendiente de la recta y que constituye -  
 la constante de proporcionalidad, conoci-  
 da comunmente como Módulo de Young o Mó-  
 dulo de Elasticidad.

Del diagrama presentado en la figura II.3 se establece la siguiente ecuación.

$$\sigma_i = E \epsilon_i \quad \text{--- Ec. II.3}$$

Pero por la definición de cada concepto:

$$\sigma_i = \frac{P_i}{A_i} \quad \text{--- Ec. II.4}$$

$$\epsilon_i = \frac{e_i}{L_i} \quad \text{--- Ec. II.5}$$

si se designa por  $A_i$  al área transversal de la barra  $\boxed{i}$ .  
 Sustituyendo la Ec. II.4 y la Ec. II.5 en la Ec. II.3, se  
 tiene:

$$\frac{P_i}{A_i} = E \frac{e_i}{L_i}$$

o sea que:

$$P_i = \left( \frac{EA}{L} \right)_i e_i \quad \text{--- Ec. II.6}$$

A la relación  $(EA/L)_i$  se le conoce como Rigidez Axial de la barra  $\boxed{i}$  y se denomina por  $k_i$ , con lo que la ecuación II.6 se transforma en:

$$P_i = k_i e_i \quad \text{--- Ec. II.7}$$

Es obvio que ésta relación es única para cada barra e independiente de las demás barras de la armadura, por lo que existe una ecuación II.7 para cada una y todas ellas se pueden colocar en una sola ecuación matricial.

$$\{p\} = [k] \{e\} \quad \text{--- Ec. II.8}$$

En la ecuación II.8 la matriz  $[k]$  es una matriz diagonal y de orden  $n_B \times n_B$ , se le conoce como Matriz de Rigideces de las Barras y debe ser un dato para el análisis.

Por último, el Principio del Equilibrio Nodal establece que debe existir igualdad entre las fuerzas externas que actúan en un nudo y las fuerzas internas que se generan en las barras que concurren a ese nudo; si no existe fuerza externa en un nudo determinado, las fuerzas internas que actúan en las barras concurrentes a él deberán anularse unas con otras. Para lograr esta situación, se -

deben satisfacer simultáneamente tres condiciones de equilibrio que son:

$$\sum F_x = 0 \text{ ----- Ec. II.9}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ ----- Ec. II.10}$$

$$\sum F_z = 0 \text{ ----- Ec. II.11}$$

en donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  se refieren a los ejes globales respecto de los cuales está orientada la armadura. Las ecuaciones II.9, II.10 y II.11 deben cumplirse en cada nudo de la estructura e indican que las fuerzas internas de las barras que llegan al nudo deberán proyectarse al sistema global de referencia para poder efectuar las sumas respectivas. La fuerza actuante en cada barra se multiplica por el coseno del ángulo que forma con cada uno de los ejes globales para obtener la proyección correspondiente; para lograr congruencia entre las fuerzas externas y las proyección de las fuerzas internas, se adoptará el criterio de representar a las fuerzas internas de tensión como --- fuerzas que salen de los nudos y las fuerzas internas de compresión como fuerzas que llegan a los nudos. Así, para cada nudo se plantean las siguientes expresiones.

$$F_{Ax} - p_i \cos \alpha_{xi} - p_j \cos \alpha_{xj} - p_k \cos \alpha_{xk} - \dots = 0$$

$$F_{Ay} - p_i \cos \alpha_{yi} - p_j \cos \alpha_{yj} - p_k \cos \alpha_{yk} - \dots = 0$$

$$F_{Az} - p_i \cos \alpha_{zi} - p_j \cos \alpha_{zj} - p_k \cos \alpha_{zk} - \dots = 0$$

que se pueden transformar en:

$$F_{Ax} = p_i \cos \alpha_{xi} + p_j \cos \alpha_{xj} + p_k \cos \alpha_{xk} + \dots \text{ ---- Ec. II.12}$$

$$F_{Ay} = p_i \cos \alpha_{yi} + p_j \cos \alpha_{yj} + p_k \cos \alpha_{yk} + \dots \text{ ---- Ec. II.13}$$

$$F_{Az} = p_i \cos \alpha_{zi} + p_j \cos \alpha_{zj} + p_k \cos \alpha_{zk} + \dots \text{ ---- Ec. II.14}$$

en donde  $i, j, k, \dots$ , representan los números de identificación de las barras que concurren al nudo A. Las ecuaciones II.12, II.13 y II.14 planteadas para cada nudo se pueden agrupar y ser representadas por una expresión matricial del tipo:

$$\{F\} = [a]^T \{p\} \text{ ---- Ec. II.15}$$

en la cual los valores de los cosenos de todas las barras que no concurren a un nudo determinado se sustituyen por el valor de cero en los renglones correspondientes de la matriz  $[a]^T$ ; al sustituir en la ecuación II.15 los valores correspondientes a cada uno de los términos ahí mencionados, se observa que la matriz  $[a]^T$  corresponde a la matriz transpuesta de la Matriz de Continuidad, planteada en la ecuación II.2 en el desarrollo del primer principio estructural analizado, y también depende solo de la linealidad de la geometría en la armadura. La relación existente entre las matrices  $[a]$  y  $[a]^T$  se debe a que ambas son matrices de rotación, esto es, la Matriz de Continuidad gira los desplazamientos en ejes globales a deformaciones en ejes locales y la Matriz de Continuidad trans

puesta gira las fuerzas internas en ejes locales a fuer--  
zas externas en ejes globales.

Una vez así delineados los principios estructurales -  
en los que se basa el Método de las Rigideces, se pueden  
hacer algunos manejos con las expresiones que resultaron  
de cada uno de ellos.

Para empezar, si se sustituye la ecuación II.2 en la  
ecuación II.8 se obtiene:

$$\{p\} = [k] [a] \{d\} \text{ --- Ec. II.16}$$

y si ahora se sustituye la ecuación II.16 en la ecuación  
II.15 se llega a lo siguiente:

$$\{F\} = [a]^T [k] [a] \{d\} \text{ --- Ec. II.17}$$

El producto matricial de  $[a]^T [k] [a]$  da por resulta  
do una matriz cuadrada de orden  $3n_N \times 3n_N$  que es conocida -  
como la Matriz de Rigidez de la estructura y se denomina  
por  $[K]$ . Por lo tanto, la ecuación II.17 se puede escri--  
bir como:

$$\{F\} = [K] \{d\} \text{ --- Ec. II.18}$$

que constituye la ecuación Fundamental del Método de las  
Rigideces o de Los Desplazamientos.

La matriz  $[K]$  posee ciertas características que la --  
hacen significativa. Como ya se mencionó, es una matriz -  
cuadrada siempre, lo cual se demuestra facilmente por el

orden de las matrices que la originan, además es una matriz simétrica, no singular si la estructura es estable y positivamente definida. Dada la característica de las armaduras de que trabajan únicamente a fuerza axial, se puede lograr que la Matriz de Rigidez de la estructura sea una matriz "en banda", esto es, que los elementos de la matriz  $[K]$  se agrupen alrededor de la diagonal principal dejando los demás lugares con valor de cero, si los nudos se numeran en una forma adecuada.

Conociendo la Matriz de Rigidez de una estructura y dado un sistema de fuerzas externas actuando en ella, se pueden conocer los desplazamientos que sufre cada nudo de la misma. Conocidos los desplazamientos nodales, se obtienen las deformaciones de cada barra y, con estas, las fuerzas internas. En la figura II.4 se tiene un cuadro en el que se describe objetivamente el proceso de solución mencionado y se puede apreciar la sencillez conceptual del método.

Un alto porcentaje del trabajo en el Método Matricial de Rigidez está dirigido al ensamblaje de la Matriz  $[K]$  de la estructura. La parte restante del método tiene que ver con el cumplimiento de los principios estructurales descritos.

Se puede descomponer la matriz  $[K]$  en submatrices y ordenarla de la siguiente forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n_N} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{2n_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n_N 1} & K_{n_N 2} & \dots & K_{n_N n_N} \end{bmatrix}$$

en donde cada submatriz está asociada al vector de desplazamientos de cada nudo y por lo tanto es de orden  $3 \times 3$ .

Si en la ecuación II.18 se hace que  $\{d\}$  sea igual a  $I$ , es decir a la Matriz Identidad, resulta entonces que  $[K]$  representa, por columnas, las fuerzas necesarias en los nudos para producir un desplazamiento unitario en cada dirección de un nudo a la vez manteniendo todos los demás fijos. En consecuencia, las submatrices de la diagonal principal representan la "Rigidez del Nudo" en cada nudo "i", mientras que las submatrices fuera de la diagonal principal corresponden a la "rigidez cruzada del elemento" en el extremo "i" del elemento que va del nudo "i" al nudo "j". Esto quiere decir, por ejemplo, que  $K_{12}$  representa la matriz de rigidez en el extremo 1 de la barra entre los nudos 1 y 2, así como  $K_{21}$  representa lo inverso. Como la matriz  $[K]$  es simétrica,  $K_{21}$  debe ser la matriz traspuesta de  $K_{12}$ . La submatriz  $K_{12}$  corresponde a las fuerzas que aparecen en el nudo 1 dado un desplazamiento unitario en el nudo 2.

Por otro lado,  $K_{11}$  está formada por las fuerzas necesarias en el nudo 1 para producir un desplazamiento unita

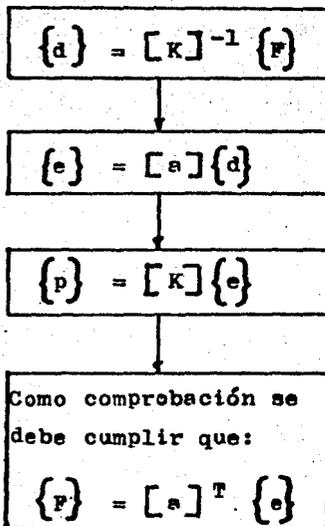


Figura II.4

rio en el nudo 1 por lo que intervienen todos los elementos que llegan a dicho nudo y por eso se conoce como Matriz de Rigidez del Nudo 1. Se forma con la suma de las matrices de rigidez en el extremo 1 de todas las barras concurrentes a él.

Si no existe una barra que una los nudos "i" y "j", entonces se tendrá que  $K_{ij} = 0$ .

Como ya se dijo anteriormente, la matriz de rigidez de la estructura es simétrica por lo que solamente se necesita calcular la mitad de ella, o sea, la parte triangular superior observando que si hay un elemento entre los nudos "i" y "m", la matriz de rigidez cruzada  $K_{im}$  de ese elemento esté localizada en el renglón i-ésimo y la columna m-ésima de  $[K]$  como se muestra en la figura II.5.

Además, las rigideces de los nudos "i" y "m" ( $K_{ii}$  y  $K_{mm}$ ) reciben ambas una contribución del elemento "im". En otras palabras, cualquier barra como la "im" afecta cuatro submatrices de  $[K]$ , que son  $K_{ii}$ ,  $K_{im}$ ,  $K_{mi}$  y  $K_{mm}$  que se conocen como la rigidez acoplada de la barra "im".

Por lo tanto, la matriz de rigidez acoplada de una barra que va del nudo (A) al nudo (B) será:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix}$$

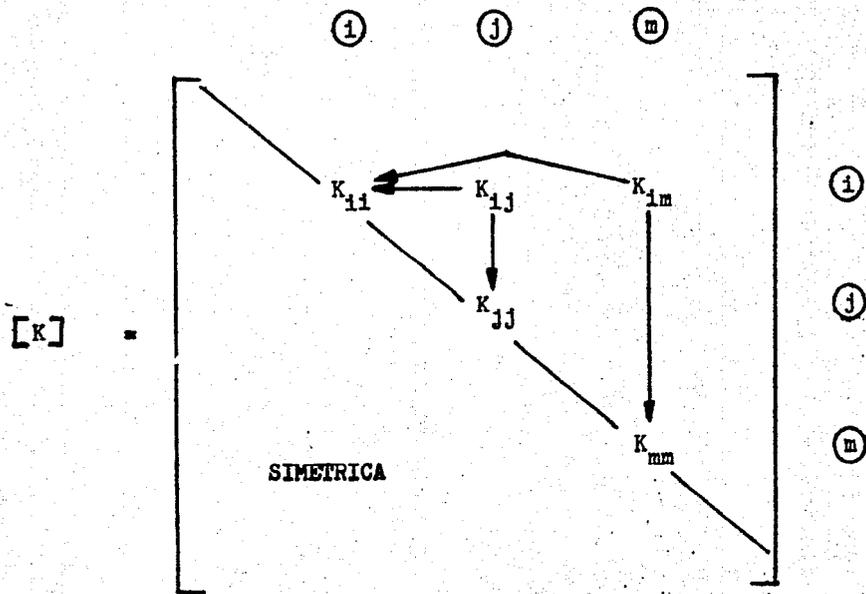


Figura II.5

y estará compuesta por 6 renglones y 6 columnas.

Para obtener la rigidez acoplada de una barra trabajando a carga axial exclusivamente, se parte de figura II.6.

En dicha figura, la barra AB se encuentra sujeta a una fuerza axial  $p_i$  originada por una fuerzas externas  $\{F_A\}$  y  $\{F_B\}$  y unos desplazamientos  $\{d_A\}$  y  $\{d_B\}$ . Por equilibrio se cumple que:

$$\{F_A\} + \{F_B\} = 0$$

o sea

$$\{F_B\} = - \{F_A\}$$

La barra se puede definir en base a un vector unitario, en dirección AB, llamado  $\{u\}_i$  tal que:

$$\{u\}_i = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{xi} \\ \cos \alpha_{yi} \\ \cos \alpha_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (x_{Bi} - x_{Ai})/L_i \\ (y_{Bi} - y_{Ai})/L_i \\ (z_{Bi} - z_{Ai})/L_i \end{Bmatrix}$$

Los vectores  $\{F_A\}$ ,  $\{F_B\}$ ,  $\{d_A\}$  y  $\{d_B\}$  tienen componentes según los 3 ejes globales de referencia.

En la figura II.7 se observa que los desplazamientos  $\{d_A\}$  y  $\{d_B\}$  proyectados sobre el eje de la barra originan una deformación  $e_i$  que está dada por la expresión:

$$e_i = \{u_i\}^T \{d_B\} - \{u_i\}^T \{d_A\} \quad \text{--- Fc. II.19}$$

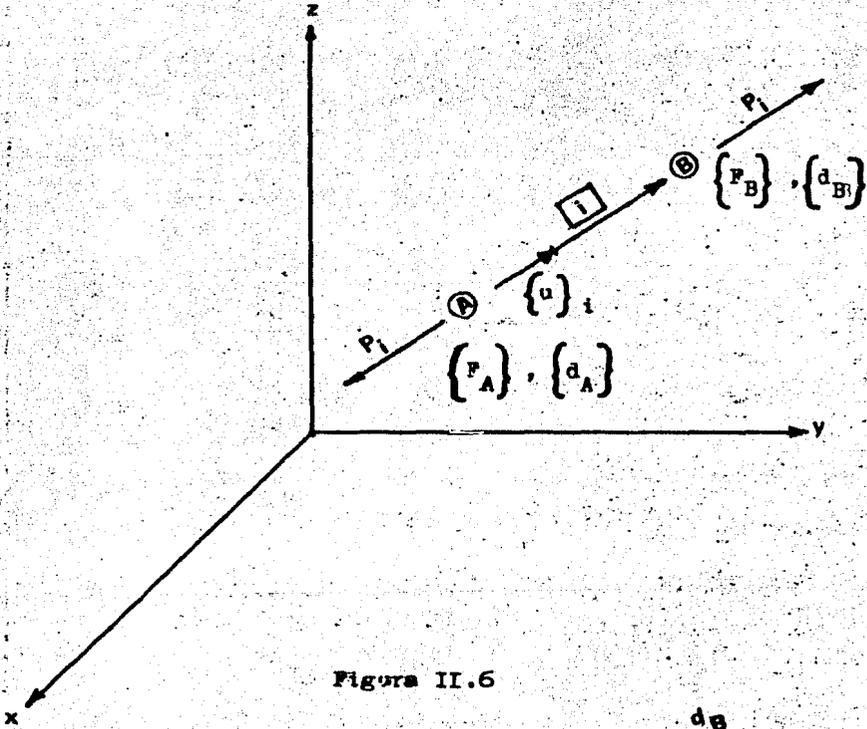


Figure II.6

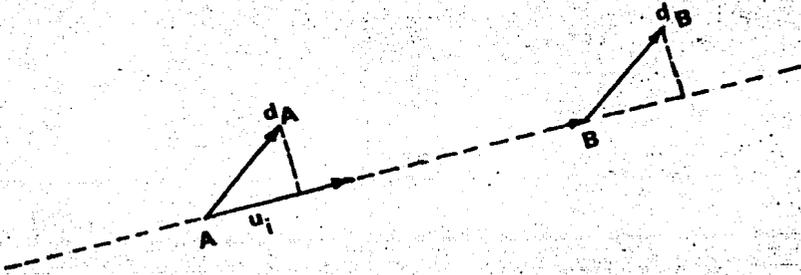


Figure II.7

Sustituyendo la ecuación II.19 en la ecuación II.7 -- se llega a que:

$$p_i = k_i \{u_i\}^T \{d_B\} - k_i \{u_i\}^T \{d_A\} \quad \text{--- Ec. II.20}$$

Por otra parte se sabe que la proyección de la fuerza  $p_i$  sobre los ejes globales equilibra a las fuerzas externas en cada nudo. Dicha proyección está dada por:

$$\{F_B\} = \{u_i\} p_i$$

$$\{F_A\} = -\{u_i\} p_i \quad \text{--- Ec. II.21}$$

Si se sustituye en las ecuaciones II.21 la ecuación - II.20 se tiene:

$$\{F_A\} = \{u_i\} k_i \{u_i\}^T \{d_A\} - \{u_i\} k_i \{u_i\}^T \{d_B\}$$

$$\{F_B\} = -\{u_i\} k_i \{u_i\}^T \{d_A\} + \{u_i\} k_i \{u_i\}^T \{d_B\}$$

que se puede ordenar como:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix}$$

donde

$$K_{AA} = K_{BB} = \{u_i\} k_i \{u_i\}^T$$

----- Ecs.II.22

$$K_{AB} = K_{BA} = - \{u_i\} k_i \{u_i\}^T$$

La formación de la matriz de rigidez de la estructura se reduce, ahora, a el cálculo de las matrices de rigidez acoplada de cada barra y su acomodo y suma en los lugares correspondientes de la matriz  $[K]$ , como ya se vió.

### III.- SOLUCION AL SISTEMA DE ECUACIONES.

Como se vió en el capítulo anterior, el principal punto en el análisis de estructuras por medio del método de Las Rigideces es la solución de la ecuación

$$\{F\} = [K] \{d\}$$

donde, en general,  $\{d\}$  es la incógnita.

Esta ecuación, desde el punto de vista matricial, se resuelve invirtiendo la matriz  $[K]$  y multiplicandola por el vector  $\{F\}$ , pero la inversión de matrices es un cálculo que requiere mucho tiempo de máquina y un programa extenso y complicado por lo que resulta muy ineficiente.

Otra forma de resolver la ecuación es tomándola como un sistema de ecuaciones simultáneas y aplicando alguno de los métodos conocidos para este tipo de problemas. Entre los procedimientos más comunes se tiene el método de Gauss, el de Cholesky, el de Gauss-Seidel y el de Jacobi. Los dos primeros son métodos exactos y los otros son iterativos.

Los métodos iterativos tienen el problema de que su convergencia puede ser muy lenta en algunas ocasiones. El método de Gauss tiene cierta dificultad en su implementación para computadora. Por último, el método de Cholesky parece ser el método de eliminación más rápido con que se cuenta, por lo que será el que se implemente en el programa objeto de este trabajo.

### III.1.- DESCRIPCION GENERAL.

Se pueden usar ventajosamente ciertas propiedades características de las matrices que se presentan en el análisis de sistemas estructurales, particularmente cuando se tienen grandes sistemas de ecuaciones por resolver. Entre las propiedades dignas de mencionar se tienen las siguientes: que son reales, simétricas, positivamente definidas y, en ciertas ocasiones, se encuentran en banda.

Se dice que una matriz es real cuando todos sus elementos pertenecen al conjunto de los números reales. Una matriz es simétrica cuando se cumple que la matriz transpuesta es igual a la matriz original, o sea, que  $[A]^T = [A]$  dada una cierta matriz  $[A]$ .

Una matriz es "positivamente definida" si se cumple que:

$$[X]^T [A] [X] > 0$$

para toda matriz columna (vector)  $[X]$  diferente de cero.

Una matriz está en "banda" cuando todos los elementos diferentes de cero están localizados alrededor de la diagonal principal. El ancho de la banda será  $(2m + 1)$  si todos los elementos " $a_{ij}$ ", para los cuales  $|i - j| > m$ , son cero y "m" se define como el ancho de media banda. La condición necesaria para alcanzar esta propiedad es que no todo nudo de una armadura esté unido a todos los demás y su nomenclatura sea hecha de manera que la diferencia entre los dos nudos que limitan un elemento se mantenga en

un mínimo, una numeración descuidada puede invalidar esta propiedad importante que ahorra tiempo de máquina y espacio.

Si una matriz  $[K]$  es simétrica, definida positiva y cuadrada de orden "n x n", se demuestra que se puede descomponer en:

$$[K] = [L][L]^T$$

donde  $[L]$  es una matriz triangular inferior de orden "n x n", con elementos positivos en la diagonal y, en consecuencia,  $[L]^T$  es su matriz transpuesta, triangular superior y de orden "n x n".

Usando esta propiedad, la solución del sistema de ecuaciones que implica la ecuación II.18 puede ser calculada simplemente reescribiendo el sistema de la siguiente forma:

$$\{F\} = [L][L]^T \{D\} \quad \text{--- Ec. III.1}$$

Esta ecuación se resuelve planteando un par de sistemas de ecuaciones expresadas como:

$$\{F\} = [L]\{Z\} \quad \text{--- Ec. III.2}$$

y

$$\{Z\} = [L]^T \{D\} \quad \text{--- Ec. III.3}$$

la simplificación radica en que, como ya se dijo,  $[L]$  y  $[L]^T$  son matrices triangulares.

Una característica adicional es que si  $[K]$  es una matriz en banda, con ancho  $(2m + 1)$ , se puede demostrar que la matriz triangular  $[L]$  también permanece en banda con ancho  $(m+1)$ .

Todas estas características hacen que se ahorren muchas localidades de memoria cuando se trata de programar el método para computadora, ya que solo se almacenan los elementos diferentes de cero de la matriz  $[K]$  y como resultado de la simetría solamente se almacena el ancho  $(m + 1)$ . Así, si  $[K]$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , solo  $(m + 1) \times n$  elementos de  $[K]$  deberán ser guardados en la memoria, en lugar de los  $n^2$  elementos que se tendrían de no contar con estas propiedades.

La matriz  $[L]$  también requerirá solamente almacenar el ancho de banda  $(m + 1)$ . Para problemas grandes en donde  $m$  es notablemente menor que  $n$  la eficiencia que se obtiene es altamente significativa tanto en velocidad de solución, como en el tamaño de los problemas que se pueden manejar.

### III.2.-OBTENCION DE $[L]$ Y $[L]^T$ .

La obtención de la matriz  $[L]$  puede ilustrarse por medio del siguiente planteamiento.

Sea:

$$[K] = [L][L]^T$$

o en forma explícita:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ K_{21} & K_{22} & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \\ \hline & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{simétrica} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \\ \hline & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \hline L_{22} & L_{23} & \hline L_{33} & \hline \end{bmatrix}$$

desarrollando la multiplicación se tiene que:

$$K_{11} = L_{11}^2$$

$$\therefore L_{11} = \sqrt{K_{11}}$$

$$K_{21} = K_{12} = L_{21} L_{11}$$

$$\therefore L_{21} = K_{21}/L_{11}$$

$$K_{22} = L_{21} L_{22} + L_{22}^2 \quad \text{pero } L_{21} = L_{12}$$

$$\therefore L_{22} = \sqrt{K_{22} - L_{21}^2}$$

$$K_{31} = K_{13} = L_{31} L_{11}$$

$$\therefore L_{31} = K_{31}/L_{11}$$

$$K_{32} = K_{23} = L_{31} L_{21} + L_{32} L_{22}$$

$$\therefore L_{32} = \frac{(K_{32} - L_{31} L_{21})}{L_{22}}$$

$$K_{33} = L_{13} L_{31} + L_{32} L_{23} + L_{33}^2$$

$$\therefore L_{33} = \sqrt{K_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2}$$

Continuando este desarrollo se llegan a establecer -- las siguientes Fórmulas de Recurrencia para el Método de Choleski:

$$L_{ii} = \sqrt{K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2} \quad \text{--- Ec. III.4}$$

$$L_{ij} = \frac{(K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk})}{L_{jj}} \quad \text{--- Ec. III.5}$$

para  $i \neq j$

para  $i > j$

Mediante la aplicación reiterada de las Fórmulas presentadas en las ecuaciones III.4 y III.5 se puede obtener  $[L]$  y en consecuencia  $[L]^T$ . Se denominan Fórmulas de Recurrencia porque utilizan los valores que previamente se han calculado con dichas fórmulas para el cálculo de un nuevo valor de  $L_{ij}$ .

### III.3.- PROCESO DE SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES.

Una vez calculadas las matrices  $[L]$  y  $[L]^T$  la solución del sistema de ecuaciones es bastante sencilla.

De la ecuación III.2 se tiene que, como  $[L]$  es una matriz triangular inferior, los valores del vector auxiliar  $\{z\}$  se obtienen despejándolos de cada ecuación planteada empezando por la primera de arriba hacia abajo y sustituyendo cada valor encontrado en las ecuaciones siguientes. Es decir, se recurre a los valores previamente encontrados para calcular un nuevo elemento en forma directa.

Ya que se han encontrado los valores de  $\{z\}$  por el procedimiento descrito, se sustituyen en la ecuación III.3 y se calculan los valores del vector  $\{D\}$ . El proceso es análogo al seguido para hallar  $\{z\}$ , solo que ahora  $[L]^T$  es una matriz triangular superior por lo que los despejes y sustituciones se hacen en dirección de abajo hacia arriba empezando por la última ecuación. Nuevamente se recurre a los valores previamente calculados para encontrar un nuevo elemento de  $\{D\}$  en forma directa.

De esta forma se observa que el solucionar un sistema de ecuaciones por este método es, conceptualmente, bastante sencillo y la solución es exacta.

#### IV.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

En este capítulo se procederá a la descripción detallada de la forma en que se estructuró el programa de computadora presentado en este trabajo. Dicho programa ha sido llamado AATD, que son las iniciales de "Análisis de Armaduras en Tres Dimensiones", y está constituido por un programa principal y tres subrutinas de apoyo. El programa principal será objeto del primer inciso, mientras que las subrutinas se tratarán en el siguiente y en el último se explicará la forma en que se deben dar los datos de entrada y la forma en que se tendrán los resultados.

Para una mayor comprensión de la organización del programa, se muestra en la figura IV.1 un diagrama de flujo simplificado del mismo. Por otra parte, para hacer referencia a alguna zona en especial se dará como clave el número que asigna la computadora B-6700 a cada instrucción y que aparece a la derecha de las mismas en el listado -- que se presenta en el siguiente capítulo, no se deberá -- confundir este número con la etiqueta que asigna el programador a algunas instrucciones y que está al inicio de ellas, en el lado izquierdo del listado mencionado.

La lista con los nombres de las variables principales que usan y su significado se dan también en el siguiente capítulo, por lo que cualquier duda a este respecto será -- aclarada en él.

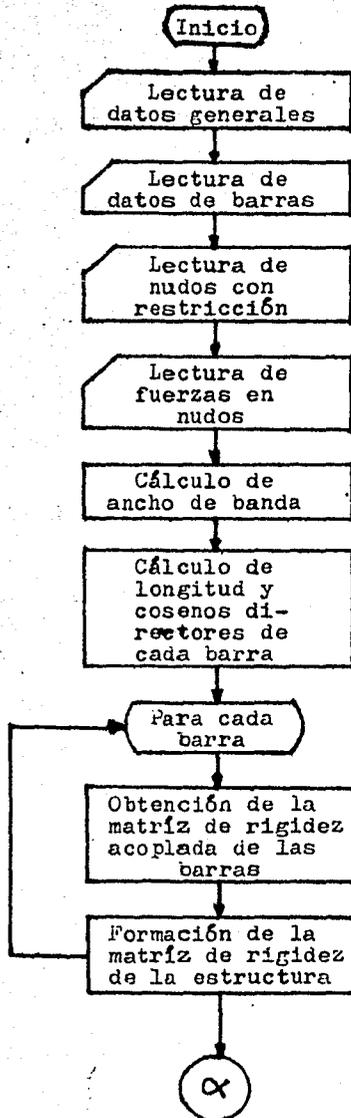


Figura IV.1

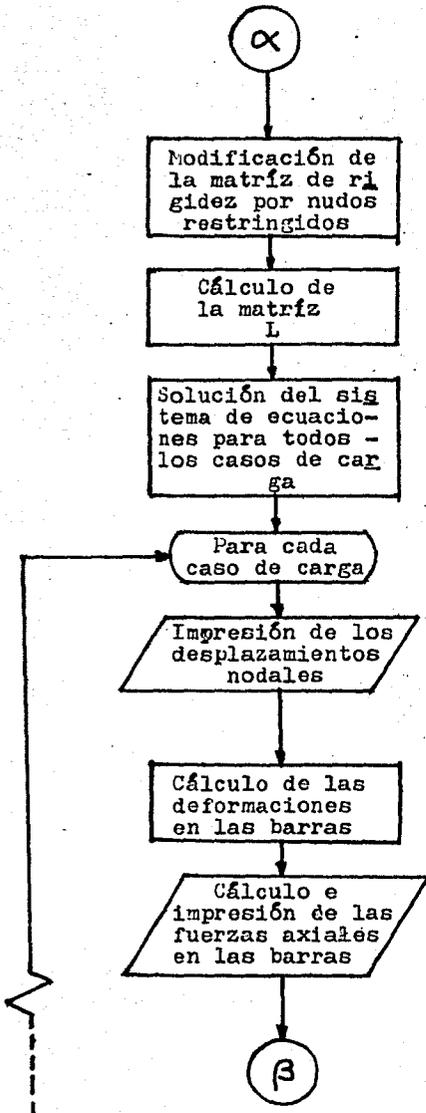


Figura IV.1 (Cont.)

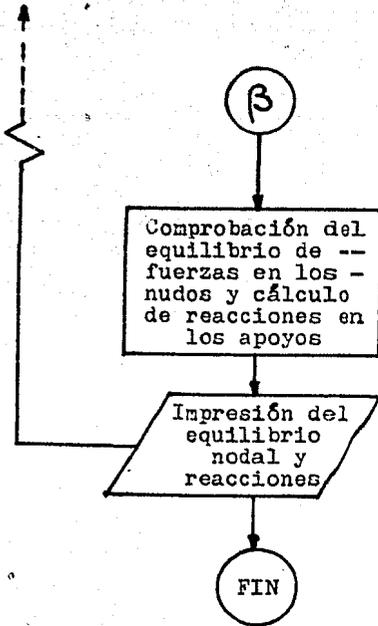


Figura IV.1 (Cont.)

#### IV.1.- PROGRAMA PRINCIPAL.

El programa principal se inicia en la instrucción número 8800 con las declaraciones de arreglos correspondientes a un programa de este tipo, teniendo en cuenta que -- los límites del problema máximo por resolver serán: 100 -- nudos, ó 300 barras ó 4 condiciones de carga, lo que ocurra primero.

Después sigue la entrada de los datos generales de la estructura que se tenga en cuestión, como son: número de nudos, número de barras, número de apoyos completos, número de nudos restringidos, módulo de elasticidad del material de las piezas que la forman (solo se admite uno), número de condiciones de carga que se darán y el número -- de nudos cargados en todas las condiciones.

Para definir a la armadura en el espacio y ubicarla, no se darán coordenadas de los nudos, como es frecuente -- hacerlo en otros programas, en lugar de ello cada barra -- estará determinada por el número del nudo en que empieza y el número de nudo en que acaba, así como por las pro--yecciones de la barra en cada una de las direcciones de -- los ejes globales de referencia y que serán almacenadas -- en una matriz específica llamada "AL". Ver figura IV.2

Las proyecciones de cada barra representan la diferen--cia de coordenadas en cada dirección global.

Al hacer esto se está cometiendo un pequeño error al reconstruir la estructura, pero a medida que sean más ---exactos los valores de las proyecciones, será más despre--ciable el error cometido.

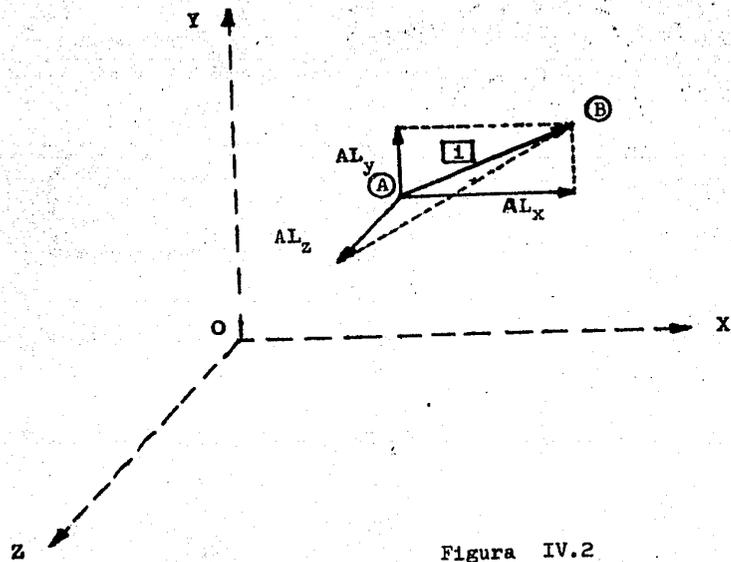


Figura IV.2

Las proyecciones de cada barra representan la diferencia de coordenadas en cada dirección global.

Al hacer esto se está cometiendo un pequeño error al reconstruir la estructura, pero a medida que sean más exactos los valores de las proyecciones será más despreciable el error cometido.

El último dato necesario por cada barra, será su área transversal.

El siguiente punto importante del programa es la lectura de los nudos con desplazamiento restringido o apoyos incompletos. Como ya se ha explicado en otras páginas, -- los apoyos completos no se tomarán en cuenta para el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, no así los apoyos incompletos, los cuales se añadirán como un nudo más de la armadura, pero con restricciones de desplazamiento las cuales serán indicadas mediante la colocación de un uno en el lugar del desplazamiento que se quiera restringir. dentro de una matriz auxiliar llamada "KRBS" y que tendrá tres renglones, el primero para el desplazamiento en dirección "x", el segundo para el desplazamiento en dirección "y", el tercero para el de la dirección "z", y tantas columnas como apoyos de este tipo se tengan. Se deberá tener cuidado de que ninguna columna de dicha matriz tenga tres valores de uno ó tres valores de cero, ya que eso querría decir que ó se tiene un apoyo totalmente restringido, el primer caso, ó se tiene un nudo libre, en el segundo caso.

A partir de la instrucción número 13200 se reciben -- los datos de las fuerzas que están actuando en los nudos

en cada condición de carga. Para cada nudo cargado se especificará la fuerza que actúa en cada condición de carga. Si algún nudo solo tiene fuerza externa en alguna condición de carga y en las otras no, se colocará el valor de cero en las condiciones en que no intervenga.

Para poder conocer el número de datos que se van a almacenar se debe calcular el ancho de banda que va a tener la matriz  $[K]$ , esto se hace a partir de la instrucción número 14500. El número total de renglones de la matriz estará dado por:

$$\text{No. de renglones} = 3 \times (\text{Número de nudos})$$

ya que cada nudo genera tres renglones. El número de columnas será igual el ancho de banda.

Mientras menor sea el ancho de banda será menor el número de datos almacenados y el de cálculos.

Dicho ancho de banda se define como la mayor diferencia que exista entre dos nudos cualesquiera unidos por una barra, mas uno por la diagonal principal. Por ser una diferencia de nudos, el número real de columnas será:

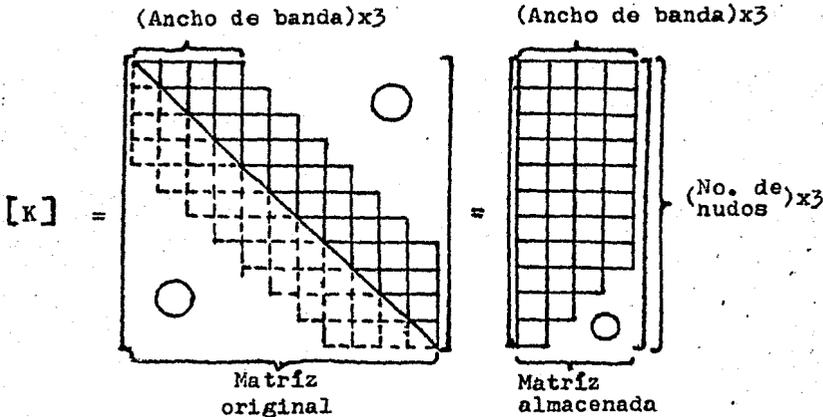
$$\text{No. de columnas} = 3 \times (\text{Ancho de banda} + 1)$$

El algoritmo para calcular el ancho es:

$$\text{Ancho de banda} = \text{Max} \left| \textcircled{i} - \textcircled{j} \right| + 1$$

Por lo tanto, la matriz  $[K]$  que se almacena queda con

figurada como la mitad de toda ella, por ser simétrica, y solo el ancho de banda como se muestra a continuación:



En la matriz  $[K]$  que se almacena en la memoria, cada columna corresponde a una diagonal de la matriz original, o sea, la primera columna corresponde a los valores de la diagonal principal, la segunda a los valores de la diagonal siguiente de la principal, la tercera a la tercera diagonal, y así sucesivamente. En consecuencia las columnas de la matriz original, se transforman en diagonales de la matriz almacenada. Todos estos cambios se tendrán en cuenta en el momento de ensamblar la matriz, ya que es to se hará directamente en la forma de la matriz almacenada.

La formación de la matriz de rigidez de la estructura se lleva a cabo de las instrucciones número 17000 a la 19500. Este proceso se inicia con el cálculo de la longi-

tud de cada barra aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\text{Long.} = \sqrt{AL_x^2 + AL_y^2 + AL_z^2}$$

Una vez calculada la longitud de una barra, se divide cada proyección de la misma entre ella, con lo que se obtiene el coseno director de la barra en cada dirección. El valor de los cosenos directores se guarda en la matriz de proyecciones, con lo que ahorran localidades de memoria al evitar generar otro arreglo para este propósito.

La instrucción número 18100 calcula la rigidez axial de cada elemento y que es:

$$k_i = \frac{EA_i}{L_i}$$

como se vió en el capítulo anterior, este valor se almacena en el vector de áreas transversales para ahorrar localidades de memoria nuevamente.

De la instrucción número 18300 a la 18600 se efectúa el cálculo de la matriz de rigidez acoplada de cada barra usando las fórmulas ya vistas anteriormente y teniendo en consideración que el vector unitario  $\{u\}$  de cada elemento se encuentra ocupando la matriz de proyecciones "AL".

A continuación se hace la colocación de los elementos de la matriz de rigidez acoplada en la diagonal principal, instrucciones 18700 a 19100, y en los demás lugares que les corresponden de la matriz  $[K]$  instrucciones 19200 a 19400. Esto se lleva a cabo usando la subrutina C010C.

Durante el proceso de solución del sistema de ecuaciones creado, los valores encontrados para los desplazamientos nodales son almacenados en la matriz de fuerzas en los nudos con el fin de ahorrar localidades de memoria, pero - como para poder calcular el equilibrio de fuerzas internas y externas en cada nudo es necesario conservar los valores de las fuerzas externas hasta el final del programa, se copian dichos valores en un vector auxiliar. Esto se realiza entre las instrucciones número 19600 y 19900.

Antes de proceder a la solución de la ecuación fundamental del método de las rigideces se deben hacer algunas modificaciones a la matriz de rigidez de la estructura por la inclusión de los nudos con restricción de desplazamiento, si es que existen. Este proceso de modificación de  $[K]$  se efectúa entre las instrucciones 20000 y 21900.

La modificación de la matriz de rigidez obedece a que como se mencionó anteriormente, al solucionar el sistema de ecuaciones los valores encontrados para los desplazamientos se guardan en los lugares correspondientes de la matriz de fuerzas externas, pero para los nudos restringidos ya se sabe que el desplazamiento en una o dos direcciones determinadas vale cero por lo que es necesario colocar dicho valor en el renglon que le corresponde dentro de la matriz de fuerzas. Por consiguiente, el renglon y la columna correspondientes a esos nudos en la matriz  $[K]$  deben tener todos sus elementos con valor de cero, excepto en el cruce en la diagonal principal donde se tendrá el valor de

uno que es el coeficiente que multiplica a un desplazamiento previamente conocido. La alteración de la matriz de fuerzas en los nudos origina que al calcularse el equilibrio de fuerzas en ellos aparezca un valor distinto de cero en las direcciones restringidas de estos apoyos incompletos. Dicho valor corresponde a la fuerza que le está transmitiendo, en esos puntos, la armadura al apoyo por lo que la reacción será cuantitativamente igual pero con signo contrario.

El siguiente punto importante del programa es la triangularización de la matriz  $[K]$  a fin de obtener la matriz  $[L]$  usada en el método de Choleski para la solución del sistema de ecuaciones. Esto se efectúa en la instrucción número 22000 utilizando la subrutina "TRIAN". Los elementos de la matriz triangularizada se guardan en las localidades correspondientes de la matriz de rigidez con el fin de optimizar el uso de la memoria de máquina.

En la instrucción número 22200 se pide la solución del sistema de ecuaciones a través de la subrutina "SOLUC" que es la encargada de la aplicación del método de Choleski. Se resuelven todos los casos de carga y los desplazamientos nodales se almacenan en los lugares correspondientes de la matriz de fuerzas externas.

Una vez obtenidos los desplazamientos en los nudos el programa inicia un ciclo iterativo que va de la instrucción número 22400 a la 26700 y que se ejecuta por cada condición de carga que se haya especificado.

El ciclo se inicia con la impresión de los desplazamientos. Después, entre la instrucción 22800 y la 23500 se calcula la deformación de cada barra y se multiplica -- por la rigidez axial de ellas para obtener el valor de las fuerzas axiales actuantes e imprimirlas.

Entre la instrucción número 24100 y la 24400 se trasladan los valores de las fuerzas externas de cada nudo que habían sido almacenados en una matriz auxiliar, a una matriz que tendrá tantas columnas como número de nudos más -- número de apoyos tenga la estructura y que se empleará para calcular el equilibrio de fuerzas en cada nudo y las -- reacciones en los apoyos. El equilibrio nodal se obtiene sumando algebraicamente en cada nudo la fuerza externa actuante en cada dirección y las proyecciones de las fuerzas axiales de las barras que concurren al mismo nudo multiplicadas por el signo que les corresponda según sea nudo inicial o final de las barras en cuestión, positivo para el -- primer caso y negativo para el segundo. En la instrucc--- ción 24500 a la 25400 se realiza el cálculo de este equili brio.

Las reacciones en los apoyos serán las sumas de las -- proyecciones, en cada dirección, de las fuerzas axiales de las barras que llegan a ellos cambiandoles el signo; entre las instrucciones 25600 y 25800 se lleva a cabo este cálculo.

Se imprimen por separado el equilibrio de los nudos y las reacciones en los apoyos completos.

Una vez realizado todo esto se inicia de nuevo el ciclo para la siguiente condición de carga.

Hasta aquí comprende el programa principal y se han descrito sus puntos más sobresalientes.

#### IV.-2.- SUBROUTINAS.

Como se pudo observar en el inciso anterior el programa emplea tres subrutinas de apoyo llamadas: `COLC`, `TRIAN` y `SOLGC`. Las cuales serán descritas a continuación en el orden en que fueron solicitadas por el programa principal.

La subrutina `COLC` se utiliza para ir acomodando las matrices de rigidez acoplada de cada barra dentro de la matriz de rigidez de la estructura, haciendo las sumas necesarias y tomando en cuenta la forma en que se tiene almacenada dicha matriz en la memoria de la computadora. Dentro del listado de instrucciones presentado en el capítulo siguiente, este subprograma ocupa desde la instrucción número 7300 a la instrucción número 8700. Los datos de entrada que necesita son los nudos inicial y final de cada barra que se va a ubicar y el signo que debe tener la matriz de rigidez acoplada dependiendo si se va a colocar en la diagonal principal de  $[K]$  o en otro lugar de ella. Si alguno de los dos nudos que delimitan una barra es apoyo completo no se ejecuta esta subrutina; dicha situación se

se vigila en la instrucción 19200 del programa principal.

Las instrucciones 7500 y 7600 localizan el lugar a -- partir del cual se empiezan a colocar los valores de cada matriz de rigidez acoplada. Para entenderlas mejor, en la figura IV.3 se presenta en forma gráfica este proceso y se recuerda que sólo se almacena la parte triangular superior de  $[K]$ .

Es interesante hacer notar que se usa la misma subrutina para colocar valores tanto dentro de la diagonal principal como fuera de ella, en el primer caso dando como dato de entrada dos veces cada nudo de una barra (instrucción número 19000).

La subrutina TRIAN es la que se encarga de triangularizar a la matriz  $[K]$  para obtener la matriz  $[L]$  del método de Choleski. Debido a que se almacenó la mitad superior de  $[K]$ , la subrutina encuentra en realidad  $[L]^T$  aplicando las fórmulas de recurrencia desarrolladas en el capítulo anterior. Este subprograma ocupa de la instrucción número 3800 a la 6900.

Los valores se van obteniendo de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, es decir, calculando los elementos correspondientes por renglones de la matriz  $[K]$ , tomando en consideración que las columnas originales son diagonales en la matriz almacenada y que sólo se guardó el ancho de banda en columnas, por lo que en varios puntos se vigila no rebasar dicho valor. Conforme se va calculando

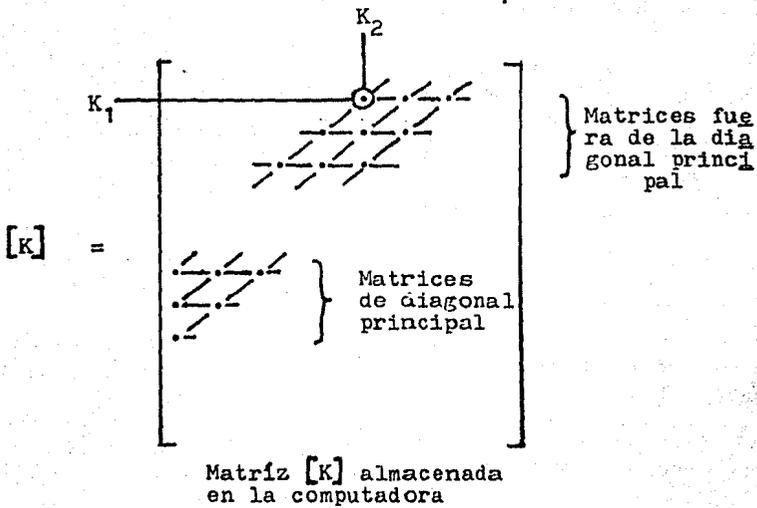
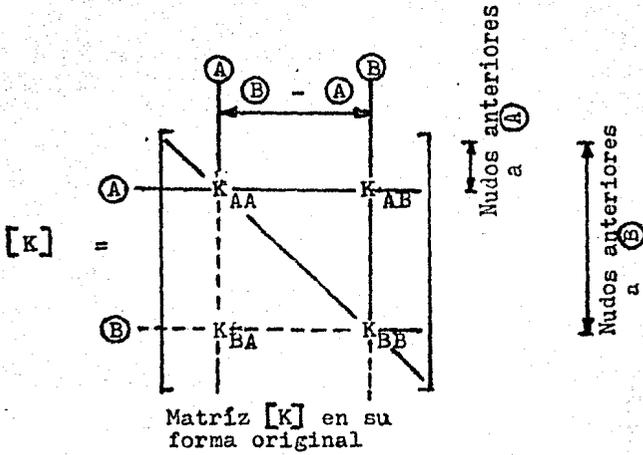


Figura IV.3

$[L]^T$  se van almacenando sus valores en los lugares que ocupan los datos correspondientes de  $[K]$  para ahorrar localidades de memoria. En las instrucciones 4500 y 5400 se utiliza una variable auxiliar para que contenga los resultados de las sumas y multiplicaciones empleadas en las fórmulas de recurrencia. La instrucción número 5800 calcula los valores de elementos en la diagonal principal de  $[K]$  ó su primera columna en la forma en que está dentro del programa. La instrucción 6000 obtiene los elementos fuera de la diagonal principal de  $[K]$ .

Se tiene otra variable llamada  $NØFR$  que sirve para vigilar que no se vaya a colocar un cero en la diagonal principal de  $[K]$ . Originalmente tiene el valor de uno, instrucción 4000, pero si se detecta un cero en la instrucción 5700, adquiere el valor de cero en la instrucción 6400 e imprime un letrero a este respecto indicando en que renglón se localizó esta situación anómala. La instrucción número 22100 del programa principal advierte este caso y detiene la ejecución del programa.

Por último, la subrutina  $SØLUC$  calcula el valor de los desplazamientos nodales para todas las condiciones de carga que se hayan proporcionado como datos. Ocupa de la instrucción número 400 a la número 3400 y necesita como datos de entrada los valores almacenados de la matriz de rigidez de la estructura triangularizada, el número de renglones que posea, su número de columnas, número de condiciones de carga por resolver y los valores de las fuerzas

externas aplicadas encada nudo.

El proceso se va realizando para cada condición de carga a la vez mediante un ciclo iterativo que se inicia en la instrucción 600 y termina en la 3200. Primero se calculan los valores del vector  $\{Z\}$ , vector intermedio en el método de solución de Choleski, entre las instrucciones número 700 y 1800, tomando en cuenta que como se tiene almacenada la matriz  $[L]^T$  los renglones de  $[L]$  serán diagonales de aquella matriz. La sustitución se hace de arriba hacia abajo de  $[L]$ , como se explicó en el capítulo III. El vector  $\{Z\}$  se guarda en los lugares correspondientes que ocupan las fuerzas externas en los nudos para ahorrar localidades de memoria. Después de calcular este vector intermedio auxiliar se obtienen los valores de los desplazamientos nodales haciendo la sustitución de abajo hacia arriba en la matriz  $[L]^T$ , ocupando de la instrucción número 1900 a la 3100. Nuevamente, los valores determinados de cada desplazamiento se cambian por el valor de  $\{Z\}$  que ocupa el lugar correspondiente para optimizar el uso de memoria.

Al concluir la ejecución de esta subrutina la matriz que originalmente contenía los valores de las fuerzas externas de los nudos, contiene los valores del desplazamiento en cada dirección para los mismos.

#### IV.3.- ENTRADA Y SALIDA DE DATOS.

En este inciso se describe explícitamente cómo deben darse los datos de una armadura para su análisis mediante el uso de este programa y cómo es que aparecerán los resultados en el listado de salida impreso.

El ingreso se hará a través de tarjetas perforadas en el orden que se muestra a continuación:

Tarjeta Tipo 1: Corresponde a la instrucción número 9800 - del programa principal y contiene datos generales de la estructura. Sólo se tendrá una tarjeta de este tipo y su arreglo es el siguiente

- Columnas 1 a 10 - Número de nudos de la estructura (campo para números enteros).
- Columnas 11 a 20 - Número de barras de la estructura (campo para números enteros).
- Columnas 21 a 30 - Número de apoyos completos que se tengan (campo para números enteros).
- Columnas 31 a 40 - Número de nudos restringidos en alguna dirección de desplazamiento (campo para números enteros).
- Columnas 41 a 50 - Módulo de elasticidad del material de las barras de la armadura (campo para números reales).
- Columnas 51 a 60 - Número de condiciones de carga para las que se deseen conocer resultados (campo para números enteros).

Columnas 61 a 70 - Número de nudos que tengan alguna fuerza externa aplicada en cualquier condición de carga especificada (campo para números enteros).

El programa no tiene capacidad para hacer conversiones de unidades, por lo que todos los valores que las requieran deberán estar en unidades congruentes.

Tarjeta Tipo 2 : Contiene los datos de identificación de cada barra, así como sus dimensiones y área transversal. Se dará una tarjeta de este tipo por cada elemento de la estructura. La disposición es la siguiente

Columnas 1 a 10 - Número de la barra a que corresponden los datos de la tarjeta (campo para números enteros).

Columnas 11 a 20 - Incidencia ó nudo en el que se inicia la barra (campo para números enteros).

Columnas 21 a 30 - Incidencia ó nudo en que termina la barra (campo para números enteros).

Columnas 31 a 40 - Proyección de la longitud del elemento en la dirección "X" global (campo para números reales).

Columnas 41 a 50 - Proyección de la longitud del elemento en la dirección "Y" global -

(campo para números reales).

Columnas 51 a 60 - Proyección de la longitud del elemento en la dirección "Z" global - (campo para números reales).

Columnas 61 a 70 - Area de la sección transversal de la barra (campo para números reales).

El programa esta elaborado de forma en que si se numeran en forma consecutiva todas las barras que tengan igual algunas proyecciones ó el área transversal, solamente será necesario dar el valor que se repite en la primera -- tarjeta en que se solicite y en las demás que le sigan se dará el valor de cero en el lugar del valor que se repite. Por lo tanto, si en alguna barra una de sus proyecciones - tiene realmente el valor de cero se especificará, en su lugar, el de  $1 \times 10^{-10}$  como dato en esa dirección para evitar que se asigne un valor incorrecto. El error cometido con esto es despreciable.

Tarjeta Tipo 3:

Se utiliza para especificar que nudos de la armadura tienen alguna restricción de desplazamiento. Se proporcionará una tarjeta de este tipo por cada nudo que sea apoyo incompleto. Si no existen nudos restringidos - no será necesario dar ninguna tarjeta como esta. La distribución de la misma es la siguiente

Columnas 1 a 5 - Número del nudo con restricción de desplazamiento (campo para números

enteros).

Columnas 6 a 10 - Restricción al desplazamiento en la dirección "X" global, 0 si está libre y 1 si está restringido (campo para número entero).

Columnas 11 a 15 - Restricción al desplazamiento en la dirección "Y" global, 0 si está libre y 1 si está restringido (campo para número entero).

Columnas 16 a 20 - Restricción al desplazamiento en la dirección "Z" global, 0 si está libre y 1 si está restringido (campo para número entero).

Tarjeta Tipo 4:

En ella se especificarán las fuerzas externas que actúan en los nudos que se encuentren cargados en cualquier condición de carga. Se dará una tarjeta de este tipo por cada nudo que tenga fuerzas aplicadas. Su arreglo es como se indica a continuación

Columnas 1 a 5 - Número del nudo con fuerzas aplicadas (campo para números enteros).

Columnas 6 a 15 - Valor de la fuerza en dirección -- "X" global para la 1a. condición de carga (campo para números reales).

Columnas 16 a 25 - Valor de la fuerza en dirección --

"Y" global para la 1a. condición -  
de carga (campo para números rea--  
les).

Columnas 26 a 35 - Valor de la fuerza en dirección --  
"Z" global para la 1a. condición -  
de carga (campo para números rea--  
les).

Columnas 36 a 45 - Valor de la fuerza en dirección --  
"X" global para la 2a. condición -  
de carga (campo para números rea--  
les).

Columnas 46 a 55 - Valor de la fuerza en dirección --  
"Y" global para la 2a. condición -  
de carga (campo para números rea--  
les).

Columnas 56 a 65 - Valor de la fuerza en dirección --  
"Z" global para la 2a. condición -  
de carga (campo para números rea--  
les).

Si existiesen más de dos condiciones de carga los va-  
lores de las fuerzas para la 3a. y 4a. condiciones se da-  
rían en otra tarjeta que iría inmediatamente a continua---  
ción de la especificada arriba y con la siguiente distriby  
ción

Columnas 1 a 10 - Valor de la fuerza en dirección --  
"X" global para la 3a. condición -

- de carga (campo para números reales).
- Columnas 11 a 20 - Valor de la fuerza en dirección -- "Y" global para la 3a. condición de carga (campo para números reales).
- Columnas 21 a 30 - Valor de la fuerza en dirección -- "Z" global para la 3a. condición de carga (campo para números reales).
- Columnas 31 a 40 - Valor de la fuerza en dirección -- "X" global para la 4a. condición de carga (campo para números reales).
- Columnas 41 a 50 - Valor de la fuerza en dirección -- "Y" global para la 4a. condición de carga (campo para números reales).
- Columnas 51 a 60 - Valor de la fuerza en dirección -- "Z" global para la 4a. condición de carga (campo para números reales).

Por lo tanto, para más de dos condiciones de carga -- que se quieran especificar las fuerzas actuantes se proponían en dos tarjetas juntas para cada nudo cargado que se tenga.

Estas son todas las tarjetas de datos necesarias para el análisis de una estructura con el programa AATD. En lo que se ha expuesto anteriormente se entiende que en los campos para números enteros se deberán colocar números positivos, corridos a la extrema derecha del campo. Para los campos de números reales se proporcionaran números positivos ó negativos, con punto decimal forzosamente ó escritos en notación científica utilizando el formato "E".

Los resultados del análisis aparecen en forma impresa en listados de papel y en el orden que se describe a continuación.

Primero una tabla con los datos generales de la estructura, esto es, número de nudos, de barras, de apoyos completos y de condiciones de carga; una lista conteniendo para cada barra sus nudos de incidencia en los extremos inicial y final (A y B respectivamente), las proyecciones de su longitud en cada dirección y su área transversal; otra lista que presenta los nudos con restricción de desplazamiento, ó apoyos incompletos, así como cuales de sus desplazamientos están restringidos y cuales libres; una lista para cada condición de carga especificada que presenta las fuerzas externas aplicadas en los nudos de la armadura.

Después de esto vienen ya los resultados, separados por cada condición con que se cargó la estructura y en forma de tablas. La primera contiene los valores del desplazamiento nodal en cada dirección y para todos los nudos, -

en notación científica con formato "E"; la segunda presenta los valores de la fuerza axial actuante en cada barra e indicando si es de tensión ó de compresión, en notación científica también; una más que exhibe el resultado del cálculo de equilibrio de fuerzas en los nudos para cada dirección global; por último, una lista con los valores de las reacciones en cada dirección en los apoyos completos.

Los valores de las reacciones en apoyos incompletos deberán buscarse en la tabla de equilibrio nodal, en el nudo correspondiente, donde aparecerán en forma de acción de la estructura sobre el apoyo por lo que habrá de cambiarseles el signo para conocer las reacciones en dichos lugares como ya se había explicado en párrafos anteriores.

## V.- PROGRAMA AATD

Este capítulo contiene la lista completa de instrucciones que conforman el programa de análisis de armaduras en tres dimensiones. Los dos primeros incisos sirven para aclarar el significado de las variables más importantes - empleadas, tanto en el programa principal como en las subrutinas de apoyo; el último inciso es el listado de instrucciones tal y como se compiló en la computadora B-6700 de la U.N.A.M.

### V.1.- PROGRAMA PRINCIPAL.

Significado de las variables más importantes, en orden alfabético:

- A K = Matriz de rigidez de la estructura; matriz triangular  $[L]^T$
- AKEB = Matriz de rigidez acoplada de cada barra.
- AL = Matriz de proyecciones de las barras en cada dirección; Matriz de Cosenos Directores en cada dirección de las barras.
- ALON = Longitud real de una barra.
- AREA = Vector de áreas transversales de las barras; Vector de Rigideces axiales de las barras.
- DESP = Matriz de desplazamientos nodales (equivalente en localidades de memoria a YY).

- E = Deformación axial de cada barra
- KE = Módulo de elasticidad del material de la estructura.
- EAL = Rigidez axial de una barra.
- PZA = Matriz de fuerzas externas en los nudos (equivalente en localidades de memoria a YY).
- PZAP = Matriz auxiliar para soportar los valores de las fuerzas externas en los nudos (equivalente en localidades de memoria a YYP)
- INC = Matriz que contiene las incidencias de cada barra, es decir, su nudo inicial y final.
- KAN = Ancho de banda de la matriz de rigidez de la estructura, tanto en nudos como en columnas.
- KRES = Matriz que contiene las restricciones de desplazamiento de los nudos restringidos.
- NA = Número de apoyos completos.
- NB = Número de barras de la estructura.
- NCC = Número de condiciones de carga.
- NN = Número de nudos.
- NNC = Número de nudos cargados.
- NNR = Número de nudos restringidos.
- NUDR = Número del nudo restringido.
- PP = Vector de fuerzas axiales en las barras.

REQ = Vector que contiene el equilibrio en los --  
nudos y las reacciones en los apoyos.

YY = Matriz de fuerzas externas en los nudos; --  
matriz de desplazamientos en los nudos.

YYP = Matriz auxiliar para soportar los valores --  
de las fuerzas externas en los nudos.

## V.2.- SUBRUTINAS.

Significado de las variables más importantes, por sub  
rutina y en orden alfabético.

### Subrutina CØLØC:

AK = Mismo que en el programa principal.

AKBB = Mismo que en el programa principal.

I1, I2 = Número del nudo de incidencia inicial e fi-  
nal de la barra, según sea el caso.

SIG = Signo asociado a la matriz de rigidez ace-  
plada de las barras.

### Subrutina TRIAN:

A = Matriz por triangulizar; matriz trianguliza-  
da  $[L]^T$ .

KAN = Número de columnas de  $[A]$ .

$N$  = Número de renglones de  $[A]$ .

$N1$  = Tamaño máximo del arreglo  $[A]$ .

$NØFR$  = Bandera para localizar ceros en la diagonal principal de  $[A]$ .

**Subrutina SØLUC:**

$A$  = Matriz triangularizada  $[L]^T$ .

$KAN$  = Número de columnas de  $[A]$ .

$N$  = Número de renglones de  $[A]$ .

$NC$  = Número de condiciones de carga por resolver.

$N1$  = Tamaño máximo del arreglo  $[A]$ .

$N2$  = Tamaño máximo del arreglo  $[Y]$ .

$Y$  = Matriz de Fuerzas Externas; Matriz auxiliar  $[Z]$  del método de Choleski; matriz de soluciones del sistema de ecuaciones.

**V.3.- LISTADO GENERAL DE INSTRUCCIONES DEL PROGRAMA AATD.**

Las hojas que se presentan a continuación son el listado de instrucciones del programa AATD completo.





C  
C  
C

SUBROUTINA PARA ORGANIZAR LA MATRIZ DE RIGIDEZ

```
SUBROUTINE COLOC(I1,I2,SI6)
COMMON/CL/AK(300,60),AKBH(3,3)
N1=3*(I1-1)+1
N2=3*(I2-1)+1
DO 15 K=1,3
  LL=K2+J-1
  IF (LL.LE.0) GO TO 10
  AK(L,LL)=AM(L,LL)+AKPB(K,J)*SI6
10 CONTINUE
N2=K2-1
15 CONTINUE
RETURN
END
```

```
00007000 C .003004710
00007100 C .003004710
00007200 C .003004710
00007300 C START OF SEGMENT 006
00007400 C .006000010
00007500 C .006000010
00007600 C .006000211
00007700 C .006000413
00007800 C .006000615
00007900 C .006000715
00008000 C .006000918
00008100 C .006000115
00008200 C .006000118
00008300 C .006001115
00008400 C .006001418
00008500 C .006001518
00008600 C .006001713
00008700 C .006001818
          C SIGNET 006 IS 0020 LONG
```





0000

PROGRAMA PRINCIPAL

00008200 C  
00008400 C  
00009000 C  
00009100 C

006102016  
006102016  
006102016  
006102016

START SEGMENT 007  
FURNAT SEGMENT 18 0128 LONG  
FURNAT SEGMENT 18 006A LONG

DIMENSION FZA(3,100,4),YY(300,8),YYP(300,4),FZAP(3,100,4),FP(300,1),  
IDESP(3,100,4),AL(3,300),TAC(2,300),AREA(300),NLDR(100),KRES(3,100)  
COMMON /CI/AK(300,60),AKRB(3,3)  
EQUIVALENCE (FZA(I),YY(I)),(YYP(I),FZAP(I)),(DESP(I),YY(I))  
WRITE(6,2000)  
READ(5,1000)NN,NB,NA,NKK,EE,NLC,NNC

00009200 C  
00009300 C  
00009400 C  
00009500 C  
00009600 C  
00009700 C  
00009800 C

007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000

006 LONG

0000

DATOS DE LAS BARRAS

IF(CN=NA,GT.100,ON,NB,GT.300,OR,NCC,GT.4) GO TO 10  
GO TO 15  
10 WRITE(6,2005)  
CALL EXIT  
DO 20 I=1,NR  
15 READ(5,1005)K,(INC(J,K),J=1,2),(AL(J,K),J=1,3),AREA(K)  
CONTINUE  
DO 30 J=1,NB  
DO 25 I=1,3  
25 IF(CABS(AL(J,I))-I.I.E-10) AL(J,I)=AL(J,I-1)  
CONTINUE  
IF(AREA(I).LE.0.0) AREA(I)=AREA(I-1)  
30 CONTINUE  
WRITE(6,2010)NN,NB,NA,NCC,EE  
DO 35 I=1,NB  
35 WRITE(6,2015)I,(INC(J,I),J=1,2),(AL(J,I),J=1,3),AREA(I)  
CONTINUE

00009900 C  
00010000 C  
00010100 C  
00010200 C  
00010300 C  
00010400 C  
00010500 C  
00010600 C  
00010700 C  
00010800 C  
00010900 C  
00011000 C  
00011100 C  
00011200 C  
00011300 C  
00011400 C  
00011500 C  
00011600 C  
00011700 C  
00011800 C  
00011900 C

007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000

0000

LECTURA DE NUDOS HFSTRINGIDOS

WRITE(6,2016)  
IF(NR.EQ.1)GO TO 45  
WRITE(6,2020)  
DO 40 I=1,NR  
40 READ(5,1010)NUDR(I),(KRES(J,I),J=1,3)  
WRITE(6,2025)NUDR(I),KRES(J,I),J=1,3  
CONTINUE

00012000 C  
00012100 C  
00012200 C  
00012300 C  
00012400 C  
00012500 C  
00012600 C  
00012700 C  
00012800 C  
00012900 C  
00013000 C

007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000

0000

LECTURA DE FUERZAS EN LOS NUDOS

DO 50 L=1,NCC  
DO 50 I=1,NN+NA  
DO 50 K=1,3  
FZA(K,I,L)=0.0  
CONTINUE  
DO 55 J=1,NNC  
55 READ(5,1015)I,((FZA(K,I,L),K=1,3),L=1,NCC)  
CONTINUE  
WRITE(6,2030)  
DO 60 L=1,NCC  
WRITE(6,2035)I  
DO 60 I=1,NN  
WRITE(6,2040)I,(FZA(K,I,L),K=1,3)

00013100 C  
00013200 C  
00013300 C  
00013400 C  
00013500 C  
00013600 C  
00013700 C  
00013800 C  
00013900 C  
00014000 C  
00014100 C  
00014200 C  
00014300 C  
00014400 C

007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000  
007100000







NO ERRORS DETECTED. NUMBER OF LINES = 326  
COMPILATION TIME = 23 SECONDS ELAPSED. 6.47 SECONDS PROCESSING  
DE STACK SIZE = 256 WORDS. FILE SIZE = 140 WORDS. ESTIMATED CORE STORAGE REQUIREMENT = 7064 WORDS.  
TOTAL PROGRAM CODE = 891 WORDS. ANAY STORAGE = 5268 WORDS.  
NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 13. NUMBER OF DISK SEGMENTS = 100.  
PROGRAM CODE FILE = (NL73)TOPICU ON PACK.  
COMPILER COMPILED ON 06/12/61

FORMAT SEGMENT IS DONE LONG  
START OF SEGMENT 00A  
SEGMENT 00A IS 0027 LONG



## VI.- EJEMPLO DE APLICACION.

Ahora se procede a realizar una demostración sobre el uso del programa AATD en un ejemplo práctico. Pero antes resulta necesario verificar el buen funcionamiento del mismo analizando una misma estructura con el programa presentado en este trabajo y con un programa ampliamente reconocido en el medio de la ingeniería.

El primer inciso de este capítulo tratará sobre la comparación de los resultados obtenidos con uno y otro programa aplicados a una estructura sencilla. En el segundo, se presentará un ejemplo más formal de la aplicación práctica del programa propuesto aquí.

### VI.1.- EJEMPLO PARA VERIFICACION DE RESULTADOS.

Con objeto de comprobar que los resultados que arroja el programa AATD son correctos, se analizará la estructura de la figura VI.1 con este programa y con el programa STRESS (Structural Engineering System Solver) desarrollado en el Massachusetts Institute of Technology en 1962. El programa STRESS aplica también el Método de la Rigidez.

Se considera que los tres apoyos de la armadura son completos, por lo que se les asignan los últimos números. Las proyecciones de cada barra según los ejes de referencia son las siguientes, además se indica el área transversal de cada una:

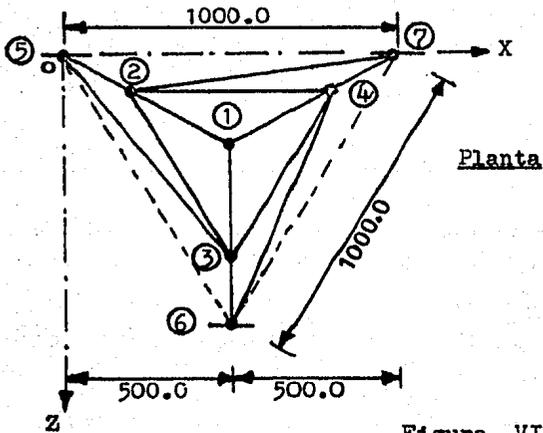
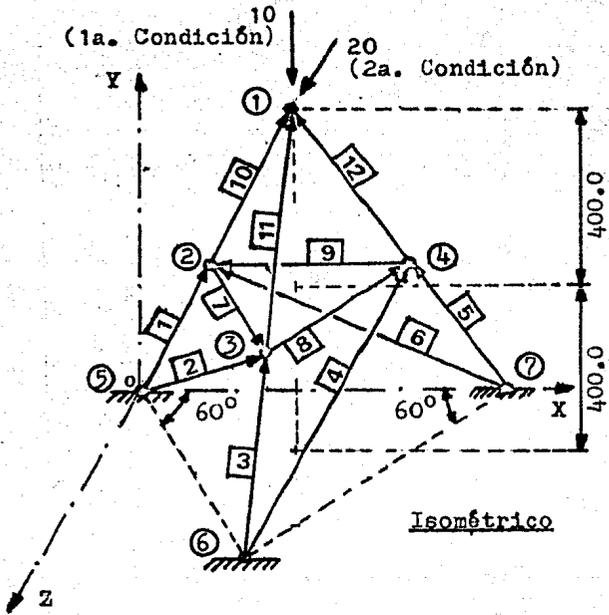


Figura VI.1

<u>BARRA</u>	<u>x</u>	<u>y</u>	<u>z</u>	<u>ARBA</u>
1	250.0	400.0	217.0	14.20
2	500.0	400.0	649.52	10.60
3	0.0	400.0	-216.51	14.20
4	250.0	400.0	-649.03	10.60
5	-250.0	400.0	217.00	14.20
6	-750.0	400.0	217.00	10.60
7	250.0	0.0	432.52	7.58
8	250.0	0.0	-432.52	7.58
9	-500.0	0.0	0.00	7.58
10	250.0	400.0	216.01	7.58
11	0.0	400.0	-216.51	7.58
12	-250.0	400.0	216.01	7.58

La numeración de nudos y barras se presenta en la figura mencionada. Como módulo de elasticidad se usa 2 100.0.

Las condiciones de carga bajo las cuales se analizará la armadura son:

1a. Condición de carga

$$\text{Nudo } \textcircled{1} \quad F_y = -10.0$$

2a. Condición de carga

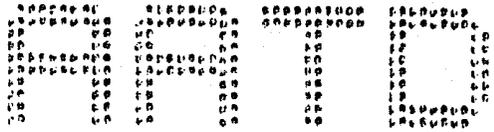
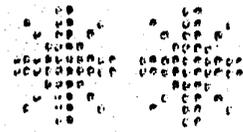
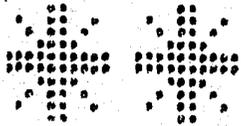
$$\text{Nudo } \textcircled{1} \quad F_z = 20.00$$

La orientación de las barras es la que se tiene en la figura y es en base a la cual se tomaron los signos de -- las proyecciones.

El programa STRESS usa las coordenadas de cada nudo - en lugar de las proyecciones, dichas coordenadas son fáciles de obtener a partir de la figura.

En las siguientes páginas se presentan los resultados obtenidos con uno y otro programa, observándose que los - valores son prácticamente iguales, tanto en desplazamientos nodales como en fuerzas axiales y reacciones en los - apoyos.

Es interesante observar que el programa STRESS resuelve su sistema de ecuaciones invirtiendo la matriz de rigidez de la estructura, por lo que la comparación de los resultados es más confiable al provenir de métodos de solución diferentes.



DATE: MAY 24, 1982 20:50:27, SYSTEM SERIAL: 124, J9700 NCP: SYSTEM/4NCP, 31.200.1252

WORK FLOW STATEMENTS

00000000 ?JON AAT0  
00001200 ?JSECR 75  
00000300 ?CLASS=3  
00000400 ?REGIV  
00000500 ?COMPILE AAT0 FORITAN  
00000600 ?JATA  
00003500 ?QATA FILES  
00055500 ?END J03

J03 SUMMARY

MAY 24, 1982  
20:49:39

11J 0527 AAT0  
JOB ENTERED SYSTEM: MAY 24, 1982 18:06:13 FROM /FL 31.200  
JOBID: 3

UNICAT

```
*****  
*  
*  
* PROGRAMA PARA EL ANALISIS BIDIMENSIONAL DE ARALLAS *  
* ***** *  
*  
*  
*  
*  
*****
```

NOTA:

EL PROGRAMA ES INDEPENDIENTE DE LAS UNIDADES EMPLEADAS  
POR LO QUE SE SUGIERE USAR UNIDADES CONGRUENTES



DAOS... GENERALES... DE... LA... ESTRUCTURA  
 \*\*\*\*\*

NO. DE NUDOS :  
 NO. DE BARRAS :  
 NO. DE APOYOS COMPLETOS :  
 NO. DE CONDICIONES DE CARGA :  
 MODULO DE ELASTICIDAD USADO : 2100.0

NUMRO

BARRAS  
 \*\*\*\*\*

BARRA	INCLINACIONES			PROYECCIONES			AREA DE LA BARRA
	A	B	X	Y	Z		
1	5	3	500.00	200.00	217.00	14.20	
2	4	3	500.00	200.00	217.00	14.20	
3	6	4	500.00	200.00	-216.51	14.20	
4	6	4	500.00	200.00	-216.51	14.20	
5	7	7	500.00	200.00	17.00	14.20	
6	7	7	500.00	200.00	17.00	14.20	
7	3	3	500.00	0.00	0.00	7.58	
8	4	3	500.00	0.00	0.00	7.58	
9	4	3	500.00	0.00	0.00	7.58	
10	3	3	500.00	200.00	216.01	7.58	
11	3	3	500.00	200.00	216.01	7.58	
12	4	3	-250.00	200.00	216.01	7.58	

NUDOS  
 \*\*\*\*\*

FUENZAS EN LOS NUDOS :

CONDICION DE CARGA NUMERO : 1

NUDO	FUENZAS		
	X	Y	Z
1	0.00	-18.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00





S. O. L. U. C. I. O. N  
\*\*\*\*\*

EL ANCHO DE PANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ES : 3  
LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTUVO EMPLEANDO EL METODO DE CHOLESKI, POR LO QUE ES EXACTA

CONDICION DE CARGA NUMERO 1. . 1  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

DESPLAZAMIENTOS

NUDO		X	Y	Z	NUDO		X	Y	Z
1	3	-2922E-03	-2468E+00	.6498E-01	2	4	-2937E-01	-8429E-01	.9308E-01
		.6878E-01	-9575E-01	.6090E-02			-2976E-01	-6419E-01	-1505E-01

FUERZAS EN LAS BARRAS

(-) COMPRESION  
(+) TENSION

BARRA	FUERZA								
1	-3209E+01	2	-6528E+02	3	-5082E+01	4	-5734E-02	5	-3245E+01
6	-1584E+05	7	-7155E+02	8	-4092E+05	9	-3578E-02	10	-3244E+01
11	-5679E+01	12	-3246E+01						

EQUILIBRIO DE LOS NUDOS

NUDO		X	Y	Z	NUDO		X	Y	Z
1	3	0.00	0.00	0.00	2	4	-0.00	0.00	-0.00
		0.00	0.00	-0.00			-0.00	0.00	0.00

REACCIONES EN LOS APOYOS

APOYO		REACCIONES			APOYO		REACCIONES		
	X	Y	Z		X	Y	Z		

5            1:50            2:50            1:36            6            0.00            5.00            -2.71



CONDICION DE CARGA NUMERO 1  
 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

DESPLAZAMIENTOS

NUDO	X	Y	Z	NUDO	X	Y	Z
1	.4129E+03	-.1340E+00	.1489E+01	2	.1285E+00	-.1473E+00	.1237E+00
	.3717E-01	-.2054E+00	.1458E+00		.1081E+00	.2372E+00	.1864E+00

FUERZAS EN LAS BARRAS

(-) COMPRESION  
 (+) TENSION

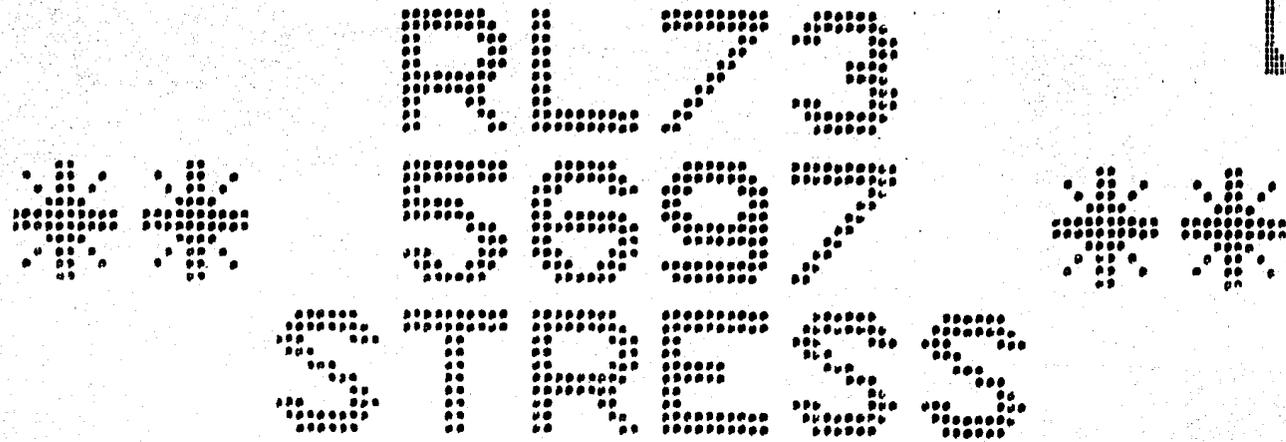
BARRA	FUERZA	BARRA	FUERZA	BARRA	FUERZA	BARRA	FUERZA	BARRA	FUERZA
1	.1204E+02	2	-.2412E-01	3	-.2102E+02	4	-.2119E-01	5	.1194E+02
6	-.1328E-04	7	.2648E-01	8	.1512E-04	9	-.7521E-01	10	.1194E+02
11	-.2103E+02	12	.1199E+02						

EQUILIBRIO DE LOS NUDOS

NUDO	X	Y	Z	NUDO	X	Y	Z
1	0.00	0.00	0.00	2	-0.00	0.00	-0.00
	0.00	-0.00	0.00		0.00	0.00	-0.00

REACCIONES EN LOS APOYOS

APOYO	REACCIONES	APOYO	REACCIONES
5	X -5.77 Y 5.77	6	Z -5.00 -5.01
			X -0.01 Y 18.48
			Z -9.99



DATE: MAY 29, 1982 12:01:05, SYSTEM SERIAL: 126, 86700 MCP: SYSTEM/MCP. 31.280.1252

WORK FLOW STATEMENTS

00000100 ?JOB STRESS  
00000200 ?USER=RLJ  
00000300 ?CLASS=3  
00000400 ?RESID  
00000500 ?MACHINE=VICTOR/STRESS  
00000600 ?MACHINE=126  
00000700 ?END JOB

J O B S U M M A R Y

MAY 29, 1982 11:59:55 31J 5697 STRESS  
JOB ENTERED SYSTEM: MAY 29, 1982 11:58:50 FROM MPL 31.200  
QUEUE: 3  
ORIGINATING UNIT: 10



S.T.R.E.S.S.  
FI,ROPE-ETJDES  
V 00 L 01





JOINT	FORCE X	FORCE Y	FORCE Z
5	1.854	0.000	1.35
4	0.000	0.000	1.71
3	-1.541	0.000	-1.56

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
5	-0.000	-0.000	0.000
4	-0.000	-0.000	0.000
3	-0.000	-0.000	0.000
2	-0.000	-0.000	0.000
1	-0.000	-0.000	0.000





JOINT	FORCE X	FORCE Y	FORCE Z
5	-5.757	-9.2438	1.3009
6	-0.007	18.2873	1.3009
7	5.773	-9.2333	1.3001



FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
5	0.0008	-0.1150	1.6885
6	0.1093	-0.1172	0.1037
7	0.1093	0.2154	0.1453
	0.1091	0.2172	0.1469

FOR POST PROCESSING ONLY 1 AREA ARE NEEDED

## VI.2.- EJEMPLO PRACTICO.

Se requiere efectuar el análisis de una estructura cuyo sistema de techo es una armadura tridimensional. Dicho análisis se realizará ante dos condiciones de carga principales: una, el peso propio de la estructura; otra, la acción del viento en una de las direcciones.

Por tratarse solamente de un ejemplo para demostrar el uso del programa AATD, no se harán todas las consideraciones que establece cualquier reglamento de construcciones para el análisis y diseño total de una estructura.

La configuración general de la armadura en cuestión se presenta en la figura VI.2, junto con sus dimensiones. Como se puede observar, consta de una cuerda superior horizontal y otra cuerda inferior, también horizontal, unidas mediante barras diagonales. Descansa sobre cuatro columnas las cuales constituirán los apoyos; tres de ellos tienen libertad de desplazamiento en dos direcciones ortogonales horizontales, mientras que la dirección vertical la tienen restringida por lo que son apoyos incompletos (o nudos con restricciones de desplazamiento). Solamente uno de los apoyos será completo, es decir, restringido en todas las direcciones de desplazamiento.

Se considerará que sólo los nudos de la cuerda superior tomarán las fuerzas que actúan en las dos condiciones de carga propuestas.

La primera condición de carga comprenderá las fuerzas originadas por la suma del peso propio de la estructura más una cierta carga viva. Las barras de la armadura -

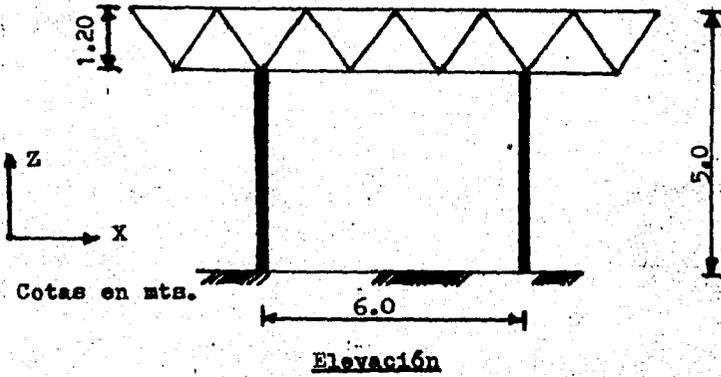
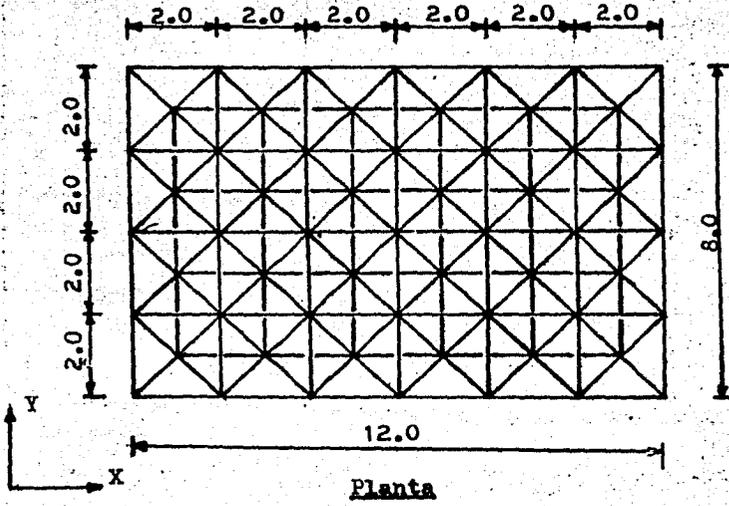


Figura VI.2

son de acero, por lo que se tomarán los siguientes valores:

Peso propio estructura	- - - - -	200 Kg/m <sup>2</sup>
Carga viva adicional	- - - - -	<u>100 Kg/m<sup>2</sup></u>
TOTAL		300 Kg/m <sup>2</sup>

Este peso está uniformemente repartido en toda el área de la cuerda superior, para transformarla en fuerzas aplicadas en los nudos se multiplicará el área tributaria de cada nudo por dicho peso. La dirección de acción de las fuerzas será hacia abajo, por lo que siempre tendrá signo negativo.

Por lo tanto la fuerza actuante en cada nudo será:

LOCALIZACION DEL NUDO	AREA TRIBUTARIA (m <sup>2</sup> )	FUERZA (Kg)
Esquina	1.0	-300.00
Borde	2.0	-600.00
Interior	4.0	-1200.00

Para la segunda condición de carga, se supondrá que el viento actúa en la dirección positiva del eje X global.

El viento actuando sobre una superficie horizontal origina una presión de succión que va variando según la longitud del área expuesta. Para fines prácticos, esta

variación de la presión se ha convertido en una presión --  
uniformemente distribuida y que cambia de intensidad se--  
gún tres zonas bien delimitadas. La primera que se extien  
de desde la arista de barlovento hasta una distancia ---  
igual a un tercio de la altura de la construcción; la se--  
gunda, que abarca hasta una y media veces la altura de la  
construcción medida desde la misma arista. Y la tercera,  
el resto de la superficie. La figura VI.3 muestra esta --  
zonificación en la armadura que se está analizando.

Por cada zona, la presión ejercida por el viento, es--  
tará dada por la siguiente expresión:

$$p = 0.0055 cv^2$$

siendo:

$p$  = succión del viento ( $\text{Kg/m}^2$ )

$c$  = factor de empuje (adimensional)

$V$  = velocidad de diseño del viento ( $\text{Km/hr}$ )

El factor  $c$  es el que determina la intensidad del em--  
puje, ya que tiene diferentes valores según la zona de ac--  
ción.

Como velocidad de diseño se tomará el valor de ----  
150  $\text{Km/hr}$ .

En consecuencia, las presiones actuantes en toda el --  
área serán:

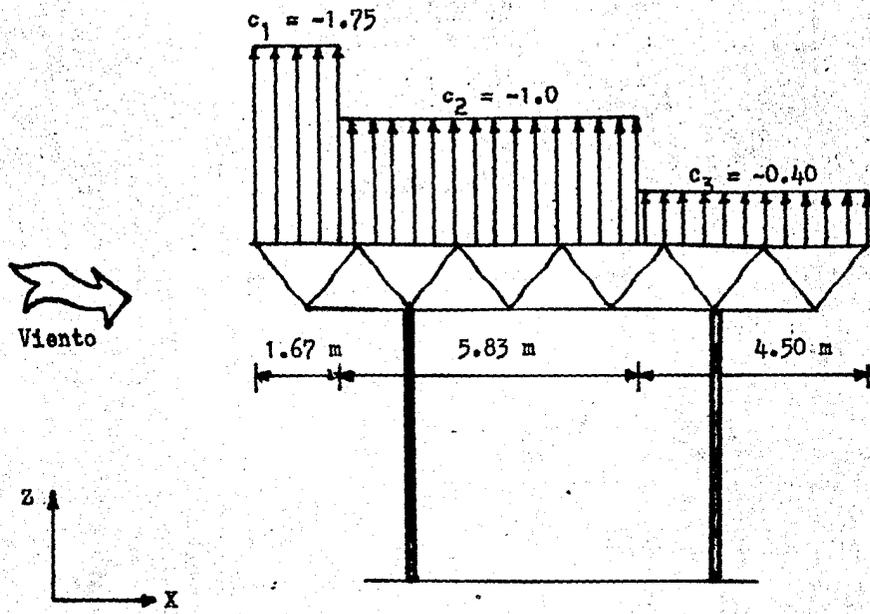


Figura VI.3

ZONA	VALOR DE c	EMPUJE (Kg/m <sup>2</sup> )
1	1.75	216.60
2	1.00	123.75
3	0.40	49.50

Nuevamente, hay que transformar estas cargas uniformemente repartidas en fuerzas puntuales aplicadas en los nudos. El procedimiento es el mismo, es decir, multiplicar el área tributaria de cada nudo por la presión o presiones del lugar en donde se encuentre ubicado. La fuerza resultante, por ser de succión, se tomará con signo positivo al actuar hacia arriba.

El método de análisis por viento seguido en este ejemplo, fue tomado del capítulo de Diseño por Viento del Reglamento para las Construcciones del Departamento del Distrito Federal, en su versión de 1976.

Una vez determinadas las condiciones bajo las que se efectuará el análisis, se procede a preparar los datos de entrada al programa.

Primero se numeran todos los nudos cuidando que las barras estén determinadas por nudos cuya numeración sea lo más cercana posible. El nudo que constituye un apoyo completo recibirá el último número, sin impertar su localización.

Después se numeran las barras de manera que tengan numeración consecutiva aquellas barras con iguales proyecciones y área transversales, para facilitar el trabajo de

perforación de datos.

La numeración de nudos y barras se presenta en las figuras VI.4, VI.5 y VI.6 para la cuerda superior, la cuerda inferior y las diagonales respectivamente.

Como módulo de elasticidad del acero se dará el valor de  $2\ 100\ 000.00\ \text{Kg/cm}^2$ . Las secciones transversales de las barras tendrán la siguiente área.

Barras de cuerda superior - - - - -	60 cm <sup>2</sup>
Barras diagonales - - - - -	35 cm <sup>2</sup>
Barras de cuerda inferior - - - - -	55 cm <sup>2</sup>

Los resultados del programa están en las siguientes páginas. Como ya se mencionó anteriormente, las reacciones en los apoyos incompletos deberán buscarse en el inciso de Equilibrio de los Nudos, donde aparecerán como acciones, por lo que deberá cambiarseles el signo para determinar la reacción deseada.

Cuerda Superior

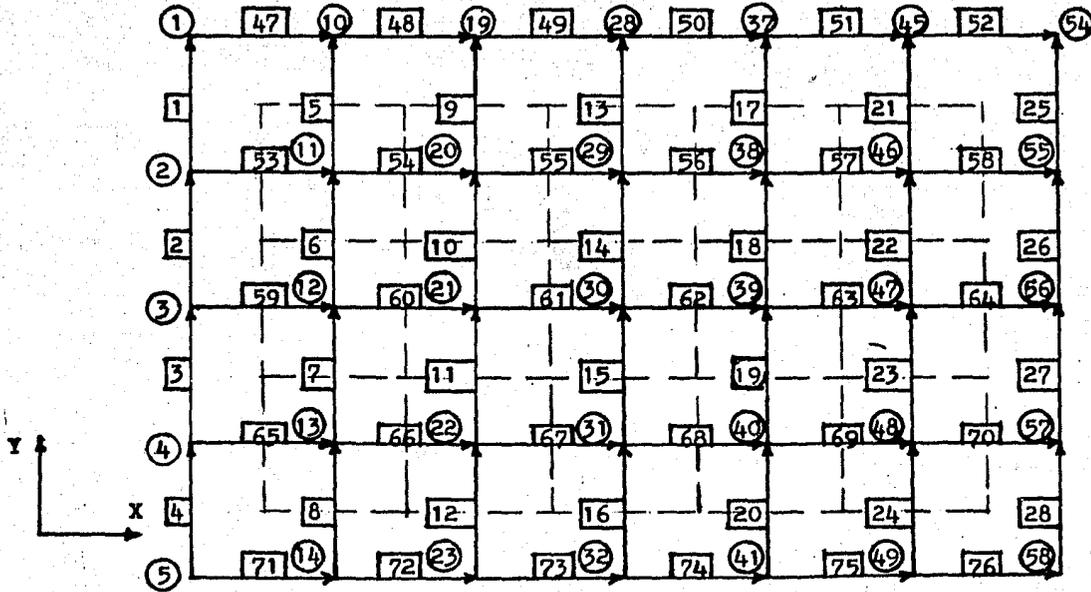


Figura VI.4

Cuerda Inferior

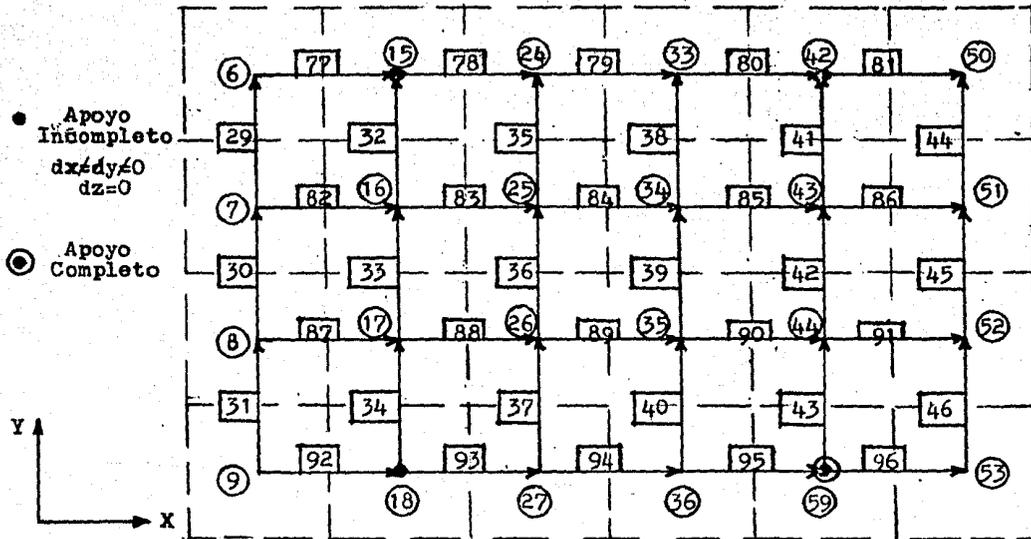


Figura VI.5

Diagonales

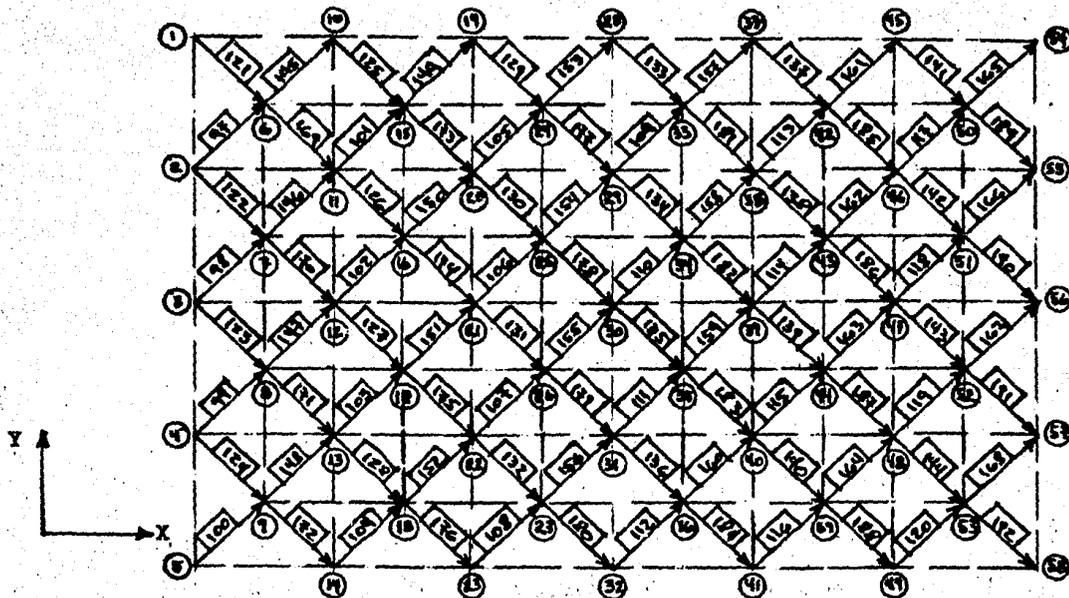


Figura VI.6



```
*****  
*  
*  
*  
* PROGRAMA PARA EL ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE ACHALURAS *  
* ===== *  
*  
*  
*  
*  
*  
*  
*****
```

NOTA:

EL PROGRAMA ES INDEPENDIENTE DE LAS UNIDADES EMPLEADAS  
POR LO QUE SE SUGIERE USAR UNIDADES CONGRUENTES



DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA  
 \*\*\*\*\*

NO. DE BARRAS : 1408  
 NO. DE APUNTES : 1408  
 NO. DE CONDICIONES DE CARGA : 1408  
 MODELO DE ELASTICIDAD USADO : 2100000.0

BARRAS  
 \*\*\*\*\*

BARRA	INCIDENCIAS		PROYECCIONES			AREA DE LA BARRA
	A	B	X	Y	Z	
1	1	1	0.00	0.00	0.00	60.00
2	2	2	0.00	0.00	0.00	60.00
3	3	3	0.00	0.00	0.00	60.00
4	4	4	0.00	0.00	0.00	60.00
5	5	5	0.00	0.00	0.00	60.00
6	6	6	0.00	0.00	0.00	60.00
7	7	7	0.00	0.00	0.00	60.00
8	8	8	0.00	0.00	0.00	60.00
9	9	9	0.00	0.00	0.00	60.00
10	10	10	0.00	0.00	0.00	60.00
11	11	11	0.00	0.00	0.00	60.00
12	12	12	0.00	0.00	0.00	60.00
13	13	13	0.00	0.00	0.00	60.00
14	14	14	0.00	0.00	0.00	60.00
15	15	15	0.00	0.00	0.00	60.00
16	16	16	0.00	0.00	0.00	60.00
17	17	17	0.00	0.00	0.00	60.00
18	18	18	0.00	0.00	0.00	60.00
19	19	19	0.00	0.00	0.00	60.00
20	20	20	0.00	0.00	0.00	60.00
21	21	21	0.00	0.00	0.00	60.00
22	22	22	0.00	0.00	0.00	60.00
23	23	23	0.00	0.00	0.00	60.00
24	24	24	0.00	0.00	0.00	60.00
25	25	25	0.00	0.00	0.00	60.00
26	26	26	0.00	0.00	0.00	60.00
27	27	27	0.00	0.00	0.00	60.00
28	28	28	0.00	0.00	0.00	60.00
29	29	29	0.00	0.00	0.00	60.00
30	30	30	0.00	0.00	0.00	60.00
31	31	31	0.00	0.00	0.00	60.00
32	32	32	0.00	0.00	0.00	60.00
33	33	33	0.00	0.00	0.00	60.00
34	34	34	0.00	0.00	0.00	60.00
35	35	35	0.00	0.00	0.00	60.00
36	36	36	0.00	0.00	0.00	60.00
37	37	37	0.00	0.00	0.00	60.00
38	38	38	0.00	0.00	0.00	60.00
39	39	39	0.00	0.00	0.00	60.00
40	40	40	0.00	0.00	0.00	60.00
41	41	41	0.00	0.00	0.00	60.00
42	42	42	0.00	0.00	0.00	60.00
43	43	43	0.00	0.00	0.00	60.00
44	44	44	0.00	0.00	0.00	60.00
45	45	45	0.00	0.00	0.00	60.00
46	46	46	0.00	0.00	0.00	60.00
47	47	47	0.00	0.00	0.00	60.00
48	48	48	0.00	0.00	0.00	60.00
49	49	49	0.00	0.00	0.00	60.00
50	50	50	0.00	0.00	0.00	60.00
51	51	51	0.00	0.00	0.00	60.00
52	52	52	0.00	0.00	0.00	60.00
53	53	53	0.00	0.00	0.00	60.00
54	54	54	0.00	0.00	0.00	60.00
55	55	55	0.00	0.00	0.00	60.00
56	56	56	0.00	0.00	0.00	60.00
57	57	57	0.00	0.00	0.00	60.00
58	58	58	0.00	0.00	0.00	60.00
59	59	59	0.00	0.00	0.00	60.00
60	60	60	0.00	0.00	0.00	60.00
61	61	61	0.00	0.00	0.00	60.00
62	62	62	0.00	0.00	0.00	60.00
63	63	63	0.00	0.00	0.00	60.00
64	64	64	0.00	0.00	0.00	60.00
65	65	65	0.00	0.00	0.00	60.00
66	66	66	0.00	0.00	0.00	60.00
67	67	67	0.00	0.00	0.00	60.00
68	68	68	0.00	0.00	0.00	60.00
69	69	69	0.00	0.00	0.00	60.00
70	70	70	0.00	0.00	0.00	60.00
71	71	71	0.00	0.00	0.00	60.00
72	72	72	0.00	0.00	0.00	60.00
73	73	73	0.00	0.00	0.00	60.00
74	74	74	0.00	0.00	0.00	60.00
75	75	75	0.00	0.00	0.00	60.00
76	76	76	0.00	0.00	0.00	60.00
77	77	77	0.00	0.00	0.00	60.00
78	78	78	0.00	0.00	0.00	60.00
79	79	79	0.00	0.00	0.00	60.00
80	80	80	0.00	0.00	0.00	60.00
81	81	81	0.00	0.00	0.00	60.00
82	82	82	0.00	0.00	0.00	60.00
83	83	83	0.00	0.00	0.00	60.00
84	84	84	0.00	0.00	0.00	60.00
85	85	85	0.00	0.00	0.00	60.00
86	86	86	0.00	0.00	0.00	60.00
87	87	87	0.00	0.00	0.00	60.00
88	88	88	0.00	0.00	0.00	60.00
89	89	89	0.00	0.00	0.00	60.00
90	90	90	0.00	0.00	0.00	60.00
91	91	91	0.00	0.00	0.00	60.00
92	92	92	0.00	0.00	0.00	60.00
93	93	93	0.00	0.00	0.00	60.00
94	94	94	0.00	0.00	0.00	60.00
95	95	95	0.00	0.00	0.00	60.00
96	96	96	0.00	0.00	0.00	60.00
97	97	97	0.00	0.00	0.00	60.00
98	98	98	0.00	0.00	0.00	60.00
99	99	99	0.00	0.00	0.00	60.00
100	100	100	0.00	0.00	0.00	60.00



.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
.....







SA 0.00 0.00 -300.00  
 CONDICION DE CARGA NUMERO 1 2

NUDO

FUERZAS

NUDO	X	Y	Z
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00
17	0.00	0.00	0.00
18	0.00	0.00	0.00
19	0.00	0.00	0.00
20	0.00	0.00	0.00
21	0.00	0.00	0.00
22	0.00	0.00	0.00
23	0.00	0.00	0.00
24	0.00	0.00	0.00
25	0.00	0.00	0.00
26	0.00	0.00	0.00
27	0.00	0.00	0.00
28	0.00	0.00	0.00
29	0.00	0.00	0.00
30	0.00	0.00	0.00
31	0.00	0.00	0.00
32	0.00	0.00	0.00
33	0.00	0.00	0.00
34	0.00	0.00	0.00
35	0.00	0.00	0.00
36	0.00	0.00	0.00
37	0.00	0.00	0.00
38	0.00	0.00	0.00
39	0.00	0.00	0.00
40	0.00	0.00	0.00
41	0.00	0.00	0.00
42	0.00	0.00	0.00
43	0.00	0.00	0.00
44	0.00	0.00	0.00
45	0.00	0.00	0.00
46	0.00	0.00	0.00
47	0.00	0.00	0.00
48	0.00	0.00	0.00
49	0.00	0.00	0.00
50	0.00	0.00	0.00
51	0.00	0.00	0.00
52	0.00	0.00	0.00
53	0.00	0.00	0.00
54	0.00	0.00	0.00
55	0.00	0.00	0.00
56	0.00	0.00	0.00
57	0.00	0.00	0.00
58	0.00	0.00	0.00
59	0.00	0.00	0.00
60	0.00	0.00	0.00
61	0.00	0.00	0.00
62	0.00	0.00	0.00
63	0.00	0.00	0.00
64	0.00	0.00	0.00
65	0.00	0.00	0.00
66	0.00	0.00	0.00
67	0.00	0.00	0.00
68	0.00	0.00	0.00
69	0.00	0.00	0.00
70	0.00	0.00	0.00
71	0.00	0.00	0.00
72	0.00	0.00	0.00
73	0.00	0.00	0.00
74	0.00	0.00	0.00
75	0.00	0.00	0.00
76	0.00	0.00	0.00
77	0.00	0.00	0.00
78	0.00	0.00	0.00
79	0.00	0.00	0.00
80	0.00	0.00	0.00
81	0.00	0.00	0.00
82	0.00	0.00	0.00
83	0.00	0.00	0.00
84	0.00	0.00	0.00
85	0.00	0.00	0.00
86	0.00	0.00	0.00
87	0.00	0.00	0.00
88	0.00	0.00	0.00
89	0.00	0.00	0.00
90	0.00	0.00	0.00
91	0.00	0.00	0.00
92	0.00	0.00	0.00
93	0.00	0.00	0.00
94	0.00	0.00	0.00
95	0.00	0.00	0.00
96	0.00	0.00	0.00
97	0.00	0.00	0.00
98	0.00	0.00	0.00
99	0.00	0.00	0.00
100	0.00	0.00	0.00



UNIVERSITY OF  
MICHIGAN LIBRARY

00000000  
00000000  
00000000  
00000000  
00000000

00000000  
00000000  
00000000  
00000000  
00000000

00000000  
00000000  
00000000  
00000000  
00000000





S - O - L - U - C - I - O - N

EL ANCHO DE BANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ES : 9  
 LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTUVO EMPLEANDO EL METODO DE CHOLESKI, POR LO QUE ES EXACTA

CONDICION DE CARGA NUMERO : 1  
 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

DESPLAZAMIENTOS

NUDO	X	Y	Z	NUDO	X	Y	Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	10	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	11	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	12	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	13	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	14	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	15	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	16	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	17	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	18	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	19	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	20	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	21	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000	22	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.0000	0.0000	23	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	24	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	25	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	26	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	27	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	28	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	29	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.0000	0.0000	0.0000	30	0.0000	0.0000	0.0000
22	0.0000	0.0000	0.0000	31	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.0000	0.0000	0.0000	32	0.0000	0.0000	0.0000
24	0.0000	0.0000	0.0000	33	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000	0.0000	34	0.0000	0.0000	0.0000
26	0.0000	0.0000	0.0000	35	0.0000	0.0000	0.0000
27	0.0000	0.0000	0.0000	36	0.0000	0.0000	0.0000
28	0.0000	0.0000	0.0000	37	0.0000	0.0000	0.0000
29	0.0000	0.0000	0.0000	38	0.0000	0.0000	0.0000
30	0.0000	0.0000	0.0000	39	0.0000	0.0000	0.0000
31	0.0000	0.0000	0.0000	40	0.0000	0.0000	0.0000
32	0.0000	0.0000	0.0000	41	0.0000	0.0000	0.0000
33	0.0000	0.0000	0.0000	42	0.0000	0.0000	0.0000
34	0.0000	0.0000	0.0000	43	0.0000	0.0000	0.0000
35	0.0000	0.0000	0.0000	44	0.0000	0.0000	0.0000
36	0.0000	0.0000	0.0000	45	0.0000	0.0000	0.0000
37	0.0000	0.0000	0.0000	46	0.0000	0.0000	0.0000
38	0.0000	0.0000	0.0000	47	0.0000	0.0000	0.0000
39	0.0000	0.0000	0.0000	48	0.0000	0.0000	0.0000
40	0.0000	0.0000	0.0000	49	0.0000	0.0000	0.0000
41	0.0000	0.0000	0.0000	50	0.0000	0.0000	0.0000
42	0.0000	0.0000	0.0000	51	0.0000	0.0000	0.0000
43	0.0000	0.0000	0.0000	52	0.0000	0.0000	0.0000
44	0.0000	0.0000	0.0000	53	0.0000	0.0000	0.0000
45	0.0000	0.0000	0.0000	54	0.0000	0.0000	0.0000
46	0.0000	0.0000	0.0000	55	0.0000	0.0000	0.0000
47	0.0000	0.0000	0.0000	56	0.0000	0.0000	0.0000
48	0.0000	0.0000	0.0000	57	0.0000	0.0000	0.0000
49	0.0000	0.0000	0.0000	58	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.0000	0.0000	0.0000	59	0.0000	0.0000	0.0000
51	0.0000	0.0000	0.0000	60	0.0000	0.0000	0.0000
52	0.0000	0.0000	0.0000	61	0.0000	0.0000	0.0000
53	0.0000	0.0000	0.0000	62	0.0000	0.0000	0.0000
54	0.0000	0.0000	0.0000	63	0.0000	0.0000	0.0000
55	0.0000	0.0000	0.0000	64	0.0000	0.0000	0.0000
56	0.0000	0.0000	0.0000	65	0.0000	0.0000	0.0000
57	0.0000	0.0000	0.0000	66	0.0000	0.0000	0.0000
58	0.0000	0.0000	0.0000	67	0.0000	0.0000	0.0000
59	0.0000	0.0000	0.0000	68	0.0000	0.0000	0.0000
60	0.0000	0.0000	0.0000	69	0.0000	0.0000	0.0000
61	0.0000	0.0000	0.0000	70	0.0000	0.0000	0.0000
62	0.0000	0.0000	0.0000	71	0.0000	0.0000	0.0000
63	0.0000	0.0000	0.0000	72	0.0000	0.0000	0.0000
64	0.0000	0.0000	0.0000	73	0.0000	0.0000	0.0000
65	0.0000	0.0000	0.0000	74	0.0000	0.0000	0.0000
66	0.0000	0.0000	0.0000	75	0.0000	0.0000	0.0000
67	0.0000	0.0000	0.0000	76	0.0000	0.0000	0.0000
68	0.0000	0.0000	0.0000	77	0.0000	0.0000	0.0000
69	0.0000	0.0000	0.0000	78	0.0000	0.0000	0.0000
70	0.0000	0.0000	0.0000	79	0.0000	0.0000	0.0000
71	0.0000	0.0000	0.0000	80	0.0000	0.0000	0.0000
72	0.0000	0.0000	0.0000	81	0.0000	0.0000	0.0000
73	0.0000	0.0000	0.0000	82	0.0000	0.0000	0.0000
74	0.0000	0.0000	0.0000	83	0.0000	0.0000	0.0000
75	0.0000	0.0000	0.0000	84	0.0000	0.0000	0.0000
76	0.0000	0.0000	0.0000	85	0.0000	0.0000	0.0000
77	0.0000	0.0000	0.0000	86	0.0000	0.0000	0.0000
78	0.0000	0.0000	0.0000	87	0.0000	0.0000	0.0000
79	0.0000	0.0000	0.0000	88	0.0000	0.0000	0.0000
80	0.0000	0.0000	0.0000	89	0.0000	0.0000	0.0000
81	0.0000	0.0000	0.0000	90	0.0000	0.0000	0.0000
82	0.0000	0.0000	0.0000	91	0.0000	0.0000	0.0000
83	0.0000	0.0000	0.0000	92	0.0000	0.0000	0.0000
84	0.0000	0.0000	0.0000	93	0.0000	0.0000	0.0000
85	0.0000	0.0000	0.0000	94	0.0000	0.0000	0.0000
86	0.0000	0.0000	0.0000	95	0.0000	0.0000	0.0000
87	0.0000	0.0000	0.0000	96	0.0000	0.0000	0.0000
88	0.0000	0.0000	0.0000	97	0.0000	0.0000	0.0000
89	0.0000	0.0000	0.0000	98	0.0000	0.0000	0.0000
90	0.0000	0.0000	0.0000	99	0.0000	0.0000	0.0000
91	0.0000	0.0000	0.0000	100	0.0000	0.0000	0.0000

FUERZAS EN LAS BARRAS (-) COMPRESION (+) TENSION









BIBLIOGRAFIA .-

- 1.- Apuntes tomados por el autor en las materias "TOPICOS ESTRUCTURALES Y APLICACION DE LAS COMPUTADORAS AL ANALISIS ESTRUCTURAL" y "TEORIA GENERAL DE ESTRUCTURAS I" impartidas por el Ing. Julio E. Dany Ríos en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.
- 2.- WHITE, GERGELY y SEXSMITH. "Estructuras Estáticamente Indeterminadas". Volumen 2 de la serie Ingeniería Estructural. Editorial Limusa, S.A. México (1977).
- 3.- KARDESTUNGER, H. "Introducción al Análisis Estructural con Matrices". McGraw-Hill de México, S.A. de C.V. México (1975).
- 4.- POPOV, E P. "Introducción a la Mecánica de Sólidos". Editorial Limusa, S.A. México (1976).
- 5.- BEAUFAIT, ROWAN, HOADLEY and HACKETT. "Computer Methods of Structural Analysis". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1970).
- 6.- AYRES Jr, F. "Matrices". Serie de Compendios Schaum. McGraw-Hill de México, S.A. de C.V. México (1969).
- 7.- CARACCIOLI y GUERRERO. "Manual de Uso del Paquete STRESS para el Sistema B-6700". Centro de Servicios de Computo, UNAM. México (1979).
- 8.- "Manual de Diseño por Viento". Publicación No. 407 - del Instituto de Ingeniería, UNAM. México (1977).
- 9.- "Fortran, Reference Manual". B-7000/B-6000 Series, - Burroughs Corporation. Detroit, Mich. (1978).