Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE QUIMICA

METODO ANALITICO PARA CALCULAR LA CAIDA DE PRESION EN UN SISTEMA NO ISOTERMICO

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Titulo de

INGENIERO QUIMICO

presenta

LUIS H. DE J. ESPINOSA BECERRA

1982

C O N T E N I D O

I. INTRODUCCION

Ocasionalmente, existe la necesidad de transportar líquidos viscosos en ductos circulares. La Ingeniería Química puede definirse como: "....la aplicación de los principios de las ciencias físicas, junto con los principios de la economía y relaciones humanas, a campos pertinentes directamente a procesos y equipo de proceso en los cuales la materia es tratada para efectuar un cambio en su estado, contenido de energía o composición...." (Ref. 11). Esta vaga definición es intencionalmente amplia e indefinida por ser así el ámbito de aplicación de la Ingeniería Química. Generalmente, los procesos requieren que se transporte la materia de un lugar a otro; por lo cual corresponde al Ingeniero Químico efectuar el cálculo y diseño de los equipos involucrados en el flujo de fluidos.

El transporte de líquidos de alta viscosidad involucra pérdidas de energía por fricción que generalmente son muy grandes. En estas condiciones serían necesarias instalaciones de bombeo de alta capacidad, lo cual implicaría una inversión inicial elevada, y así mismo altos costos de operación.

Por lo tanto, es deseable disminuir las pérdidas de energía por fricción, y una forma de lograrlo es reducir la viscosidad del líquido mediante calentamiento, -- considerando las limitantes que el caso particular tenga, como podría ser el punto de inflamación del líquido.

Un sistema que transporte un fluido viscoso a temperatura mayor que la ambiente, disipará calor, con la -- subsecuente disminución de la temperatura del fluido. Esto a su vez dá como resultado un aumento en la viscosidad que generalmente es de varias veces la viscosidad inicial. En estas condiciones el uso de la temperatura promedio o de la viscosidad promedio para calcular la caída de presión, da un error cuya magnitud dependerá de las características del sistema en cuestión pero que generalmente es grande.

Una alternativa de solución a este problema es -- subdividir la línea de transporte en pequeños segmentos - para los cuales sea válido usar condiciones promedio para el cálculo de la caída de presión en ese segmento. De esta manera sumando la caída de presión de todos los segmentos se puede obtener la caída de presión en toda la línea. Este método es particularmente aplicable si se dispone de una computadora de mediana capacidad, dado que involucra - un gran número de cálculos.

Otra manera de obtener la caída de presión en un sistema del tipo considerado es aplicar el método gráfico descrito por Lothholz (Ref. 1), el cual será presentado posteriormente.

El propósito de este trabajo es el de desarrollar un método analítico que permita el cálculo de la caída de presión en un sistema que transporte líquidos viscosos con calentamiento inicial. Al contar con tal método analítico, es posible calcular la caída de presión usando una calculadora de bolsillo, y además se - preveen aplicaciones en diseño y optimización de este tipo de sistemas.

Dado que la aplicación más común del transporte de fluídos viscosos con calentamiento inicial es en el manejo de crudos o fracciones de petróleo, el desarrollo del método estará enfocado a resolver este problema.

II. ANALISIS Y PLANTEAMIENTO GENERAL DEL SISTEMA

En general, el sistema que se estudiará es una tubería que transporta un líquido que ha sido calentado al inicio de la línea de transporte.

II.1 BALANCE DE ENERGIA MECANICA

Para el sistema considerado, el balance total de energía mecánica tomando como base 1 lb. de fluído transportado puede expresarse en forma diferencial de la siguiente manera (Ref. 2):

$$\frac{g}{gc} \, d\,Z + v \, d\,P + \frac{VidVi}{gc} = d\,Wm - d\,Fr$$

en donde:

g = aceleración gravitacional local; ft./(seg.)(seg.)

gc = factor de conversión; 32.17 ft.-lb. masa/(seg.) -- (seg.) (lb. fuerza)

NOTA: Por ser de uso común en la literatura disponible, en este trabajo se usarán unidades del Sistema -- Inglés.

Z = distancia vertical por encima de un plano de referencia arbitrariamente escogido; ft.

v = volumen específico del fluído; ft. cub./lb. masa.

P = presión absoluta, lb. fuerza/ft. cuad.

Vi = velocidad puntual lineal del fluído; ft./(seg.).

Wm = trabajo mecánico impartido al fluído por una fuente externa al sistema; ft.lb. fuerza/lb. masa.

Fr = pérdida de energía mecánica debida a fricción; ft.-lb. fuerza/lb. masa.

La integración del balance de energía mecánica entre el "punto 1", donde el fluído entra al sistema y el "punto 2", donde el fluído sale del sistema da:

$$Z_1 \frac{g}{gc} - \int_1^2 v\, d\, P + \frac{V1^2}{2\alpha gc} + Wm = Z_2 \frac{g}{gc} + \frac{V2^2}{2\alpha gc} + \Sigma\, Fr$$

en donde V es la velocidad lineal promedio, ft./(seg.), y es el coeficiente de corrección requerido para compensar el uso de la velocidad promedio. Si el flujo es turbulento $\alpha = 1.0$, y si el flujo es laminar el valor usual para $\alpha = 0.5$.

En el caso de fluídos incompresibles, el término $\int_1^2 v\, d\, P$ se puede evaluar fácilmente, ya que como el volumen específico v permanece esencialmente constante la integral definida se reduce a v (P2 - P1). Por lo tanto, para un -

fluído incompresible:

$$Wm = \Delta Z \frac{g}{gc} + \Delta\left(\frac{V^2}{2\,\alpha\,gc}\right) + v\ (P2 - P1) + \Sigma\,Fr \qquad (1)$$

Los tres primeros términos del miembro derecho de la ecuación (1) generalmente se pueden evaluar fácilmente a partir de las características de configuración del sistema, sin embargo para un sistema como el que estamos considerando, la evaluación de la energía perdida por fricción, Σ Fr, requiere de un análisis detallado.

II.1.1 Pérdidas de Energía por Fricción

En un sistema de flujo de fluídos, los efectos de la fricción son extremadamente importantes, dado que en muchos casos la fricción puede ser la principal resistencia que se oponga al flujo de un fluído a través de un sistema dado; tal es el caso del sistema que estamos considerando.

El efecto de fricción es el resultado de la resistencia interna que opone el fluído a deformarse inelásticamente cuando se le aplica una fuerza, ésto es, a fluir. Considerando un sistema en estado estable con flujo totalmente desarrollado; en un ducto circular se presenta un gradiente de velocidad, $\frac{dV}{dy}$, a lo largo de la sección transversal del ducto. Para mantener este gradiente de velocidad es necesario aplicar un esfuerzo cortante, τ (fuerza/aérea transversal al gradiente de velocidad), pues de lo contrario el fluído eventualmente alcanzará el estado de reposo.

En un fluído newtoniano el esfuerzo cortante necesario es directamente proporcional al gradiente de velocidad,

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} , \tag{2}$$

en donde la constante de proporcionalidad μ se conoce como la viscosidad del fluído.

Las dimensiones del esfuerzo τ en la ecuación (2) son: fuerza/áerea; que se pueden escribir como: (masa) (velocidad)/(tiempo) (área), o sea momentum/tiempo-área; es decir, un flux de momentum. Desde este punto de vista, la resistencia al flujo se puede considerar como la mayor o menor facilidad de transferir momentum.

Lo anterior se puede visualizar si consideramos el fluído constituído por capas con diferentes velocidades. Si se transfiere una molécula de una capa de fluído con una velocidad lineal neta (en el sentido del flujo) a otra capa de fluído de menor velocidad, al chocar esta molécula con una de menor velocidad le transfiere momentum, aumentando - su velocidad. El caso contrario tendría el efecto de retardar la velocidad de la capa más rápida. El efecto neto de- este fenómeno es el de transferir momentum en dirección paralela, y es necesaria una cierta fuerza/unidad de área para mantener este gradiente de velocidad.

La viscosidad es una propiedad que depende solamente del estado (presión, temperatura y composición) del fluído. Aunque en la descripción precedente de transferencia - de momentum se consideraron capas de fluído, es decir, flujo laminar; la ecuación (2) es válida para flujo turbulento tomando en cuenta la velocidad instantánea en un punto - dado, aún cuando ésta sea función del tiempo; después de - todo, la viscosidad es una propiedad del fluído.

Un método empírico de correlacionar fenómenos observados es mediante el uso de ecuaciones fenomenológicas, que en general tienen la forma:

flux = (difusividad) (gradiente de concentración) (3)

En el caso de transferencia de momentum, como ya -- se ha indicado, el esfuerzo τ lo podemos considerar como - un flux de momentum. Si se multiplica y divide el miembro- derecho de la ecuación (2) por la densidad ρ , obtenemos:

$$\tau = \frac{\mu}{\rho} \quad \frac{d\ (\rho V)}{d\ y} = \nu \left(- \frac{d\ (\frac{m\ V}{v})}{d\ y} \right) \qquad (4)$$

Ya que (mV/v) representa concentración de momentum, podemos considerar a $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ como el coeficiente de difusividad de momentum, el cual se conoce comunmente como viscosidad cinemática y tiene dimensiones de área/tiempo (Ref. 3).

Por todo lo anteriormente expuesto, no es difícil comprender por qué cuando un fluído fluye en un ducto, las pérdidas de energía por fricción dependen de las siguientes variables:

μ = viscosidad del fluído
ρ = densidad del fluído
V = velocidad media del fluído
Di = diámetro interno del ducto
L = longitud del ducto
ϵ = rugosidad de la pared interna del ducto.

Aplicando el método de análisis dimensional a estas variables, puede obtenerse la expresión conocida como la ecuación de Fanning, la cual permite evaluar las pérdidas de energía por fricción:

$$dFr = \frac{dPf}{\rho} = \frac{2\ fr\ V^2\ d\ L}{gc\ Di} \tag{5}$$

El factor de fricción fr se obtiene experimentalmente, y se ha encontrado que su valor es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de la tubería (ϵ/D). Cuando el flujo es laminar (número de Reynolds menor de 2100), el factor de fricción es independiente de la rugosidad relativa. Sin embargo, en general y para una rugosidad relativa dada, se puede expresar el factor de fricción en función del número de Reynolds (Re) mediante una ecuación de la forma:

$$fr = \frac{m}{(Re)^n}, \tag{6}$$

en donde m y n son constantes positivas.

Algunas expresiones para el factor de fricción son las siguientes: (Ref. 2)

Para número de Reynolds menor de 2100:

$$16 \tag{7}$$

de Reynolds mayor de 2100:

Para tubo liso: $$fr = \frac{0.046}{(Re)^{0.2}} \tag{8}$$
(ϵ=0.000005 ft.)

Para tubo de fierro o acero:
(ϵ=0.00015 ft.) $$fr = \frac{0.04}{(Re)^{0.16}} \tag{9}$$

Ya que el número de Reynolds se expresa como:

$$Re = \frac{Di\ V\rho}{\mu} \tag{10}$$

o también:

$$Re = \frac{Di\ V}{\nu} \tag{11}$$

De la ecuación (6) se deduce que el factor de fricción es función de la viscosidad cinemática. Siendo a su vez la viscosidad cinemática función de la temperatura, el factor de fricción depende de la temperatura.

En el sistema que estamos considerando la temperatura varía a lo largo de la tubería, y para poder evaluar el factor de fricción en un punto dado es necesario conocer la temperatura en ese punto. A continuación se determinará el perfil de temperaturas para la línea de transporte.

II.2 DETERMINACION DEL PERFIL DE TEMPERATURA

Para obtener la temperatura del fluído como función de la distancia, se hará un balance de calor en un elemento de volumen para después integrarse este balance sobre toda la longitud de la tubería.

II.2.1 Balance de Calor en un Elemento de Volumen

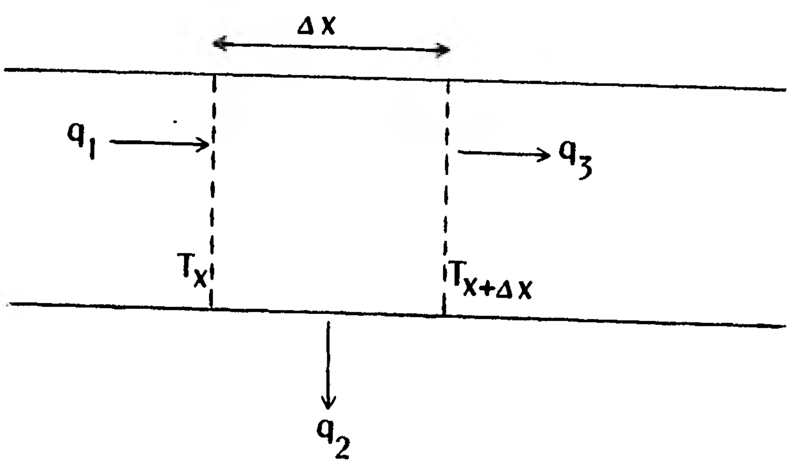


FIGURA 1

Con referencia a la figura 1, el balance de calor para el elemento de volumen se puede expresar como:

$$q_2 = q_1 - q_3 \tag{12}$$

en donde:

q_1 = velocidad de transferencia de calor por flujo del - fluído hacia el elemento de volumen.

q_2 = velocidad de transferencia de calor que sale del -- elemento de volumen por convección y radiación.

q_3 = velocidad de transferencia de calor por flujo del - fluído fuera del elemento de volumen.

Es decir, el calor que se disipa a los alrededores- es igual a la diferencia del calor que entra al elemento - por flujo del fluído menos el calor que sale por flujo del- fluído.

La diferencia $q_1 - q_3$ se obtiene:

$$q_1 - q_3 = (Mf)\ (Cp)\ (Tx - Tx + \Delta x) \tag{13}$$

en donde:

Mf = flujo de masa; lb./hr.

Cp = capacidad calórica; BTU/(lb.) (°F)

X = distancia a partir del extremo caliente de la línea; ft.

Tx = temperatura en el punto X; °F

$Tx+\Delta x$ = temperatura en el punto $X + \Delta X$; °F.

Ya que el volumen generado por unidad de tiempo puede expresarse en función de la velocidad lineal media del fluído como:

$$v' = S\ V, \tag{14}$$

siendo

S = área transversal interna; ft^2

V = velocidad lineal media; ft/hr.

v' = volumen; ft^3/hr.

y además tenemos:

$$Mf = \rho\ v'$$
$$S = \pi \frac{Di^2}{4} \quad ,$$

$$q_1 - q_3 = \frac{\pi}{4} \quad \rho\ Di^2\ V\ Cp\ (Tx - Tx + \Delta x) \tag{15}$$

Por otra parte, el calor disipado q_2, puede obtenerse por:

$$q_2 = UeSe \quad (\bar{T} - Ta) \tag{16}$$

en donde:

Ue = coeficiente total de transferencia de calor referido a la superficie externa del ducto; BTU/(hr.) - (ft.cuad.) (°F).

Se = superficie externa del ducto en el elemento considerado; ft.^{2}

$\bar{T}$ = temperatura media en el elemento de volumen; °F

Ta = temperatura ambiente; °F.

El área externa de la tubería es:

$$Se = \pi De \Delta X \tag{17}$$

siendo

De = diámetro externo del ducto.

Por lo tanto:

$$q_2 = Ue \pi De \Delta X (\bar{T} - Ta) \tag{18}$$

Sustituyendo las ecuaciones (15) y (18) en la ecuación (12) obtenemos:

$$Ue \pi De \Delta X(\bar{T} - Ta) = \frac{\pi}{4} \rho Di^2 VCp (Tx - Tx+\Delta x)$$

Para un elemento diferencial de volumen, es decir, al tender $\Delta X \longrightarrow 0$, obtenemos:

$$\pi UeDe (T-Ta) dx = \frac{\pi}{4} \rho Di^2 VCp (-dT) \tag{19}$$

Rearreglando y separando variables:

$$\frac{-4UeDe}{\rho\, Di^2 VCp}\ dx = \frac{dT}{T-Ta} \qquad (20)$$

Integrando entre límites para una distancia X dada:

$$\frac{-4UeDe}{\rho\, Di^2 VCp}\ \int_0^X dx = \int_{To}^{Tx} \frac{dt}{T-Ta} \qquad (21)$$

$$\frac{-4UeDe}{\rho\, Di^2 VCp}\ (X) = \ln\ (Tx-Ta) - \ln\ (To-Ta)$$

Elevando **e** a cada uno de los miembros de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{Tx - Ta}{To - Ta} = e^{-(4UeDe/\ \ Di^2VCp)(X)} \qquad (22)$$

$$Tx = e^{-(4UeDe/\ \ Di^2VCp)(X)}\ (To-Ta) + Ta \qquad (23)$$

La ecuación (23) nos proporciona la temperatura del fluído en cualquier punto de la línea.

La ecuación (21) nos muestra que la integración se-realizó asumiendo un valor singular del coeficiente total de transferencia de calor Ue. Esto es razonable y se considera una manera práctica y precisa de cálculo como se verá posteriormente. Así mismo, aunque la densidad y la capacidad calórica varáin con la temperatura, el producto ρ Cp se mantiene prácticamente constante así como la velocidad media V.

II.3 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Para llevar a cabo el transporte de crudos o fracciones pesadas de petróleo, generalmente la tubería que las maneja se entierra sin o con algún recubrimiento aislante.- Cuando no se entierra la tubería, es práctica común aislarla con materiales como espuma de poliuretano.

En el caso de tuberías enterradas, que es el caso que estamos considerando, las pérdidas de calor son controladas por las condiciones del suelo, y/o por las características del aislante; por lo tanto, no es necesario generalmente, considerar las variaciones del coeficiente individual de película debidas a cambios de temperatura.

Sin embargo, en el desarrollo de las ecuaciones generales del sistema se considerará la contribución del coeficiente individual de película del lado del líquido hL, pa ra mostrar con mayor claridad lo antes dicho.

II.3.1 Coeficientes Individuales de Película

1).- El coeficiente hL se puede obtener, para régimen laminar por (Ref. 4):

$$hL = \frac{Ko}{Di} (1.86) \quad (Re\ Pr\ Di)^{1/3} \qquad (24)$$

donde:

Ko = conductividad térmica del líquido

$$Re = \frac{Di\ \rho\ V}{\mu}$$

$$Pr = \frac{Cp\ \mu}{Ko}$$

El producto $Re\ Pr = \frac{Di\ V\ \rho\ Cp}{Ko}$

y la ecuación (24) queda:

$$hL = \frac{Ko}{Di} (1.86) \quad \left(\frac{Di^2\ V\ Cp\ \rho}{Ko}\right)^{1/3} \qquad (25)$$

2).- Para régimen turbulento, Re mayor de 2100; el coeficiente hL se puede obtener por (Ref. 4):

$$hL = \left(\frac{Ko}{Di}\right) \quad (0.023) \ (Re)^{0.8} \ (Pr)^{0.4} \qquad (26)$$

Haciendo la misma consideración anterior, el producto:

$$(Re)^{0.8}(Pr)^{0.4} = \frac{(Di\ V\rho)^{0.8}}{\mu^{0.8}} \quad \frac{(Cp)^{0.4}(\mu)^{0.4}}{Ko^{0.4}}$$

$$(Re)^{0.8}(Pr)^{0.4} = \left(\frac{DiV^{0.8}\ \rho^{0.8}Cp^{0.4}}{Ko^{0.4}}\right)\ (\mu)^{-0.4} \qquad (27)$$

Podemos observar en este caso que:

$$hL = (\text{constante})\ \ (\mu)^{-0.4} \qquad (28)$$

ya que las demás variables permanecen aproximadamente constantes.

II.3.2 Coeficientes Totales de Transferencia de Calor

1).- Para el caso de una tubería enterrada sin aislante:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{hL} + \frac{\varepsilon}{KM} + \frac{P}{KT} \qquad (29)$$

en donde:

ε = espesor del ducto

KM = conductividad térmica del ducto

P = profundidad a la que se entierra el ducto

KT = conductividad térmica del suelo.

Es posible evaluar cada uno de los términos del miembro derecho de la ecuación (29) por medios experimentales para aplicarlos a un suelo y una situación particular; sin embargo, en el presente trabajo consideramos algunos coeficientes totales de transferencia de calor publicados (Ref. 1) y que se muestran en la tabla 1.

TABLA 1

SUELO	PROFUNDIDAD	CONDICION	U
Arenoso	2ft.	Seco	0.25 a 0.40
Arenoso	2ft.	Húmedo	0.50 a 0.60
Arenoso	2ft.	Mojado	1.1 a 1.3
Arenoso	8in.	Seco	0.60 a 0.70
Arenoso	8in.	Húmedo	1.20 a 2.40
Lodoso	2ft.	Seco	0.20 a 0.30
Lodoso	2ft.	Húmedo	0.40 a 0.50
Lodoso	2ft.	Mojado	0.60 a 0.90

En la anterior tabla se consideran los valores de U en BTU/(hr.)(sq.ft.) (°F), para tubería sin recubrimiento. Los valores dados en la tabla se reducen un 15% si la tubería se recubriera con 0.5 in. de asfalto, y si la profundidad aumentara a 3 ft. el coeficiente correspondiente a 2 ft. de profundidad se reduciría de 15% a 20%.

Unicamente para ilustrar la pequeña contribución de hL al valor del coeficiente total de transferencia de calor U, consideremos el siguiente caso de una tubería enterrada en suelo arcilloso húmedo:

Propiedades del fluído:

a 170°F	a 100°F
Ko = 0.068	Ko = 0.0695 BTU/hr. $(ft.)^2$ (°F/ft.)
Cp = 0.45 BTU/lb.(°F)	Cp = 0.425 BTU/lb. (°F)
ρ = 56.78 lb/ft^3	ρ = 59.28 lb/ft^3
ν = 82.7 cstk.	ν = 707 cstk.

De acuerdo a la ecuación (25)

hL a 170°F = 91.5855

hL a 100°F = 90.4942

Considerando el valor a 100°F

$$\frac{1}{90.4942} = 0.01105$$

$$U = 0.40 \quad ; \quad \frac{1}{U} = 2.50$$

La contribución de hL al valor de

$$U \text{ es } \frac{0.01105}{2.50} \times 100 = 0.4\%$$

Es evidente que tanto la variación de hL de un extremo caliente al frío, así como la contribución al valor de U son despreciables, por lo que se justifica usar un valor singular de U.

2).- Para una tubería bien aislada, (Ref.4)

$$U = \frac{1}{\frac{R}{Ki} \ln \frac{D2}{D1} + \frac{1}{hL}} \qquad (30)$$

en donde:

R = radio interno de la tubería

Ki = conductividad térmica del material aislante

D2 = diámetro externo del aislamiento

D1 = diámetro interno del aislamiento

hL = coeficiente individual de película.

En este caso, si la tubería está bien aislada, la contribución de hL al valor de U también es despreciable y se puede usar un valor singular de U conociendo las propiedades del material aislante, y un valor promedio de hL.

II.4 ECUACIONES GENERALES PARA EVALUAR LA CAIDA DE PRE - SION EN EL SISTEMA CONSIDERADO

De la ecuación (5) de Fanning obtenemos:

$$-d\ P_f = \frac{2\ \rho\ fr\ V^2\ dL}{gc\ Di} \qquad (31)$$

II.4.1 Caída de presión en flujo laminar

En flujo laminar, Re < 2100,

$$fr = \frac{16}{Re} = \frac{16\ \nu}{V Di}$$

Sustituyendo en la ecuación (31):

$$-dP_f = \frac{2\ \rho\ V^2\ 16\ \nu}{gc\ \ V\ Di^2}\ dL = \frac{32\ \rho V}{gc\ Di^2}\ \nu\ dL \qquad (32)$$

Integrando hasta un L dado:

$$-\ \Delta\ P_f = \int_o^L \frac{32\ \rho\ V}{gc\ Di^2}\ \nu\ dL$$

$$-\ \Delta\ P_f = \frac{32\ \rho\ V}{gc\ Di^2} \int_o^L \nu\ dL \qquad (33)$$

Por otra parte, del balance de calor para un elemen to de volumen, tenemos de la ecuación (20):

$$dL = -\frac{\rho\, Di^2\, VCp}{4\, Ue\, De} \quad \frac{dT}{T - Ta} \tag{34}$$

Si agrupamos como:

$$M = \frac{32\, \rho\, V}{gc\, Di^2}$$

$$N = -\frac{\rho Di^2\, VCp}{4\, Ue\, De}$$

y sustituímos la diferencial de longitud de la ecuación (34) en la ecuación (33) tenemos:

$$-\Delta P_f = M \int_0^L \nu\, dL = M \int_0^L \nu\, N \frac{dT}{T-Ta}$$

$$-\Delta P_f = MN \int_0^L \nu \frac{dT}{T-Ta} \tag{35}$$

$$-\Delta P_f = MN \int_{To}^{T1} \nu \frac{dT}{T - Ta} \tag{36}$$

Por lo tanto, si se puede expresar ν en función de T, el problema de evaluar la caída de presión se reduce-al de evaluar la integral $\int_{To}^{T1} \nu \frac{dT}{T - Ta}$

II.4.2 Caída de Presión en Flujo Turbulento

En flujo turbulento, Re > 2100,

$$fr = \frac{m}{(Re)^n}$$

donde m y n son constantes positivas que dependen de la rugosidad de la pared interna del ducto.

Por lo tanto, para este caso, la ecuación (31) quedaría:

$$- d P_f = \frac{2 \rho m V^2 \nu^n dL}{gc V^n Di^{n+1}} \qquad (37)$$

Integrando y sustituyendo dL en función de dt como en el caso anterior:

$$- \Delta P_f = \frac{2 \rho m V^{(2-n)}}{gc Di^{n+1}} (N) \int_{To}^{T1} \nu^n \frac{dT}{T - Ta} \qquad (38)$$

Por lo tanto, a régimen turbulento la evaluación de la caída de presión en el sistema considerado se reduce a evaluar la integral:

$$\int_{To}^{T1} \nu^{n} \frac{dT}{T-Ta}$$

III. CALCULO DE LA CAIDA DE PRESION POR FRICCION

En este capítulo se desarrollará el método analítico para calcular la caída de presión por fricción.

III.1 MANEJO DE CRUDOS PESADOS O FRACCIONES DE PETROLEO - A FLUJO LAMINAR

La ecuación (36) del capítulo anterior:

$$- \Delta P_f = MN \int_{To}^{T1} \frac{\lambda \, dT}{T - Ta}$$

requiere que se disponga de una relación funcional entre la viscosidad cinemática y la temperatura.

Para el caso específico de productos líquidos del-- petróleo, "The American Society for Testing Materials", -- ASTM, proporciona un método Standard que relaciona temperatura con viscosidad cinemática. Este método es el ASTM - D-341-77 (Ref. 5), y en su edición de 1980 se proporcionan en el apéndice X1 las relaciones matemáticas utilizadas.

Para el rango de 2×10^7 a 2.0 cstk. y temperaturas en el rango -70°C a + 370°C, se proporciona la siguiente relación:

$$\ln \ln (\nu + 0.7) = A1 - B \ln T \quad (39)$$

en donde:

ν = viscosidad cinemática en centistokes
T = temperatura absoluta en °R o °K
A1 y B son constantes positivas.

El método D-341-77 proporciona las gráficas adecuadas para relacionar datos viscosidad-temperatura. Se incluyen copias de estas gráficas.

Para expresar explícitamente ν, elevamos e a cada uno de los miembros de la ecuación (39):

$$e^{\ln \ln (\nu + 0.7)} = e^{A1 - B \ln T}$$

$$\ln (\nu + 0.7) = e^{A1} \; e^{\ln T^{-B}}$$

$$\ln (\nu + 0.7) = e^{A1} \; T^{-B} \quad (40)$$

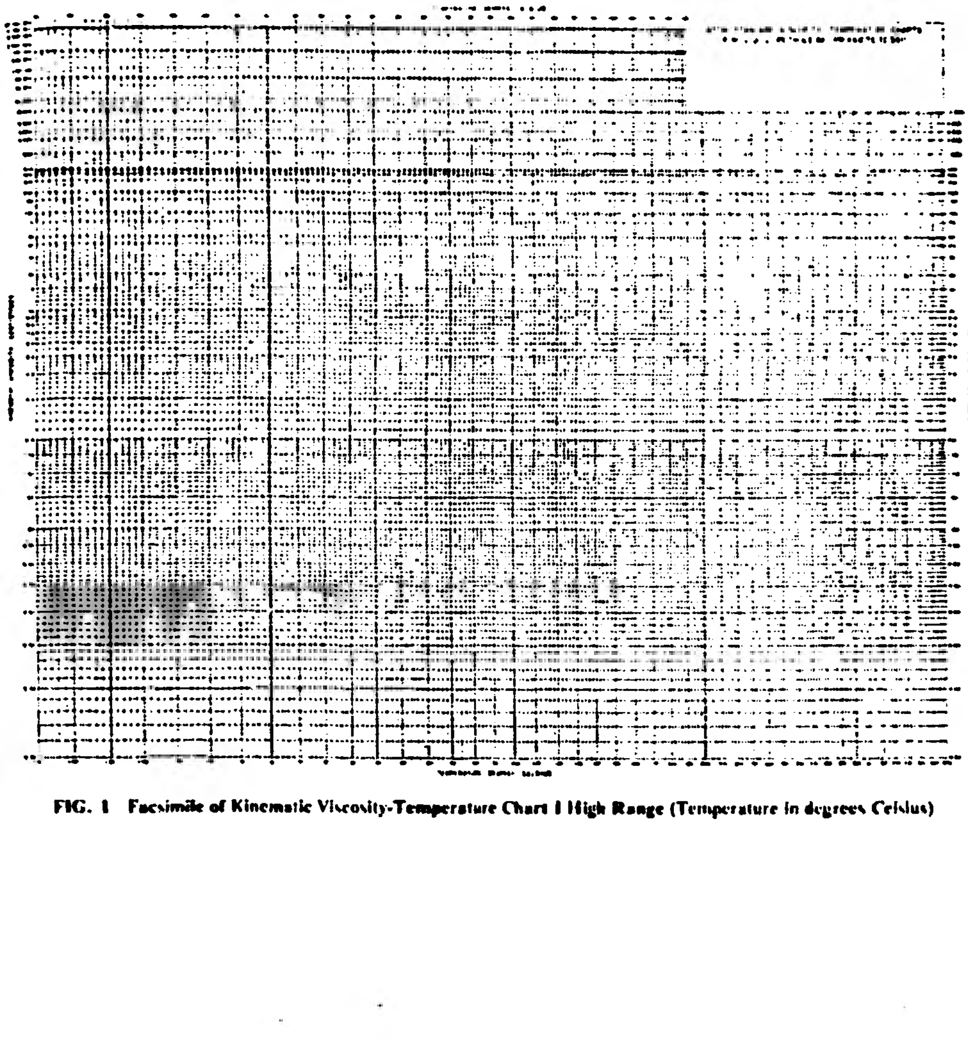


FIG. 1 Facsimile of Kinematic Viscosity-Temperature Chart I High Range (Temperature in degrees Celsius)

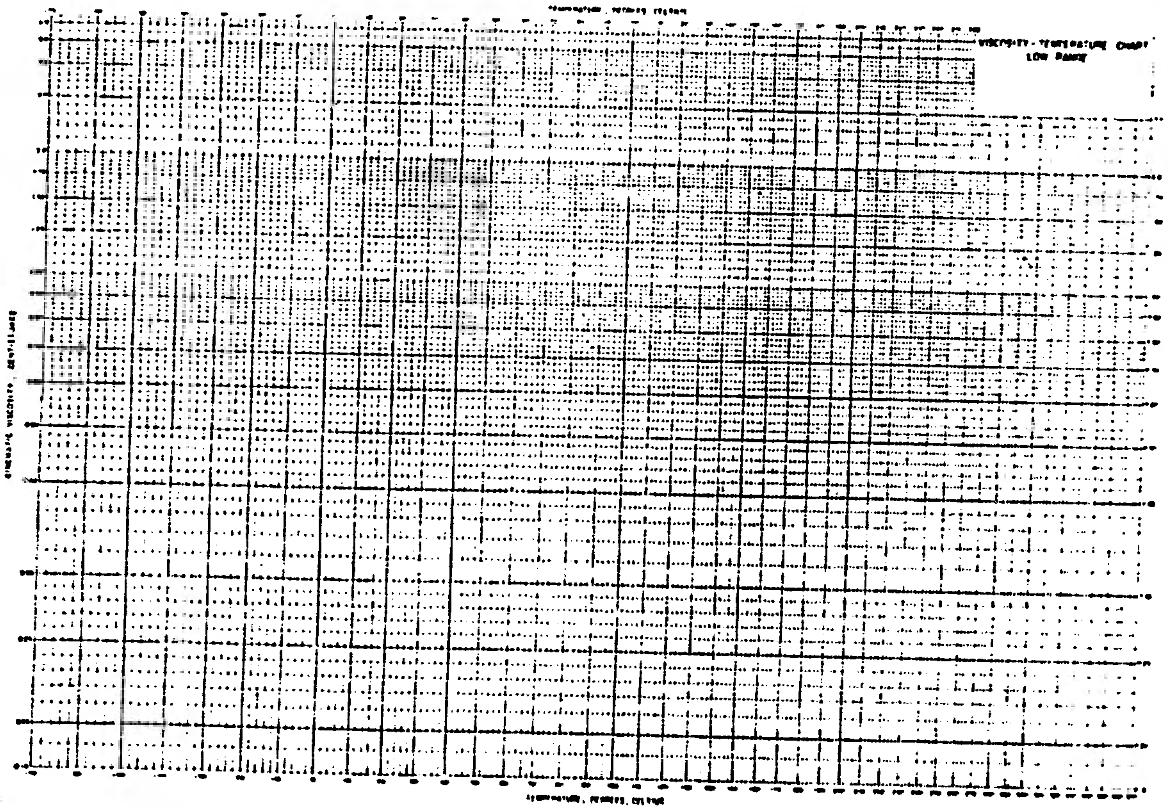


FIG. 2 Facsimile of Kinematic Viscosity-Temperature Chart II Low Range (Temperature in degrees Celsius)

Si A = e^{A1}, y elevando nuevamente e a cada uno - de los miembros de la ecuación (40):

$$e^{\ln(\nu+0.7)} = e^{AT^{-B}}$$

$$(\nu + 0.7) = e^{AT^{-B}}$$

$$\nu = e^{AT^{-B}} - 0.7 \qquad (41)$$

Para una fracción de petróleo dada se pueden obte - ner experimentalmente dos juegos de datos temperatura-viscosidad. Con los dos pares de datos es posible obtener los - valores de A y B, en la ecuación (41), que caracterizarán - la curva viscosidad-temperatura para ese líquido en particular. Esto lo obtenemos:

Si a T_1 corresponde ν_1

a T_2 corresponde ν_2

$K = \ln \ln (\nu + 0.7)$

$L = \ln T$

$$K_1 = A_1 - B L_1 \qquad (42)$$

$$K_2 = A_1 - B L_2 \qquad (43)$$

De (42): $A_1 = K_1 + B\,L_1$

Sustituyendo en (43):

$$K_1 + BL_1 = K_2 + BL_2 \tag{44}$$

$$B\,(L_1 - L_2) = K_2 - K_1$$

$$B = \frac{K_2 - K_1}{L_1 - L_2} \tag{45}$$

o también:

$$B = \frac{\ln \ln (\nu_2 + 0.7) - \ln \ln (\nu_1 + 0.7)}{\ln T_1 - \ln T_2} \tag{46}$$

Una vez obtenido B, obtenemos:

$$A_1 = \ln \ln (\nu_1 + 0.7) + B \ln T_1 \tag{47}$$

Habiendo obtenido A_1, tenemos que:

$$A = e^{A1} \tag{48}$$

Sustituyendo la ecuación (41) en la integral de la-ecuación (36) nos da la integral:

$$\int_{To}^{T1} \frac{\nu}{T - Ta}\,dT = \int_{To}^{T1} \frac{e^{AT^{-B}}}{T - Ta}\,dT - \int_{To}^{T1} \frac{0.7\,dT}{T - Ta} \tag{49}$$

Ahora, nuestro problema se reduce a evaluar:

$$\int_{To}^{T1} \frac{e^{AT^{-B}}}{T - Ta} \, dT \qquad (50)$$

III.1.1 Evaluación de la integral $\int_{To}^{T1} \frac{e^{AT^{-B}}}{T - Ta} \, dT$

La integral $\int \frac{e^{AT^{-B}}}{T - Ta} \, dT$ no es una integral elemental y no puede ser evaluada por las técnicas normales de integración.

Ante esta situación generalmente existen las alternativas de:

1).- Utilizar métodos numéricos de integración, la cual no se consideró en el presente trabajo pues su propósito es encontrar un método analítico.

2).- Aplicar alguna transformada integral. Para esta alternativa, se pensó en aplicar la transformada de Laplace a la función a integrar haciendo uso del teorema de traslación:

$$\mathcal{L}\left[e^{at} \, (f \, (t) \,) \right] = F \, (s - a) \qquad (51)$$

y del teorema de integración para la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f\ (t)\ dT\right) = \frac{1}{s}\ \mathcal{L}\left(f\ (t)\right) \qquad (52)$$

Es decir, si consideramos $t = T^{-B}$; $T = t^{-1/B}$ y la función a integrar la podríamos expresar (50) como:

$$\int \frac{e^{At}\ t^{(1/B\ -1)}}{(-B)\ (t^{C}-Ta)}\ dt \ ; \quad \text{es decir}$$

f (t) en la ecuación (51) sería:

$$f(t) = \frac{t^{(+\ 1/B\ -\ 1)}}{(-B)\ (t^{C}\ -\ Ta)}$$

Sin embargo, la transformada

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{\ (1/B\ -\ 1)}}{(-B)\ \ (t^{-1/B}\ -\ Ta)}\right)$$ resulta sumamente compleja, involucrando funciones de Bessel, por lo que su utilidad práctica no es factible.

3).- Otra alternativa para evaluar la integral (50) es la de representar la función

(53) $g = \dfrac{e^{AT^{-B}}}{(T\ -\ Ta)}$, como una serie infinita.

De las diferentes expansiones en serie posibles se optó por representar la función en serie de Taylor.

A continuación, se expone el teorema de Taylor en su forma general:

Si X = variable independiente

X_o = un valor específico de X

Y = una función analítica de X.

Teorema de Taylor.- Sea $y(x)$ contínua en el intervalo I que contiene X y X_o, tal que tenga derivada n-ésima en X y derivada n+1 contínua en todo punto interior de I. - Entonces:

$$y(X) = y(X_o) + y_1 \frac{(X_o)}{1} (X-X_o) + \frac{y_2 (X_o)}{1 . 2} (X-X_o)^2 + \frac{y_3(X_o)}{1.2.3} (X-X_o)^3 + \ldots + \frac{y_n (X_o)}{1.2.3\ldots n} (X-X_o)^n + R_{n+1} (X) \qquad \ldots\ldots \qquad (54)$$

En la anterior ecuación, la notación y_n (X_o) denota la derivada n-ésima de y evaluada en X_o; y R_{n+1} (X) representa el resto de los términos de la serie.

En general, una serie de Taylor puede ser convergen te o divergente. La serie es convergente si el resto -- R_{n+1} (X) tiende a cero al tender $n \rightarrow \infty$; ésto a su vez depende del comportamiento de $y_n (X_o) \frac{(X - X_o)^n}{n!}$ para una - función y (X) y un $(X - X_o)$ dados. Es decir, existe un radio de convergencia del valor $(X - X_o)$ fuera del cual la serie es divergente y no representa la función y (X).

Para el caso de la función que nos interesa:

$g = \frac{e^{AT^{-B}}}{(T - Ta)}$, es posible trabajar dentro del radio de convergencia, lo cual asumiremos en el subsecuente - desarrollo y posteriormente se verificará en el capítulo - IV.

De acuerdo a la ecuación (54) podemos representar - la función

$$g = \frac{e^{AT^{-B}}}{(T - Ta)}$$ como una serie de Taylor; - ecuación (55):

$$g(T) = g_o (Ty) + \frac{g_1 (T_y) (T - T_y)}{1!} + \ldots + \frac{g_n (T_y)(T - T_y)^n}{n!} + R_s$$

en donde:

T_y = algún valor de temperatura dentro del radio de convergencia de la serie.

$g_n(T_y)$ = la derivada n-ésima de g valuada en T_y.

Dado que estamos asumiendo convergencia de la serie, podemos obtener una representación en serie de g(T) tan exacta como se desee al hacer crecer n.

Si definimos:

$$Z = (T - T_y)$$

$$\frac{dZ}{dT} = 1$$

$$dT = dZ$$

y para simplificar la notación consideramos:

$$g_n = g_n (T_y),$$

podemos escribir la ecuación (55) como:

$$g(T) = g_o + \frac{g_1 Z}{1!} + \frac{g_2}{2!} Z^2 + \ldots + \frac{g_n Z^n}{n!} + R_s \tag{56}$$

Si consideramos que al hacer n suficientemente grande, el resto R_s es despreciable, e integramos ambos miembros de la ecuación (56), tenemos:

$$\int g(T)\, dT = \int g_o\, d_z + \int \frac{g_1}{1!} Z\, d_z + \ldots + \int \frac{g_n Z^n}{n!}\, dZ \qquad (57)$$

$$\int g(T)\, dT = \frac{g_o\ Z}{1} + \frac{g_1}{1!}\frac{Z^2}{2} + \ldots + \frac{g_n}{n!}\frac{Z^{n+1}}{n+1}$$

$$\int g(T)\, dT = \frac{g_o Z}{1!} + \frac{g_1 Z^2}{2!} + \frac{g_2 Z^3}{3!} + \ldots + \frac{g_n Z^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (58)$$

El miembro derecho de la ecuación (58) nos proporciona el valor numérico de la integral, lo cual sería suficiente para evaluar ΔP_f, sin embargo, buscaremos una expresión funcional para $\int g(T)\, dT$, mediante las subsecuentes consideraciones.

Si observamos la ecuación (58), podemos advertir que el miembro derecho de ésta tiene la forma de una serie de Taylor a la cual le falta el primer término.

La función que representaría esta serie sería:

$$F(T) = F(T_y) + g_o\ Z + \frac{g_1 Z^2}{2!} + \frac{g_2 Z^3}{3!} + \ldots + \frac{g_n Z^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (59)$$

y por la ecuación (58) tendríamos:

$$F(T) = F\ (T_y) + \int g(T)\ dT \qquad (60)$$

$$\int g(T)\ dT = F(T) - F(T_y) \qquad (61)$$

Por otra parte, de la ecuación (59) tenemos que:

$$F_1(T_y) = g_o \qquad (62)$$

$$F_2(T_y) = g_1 \qquad (63)$$

$$F_3(T_y) = g_2 \qquad (64)$$

Esto significa que para un valor dado de T_y, pode-- mos conocer el valor numérico de las derivadas $F_n(T_y)$, aun- que no conozcamos la forma de F(T).

Acerca de la forma funcional de F(T) podemos supo - ner que contiene una función exponencial del tipo:

$$c\ e^{aT^{-b}} \qquad (65)$$

Esto es razonable, ya que tanto g(T) como $\int g(T)\ dT$

contienen alguna función exponencial de ese tipo.

Con el objeto de tener una expresión funcional manejable de la integral a evaluar, supondremos que de hecho:

$$F(T) = c e^{aT^{-b}} \tag{66}$$

en donde a, b y c son constantes.

Aunque la ecuación (66) no sea la relación funcional analíticamente exacta de F(T), podemos forzar las constantes a, b y c para que se cumpla que:

$$F_1(T_y) = g_o$$

$$F_2(T_y) = g_1$$

$$F_3(T_y) = g_2$$

Tal como lo requiere la ecuación (59).

Al cumplir las anteriores condiciones esperamos que la ecuación así obtenida nos proporcione un valor muy aproximado al valor verdadero de F(T).

Nuestro siguiente objetivo será el de encontrar los valores numéricos de las constantes a, b y c, tales que cumplan las ecuaciones (62), (63) y (64). Esto lo conseguiremos relacionando la forma funcional de las derivadas de F(T) valuadas en T_y, con sus valores numéricos proporcionados por las ecuaciones (62), (63) y (64). Esto lo haremos de la siguiente manera:

$$F = c\, e^{aT^{-b}}$$

$$\frac{dF}{dT} = c\,(-a\, b\, T^{-(b+1)})\, e^{aT^{-b}}$$

Si definimos:

$$\ell = b + 1 \qquad (67)$$

$$r = -a\, b\, T^{-\ell} \qquad (68)$$

$$\frac{dF}{dT} = F_1 = r\, F \qquad (69)$$

A su vez, la primera y segunda derivadas de r serán:

$$\frac{dr}{dT} = a\, b\, \ell\, (T^{-(\ell+1)})$$

$$r_1 = a\, b\, T^{-\ell}\, \frac{\ell}{T}$$

$$r_1 = -r \frac{\delta}{T} \tag{70}$$

$$r_2 = -r_1 \frac{\delta}{T} + r \frac{\delta}{T^2} = -r_1 \frac{\delta}{T} + r \frac{\delta}{T} (T)^{-1}$$

sustituyendo el valor de r, dado por (70), tenemos:

$$r_2 = r \frac{\delta}{T} \left(\frac{\delta}{T}\right) + r \frac{\delta}{T^2}$$

$$r_2 = r \left(\frac{\delta^2 + \delta}{T^2}\right) \tag{71}$$

Por otra parte:

$$F_2 = \frac{dF_1}{dT} = \frac{d(rF)}{dT} = r_1 F + r F_1,$$

$$F_2 = -r \frac{\delta}{T} F + r F_1$$

ya que $F_1 = r F$,

$$F_2 = -F_1 \frac{\delta}{T} + r F_1 \tag{72}$$

Sustituyendo los valores numéricos de las derivadas de F(T) valuadas en T_y, según las ecuaciones (62) y (63); - tenemos:

$$F_2(T_y) = -F_1(T_y) \frac{\delta}{T_y} + r_y F_1 (T_y)$$

$$g_1 = - g_o \frac{b}{T_y} + r_y \; g_o \tag{73}$$

en donde $r_y = r$, valuada en T_y.

Despejando r_y:

$$r_y = \frac{g_1}{g_o} + \frac{b}{T_y} \tag{74}$$

La tercer derivada de F(T) es:

$$F_3 = \frac{dF_2}{dT} = \frac{d}{dT} \; (r_1 \; F + r \; F_1)$$

$$F_3 = r_2 \; F + r_1 \; F_1 + r_1 \; F_1 + r \; F_2$$

$$F_3 = r_2 \; F + 2 \; r_1 \; F_1 + r \; F_2$$

Sustituyendo las ecuaciones (70) y (71) en la ecuación anterior:

$$F_3 = r \; (\frac{b^2 + b}{T^2}) \; F + 2 \; (-r \; \frac{b}{T}) \; F_1 + r \; F_2$$

$$F_3 = F_1 \; (\frac{b^2 + b}{T^2}) - 2 \; F_1 \; r \; \frac{b}{T} + F_2 \; r$$

$$F_3 = r \; (F_2 - 2 \; F_1 \; \frac{b}{T}) + F_1 \; (\frac{b^2 + b}{T^2}) \tag{75}$$

La ecuación (75) valuada en T_y es:

$$F_3(T_y) = r_y \left(F_2(T_y) - 2F_1(T_y)\frac{\delta}{T_y}\right) + F_1(T_y)\left(\frac{\delta^2+\delta}{T_y^{\,2}}\right)$$

y de acuerdo a las ecuaciones (62) y (63):

$$g_2 = r_y \left(g_1 - 2 g_o \frac{\delta}{T_y}\right) + g_o \left(\frac{\delta^2+\delta}{T_y^{\,2}}\right) \qquad (76)$$

Sustituyendo la ecuación (74) en la ecuación (76) - tenemos:

$$g_2 = \left(\frac{g_1^{\,2}}{g_o} + g_1 \frac{\delta}{T_y} - 2 g_1 \frac{\delta}{T_y} - 2 g_o \frac{\delta^2}{T_y^{\,2}}\right) + \frac{g_o \delta^2}{T_y^{\,2}}$$

$$+ g_o \frac{\delta}{T_y^{\,2}}$$

$$g_2 = \frac{g_1^{\,2}}{g_o} - g_1 \frac{\delta}{T_y} - g_o \frac{\delta^2}{T_y^{\,2}} + g_o \frac{\delta}{T_y^{\,2}}$$

multiplicando ambos miembros por $T_y^{\,2}$:

$$T_y^{\,2} g_2 = T_y^{\,2} \frac{g_1^{\,2}}{g_o} - g_1 \delta T_y - g_o \delta^2 + g_o \delta$$

$$T_y^{\,2} g_2 = - g_o \delta^2 + (g_o - g_1 T_y)\, \delta + \frac{g_1^{\,2} T_y^{\,2}}{g_o}$$

$$- g_o \delta^2 + (g_o - g_1 T_y)\, \delta + \left(\frac{g_1^{\,2} T_y^{\,2}}{g_o} - T_y^{\,2} g_2\right) = 0 \qquad (77)$$

La ecuación (77) es una ecuación cuadrática en δ. -

Por lo tanto, si llamamos:

$$Q = -g_o \tag{78}$$

$$R = (g_o - g_1 T_y) \tag{79}$$

$$S = \left(T_y^{\,2} \left(\frac{g_1^{\,2}}{g_o} - g_2\right)\right) \tag{80}$$

las raíces de γ las podemos obtener por:

$$\gamma = \frac{-R \pm (R^2 - 4QS)^{1/2}}{2Q} \tag{81}$$

Ya que conocemos Q, R y S para un T_y dado, podemos calcular γ.

Una vez obtenido γ, se calculan los valores de b, a y c como sigue:

$$b = \gamma - 1.0 \tag{82}$$

Ya que $r_y = -a\, b\, T_y^{-(b+1)}$,

$$a = \frac{-r_y\, T_y^{-(b+1)}}{b} \tag{83}$$

Sustituyendo el valor de r_y de la ecuación (74) en-la ecuación (83), obtenemos el valor de a:

$$a = -\left(\frac{g_1}{g_0} + \frac{b}{T_y}\right) \frac{T_y^{(b+1)}}{b} \tag{84}$$

ya que: $F_1(T_y) = r_y \, F(T_y)$,

$$g_o = r_y \, c \, e^{aT_y^{-b}} \tag{86}$$

por lo tanto, despejando c:

$$c = \frac{g_o}{r_y \, e^{aT_y^{-b}}} \tag{87}$$

Sustituyendo la ecuación (74) en la ecuación (87) - encontramos el valor de c:

$$c = \frac{g_o}{\left(\frac{g_1}{g_o} + \frac{b}{T_y}\right) e^{aT_y^{-b}}} \tag{88}$$

De esta manera, las ecuaciones (82), (84) y (88) -- nos proporcionan los valores de las constantes b, a y c respectivamente, tales que se cumplen las ecuaciones:

$$F_1(T_y) = g_o$$

$$F_2(T_y) = g_1$$

$$F_3(T_y) = g_2$$

Si la forma funcional propuesta para $F(T)=c\,e^{aT^{-b}}$ - es apropiada, la integral de g(T)dT será, según la ecuación (61):

$$\int g(T)\,dT = c\,e^{aT^{-b}} - c\,e^{aT_y^{-b}} \qquad (89)$$

La bondad del ajuste representado en la ecuación - (89) se verificará en el Capítulo IV. Si este ajuste es - bueno, de las ecuaciones (49) y (36) obtenemos la expresión para la caída de presión por fricción en régimen laminar:

$$\Delta P_f = -MN \Big[c\,e^{aT^{-b}} - c\,e^{aT_y^{-b}} - 0.7 \ln (T-Ta) \Big]_{To}^{T1}$$

Como $c\,e^{aT_y^{-b}}$ es una constante, al integrar entre - los límites T_o y T_1 se anula, por lo que ΔP_f queda:

$$\Delta P_f = -MN \Big[c\,e^{aT^{-b}} - 0.7 \ln (T-Ta) \Big]_{To}^{T1} \qquad (90)$$

en donde:

$$M = \frac{32\,\rho\,Vs}{gc\,Di^2}\,(1.076391 \times 10^{-5}) \qquad (91)$$

$$N = \frac{-\rho\,Di^2\,V\,Cp}{4Ue\,De} \qquad (92)$$

T_o y T_1 en grandos Rankine

V_s = velocidad en ft./seg.

El factor (1.076391×10^{-5}) es el factor de conversión de centistokes a ft.^{2}/seg.; y las unidades de todas - las demás variables son las que se dieron en el Capítulo -- II.

La caída de presión dada por la ecuación (90) estaría en unidades de lb./ft^2.

Para un sistema en particular, T_1 se deberá evaluar previamente por la ecuación (23).

III.2. Manejo de Fracciones de Petróleo a Flujo-- Turbulento

Todo el anterior desarrollo se hizo para flujo en - régimen laminar. Para flujo turbulento de acuerdo a la -- ecuación (38), la evaluación de ΔP_f se reduce a evaluar - la integral:

$$\int \frac{(\nu)^n}{T - Ta} \, dT = \int \frac{(e^{AT^{-B}} - 0.7)^n}{T - Ta} \, dT$$

Para condiciones en las que la viscosidad cinemática sea mayor de 4.0 centistokes, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\int \frac{(\nu)^n}{T - Ta}\, dT = \int \frac{(e^{AT^{-B}})^n}{(T - Ta)}\, dT$$

Esta aproximación se comprobará en el capítulo IV.

Ya que:

$$\int \frac{(e^{AT^{-B}})^n}{T - Ta}\, dT = \int \frac{e^{nAT^{-B}}}{T - Ta}\, dT$$

Si $A_t = n A$

$$\int \frac{(\nu)^n}{(T-Ta)}\, dT = \int \frac{e^{At\ T^{-B}}}{(T - Ta)}\, dT \qquad (93)$$

La integral $\int \frac{e^{At\ T^{-B}}}{(T - Ta)}\, dT$ es una integral del tipo de la ecuación (50), y se podría pensar que el método desarrollado en III.1.1 es aplicable en este caso. Sin embargo, por ser la constante A_t menor que A (pues se obtiene por A_t = nA, siendo n fraccionario), los valores obtenidos para las constantes de ajuste a, b y c no son números reales, sino complejos, y su aplicación práctica no es factible.

En estas circunstancias, y observando el comportamiento de la función $e^{At\ T^{-B}}$, se optó por ensayar una función en los números reales, para el caso de flujo turbulento.

El objetivo es evaluar $\int \frac{e^{At\ T^{-B}}}{(T - Ta)}\, dT$ mediante una función de ajuste apropiada. Ya que la integral anterior es de la forma de la ecuación (50) tratada en III.1.1, el razonamiento general para este caso es semejante al de flujo laminar. La diferencia estará en la forma funcional de la función de ajuste.

Si definimos:

$$Y(T) = \frac{e^{At\ T^{-B}}}{(T - Ta)} \tag{94}$$

y proponemos la función de ajuste a régimen turbulento:

$$W(T) = s\, e^{pT} \tag{95}$$

(en donde s, p son constantes), las funciones Y(T) y W(T) son las equivalentes en flujo turbulento a las funciones g(T) y F(T) en flujo laminar. En este caso, la ecuación equivalente a la ecuación (59) será:

$$W(T) = W(T_y) + Y_o Z + \frac{Y_1 Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Y_n \ Z^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (96)$$

Análogamente las ecuaciones equivalentes a las ecuaciones (62) y (63) serán:

$$W_1(T_y) = Y_o \qquad (97)$$

$$W_2(T_y) = Y_1 \qquad (98)$$

Ya que estamos proponiendo la función de ajuste $W(T) = s\,e^{pT}$, necesitamos evaluar s y p tales que se cumplan las ecuaciones (97) y (98). Como conocemos los valores numéricos Y_o, Y_1, podemos relacionar éstos con la forma de las dos primeras derivadas de W(T) evaluadas en T_y. Así obtendremos los valores de s y de p.

En este caso, por tratarse solamente de dos constantes a evaluar (s y p), sólo se necesitan los valores de las dos primeras derivadas de W(T) valuadas en T_y.

Por lo tanto, tenemos:

$$W = s\,e^{pT}$$

$$W_1 = \frac{d\ W}{d\ T} = s\ p\,e^{pT} = Wp \qquad (99)$$

$$W_2 = \frac{d\ W_1}{d\ T} = s\ p\ p\ e^{pT} = W_1 p \qquad (100)$$

Las derivadas valuadas en T_y serán:

$$W_1(T_y) = W(T_y)\ p = Y_o \qquad (101)$$

$$W_2(T_y) = W_1(T_y)\ p = Y_1 \qquad (102)$$

Por lo tanto:

$$Y_1 = Y_o\ p$$

$$p = \frac{Y_1}{Y_o} \qquad (103)$$

Una vez evaluado p, obtenemos el valor de s de la ecuación (99) evaluada en T_y:

$$s = \frac{W_1\ (T_y)}{p\ e^{pTy}}$$

$$s = \frac{Y_o}{p\ e^{pTy}} \qquad (104)$$

Si la forma propuesta para W(T) es correcta, de la ecuación (96) tenemos:

$$\int Y(T)\ dT = s\ e^{pT} - s\ e^{pTy} \qquad (105)$$

La bondad de este ajuste se comprobará en el capítulo IV. Suponiendo que éste es correcto, de las ecuaciones (38), (93) y (105) obtenemos la expresión para la caída de presión por fricción en flujo turbulento:

$$\Delta P_f(\text{turbulento}) = - M_t N \left[s\, e^{pT} - s\, e^{pTy} \right]_{To}^{T1}$$

ya que s e^{pTy} se anula en la expresión anterior:

$$\Delta P_f(\text{turbulento}) = - M_t N \left(s\, e^{pT1} - s\, e^{pTo} \right) \qquad (106)$$

en donde:

$$M_t = \frac{2 \rho\, m\, V_s^{(2-n)}}{gc\, Di^{(n+1)}} (1.076391 \times 10^{-5})^n \qquad (106\text{-a})$$

$$N = \frac{- \rho\, Di^2\, V\, Cp}{4\, Ue\, De} \qquad (106\text{-b})$$

T_o y T_1 = temperatura inicial y final respectivamente, dadas en grados rankine.

V_s = velocidad en ft./seg.

Las unidades de todas las demás variables son las establecidas en el capítulo II

IV. COMPROBACION DEL METODO

En el capítulo anterior se desarrolló un método analítico para calcular la caída de presión por fricción, tanto en flujo laminar, como en flujo turbulento (ecuaciones (90) y (106)).

Durante el desarrollo del método se hicieron varias suposiciones cuya validez no se comprobó en ese momento con el objeto de hacer más directo el desarrollo.

En el presente capítulo se comprobarán las siguientes suposiciones:

1).- Que la función del tipo $g(T) = \frac{e^{AT^{-B}}}{T-Ta}$ puede representarse como una serie de Taylor convergente.

2).- Que la función de ajuste en régimen laminar: $F(T) = c\, e^{aT^{-b}}$ es correcta, es decir, que se cumple:

$$\int_{To}^{T1} \frac{\nu\, dT}{T-Ta} = \left[c\; e^{aT^{-b}} - 0.7\ \ln(T-Ta) \right]_{To}^{T1} \quad (107)$$

3).- Que a flujo turbulento, la función de ajuste $W(t) = s\,e^{pT}$ es adecuada, y que

$$\int_{To}^{T1} \frac{(\nu)^n}{(T-Ta)}\, dT \approx \int_{To}^{T1} \frac{e^{At\ T^{-B}}}{(T - Ta)}\, dT;$$

esto es, que se cumple:

$$\int_{To}^{T1} \frac{(\nu)^n}{(T - Ta)}\, dT = \Big[\, s\ e^{pT} \Big]_{To}^{T1} \qquad (108)$$

IV.1 La función $g(T) = \dfrac{e^{AT^{-B}}}{(T - Ta)}$, puede representarse como una serie de Taylor convergente.

Para poder evaluar g(T) en serie de Taylor debemos encontrar una regla general para obtener sus derivadas. Para mayor claridad, esto se hará considerando a g(T) como producto de dos funciones:

$$g = f\,h$$

donde:

$$f = e^{AT^{-B}} \qquad (109)$$

$$h = (T-Ta)^{-1} \qquad (110)$$

IV.1.1 Obtención de las derivadas de f(T).

$$f = e^{AT^{-B}}$$

$$f_1 = \frac{df}{dT} = - AB\ T^{-(B+1)}\ e^{AT^{-B}}$$

si definimos:

$$j_o = - AB\ T^{-(B+1)} \tag{111}$$

$$\frac{djo}{dT} = j_1 = AB\ (B+1)\ T^{-(B+1)}\ T^{-1}$$

$$j_1 = -j_o\ (B+1)\ T^{-1} \tag{112}$$

y en general:

$$j_n = -j\ (n-1)\ (B+n)\ T^{-1} \qquad \text{para } n \geqslant 1.$$

Por lo tanto, las derivadas de f(T) serán:

$$f_1 = f\ j_o \tag{113}$$

$$f_2 = f_1 j_o + f\ j_1 \tag{114}$$

$$f_3 = f_2 j_o + 2\ fj_1 + fj_2$$

$$f_4 = f_3 j_o + 3\ f_2 j_1 + 3\ f_1 j_2 + fj_3$$

$$\vdots$$

y en general:

$$f_n = f(n-1)\ j_o + (n-1)\ f(n-2)\ j_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}$$
$$f(n-3)\ j_2 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ \ldots (n-r+1)}{(r-1)\ !}\ f\ (n-r)$$
$$j(r-1) + \ldots\ldots + f\ j\ (n-1) \qquad (115)$$

en donde r significa el r-ésimo término y puede tener valores enteros entre 1 y n.

IV.1.2 Obtención de las derivadas de h(T).

$$h = (T-Ta)^{-1}$$

$$\frac{dh}{dT} = h_1 = -\ (T-Ta)^{-2}$$

$$h_1 = -\ h\ (h) \qquad (116)$$

$$h_2 = -\ 2\ (T-Ta)^{-3} = -\ 2\ h_1(h) \qquad (117)$$

$$h_3 = -\ 6\ (T-Ta)^{-4} = -\ 3\ h_2(h)$$

.
.
.
.
.

y en general:

$$h_n = - n\ h\ (n-1)\ (h) \quad \text{para } n \geq 1 \tag{118}$$

IV.1.3 Obtención de las derivadas de g(T)

$$g = f\ h$$

$$\frac{dg}{dT} = g_1 = f_1 h + f h_1 \tag{119}$$

$$g_2 = f_2 h + 2 f_1 h_1 + f h_2 \quad (120$$

$$g_3 = f_3 h + 3\ f_2 h_1 + 3\ f_1 h_2 + f h_3$$

.
.
.
.
.

y en general:

$$g_n = f(n) h + n\ f(n-1)\ h_1 + \frac{n(n-1)}{2!}\ f\ (n-2)\ h_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ f(n-3)\ h_3 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r}{(r-1)!}\ f(n-r+1)\ h(r-1) + \ldots\ldots + f\ h\ (n) \quad (121)$$

en donde r significa el r-ésimo término y puede tener valores enteros entre 1 y n+1.

Una vez obtenida la regla general para la construcción de las derivadas de g(T), se puede comprobar numéricamente si se cumple:

$$g(T) = \frac{e^{AT^{-B}}}{(T-Ta)} = g_o + \frac{g_1 Z}{1!} + \frac{g_2\ Z^2}{2!} + \ldots \frac{g_n Z^n}{n!} \qquad (56)$$

en donde:

g_n = derivada de n-ésima de g evaluada en T_y

Z = $T - T_y$

T_y = temperatura cercana a T.

La comprobación numérica de lo anterior se realizó evaluando en T_y series de Taylor con 49 términos, es decir, hasta la derivada No. 48 para tener un valor de referencia matemáticamente exacto. Esto se realizó mediante el programa "series/Taylor" escrito en FORTRAN para este fin; el cual fue corrido en las instalaciones del Programa Universitario de Cómputo en la UNAM.

Se muestran a continuación el programa usado y los resultados obtenidos para el caso específico de una fracción de petróleo con las siguientes características de temperatura - viscosidad cinemática:

a T_1 = 560°R = 100.3°F; ν_1 = 3000.00 cstk.

a T_2 = 640°R = 180.3°F; ν_2 = 101.0 cstk.

A = $1.6264390477 \times 10^{12}$

B = 4.1146346252

B7800 F O R T R A N C O M P I L A T I O N M A R K 3.2.077/*3.0.000* MONDAY, 09/20/82 01:27 PM

SERIES/TAYLOR_ON_DISK

```
      DIMENSION H(50),F(50),Y(50),COEF(50)
      READ(5,2) VIS1,VIS2,T1,T2
    2 FORMAT (4F 10.0)
      DOUBLE PRECISION GG(50),HH(50),YY(50),TD,ZO(50),ZL(50),DIF(50),SUM
     1A
      DOUBLE PRECISION P,A1,ALFA,H,F,Y,COEF,TER,S,PRUEBA,VIS1,VIS2,T1,T2
     1,G,X,TF,TM,TA,RK1,RK2,RL1,RL2
      DOUBLE PRECISION W(50),PRU,TL,ALIM2,ALIM1,AINT,AF,BF,CF,AJD,AR,BR, CR,
     1CR,RL
      NDER=48
      NTER=NDER+1
      TL=600.0
      TF=695.
      TM=(TL+TF)/2.
      TA=519.7
      TD=TM-TA
      X=TF-TM
      RK1=DLOG(DLOG(VIS1+0.7))
      RK2= DLOG(DLOG(VIS2+0.7))
       RL1=DLOG(T1)
      RL2= DLOG(T2)
      P=(RK2-RK1)/(RL1-RL2)
      A1= RK1+(P*RL1)
      ALFA=DEXP(A1)
C PRUEBA DE CONSTANTES ALFA Y P
      P=-P
      P1=P
      VIS=(DEXP(ALFA*(T1**P)))-0.7
      WRITE(6,100) VIS1,VIS
  100. FORMAT(1H1///30X,20H VISCOSIDAD 1,DATO =,1PD26.16/25X,25H VISCOSID
     1AD 1 CALCULADA =,1PD26.16)
      WRITE(6,10) ALFA,P,TF,TL,TM,TA
   10 FORMAT(//40X,3HA= ,1PD26.16,5X,3HB= ,1PD26.16//,30X,16H TEMP. INIC
     1IAL= ,3PD12.4,10X,14H TEMP. FINAL= ,3PD12.4//,31X,14HTEMP. TAYLOR=
     1 3PD12.4,12X,17H TEMP. AMBIENTE= ,3PD12.4)
      F(1)=DEXP(ALFA*(TM**P))
      PRUEBA=DEXP(ALFA*(TF**P))
      PRUEBA=PRUEBA/(TF-TA)
      P=-P
      G=-P*ALFA*TM**(-P-1.0)
      H(1)=G
      DO 30 J=2,NDER
      H(J)=-H(1)*(P+1.0)/TM
      H(1)=H(J)
      P=P+1.0
   30 CONTINUE
      Y(1)=0.0
      H(1)=G
      DO 91 N=1,NDER
      F(N+1)=F(N)*H(1)*Y(N)
      IF(N.EQ.NDER)GOTO91
      R=FLOAT(N)
      Y(N+1)=R*F(N)*H(2)
      F1=R
      DO 12 M=1,NDER
      R1=M
      IF(N.EQ.M)GO TO 91
      F1=(F1*(R-R1))/(R1+1.)
```

```
                START OF SEGMENT 002
FORMAT SEGMENT IS 000B LONG
C   002:0000:0
C   002:0000:0
        FIB IS 0006 LONG
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0013:2
C   002:0014:1
C   002:0015:1
C   002:0016:2
C   002:0017:3
C   002:0019:2
C   002:001B:4
C   002:001D:0
C   002:001E:2
C   002:0022:0
C   002:0026:0
C   002:0029:0
C   002:0029:0
C   002:002C:2
C   002:002D:1
C   002:002E:4
C   002:002E:4
C   002:002F:4
C   002:0030:2
C   002:0035:5
        FIB IS 0006 LONG
C   002:003E:3
C   002:003E:3
C   002:003E:3
C   002:0043:3
C   002:0048:3
C   002:0043:3
C   002:0043:2
C   002:004F:0
C   002:0052:2
C   002:0055:1
C   002:0056:3
C   002:0058:3
C   002:0059:3
C   002:005A:2
C   002:005D:3
C   002:005F:3
C   002:0061:0
C   002:0063:4
C   002:0064:5
C   002:0066:0
C   002:0068:6
C   002:0069:0
C   002:006C:2
C   002:006D:1
C   002:0070:4
C   002:0071:3
C   002:0072:1
C   002:0073:0
C   002:0074:2
```

```
      M2=N-M                                                            C  002:0077:0
      Y(N+1)=Y(N+1)+F1*H(M+2)*F(M2)                                     C  002:0078:3
   12 CONTINUE                                                          C  002:0079:0
   91 CONTINUE                                                          C  002:007F:4
      COEF(1)=1.                                                        C  002:0082:2
      DO 69 L=1,NTER                                                    C  002:0083:3
      R1=L                                                              C  002:0084:1
      COEF(L+1)=(COEF(L)*X)/R1                                          C  002:0085:0
      L1=L+1                                                            C  002:0088:1
   69 CONTINUE                                                          C  002:0089:3
      HH(1)=-1.                                                         C  002:008C:1
      DO 7 NK=1,NDER                                                    C  002:008D:3
      HO=NK                                                             C  002:008E:1
      HH(NK)=-HH(NK)/TD                                                 C  002:008F:0
      HH(NK+1)=HH(NK)*HO                                                C  002:0091:2
    7 CONTINUE                                                          C  002:0094:0
      YY(1)=0.0                                                         C  002:0095:4
      WRITE(6,102) TM                                                   C  002:0097:5
  102 FORMAT(1H1//,30X,56H DERIVADAS DE LA FUNCION= VISCOSIDAD/(T-TA);VA C  002:009E:3
     1LUADAS EN T=,5PD12.4,15H GRADOS RANKINE/)                         C  002:009E:3
      DO 18 K=1,NDER                                                    C  002:009E:3
      GG(K)=F(K)*HH(1)+YY(K)                                            C  002:009F:0
      KL=K-1                                                            C  002:00A5:4
      WRITE(6,101)KL,GG(K)                                              C  002:00A5:0
  101 FORMAT(1H ,45X,1HG,I2,2X,1PD24.16)                                C  002:00AE:2
      IF(K.EQ.NDER)GO TO 18                                             C  002:00AE:2
      R3=FLOAT(K)                                                       C  002:00AF:4
      YY(K+1)=R3*F(K)*HH(2)                                             C  002:00B0:3
      F3=R3                                                             C  002:00B4:0
      DO 19 MM=1,NDER                                                   C  002:00B4:5
      R1=MM                                                             C  002:00B5:3
      IF(K.EQ.MM)GO TO 18                                               C  002:00B6:2
      F3=(F3*(R3-R1))/(R1+1.)                                           C  002:00B7:4
      M3=K-MM                                                           C  002:00BA:2
      YY(K+1)=YY(K+1)+F3*HH(MM+2)*F(M3)                                 C  002:00BB:5
   19 CONTINUE                                                          C  002:00C0:2
   18 CONTINUE                                                          C  002:00C3:0
      WRITE(6,103)                                                      C  002:00C5:4
  103 FORMAT(1H1/,35X,66H COMPROBACION DE CONVERGENCIA PARA LA EXPANSION C  002:00C9:2
     1 EN SERIE DE TAYLOR)                                              C  002:00C9:3
      WRITE(6,22)                                                       C  002:00C9:3
   22 FORMAT(1H /10X,30HTERMINOS DE LA SERIE DE TAYLOR,33X,15HSUMAS PARC C  002:00CD:3
     1IALES/)                                                           C  002:00CD:2
      S=0.0                                                             C  002:00CD:2
      DO 14 M=1,NTER                                                    C  002:00CE:1
      TER=COEF(M)*GG(M)                                                 C  002:00CE:5
      S=TER+S                                                           C  002:00D1:3
      WRITE(6,70)M,TER,M,S                                              C  002:00D2:5
   70 FORMAT(1H ,10X,4HTER ,I2,1PD24.16,25X,4HSUM ,I2,1H=,1PD24.16)     C  002:00DC:2
   14 CONTINUE                                                          C  002:00D0:2
      WRITE(6,15)PRUEBA                                                 C  002:00E0:0
   15 FORMAT(1H //,45X,10H PRUEBA = ,1PD24.16)                          C  002:00E6:2
      ZLL=TL-TM                                                         C  002:00E6:2
      ZL(1)=1.0                                                         C  002:00E7:5
      DO 160 JI=1,NDER                                                  C  002:00E9:0
      Z1=JI                                                             C  002:00E9:4
      ZL(JI)=(ZL(JI)*ZLL)/Z1                                            C  002:00EA:3
      ZL(JI+1)=ZL(JI)                                                   C  002:00ED:1
  160 CONTINUE                                                          C  002:00EF:2
      ZOO=TF-TM                                                         C  002:00F2:0
      ZO(1)=1.0                                                         C  002:00F3:3
      DO 170 JF=1,NDER                                                  C  002:00F4:4
      Z2=JF                                                             C  002:00F5:2
      ZO(JF)=(ZO(JF)*ZOO)/Z2                                            C  002:00F6:1
      ZO(JF+1)=ZO(JF)                                                   C  002:00F8:5
  170 CONTINUE                                                          C  002:00F9:0
      SUMA=0.0                                                          C  002:00FD:4
      WRITE(6,104)                                                      C  002:00FE:3
```

UNAM

```
104   FORMAT(1H1/,45X,46H EVALUACION DE LA INTEGRAL POR SERIE DE TAYLOR/         C    002:0105:2
     1)                                                                          C    002:0103:2
      WRITE(6,300)                                                               C    002:0105:2
300   FORMAT(1H ,55X,15HSUMAS PARCIALES/)                                        C    002:0107:2
      DO 180 NI=1,NDER                                                           C    002:0107:2
      DIF(NI)=ZL(NI)-ZO(NI)                                                      C    002:0113:0
      SUMA=DIF(NI)*GG(NI)+SUMA                                                   C    002:0103:5
      WRITE(6,186)NI,SUMA                                                        C    002:010E:1
 186  FORMAT(1H ,50X,5HSUMA ,I2,1PD26.16)                                        C    002:0115:2
 180  CONTINUE                                                                   C    002:0115:2
      W(2)=GG(1)                                                                 C    002:0119:0
      W(3)=GG(2)                                                                 C    002:011A:3
      W(4)=GG(3)                                                                 C    002:011C:1
      AR=-W(2)                                                                   C    002:011E:0
      BR=W(2)-W(3)*TM                                                            C    002:011F:2
      CR=(((W(3)*TM)**2.0)/W(2))-((TM**2.0)*W(4))                                C    002:0122:0
      RL=(-BR+DSQRT(BR**2.0-4.*AR*CR))/(2.*AR)                                   C    002:0129:1
      BF=RL-1.0                                                                  C    002:012F:2
      AJO=W(3)/W(2)+RL/TM                                                        C    002:0130:1
      AF=(-AJO*(TM**RL))/BF                                                      C    002:0133:2
      W(1)=W(2)/AJO                                                              C    002:0135:2
      CF=W(1)/DEXP(AF/(TM**BF))                                                  C    002:0133:2
      PRU=(DEXP(AF/(TF**BF)))*CF                                                 C    002:0133:5
      ALIM2=CF*(DEXP(AF/TL**BF))                                                 C    002:013F:4
      ALIM1=PRU                                                                  C    002:0145:3
      AINT=ALIM2-ALIM1                                                           C    002:0144:2
      WRITE(6,850)AINT                                                           C    002:0145:4
850   FORMAT(1H1////,40X,54H EVALUACION DE LA INTEGRAL POR AJUSTE;METODO         C    002:014C:2
     1 ANALITICO//,55X,11H INTEGRAL =,1PD26.16)                                  C    002:014C:2
      WRITE(6,108)AF,BF,CF                                                       C    002:014C:2
108   FORMAT(///45X,49H CONSTANTES CALCULADAS PARA LA FUNCION DE AJUSTE          C    002:0155:2
     1//,20X,4HAF =,1PD24.16,10X,4HBF =,1PD24.16,10X,4HCF =,1PD24.16)            C    002:0155:2
      CALL EXIT                                                                  C    002:0155:2
      END                                                                        C    002:0156:1
                                                            SEGMENT 002 IS 0196 LONG
```

```
      VISCOSIDAD 1,DATO =     3.00000000000000000D+03
VISCOSIDAD 1,CALCULADA =     3.00000000000000000D+03

           A=      1.6264390476906808D+12      B=     -4.1146346252856752D+00
   TEMP. INICIAL= 695.0000D+00              TEMP. FINAL= 600.0000D+00
   TEMP. TAYLOR= 647,5000D+00                TEMP. AMBIENTE= 519.7000D+00
```

DERIVADAS DE LA FUNCION= VISCOSIDAD/(T-TA);VALUADAS EN T=647.5000D+00 GRADOS RANKINE

G 0	6.4096324990585491D-01
G 1	-2.2960132735374850D-02
G 2	1.0034521233476045D-03
G 3	-3.0366300410091496D-05
G 4	2.9110389392596132D-06
G 5	-1.8487895579399265D-07
G 6	1.2872230173151469D-08
G 7	-9.7372756436065878D-10
G 8	7.9476180751177621D-11
G 9	-6.9612552925875614D-12
G10	6.5146207303872796D-13
G11	-6.4906735567705831D-14
G12	6.8664006540019058D-15
G13	-7.6367742203387102D-16
G14	9.3946515906957408D-17
G15	-1.1347954065819225D-17
G16	1.4907828432502200D-18
G17	-2.3587999461305726D-19
G18	2.9846729297331193D-20
G19	-4.5359612345555340D-21
G20	7.2169806888994279D-22
G21	-1.2005727312372661D-22
G22	2.0856843380201965D-23
G23	-3.7779355137317102D-24
G24	7.1231331705072964D-25
G25	-1.3990641564935134D-25
G26	2.8529604461971218D-26
G27	-6.0371562176268404D-27
G28	1.3241664968868876D-27
G29	-3.0070171865773117D-28
G30	7.0623002662272525D-29
G31	-1.7136533067043632D-29
G32	4.2917370564463569D-30
G33	-1.1083678556742668D-30
G34	2.9469845830554707D-31
G35	-8.0767318237632520D-32
G36	2.2752222119413629D-32
G37	-6.5872644656910799D-33
G38	1.9586839164355147D-33
G39	-5.9772601254313319D-34
G40	1.8708276672628635D-34
G41	-6.0018739714962959D-35
G42	1.9724576365800751D-35
G43	-6.6366031272929762D-36
G44	2.2849042572655652D-36
G45	-8.0454612482159540D-37
G46	2.8958560168315509D-37
G47	-1.0649863443049656D-37

COMPROBACION DE CONVERGENCIA PARA LA EXPANSION EN SERIE DE TAYLOR

TERMINOS DE LA SERIE DE TAYLOR		SUMAS PARCIALES	
TER 1	6.4096324990588491D-01	SUM 1=	6.4096324990588491D-01
TER 2	-1.0906063049303054D+00	SUM 2=	-4.4964305502442047D-01
TER 3	1.1320194266515164D+00	SUM 3=	6.8237637162709538D-01
TER 4	-9.0853707426284628D-01	SUM 4=	-2.2616070263575040D-01
TER 5	6.1746338802612658D-01	SUM 5=	3.9130268539037598D-01
TER 6	-3.7254117540181430D-01	SUM 6=	1.8761509988561678D-02
TER 7	2.0539444383979044D-01	SUM 7=	2.2415595382835212D-01
TER 8	-1.0540524704986549D-01	SUM 8=	1.1875070677850664D-01
TER 9	5.1031700032436662D-02	SUM 9=	1.6978240680267310D-01
TER 10	-2.3613861670968540D-02	SUM 10=	1.4616854513170456D-01
TER 11	1.0496927564539490D-02	SUM 11=	1.5666547269624405D-01
TER 12	-4.5161021339976586D-03	SUM 12=	1.5214937056224639D-01
TER 13	1.8905535153372397D-03	SUM 13=	1.5403992407808333D-01
TER 14	-7.7358636213336125D-04	SUM 14=	1.5326633771595002D-01
TER 15	3.1056905005466506D-04	SUM 15=	1.5357690676600466D-01
TER 16	-1.2269365452295696D-04	SUM 16=	1.5345421311148170D-01
TER 17	4.7851168361968793D-05	SUM 17=	1.5350206427984367D-01
TER 18	-1.8464476595165455D-05	SUM 18=	1.5348359980324851D-01
TER 19	7.063837[illegible]43450224D-06	SUM 19=	1.5349066364097535D-01
TER 20	-2.6838194500835597D-06	SUM 20=	1.5348797962149327D-01
TER 21	1.0141521573404160D-06	SUM 21=	1.5348899397505061D-01
TER 22	-3.8160175545087803D-07	SUM 22=	1.5348861257183578D-01
TER 23	1.4311991331283915D-07	SUM 23=	1.5348875549170407D-01
TER 24	-5.3544252535473060D-08	SUM 24=	1.5348870194745156D-01
TER 25	1.9994940523142418D-08	SUM 25=	1.5348872194239208D-01
TER 26	-7.4554514048612104D-09	SUM 26=	1.5348871448694067D-01
TER 27	2.7778614063202640D-09	SUM 27=	1.5348871726480237D-01
TER 28	-1.0341546327605734D-09	SUM 28=	1.5348871622306744D-01
TER 29	3.8478559100766445D-10	SUM 29=	1.5348871661445603D-01
TER 30	-1.4312386579895547D-10	SUM 30=	1.5348871647133217D-01
TER 31	5.3222392503303035D-11	SUM 31=	1.5348871652455456D-01
TER 32	-1.9788054254071767D-11	SUM 32=	1.5348871650476650D-01
TER 33	7.3553422534006815D-12	SUM 33=	1.5348871651212265D-01
TER 34	-2.7345595447611366D-12	SUM 34=	1.5348871650938829D-01
TER 35	1.0164607742644403D-12	SUM 35=	1.5348871651040475D-01
TER 36	-3.7781513505443072D-13	SUM 36=	1.5348871651002693D-01
TER 37	1.4042958624524423D-13	SUM 37=	1.5348871651016736D-01
TER 38	-5.2195346235963316D-14	SUM 38=	1.5348871651011517D-01
TER 39	1.9399969766384767D-14	SUM 39=	1.5348871651013457D-01
TER 40	-7.2105410711057489D-15	SUM 40=	1.5348871651012736D-01
TER 41	2.6799895799347017D-15	SUM 41=	1.5348871651013004D-01
TER 42	-9.9608720741936101D-16	SUM 42=	1.5348871651012904D-01
TER 43	3.7022102033435641D-16	SUM 43=	1.5348871651012941D-01
TER 44	-1.3760186723658016D-16	SUM 44=	1.5348871651012927D-01
TER 45	5.1143151118963135D-17	SUM 45=	1.5348871651012932D-01
TER 46	-1.9008613475655255D-17	SUM 46=	1.5348871651012931D-01
TER 47	7.0650140685913952D-18	SUM 47=	1.5348871651012931D-01
TER 48	-2.6258876506857993D-18	SUM 48=	1.5348871651012931D-01
TER 49	0.	SUM 49=	1.5348871651012931D-01

PRUEBA = 1.5348871651012931D-01

EVALUACION DE LA INTEGRAL POR SERIE DE TAYLOR

SUMAS PARCIALES

SUMA 1	-6.0891508741059066D+01
SUMA 2	-6.0891508741059066D+01
SUMA 3	-9.6738790585023751D+01
SUMA 4	-9.6738790585023751D+01
SUMA 5	-1.0847059495752015D+02
SUMA 6	-1.0847059495752015D+02
SUMA 7	-1.1125741242320302D+02
SUMA 8	-1.1125741242320302D+02
SUMA 9	-1.1179660814568245D+02
SUMA 10	-1.1179660814568245D+02
SUMA 11	-1.1188726342919438D+02
SUMA 12	-1.1188726342919438D+02
SUMA 13	-1.1190107901257934D+02
SUMA 14	-1.1190107901257934D+02
SUMA 15	-1.1190304563322969D+02
SUMA 16	-1.1190304563322969D+02
SUMA 17	-1.1190331303681759D+02
SUMA 18	-1.1190331303681759D+02
SUMA 19	-1.1190334835600507D+02
SUMA 20	-1.1190334835600507D+02
SUMA 21	-1.1190335294383626D+02
SUMA 22	-1.1190335294383626D+02
SUMA 23	-1.1190335353498530D+02
SUMA 24	-1.1190335353498530D+02
SUMA 25	-1.1190335361096407D+02
SUMA 26	-1.1190335361096407D+02
SUMA 27	-1.1190335362073803D+02
SUMA 28	-1.1190335362073803D+02
SUMA 29	-1.1190335362199854D+02
SUMA 30	-1.1190335362199854D+02
SUMA 31	-1.1190335362216164D+02
SUMA 32	-1.1190335362216164D+02
SUMA 33	-1.1190335362218282D+02
SUMA 34	-1.1190335362218282D+02
SUMA 35	-1.1190335362218558D+02
SUMA 36	-1.1190335362218558D+02
SUMA 37	-1.1190335362218594D+02
SUMA 38	-1.1190335362218594D+02
SUMA 39	-1.1190335362218599D+02
SUMA 40	-1.1190335362218599D+02
SUMA 41	-1.1190335362218599D+02
SUMA 42	-1.1190335362218599D+02
SUMA 43	-1.1190335362218600D+02
SUMA 44	-1.1190335362218600D+02
SUMA 45	-1.1190335362218600D+02
SUMA 46	-1.1190335362218600D+02
SUMA 47	-1.1190335362218600D+02
SUMA 48	-1.1190335362218600D+02

EVALUACION DE LA INTEGRAL POR AJUSTE;METODO ANALITICO

INTEGRAL = -1.1200473417610633D+02

CONSTANTES CALCULADAS PARA LA FUNCION DE AJUSTE

AF = 6.0732688122452555D+16 BF = 5.8099512892274847D+00 CF = -1.5097782145362579D+00

Estas propiedades corresponden a un combustóleo -- Bunker C.

En este caso, la suma de 49 términos de la serie de Taylor es "SUM 49", y la función g(T) evaluada en T=695°R,- es el valor de "PRUEBA". Como se podrá observar en el listado de resultados, "SUM 49" y "PRUEBA" coinciden hasta - 10^{-17}.

El valor de T_y usado fue de 647.5°R, por lo tanto - $Z = T-T_y = 695 - 647.5 = \underline{47.5°R}$.

De las múltiples corridas del programa en cuestión, se concluyó lo siguiente:

La función $g(T) = \frac{e^{AT^{-B}}}{(T-Ta)}$ puede representarse como una serie de Taylor convergente, para un valor de T_y cercano a T. Sin embargo, el radio de convergencia, Rc, para el cual $Z < Rc$ depende del comportamiento viscosidad-temperatura, es decir, de las constantes A y B. Fuera de este radio de convergencia, la serie de Taylor es divergente.

A continuación se muestran los resultados del mismo caso anterior, pero con T_y = 610°R, es decir Z = 85°R. En este caso Z se sale del radio de convergencia y la serie -- diverge, como se comprueba al comparar:

SUM 49 = -16.5756

PRUEBA = 0.1534

```
  VISCOSIDAD 1,DATO =      3.0000000000000000D+03
VISCOSIDAD 1,CALCULADA =   3.0000000000000000D+03

       A=    1.626439047690680D+12    B=    -4.114634625285675 2D+00
TEMP. INICIAL= 695.0000D+00            TEMP. FINAL= 600.0000D+00
TEMP. TAYLOR= 610.0000D+00             TEMP. AMBIENTE= 519.7000D+00
```

DERIVADAS DE LA FUNCION= VISCOSIDAD/(T-TA);VALUADAS EN T=610.0000D+00 GRADOS RANKINE

G 0	3.0905564432233657D+00
G 1	-1.5162360238356568D-01
G 2	8.8020596356576343D-03
G 3	-5.8586713851362404D-04
G 4	4.3375205822044268D-05
G 5	-3.5615243991821524D-06
G 6	3.2023515333331958D-07
G 7	-3.1317741601364124D-08
G 8	3.3141566655764799D-09
G 9	-3.7799688302902440D-10
G10	4.6318141807836122D-11
G11	-6.0814488820835186D-12
G12	8.5558281131643624D-13
G13	-1.2780166667329541D-13
G14	2.0369632867630095D-14
G15	-3.4490054908677878D-15
G16	6.1910409512938160D-16
G17	-1.1756702789466127D-16
G18	2.3568259497189310D-17
G19	-4.9770372005452326D-18
G20	1.1048619631373669D-18
G21	-2.5730980024992775D-19
G22	6.2743299960234539D-20
G23	-1.5987637961613424D-20
G24	4.2509909161623484D-21
G25	-1.1771156667388419D-21
G26	3.3896165288361352D-22
G27	-1.0135658417887500D-22
G28	3.1429427641165481D-23
G29	-1.0093797718791597D-23
G30	3.3554544692380952D-24
G31	-1.1512476811935910D-24
G32	4.0777370484406313D-25
G33	-1.4909360839002621D-25
G34	5.6137173373123852D-26
G35	-2.1758603423703708D-26
G36	8.6745281517420650D-27
G37	-3.5543474750174787D-27
G38	1.4957337774431278D-27
G39	-6.4600015461755986D-28
G40	2.8615732610563024D-28
G41	-1.2992746901834555D-28
G42	6.0431381145558695D-29
G43	-2.8776848214416611D-29
G44	1.4021941555409070D-29
G45	-6.9876785190834309D-30
G46	3.5596147502673065D-30
G47	-1.8527341448786267D-30

COMPROBACION DE CONVERGENCIA PARA LA EXPANSION EN SERIE DE TAYLOR

TERMINOS DE LA SERIE DE TAYLOR		SUMAS PARCIALES	
TER 1	6.4096324920588471D-01	SUM 1=	6.4096324920588471D-01
TER 2	-1.0906063047303054D+00	SUM 2=	-4.4964305502442047D-01
TER 3	1.1320194266515164D+00	SUM 3=	6.8237637162709588D-01
TER 4	-9.0853707426286628D-01	SUM 4=	-2.2616070263575040D-01
TER 5	6.1746338302612638D-01	SUM 5=	3.9130268539037593D-01
TER 6	-5.7254117564018143D-01	SUM 6=	1.3761508968561678D-02
TER 7	2.0536444593979044D-01	SUM 7=	2.2410595582835212D-01
TER 8	-1.0540526704984549D-01	SUM 8=	1.1870370677450664D-01
TER 9	5.1031700032436662D-02	SUM 9=	1.6978240680297310D-01
TER 10	-2.3613861971116854D-02	SUM 10=	1.4616854513170456D-01
TER 11	1.0496927566539749D-02	SUM 11=	1.5665547269624405D-01
TER 12	-4.5161021339976586D-03	SUM 12=	1.5214937059224639D-01
TER 13	1.8905535133725970D-03	SUM 13=	1.5403992407083335D-01
TER 14	-7.7355363621336125D-04	SUM 14=	1.5326635771595002D-01
TER 15	3.1051905005466506D-04	SUM 15=	1.5357690676600666D-01
TER 16	-1.2269365452295696D-04	SUM 16=	1.5345421311148170D-01
TER 17	4.7351168361968793D-05	SUM 17=	1.5350206427986367D-01
TER 18	-1.8664476395165453D-05	SUM 18=	1.5348359803446851D-01
TER 19	7.063857[illegible]43450224D-06	SUM 19=	1.5349066364096333D-01
TER 20	-2.6838194500833897D-06	SUM 20=	1.5348797962146327D-01
TER 21	1.0141521573403160D-06	SUM 21=	1.5348899337565061D-01
TER 22	-3.8160175685087803D-07	SUM 22=	1.5348861257189373D-01
TER 23	1.4511941033128913D-07	SUM 23=	1.5348875569170407D-01
TER 24	-5.3344252535547306D-08	SUM 24=	1.5348870134765315D-01
TER 25	1.9974940520142418D-08	SUM 25=	1.5348872119423392D-01
TER 26	-7.4556514088612104D-09	SUM 26=	1.5348871446594067D-01
TER 27	2.7778614063262640D-09	SUM 27=	1.5348871726580237D-01
TER 28	-1.0341546327603734D-09	SUM 28=	1.5348871622996764D-01
TER 29	3.8478859100766443D-10	SUM 29=	1.5348871661445903D-01
TER 30	-1.4312386579805547D-10	SUM 30=	1.5348871647135217D-01
TER 31	5.3222392503303035D-11	SUM 31=	1.5348871652455456D-01
TER 32	-1.9788054254071967D-11	SUM 32=	1.5348871650476650D-01
TER 33	7.3553622534006815D-12	SUM 33=	1.5348871651212265D-01
TER 34	-2.7345595447411366D-12	SUM 34=	1.5348871650938629D-01
TER 35	1.0164637782644403D-12	SUM 35=	1.5348871651040475D-01
TER 36	-3.7781513505448072D-13	SUM 36=	1.5348871651002693D-01
TER 37	1.4042958624524623D-13	SUM 37=	1.5348871651016736D-01
TER 38	-5.2195346235963316D-14	SUM 38=	1.5348871651011517D-01
TER 39	1.9399969766384767D-14	SUM 39=	1.5348871651013457D-01
TER 40	-7.2105410711057489D-15	SUM 40=	1.5348871651012736D-01
TER 41	2.6799895799347017D-15	SUM 41=	1.5348871651013004D-01
TER 42	-9.9608720741936161D-16	SUM 42=	1.5348871651012904D-01
TER 43	3.7022102033435641D-16	SUM 43=	1.5348871651012941D-01
TER 44	-1.3760180723658016D-16	SUM 44=	1.5348871651012927D-01
TER 45	5.1143151118943135D-17	SUM 45=	1.5348871651012932D-01
TER 46	-1.9008613475655255D-17	SUM 46=	1.5348871651012931D-01
TER 47	7.0650186839139526D-18	SUM 47=	1.5348871651012931D-01
TER 48	-2.6258876500857993D-18	SUM 48=	1.5348871651012931D-01
TER 49	0.	SUM 49=	1.5348871651012931D-01

PRUEBA = 1.5348871651012931D-01

EVALUACION DE LA INTEGRAL POR SERIE DE TAYLOR

SUMAS PARCIALES

SUMA 1	-2.9360203210621974D+02
SUMA 2	2.4655622140304522D+02
SUMA 3	-6.5583826749429134D+02
SUMA 4	6.1384468523693720D+02
SUMA 5	-9.9000889850307877D+02
SUMA 6	8.7557949099937782D+02
SUMA 7	-1.1611269582944824D+03
SUMA 8	9.5513780827694221D+02
SUMA 9	-1.1601529371460731D+03
SUMA 10	8.9360519642947001D+02
SUMA 11	-1.0511907622299609D+03
SUMA 12	7.5472346117704198D+02
SUMA 13	-9.0261523674750459D+02
SUMA 14	9.0396792927935171D+02
SUMA 15	-7.5674402269917457D+02
SUMA 16	4.6723381786192064D+02
SUMA 17	-6.3130986905333501D+02
SUMA 18	3.3330116131532504D+02
SUMA 19	-3.2867020553232386D+02
SUMA 20	2.6324161785270871D+02
SUMA 21	-4.4722032616428455D+02
SUMA 22	1.9145062210713934D+02
SUMA 23	-1.8382713729318731D+02
SUMA 24	1.3535527115139146D+02
SUMA 25	-1.3576621146683029D+02
SUMA 26	9.0904940877600304D+01
SUMA 27	-2.9388207191529920D+02
SUMA 28	3.5220066601381044D+01
SUMA 29	-2.6389440562375936D+02
SUMA 30	-2.8585644959658715D+02
SUMA 31	-2.3803663689186767D+02
SUMA 32	1.1773954617673042D+00
SUMA 33	-2.1697714015035848D+02
SUMA 34	-1.5640862601926408D+01
SUMA 35	-1.9378260930107305D+02
SUMA 36	-1.1446553631318183D+02
SUMA 37	-1.4561766072347267D+02
SUMA 38	-4.4314515714615992D+01
SUMA 39	-1.7321564298271730D+02
SUMA 40	-3.4771083463134238D+01
SUMA 41	-1.6420354975415582D+02
SUMA 42	-6.3830419083455204D+01
SUMA 43	-1.5611510869631704D+02
SUMA 44	-7.1221184105777592D+01
SUMA 45	-1.4533660368630385D+02
SUMA 46	-7.7406010360848082D+01
SUMA 47	-1.4369238800666552D+02
SUMA 48	-8.2390588726647776D+01

EVALUACION DE LA INTEGRAL POR AJUSTE;METODO ANALITICO

INTEGRAL = -1.1193954097302221D+02

CONSTANTES CALCULADAS PARA LA FUNCION DE AJUSTE

AF = 5.87292964424274[illegible]5D+16 BF = 5.8049242486308265D+00 CF = -1.5187491117252644D+00

IV.2 La función de ajuste en flujo laminar $F(T) = c\, e^{aT^{-b}}$ es adecuada.

Esto se comprobó evaluando la integral

$$\int_{To}^{T1} \frac{\gamma}{(T - Ta)}\, dt$$ por serie de Taylor.

El programa "Series/Taylor" referido anteriormente también proporciona el valor de la integral evaluada por serie de Taylor y el valor de la integral evaluada por la función de ajuste F(T). En el listado del caso convergente reproducido en el inciso anterior se comprueba que:

Integral por serie de Taylor = - 111.9033

Integral por ajuste de F(T) = - 112.0047

En el caso divergente, (T_y = 610°R):

Integral por serie de Taylor = - 82.5965

Integral por ajuste de F(T) = -111.9395

Es importante observar que aunque la integral por serie de Taylor en el caso divergente no proporciona el valor verdadero de la integral, el valor obtenido con la función de ajuste es muy aproximado (error de 0.04%).

Por otra parte, se comprobó que para un valor de T_y dado, es decir para un juego de constantes a, b y c de la función F(T), las integrales evaluadas por ajuste a diferentes temperaturas T_o y T_1 se aproximan muy cercanamente al valor verdadero de la integral (error menor de 0.4%).

Un ejemplo de ésto se muestra comparando el siguiente listado en el que T_y = 610°R, es decir, las constantes a, b y c (en el programa son AF, BF y CF) tienen el mismo valor que en el caso divergente del inciso anterior. En este listado se observa que:

T_o = 645°R . T_1 = 575°R

T_y = 610°R

Integral por serie de Taylor = -389.98

Integral por ajuste de F(T) = -388.98

(error = 0.25%).

Se realizan varias pruebas para fracciones de petróleo en diferentes rangos de viscosidad y se puede concluir que la función de ajuste proporciona un valor que está dentro del 0.4% de exactitud del valor verdadero de la integral

$$\int_{To}^{T1} \frac{\nu}{T-Ta} \, dT.$$

```
    VISCOSIDAD 1,DATO =       3.0000000000000000D+03
VISCOSIDAD 1,CALCULADA =      3.0000000000000000D+03

          A=     1.6264390476906808D+12       B=     -4.1146346252836752D+00
     TEMP. INICIAL= 645.00000D+00           TEMP. FINAL= 575.00000D+00
     TEMP. TAYLOR= 610.00000D+00            TEMP. AMBIENTE= 519.70000D+00
```

EVALUACION DE LA INTEGRAL POR SERIE DE TAYLOR

SUMAS PARCIALES

SUMA 1	-2.1053389510255356D+02
SUMA 2	-2.1053389510255356D+02
SUMA 3	-3.4213505351557352D+02
SUMA 4	-3.4213505351557352D+02
SUMA 5	-3.9010417223999017D+02
SUMA 6	-3.9010417226999017D+02
SUMA 7	-3.8823024354400747D+02
SUMA 8	-3.8823024354400747D+02
SUMA 9	-3.8971988054321416D+02
SUMA 10	-3.8971988054321416D+02
SUMA 11	-3.8994394547540679D+02
SUMA 12	-3.8994394547540679D+02
SUMA 13	-3.8997537047134050D+02
SUMA 14	-3.8997537047134050D+02
SUMA 15	-3.8998080418750157D+02
SUMA 16	-3.8998080418750157D+02
SUMA 17	-3.8998150205993196D+02
SUMA 18	-3.8998150205993196D+02
SUMA 19	-3.8998158028716097D+02
SUMA 20	-3.8998158028716097D+02
SUMA 21	-3.8998159730640034D+02
SUMA 22	-3.8998159750640034D+02
SUMA 23	-3.8998159959005191D+02
SUMA 24	-3.8998159957005191D+02
SUMA 25	-3.8998159950914322D+02
SUMA 26	-3.8998159950914322D+02
SUMA 27	-3.8998159963962965D+02
SUMA 28	-3.8998159963762965D+02
SUMA 29	-3.8998159964339347D+02
SUMA 30	-3.8998159964389347D+02
SUMA 31	-3.8998159964449272D+02
SUMA 32	-3.8998159964449272D+02
SUMA 33	-3.8998159964457729D+02
SUMA 34	-3.8998159964457729D+02
SUMA 35	-3.8998159964458927D+02
SUMA 36	-3.8998159964456927D+02
SUMA 37	-3.8998159964459097D+02
SUMA 38	-3.8998159964459097D+02
SUMA 39	-3.8998159964459121D+02
SUMA 40	-3.8998159964459121D+02
SUMA 41	-3.8998159964459125D+02
SUMA 42	-3.8998159964459125D+02
SUMA 43	-3.8998159964459125D+02
SUMA 44	-3.8998159964459125D+02
SUMA 45	-3.8998159964459125D+02
SUMA 46	-3.8998159964459125D+02
SUMA 47	-3.8998159964459125D+02
SUMA 48	-3.8998159964459125D+02

EVALUACION DE LA INTEGRAL POR AJUSTE;METODO ANALITICO

INTEGRAL = -3.889797242660018D+02

CONSTANTES CALCULADAS PARA LA FUNCION DE AJUSTE

AF = 5.8729296442427403D+16 BF = 5.8049242486306265D+00 CF = -1.5187491117252664D+00

IV.3 La función de ajuste en flujo turbulento $W(T) = s\, e^{pT}$ es adecuada.

Esto se comprobó evaluando la integral

$$\int_{To}^{T1} \frac{(\nu)^n}{T - Ta}\, dT$$

por integración numérica y comparando el resultado con el resultado obtenido por ajuste.

Para fracciones de petróleo es aplicable la ecuación de Blasius para factor de fricción:

$$fr = \frac{0.0791}{(Re)^{0.25}}, \text{ (Ref. 4).}$$

Por lo tanto, el valor usado para n fue de 0.25.

Se estudiaron varios rangos de viscosidad, pudiéndose concluir lo siguiente:

1).- Para viscosidades cinemáticas arriba de 10 centistokes, y en flujo turbulento, la integral

$$\int_{To}^{T1} \frac{(\nu)^n}{T-Ta}\, dT$$

evaluada por la función de ajuste W(T), difiere en menos de 0.4% del valor verdadero de la integral, cuando se usa un valor de T_y cercano a la temperatura media de los límites de la integral; es decir T_y cercano a $\frac{To+T1}{2}$. Se dará un ejemplo en el Capítulo V.

2).- Para viscosidades cinemáticas entre 4.0 y 10.0 centistokes, la diferencia entre el valor verdadero de la integral

$$\int_{To}^{T1} \frac{(\nu)^n}{(T-Ta)}\, dT$$ y el valor obtenido por ajuste es menor de 1.8%, cuando se usa $T_y = \frac{To+T1}{2}$ ó un valor cercano a este promedio, en la evaluación de las constantes s y p. Véase el ejemplo para este caso que se dá en el capítulo V.

Ya que no es común que se calienten las fracciones de baja viscosidad para su transporte, no se consideró necesario evaluar el ajuste a viscosidades cinemáticas menores de 4.0 centistokes.

V. EJEMPLOS DE APLICACION

V.1 CALCULO DE LA CAIDA DE PRESION POR FRICCION EN FLUJO LAMINAR

Para ilustrar el método analítico se considerará el problema resuelto por método gráfico en el artículo de la referencia bibliográfica No. 1. El resultado publicado se compararará con el obtenido por el método; así como por la suma de caídas de presión por segmentos.

Problema:

Se bombearán 200 gal./min. de combustóleo No. 6 a 170°F a través de una tubería de 8 pulgadas de diámetro nominal cédula 40, de 60 000 ft. de longitud. El suelo es arcilloso-húmedo; la tubería se recubre de 0.5 in. de asfalto y está enterrada a una profundidad de 3 ft. En estas condiciones, el coeficiente total de transferencia de calor, referido a la superficie externa es según la tabla 1: Ue = 0.315 BTU/(hr.)(ft.^{2})(°F). La temperatura ambiente media:-

$T_a = 60°F$. Los diámetros interno y externo respectivamente son: $D_i = 0.666$ ft.; $D_e = 0.72$ ft.

Propiedades del combustóleo:

$\rho =$ 59.5 lb./ft.^{3} (17° API)

$\nu_1 =$ 320 cstk. a 122°F

$\nu_2 =$ 36.5 cstk. a 210°F

$C_p =$ 0.44 BTU/(lb.) (°F)

Primeramente, es necesario encontrar los valores de A y B de la ecuación que caracteriza el comportamiento viscosidad-temperatura:

$$\nu = e^{AT^{-B}} - 0.7$$

Para este caso:

T_1 = 122° F = 581.7°R

T_2 = 210°F = 669.7°R

ν_1 = 320 centistokes

ν_2 = 36.5 centistokes

De la ecuación (46):

$$B = \frac{\ln \ln (\nu_2 + 0.7) - \ln \ln (\nu_1 + 0.7)}{\ln T_1 - \ln T_2}$$

$$B = 3.317167446$$

De la ecuación (47):

$$A_1 = \ln \ln (\nu_1 + 0.7) + B \ln T_1$$

$$A_1 = 22.86969798$$

De la ecuación (48):

$$A = e^{A1}$$

$$A = 8.554283426 \times 10^9$$

V.1.1 Solución por el Método Analítico

Resumimos el método propuesto en los siguientes pasos:

1).- Obtener los valores numéricos de la función $g(T) = \frac{e^{AT^{-B}}}{T - Ta}$ y sus primeras dos derivadas (g_1 y g_2), -

evaluadas en T_y según lo establecido en la sección- IV.1.

2).- Habiendo obtenido g_o, g_1 y g_2, se calcula el valor- de δ de acuerdo a la ecuación (81).

3).- Se calculan los valores de las constantes de ajuste a, b y c, de acuerdo a las ecuaciones (74), (82), - (83) y (87).

4).- Se obtiene ΔP_f de acuerdo a la ecuación (90).

Solución:

Paso 1).- Para tener el rango de temperatura en el cual - trabajará el sistema, se calcula la temperatura al- final de la tubería, por la ecuación (23):

$$T1 = 559.48°R$$

Escogemos una temperatura T_y dentro del rango T_o a- T_1; digamos T_y = 582.0°R.

Evaluamos la función g(T) y sus derivadas g_1 y g_2 -- de acuerdo a la sección IV.1, mediante la siguiente- secuencia:

$$j_o = -AB\ T_y^{-(B+1)} = -3.2833375 \times 10^{-2}$$

$$j_1 = -j_o\ (B+1)\ T_y^{-1} = 2.4355185 \times 10^{-4}$$

$$f = e^{A(T_y)^{-B}} = 317.55310$$

$$f_1 = f\ j_o = -\ 10.426340$$

$$f_2 = f_1 j_o + f j_1 = 0.41967259$$

$$h = (T_y - Ta)^{-1} = 1.6051364 \times 10^{-2}$$

$$h_1 = -(h)^2 = -2.5764629 \times 10^{-4}$$

$$h_2 = 2(h)^3 = 8.2711491 \times 10^{-6}$$

$$g = \frac{e^{A(T_y)^{-B}}}{T - Ta} = f\ h = 5.0971606$$

$$g_1 = f_1 h + f h_1 = -2.4917337 \times 10^{-1}$$

$$g_2 = f_2 h_o + 2\ f_1 h_1 + f h_2 = 1.4735462 \times 10^{-2}$$

Paso 2).- Se calcula Ł, por ecuaciones (78), (79), (80) y (81):

$$Q = -g_o = -5.09716106$$

$$R = (g_o - g_1 T_y) = 150.11606$$

$$S = T_y^2 \left(\frac{g_1^2}{g_o} - g_2\right) = -865.33396$$

$$Z = \frac{-R + (R^2 - 4QS)^{1/2}}{2Q}$$

$$Z = 7.864605962$$

Paso 3).-

$$b = Z - 1 = 6.864605962$$

$$ry = \left(\frac{g_1}{g_o} + \frac{1}{T_y}\right) = -3.5371671 \times 10^{-2}$$

$$a = -\frac{r_y}{b} T_y^{(b+1)} = 2.864638 \times 10^{19}$$

$$c = \frac{g_o}{r_y\, e^{aT_y^{-b}}} = -7.182309624$$

Paso 4).- En régimen laminar:

$$\Delta P_f = -MN \left[c\, e^{aT^{-b}} - 0.7 \ln (T - Ta) \right]_{To}^{T1}$$

$$M = \frac{32\, \rho\, V_s}{gc\ Di^2} (1.076391 \times 10^{-5}) = 1.8311729 \times 10^{-3}$$

$$N = \frac{-\rho\ Di^2\ VCp}{4\ Ue\ De} = -58985.802$$

$$\Delta P_f = -(1.8311729 \times 10^{-3})(-58985.802)(-324.46393)$$

$$\Delta P_f = -35046.4 \text{ lb./ft.}^2$$

$$\Delta P_f = \frac{-35046.4}{144} \text{ psi.} = -243.37 \text{ psi.}$$

V.1.2 Solución por Método Gráfico

El método gráfico propuesto por Lothholz (Ref. 1), es el siguiente:

1).- Graficar la viscosidad cinemática como función de la temperatura en una carta ASTM.

2).- Hacer una gráfica semilogarítmica de la diferencia de temperatura (Tx - Ta) en función de la longitud x de acuerdo a la ecuación:

$$\log (Tx-Ta) = \log (To-Ta) - \left(\frac{1}{2.303}\right)\left(\frac{\pi}{3600}\right)\left(\frac{De\ Uc}{Cp\ \rho\ G}\right)$$

en donde G = gasto en ft^3/seg.

3).- Graficar la viscosidad cinemática como función de la longitud, de acuerdo a las gráficas obtenidas --

en los pasos (1) y (2).

4).- Determinar el área bajo la curva construída en el paso (3). Esto puede hacerse cortando la gráfica y pesándola.

5).- Calcular la caída de presión de acuerdo a la ecuación:

$$\Delta P_f = \frac{128}{\pi} \frac{G \rho}{Di^4 gc} \int_0^L \gamma \, dx$$

En donde el valor de la integral es el área evaluada en el paso (4).

El resultado obtenido por este método al problema que estamos considerando es según su autor:

$$\Delta P_f = 35100 \text{ lb./ft.}^2 = 243.75 \text{ psi.}$$

V.1.3 Evaluación de ΔP_f sumando las caídas de presión de segmentos de la línea.

Para evaluar esta alternativa se escribió el programa "Presión / seg" en FORTRAN. Este programa considera decrementos uniformes de temperatura para cada segmento y --

```
B7800   F O R T R A N   C O M P I L A T I O N   M A R K   3.2.077/*3.0.000*   MONDAY, 09/20/82   11:
                      P R E S I O N / S E G . O N . D I S K

      DOUBLE PRECISION VIS1,VIS2,A1,DIV
      DOUBLE PRECISION RLN,A,VIMED,SDELP,T1,T2,P,ALFA,VIS
      DOUBLE PRECISION RK1,RK2,RL1,RL2
C  LECTURA DE DATOS
      READ(5,10) DI,U,CP,DEN,DE

C DI= FT. ; U=(BTU)/(HR)(SQ.FT.)(F) REFERIDO A SUPERFICIE EXTERNA
C CP= BTU/(LB.)(F) ;DEN= LB./CU. FT. ;DE= FT.
      READ(5,11) V
C   V=FT./HR. ; VELOCIDAD MEDIA
      READ(5,2) VIS1,VIS2,T1,T2
  2   FORMAT(4F10.0)
 10   FORMAT(5F10.0)
 11   FORMAT(F15.0)
C OBTENCION DE LAS CONSTANTES A Y B EN LA EXPRESION QUE REPRESENTA LA
C VISCOSIDAD COMO FUNCION DE LA TEMPERATURA ABSOLUTA
      RK1=DLOG(DLOG(VIS1+0.7))
      RK2= DLOG(DLOG(VIS2+0.7))
       RL1=DLOG(T1)
      RL2= DLOG(T2)
      P=(RK2-RK1)/(RL1-RL2)
      A1= RK1+(P*RL1)
      ALFA=DEXP(A1)
C PRUEBA DE CONSTANTES ALFA Y P
      P=-P
      VIS=(DEXP(ALFA*(T1**P)))-0.7
      WRITE(6,100) VIS1,VIS

 100  FORMAT(1H1///30X,20H VISCOSIDAD 1,DATO =,1PD26.16/25X,26H VISCOSID
     1AD 1,CALCULADA =,1PD26.16)
      WRITE(6,31) DI,DE,DEN,U,CP
 31   FORMAT(1H //,5X,19H DIAMETRO INTERNO =,E13.5,10X,19H DIAMETRO EXTE
     1RNO =,E13.5,10X,11H DENSIDAD =,2PE13.5//,10X,42H COEFICIENTE DE TR
     1ANSFERENCIA DE CALOR;U =,E13.5,10X,26H CAPACIDAD CALORICA;CP =,E13
     1.5)
      XL=60000.0
      TF=557.48
      SDELP=0.0
      TI=622.7
      TA=519.7
      DECT=2.0
      WRITE(6,122) ALFA,P,TI,TF,XL,TA
  122 FORMAT(//40X,3HA= ,1PD26.16,5X,3HB= ,1PD26.16//,30X,16H TEMP. INIC
     1IAL= ,3PD12.4,10X,16H TEMP. FINAL= ,3PD12.4//,30X,16H LONG. TOTAL=
     1 ,3PD12.4,12X,17H TEMP. AMBIENTE= ,3PD12.4)
      DELTI=TI-TA
      TX=TI
      DELX=0.0
      RM=-1.0*(DEN*(DI**2.)*V*CP)/(4.0*DE*U)
      FCONV=(1.0/(30.48**2.0))*0.01
      RN=(32.*DEN*V*FCONV)/(32.17*(DI**2.)*3600.)
      WRITE(6,326)
 326  FORMAT(1H1//,5X,16H DISTANCIA (FT.),10X,21H TEMPERATURA GRADOS F,10
```

```
 START OF SEGMENT 002
C   002:0000:0
C   002:0000:0
C   002:0000:0
C   002:0000:0
C   002:0000:0
        FIB IS 0006 LONG
C   002:000F:3
C   002:000F:3
C   002:000F:3
C   002:0016:3
C   002:0016:3
C   002:0029:3
C   002:0029:3
C   002:0029:2
C   002:0029:2
C   002:0029:2
C   002:0029:2
C   002:002D:0
C   002:0031:0
C   002:0032:3
C   002:0034:0
C   002:0036:2
C   002:0036:1
C   002:0039:6
C   002:0039:6
C   002:003A:6
C   002:003F:6
        FIB IS 0006 LONG
C   002:0047:3
C   002:0047:3
C   002:0047:3
C   002:0054:2
C   002:0054:3
C   002:0054:2
C   002:0054:2
C   002:0054:2
C   002:0055:2
C   002:0057:3
C   002:0058:4
C   002:005A:3
C   002:005C:3
C   002:005D:3
C   002:0063:3
C   002:006B:2
C   002:006B:2
C   002:006B:2
C   002:006C:4
C   002:006D:3
C   002:006E:1
C   002:0075:4
C   002:0079:4
C   002:007D:1
C   002:0081:6
```

```
     1X,25H VISCOSIDAD MEDIA (CSTK.),10X,24H CAIDA DE PRESION (PSI.)/)
150  DELTX=TX-TA
     DIV=DELTX/DELTI
     RLN=DLOG(DIV)
     X=RLN*RM
     DELA=X-DELX
     TDEC=TA+DECT
     TMED=(TA+TDEC)/2.
     VIMED=(DEXP(ALFA*(TMED**P)))-0.7
     DELP=(RN*VIMED*DELX)/144.0
     SDELP=DELP+SDELP
     DIF=TX-TF
     TFAR=TX-459.7
     WRITE(6,327) X,TFAR,VIMED,SDELP
327  FORMAT(1H ,5X,1PD16.7,12X,1PE16.7,17X,1PD16.7,19X,1PD16.7)
     IF(DIF.LT.DECT) GO TO 200
     TA=TX-DECT
     DELX=X
     GO TO 150
200  TMED=(TX+TF)/2.
     VIMED=(DEXP(ALFA*(TMED**P)))-0.7
     TA=TF
     TFAR=TX-459.7
     DELX=XL-X
     X=XL
     DELP=(RN*VIMED*DELX)/144.
     SDELP=DELP+SDELP
     WRITE(6,327) X,TFAR,VIMED,SDELP
     CALL EXIT
     END
```

```
C    002:0031:2
C    002:0031:2
C    002:0032:4
C    002:0033:5
C    002:0035:2
C    002:0036:2
C    002:0037:3
C    002:0038:5
C    002:003A:4
C    002:003F:4
C    002:0092:1
C    002:0093:1
C    002:0094:3
C    002:0096:4
C    002:00A1:2
C    002:00A1:2
C    002:00A2:4
C    002:00A4:0
C    002:00A5:0
C    002:00A5:3
C    002:00A7:2
C    002:00AC:4
C    002:00AD:3
C    002:00AF:4
C    002:00B1:1
C    002:00B2:1
C    002:00B4:4
C    002:00B5:4
C    002:00C0:2
C    002:00C1:1
SEGMENT 002 IS 00DD LONG
```

```
                    VISCOSIDAD 1,DATO =       3.2000000000000000D+02
                 VISCOSIDAD 1,CALCULADA =,       3.2000000000000000D+02

DIAMETRO INTERNO =    .66667E+00          DIAMETRO EXTERNO =   .72000E+00          DENSIDAD = 59.50000E+00
     COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR;U = 31.50000E-02               CAPACIDAD CALORICA;CP = 66.00000E-02

                         A=      8.5542833783244423D+09        B=     -3.3171674444387814D+00
                    TEMP. INICIAL= 629.7000D+00               TEMP. FINAL= 559.4800D+00
                    LONG. TOTAL= 600.0000D+02                 TEMP. AMBIENTE= 519.7000D+00
```

DISTANCIA (FT.)	TEMPERATURA GRADOS F	VISCOSIDAD MEDIA (CSTK.)	CAIDA DE PRESION (PSI.)
0.	1.7000000E+02	8.1770286D+01	0.
1.0825058D+03	1.6800000E+02	8.5737107D+01	1.1806125D+00
2.1352485D+03	1.6600000E+02	8.9931322D+01	2.4617167D+00
3.3049961D+03	1.6400000E+02	9.4391562D+01	3.7907700D+00
4.6545534D+03	1.6200000E+02	9.9137990D+01	5.2352177D+00
5.6228207D+03	1.6000000E+02	1.0417267D+02	6.7333543D+00
6.8140737D+03	1.5800000E+02	1.0957953D+02	8.4446257D+00
8.0311128D+03	1.5600000E+02	1.1532467D+02	1.0224652D+01
9.2731580D+03	1.5400000E+02	1.2145656D+02	1.2147269D+01
1.0541915D+04	1.5200000E+02	1.2800621D+02	1.4212859D+01
1.1838561D+04	1.5000000E+02	1.3500761D+02	1.6439312D+01
1.3166346D+04	1.4800000E+02	1.4249784D+02	1.8842102D+01
1.4520612D+04	1.4600000E+02	1.5051750D+02	2.1458470D+01
1.5908793D+04	1.4400000E+02	1.5911107D+02	2.4267655D+01
1.7330627D+04	1.4200000E+02	1.6832731D+02	2.7291182D+01
1.8787167D+04	1.4000000E+02	1.7821973D+02	3.0593165D+01
2.0280779D+04	1.3800000E+02	1.8884714D+02	3.4180596D+01
2.1813213D+04	1.3600000E+02	2.0027616D+02	3.8033948D+01
2.3336505D+04	1.3400000E+02	2.1257117D+02	4.2337431D+01
2.5002907D+04	1.3200000E+02	2.2581896D+02	4.6379835D+01
2.6664846D+04	1.3000000E+02	2.4010161D+02	5.2056723D+01
2.8374965D+04	1.2800000E+02	2.5551540D+02	5.7612675D+01
3.0136160D+04	1.2600000E+02	2.7216585D+02	6.3708831D+01
3.1951513D+04	1.2400000E+02	2.9016973D+02	7.0408485D+01
3.3824526D+04	1.2200000E+02	3.0965640D+02	7.7845068D+01
3.5758760D+04	1.2000000E+02	3.3076928D+02	8.5922970D+01
3.7755961D+04	1.1800000E+02	3.5366762D+02	9.4719295D+01
3.9829192D+04	1.1600000E+02	3.7852862D+02	1.0488591D+02
4.1974700D+04	1.1400000E+02	4.0554664D+02	1.1595253D+02
4.4201190D+04	1.1200000E+02	4.3496771D+02	1.2826897D+02
4.6515014D+04	1.1000000E+02	4.6697042D+02	1.4201110D+02
4.8923306D+04	1.0800000E+02	5.0189014D+02	1.5738387D+02
5.1434109D+04	1.0600000E+02	5.4001256D+02	1.7[illegible]D+02
5.4056539D+04	1.0400000E+02	5.8141006D+02	1.9602931D+02
5.68[illegible]D+04	1.0200000E+02	6.2[illegible]D+02	2.1[illegible]D+02
5.[illegible]D+04	1.0000000E+02	6.[illegible]D+02	2.2[illegible]D+02
6.0000000D+04	9.7000000E+01	7.0701435D+02	2.4360012D+02

calcula la caída de presión en el mismo, considerando la viscosidad evaluada a la temperatura media de ese segmento. A continuación se muestra una copia de este programa y los resultados obtenidos para el presente problema. Como podrá observarse, el resultado obtenido considerando decrementos de 2 grados es:

$$\Delta P_f = -243.60 \text{ psi.}$$

Comparando los resultados obtenidos por los tres métodos se observa que concuerdan:

Método analítico	------	$\Delta P_f = -243.37$ psi.
Método gráfico	------	$\Delta P_f = -243.75$ psi.
Método por segmentos	------	$\Delta P_f = -243.60$ psi.

$$\text{error (\%)} = \frac{-243.37 - (-243.60)}{-243.60} \times 100 = 0.09\%$$

(relativo al método por segmentos)

V.2 CALCULO DE LA CAIDA DE PRESION POR FRICCION EN FLUJO TURBULENTO

El método analítico para calcular la caída de pre - sión a flujo turbulento en un sistema no isotérmico se pue- de resumir en los siguientes pasos:

1).- Obtener los valores numéricos de la función --- $Y(T) = \frac{e^{AtT^{-B}}}{(T-Ta)}$ y de su primer derivada Y_1, eva - luadas en T_y.

2).- Con los valores de Y_o, Y_1 se calculan p y s con las ecuaciones (103) y (104).

3).- Se calcula ΔP_f turbulento con la ecuación (106).

A manera de ilustración y comprobación adicional, - se resolverán dos problemas en flujo turbulento: uno en el rango de viscosidad cinemática mayor de 10 centistokes y -- otro en el rango de 4 a 10 centistokes.

V.2.1 Problema en el cual la viscosidad es mayor - de 10 centistokes

Se considerará el mismo sistema descrito en el pro- blema de la sección V.1 con las diferencias de que se bombearán 600 gal./min. de un crudo "Faja de Oro" de las si - guientes características (Ref. 5):

a $T_1 = 100°F$; $\nu_1 = 202.25$ centistokes

a $T_2 = 140°F$; $\nu_2 = 61.11$ centistokes

$\rho = 58.65$ lb./ft.^{3}

Cp = 0.44 BTU/(lb.)(°F).

Además, la temperatura inicial de bombeo será:

$T_o = 210°F = 669.7°R.$

Las constantes A y B obtenidas por las ecuaciones - (46), (47) y (48) son:

$$A = 6.4465248330 \times 10^{10}$$

$$B = 3.669633606$$

Como en este caso el factor de fricción es:

$$f_r = \frac{0.0791}{(Re)^{0.25}} ,$$

por lo que:

$m = 0.0791$

$n = 0.25$

$At = n\ A = 0.25\ A$

$At = 1.611631208 \times 10^{10}$

Por lo tanto, las condiciones al inicio de la tubería son:

$T_o = 210°F = 669.7°R$

$\nu_o = 14.94$ cstk.

$V_s = 3.8325$ ft./seg.

$Re_o = 15888.$; flujo turbulento.

Las condiciones al final de la tubería son:

$T_1 = 166.3°F = 626.0°R$ (por ec. (23))

$\nu_1 = 33.15$ cst.k

$Re_1 = 7160.$; flujo turbulento.

V.2.1.1 Solución por método analítico

Paso 1).- Evaluar Y_o, Y_1:

Para $T_y = 647°R$ (intermedia entre T_o y T_1)

$$Y_o = \frac{e^{At}\ T_y^{-B}}{(T_y - T_a)} = 1.7142078 \times 10^{-2}$$

$$Y_1 = Y_o \left(-At\ B\ T_y^{-(B+1)}\right) - \frac{e^{At}\ T_y^{-B}}{(T_y - T_a)^2}$$

$$Y_1 = 2.1052692 \times 10^{-4}$$

Paso 2).- Calcular p y s por ecs. (103) y (104).

$$p = \frac{Y_1}{Y_o} = -1.2281295 \times 10^{-2}$$

$$s = \frac{Y_o}{p\ e^{p\ Ty}} = -3.9420523 \times 10^{3}$$

Paso 3).- Calcular ΔP_f (turbulento) por ec. (106).

$$\Delta P_f(\text{turbulento}) = -M_t N\left(s\ e^{pT_1} - s\ e^{p\ T_o}\right)$$

$$M_t = \frac{2\ \rho\ m\ V_s^{(2-n)}}{gc\ Di^{(n+1)}}\left(1.076391 \times 10^{-5}\right)^n$$

$$M_t = 2.878881635 \times 10^{-1}$$

$$N = \frac{-\rho\ Di^2\ V\ Cp}{4\ Ue\ De}$$

$N = -1.74429444 \times 10^5$

$\Delta P_f = -(2.878881635 \times 10^{-1})(-1.74429444 \times 10^5)$
(-0.75025881)

ΔP_f (turbulento) $= -37675.12$ lb./ft.^{2}

ΔP_f (turbulento) $= -261.63$ psi.

Por otra parte, se calculó ΔP_f por segmentos y - por integración numérica. Este último método se considera- el de mayor exactitud y se toma como referencia.

Método por segmentos	--- $\Delta P_f = -\ 261.22$ psi.
Método por integración numérica	--- $\Delta P_f = -\ 262.17$ psi.
Método analítico	--- $\Delta P_f = -\ 261.63$ psi.

En este caso el error para el método analítico es:

$$\text{error } (\%) = \frac{-\ 261.63 - (-262.17)}{-\ 262.17} = -\ 0.20\%$$

V.2.2 Problema en el cual la viscosidad está den-- tro del rango de 4 a 10 cstk.

El método de cálculo es el mismo que el aplicado en

V.2.1; pero se muestra este ejemplo para ilustrar como varía la exactitud al trabajar en el rango de baja viscosidad.

También aquí se considerará el sistema descrito en el problema de la sección V.1, pero en este caso se bombearán 600 gal./min. a una temperatura inicial T_o = 190°F = 649.7°R, de un crudo "La Laja" del cual se tienen los siguientes datos (Ref. 5):

a $T_1 = 100°F$; $\nu_1 = 30.29$ cstk.

a $T_2 = 140°F$; $\nu_2 = 11.42$ cstk.

$\rho = 57.40$ lb./ft.^{3}

$Cp = 0.46$ BTU/(lb.)(°F)

Para este crudo, las constantes A y B obtenidas por las ecuaciones (46), (47) y (48) son:

$A = 1.780736657 \times 10^{13}$

$B = -4.627019151$

También en este caso se considerará que el factor de fricción está dado por (Ref. 4):

$$f_r = \frac{m}{(Re)^n} = \frac{0.0791}{(Re)^{0.25}}$$

por lo que:

A_t = n A = 0.25 A

$A_t = 4.451841642 \times 10^{12}$

Por lo tanto, las condiciones al inicio de la tubería son:

T_o = 190°F = 649.7°R

ν_o = 4.89 cstk.

V_s = 3.8325 ft./seg.

Re_o= 48541; flujo turbulento

Las condiciones al final de la tubería son:

T_1 = 152.9°F = 612.6°R (calculada con ec. (23))

ν_1 = 8.89 cstk.

Re_1= 26 700; flujo turbulento

V.2.2.1 Solución por método analítico

Paso 1).- Para T_y = 631.0°R

$$Y_o = \frac{e^{At} T_y^{-B}}{(T_y - T_a)} = 1.4708363 \times 10^{-2}$$

$$Y_1 = Y_o \left(- A_t B T_y^{-(B+1)} \right) - e^{At} T_y^{-B} \quad (T_y - T_a)^{-2}$$

$$Y_1 = 1.8531080 \times 10^{-4}$$

Paso 2).- Calcular p y s por ecs. (103) y (104):

$$p = \frac{Y_1}{Y_o} = -1.2599009 \times 10^{-2}$$

$$s = \frac{Y_o}{p\ e^{pT_y}} = -3.31022937 \times 10^{3}$$

Paso 3).- Calcular ΔP_f (turbulento) por ec. (106):

$$\Delta P_f \text{ (turbulento)} = -M_t N \left(s\, e^{pT_1} - s\, e^{pT_o} \right)$$

$M_t = 2.81752439 \times 10^{-1}$ por ec. (106-a)

$N = -1.7847148 \times 10^{5}$ por ec. (106-b)

$$\left(s\, e^{pT_1} - s\, e^{pT_o} \right) = -0.549621$$

$$\Delta P_f \text{ (turbulento)} = -(2.81752439 \times 10^{-1})(-1.7847148) 10^{5} (-0.549621)$$

$$\Delta P_f \text{ (turbulento)} = -27\ 637.60 \text{ lb./ft.}^2$$

ΔP_f (turbulento) = $-$ $\underline{191.92}$ psi.

También se calculó ΔP_f por segmentos y por integración numérica. Se comparan los tres resultados:

Método por segmentos	---	$\Delta P_f = -188.49$ psi.
Método por integración numérica	---	$\Delta P_f = -188.90$ psi.
Método analítico	---	$\Delta P_f = -191.92$ psi.

El error que da el método analítico en el rango de viscosidad de 4 a 10 cstk. es mayor, siendo en este caso:

$$\text{error (\%)} = \frac{-191.92-(-188.90)}{-188.90} \times 100 = 1.59\%$$

VI. CONCLUSIONES

El presente trabajo de tesis proporciona un método-analítico para calcular la caída de presión por fricción en un sistema de bombeo de fracciones de petróleo con calentamiento inicial.

Las principales conclusiones derivadas de los resultados obtenidos son las siguientes:

1).- Aunque el lineamiento general del método es uno sólo, se desarrollaron dos ecuaciones para obtener la caída de presión por fricción. La ecuación (90) - es aplicable a flujo laminar y la ecuación (106) es aplicable a flujo turbulento.

2).- Con el método analítico propuesto se obtienen resultados cuya desviación del valor real es:

a).- De $\pm$ 0.4% máxima si la viscosidad cinemática es mayor de 10 centistokes, tanto a régimen laminar como a régimen turbulento.

2).- De ± 1.8% máxima si la viscosidad cinemática está comprendida entre 4 y 10 centistokes, a flujo turbulento.

3).- Las ventajas que tiene el presente método analítico sobre el método gráfico son la rapidez de cálculo y la precisión de resultados, pues el método gráfico involucra las operaciones de graficar, cortar y pesar, las cuales introducen errores en la evaluación.

Comparado con el método de suma de caídas de presión por segmentos, el método analítico de resultados de similar exactitud, con la ventaja de que el resultado se puede obtener directamente sin secuencias iterativas ni programas para computadora.

4).- Otra ventaja adicional es que por ser un método con el cual se obtiene la caída de presión como función de las temperaturas en los extremos de la línea y del diámetro de la tubería; es posible la optimización analítica de variables como el diámetro, la temperatura inicial de calentamiento, el espesor de aislamiento, etc.

A P E N D I C E

Como complemento al método analítico para calcular la caída de presión en un sistema no isotérmico que maneje líquidos, se presentará a continuación el método propuesto por Lapple (Ref. 7) para calcular la caída de presión o la masa velocidad para flujo de gases en un - sistema no isotérmico.

El flujo de gases no isotérmico se presenta generalmente cuando existen caídas de presión considerables, y la expansión del gas causa un enfriamiento del mismo.

En general, el sistema considerado se representa esquemáticamente en la figura 2:

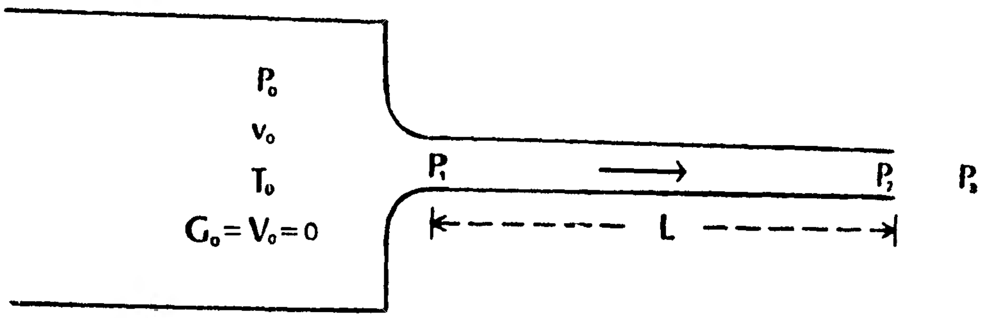


FIGURA 2

Generalmente el flujo no isotérmico de gases se puede aproximar como un sistema adiabático. En la presentación del siguiente método se considerará un comportamiento de gas ideal, y en el cual es aplicable la siguiente:

N O M E N C L A T U R A

A = área, sq. ft.

A_c = área para flujo crítico, en la garganta de la boquilla, sq. ft.

C = Coeficiente de descarga, adimensional.

D = Diámetro, ft.

f = factor de fricción de Fanning, adimensional

g_c = constante dimensional = 32.17 lb. ft./lb. seg.^{2}

G = $V\rho = V/v$ = masa velocidad, lb./seg. (sq. ft.)

G_c = masa velocidad crítica o máxima, lb./seg. (sq. ft.)

G_{ci} = máxima velocidad hipotética en expansión isotérmica, lb./seg. (sq. ft.)

k = Cp/Cv, adimensional

L = longitud, ft.

M = peso molecular lb./lb.-mol

N = fL/R_h = resistencia por fricción en cabezas de velocidad.

P_c = Presión crítica, lb. fuerza/sq. ft. abs.

P_0 = presión absoluta en cámara grande, lb. fuerza/sq. ft.

P_1, P_2= presión absoluta a la entrada y salida respectivamente, lb. fuerza/sq. ft.

P_3 = presión absoluta de los alrededores, lb. fuerza/ - sq. ft.

R = constante de los gases = 1546 ft. (lb. fuerza / - (lb. mol) °R

R_h = radio hidráulico

rc = P_c/P_0, relación crítica de presiones, adimensional

T = temperatura absoluta °R

V = velocidad, ft./seg.

V_c = velocidad crítica, ft./seg.

v = volumen específico ft_3/lb.

ω = flujo de masa, lb/seg.

β = relación de diámetro de la garganta de la boquilla a diámetro de la tubería, adimensional.

μ = viscosidad, lb/ft. seg. = centipoise/1488

ρ = densidad, lb./ft^3.

En un ducto horizontal, el balance de energía mecánica se puede expresar en forma diferencial como:

$$v dp + \frac{VdV}{g_c} = -\frac{2 f V^2}{g_c D} \qquad (1)$$

En un ducto uniforme, la masa velocidad G es constante, de tal forma que si P es conocido como función de v, v dp puede expresarse como Ø (v) dv, y en consecuencia la integración de la ecuación (1) es posible. Sin embargo, - generalmente son necesarios procedimientos gráficos.

El método gráfico para la integración de la ecuación (1) presentado por Lapple para flujo adiabático en ductos horizontales asume que las condiciones de flujo en la entrada resultan de la expansión a diabática del gas a través de una boquilla sin fricción que sale de una cámara grande en la que la velocidad del gas es despreciable. Tal cámara se presenta frecuentemente en la realidad, y es posible compensar el hecho de que la entrada no sea una boquilla perfecta, considerando un aumento adicional a la longitud de la tubería. Los datos indican que el factor de fricción es la misma función del número de Reynolds para flujo compresible y para flujo incompresible. Para un diámetro de tubería y flujo de masa dados, el factor de fricción depende de la viscosidad, la cual a su vez depende de la temperatura. Ya que en flujo adiabático compresible el número de Reynolds es usualmente alto, la variación del factor de fricción debido a variaciones de temperatura a lo largo de la tubería es pequeña y es posible considerar un factor de fricción constante en la integración.

Para el sistema considerado en la Figura 2 se cumplen las siguientes relaciones

$$\frac{v_1}{v_0} = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{1/k} \qquad (2)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(k-1)/k} \tag{3}$$

$$\frac{P_0}{P_1} = \left[1 + \frac{G^2}{2g_c}\left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{RT_1}{MP_1^2}\right]^{k/(k-1)} \tag{4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{5}$$

Las gráficas de las figuras 3, 4 y 5 muestran, para tres valores de k, y para varios valores de resistencia a la fricción N, la relación entre P_2/P_0 ó P_3/P_0 y la relación de la masa velocidad G en el ducto, al parámetro:

$$Gci = \sqrt{\frac{gc\ P_0}{2.718\ v_0}} = P_0\sqrt{\frac{gc\ M}{2.718\ RT_0}} \tag{6}$$

La cantidad Gci es la máxima masa velocidad hipotética en expansión isotérmica a través del sistema de la figura 2, cuando N=0. Tal expansión isotérmica no es físicamente factible. Las relaciones P_2/P_0 y P_3/P_0 son idénticas si para un dado valor de N la masa velocidad es menor que el valor máximo o valor crítico Gc; esto se cumple arriba de la línea punteada de las gráficas. Para un conjunto de condiciones dadas a la -

entrada, la velocidad de descarga de un gas a través de una boquilla aumentará al disminuir la relación de presiones absolutas P_1/P_2 hasta que la velocidad lineal en la garganta de la boquilla alcance la velocidad del sonido en ese gas y en ese lugar. El valor de P_1/P_0 para el cual se alcanza la velocidad acústica se le llama la relación crítica $r_C = P_C/P_0$. La presión en la garganta de la boquilla no será menor que $P_0\ r_C$ aún si existe una mucho menor presión a la salida; es decir si P_3/P_0 es menor que el valor de P_2/P_0 correspondiente a Gc el flujo es independiente de P_3. La línea punteada en las figuras 3, 4 y 5 es la gráfica de P_2/P_0 en flujo crítico VS. Gc/Gci.

Para $\beta \leq 0.2$ la relación crítica está dada por:

$$r_C = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{7}$$

Bajo condiciones de flujo crítico sólo se necesitan conocer las condiciones de entrada P_0, v_0 y T_0 para determinar la velocidad de flujo, la cual para $\beta \leq 0.2$ está dada por:

$$\omega_{max.} = C\ A_C\ \sqrt{g_C\ k\left(\frac{P_0}{v_0}\right)\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}} \tag{8}$$

Para un gas ideal, la ec. (8) es:

$$\omega_{max.} = CA_c\ P_0 \sqrt{g_c\ k\left(\frac{M}{RT_0}\right)\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}} \qquad (9)$$

que para el caso específico de aire se reduce a:

$$\omega_{max.} = \frac{0.533\ CA_c\ P_0}{\sqrt{T_0}} \qquad (10)$$

Para usar las gráficas de las figuras 3, 4, y 5 se deben hacer las siguientes consideraciones:

1.) La interpolación entre gráficas es permisible para otros valores de k.

2.) Cuando haya accesorios instalados en la línea se aumentará al valor de N calculado para la tubería recta, el número cabezas de velocidad equivalente a la pérdida en los accesorios (véase Figura 6). Sin embargo, si el área transversal de un accesorio es significativamente menor que el de la tubería, se pueden obtener resultados erróneos porque podría suceder que se llegara a la velocidad acústica en la constricción con la consecuente limitación del flujo.

3.) Para entradas abruptas, las gráficas dan un resultado aproximadamente correcto si se le añade 0.5 al valor de N para el ducto. Sin embargo, en este caso las fórmulas (2), (3) y (4) dadas anteriormente no son aplicables, porque se aplican sólo en caso de entrada redondeada.

El procedimiento a seguir cuando se busca G es el siguiente:

Asúmase un valor f = 0.0045 para determinar un valor de prueba de G; con este valor aproximado de G se calcula R_e y con R_e se encuentra f. Si el valor encontrado de f checa con el asumido inicialmente el valor de G será el buscado; si no checa se repite el procedimiento con el nuevo valor de f.

A continuación se da un ejemplo ilustrativo:

Se desea calcular la velocidad de descarga de aire a la atmósfera de un recipiente a 150 psi. y 70°F a través de 35 ft. de tubería de dos pulgadas de diámetro Ced. 40 (Diámetro interno = 2.067 in.) y tres codos standard de 90°. La entrada de la tubería es abrupta.

Solución:

1.) Se asume f = 0.0045

2.) Se expresan las resistencias por fricción en función de N:

Resistencia	L/D	N
Entrada		0.50
Tubería recta	203	3.65*
3 Codos 90°		2.25
		6.40

*Calculada por $N = f\ L/R_h = 4f\ L/D$ asumiendo $f = 0.0045$

3.) Las condiciones conocidas son:

$T_0 = 530°R$

$P_0 = (150 + 14.7)\ (144) = 23700\ lb./ft^2$

$P_3 = (14.7)\ (144) = 2120.\ lb./ft^2$

$P_3/P_0 = 0.0893$

$M = 29$

$$Gci = P_0 \sqrt{\frac{gcM}{2.718RT_0}} = 486\ lb./seg.\ (ft.)^2$$

4.) Se calcula la velocidad de descarga con la Figura 4.:

$k = 1.4$

G/Gci; (de la curva para $N = 6.4$)y

$(P_3/P_0) = 0.0893$ ----------------------0.53

$G = 257\ lb./seg.\ (ft.)^2$

(T_2/T_0); (de la línea punteada) = 0.833

T_2 = 442°R

Temperatura promedio = 26°F

μ a Tem. promedio = 1.14×10^{-5} lb./ft. seg.

Re = 3,880,000

f = 0.0047; (de la Figura 7)

Ya que f = 0.0047 es bastante aproximado al valor asumido f = 0.0045 no es necesario repetir el procedimiento y se considera G = 257 lb/seg $(ft.)^2$ = el valor buscado.

Cuando se desea calcular la caída de presión entre dos puntos a lo largo de una tubería siendo conocidos el flujo y las condiciones en el punto mas cercano a la boquilla, el procedimiento a seguir es el siguiente:

Sean las condiciones conocidas T_1 y P_1.
Los cocientes $G/G\,c_i$, P_2/P_1 y T_2/T_1 están referidos a las condiciones conocidas y se pueden relacionar a G/G_{ci}, -- P_1/P_0 y T_1/T_0 mediante las siguientes ecuaciones:

$$\frac{G}{G_1\,ci} = \frac{G}{Gci}\left(\frac{\sqrt{T_1/T_0}}{P_1/P_0}\right) \qquad (11)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} \qquad (12)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_0}{T_1/T_0} \qquad (13)$$

en donde G_1ci es una cantidad hipotética que no tiene significado físico real y que está definida por:

$$G_1ci = \sqrt{\frac{gc\ P_1}{2.718\ v_1}} = P_1\sqrt{\frac{gc\ M}{2.718\ RT_1}}$$

Primero, se asume un valor de G/Gci, y de la gráfica - apropiada se leen los valores correspondientes de P_1/P_0 y T_1/T_0 para N=0. Con estos valores se calcula G/Gci de la ecuación (11) y del valor calculado de G_1ci. -- Usando este valor calculado de G/Gci se repite el procedimiento hasta que el valor calculado de G/Gci sea - igual al último valor asumido de G/Gci. Usando el valor final de G/Gci se lee de la gráfica el valor de -- P_1/P_0 para N=0 y el de P_2/P_0 para N= 4f L/D. Por último P_2 se calcula de la ecuación (12). Los valores de P_0 y T_0 así determinados son en general, hipotéticos, y serían las condiciones que una cámara requeriría para -- dar las condiciones P_1 y T_1 en la garganta de una boquilla sin fricción.

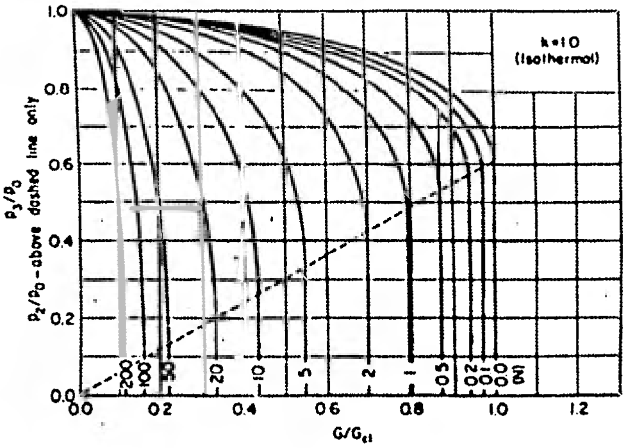


Fig. 5-29a. Design chart for isothermal and adiabatic flow of compressible fluids through pipes at high pressure drops. [*Lapple, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, 39, 385 (1943).]

FIGURA 3.

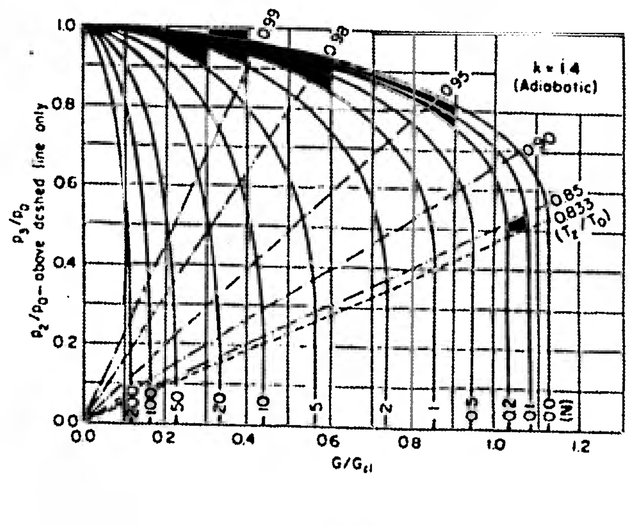
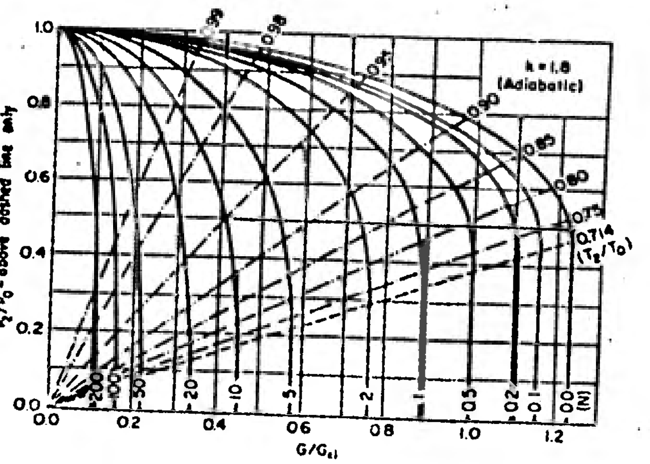


FIGURA 4.



FIGS. 5-29b and c. Design charts for adiabatic flow of compressible fluids through pipes at high pressure drops. [*Lapple, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, 39, 385 (1943).]

FIGURA 5.

Table 5-19. Additional Frictional Loss for Turbulent Flow through Fittings and Valves[a]

Type of Fitting or Valve	Additional Friction Loss, Equivalent No. of Velocity Heads, K
45-deg. ell, standard[a,b,c,d,e]	0.35
45-deg. ell, long radius[c]	0.2
90-deg. ell, standard[a,b,c,e,f,m]	0.75
Long radius[a,b,c,e]	0.45
Square or miter[m]	1.3
180-deg. bend, close return[a,b,e]	1.5
Tee, standard, along run, branch blanked off[e]	0.4
Used as ell, entering run[e,h]	1.0
Used as ell, entering branch[b,e,h]	1.0
Branching flow[f,h,j]	1[e]
Coupling[b,e]	0.04
Union[e]	0.04
Gate valve,[a,e,j] open	0.17
¾ open[p]	0.9
½ open[p]	4.5
¼ open[p]	24.0
Diaphragm valve,[a] open	2.3
¾ open[p]	2.6
½ open[p]	4.3
¼ open[p]	21.0
Globe valve,[e,j] bevel seat, open	6.0
½ open[p]	9.5
Composition seat, open	6.0
½ open[p]	8.5
Plug disk, open	9.0
¾ open[p]	13.0
½ open[p]	36.0
¼ open[p]	112.0
Angle valve,[a,e] open	2.0
Y or blowoff valve,[e,j] open	3.0
Plug cock[r] (Fig. 5-39) θ = 5°	0.05
10°	0.29
20°	1.56
40°	17.3
60°	206.0
Butterfly valve[r] (Fig. 5-40) θ = 5°	0.24
10°	0.52
20°	1.54
40°	10.8
60°	118.0
Check valve,[a,e,j] swing	2.0[e]
Disk	10.0[e]
Ball	70.0[e]
Foot valve[e]	15.0
Water meter,[m] disk	7.0[r]
Piston	15.0[r]
Rotary (star-shaped disk)	10.0[r]
Turbine-wheel	0.0[r]

[a] Flow of Fluids through Valves, Fittings, and Pipe, *Tech. Paper* 410, Crane Co., 1969.

[b] Freeman, "Experiments upon the Flow of Water in Pipes and Pipe Fittings," American Society of Mechanical Engineers, New York, 1941.

[c] Gibson, "Hydraulics and Its Applications," 5th ed., p. 250, Constable, London, 1952.

[d] Giesecke and Badgett, *Heating, Piping Air Conditioning*, 4(6), 443-447 (1932).

[e] Giesecke, *J. Am. Soc. Heat. Vent. Engrs.*, 32, 461 (1926).

[f] Gilman, *Heating, Piping Air Conditioning*, 27(4), 141-147 (1955).

[g] "Pipe Friction Manual," 3d ed., Hydraulic Institute, New York, 1961.

[h] Hoopes, Isakoff, Clarke, and Drew, *Chem. Eng. Progr.*, 44, 691-696 (1948).

FIGURA 6.

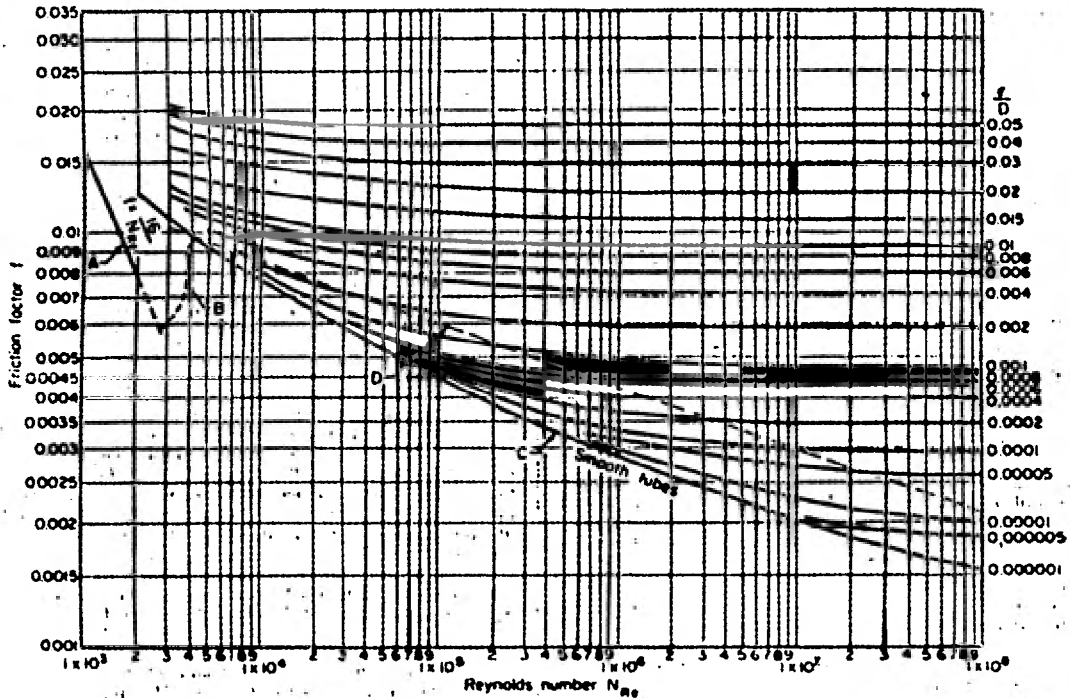


FIG. 5-26. Fanning friction factors. Reynolds number $N_{Re} = DV\rho/\mu$, where D = pipe diameter, ft.; V = velocity, ft./sec.; ρ = fluid density, lb./cu. ft.; μ = fluid viscosity, lb./(ft.)(sec.) = cp./1488. [*Based on Moody, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, 66, 671 (1944).]

FIGURA 7.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1).- Lothholz W. Klaus; "Pressure Drop in Long Viscous-Fluid Pipelines". Chemical Engineering, Jan. 7, -- 1963.

2).- Peters-Timmerhaus; "Plant Design and Economics for Chemical Engineers". Mc Graw-Hill, 2a. Ed.

3).- Bennett-Myers; "Momentum, Heat and Mass Transfer". Mc Graw-Hill, 2a. Ed.

4).- Harvery-Briller-Arnold; "Pipelining oils below -- their pour point". The Oil and Gas Journal; Aug.- 23, 1971.

5).- García Ramos, B.; "Diseño y optimización de la tubería y sistema de bombeo del oleoducto Poza Rica - Tula". Tesis UNAM, 1976.

6).- Crane Co.; "Flow of fluids through valves fittings and pipe". Technical paper No. 410, 1969.

7).- Perry-Chilton; "Chemical Engineers Handbook", Mc - Graw-Hill, 5a. Ed.

8).- Merriman M. Gaylord; "Matemática Simplificada", -- Espasa-Calpe; primera edición.

9). Kreyszig E.; "Matemáticas Avanzadas para Ingenie-- ría". Vol. 1, LIMUSA, 3a. Ed.

10).- Bers; "Cálculo Diferencial e Integral", Vol. 1, -- Interamericana 1a. Ed.

11).- Foust, Wenzel, Clump, Maus, Andersen; "Principles - of Unit Operations", John Wiley and Sons Inc. 2a. - Ed.