16

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

INTERPRETACION AUTOMATICA DE SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES POR EL METODO DEL GRADIENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :

JOSE LUIS RANGEL NUÑEZ

MEXICO, D. F. 1986

Universidad Nacional
Autónoma

FACULTAD DE INGENIERIA
Dirección
60-I-247

Señor RANGEL NUÑEZ JOSE LUIS.
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Profr. Ing.- Pedro González Villalvaso, para que lo desarrolle como tesis - - para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO GEOFISICO.

"INTERPRETACION AUTOMATICA DE SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES POR EL METODO DEL GRADIENTE"

PROLOGO.
I CONCEPTOS FUNDAMENTALES.
II PROBLEMA INVERSO PARA MEDIOS HORIZONTALMENTE ESTRATIFICADOS.
III METODO DE INTERPRETACION AUTOMATICA.
CONCLUSIONES.
BIBLIOGRAFIA.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento- con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar -- Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como - - requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así - como de la disposición de la Coordinación de la Administración - Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los- ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, D.F., Noviembre 15 de 1985.
EL DIRECTOR

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

OARCH'MRV'gtg

INDICE ANALITICO

La cosa más bella que podemos experimentar es lo misterioso. Es la fuente de toda verdad y ciencia . Aquel para quien esa emoción es ajena, aquel que ya no puede maravillarse y extasiarse ante el miedo , vale tanto como un muerto: sus ojos están cerrados ... Saber que lo impenetrable para nosotros existe realmente ,manifestandose como la prudencia maxima y la belleza más radiante que nuestras torpes capacidades pueden comprender tan sólo en sus formas más primitivas ... este conocimiento , este sentimiento , se encuentra en el centro de la verdadera religiosidad . En ese sentido , y sólo en ese sentido , pertenezco a las filas de los hombres religiosos devotos.

ALBERT EINSTEIN ,
Lo que creo (1930)

William James solía predicar la < Voluntad de creer > . Yo, por mi parte , quiesiera predicar la < Voluntad de dudar >... Lo que se persigue no es la voluntad de creer , sino el deseo de descubrir , que es exactamente lo opuesto .

BERTRAND RUSSELL ,
Sceptical Essays (1928)

PROLOGO

En el pasado, cuando se necesitaba conocer las características del subsuelo, se procedía a determinarlas por medios rústicos y elementales o bien se consultaba al ingeniero o a la persona de más experiencia en el lugar. Tal situación daba por resultado un número considerable de fallas desastrosas, razón por la cual si el trabajo era un éxito, el ingeniero se consideraba afortunado, mientras que una falla de la formación en cuestión, era considerada fuera de control humano ; es por ello que se aparejaban serios riesgos tanto en seguridad como en economía. Por lo que, con el desarrollo de la Ingeniería Geofísica toda la actitud negativa y oscura que se tenía, ha cambiado progresivamente y si bien sería absurdo decir que todos los problemas relativos al subsuelo han sido resueltos, la mayoría de los ingenieros comprenden que están por obtenerse explicaciones racionales para muchas de las dificultades que tuvieron que resolver en el pasado sin otra guía que aquella obtenida por su experiencia personal.

Durante los últimos treinta años, han ocurrido avances extraordinarios en el campo de la Ingeniería Geofísica. Muchos de los conocimientos geofísicos ya se aplican en la actualidad para la solución de una infinidad de problemas en ciencias de la tierra y otros más seguramente se emplearán en el futuro. La Geofísica ya no es sólo de interés para los profesionistas de esta área, sino que también lo es para cualquier ingeniero sin importar el área, porque la utilización de varios de sus principios pueden repercutir y modificar sustancialmente su metodología de trabajo.

La Geofísica como tal, se ramifica en un gran número de disciplinas, las cuales forman a su véz toda una ciencia, cuyo principal objetivo es explorar y conocer las estructuras del interior de la tierra, en base a la aplicación de técnicas físicas y matemáticas. Una de las ramas que conforman a esta ciencia es la prospección geoeléctrica, cuyos origenes se remontan a finales del siglo pasado y principios de este con los trabajos realizados por los hermanos Schlumberger principalmente.

La aplicación de la prospección geoeléctrica surge de los trabajos geológicos precedentes y los datos obtenidos como resultado de dicha aplicación, determinan la metodología y dirección de las investigaciones geológicas posteriores.

La combinación de la prospección geoeléctrica con otros métodos geofísicos aumenta el grado de certidumbre en la interpretación de los resultados de las observaciones de campo. Por consiguiente, las soluciones a problemas geológicos reales dependen en buen parte y por necesidad , de los resultados obtenidos por medio de las pruebas geofísicas de la zona de estúdio. Los resultados de estas pruebas deberán ser interpretadas con una aplicación liberal de la indispensable cualidad conocida como "Juicio de Ingeniería " .

No puede haber un lenguaje más universal y más simple , más libre de errores y de oscuridades ... más digno de expresar las relaciones invariables de las cosas naturales [que las matemáticas] . Interpreta [todos los fenómenos] con el mismo lenguaje , como si quisiera atestiguar la unidad y simplicidad del plan del universo , y hacer aún más evidente este orden inalterable que preside todas las causas naturales .

JOSEPH FOURIER , Teoría analítica del color , 1822

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

I.1 .- INTRODUCCION .

La prospección eléctrica o también conocida como prospección geoeléctrica es una de las diferentes formas de prospección geofísica , en la que se aplican , en forma práctica , los conceptos y tecnologías de la física de la tierra al estudio y solución de problemas geológicos .

La teoría de esta prospección está basada enteramente en la teoría del potencial. Las ecuaciones de Laplace y Poisson y la teoría del potencial como James Clerk Maxwell la desarrolló y otros la extendieron , constituyen el cimiento sobre el cual , descansa ahora la interpretación de datos eléctricos .

Franz Neuman en 1887 , recopilando los trabajos realizados por --- Maxwell obtuvo las ecuaciones para el potencial a cualquier punto en ó sobre un medio homogéneo , cerca de dos electrodos de corriente . Dando con esto inicio a la aplicación de la teoría del potencial en la prospección eléctrica .

La prospección geoeléctrica ha tenido etapas de desarrollo , las cuales se dividen en ;

- Epoca primitiva .
- Epoca clásica .
- Epoca contemporánea .

La época primitiva se inicia con los trabajos realizados por Gray y Wheeler (1720) sobre la resistividad de las rocas , como también el descubrimiento de la polarización espontánea o natural realizado por el inglés Robert Fox en 1815 , por lo que ha sido considerado (Kunetz , 1966) como "el abuelo de los geofísicos ". Esta época marca su final , con los estudios del francés Conrad Schlumberger y el americano Frank Wenner .

Desde el fin de la Guerra de Europa (1914-1917), se puede decir que empieza la época clásica, la cual viene representada por tres escuelas ; la escuela Franco-Soviética , la escuela Wenner ó de Gish-Rooney y la escuela sueca .

La característica primordial de la escuela Franco-Soviética era la búsqueda de las bases teóricas para apoyar la aplicación de los métodos --- eléctricos , en cambio , la escuela Wenner cayó en empirismos, en el que los datos de observación eran interpretados mediante ideas erróneas . La escuela sueca desarrolló el método " de las antenas " utilizando campos electromagnéticos , propiciando con esto la invención del método "Turam".

La época contemporánea está llena de progresos , los cuales han ocurrido en los últimos quince años , tal es el caso de los sondeos eléctricos de campo artificial , los sondeos electromagnéticos , la implementación de programas automáticos haciendo uso de las computadoras digitales, las cuales reducen sustancialmente el tiempo de interpretación , etc .

En la actualidad la prospección geoeléctrica se está dirigiendo hacia problemas tridimensionales y de medios heterogéneos . Asimismo busca que el procesado de los datos eléctricos no sume errores en la interpretación final , por lo cual , se han implementado poderosos métodos de inversión por computadora , además , se están desarrollando mejores tecnologías , tal es el caso de los actuales aparatos de medición , dando así , un muy eficiente rango de confianza en los datos obtenidos en el trabajo de campo .

I.2 .- ECUACIONES FUNDAMENTALES .

Para poder entender la teoría del sondeo eléctrico vertical , es necesario primero , proponer y estudiar el modelo más sencillo , el cual, considera una corriente continua fluyendo a través de un modelo isótropo y homogéneo (fig . 1) .

Si δA es un elemento de superficie y $\bar{J}$ es la densidad de corriente por lo tanto , la corriente que pasa por δA es $\bar{J}\cdot\delta A$. La densidad de corriente y el campo eléctrico están relacionados por la ley de Ohm .

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \qquad (I.1)$$

Donde $\bar{E}$ es el campo eléctrico y σ es la conductividad en mhos/mts .

La ley de Faraday-Maxwell que relaciona el campo eléctrico con el campo magnético , en su forma diferencial , se expresa de la siguiente manera ;

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (I.2)$$

Como en este caso , la corriente eléctrica no varía en el tiempo , se puede simplificar la ecuación anterior (I.2) a :

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \qquad (I.3)$$

Por lo que , el campo eléctrico es irrotacional y , por lo tanto ,conservativo. Por consiguiente , el campo eléctrico se define como el gradiente del potencial , es decir ;

$$\bar{E} = - \bar{\nabla} V \qquad (I.4)$$

sustituyendo la ec. (I.4) en la ec. (I.1) , se tiene ;

$$\bar{J} = - \sigma \bar{\nabla} V \qquad (I.5)$$

Si la carga se conserva dentro de un volumen encerrado por una superficie A , se puede escribir ;

$$\int_A \bar{J}\cdot dA = 0 \qquad (I.6)$$

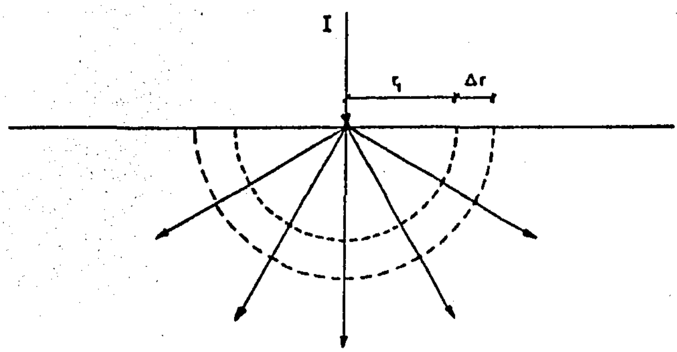


FIGURA 1. MEDIO HOMOGENEO E ISOTROPO .

Por el teorema de Gauss reescribimos la ec. anterior, teniendo ;

$$\int_{v} \nabla \cdot \bar{J} dv = 0 \qquad (I.7)$$

Si el volumen se hace infinitesimal hasta convertirse en un punto , se tiene , que para este punto ;

$$\nabla \cdot \bar{J} = - \nabla \cdot \nabla (\sigma V) = 0 \qquad (I.8)$$

la ec. anterior es la ecuación de continuidad o ley de conservación de la carga en corriente continua .

Desarrollando más el concepto de conservación de carga :

$$- \nabla \cdot \nabla (\sigma V) = \nabla \sigma \nabla V + \sigma \nabla^2 V = 0 \qquad (I.9)$$

Si σ se conserva constante, la ecuación nos conduce a la conocida ECUACION DE LAPLACE .

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (I.10)$$

Por lo que, la ecuación diferencial de Laplace es satisfecha por el potencial eléctrico en las condiciones de corriente continua .

La solución de la ec. de Laplace en coordenadas cilíndricas es la siguiente ;

$$V = - \frac{A}{r} + B \qquad (I.11)$$

Como el potencial en el infinito es cero y por condiciones geométricas de la fuente y su intensidad , la ecuación solución se transforma en;

$$V = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} \qquad (I.12)$$

donde I = Intensidad de corriente (amperes) .
r = Distancia radial entre la fuente y el punto de medición (metros).
ρ = Resistividad del medio homogéneo e isótropo.

Como el potencial es una cantidad escalar , los potenciales producidos por varias fuentes de corriente , pueden sumarse algebráicamente ;

$$V = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2} + \dots + \frac{I_n}{r_n} \right) \qquad (I.13)$$

La ecuación (I.13) es utilizada para evaluar el potencial escalar -- eléctrico en un medio homogéneo e isótropo de resistividad ρ con $\underline{N}$ fuentes de corriente .

Como lo que importa es conocer la resistividad del medio , en la práctica , se inyecta al terreno corriente a través de los electrodos A y B y se mide la diferencia de potencial existente entre los electrodos M y N (fig. 2) .

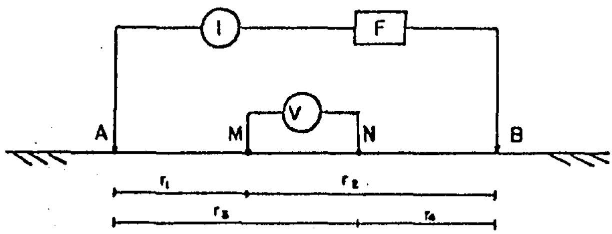


FIGURA 2 . DISPOSITIVO TETRAELECTRODICO LINEAL Y SIMETRICO

Por lo que las cantidades físicas medidas en el campo serán ; la intensidad de corriente que fluye por los electrodos A y B ; la diferencia de potencial ΔV entre M y N ; y las distancias entre los electrodos .

Aplicando la ec. (I.13) en el caso anterior , se tiene ;

$$V = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)\right) \qquad \text{(I.14)}$$

Despejando de la ec.(I.14) la resistividad ,

$$\rho = 2\pi\left(\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)\right)^{-1} \frac{\Delta V}{I} \qquad \text{(I.15)}$$

Simplificando ,

$$\rho = k\,\frac{\Delta V}{I} \qquad \text{(I.16)}$$

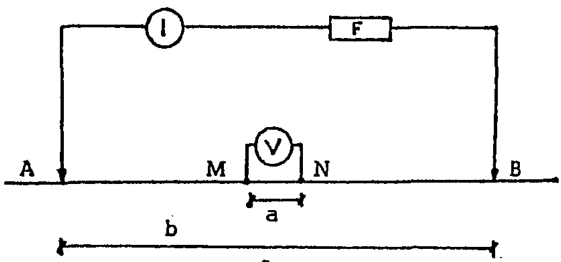
donde $\Delta V = V_M - V_N$; $k = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^{-1} 2\pi$.

La constante k es comunmente llamada FACTOR GEOMETRICO y depende exclusivamente de la geometría del dispositivo de electrodos .

Actualmente los arreglos más usados en el sondeo eléctrico vertical son los dispositivos lineales y simétricos del tipo Schlumberger y Wenner (fig. 3) . El dispositivo Schlumberger , el cual mide el gradiente del potencial eléctrico , haciendo tender la abertura de los electrodos de potencial a cero de tal manera que la relación ΔV entre la abertura de los electrodos de potencial sea aproximadamente el gradiente del potencial eléctrico . En el dispositivo Wenner , los cuatro electrodos se encuentran equiespaciados , los electrodos M y N miden la diferencia de potencial .

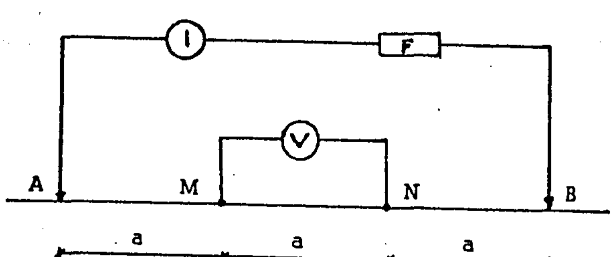
La fórmula (I.16) es aplicable a un medio homogéneo e isótropo , pero si el subsuelo es heterogéneo se obtendrá la llamada resistividad aparente (ρa) , la cual , es una variable experimental que expresa los resultados de las mediciones en un sondeo eléctrico vertical (S.E.V.) .

Arreglo Schlumberger



$$K_s = \frac{\pi b^2}{2a} \qquad (5a \leq b)$$

Arreglo Wenner



$$K_w = 2\pi a$$

FIGURA 3 . DISPOSITIVO LINEALES Y SIMETRICOS DEL TIPO SCHLUMBERGER Y WENNER .

I.3 .- PROBLEMA DIRECTO PARA UN MEDIO HOMOGENEO ESTRATIFICADO .

En la sección anterior se llegó a obtener la fórmula para evaluar el potencial eléctrico de un medio homogéneo e isótropo , siendo el modelo más sencillo que se puede encontrar en la prospección eléctrica , pero como es bien sabido , este tipo de medio en muy raras ocasiones se encontrará en la práctica , por lo que , partiendo del medio anterior se propone un medio más complicado y acorde a las condiciones reales del subsuelo. El modelo propuesto será un medio estratificado , el cual es un medio heterogéneo compuesto por zonas homogéneas e isótropas , de extensión lateral infinita y cuyas superficies de separación son paralelas entre sí y al plano de la superficie del terreno . Cada una de estas zonas es conocida como horizonte , estrato ó capa geoeléctrica (fig. 4) .

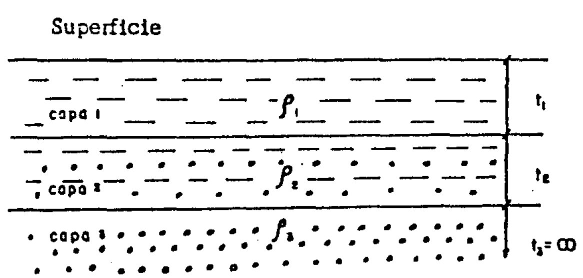


FIGURA 4. MEDIO ESTRATIFICADO .

El problema directo en prospección eléctrica consiste en determinar el potencial eléctrico producido por una fuente puntual de corriente en un medio estratificado cuya distribución de resistividades y espesores se conoce .

Este problema , fué estudiado en 1930 por C. Schlumberger y S. Stefanesco. Pensando que el potencial eléctrico en un medio estratificado es simétrico respecto al eje vertical el cual pasa por la fuente de corriente , da en el problema , la llamada simetría cilíndrica , por lo tanto es conveniente escribir la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, es decir ;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (I.17)$$

Por efecto de la simetría cilíndrica se llega a ;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (I.18)$$

Utilizando el método de separación de variables podemos resolver fá cilmente la ecuación diferencial anterior , obteniéndose las soluciones particulares , las cuales tienen la siguiente forma ;

$$V_1 = C_1 e^{-\lambda z} Jo(\lambda r) \quad ; \quad V_2 = C_2 e^{-\lambda z} Jo(\lambda r) \qquad (I.19)$$

En estas ecuaciones C_1 , C_2 y λ son constantes arbitrarias , $Jo(\lambda r)$ es la función Bessel de orden cero .

Como es bien sabido , cualquier combinación lineal de estas solucio -nes es también solución de la ecuación diferencial (I.18) . Por lo que la solución general de la ecuación diferencial (I.18) es de la forma ;

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda z} + \Theta(\lambda)\, e^{-\lambda z} + X(\lambda)\, e^{+\lambda z}]\, Jo(\lambda r) d\lambda \qquad (I.20)$$

Donde $\Theta(\lambda)$ y $X(\lambda)$ son funciones arbitrarias de λ . Soluciones de - la forma (I.20) son válidas en todas las capas del subsuelo, pero las - funciones $\Theta(\lambda)$ y $X(\lambda)$ no son las mismas en las diferentes capas del - subsuelo , siendo determinadas por las condiciones de frontera del pro- blema , por esto es necesario identificar la expresión del potencial --- eléctrico para cada capa por medio de un índice suscrito :

$$V_i = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda z} + \Theta_i(\lambda) e^{-\lambda z} + X_i(\lambda) e^{\lambda z}]\; Jo(\lambda r) d\lambda \qquad (I.21)$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer la expresión (I.21) para un medio estratificado son :

1.- La función potencial eléctrico , debe ser continua a través del plano de contacto entre dos capas sucesivas ;

$$V_i = V_{i+1} \qquad \text{para } z=h_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\ldots,N-1$$

2.- La componente vertical de la densidad de corriente debe ser contínua a través del plano de contacto entre dos capas sucesivas ;

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial V_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}}\frac{\partial V_{i+1}}{\partial z}$$

para $z = h_i$; $i = 0, 1, 2, \ldots N-1$

3.- La componente vertical de la densidad de corriente en la superficie - del medio debe ser cero .

4.- Para la capa más profunda a una distancia infinita , el potencial V_i - debe ser nulo .

Los resultados obtenidos al aplicar las condiciones de frontera en la ec. (I.21) , pueden resumirse en el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{array}{lr}
(u_1 + v_1)\theta_1 - u_1\theta_2 - v_1 X_2 & = 0 \\
(v_1 - u_1)\theta_1 + p_1 u_1 \theta_2 - p_1 v_1 X_2 & = (1-p_1)u_1 \\
u_2\theta_2 + v_2 X_2 - u_2\theta_3 - v_2 X_3 & = 0 \\
-u_2\theta_2 + v_2 X_2 + p_2 u_2 \theta_3 - p_2 v_2 X_3 & = (1-p_2)u_2 \qquad (I.22) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
u_{n-1}\theta_{n-1} + v_{n-1}X_{n-1} - u_{n-1}\theta_n & = 0 \\
-u_{n-1}\theta_{n-1} + v_{n-1}X_{n-1} + p_{n-1}u_{n-1}\theta_n & = (1-p_{n-1})\cdot(u_{n-1})
\end{array}$$

donde
$$u_i = e^{-\lambda h_i} \qquad \Theta = \theta$$
$$v_i = 1/u_i = e^{\lambda h_i}$$
$$p_i = \rho_i/\rho_{i+1}$$

Las ecuaciones (I.22) forman un sistema de ecuaciones lineales de 2(n-1) ecuaciones con 2(n-1) incógnitas ($\Theta(\lambda)$ y $X(\lambda)$) ,que puede resolverse para obtener $\Theta_1(\lambda)$ y $X_1(\lambda)$ en términos de los espesores y resistividades del medio .

El potencial eléctrico en la superficie del medio estará dado por :

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^\infty (1 + 2\Theta_1(\lambda))\, Jo(\lambda r)d\lambda \qquad (I.23)$$

Donde , la intensidad de corriente emitida es I , λ es una variable de integración , r la distancia de la fuente al punto de medición y $\Theta_1(\lambda)$ es la función denominada " Función Kernel " la cual se estudiará en la siguiente sección .

I.4 .- FUNCION KERNEL .

La función Kernel , la cual aparece en la ec.(I.23) , depende de las resistividades y espesores del medio estratificado. Esta función ha sido ampliamente estudiada por Stefanesco (1930), Slichter (1933), King (1934) Sunde (1949) , Koefoed (1968 y 1970). Debido a la gran variedad de estudios realizados se han obtenido diferentes expresiones de las funciones Kernel. Las principales expresiones son ;

KERNEL DE STEFANESCO = $\Theta(\lambda)$
KERNEL DE SLICHTER = $K(\lambda) = 1 + 2\Theta(\lambda)$
TRANSFORMADA DE RESISTIVIDADES = $T(\lambda) = \rho_1 K(\lambda)$

También hay diversas formas de obtener la función Kernel para un -- medio de N capas (ref.5,9,14) entre ellas estan ;

- Regla de Cramer .
- Fórmula de Flathe .
- Fórmula de Pekeris .
- Fórmula de Lima Lobato .

Las fórmulas de Flathe y de Pekeris son las más utilizadas en la obtención de la función Kernel. Esta fórmulas son procedimientos más adecuados porque se pueden programar facilmente en cualquier calculadora programable de escritorio ó en una computadora digital .

A continuación se describirá la fórmula de recurrencia de Pekeris la cual es la más utilizada en la práctica y además es la que se aplica en los programas de esta tesis .

I.4.1 .- FORMULA DE RECURRENCIA DE PEKERIS .

Esta fórmula permite encontrar el Kernel de Slichter o bien la Transformada de resistividades, partiendo de la función Kernel de la capa - más profunda , es decir , el efecto de la fórmula de Pekeris , consiste en agregar una nueva capa en la parte superior de la secuencia original. La fórmula de Pekeris modificada , para encontrar la Transformada de resistividades es ;

$$T_i(\lambda) = \frac{T_{i+1} + \rho_i \operatorname{Tanh}(\lambda t_i)}{\left(1 + T_{i+1} \operatorname{Tanh}(\lambda t_i) / \rho_i\right)} \qquad (I.24)$$

donde t_i es el espesor de la i-ésima capa . Esta fórmula se usa partiendo de que la transformada de resistividades de la última capa es igual a la resistividad de la última capa,

$$T_N = \rho_N \tag{I.25}$$

Debido a la importancia del Kernel en este trabajo , se mencionarán a continuación sus propiedades fundamentales ;

(A) ASINTOTAS HORIZONTALES . La función transformada de resistividades es una función contínua , suave y acotada que muestra comportamiento asintótico para valores muy grandes y muy pequeños de la distancia - $1/\lambda$, es decir ;

- Si $1/\lambda$ tiende a cero ; $T(1/\lambda)$ tiende asintóticamente al valor de la primera resistividad del medio estratificado.
- Si $1/\lambda$ tiende a infinito ; $T(1/\lambda)$ tiende al valor de la resistividad de la última capa .

(B) ASINTOTAS OBLICUAS . La función transformada de resistividades -- tiene un comportamiento especial cuando la última capa es de resistividad infinita ó nula .

- Si ρ_N es nula , entonces para valores grandes de $1/\lambda$,$T(1/\lambda)$ se aproxima a una recta de pendiente -1 .
- Si ρ_N tiende a infinito , entonces para valores grandes de $1/\lambda$, $T(1/\lambda)$ se aproxima a una recta de pendiente +1 .

(C) PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA . El principio de equivalencia dice : Medios estratificados diferentes entre sí , en términos de espesores y resistividades pueden generar funciones de transformada de resistividades muy similares entre sí .

I.5 .- FUNCION DE RESISTIVIDAD APARENTE .

La función resistividad aparente representa la solución más interesante del problema directo para medios horizontalmente estratificados .

A continuación se mencionará , que forma tiene la función de resistividad aparente para diferentes dispositivos (Schlumberger y Wenner), partiendo del factor geométrico y de la forma en que se definió el potencial en un medio estratificado (ec.(I.23)) , después , se mencionarán las propiedades de la función resistividad aparente y finalmente se tratará en forma breve , el método de cálculo numérico de curvas de resistividad aparente .

La resistividad aparente para el dispositivo Schlumberger viene dada por ;

$$\rho_{a,s} = -\frac{2\pi s^2}{I}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=s} \qquad (I.26)$$

Derivando la ec.(I.23) y sustituyéndola en la ec.(I.26) ,se obtiene ;

$$\rho_{a,s} = \rho_1 \left[1 + 2s^2 \int_0^{\infty} \theta(\lambda)\, J_1(\lambda s)\lambda \, d\lambda \right] \qquad (I.27)$$

donde $J_1(\lambda s)$: Es la función Bessel de primera especie y orden uno .

s : Es la mitad de la distancia entre los electrodos de corriente.

Poniendo la ecuación anterior en términos de la transformada de resistividades , se tiene ;

$$\rho_{a,s} = s^2 \int_0^{\infty} T(\lambda)\, J_1(\lambda s)\lambda \, d\lambda \qquad (I.28)$$

De la misma manera, tomando el factor geométrico de la figura 3 y de la ec.(I.16) , se tiene que , para el dispositivo Wenner ;

$$\rho_{a,w} = 2\pi a \, \Delta V/I \qquad (I.29)$$

Donde $$\Delta V = 2\,(\,V(a) - V(2a)\,) \qquad (I.30)$$

Sustituyendo la ec.(I.23) en la ec.(I.30) y a la vez en la ec.(I.29), podemos llegar a obtener la función de resistividad aparente para el arreglo Wenner , pero poniendo la ecuación en términos de la transformada de resistividades , se tiene :

$$\rho_{a,w} = 2a \int_0^{\infty} T(\lambda)\ \left[J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a) \right]\ d\lambda \qquad (I.31)$$

Cabe enfatizar , que las ecs.(I.28) y (I.31) establecen las relaciones entre las funciones de resistividad aparente y la transformada de resistividades. Además , por medio de estas ecuaciones , se puede decir que la función de resistividad aparente depende de los parámetros del medio estratificado (espesores y resistividades) y del tipo de arreglo empleado .

Simplificando (I.28) y (I.31) se llega a ;

$$\rho_a = m \int_0^{\infty} T_n(\lambda)\ J_i(\lambda r)\,\lambda^{i}\, d\lambda \qquad (I.32)$$

donde $i = 0, 1.$
n = número de capas .
m = constante .

La expresión (I.32) se conoce en la literatura con el nombre de TRANSFORMADA DE HANKEL de orden cero ó uno .

La función de resistividad aparente cumple con las siguientes propiedades (ref.5) ;

(A) Continuidad . La función de resistividad aparente es una función suave, acotada y continua .

(B) Asíntotas horizontales . La función de resistividad aparente muestra el mismo comportamiento asintótico de la función Kernel .

(C) Asíntotas oblicuas . Considerando el caso en que la resistividad de la última capa es infinita, la función de resistividad aparente se aproxima a una recta de pendiente +1 . Si la última capa es de resistividad nula, la función de resistividad aparente carece de asíntota oblicua descendente .

(D) Principio de equivalencia . Aunque Slichter menciona que la función de resistividad aparente cumple con el principio de unicidad , esto es válido sólo para la solución del problema físico - matemático idealizado . En la práctica , debido a la existencia de ruidos geológicos, humanos , instrumentales , etc . , la función de resistividad aparente cumple con el principio de equivalencia , es decir , medios estratificados diferentes entre sí , les corresponden curvas de resistividad aparente muy semejantes .

Cuando la función de resistividad aparente se representa gráficamente, es conveniente utilizar escalas logarítmicas en los ejes coordenados debido a su comportamiento más suave que en escala lineal, lo cual ofrece ventajas que justifican su empleo.

Las curvas de resistividad aparente, sean teóricas u obtenidas en el campo, se clasifican atendiendo al número de capas y la relación entre las resistividades de las capas geoeléctricas del medio. Por consiguiente, se tienen :

a) .- Curvas de dos capas .
- Tipo ascendente , ($\rho_1 < \rho_2$)
- Tipo descendente , ($\rho_1 > \rho_2$

b) .- Curvas de tres capas .
- Tipo H , ($\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$) .
- Tipo K , ($\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$) .
- Tipo Q , ($\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$) .
- Tipo A , ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$) .

c) .- Curvas de cuatro capas . Pueden ser de ocho tipos que se designan como combinación de los anteriores ; para ello se consideran las tres primeras capas y se les asigna la letra correspondiente , haciendo lo mismo con las últimas tres capas , los tipos posibles son : HK,HA,KH,KQ,QQ,QH,AK,AA.

d) .- Curvas de más de cuatro capas . Estas se clasifican siguiendo el método descrito en el inciso c .

Las integrales (I.28) , (I.31) y (I.32) no tienen solución analítica. Los procedimientos comunes para evaluarlas , hasta hace una década , era encontrar la solución por métodos de expansión en series (refs. 5,9,11,14). En la actualidad se utiliza un procedimiento debido a Ghosh (refs.2,3) e ideado por Kunetz (1966) , que se basa en la propiedad de que la transformada de Hankel es una transformación lineal .

Tomando la ecuación simplificada (I.32) y haciendo un cambio de variables de la forma ;

$$\lambda = e^{-y} \qquad , \qquad r = e^{x} \tag{I.33}$$

la expresión (I.32) , se transforma en ,

$$\rho_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T_n(y)\, I(x-y)\, dy \tag{I.34}$$

donde $I(x)$ se le conoce como función del filtro inverso de resistividad , que depende del dispositivo en particular .

La ec. (I.34) se le llama "Integral de Convolución" y cuando se trabaja en el dominio discreto se reduce a una suma de productos ;

$$Rm = \sum_{i} b_i \, Tm-i \qquad (I.35)$$

donde $m = 0, 1, 2, \ldots$

b_i = Coeficientes del filtro inverso de resistividad .

$Tm-i$ = Muestras de la transformada de resistividades .

Este procedimiento denominado METODO DE FILTRADO LINEAL DIGITAL, constituye actualmente la técnica más rápida y sencilla para la evaluación numérica de curvas de resistividad aparente .

No debo buscar mi dignidad en el espacio , sino en el gobierno de mi pensamiento. No tendré más aunque posea mundos. Si fuera por el espacio,el universo me rodearía y se me tragaría como un átomo; pero por el pensamiento yo abrazo el mundo.

BLAISE PASCAL , Pensées

CAPITULO II

PROBLEMA INVERSO PARA MEDIOS HORIZONTALMENTE ESTRATIFICADOS .

II.1.- INTRODUCCION .

A la determinación de los parámetros geoeléctricos (espesores y resistividades) de un medio horizontalmente estratificado a partir de la curva de resistividad aparente , obtenida por medio de un sondeo eléctrico vertical, se le denomina el PROBLEMA INVERSO de la prospección eléctrica con corriente continua para medios estratificados .

Anteriormente la solución del problema inverso era muy complicada y lenta , pues implicaba el uso de métodos gráficos . En la actualidad , la solución del problema inverso , se a vuelto más simple , debido al gran desarrollo de la computación y de los métodos numéricos. A los métodos de interpretación de sondeos eléctricos verticales (S.E.V.) que hacen uso de los métodos numéricos y de la computadora se les ha denominado Métodos de Interpretación Automática , sin embargo , estos métodos no eliminan el papel del interprete. Esto significa que la interpretación de un sondeo eléctrico vertical nunca será dejada a la computadora.

El problema de la inversión en los métodos eléctricos , se puede aplicar en dos dominios ; en el dominio de la función de resistividad aparente y en el dominio de la función transformada de resistividades .

El problema en el dominio de la transformada de resistividades se ha tratado por numerosos autores , como Vozoff (1958) , Meinardus (1970) , Kunetz (1970) , Marsden (1973) , Bichara (1976) , Szaraniec (1979) , Koefoed (1979 a) y recientemente en la tesis de los ingenieros Amador T. y Anguiano R. (1985) ; mientras que los métodos automáticos de inversión en el dominio de la resistividad aparente se han tratado solamente por Zhody (1974 b) , Johansen (1977) , Davis , González (1983) y Tejero (1984). El presente trabajo estudiará el problema de la inversión en el dominio de la función resistividad aparente , utilizando un proceso de optimización llamado GRADIENTE . Cabe mencionar que el método de optimización gradiente , anteriormente ya se había empleado para fines de interpretación de sondeos eléctricos verticales (Vozoff , 1958), pero en el dominio de la función transformada de resistividades , por lo que una de las particularidades de este trabajo es emplear el método de optimización en el dominio de la resistividad aparente .

II.2 .- DESCRIPCION DE LOS METODOS DE INVERSION EN EL DOMINIO DE LA RESISTIVIDAD APARENTE .

Los métodos de inversión iterativos automáticos en el dominio de la resistividad aparente se caracterizan por seguir un proceso específico , en el cual , se realizan los siguientes pasos :

1. Determinación del modelo geoeléctrico inicial .
2. Calculo de la función transformada de resistividades .
3. Obtención de la curva de resistividad aparente , llamada comunmente curva de resistividad aparente calculada ó teórica .
4. Determinación de la función de error , que es una medida de la diferencia existente entre las dos curvas ; la de campo y la curva teórica .
5. Si la función de error es menor a un factor de tolerancia previamente seleccionado , el problema de la inversión se ha resuelto , en cambio , si no se satisface dicha tolerancia , el proceso continuará con los pasos subsecuentes (6 y 7) .
6. Utilización de un método de optimización de la función de error , para determinar las modificaciones del modelo geoeléctrico inicial .
7. Repetición de los pasos 2 al 4 .

II.2.1 .- DETERMINACION DEL MODELO GEOELECTRICO INICIAL .

Existen buen número de métodos para poder determinar el modelo geoeléctrico inicial , en general , se clasifican en dos tipos ; los que emplean la función de resistividad aparente y los que emplean la función Kernel ó la transformada de resistividades . Realmente los más aplicados son los primeros , que pueden dividirse en ;

- Métodos de superposición .
- Métodos de reducción .
- Métodos empíricos .

Los métodos de superposición (ref. 14) , basicamente son los que comparan la curva de campo que se desea interpretar , con respecto a curvas teóricas de resistividad aparente , las cuales han sido publicadas en álbumes , hasta que se encuentra la curva , de dicho álbum , que se asemeja más a la curva de campo . Los principales álbumes publicados son :

- Cia . Generale de Geophysique (1933-36) .
- Orellana y Mooney (1966) .
- Holandés de Rijwaterstaat (1969) .

- Flathe (1963).
- Mooney y Wetzel (1956).
- Orellana y Mooney (1966).

Los cuatro primeros álbumes son utilizados cuando se emplea el dispositivo Schlumberger, mientras que los dos últimos se emplean para el dispositivo Wenner.

El método de reducción (refs.14,9), es un procedimiento interpretativo que disminuye artificialmente el número de capas de la curva de campo, sustituyendo las dos primeras por una sola equivalente a ellas y así sucesivamente. El método de reducción más conocido es el desarrollado por el alemán A. Ebert (1943), que viene a ser una generalización del método de Hummel. Como en la práctica el método consistía fundamentalmente en hallar un punto de coordenadas (E', ρ') que pudiera tomarse como "cruz" de una curva de dos capas que coincidiera con la rama derecha de la curva de campo, se optó en llamarle a este procedimiento "método del punto auxiliar".

Los métodos empíricos, se basan en la experiencia del interpretador. Entre estos métodos se encuentra el del método K ó de las pendientes y tambien el método que toma en cuenta los máximos y los mínimos de la curva de resistividad aparente. Para el segundo método nombrado, se le asigna la resistividad de la capa al máximo ó al mínimo de la curva de resistividad aparente y su espesor será el punto en la abscisa donde se sitúa el máximo ó mínimo. Los valores de resistividad de la primera y última capa se determinan de las asíntotas horizontales de la curva de resistividad aparente.

Para poder seleccionar el modelo inicial adecuado, tenemos que realizar un análisis crítico de cada uno de los métodos anteriormente citados. Por lo anterior, se presentan en los siguientes renglones, algunas críticas de estos métodos, las cuales pueden considerarse tambien como las razones que han impulsado el desarrollo de los métodos de interpretación automática.

La principal desventaja del método de superposición es de que, para poder contar con un álbum completo, es necesario conseguir más de 5,000 curvas teóricas, debido a esto y al espacio que ocupan las curvas, el método no es práctico en el campo. Además, el tiempo que gasta el intérprete en buscar la curva que más se asemeja a la curva de campo en estos álbumes, incrementa enormemente el costo de la interpretación.

Son variadas las ventajas y desventajas del método de reducción, entre las pricipales se tienen ;

Desventajas

- El método requiere de considerable criterio por parte del intérprete.
- El tiempo para su realización se incrementa exponencialmente en proporción al número de capas.
- La exactitud disminuye considerablemente, cuando se trata de curvas de tres ó más capas.

Ventajas

- Es más rápido en comparación con el método de superposición .
- No tiene restricciones con respecto al número de capas .
- Es muy práctico en la actividad de campo .
- Su exactitud es buena si se trata de curvas de tres ó menos capas .

Los métodos empíricos se han criticado bastante (ref.14) , debido a que no tienen ninguna base teórica . Sus ventajas son la rapidez en aplicación y el de no requerir en forma total de técnicas gráficas por lo que se hacen muy prácticos . Sin embargo , dan lugar a modelos alejados de la realidad (esto depende de la experiencia del intérprete).

A manera de conclusión , se recomienda el uso de métodos de reducción (punto auxiliar) , debido a que producen buenos resultados desde el punto de vista de modelo geoeléctrico inicial utilizado en el proceso de optimización .

II.2.2 .- CALCULO DE LA FUNCION DE TRANSFORMACION DE RESISTIVIDADES .

La transformada de resistividades $T(\rho_1, \ldots, \rho_N; t_1, \ldots, t_{N-1}; \lambda)$ para una tierra estratificada de N-capas , puede ser calculada recursivamente, como anteriormente se analizó (sección I.4), empleándose los métodos de Pekeris , Flathe , King , Lima Lobato , Vanyan , Sunde , etc .

El método que más se aplica actualmente por su facilidad de programación es el propuesto por Pekeris (sección I.4.1), en donde , la ecuación de recurrencia es la siguiente ;

$$T_i(\lambda) = \frac{T_{i+1} + \rho_i \mathrm{Tanh}(\lambda t_i)}{(1 + T_{i+1}\mathrm{Tanh}(\lambda t_i) / \rho_i)} \qquad i=N-1, N-2, \ldots, 1 \qquad (I.24)$$

donde ; t_i = espesor de la capa i .
ρ_i = resistividad de la capa i .
T_i = Transformada de resistividades de la capa i.

Sabiendo que $T_N = \rho_N$.

II.2.3 .- OBTENCION DE LA CURVA DE RESISTIVIDAD APARENTE TEORICA.

La curva de resistividad aparente teórica , es obtenida mediante los siguientes pasos ;

(A). En el primer paso , los valores muestreados de la función transformada de resistividades son obtenidos para un modelo estratificado para el cual se desea obtener la curva de resistividad aparente (ver II.2.2) .

(B) .En el segundo paso, los valores de la transformada de resistividades muestreados , son convolucionados con los coeficientes de un filtro inverso de resistividad b_j (refs.2,3,6,9,13), para producir los valores numé -

ricos de resistividad aparente (Rm) , algebraicamente se tiene ;

$$Rm = \sum_{j=\beta}^{\alpha} b_j \, Tm-j \qquad (I.36)$$

para $m = 0,1,2,3, \ldots$
donde α,β = son constantes que dependen del tipo de filtro utilizado

Un análisis de los filtros a utilizar es dado por González et al (1983) (ref. 5) , en el cual , se analiza cual es el filtro más conveniente de acuerdo a las relaciones de resistividad del medio estratificado.

II.2.4 .- DETERMINACION DE LA FUNCION DE ERROR .

La definición de error en su forma simple es ;

$$E = x^r - x \qquad (II.1)$$

donde E = error .
x^r = valor real .
x = valor aproximado .

De esta definición aparecen dos tipos de errores , los cuales son ;

Error Absoluto : $Eabs = x^r - x$ (II.2)
Error Relativo : $Erel = Eabs/x^r = \dfrac{x_r - x}{x_r}$ (II.3)

Donde se observa claramente , con el siguiente ejemplo , que el error relativo es más significativo ;

Sea $x^r = 10$; $x = 9$
$y^r = 100$; $y = 99$
Encontrando los errores respectivos ;
$Eabs(x) = 1$; $Eabs(y) = 1$ $\therefore$
$Eabs(x) = Eabs(y)$
En cambio ;
$Erel(x) = 1/10$; $Erel(y) = 1/100$ $\therefore$
$Erel(x) \neq Erel(y)$

Este tipo de errores funcionan excelentemente en funciones donde el comportamiento es o se asemeja al lineal , pero en funciones donde el comportamiento es completamente oscilatorio y/o de grandes contrastes , es muy conveniente utilizar los siguientes tipos de errores :

+ Error Cuadrático Relativo

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i^r - x_i}{x_i^r} \right]^2 \qquad \text{(II.4)}$$

+ Error Cuadrático Medio Relativo

$$E^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i^r - x_i}{x_i^r} \right]^2 \qquad \text{(II.5)}$$

Donde N= número de datos considerados .

La forma de seleccionar el tipo de error que se debe aplicar en el proceso de inversión ha sido discutida ampliamente por distintos autores (Koefoed O. 1979 , Bichara y Lakshamanan 1976 , Johansen 1977 , Tejero 1984) . Los dos primeros autores obtienen , a manera de conclusión , que para conseguir un incremento en la rapidez de convergencia se debe considerar que el error relativo se relaciona más estrechamente que el error absoluto , con el cambio de los parámetros del corte geoeléctrico.

Johansen (1977) , propone como criterio de error , el error cuadrático del logaritmo de los parámetros , osea ;

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{Ln} \rho_{ac}(\lambda) - \operatorname{Ln} \rho_{am}(\lambda))^2 \qquad \text{(II.6)}$$

Tejero et al (1984), modifican la expresión anterior proponiendo ;

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\operatorname{Ln} \rho_{ac}(\lambda) - \operatorname{Ln} \rho_{am}(\lambda)}{\operatorname{Ln} \rho_{ac}(\lambda)} \right)^2 \qquad \text{(II.7)}$$

El hecho de trabajar con el logaritmo de los parámetros elimina la posible baja convergencia que propician las expresiones (II.4) y (II.5) y además se elimina el problema de obtener parámetros negativos del corte geoeléctrico , lo cual no tiene significado físico .

II.2.5 .- METODOS DE OPTIMIZACION DE LA FUNCION DE ERROR .

Se puede decir , a manera de definición , que la optimización de funciones es el procedimiento matemático para minimizar ó maximizar una función dada .

Los métodos de optimización se pueden aplicar ya sea a funciones lineales o a funciones no lineales. Para nuestro problema se utilizarán los métodos de optimización de funciones no lineales, ya que la función de error, en la inversión de curvas de resistividad aparente , no varía --

linealmente con respecto a sus parámetros geoeléctricos (espesores y resistividades).

Existen en la literatura variados métodos de optimización de funciones no lineales (refs. 4,7,12,16), entre los cuales principalmente se tienen; Los métodos de solución de ecuaciones matriciales , los métodos de gradiente y los conocidos con el nombre de métodos híbridos (combinación de los dos métodos anteriores) .

II.2.5.1 .- METODOS DE SOLUCION DE ECUACIONES MATRICIALES .

El problema concerniente en determinar los parámetros de un corte geoelétrico (t_i , ρ_i) que minimicen a una función de error cualesquiera (ver sección II.2.4) , por el método de solución de ecuaciones matriciales , parte de la definición de la función error , por ejemplo ;

$$E^2 = \sum_{i=1}^{m} (\rho_{ac_i} - \rho_{am_i})^2 \qquad \text{(II.8)}$$

donde ρ_{ac} = curva de resistividad aparente obtenida en el campo .
ρ_{am} = curva de resistividad aparente obtenida a través del modelo teórico .
m = número de muestras .

Expandiendo por medio de la serie de Taylor a la función ρ_{am} , en la cercanía del punto del modelo que se está analizando , se tiene ;

$$\rho_{am_j}(P\, i+1) = \rho_{am_j}(P_i) + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\partial \rho_{am_j}}{\partial P_k} \Delta P_k \qquad \text{(II.9)}$$

donde P_k es la variable que se refiere a cualquiera de los parámetros del corte y ΔP_k es la variación finita de ellos ó vector de corrección .Sustituyendo (II.9) en (II.8) se obtiene ,

$$E^2 = \sum_{i=1}^{m} (\rho_{ac_i} - \rho_{am_i} (P_i) - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_k} \Delta P_k)^2 \qquad \text{(II.10)}$$

Para la existencia del mínimo se debe cumplir con la condición ,

$$\frac{\partial E^2}{\partial P_r} = 0 \qquad \text{(II.11)}$$

Donde $r = 1,2,3,\ldots,k,\ldots,2n-1$ .Tomando las derivadas de E^2 (ec. II.10) con respecto a cada uno de los parámetros P_r y considerando la -- restricción (II.11) se obtiene ,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \Delta P_k \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_r} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_k} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_r} (\rho_{ac_i} - \rho_{am_i}) \quad \text{(II.12)}$$

Las ecuaciones (II.12) son las llamadas normales y que en forma matricial se representan como ,

$$J^T J \bar{\Delta P} = - J^T \bar{D} \quad \text{(II.13)}$$

Donde J es la matriz Jacobiana de orden m x (2n-1) , que contiene las derivadas parciales con respecto a los parámetros del corte , J^T es la matriz traspuesta de J , $\bar{\Delta P}$ es el vector de corrección y $\bar{D}$ es el vector diferencia entre los valores de ρ_{ac} y ρ_{am} . Resolviendo para ΔP la expresión matricial (II.13) se tiene ,

$$\bar{\Delta P} = -(J^T J)^{-1} J^T \bar{D} \quad \text{(II.14)}$$

donde los elementos de J están dados por ,

$$J_{i,k} = \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_k} \qquad \text{para} \qquad k = 1,2,\ldots,2n-1 \text{ y } i = 1,2,3,\ldots,m.$$

Como la matriz cuadrada $J^T J$ posee la característica de que todos los valores de la diagonal principal son mayores de cero , por lo que esta matriz es del tipo ill-condicionada ó singular y al aplicarla al problema, si el modelo inicial es inadecuado , produce resultados inadecuados, es decir , el proceso iterativo diverge. Se acostumbra actualmente resolver el sistema (II.13) mediante el método de descomposición del valor singular introducido por Golub y Reinsch (1970), la expresión (II.13) se puede simplificar a :

$$J \bar{\Delta P} = - \bar{D} \quad \text{(II.15)}$$

además , factorizando a la matriz J , se tiene ;

$$J = L A U^T \quad \text{(II.16)}$$

donde L = Matriz Ortogonal de orden m x (2n-1) compuesta de los eigenvectores de los (2n-1) valores más grandes de JJ^T.

A = Matriz Diagonal de orden (2n-1) x (2n-1) de las raíces cuadradas de los eigenvalores .

U^T= Matriz Trspuesta de orden m x (2n-1) compuesta de los eigenvectores de $J^T J$.

Por lo que , el vector de corrección tomará la siguiente forma ;

$$\bar{\Delta P} = - U A^{-1} L^T \bar{D} \qquad \text{(II.17)}$$

y entonces el vector P_{k+1} que minimiza a la función de error tomará la forma ;

$$P_{k+1} = P_k + \Delta P_k \qquad \text{(II.18)}$$

II.2.5.2 .- METODO GRADIENTE .

El método gradiente es un procedimiento de optimización de funciones no-lineales , siendo una rama muy particular de la técnica de Newton .

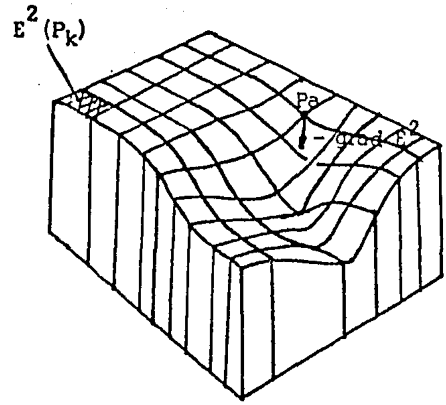
La esencia del método es que la función de error (ver II.2.4) se relaciona enteramente con los parámetros del corte geoeléctrico (t_i, ρ_i) , es decir , la función de error es función de los espesores y resistividades del medio estratificado. Por lo que , si el modelo teórico es muy semejante al modelo real , la función de error se aproximará a cero . Por consiguiente , si la función de error se aproxima a cero , indica que los parámetros utilizados para generar esa función de error , son los que más se aproximan al modelo real buscado .

Analizando lo anterior , se puede concluir que el problema se reduce a buscar , sobre la función de error , el valor MINIMO (valor más cercano a cero), el cual puede determinarse a través del concepto llamado GRADIENTE.

Como es bien sabido , el gradiente indica la dirección , por la cual , se puede llegar más rápidamente a la cresta ó al valle (al máximo o al mínimo respectivamente) de una cierta función. Según el signo que se le asocie al gradiente , se obtendrá un sentido en esa dirección , por consiguiente , si se le asocia el signo (-) al gradiente , el proceso nos conduce hacia el mínimo , en cambio si el signo es (+) nos llevará al máximo. Por lo tanto y en estas circunstancias , se seguirá la dirección de -gradiente(error) , lo cual nos conducirá al mínimo de la función de error .

El proceso empezará calculando el gradiente de la función de error , en el punto P_a (modelo inicial propuesto) y los cambios se realizarán a partir de P_a en dirección al mínimo , como se puede apreciar en la figura 5 .

A causa de que la superficie de la función de error tiene ondulaciones, la dirección inicial no siempre cruzará el mínimo , por lo tanto ,se encontrarán los llamados mínimos relativos, teóricamente siguiendo estos mínimos relativos se encontrará un mínimo absoluto,pero en la práctica no sucede tal situación por lo que se procederá a buscar el mínimo relativo más cercano a cero , lo que nos hace también ver que este tipo de procedimiento es del tipo de búsqueda iterativa .



P_a = Modelo inicial .

E^2 = Diferencial de la superficie de error .

FIGURA 5 . COMPORTAMIENTO DEL GRADIENTE EN LA FUNCION DE ERROR .

Como la idea fundamental del método Gradiente es cambiar los valores de los parámetros en la dirección de máximo descenso de la función de -- error(steepest descent), estos cambios deben de ser en proporción a las componentes del gradiente, las cuales serán, las derivadas parciales de la función de error con respecto a los parámetros.

Introduciendo notación matemática a lo antes dicho, se tiene :

$$\text{Grad } E = \frac{\partial E}{\partial P_k} = \bar{v} \qquad \text{(II.19)}$$

donde Grad E = Es el gradiente de la función de error (cuadrático, relativo, absoluto, etc).

Y los nuevos valores de los parámetros serán ;

$$P_{k+1} = P_k + \Delta P_k \qquad \text{(II.20)}$$

donde P_k = Parámetro inicial.
P_{k+1} = Nuevo valor del parámetro P_k.
ΔP_k = Incremento o decremento del parámetro P_k.

Por lo tanto ;

$$P_k = -c \frac{\partial E}{\partial P_k} \qquad \text{(II.21)}$$

Sustituyendo (II.21) en la ec.(II.20), se llega a ;

$$P_{k+1} = P_k - c \frac{\partial E}{\partial P_k} \qquad \text{(II.22)}$$

La constante "c" es llamada comúnmente LONGITUD DE PASO y al vector $\bar{v}$ se le llama DIRECCION.

En resumen, el método Gradiente o también conocido con el nombre de STEEPEST DESCENT(máximo descenso) tiene dos aspectos importantes, los cuales, según como se obtengan o se seleccionen, mejorarán al método y lo particularizarán según las necesidades, estos son :

+ Criterio de obtención de la dirección (gradiente).
+ Criterio de la obtención de la longitud de paso.

El criterio para obtener la dirección o el gradiente se trata detalladamente en el apéndice I, mientras que la importancia de seleccionar el - criterio de la longitud de paso y las formas de obtener dicha longitud, se describirán a continuación.

Criterios para la obtención de la longitud de paso.

El paso básico en todos los procedimientos iterativos es el movimiento a lo largo de una línea . Como anteriormente se mencionó , se selecciona un punto base Po (arbitrariamente desde el punto de vista teórico , pero tan juiciosamente como sea posible en la práctica) , y desplazándose desde él a lo largo de una línea , se alcanza una nueva base P_1 , la cual produce el mínimo error posible en dicha dirección . De aquí se escoge una nueva dirección de movimiento y la adecuada distancia a la que uno se tiene que desplazar, con esto se arriba a un punto P_2 , continuandose este proceso hasta llegar al mínimo relativo más cercano a cero ó a la tolerancia pre-establecida para la función de error .

La forma en que uno obtiene la longitud de paso es muy importante, pues si se elije una inadecuada longitud de paso , el proceso tiende a diverger o por lo menos hay una convergencia lenta . Esto normalmente sucede cuando la superficie de la función de error es muy rugosa .

Las diversas técnicas difieren unas de otras en los criterios para escoger la longitud de paso entre dos puntos base consecutivos . Un principio para escoger la longitud de paso , considerado generalmente como el más satisfactorio , es como sigue . Sea P_k un punto base y $\bar{v}$ un vector a lo largo del cual se va a realizar el movimiento . El punto base P_{k+1} siguiente , está dado por ;

$$P_{k+1} = P_k + c_k \bar{v} \qquad \text{(II.23)}$$

Donde c_k se escoge de tal suerte que la función de error sea mínima a lo largo de la dirección $\bar{v}$.

Hay un buen número de métodos que pueden utilizarse para determinar c_k , entre los cuales tenemos :

- Plan de búsqueda de Fibonacci .
- Plan de la sección dorada .
- Método de Rosenbrock .
- Método de bisección .
- Método de falsa posición .
- Método de Newton-Raphson .
- Interpolación cuadrática .
- Interpolación cúbica .

Cabe hacer mención de la siguiente nota ; aunque el problema es de una función multidimensional , el problema se ha reducido a la solución de una función unidimensional como se puede ver al buscar la longitud de paso a través de una dirección .

II.2.5.3 .- METODO HIBRIDO .

El método híbrido , como su nombre lo indica , es una combinación tanto de los métodos gradiente y de los métodos de solución de ecuaciones matriciales .

Parte de la comparación de dos expresiones, una que se obtiene al derivar la expresión (II.8) con respecto a los parámetros del corte , es decir ;

$$\bar{\Delta}P = \frac{\partial E}{\partial P_k} = 2 \sum_j (\rho_{ac_j} - \rho_{am_j}) \frac{\partial \rho_{am}}{\partial P_k} \qquad \text{(II.24)}$$

y la otra es la expresión (II.12) , osea ,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \Delta P_k \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_r} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_k} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_r} (\rho_{ac_i} - \rho_{am_i}) \qquad \text{(II.12)}$$

Al hacer la comparación se puede ver que ambos miembros son proporcionales entre sí , por lo tanto dicha proporción será de la forma ;

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \Delta P_k \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_r} \frac{\partial \rho_{am_i}}{\partial P_k} = \frac{-1}{2} \bar{\nabla} E \qquad \text{(II.25)}$$

de otra manera se pued escribir ;

$$J^T J \bar{\Delta P} = - \frac{1}{2} \bar{\nabla} E \qquad \text{(II.26)}$$

En lo que se puede apreciar que la dirección en el método Gauss-Newton no es necesariamente la dirección del gradiente .

La expresión (II.26) tiene los mismos problemas que la ecuación (II.13) , por lo que Marquardt (1963) modifica la expresión (II.26) , agregando un término α a los elementos de la diagonal principal de la matriz $J^T J$, es decir ;

$$(J^T J + \alpha I) \bar{\Delta P} = - \frac{1}{2} \bar{\nabla} E \qquad \text{(II.27)}$$

Donde I es la matriz Identidad . La técnica propuesta por Marquardt se clasifica como método interpolador entre el método Gradiente y el de Gauss-Newton , según Shirley (1975) .

Cuando el valor de α es grande , la ecuación (II.27) es semejante al método Gradiente y si es pequeña es cercano al método de Gauss-Newton . En general es conveniente usar un α grande en las primeras iteraciones y cuando se logre llegar a un intervalo de convergencia lenta , es preferible utilizar un α cercano a cero . Se menciona en la literatura (ref. 9,16) que la cantidad α depende del comportamiento del error .

El cultivo de la mente es un alimento para el alma humana.

MARCO TULIO CICERON ,
De finibus bonorum et malorum (45-44 a.C.)

Para unos , la ciencia es sublime diosa , para otros , una vaca que suministra excelente mantequilla.

FRIEDRICH VON SCHILLER ,
Xenien (1796)

CAPITULO III

METODO DE INTERPRETACION AUTOMATICA .

III.1 .- INTRODUCCION .

En el capítulo I de este trabajo , se desarrollaron los conceptos básicos sobre el método del sondeo eléctrico vertical . Estos conceptos permitieron establecer en el capítulo II la teoría fundamental del problema inverso para medios estratificados.

Como se ha mencionado , existen diferentes formas de solución del problema inverso , sin embargo en los últimos años los métodos de inversión automática en computadoras digitales han alcanzado un importante impulso y difusión.

Aunque existen en la literatura numerosos métodos de inversión automática tanto en el dominio de la resistividad aparente como en el dominio de la transformada de resistividades , sin embargo para la mayoría de ellos se pueden distinguir varias etapas fundamentales como son ;

- Determinación del modelo geoeléctrico inicial .
- Cálculo de la función Transformada de Resistividades .
- Obtención de la curva de resistividad aparente .
- Determinación de la función de error .
- Método de optimización de la función de error .

En cualquiera de los métodos de inversión automática , el diseño adecuado de las etapas anteriores , traerá como consecuencia la mayor o menor eficiencia del método.

En este capítulo se describirán las características particulares con que se ha diseñado cada una de las diferentes etapas señaladas y que constituyen el método de inversión automática de sondeos eléctricos verticales propuesto en este trabajo.

III.2 .- METODO DE INVERSION PROPUESTO .

III.2.1 .- ETAPAS BASICAS .

La determinación del modelo geoeléctrico inicial es una parte importante del problema de inversión , debido a que si el modelo geoeléctrico inicial no es bien seleccionado , la convergencia del método será demasiado lenta y en ocasiones el proceso de inversión conducirá a modelos geoeléctricos totalmente erróneos . Por lo anterior debe hacerse hincapié en que nunca debe creerse que un programa de inversión automática podrá por si solo resolver exitosamente el problema interpretativo , si es empleado por un usuario que ignore los fundamentos del método y solo se limite a proporcionar una serie de datos a la computadora , por el contrario debe comprenderse claramente que el intérprete juega un papel muy importante y en este caso es el de proporcionar un modelo geoeléctrico inicial lo más cercano posible a la solución del problema .

Una crítica de los métodos de obtención del modelo geoeléctrico inicial se puede apreciar en la sección II.2.1 de este trabajo , en donde a manera de conclusión , se recomienda el uso de métodos de reducción y más específicamente el llamado " método del punto auxiliar " .

Por lo que respecta a la etapa de cálculo de la función transformada de resistividades , esta se realiza empleando la fórmula de recurrencia de Pekeris (ver sección I.4.1) debido a la facilidad con que puede realizarse su programación .

Finalmente la obtención de la curva de resistividad aparente teórica se realiza mediante el método de filtrado lineal digital . Como se ha mencionado anteriormente el método de filtrado lineal digital consiste en evaluar la convolución discreta entre la función transformada de resistividades obtenida en la etapa previa y los coeficientes de un filtro inverso de resistividad (ver sección II.2.3) . Los filtros inversos utilizados en este trabajo tienen las características señaladas en la tabla 1 . Como se puede ver en la tabla anteriormente mencionada , para la evaluación numérica de la curva teórica de resistividad aparente , se ha dotado al método de cuatro diferentes filtros inversos de resistividad , que permitirán realizar la interpretación de curvas de resistividad aparente tanto tipo Schlumberger como Wenner . Además para cada uno de estos tipos de curvas , se han seleccionado un filtro inverso de poca longitud , es decir , con un número pequeño de coeficientes (menor de 20) , y un filtro largo con 60 coeficientes . De esta manera para curvas de resistividad aparente generadas por medios estratificados con contrastes moderados de resistividad , podrán seleccionarse los filtros inversos cortos , logrando con ello suficiente exactitud en el cálculo de las curvas de resistividad aparente con el empleo de menor tiempo de cómputo. Por otra parte , para curvas de resistividad aparente -

de campo con ramas fuertemente descendentes que son generadas por medios estratificados con contrastes severos de resistividad , será necesario seleccionar los filtros largos para lograr la exactitud suficiente en los cálculos aunque con el consiguiente incremento en los tiempos de cómputo.

TIPO DE ARREGLO	FILTRO INVERSO UTILIZADO	CORRIMIENTO	MUES. POR CICLO
Schlumberger	O'neill	Ln (1.288)	6
Schlumberger	Seara	.2530703914	6
Wenner	Koefoed	-.0895	4
Wenner	Seara	-.2822783197	6
	NUM. DE COEF.	CONTRAS. DE RESISTIVIDAD DESC. $\rho_i > \rho_{i+1}$ (ρ_i/ρ_{i+1})	
Schlumberger	20	5000	
Schlumberger	60	10,000	
Wenner	14	5000	
Wenner	60	10,000	

TABLA 1. Parámetros de los filtros inversos utilizados .

III.2.2 .- ETAPAS PARTICULARES DEL METODO PROPUESTO .

Las etapas descritas anteriormente , se han denominado básicas porque son comunes a la mayoría de los métodos iterativos de inversión de curvas de resistividad aparente. A continuación se procederá a describir las etapas que son particulares o características del método propuesto . Estas etapas particulares que influyen marcadamente en la eficiencia del método de inversión son :

a). Determinación de la función de error .
b). Método de optimización de la función de error .

III.2.2.1 .- DETERMINACION DE LA FUNCION DE ERROR .

En la sección II.2.4 se establecieron las distintas expresiones matemáticas que pueden emplearse para definir la función de error .

Como se ha mencionado , la forma de definición de la función de error será fundamental para la eficiencia del método de inversión , por lo cual, autores como Vozoff K. (1958) , Bichara y Lakshmanan (1976), Koefoed O. (1979) y Tejero (1984) han propuesto en sus trabajos , diferentes - funciones de error . En la actualidad, la definición más aceptada para la función de error , es la del error cuadrático logarítmico dado por ;

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{Ln}\, \rho_{ac_i} - \mathrm{Ln}\, \rho_{am_i})^2 \qquad \text{(III.1)}$$

donde : E^2 = Error cuadrático logarítmico .
ρ_{ac_i} = Resistividad aparente obtenida en el campo.
ρ_{am_i} = Resistividad aparente del modelo calculado .
Ln = Logaritmo natural .
N = Total de muestras obtenidas en el campo .

Esta definición de error tiene la ventaja de incrementar la eficiencia del método de inversión , asi como la de evitar la obtención de parámetros negativos en los modelos geoeléctricos .

III.2.2.2 .- METODO DE OPTIMIZACION .

En la sección II.2.5 se estableció , que los métodos de inversión automática que existen en la literatura , emplean como método de optimización de la función de error , alguna de las tres técnicas siguientes ;

- Métodos de solución de ecuaciones matriciales .
- Método gradiente .
- Método híbrido .

Este trabajo , utiliza en el problema de la inversión en el dominio de la resistividad aparente , el proceso de optimización llamado GRADIENTE -- (en inglés STEEPEST DESCENT) del cual en la sección II.2.5.2 se realizó una descripción completa . La esencia de este método consiste en que los cambios de los parámetros del modelo geoeléctrico se realizan en forma proporcional a la magnitud de las componentes del gradiente de la función de error , es decir ;

$$P_{k+1} = P_k - c\,\frac{\partial E^2}{\partial P_k} \qquad (II.22)$$

donde : P_k = Parámetro geoeléctrico a cambiar .
P_{k+1} = Nuevo valor del parámetro geoeléctrico.
c = Longitud de paso .
$\frac{\partial E^2}{\partial P_k}$ = Dirección del gradiente del error .

La determinación de la dirección del gradiente del error y de la longitud de paso , marcan los aspectos fundamentales del método propuesto , y que a continuación se describen .

III.2.2.2.1 .- EVALUACION DE LA DIRECCION DEL GRADIENTE.

Partiendo de la consideración de que el error será evaluado en forma logarítmica (ec. III.1) y derivando dicha expresión con respecto al logaritmo de los parámetros se tiene ;

$$\frac{\partial E^2}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} = -2 \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{Ln}\, \rho ac_i - \mathrm{Ln}\, \rho am_i) \frac{\partial \mathrm{Ln}\, \rho am_i}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} \qquad (III.2)$$

Evaluando la última parte de la expresión (III.2), se obtiene ;

$$\frac{\partial \mathrm{Ln} \rho am_i}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} = \frac{\partial \mathrm{Ln}\, \rho am_i}{\partial \rho am_i} \circ \frac{\partial \rho am_i}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} \qquad (III.3)$$

Como ,

$$\frac{\partial \mathrm{Ln} \rho am_i}{\partial \rho am_i} = \frac{1}{\rho am_i} \qquad (III.4)$$

$$\frac{\partial \rho am_i}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} = \frac{\partial \rho am_i}{\partial Pk} \circ \frac{\partial P_k}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} = P_k \frac{\partial \rho am_i}{\partial Pk} \qquad (III.5)$$

Sustituyendo (III.4) y (II.5) en (III.3) y a su véz en (III .2) se llega a ;

$$\frac{\partial E^2}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} = -2 \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{Ln} \rho ac_i - \mathrm{Ln} \rho am_i) \frac{P_k}{\rho am_i} \circ \frac{\partial \rho am_i}{\partial P_k} \qquad (III.6)$$

La ecuación anterior representa las componentes del gradiente de la - función de error respecto a cada uno de los parámetros del modelo geoeléctrico , es decir , la dirección de máxima variación sobre la función de -- error .

En forma logarítmica los parámetros geoeléctricos modificados estarán dados por :

$$\mathrm{Ln}\, P_{k+1} = \mathrm{Ln}\, P_k + c \frac{\partial E^2}{\partial \mathrm{Ln}\, P_k} \qquad (III.7)$$

Y por lo tanto los nuevos parámetros en forma lineal se establecerán mediante la siguiente ecuación ;

$$P_{k+1} = P_k\, e^{-c\bar{v}} \qquad (\text{III}.8)$$

en donde : c= Longitud de paso
$\bar{v}$= Dirección propuesta $\left(\dfrac{\partial E^2}{\partial \operatorname{Ln} P_k} \right)$.

III.2.2.2.2 .- EVALUACION DE LA LONGITUD DE PASO .

Hay infinidad de formas para evaluar el segundo aspecto fundamental del método gradiente , es decir , la longitud de paso "c" , entre ellas tenemos ;

- Plan de búsqueda de Fibonacci .
- Plan de la sección dorada .
- Método de Rosenbrock .
- Método de falsa posición .
- Método de Newton-Raphson .
- Interpolación cuadrática .
- Interpolación cúbica .

Entre los métodos más seguros y más utilizados en la práctica se tienen los métodos de : Rosenbrock , de Newton-Raphson y el método de interpolación cuadrática . Estos métodos se describirán a continuación, siendo necesario destacar que el método utilizado en este trabajo es el método de interpolación cuadrática debido básicamente a las siguientes ventajas :

- Facilidad y rapidez de evaluación .
- Incrementa la eficiencia del método de inversión .
- Evita la determinación de parámetros de difícil evaluación , como el método de Newton-Raphson .

METODO DE ROSENBROCK.

El método consiste en seleccionar un punto inicial Po , una longitud de paso "c" y evaluar la función de error en Po y en Po+c . Si se cumple que E(Po+c) < E(Po) , el paso se llama éxito ; en caso contrario se llama fracaso . Los pasos sucesivos se toman de acuerdo a la regla siguiente .

Si en el paso se consigue un éxito, el punto Po+c se toma como nuevo punto base en lugar de Po, y la longitud de paso se aumenta en algún número adecuado, digamos "ac", donde a>1 . Por lo general, a=2 es una --

selección adecuada.

Si el paso es fracaso , se retiene el punto original base y la longitud de paso original se reduce y se hace negativa; es decir, se toma como - "-bc", donde $0<b<1$. Usualmente, $b=1/2$ sirve bien para este propósito. en forma resumida el proceso iterativo es como sigue :

Paso 1. Escoger Po , c ;
Paso 2. Si $E(Po+c) < E(Po)$: éxito
Escribir $Po=Po + c$, $c=2c$
Si $E(Po + c) > E(Po)$: fracaso
o bien $c = -c/2$
Repetir el punto 2.

METODO DE NEWTON-RAPHSON .

El método de Newton-Raphson, adaptado para encontrar la raíz de la - ecuación $E'(P)=0$, consiste en el uso de la fórmula de iteración

$$P_{k+1} = P_k - E'(P_k)/E''(P_k) \quad ; \; k=1,2,3,\ldots \qquad (III.9)$$

donde : $E'(P_k)$, $E''(P_k)$; Son las primeras y segundas derivadas de la función de error con respecto a - los parámetros del corte geoeléctrico.

El método tiene la ventaja de permitir minimizar una función en pocas iteraciones y tiene la desventaja , como se aprecia en la ecuación (III.9), de tener que evaluar la segunda derivada para cada k , ya sea por diferenciación analítica y sustitución ó por diferenciación numérica. Ambos procedimientos pueden algunas veces ser insatisfactorios : el primero por ser difícil o inadecuado y el segundo por inexacto. Además, el método falla si $E''(P_k) = 0$ y también es muy insatisfactorio si $E''(P_k)$ es pequeña.

Aunque bien, para salvar el problema de la evaluación de la segunda derivada, el método puede modificarse empleando la representación en serie de Taylor de la ecuación (III.9),

$$E(Po + c\bar{v}) = E(Po) + c\bar{v}'\nabla E(Po) + \frac{1}{2} c^2 \bar{v}' H(Po)\bar{v} \qquad (III.10)$$

donde : $\nabla E(Po)$ = Gradiente de la función de error.
$H(Po)$ = Hessiano de $E(Po)$.
$\bar{v}$ = Vector de dirección .
c = Longitud de paso.

Si "c" es tal que $E(P+c\bar{v})$ sea mínimo , entonces ;

$$\frac{\partial}{\partial c} E(Po+c\bar{v}) = 0 \qquad (III.11)$$

o bien $\bar{v}' \nabla E(Po) + c\bar{v}' H(Po) = 0$

ó

$$c = \frac{-\bar{v}' \nabla E(Po)}{\bar{v}' H(Po)\, \bar{v}}$$

Por lo que la fórmula general de iteración para determinar el punto mínimo a lo largo de la dirección "$\bar{v}$" , es como sigue ;

$$P_{k+1} = P_k - \frac{\bar{v}' \nabla E(P_k)}{\bar{v}' H(P_k) \bar{v}'} \quad , \quad k=0,1,2,... \qquad (III.12)$$

Un ejemplo del uso del método de Newton-Raphson aplicado a sondeos eléctricos verticales se encuentra en Vozoff, K.(ref.19) . Vozoff para poder salvar la dificultad de evaluar las segundas derivadas, aproxima el Hessiano, de la siguiente forma ;

$$M = E/\,|\text{grad } E|^2 \qquad (III.13)$$

donde : M = Longitud de paso .
E = Función error .

INTERPOLACION CUADRATICA .

Si P_1, P_2 y P_3 son modelos geoeléctricos evaluados para los valores c1, c2 y c3 de la longitud de paso c en la vecindad del mínimo $E(P)_{min}$, es decir si ;

$$P_1 = Po + c1\frac{\partial E^2}{\partial Po} \quad ; \quad P_2 = Po + c2\frac{\partial E^2}{\partial Po} \quad ; \quad P_3 = Po + c3\frac{\partial E^2}{\partial Po} \qquad (III.14)$$

Donde Po es el modelo geoeléctrico base, entonces la variación de la función de error evaluada en P_1 , P_2 y en P_3 puede considerarse independiente del modelo geoeléctrico base, y ser representada exclusivamente en términos de la longitud de paso c , como se muestra en la figura 6.

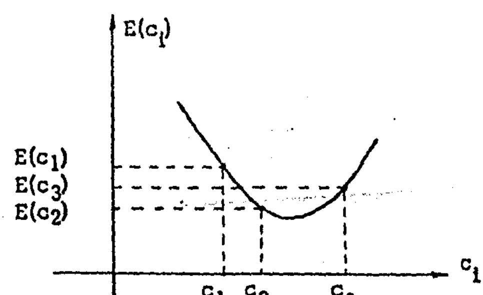


FIG. 6 . INTERPRETACION GRAFICA DEL METODO DE INTERPOLACION CUADRATICA .

Por lo tanto la determinación de la longitud de paso óptima que permite determinar el valor de P que minimiza la función de error, puede lograrse al ajustar una parábola a través de $E(c_1)$, $E(c_2)$ y $E(c_3)$, de tal suerte que :

$$E(c_1) = a + bc_1 + dc_1^2 \quad ; \quad E(c_2) = a + bc_2 + dc_2^2 \quad ; \quad E(c_3) = a + bc_3 + dc_3^2 \qquad \ldots\ldots \quad (\text{III.15})$$

Donde a, b y d pueden determinarse en términos de $E(c_1)$, $E(c_2)$ y de $E(c_3)$.

El mínimo de $E(c)$ ocurre en,

$$E'(c) = b + 2dc = 0 \qquad (\text{III.16})$$

ó

$$c = -b/2d \quad , \text{con tal que } d>0 \qquad (\text{III.17})$$

Si se denota este punto como c_4, el $E(c_4)$ puede calcularse a partir de la fórmula original, repitiéndose la interpolación cuadrática con los puntos más próximos a él , de entre los tres puntos anteriores c_1, c_2 y c_3 .

En la vecindad del mínimo este método produce mejores resultados, en comparación con el método de Rosenbrock.

Para poder encontrar los valores de "b" y "d" (ec. III.16) es necesario resolver el sistema (III.15), una forma más simple de aplicar este método es como sigue ;

El sistema (III.14) se replantea en una forma más sencilla, lo cual se logra realizando el ajuste de la parábola apoyandose ahora solamente en dos puntos, con lo cual se tiene;

$$\begin{aligned} E(c_1) &= dc_1^2 + bc_1 , \\ E(c_2) &= dc_2^2 + bc_2 \end{aligned} \qquad (\text{III.18})$$

obteniendo el determinante del sistema ;

$$D = \begin{vmatrix} c_1^2 & c_1 \\ c_2^2 & c_2 \end{vmatrix} = c_1^2\, c_2 - c_1\, c_2^2 \qquad (\text{III.19})$$

evaluando las constantes ;

$$d = \frac{\begin{vmatrix} E(c_1) & c_1 \\ E(c_2) & c_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{E(c_1)c_2 - E(c_2)c_1}{D} \qquad (\text{III.20})$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} c_1^2 & E(c_1) \\ c_2^2 & E(c_2) \end{vmatrix}}{D} = \frac{c_1^2\, E(c_2) - E(c_1)c_2^2}{D} \qquad (\text{III.21})$$

sustituyendo las ecuaciones (III.20) y (III.21) en la ecuación (III.17),

$$c = -\frac{\left[\dfrac{c_1^2\,E(c_2) - E(c_1)c_2^2}{D}\right]}{2\left[\dfrac{E(c_1)c_2 - E(c_2)c_1}{D}\right]} = -\frac{c_1^2\,E(c_2) - E(c_1)c_2^2}{2E(c_1)c_2 - 2E(c_2)c_1} \qquad (\text{III}.22)$$

la cual será la longitud de paso óptima en la dirección gradiente .

III.3 .- PROGRAMACION DEL METODO .

El programa STEEPEST (ver apéndice II) se ha diseñado para resolver el problema inverso por medio del método de inversión automática en el dominio de la resistividad aparente utilizando el proceso de optimización Gradiente .

Este programa se encuentra escrito en lenguaje BASIC para usarse en una computadora VAX 11/780 , cabe hacer la aclaración de que el tipo de BASIC usado es convencional, con lo que con pocas correcciones al programa STEEPEST, este se podrá implementar fácilmente en cualquier computadora que maneje el lenguaje BASIC.

El programa STEEPEST se compone principalmente de dos partes : El programa principal y las subrutinas. A continuación se describirá, en forma breve, las partes anteriormente mencionadas.

III.3.1 .- PROGRAMA PRINCIPAL .

Como su nombre lo indica, es la parte primordial del programa, pues coordina a las subrutinas y el proceso en general.

Para realizar una descripción adecuada, conviene subdividir el programa principal en las siguientes partes :

1). Creación del archivo de resultados .
2). Lectura de datos de entrada, como son :
   - Modelo geoeléctrico inicial.
   - Especificaciones del sondeo eléctrico vertical.
   - Resistividades aparentes de la curva de campo.
3). Selección del filtro digital inverso.
4). Obtención de la transformada de resistividades del modelo teórico.
5). Obtención de la resistividad aparente calculada.
6). Cálculo del error cuadrático relativo lineal y logarítmico.
7). Optimización de la función de error.
8). Impresión de los resultados.

Las etapas correspondientes a los incisos 2,4,5,6 y 8 son realizados mediante subrutinas, las cuales se describirán detalladamente al terminar esta sección.

El programa principal inicia el proceso con la creación de un archivo llamado STEP.DAT en donde se almacenarán todos los datos de salida producidos mediante el uso del programa STEEPEST .

Una vez realizado lo anterior, el programa principal procede a dar lectura a los datos de entrada, para lo cual hace el llamado a las subrutinas necesarias.

La ejecución del programa continúa con la selección del filtro inverso a utilizar, ya que el programa STEEPEST está diseñado para poder procesar tanto curvas de resistividad aparente tipo Schlumberger como tipo Wenner. El programa está dotado de cuatro filtros inversos de resistividad (tabla 1) los cuales pueden seleccionarse de acuerdo a las necesidades que se presenten.

Después de haber seleccionado el tipo de filtro inverso a utilizar, el programa principal dirige el proceso hacia la obtención de la función transformada de resistividades. La obtención del valor de la transformada de resistividades a cada $1/\lambda$ se realiza a través de la subrutina llamada KER--NEL , la cual utiliza al algoritmo de Pekeris. Habiendose obtenido los valores de la transformada de resistividades, el programa principal llama a la subrutina CONVOLUCION-KERNEL. Esta subrutina permite obtener los valores de la función de resistividad aparente calculada mediante el proceso de convolución entre las funciones transformada de resistividades y el filtro digital inverso seleccionado.

Ya obtenida la función de resistividad aparente calculada, se procede a obtener el error cuadrático relativo tanto lineal como logarítmico entre las funciones de resistividad aparente observada y calculada. El error cuadrático logarítmico es calculado debido a que es necesario en el proceso de optimización de la función de error.

Una véz que se halla determinado la función error, el programa principal comienza el proceso de optimización de la función de error.

Si en el proceso es la primera vez que se pasa por esta etapa (optimización de la función de error), el programa principal hace la impresión del modelo actual , es decir , el modelo inicial. Si la iteración actual, entendiendose esta como el número de iteraciones que lleva el proceso (0,1,2,. ... iteración máxima) es igual a la iteración máxima (ITmax) o si el error cuadrático relativo es menor o igual a una cierta tolerancia preestablecida , esta parte del programa principal dirige el proceso a la subrutina de impresión y finaliza el procesamiento de datos.

Si no sucede lo que se mencionó el párrafo anterior se procede a obtener el gradiente y la longitud de paso óptima, mediante las subrutinas diseñadas para este fin.

Después de obtener el gradiente y la longitud de paso óptima se dirige el proceso hacia la subrutina que obtiene el nuevo modelo geoeléctrico y a su véz, el error cuadrático relativo actual incrementandose finalmente el contador de las iteraciones. Aqui el proceso de optimización de la función de error se vuelve iterativo, es decir se repite constantemente hasta que el error cuadrático relativo actual llega a una tolerancia preestablecida o bien se alcance el número de iteraciones máximas, finalizando con esto el proceso de optimización de la función de error.

Una vez realizado lo anteriormente escrito, el programa principal procede a realizar la impresión de los resultados obtenidos.

III.3.2 .- SUBRUTINAS .

Las etapas descritas en el funcionamiento del programa principal se realizan con el uso de subrutinas.

SUBRUTINA MODELO INICIAL .

Esta subrutina lee el número de capas y el modelo geoeléctrico inicial. La forma en que opera esta subrutina es interactiva , es decir , a través de la terminal se solicita en forma secuencial los distintos datos de entrada. A continuación se muestra un ejemplo de la lectura de datos de entrada ;

```
DAME EL NUMERO DE CAPAS ?

DAME EL MODELO INICIAL
     RHO(1)= ?
     ESPESOR(1)= ?
     RHO(2)= ?
     ESPESOR(2)= ?
     ... ETC .
```

SUBRUTINA DE ESPECIFICACIONES .

Esta subrutina continúa la lectura de los datos de entrada necesarios como son ;

- Tipo de filtro inverso a utilizar.
- Número de muestras de la curva de resistividad aparente.
- Valor de la abscisa inicial.
- Tolerancia en el error.
- Número de iteración máxima.

Asimismo la operación de esta subrutina es interactiva. La forma en que aparecen en la pantalla de la terminal de cómputo las solicitudes de datos son ;

```
MENU DE FILTROS QUE PUEDES UTILIZAR ;

  1. FILTRO SCHLUMBERGER CORTO (O'NEILL, 6/CICLO).
  2. FILTRO SCHLUMBERGER LARGO (SEARA, 6/CICLO) .
  3. FILTRO WENNER CORTO (KOEFOED, 4/CICLO).
  4. FILTRO WENNER LARGO (SEARA, 6/CICLO).
```

FILTRO A UTILIZAR ?
NUMERO DE MUESTRAS DE RESISTIVIDAD APARENTE ?
VALOR DE LA ABSCISA INICIAL ?
TOLERANCIA DESEADA ?
NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES ?

SUBRUTINA RESISTIVIDADES APARENTES DE CAMPO .

Como su nombre lo indica, esta subrutina se encarga de leer las resistividades aparentes obtenidas en el campo, las cuales si se trata de un arreglo schlumberger se deben de dar espaciadas a 1/6 del logarítmo natural de diez, en cambio , si se emplea el dispositivo wenner utilizando un filtro corto , las muestras se deben de dar espaciadas a 1/4 y a 1/6 del logarítmo natural de diez si se trata de un filtro largo.

La forma de solicitud interactiva de los datos es la siguiente ;

RHO. APARENTE (1) = ?
RHO. APARENTE (2) = ?
RHO. APARENTE (3) = ?
... ETC .

Después de terminar de dar todas las resistividades aparentes de campo, aparecerá en la pantalla la siguiente pregunta ;

TODO ESTA CORRECTO (SI O NO) ?

Si la respuesta es "SI" el proceso continuará , por el contrario , si es "NO" en la pantalla aparecerá el siguiente letrero ;

PUNTO No. , VALOR CORRECTO

En donde se debe de teclear el número del dato equivocado y su valor correcto.

SUBRUTINA KERNEL .

Esta subrutina es la encargada de obtener el valor de la función transformada de resistividades para cualquier $1/\lambda$, utilizando la ecuación (I.24) que es la fórmula de recurrencia de Pekeris.

SUBRUTINA CONVOLUCION-KERNEL .

La subrutina convolición-kernel contiene los coeficientes de los filtros inversos tanto para el dispositivo Schlumberger como para el dispositivo Wenner. Esta subrutina se encarga de realizar el proceso de convolución entre la transformada de resistividades y el filtro seleccionado, para obtener las muestras de resistividad aparente teórica o comúnmente llamada calculada.

SUBRUTINA ERROR-LINEAL .

Esta subrutina se encarga de obtener el error cuadrático relativo medio entre la curva de resistividad aparente observada y la curva de resistividad aparente calculada . La expresión utilizada es ;

$$E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho ac_i(\lambda) - \rho am_i(\lambda)}{\rho ac_i(\lambda)} \right)^2} \times 100 \qquad (III.23)$$

donde :

$\rho ac_i(\lambda)$ = Valores de resistividad aparente observada .

$\rho am_i(\lambda)$ = Valores de resistividad aparente calculada .

N = Número de muestras observadas .

SUBRUTINA ERROR-LOGARITMICO .

Debido a que el método de inversión utiliza el error cuadrático en forma logarítmica , en esta subrutina se encuentra programada la expresión (III.1)

SUBRUTINA GRADIENTE .

Esta subrutina evalua el gradiente de la función de error, para lo cual emplea varias subrutinas , estas son ;

a) . Subrutina que obtiene las derivadas parciales entre las diferentes funciones transformada de resistividades - ($\partial Ti / \partial Ti+1$) .

b) . Subrutina que encuentra las derivadas parciales de la transformada de resistividades con respecto a los parámetros del corte geoeléctrico .

c) . Subrutina que obtiene las derivadas parciales de la curva de resistividad aparente con respecto a los parámetros del corte geoeléctrico, valiendose del proceso de convolución discreta .

Las expresiones matemáticas cuya evaluación se realiza mediante las subrutinas anteriores estan contenidas en el apéndice I y los filtros utilizados son los mismos que se ocupan en la subrutina Convolución-Kernel.

d). Subrutina que encuentra el gradiente de la función de error con respecto al logarítmo de los parámetros del corte geoeléctrico, utilizando la ecuación (III .6) . Además esta subrutina convierte al gradiente obtenido en un gradiente unitario.

SUBRUTINA LONGITUD OPTIMA.

El objeto de esta subrutina es encontrar una longitud de paso que produzca el mínimo error posible a través de la dirección gradiente (ver figura 6).

Esta subrutina trabaja con el método de interpolación cuadrática descrito en la sección (III.2.2.2.2) .

SUBRUTINA NUEVO MODELO .

Esta subrutina es utilizada solamente en la subrutina Longitud óptima y sus objetivos son :

a). Encontrar los nuevos modelos a través de la dirección del gradiente del error.
b). Calcular la función transformada de resistividades.
c). Obtener la curva de resistividad aparente respectiva.
d). Evaluar los errorres cuadráticos relativos tanto lineal como logarítmico.

Los nuevos modelos en dirección del gradiente del error se obtienen utilizando la expresión (III .8) , mientras que el cálculo de la función transformada de resistividades , la obtención de la curva de resistividad aparente y la evaluación de los errores cuadráticos relativos los realiza a través de las subrutinas Kernel, Convolución-Kernel,Error-Lineal y Error Logarítmico respectivamente.

SUBRUTINA NUEVO MODELO RESULTANTE .

Esta subrutina obtiene el nuevo modelo, utilizando la longitud de paso óptima y el gradiente de la función de error.

El nuevo modelo se obtiene al sustituir los valores del gradiente y la longitud de paso óptima encontrados , en la expresión (III.8).

SUBRUTINA IMPRESION .

Esta subrutina como su nombre lo indica, se encarga de mandar a impresión todos los resultados del programa, es decir ;

- El modelo inicial y su curva de resistividad aparente.
- La curva de resistividad aparente de campo.
- El error cuadrático relativo entre la curva de resistividad aparente del modelo inicial y la obtenida en el campo.
- El modelo final y su curva de resistividad aparente.
- El error cuadrático relativo entre la curva de resistividad aparente del modelo final y la obtenida en el campo.

Debe recordarse que todos los resultados del programa son guardados en el archivo STEP.DAT , por lo que no aparecerán en la pantalla hasta que se mande llamar dicho archivo.

Un ejemplo de la impresión de resultados del programa STEEPEST se puede apreciar en los siguientes páginas .

TITULO --> EJEMPLO

MODELO INICIAL

ITERACION 0

CAPA	ESPESOR	RESISTIVIDAD
1	11	90
2	101	60
3	.1E+16	400

CURVA DE RESISTIVIDADES TIPO SCHLUMBERGER

DISTANCIA ELECTRODICA	RESIS. DE CAMPO	RESIS. APARENTE	ERROR REL. (%)
1	99.9948	89.9973	9.99803
1.4678	99.9838	89.9899	9.9955
2.15443	99.9493	89.9678	9.98658
3.16228	99.8429	89.8999	9.95867
4.64159	99.5239	89.6936	9.87732
6.81292	99.6214	89.097	10.5644
10	96.3375	87.5333	9.13886
14.678	91.5939	84.0936	8.18863
21.5443	84.3061	78.3386	7.07834
31.6228	76.7154	71.708	6.52722
46.4159	71.747	66.8466	6.83008
68.1292	70.7967	65.4552	7.54486
100	75.0427	68.7102	8.43848
146.78	87.4277	79.0531	9.57886
215.443	111.346	99.3749	10.7512
316.228	147.168	129.838	11.7755
464.159	192.584	168	12.7656
681.292	244.958	211.061	13.8379
1000	300.756	255.676	14.9889
1467.8	355.075	297.696	16.1596
2154.44	402.733	333.216	17.2614
3162.28	440.012	359.918	18.2026
4641.59	465.896	377.746	18.9205
6812.92	481.927	388.404	19.406
10000	490.922	394.218	19.6984

ERROR CUADRATICO REL.

13.2722

MODULO DEL GRADIENTE

.219117

TITULO --> EJEMPLO

ULTIMO MODELO

CAPA	ESPESOR	RESISTIVIDAD
1	10.9985	99.6357
2	96.3629	63.7262
3	.1E+16	498.575

ITERACION 10

CURVA DE RESISTIVIDADES TIPO SCHLUMBERGER

DISTANCIA ELECTRODICA	RESIS. DE CAMPO	RESIS. APARENTE	ERROR REL. (%)
1	99.9948	99.6324	.362423
1.4678	99.9838	99.6235	.36041
2.15443	99.9493	99.5966	.352916
3.16228	99.8429	99.5141	.329283
4.64159	99.5239	99.2637	.261468
6.81292	99.6214	98.5396	1.08592
10	96.3375	96.6425	-.316604
14.678	91.5939	92.4733	-.960143
21.5443	84.3061	85.5142	-1.43301
31.6228	76.7154	77.5418	-1.07726
46.4159	71.747	71.7894	-.590366E-01
68.1292	70.7967	70.3185	.675438
100	75.0427	74.5447	.663685
146.78	87.4277	87.3106	.133982
215.443	111.346	111.765	-.376728
316.228	147.168	147.945	-.527683
464.159	192.584	193.524	-.48806
681.292	244.958	245.929	-.396255
1000	300.756	301.608	-.283323
1467.8	355.075	355.641	-.15926
2154.44	402.733	402.878	-.359634E-01
3162.28	440.012	439.683	.746759E-01
4641.59	465.896	465.14	.162205
6812.92	481.927	480.849	.223629
10000	490.922	489.637	.26179

ERROR CUADRATICO REL.

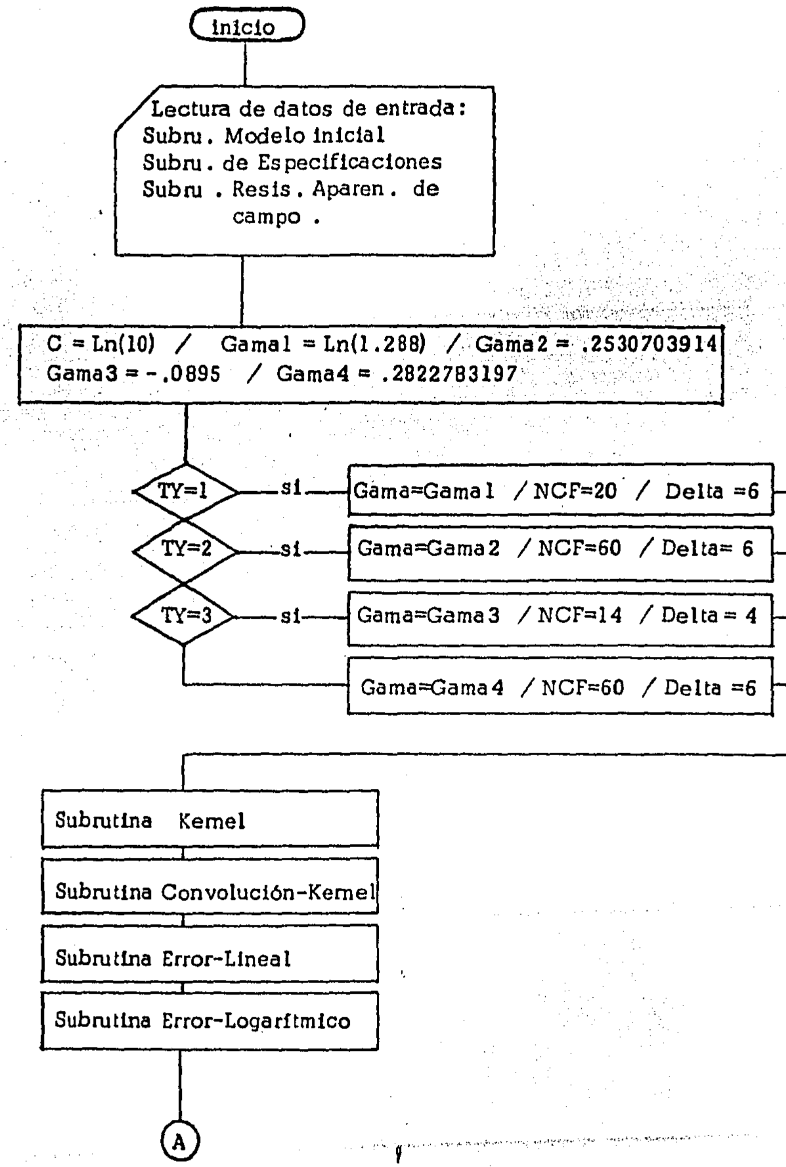
.54892

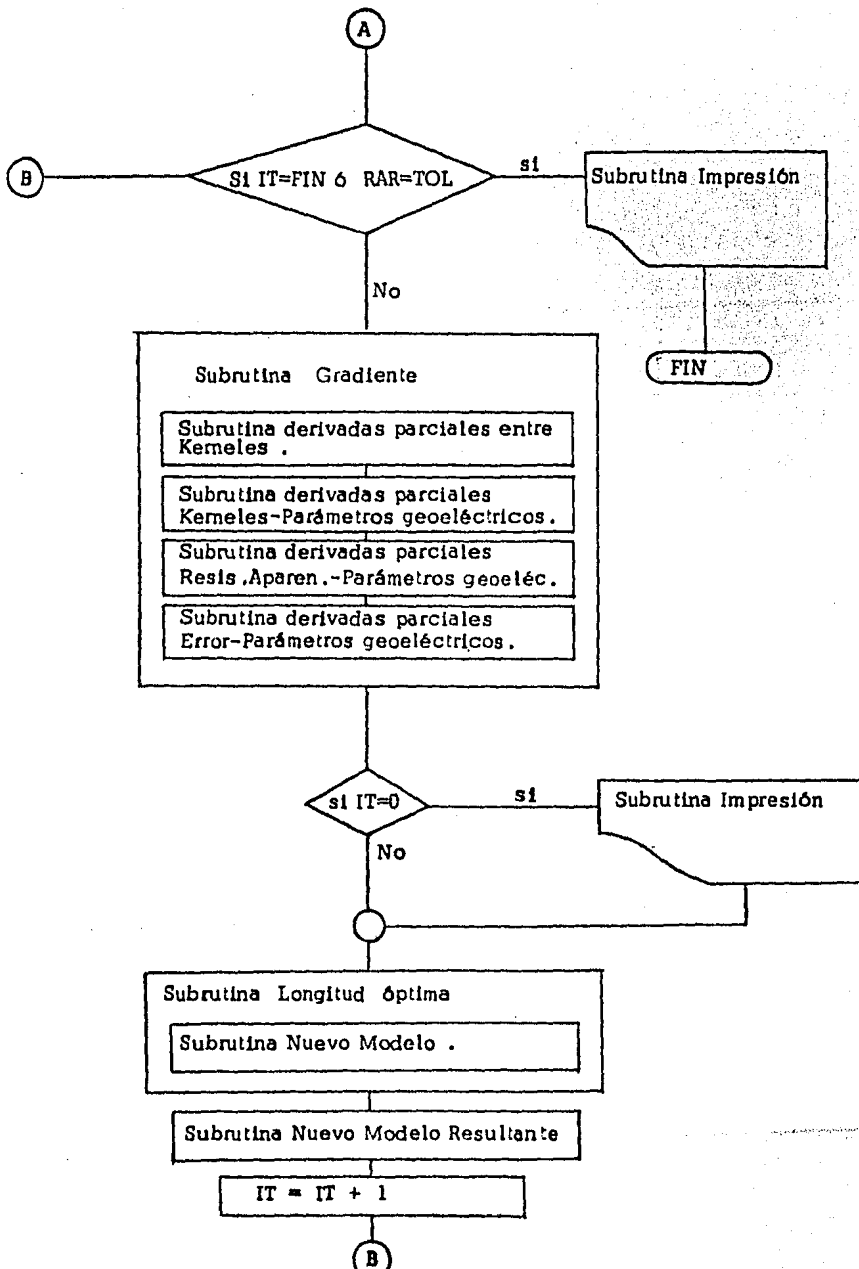
MODULO DEL GRADIENTE

27.1261

En la figura 7 se presenta un diagrama de flujo simplificado del programa STEEPEST y un listado de dicho programa puede encontrarse en el apéndice II .

FIG. 7 . DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA STEEPEST .




A
B
Si IT=FIN ó RAR=TOL
si
Subrutina Impresión
FIN
No
Subrutina Gradiente
Subrutina derivadas parciales entre Kerneles .
Subrutina derivadas parciales Kerneles-Parámetros geoeléctricos.
Subrutina derivadas parciales Resis.Aparen.-Parámetros geoeléc.
Subrutina derivadas parciales Error-Parámetros geoeléctricos.
si IT=0
si
Subrutina Impresión
No
Subrutina Longitud óptima
Subrutina Nuevo Modelo .
Subrutina Nuevo Modelo Resultante
IT = IT + 1
B

III.4 .- ANALISIS DE RESULTADOS.

El análisis de resultados se realizó probando el método en la inversión de curvas de resistividad aparente para modelos geoeléctricos teóricos, en esta fase se analizaron los resultados obtenidos para establecer conclusiones sobre los siguientes aspectos :

1. Capacidad del método para obtener modelos geoeléctricos similares a los modelos teóricos conocidos.
2. Influencia del modelo geoeléctrico inicial sobre la capacidad del método para obtener modelos geoeléctricos finales satisfactorios.
3. Capacidad del método para obtener modelos geoeléctricos adecuados en los casos de inversión de curvas de resistividad aparente producidas por modelos geoeléctricos con fuertes contrastes de resistividad.
4. Rapidez del método para realizar la inversión de curvas de resistividad aparente.

Para analizar los resultados del método de inversión bajo los aspectos anteriores se generó un buen número de curvas de resistividad aparente para modelos teóricos conocidos, empleando para ello un programa de cálculo numérico de curvas teóricas de resistividad aparente por medio de filtrado lineal (ref. 5). Además de probar el programa STEEPEST para los casos señalados, estos fueron también probados en otros programas de inversión automática, como son el IDOFUKE y el INVNOS, los cuales pertenecen al paquete de programas de inversión automática con que cuenta el Depto. de Geofísica de la F.I. de la U.N.A.M. Estos programas corresponden a métodos de inversión automática en el dominio de la función transformada de resistividades (IDOFUKE) y en el dominio de la resistividad aparente (INVNOS) los cuales, trabajan con el proceso de optimización conocido con el nombre de Método híbrido.

La capacidad del método propuesto para obtener modelos geoeléctricos similares a los modelos teóricos conocidos se analiza con los siguientes tres ejemplos, en dichos ejemplos se comentan los resultados en base al modelo teórico conocido y a los resultados que presentan los programas IDOFUKE e INVNOS.

EJEMPLO 1.

En este ejemplo sintético se analiza una curva de tres capas tipo A (fig. 8), cuyos valores reales de resistividad y espesores son :

CAPA	ESPESOR (mts)	RESISTIVIDAD (Ω-m)
1	20	30
2	30	750
3	infinito	1500

En la tabla 2 pueden verse los resultados obtenidos con el programa - STEEPEST (método propuesto) y con el programa INVNOS (ref.16), ambos partiendo del mismo modelo inicial.

Como puede observarse, el programa INVNOS solamente necesitó dos - iteraciones para alcanzar un error relativo cuadrático medio del 0.917 % en cambio el programa STEEPEST ocupó un total de diez iteraciones para poder llegar a un error relativo cuadrático medio del 1.06 %, lo cual a primera vista hace ser al programa STEEPEST, un programa de baja convergencia, pero analizando más los resultados, el programa STEEPEST pudo obtener un modelo muy aproximado al modelo real, por lo contrario, el programa INVNOS - llegó a un modelo equivalente.

EJEMPLO 2 .

El segundo ejemplo sintético consiste de una curva de tres capas tipo K (figura 9), cuyo modelo real es :

CAPA	ESPESOR (mts)	RESISTIVIDAD (Ω-m)
1	50	90
2	100	400
3	infinito	1

Como se puede observar, esta curva en su parte final es altamente -- descendente. Dicha característica, incrementa la dificultad de resolución al problema inverso con métodos iterativos automáticos , lo cual se puede comprobar al apreciar los resultados proporcionados por el programa INVNOS y STEEPEST.

Después de haber hecho la anterior aclaración se puede observar que al fin de 8 iteraciones , un modelo más cercano al real lo proporciona el programa STEEPEST ya que obtiene un error cuadrático relativo medio del 16.4218 % , en cambio con el programa INVNOS solamente se llega a un error cuadrático relativo medio del 33.306 % .

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 1 (A)

	MODELO REAL		MODELO INICIAL		MODELOS FINALES: INVNOS		MODELOS FINALES: STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	20	30	22	35	20.4	30.11	19.52	29.98
2.	30	750	35	700	17.6	917.11	34.68	710.7
3.	INF.	1500	INF.	1200	INF.	1496.6	INF.	1414.12
			E (%) = 11.31		E (%) = .917 IT = 2		E (%) = 1.06 IT = 10	

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 2 (K)

	MODELO REAL		MODELO INICIAL		MODELOS FINALES: INVNOS		MODELOS FINALES: STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	+++	++++	50	90	258.1	102.2	115.6	96.66
2.	+++	++++	100	400	111.5	2221.3	408.8	1310.3
3.	+++	++++	INF.	1	INF.	1.134	INF.	1.497
			E (%) = 51.339		E (%) = 33.3 IT = 8		E (%) = 16.42 IT = 8	

TABLA 2. EJEMPLOS TEORICOS 1 Y 2 .

FIGURA 8. EJEMPLO 1 (A) .

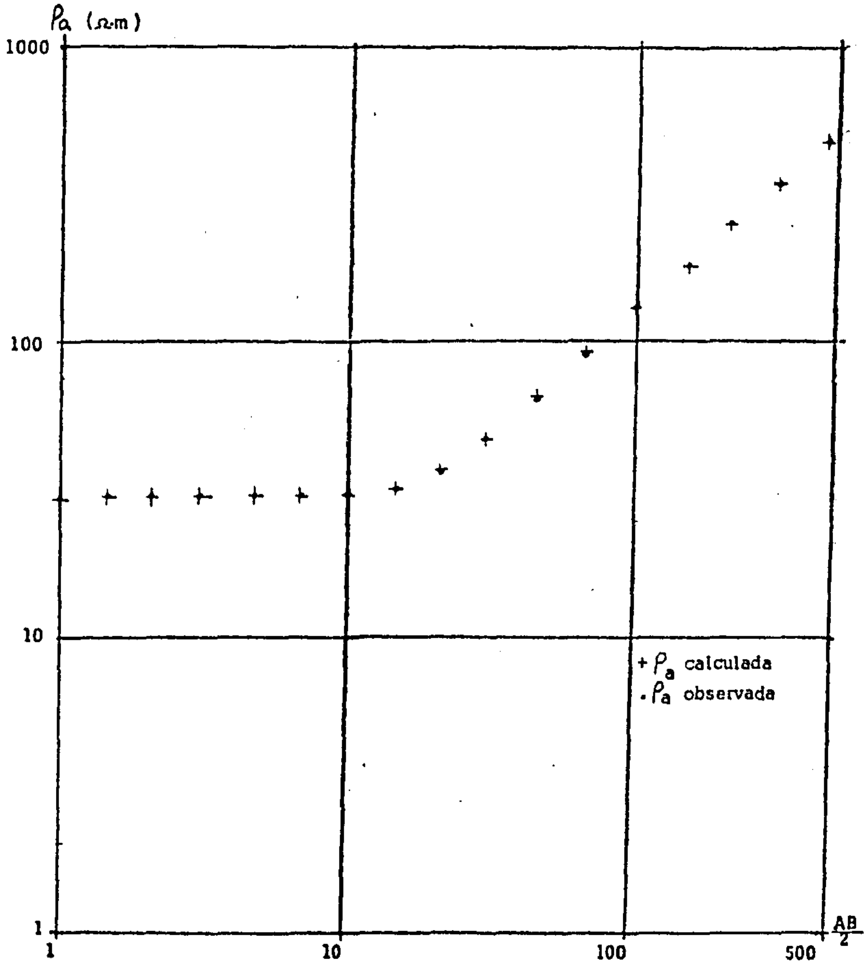
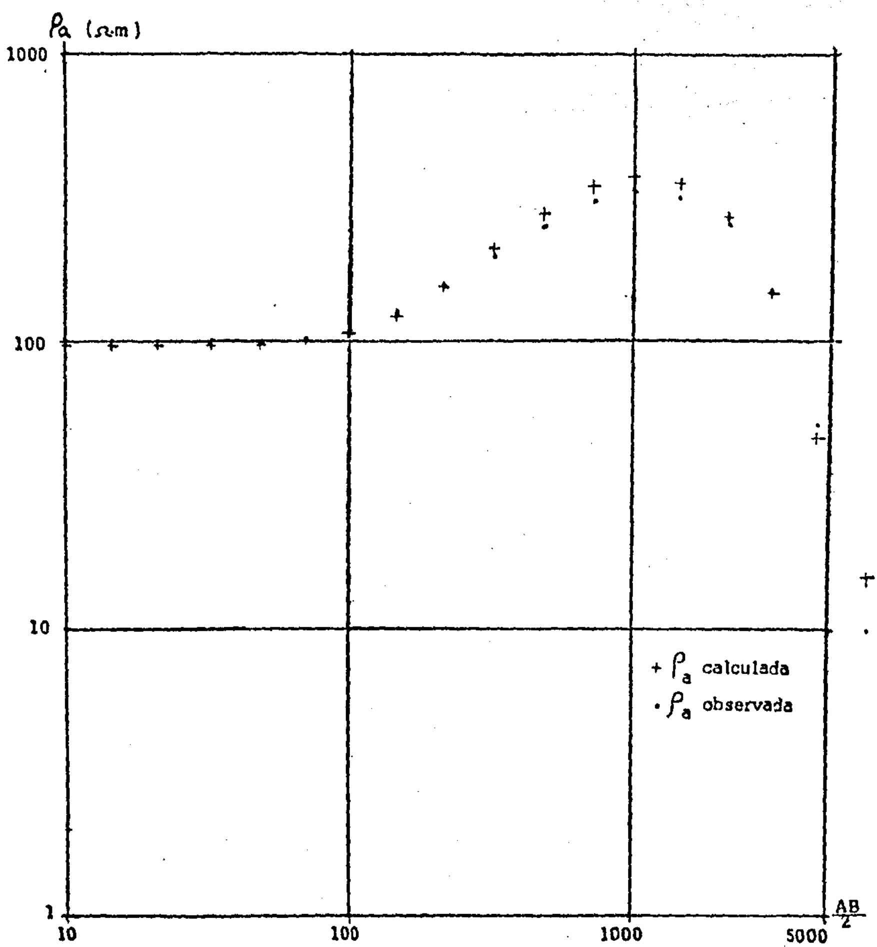


FIGURA 9. EJEMPLO 2 (K)



EJEMPLO 3.

En el ejemplo 3 se analizará una curva de tres capas tipo H (Figura 10) cuyos parámetros reales son ;

CAPA	ESPESOR (mts.)	RESISTIVIDAD (Ω-m)
1	10	100
2	100	65
3	infinito	500

Como se puede observar en los resultados (tabla 3), el mejor modelo obtenido lo proporciona el programa IDOFUKE con la desventaja de un gran número de iteraciones (24) en cambio los programas INVNOS y STEEPEST producen resultados tambien cercanos al modelo real pero con un reducido número de iteraciones.

A manera de conclusión se puede decir que el procesado de curvas teóricas tanto de dos y tres capas permite establecer que los medios estratificados interpretados automáticamente, se asemejan bastante bien a los medios teóricos que originaron las curvas que se están interpretando y la calidad de interpretación puede clasificarse como excelente, cuando se cuenta con curvas completas de resistividad aparente. Además, se incluyen en el apéndice III cuatro ejemplos más , en los cuales se pueden establecer las mismas conclusiones anteriormente citadas.

Para poder visualizar la influencia que tiene el modelo geoeléctrico inicial sobre la capacidad del método para obtener modelos geoeléctricos finales satisfactorios se procedió a estudiar el ejemplo 3 (anteriormente descrito) desde el punto de vista modelo geoeléctrico inicial , es decir , se tomaron tres diferentes modelos geoeléctricos iniciales correspondientes a modelos geoeléctricos iniciales alejados, medianamente alejados y cercanos respectivamente (ver tabla 4).

Analizando los resultados presentados en la tabla 4, vemos que un modelo geoeléctrico inicial alejado tiene dificultades para obtener un error cuadrático relativo medio menor del 5% (cabe hacer la aclaración que un error cuadrático relativo medio del 6% fué obtenido en la segunda iteración) esta característica se relaciona mucho con el fenómeno de equivalencia del cual se hablará después de comentar los demás resultados obtenidos. El modelo geoeléctrico inicial moderadamente alejado produjo resultados satisfactorios aunque el espesor (1) se encuentre alejado, los demás parámetros geoeléctricos tienen buena aproximación, produciendose con esto un error cuadrático relativo medio del 3.65 % el cual es muy satisfactorio. El caso del modelo geoeléctrico inicial cercano hace ver que si el modelo inicial es escogido adecuadamente, el programa STEEPEST genera modelos geoeléctricos muy cercanos a la realidad, produciendose errores cuadráticos relativos medios del orden del 0.5 % .

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 3 (H)

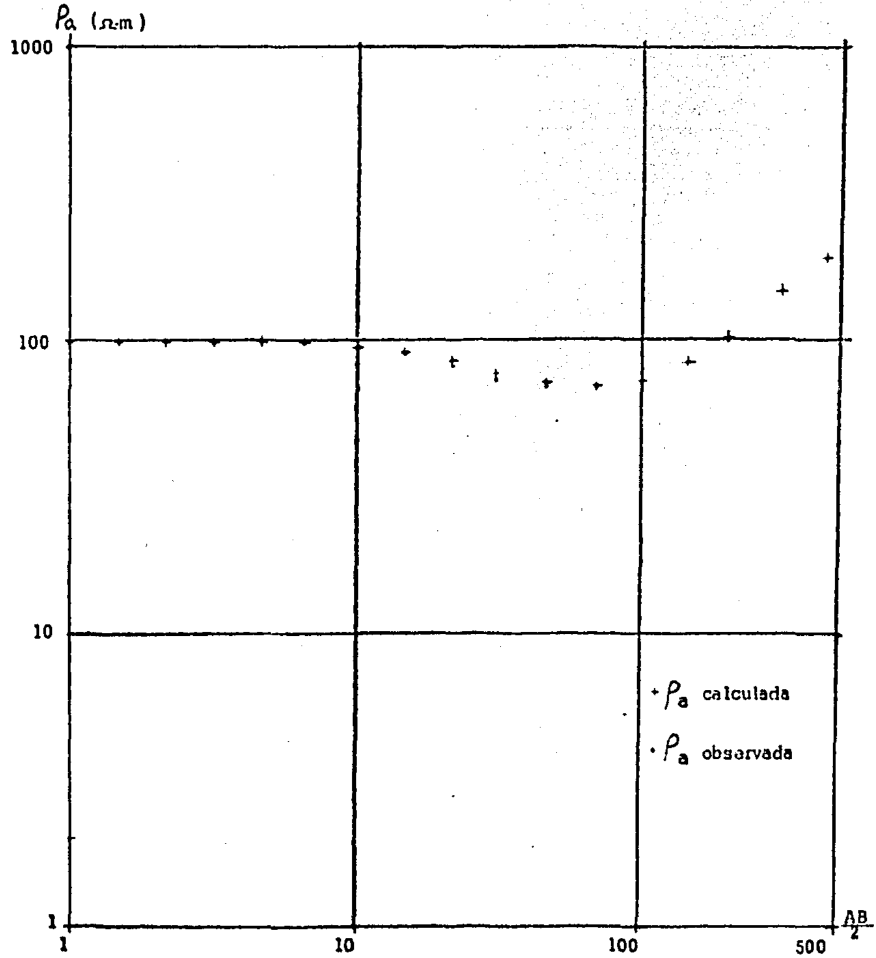
	MODELO REAL		MODELO INICIAL		MODELOS FINALES: IDOFUKE		INVNOS		STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	10	100	13	70	9.42	100.1	8.67	100.56	12.6	98.22
2.	100	65	130	47	102.6	66.1	108.1	67.9	98.9	64.57
3.	INF.	500	INF.	350	INF.	500.3	INF.	501.6	INF.	505.56
			E (%) = 32.038		E (%) = .319 IT = 24		E (%) = .939 IT = 3		E (%) = 1.68 IT = 5	

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 4

	MODELO REAL		MODELO INICIAL		MODELOS FINALES: IDOFUKE		STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	2.1	270	2	255	2.05	270.45	2.01	267.46
2.	10.5	90	19	75	10.4	91.89	16.5	100.25
3.	135	180	140	170	138.5	176.5	126.83	187.923
4.	INF.	5	INF.	.5	INF.	4.94	INF.	4.807
			E (%) = 29.94		E (%) = 1.1 IT = 17		E (%) = 2.8 IT = 10	

TABLA 3. EJEMPLOS TEORICOS 3 Y 4.

FIGURA 10. EJEMPLO 3(H)



MODELO REAL

CAPA	ESPESOR	RESISTIVIDAD
1	10	100
2	100	65
3	INF	500

MODELO INICIAL ALEJADO

CAPA	ESPESOR	RESISTIVIDAD
1	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]

E (%) = [illegible]

MODELO FINAL

ESPESOR	RESISTIVIDAD
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
INF	[illegible]

E (%) = [illegible].6753
IT = 10

MODELO INICIAL MEDIANAMENTE ALEJADO

CAPA	ESPESOR	RESISTIVIDAD
1	20	60
2	150	30
3	INF	700

E (%) = 41.42

MODELO FINAL

ESPESOR	RESISTIVIDAD
18.83	92.779
87.07	59.31
INF	501.34

E (%) = 3.65
IT = 10

MODELO INICIAL CERCANO

CAPA	ESPESOR	RESISTIVIDAD
1	[illegible]	90
2	[illegible]	60
3	INF	400

E (%) = [illegible]

MODELO FINAL

ESPESOR	RESISTIVIDAD
10.[illegible]	99.620
96.[illegible]	63.7[illegible]
INF	498.573

E (%) = 0.5489
IT = 10

TABLA 4 . INFLUENCIA DEL MODELO INICIAL

Como se ha visto,se puede decir que cuando el modelo geoeléctrico inicial es alejado , el proceso de inversión conduce a un modelo geoeléctrico final que genera una curva teórica de resistividad aparente muy similar a la curva de campo , sin embargo el modelo geoeléctrico obtenido muestra serias diferencias respecto al modelo geoeléctrico real , es decir el proceso de inversión produce un modelo geoeléctrico final que muestra equivalencia. Con base en lo anteriormente escrito una de las conclusiones obtenidas es de que el modelo geoeléctrico inicial es de vital importancia debido a que está ligado al problema de equivalencia , si este modelo es bien seleccionado se disminuirá la posibilidad de obtener un modelo geoeléctrico equivalente .

Otra de las conclusiones que se pueden obtener , es que a modelos geoeléctricos iniciales con errores cuadráticos relativos medios menores del 40 % , el programa STEEPEST genera modelos geoeléctricos satisfactorios . Esta conclusión se debe tomar con mucha precaución debido a que en curvas de resistividad aparente con grandes contrastes de resistividad, un error cuadrático relativo medio del orden del 40 % en el modelo geoeléctrico inicial se le considera un modelo inicial alejado.

Comúnmente en el método de punto auxiliar se obtienen errores menores del 40 % , por lo cual es recomendable utilizar este método para obtención de modelos geoeléctricos iniciales cercanos ó moderadamente alejados propiciandose con esto la eliminación de algunos problemas de equivalencia en el proceso de inversión.

La capacicidad del método propuesto para obtener modelos geoeléctricos adecuados en los casos de inversión de curvas de resistividad aparente producidas por modelos geoeléctricos con fuertes contrastes de resistividad se considera satisfactoria, como se muestra en el ejemplo dos y cuatro , en los cuales el programa STEEPEST generó unos modelos geoeléctricos comparables a los generados por el programa INVNOS .

El ejemplo cuatro trata de el caso de una curva de campo que presenta en su parte final un comportamiento fuertemente descendente (fig.11). En la tabla 3 se pueden apreciar los resultados obtenidos, mostrando el programa STEEPEST resultados satisfactorios al igual que el programa IDOFUKE .

Con base en los anterior, se concluye que el método propuesto produce resultados satisfactorios cuando se presenta el problema de contrastes altos de resistividad en los modelos geoeléctricos generadores de las curvas de campo .

La rapidez del método para realizar la inversión de curvas de resistividad aparente se puede apreciar en las tablas 2 y 3 , y en el apéndice III . Una idea de dicha rapidez se puede juzgar en base al número de iteraciones que se tomó el proceso para generar los modelos resultantes . Al analizar dichas tablas,la rapidez del método es comparable con la rapidez producida con los programas IDOFUKE e INVNOS , aunque hay que hacer la aclaración de que el programa STEEPEST en pocas iteraciones alcanza errores menores del 3%, pero en estos rangos de error el programa STEEPEST tiene una convergencia lenta.

En los siguientes párrafos se analizará un ejemplo extraído de la literatura (Koefoed, 1979b) que corresponde a un caso real (fig.11). Esta curva de resistividad aparente fué obtenida con el fin de identificar las posibles formaciones acuíferas, así como la profundidad a la cual se le puede encontrar tanto la unidad anterior como una intrusión de agua salina.

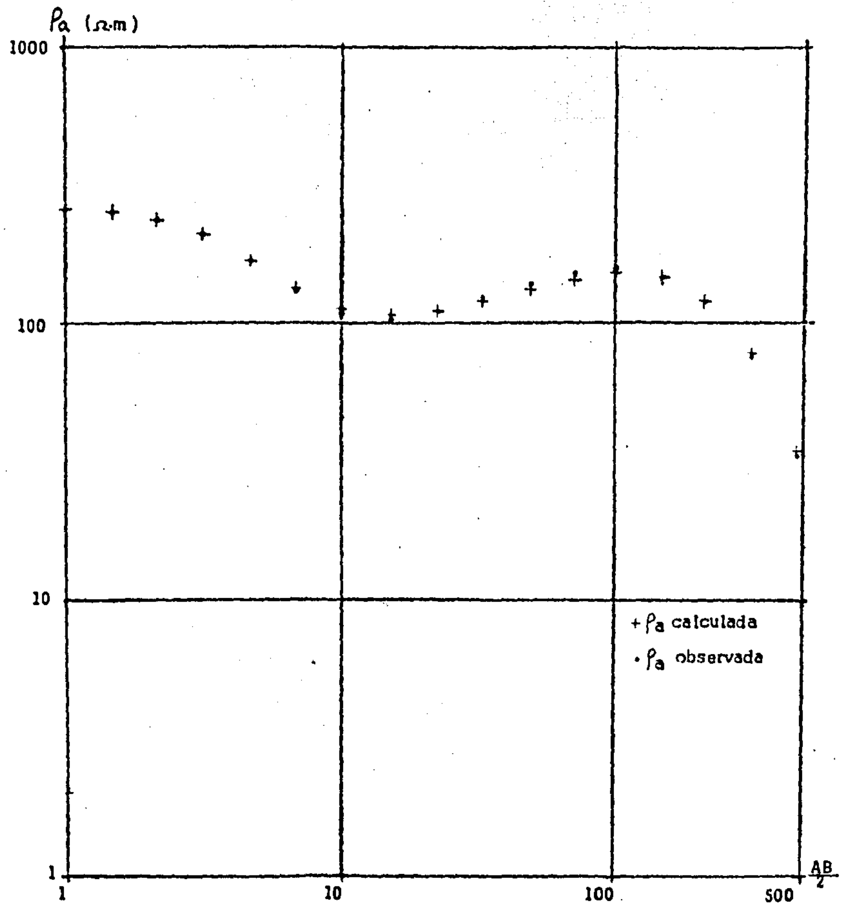
En la tabla 3 se puede apreciar tanto el modelo inicial propuesto, el resultado encontrado utilizando el programa IDOFUKE y el resultado obtenido mediante el programa STEEPEST.

Se puede establecer que la distribución de los parámetros geoeléctricos interpretados es satisfactoria tanto para el programa IDOFUKE como para el programa STEEPEST, de acuerdo a la información geológica disponible, a la siguiente columna estratigráfica; donde además se menciona las resistividades y espesores reales por datos de pozo.

CAPA	ESPESOR(m)	RESIST.(Ω-m)	CORRELACION
1	2.1	270	Alternancia de arcillas y arenas eólicas.
2	10.5	90	Arenas de origen fluvial(posible acuífero).
3	135	180	Arenas fluviales continentales (posible acuífero).
4	Infinito	5	Arcillas marinas saturadas con agua salada.

TABLA 5. EJEMPLO REAL OBTENIDO DE LA LITERATURA (KOEFOED, 1979b).

FIGURA 11. EJEMPLO 4



Lo conocido es finito , lo desconocido infinito ; desde el punto de vista intelectual estamos en una pequeña isla en medio de un océano ilimitable de inexplicabilidad . Nuestra tarea en cada generación es recuperar algo más de Tierra.

T.H. HUXLEY , 1887

CONCLUSIONES

A continuación se describirá , en forma breve, las principales conclusiones obtenidas del presente trabajo .

1. Para realizar una correcta interpretación de los datos obtenidos mediante un sondeo eléctrico vertical con los métodos iterativos automáticos , es indispensable realizar antes del proceso de la curva de resistividad aparente :

   - La corrección de la curva de resistividad aparente por efecto de la separación entre los electrodos de potencial de un dispositivo Schlumberger (finitez) , aplicando la técnica de Mundry E. (1984) ó la de Orellana E. (1981) .
   - La corrección de la curva por efectos laterales .
   - Suavizado .

2. La determinación de un buen modelo geoeléctrico inicial beneficia grandemente la interpretación realizada por métodos iterativos automáticos ,debido a que disminuye el problema de equivalencia y además el tiempo de proceso, propiciando una convergencia más rápida .

3. El método de interpretación automática propuesto es capaz de obter modelos geoeléctricos que generan curvas de resistividad aparente similares a las curvas interpretadas .

4. El proceso de optimización Gradiente aplicado al método de inversión de curvas de resistividad aparente, presenta el fenómeno de baja convergencia cuando se está muy cerca del mínimo de la función de error. Es decir para la mayoría de los casos de curvas de resistividad aparente tratados en este trabajo, el programa de inversión es capaz en un bajo número de iteraciones , de reducir el el error cuadrático medio inicial hasta valores aceptables (menores al 5 %) , sin embargo una vez alcanzado este nivel, la reducción del error se convierte en un proceso muy lento.

5. Ya que el método gradiente no utiliza algorítmos de inversión de matrices , los cuales son tardados (refiriendose a tiempos de computo) y además requiere mucha memoria , este método puede ser implementado en cualquier tipo de microcomputadora .

6. Los operadores de filtraje utilizados pueden conducir a errores numéricos en el cálculo de las derivadas de la función de error , debido a que el comportamiento de las derivadas de la función transformada de resistividades es muy diferente al que muestra la función transformada de resistividades .

7. Los procedimientos utilizados en este trabajo , alcanzan errores inferiores a los errores intrínsecos de los datos de campo .

8. Un método de interpretación iterativa automática como el propuesto es una herramienta poderosa en manos de un geofísico experto , que le permite estudiar y refinar (análisis de equivalencia) la interpretación de datos de resistividad aparente en sondeos eléctricos verticales .

APENDICE I

OBTENCION DEL GRADIENTE PARA LA APLICACION DEL METODO EN LOS SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES .

Si nuestro criterio de error lo definimos como ;

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho_{ac}(\lambda) - \rho_{am}(P_i,\lambda)}{\rho_{ac}(\lambda)} \right)^2 \qquad \text{(AI.1)}$$

Por consiguiente el gradiente se definirá ;

$$\frac{\partial E^2}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho_{ac} - \rho_{am}}{\rho_{ac}} \right)^2 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\frac{\rho_{ac} - \rho_{am}}{\rho_{ac}} \right)^2$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho_{ac} - \rho_{am}}{\rho_{ac}} \right) \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\frac{\rho_{ac} - \rho_{am}}{\rho_{ac}} \right)$$

Como solamente ρ_{am} depende de P_k , tenemos ;

$$\frac{\partial E^2}{\partial P_k} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho_{ac} - \rho_{am}}{\rho_{ac}^2} \right) \frac{\partial \rho_{am}}{\partial P_k} \qquad \text{(AI.2)}$$

Utilizando la teoría del filtrado lineal obtenemos la derivada de la -- curva de resistividades aparentes del modelo con respecto a los parámetros , es decir ;

$$\frac{\partial \rho_{am}}{\partial P_k} = \frac{\partial T_1(P_k,\lambda)}{\partial P_k} * f_j(\lambda) \qquad \text{(AI.3)}$$

Donde ; $T_1(P_k,\lambda)$ = Función transformada de resistividades de n-capas .
$f_j(\lambda)$ = Filtro inverso (O'neill , Johansen , Seara , etc.) .

Por lo tanto , es necesario encontrar la derivada de T_1 con respecto a los parámetros , para que después , se pueda convolucionar con el -- filtro deseado .

Las relaciones de recurrencia de estas derivadas parciales ya han sido publicadas por Johansen (1975) , basandose las anteriores en la relación de recurrencia de Pekeris .

$$T_i = \frac{(T_{i+1} + \rho_i \operatorname{Tanh}(t_i/\lambda))}{\left(1 + \frac{T_{i+1}\operatorname{Tanh}(t_i/\lambda)}{\rho_i}\right)} \qquad \text{(AI.4)}$$

Por lo que , partiendo de la expresión de recurrencia de Pekeris y expresandola como ,

$$T_i = \frac{A}{B}$$

Donde ;

$$A = T_{i+1} + \rho_i \operatorname{Tanh}(t_i/\lambda)$$

$$B = 1 + \frac{T_{i+1}\operatorname{Tanh}(t_i/\lambda)}{\rho_i}$$

Obteniendo las derivadas , se tiene ;

$$\frac{\partial T_i}{\partial \rho_i} = \frac{\frac{\partial}{\partial \rho_i}(A)\cdot B - \frac{\partial}{\partial \rho_i}(B)\cdot A}{B^2} \qquad \text{(AI.5)}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t_i} = \frac{\frac{\partial}{\partial t_i}(A)\cdot B - \frac{\partial}{\partial t_i}(B)\cdot A}{B^2} \qquad \text{(AI.6)}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial T_{i+1}} = \frac{\frac{\partial}{\partial T_{i+1}}(A)\cdot B - \frac{\partial}{\partial T_{i+1}}(B)\cdot A}{B^2} \qquad \text{(AI.7)}$$

En donde ;

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i}(A) = \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(T_{i+1} + \rho_i \operatorname{Tanh}(t_i/\lambda)\right) = \operatorname{Tanh}(t_i/\lambda) \qquad \text{(AI.8)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(A) = \frac{\rho_i}{\lambda \cosh^2(t_i/\lambda)} \qquad \text{(AI.9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{i+1}}(A) = 1 \qquad \text{(AI.10)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i}(B) = -\frac{T_{i+1}\operatorname{Tanh}(t_i/\lambda)}{\rho_i^2} \qquad \text{(AI.11)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(B) = \frac{T_{i+1}}{\lambda \rho_i}\left(1 / \cosh^2(t_i/\lambda) \right) \qquad \text{(AI.12)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{i+1}}(B) = \frac{\mathrm{Tanh}\,(t_i/\lambda)}{\rho_i} \qquad \text{(AI.13)}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las ecuaciones (AI.5) (AI.6) , (AI.7) , se puede obtener ;

$$\frac{\partial T_i}{\partial \rho_i} = \frac{\mathrm{Tanh}(t_i/\lambda)}{\left(1 + \frac{T_{i+1}\,\mathrm{Tanh}(t_i/\lambda)}{\rho_i} \right)^2}\left(1 + \frac{2\,T_{i+1}\,\mathrm{Tanh}(t_i/\lambda)}{\rho_i} + \frac{T_{i+1}^2}{\rho_i^2}\right) \qquad \text{(AI.14)}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t_i} = \frac{\rho_i - (T_{i+1}^2/\rho_i)}{\left(1 + \frac{T_{i+1}\,\mathrm{Tanh}\,(t_i/\lambda)}{\rho_i} \right)^2}\left(1/\lambda \cosh^2(t_i/\lambda) \right) \qquad \text{(AI.15)}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial T_{i+1}} = \frac{1 - \mathrm{Tanh}^2(t_i/\lambda)}{\left(1 + \frac{T_{i+1}\mathrm{Tanh}(t_i/\lambda)}{\rho_i} \right)^2} \qquad \text{(AI.16)}$$

Se puede hacer notar que los parámetros de una capa , t_k y ρ_k , no afectan a T_i si $i>k$. Si k e i son iguales , afectan a T_i directamente . Finalmente , si $i<k$ entonces t_k y ρ_k afectan a T_i solamente a través de T_{i+1} .

Haciendo un resumen esquemático aplicado a nuestro problema , utilizando las expresiones (AI.14) , (AI.15) , (AI.16) , se tiene ;

$$
\frac{\partial T_i^m}{\partial P_k} = \begin{cases}
\text{si } i=k \bullet \begin{cases} \dfrac{\partial T_i}{\partial t_i} & (\text{AI.15}) \\[2ex] \dfrac{\partial T_i}{\partial \rho_i} & (\text{AI.14}) \end{cases} \\[6ex]
\text{si } i>k \quad \dfrac{\partial T_i}{\partial P_k} = 0 \\[6ex]
\begin{array}{l} \text{si } i<k : t_k \text{ y } \rho_k \text{ afectan} \bullet \\ \quad \text{a } T_i \text{ solamente} \\ \quad \text{por } T_{i+1} \;. \end{array} \begin{cases} \dfrac{\partial T_i}{\partial t_k} = \left(\dfrac{\partial T_i}{\partial T_{i+1}}\right)\left(\dfrac{\partial T_{i+1}}{\partial t_k}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial T_i}{\partial \rho_k} = \left(\dfrac{\partial T_i}{\partial T_{i+1}}\right)\left(\dfrac{\partial T_{i+1}}{\partial \rho_k}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial T_i}{\partial T_{i+1}} = (\text{AI.16}) \end{cases}
\end{cases}
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{AI.17})$$

Por consiguiente , haciendo uso del resumen esquemático (AI.16) , se obtienen las Derivadas de la Transformada de Resistividades con Respecto a los Parámetros del corte Geoeléctrico . Estas derivadas , se convolucionan con un filtro inverso (O'neill , Johansen , etc.) y se obtienen las Derivadas de la Resistividad Aparente del Modelo con Respecto a los Parámetros del Corte Geoeléctrico .Sustituyendo las anteriores en la ecuación (AI.2) se logra obtener finalmente el GRADIENTE DE LA FUNCION DE ERROR , el cual , se emplea como la dirección de optimización .

```
1!                    A P E N D I C E   II

2!--------------------------------------------------------------------------

3!               P R O G R A M A    S T E E P E S T

4!--------------------------------------------------------------------------

5!...  PROGRAMADO POR :   J O S E  L U I S  R A N G E L   N U % E Z

7!--------------------------------------------------------------------------

8!               UNIVERSIDAD   NACIONAL   AUTONOMA
9!                           DE   MEXICO
10!                    FACULTAD   DE   INGENIERIA
11!                             1986

12!--------------------------------------------------------------------------

13!        EL OBJETIVO DE ESTE PROGRAMA ES EL DE REALIZAR LA INVERSION DE
14!...     CURVAS DE RESISTIVIDAD APARENTE EN EL DOMINIO DE LA FUNCION DE
15!....   RESISTIVIDAD APARENTE , UTILIZANDO EL METODO DE OPTIMIZACION -
16!...     GRADIENTE .

17!--------------------------------------------------------------------------


20 MAP (AS) VAR$=132%
21 KILL "STEP.DAT"
```

```
22 OPEN'STEP.DAT' AS FILE #6          &
                   , ORGANIZATION SEQUENTIAL,MAP A5
23   GOSUB 1000          !------> SUBRUTINA 1000 SIRVE PARA LEER EL MODELO.
25   GOSUB 1500          !------> SUBRUTINA 1500 SIRVE PARA LEER ESPECIFICA-
30!                               CIONES , COMO TIPO DE ARREGLO , ETC ...
35   GOSUB 2000.         !------> SUBRUTINA 2000 LEE LAS RESISTIVIDADES APA-
40!                               RENTES OBTENIDAS EN EL CAMPO .
90    LET  C=LOG(10) \ GAMA1=LOG(1.288) \ GAMA2=.2530703914 \ GAMA3=-.0895
91    LET  GAMA4=-.2822783197 \ S=0 \ IT=0
94.         IF TY=1 THEN 110
98          IF TY=2 THEN 115
100         IF TY=3 THEN 120
105 LET       GAMA=GAMA4 \ NCF=60  \ DELT=6 \ IZQ=26 \ ALGO=20+60+14 \ GOTO 140
110 LET       GAMA=GAMA1 \ NCF=20  \ DELT=6 \ IZQ=15 \ ALGO=0 \ GOTO 140
115 LET       GAMA=GAMA2 \ NCF=60  \ DELT=6 \ IZQ=31 \ ALGO=20 \ GOTO 140
120 LET          GAMA=GAMA3 \ NCF=14 \ DELT=4 \ IZQ=7 \ ALGO = 20+60
140  GOSUB 2500.         !------> SUBRUTINA 2500 OBTIENE Y MUESTREA LA TRANS.
141!                              DE RESISTIVIDADES.
160  GOSUB 3000          !------> SUBRUTINA 3000 REALIZA LA CONVOLUCION YA SEA
162!                              CON EL FILTRO DE O'NEILL PARA UN DISPOSITIVO
163!                              SCHLUMBERGER O CON EL FILTRO DE GHOSH DE 4 -
164!                              MUESTRAS POR CICLO SI SE TRATA DE EL DISPO--
165!                              SITIVO WENNER,(WENNER-->GHOSH,SCHLUM-->O'NEILL)
220  GOSUB 4100          !------> SUBRUTINA QUE CALCULA EL ERROR LOGARITMICO.
230  GOSUB 4000 .        !------> SUBRUTINA 4000 CALCULA EL ERROR CUADRATICO -
231!                              RELATIVO .
235!-----------------( CUESTIONAMIENTO DEL CAMINO  )-------------------------
240              IF (IT=FIN OR RAR=TOL) THEN GOTO 400
260      GOSUB 4500   !-> OBTIENE EL GRADIENTE , VALOR DE LA CTE. Y |Grad| .
270              IF IT=0 THEN GOSUB 6000
275      GOSUB 5700   !-> H OPTIMA.
280      GOSUB 5900   !-> NUEVO MODELO Y ERROR .
285         IT=IT+1
300      GOTO  140
400      GOSUB 6000   !-> IMPRIME MODELO FINAL.
475      GOTO 8000
500!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
510!%%%%%%%%%                                                       %%%%%%%%%%%
520!%%%%%%%%%                   S U B R U T I N A S                 %%%%%%%%%%%
530!%%%%%%%%%                                                       %%%%%%%%%%%
540!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1000!+++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE LEE LOS DATOS
1005 PRINT'<ESC>[2J'         !  BORRA LA PANTALLA
1010       INPUT'<ESC>[5;25H DAME EL NUMERO DE CAPAS';N
1020       DIM D(N),RE(N),T(100,N),PTRE(100,N),PTD(100,N),PTCT(20),A2(200)
1025       DIM PRARE(100,N),PRAD(100,N),RRE(20),DD(20),R(100),PED(N),PERE(N)
1030       PRINT'<ESC>[2J'           ! BORRA LA PANTALLA
1035       PRINT'<ESC>[5;25H DAME EL MODELO INICIAL'
1040                FOR I=1 TO N
1045                     PRINT'RHO(';I;')= ';
1050                     INPUT RE(I)
1060                              IF I=N THEN GOTO 1090
1070                     PRINT'ESPESOR(';I;')= ';
1080                     INPUT D(I)
1085                     PRINT \ PRINT
```

```
1090              NEXT I
1095       INPUT'SI TE EQUIVOCASTE TECLEA EL NUM. 1 ,Y SI NO,CUALQUIER OTRO ';F
1100       IF F=1 GOTO 1030
1105 PRINT'<ESC>[2J'    ! BORRA LA PANTALLA
1110 RETURN
1500!++++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINAS QUE LEE ESPECIFICACIONES
1510 PRINT'<ESC>[7;8H MENU DE FILTROS QUE PUEDES UTILIZAR;'
1511 PRINT'<ESC>[10;11H 1. FILTRO SCHLUMBERGER CORTO (O'NEILL , 6 MUESTRAS/CICL
1512 PRINT'<ESC>[11;11H 2. FILTRO SCHLUMBERGER LARGO (SEARA , 6 MUESTRAS/CICLO)
1513 PRINT'<ESC>[12;11H 3. FILTRO WENNER CORTO (KOEFOED , 4 MUESTRAS/CICLO )'
1514 PRINT'<ESC>[13;11H 4. FILTRO WENNER LARGO (SEARA , 6 MUESTRAS/CICLO  )'
1520         INPUT'<ESC>[16;9H FILTRO A UTILIZAR';TY
1525         PRINT'<ESC>[2J'    !     BORRA LA PANTALLA
1530         INPUT'<ESC>[10;15H NUMERO DE MUESTRAS DE RESISTIVIDAD APARENTE ;';A
1540         INPUT'<ESC>[11;15H VALOR DE  LA  ABSCISA  INICIAL ;';X1
1550         INPUT'<ESC>[12;15H TOLERANCIA  DESEADA;';TOL
1555         INPUT'<ESC>[13;15H NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES ;';FIN
1560 PRINT '<ESC>[2J'     !  BORRA LA PANTALLA
1562 PRINT '<ESC>[7;10H SI DEL MODELO GEOELECTRICO QUIERES MANTENER ESTATICA'
1564 PRINT '<ESC>[8;10H ALGUNA CAPA GEOELECTRICA EN ESPECIAL , TECLEA EL --'
1566 PRINT '<ESC>[9;10H NUMERO CORRESPONDIENTE A DICHA CAPA , SI NO TECLEA '
1568 INPUT '<ESC>[10;10H EL NUMERO 0 ( CERO ) .';EST
1570 INPUT '<ESC>[15;8H DAME EL NOMBRE DEL SONDEO ELECTRICO VERTICAL; ';NOM$
1571 PRINT '<ESC>[2J'     !  BORRA LA PANTALLA
1572 RETURN
2000!++++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE LEE LAS RESIS. APARENTES  --
2005!                                  OBTENIDAS EN EL CAMPO
2010 PRINT'<ESC>[2;20H DAR LAS RES. APARENTES DE CAMPO, MUESTREADAS  A ;'
2011 PRINT'<ESC>[4;20H     1/6      ------------     DISP. SCHLUMBERGER ( CORTO )'
2013 PRINT'<ESC>[5;20H     1/6      ------------     DISP. SCHLUMBERGER ( LARGO )'
2015 PRINT'<ESC>[6;20H     1/4      ------------     DISP. WENNER  ( CORTO )'
2017 PRINT'<ESC>[7;20H     1/6      ------------     DISP. WENNER  ( LARGO )'
2020 PRINT'<ESC>[9;20H DEL CICLO LOGARITMICO .
2025 DIM RAC(100)
2030  PRINT \ PRINT
2035       FOR I=1 TO A
2040           PRINT"RHO. APARENTE(";I;")= ";
2045           INPUT RAC(I)
2050       NEXT I
2060       INPUT'<ESC>[20;20H TODO ESTA CORRECTO (SI o NO)';A$
2070             IF A$="SI" THEN 2120
2080                PRINT"                 PUNTO No., VALOR CORRECTO";
2090                INPUT I,Z
2100                RAC(I)=Z
2110             GOTO 2060
2115 PRINT '<ESC>[2J'
2120 RETURN
2500!++++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE OBTIENE LOS KERNELES
2505       FOR I=1 TO A+NCF
2510             LET Y2=LOG(X1)+GAMA-IZQ*C/DELT+((I-1)*C/DELT)
2520             LET HH=EXP(Y2) \  B=RE(N)
2530                 FOR K=1 TO N-1
2540                         LET W=N-K \ U=B(W)/HH
2550                                   IF (5-U)>0 THEN 2570
2560                         LET B=RE(W) \ GOTO 2590
2570                         LET A1=EXP(U) \ A2=(A1-1/A1)/(A1+1/A1)
```

```
2580                          LET B=(B+A2*RE(W))/(1+A2*B/RE(W))
2590                          LET T(I,K+1)=B
2600                 NEXT K
2603       LET T(I,1)=RE(N)
2605       NEXT I
2610 RETURN
3000!++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE CONVOLUCIONA EL KERNELL CON
3001!                                EL FILTRO DE O'NEILL (SCHLUMBERGER) O CON
3002!                                EL FILTRO DE GHOSH (WENNER) .

3005!           ********** FILTRO DE O'NEILL ****************************
3010            DATA .003042,-.001198,.01284,.0235,.08688,.2374,.6194,1.1817
3020            DATA .4248,-3.4507,2.7044,-1.1324,.393,-.1436,.05812
3030            DATA -.02521,.01125,-.004978,.002072,-.000318

3031!           ********** FILTRO DE SEARA (SCHLUM) **********************
3032        DATA .1650492076E-5,-.3910215476E-5,.5353605953E-5,-.7329798611E-5
3033        DATA .1003546887E-4,-.1373988994E-4,.1881173481E-4,-.2575575640E-4
3034        DATA .3526305821E-4,-.4827975992E-4,.6610151779E-4,-.9050132841E-4
3035        DATA .1239095929E-3,-.1696445724E-3,.2322787497E-3,-.3179796571E-3
3036        DATA .4354848996E-3,-.5958293815E-3,.8170556197E-3,-.1114586029E-2
3037        DATA .1538876049E-2,-.2066216296E-2,.2957443842E-2,-.3642414947E-2
3038        DATA .6268969215E-2,-.4535188290E-2,.1889011536E-1,0.137016348E-1
3039        DATA .1018121769000,0.2154751527000,.6502785378000,0.1140035855E+1
3040        DATA .4771710702000,-.3511433842E+1,.2769107951E+1,-.1195379225E+1
3041        DATA .4493762462000,-.1904475739000,.9479012973E-1,-.5254027747E-1
3042        DATA .3087682090E-1,-.1869689751E-1,.1149354556E-1,-.7119169501E-2
3043        DATA .4426495165E-2,-.2757556218E-2,.1719527383E-2,-.1072768209E-2
3044        DATA .6694370508E-3,-.4177992403E-3,.2607671260E-3,-.1627615494E-3
3045        DATA .1015915863E-3,-.6341137453E-4,.3958023299E-4,-.2470531513E-4
3046        DATA .1542065687E-4,-.9625328100E-5,.6007977360E-5,-.2308912101E-5

3050!           ********** FILTRO DE KOEFOED ******************************
3060            DATA .0008,-.0031,.0091,-.0086,.0589,.138,.8415,1.2348
3070            DATA -1.7514,.567,-.1029,.0193,-.0042,.0006

3071!           ********** FILTRO DE SEARA (WENNER) **********************
3072        DATA .7845966772E-6,-.1858894823E-5,.2545071084E-5,-.3484538851E-5
3073        DATA .4770793724E-5,-.6531847483E-5,.8942963705E-5,-.1224410067E-4
3074        DATA .1676379475E-4,-.2295185194E-4,.3141412976E-4,-.4302377514E-4
3075        DATA .5890530581E-4,-.8064897098E-4,.1104197285E-3,-.1511773061E-3
3076        DATA .2069878355E-3,-.2833745220E-3,.3880380948E-3,-.5310832002E-3
3077        DATA .7277317342E-3,-.9944379165E-3,.1367602146E-2,-.1853201043E-2
3078        DATA .2598109943E-2,-.3365049187E-2,.5214561453E-2,-.5225499257E-2
3079        DATA .1318165019E-1,0.7698865340E-3,.5707861738E-1,0.9573025455E-1
3080        DATA .3585423247000,0.6939878661000,.1050409640E+1,-.6998921696000
3081        DATA -.138635090E+1,0.1076468236E+1,-.291604233800,.2703322720E-1
3082        DATA .1518417043E-1,-.1496658436E-1,.1034856105E-1,-.6674895177E-2
3083        DATA .4219473729E-2,-.2648195811E-2,.1657159180E-2,-.1035636399E-2
3084        DATA .6468165931E-3,-.4038537168E-3,.2521170680E-3,-.1573794640E-3
3085        DATA .9823757532E-4,-.6131956019E-4,.3827509771E-4,-.2389084524E-4
3086        DATA .1491233635E-4,-.9308063851E-5,.5809954807E-5,-.2232769223E-5

3090    FOR I=1 TO A \ M=I-1
3091          IF TY=1 GOTO 3110
3100          FOR K=1 TO ALGO \ READ FI \ NEXT K
```

```
3110         FOR J=NCF TO 1 STEP -1
3120                      READ FI
3130                      LET V=FI*T(J+M,N) \ S=S+V
3140        NEXT J
3150        LET R(M)=S \ S=0
3160        RESTORE
3170     NEXT I
3180  RETURN
4000!+++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE OBTIENE EL ERROR CUADRATICO
4005!                                RELATIVO LINEAL
4010       LET RAR=0
4020         FOR I=1 TO A
4030         LET M=I-1 \ AER=(RAC(I)-R(M))/RAC(I) \ EAR=AER*AER \ RAR=(RAR+EAR)
4050         NEXT I
4052       RAR=((RAR/A)**0.5)*100
4056       PRINT'<ESC>[12;15H ERROR CUADRATICO RELATIVO= ';RAR;'       ITER= ';I
4060 RETURN
4100!++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE ENCUENTRA EL ERROR LOGARITMIC
4105       LET ROR=0
4110        FOR I=1 TO A
4115         LET M=I-1 \ AER=LOG(RAC(I)/R(M)) \ EAR=AER*AER \ ROR=(ROR+EAR)
4125        NEXT I
4130 RETURN
4500!++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE ENCUENTRA EL GRADIENTE.
4510 FOR I=1 TO A+NCF
4530    GOSUB 5000            !------> SUBRUTINA 5000 CALCULA LAS DERIVADAS PARCI-
4540!                                  ALES ENTRE LOS KERNELES (PTCT).
4550    GOSUB 5200            !------> SUBRUTINA 5200 OBTIENE LAS DERIVADAS PARCI-
4560!                                  ALES CON RESPECTO A LOS PARAMETROS (PTRE,--
4565!                                  - PTD ) .
4570 NEXT I
4577    GOSUB 5500            !------> SUBRUTINA QUE OBTIENE LAS DERIVADAS DE LA -
4580!                                  RESIS. APARENTE CON RESPECTO A LOS PARAME--
4585!                                  TRUS MEDIANTE EL PROCEDIMIENTO DE CONVOLU--
4586!                                  CION .
4590    GOSUB 5600            !------> SUBRUTINA QUE OBTIENE LAS DERIVADAS DEL ---
4591!                                  ERROR,EL GRADIENTE Y LA CTTE.
4600 RETURN
5000!+++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE OBTIENE LA DERIVADA DEL ----
5005!                               KERNEL i CON RESPECTO AL KERNEL i+1 .
5010       LET T(I,1)=RE(N) \ P=1 \ PTCT(1)=1
5015       LET Y2=LOG(X1)+GAMA-IZO*C/DELT+((I-1)*C/DELT) \ HH=EXP(Y2)
5020          FOR K=1 TO N-1
5030                LET W=N-K \ U=D(W)/HH
5040                     IF (S-U)>0 GOTO 5060
5050                LET A2(K)=1 \ GOTO 5070
5060                LET A1=EXP(U) \ A2(K)=(A1-1/A1)/(A1+1/A1)        ! A2(K)=TANH
5070          NEXT K
5080          FOR K=1 TO N-1
5090                LET W=N-K \ LET X=1+(T(I,W)*A2(W))/RE(K)
5110                LET TCT=(1-(A2(W)*A2(W)))/(X*X) \ P=TCT*P \ LET PTCT(K+1)=P
5130          NEXT K
5140 RETURN
5200!+++++++++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE OBTIENE LAS DERIVADAS CON RE
5205!                               PECTO A LOS PARAMETROS DEL CORTE .
```

```
5210        FOR J=1 TO N
5220                IF J=N GOTO 5280
5225                IF J=EST GOTO 5290
5230                LET W=N-J \ Y=T(I,W) \ Q=(Y*Y)/(RE(J)*RE(J))
5240                LET L=Y*A2(W) \ M=1+L/RE(J) \ C1=(1-A2(W)*A2(W))
5250                LET PTRE(I,J)=PTCT(J)*A2(W)*((1+Q+(2*L)/RE(J))/(M*M))
5260                LET PTD(I,J)=PTCT(J)*RE(J)*(1-Q)*C1/(M*M*HH)
5270             GOTO 5290
5280                LET PTRE(I,J)=PTCT(J) \ PTD(I,J)=0.0
5290        NEXT J
5300 RETURN
5500!++++++++++++++++++++++> SUBRUTINA QUE CONVOLUCIONA LAS DERIVADAS DE LOS --
5501!                         KERNELES (CON RESPECTO A LOS PARAMETROS) CON ALGU-
5502!                         NO DE LOS FILTROS SEGUN EL ARREGLO .
5505   FOR J=1 TO N
5510       S=0 \ SW=0
5515       FOR I=1 TO A \ M=I-1
5520                IF TY=1 GO TO 5530
5525                FOR K=1 TO ALGO \ READ FI \ NEXT K
5530                FOR F=NCF TO 1 STEP -1
5535                        READ FI
5540                        V=FI*PTRE(F+M,J) \ S=S+V
5545                        W=FI*PTD(F+M,J)  \ SW=SW+W
5550                NEXT F
5560                PRARE(M,J)=S \ PRAD(M,J)=SW
5565                RESTORE
5566                S=0 \ SW=0
5570       NEXT I
5580   NEXT J
5590 RETURN
5600!--------------------->   SUBRUTINA QUE OBTIENE LA DERIVADA DEL ERROR CON
5601!                         CON RESPECTO A LOS PARAMETROS
5602!                         (@E2/@Pk=2*SUM { Ln[@ca/@mo)]*(Pk/@mo)*@@mo/@P  ))
5603 MAT PED=ZER \ MAT PERE=ZER
5605   FOR I=1 TO A
5610           CC=2*LOG(RAC(I)/R(I-1))/R(I-1) \ XX=0
5620           FOR J=1 TO N
5630                IF J=N GOTO 5650
5635                IF J=EST GOTO 5660
5640                PED(J)=CC*D(J)*PRAD(I-1,J)+PED(J)          !    @E2/@d
5650                PERE(J)=CC*RE(J)*PRARE(I-1,J)+PERE(J)      !    @E2/@@a
5651                XX=XX+(PED(J)*PED(J)+PERE(J)*PERE(J))      !    ! Grad E !
5660           NEXT J
5670   NEXT I
5671   XX=1/(XX**.5)
5672   MAT PED=(XX)*PED \ MAT PERE=(XX)*PERE
5680 RETURN
5700!---------- SUBRUTINA QUE ENCUENTRA LA H-OPTIMA .
5702 NN=N \ H=1 \ II=0 \ F=KOR
5703  IF RAR<=4 THEN H=.2
5704! INICIAL BRACKETING DEL MINIMO
5706 H1=0.0 \ F1=F \ HD=.01
5708   MAT RRE=RE
5710   MAT DD=D
5715  GOSUB 5800
```

```
5731 IF II=2 THEN  GOTO 5737
5732 IF II>2 THEN  GOTO 5736
5733  IF F>F1 THEN GOTO 5735
5734  H2=H \ F2=F \ H=H+H \ GOTO 5715
5735  H2=0 \ F2=F1 \ H1=H \ F1=F \ H=-H \ GOTO 5715
5736  H1=H2 \ F1=F2 \ H2=H3 \ F2=F3
5737  H3=H \ F3=F
5738    IF F>=F2 THEN GOTO 5742
5739  H=H+H
5740    IF ABS(H)>=200 THEN GOTO 5778
5741 GOTO 5715
5742    IF H>=0 THEN GOTO 5744
5743  H3=H1 \ F3=F1 \ H1=H \ F1=F
5744! APROXIMACION AL MINIMO MEDIANTE INTERPOLACION CUADRATICA
5745  S1=H1*(F3-F2)
5746  S2=H2*(F1-F3)
5747  S3=H3*(F2-F1)
5748    H=(H1*S1+H2*S2+H3*S3)/(S1+S2+S3)/2
5750   GOSUB 5800
5759! CALCULO DEL NUEVO BRACKET
5760   IF H<H2 THEN GOTO 5765
5761   IF H=H2 THEN GOTO 5778
5762   IF F<F2 THEN GOTO 5764
5763   H3=H \ F3=F \ GOTO 5770
5764   H1=H2 \ F1=F2 \ H2=H \ F2=F \ GOTO 5770
5765  IF F<F2 THEN GOTO 5767
5766   H1=H \ F1=F \ GOTO 5770
5767   H3=H2 \ F3=F2 \ H2=H \ F2=F
5770   LET B=H2-H1-HD
5772   LET CC=H3-H2-HD
5774     IF B<=0 THEN GOTO 5778
5776     IF CC>0 THEN GOTO 5745
5778   H=H2 \ ROR=F2
5780  MAT RE=RRE
5786  MAT D=DD
5794 RETURN
5800!------------------->  OBTIENE NUEVO MODELO , LA CURVA Y ENCUENTRA EL ERROR.
5805   FOR K=1 TO NN
5810        RE(K)=RRE(K)*EXP(H*PERE(K))
5815            IF K=NN THEN GOTO 5830
5820        D(K)=DD(K)*EXP(H*PED(K))
5830   NEXT K
5840   GOSUB 2500
5850   GOSUB 3000
5860   GOSUB 4000
5865   GOSUB 4100
5870    F=ROR \ II=II+1
5880 RETURN
5900!----------------------->   SUBRUTINA QUE OBTIENE EL INCREMENTO DEL MODELO -
5920!                            Y OBTIENE EL NUEVO MODELO.
5930  FOR K=1 TO N
5940      RE(K)=RE(K)*EXP(H*PERE(K))
5950                  IF K=N THEN GOTO 5970
5960      D(K)=D(K)*EXP(H*PED(K))
5970   NEXT K
5980 RETURN
```

```
6000!*******SUBRUTINA DE IMPRESION DE RESULTADOS*********
6001 PRINT'<ESC>[2J'
6005 FOR I=1 TO 3 \ PRINT #6 \ NEXT I
6006 PRINT #6;TAB(5);'TITULO --> ';NOM$
6007 FOR I=1 TO 3 \ PRINT #6 \ NEXT I
6008 IF IT=0 THEN
                B$='MODELO INICIAL'
                GOTO 6010
     END IF
6009  B$='ULTIMO MODELO '
6010 PRINT #6;TAB(15);B$ \ PRINT#6 \ PRINT #6
6011 PRINT #6;TAB(2);'CAPA';TAB(10);'ESPESOR';TAB(25);'RESISTIVIDAD';TAB(50);'I
6012  FOR I=1 TO N
6013      IF I=N THEN D(I)=999999999999999
6014      PRINT #6;TAB(3);I;TAB(10);D(I);TAB(25);RE(I)
6019  NEXT I
6020 IF (TY=1 OR TY=2) THEN A$='SCHLUMBERGER'
6030 IF (TY=3 OR TY=4) THEN A$='WENNER'
6040 FOR I=1 TO 4 \ PRINT #6 \ NEXT I
6050  PRINT #6;TAB(5);'CURVA DE RESISTIVIDADES TIPO ';A$
6060 PRINT #6 \ PRINT #6
6070  PRINT #6;TAB(6);'DISTANCIA';TAB(22);'RESIS. DE CAMPO';      &
             ;TAB(41);'RESIS. APARENTE';TAB(60);'ERROR REL. (%)'
6075  PRINT #6;TAB(6);'ELECTRODICA'
6080      FOR I=1 TO A
6090          LET M=I-1 \ X=LOG(X1)+(M*C)/DELT \ L=EXP(X)
6095          ERE=((RAC(I)-R(M))/RAC(I))*100
6100          PRINT #6;TAB(7);L;TAB(24);RAC(I);TAB(42);R(M);TAB(61);ERE
6110      NEXT I
6441 PRINT #6 \ PRINT #6 \ PRINT #6
6450 PRINT #6 ;TAB(0);'ERROR CUADRATICO REL.';TAB(50);'MODULO DEL GRADIENTE'
6455 PRINT #6
6460 PRINT #6;TAB(5);RAR;TAB(56);XX
6470 FOR I=1 TO 15 \ PRINT #6 \ NEXT I
6480 RETURN
8000 CLOSE #6
8010 PRINT '<ESC>[9;25H LOS RESULTADOS SE ENCUENTRAN EN EL ARCHIVO #'
8011 PRINT '<ESC>[10;32H STEP.DAT'
8015 END
```

A P E N D I C E   III

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 5 (K)

	MODELO REAL		MODELO INICIAL		MODELOS FINALES: IDOFUKE		INVNOS		STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	10	100	13	70	10.1	100.5	9.9	100.1	10.7	99.61
2.	100	4000	130	5200	101.9	3968.1	116.9	3547.2	116.5	4589.1
3.	INF.	1000	INF.	700	INF.	998.8	INF.	997.39	INF.	953.07
			E (%) = 30.08		E (%) = .308 IT = 6		E (%) = .378 IT = 6		E (%) = 4.1 IT = 6	

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 6 (A)

	MODELO REAL		MODELO INICIAL		MODELOS FINALES: INVNOS		STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	1	10	.8	7	.828	8.62	.744	7.906
2.	7	200	10	180	7.628	188.6	9.08	196.3
3.	INF.	1000	INF.	1100	INF.	999.6	INF.	1017.5
			E (%) = 12.43		E (%) = 1.6 IT = 10		E (%) = 2.6 IT = 10	

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 7 (H)

	MODELO REAL		MODELO INICIAL		IDOFUKE		INVNOS		STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	10	100	13	70	9.98	100.01	9.9	100.05	9.86	100.1
2.	100	5	115	6.5	101.2	5.05	108.1	5.171	117.2	5.348
3.	INF.	20	INF.	26	INF.	20.13	INF.	20.13	INF.	20.36
			E (%) = 30.16		E (%) = .22 IT = 11		E (%) = .942 IT = 2		E (%) = 1.9 IT = 8	

(MODELOS FINALES: IDOFUKE, INVNOS, STEEPEST)

CURVA TIPO ----> EJEMPLO 8 (MEINARDUS)

	MODELO REAL		MODELO INICIAL	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	3	90	2.5	85
2.	80	1200	85	1000
3.	145	400	155	450
4.	90	15	86	20
5.	INF.	10,000	INF.	12,000 ----> E (%) = 20.1

MODELOS FINALES

	DAVIS		INVNOS		JOHANSEN		STEEPEST	
	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.	ESP.	RESIS.
1.	3.0	90.02	3.0	90.02	3.0	90.02	2.6	85.33
2.	78.4	1202.7	78.8	1202.4	78.49	1202.6	83.0	1098.5
3.	143.7	414.5	144.3	409.8	143.8	413.9	146.4	425.7
4.	85.7	14.27	85.9	14.3	85.78	14.27	102.2	16.79
5.	INF.	9925.8	INF.	9943.6	INF.	9927.3	INF.	11872.6
	E (%) = .035 IT = 20		E (%) = .027 IT = 20		E (%) = .0344 IT = 20		E (%) = 2.41 IT = 4	

Llegará una época en la que una investigación diligente y prolongada sacará a la luz cosas que hoy están ocultas. La vida de una sola persona , aunque estuviera toda ella dedicada al cielo , sería insuficiente para investigar una materia tan vasta ... Por lo tanto este conocimiento sólo se podrá desarrollar a lo largo de sucesivas edades. Llegará una época en la que nuestros descendientes se asombrarán de que ignoráramos cosas que para ellos son tan claras ... Muchos son los descubrimientos reservados para las épocas futuras,cuando se haya borrado el recuerde de nosotros. Nuestro universo sería una cosa muy limitada si no ofreciera a cada época algo que investigar ... La Naturaleza no revela sus misterios de una vez para siempre .

SENECA , Cuestiones naturales , libro 7 , siglo primero

BIBLIOGRAFIA.

1. BICHARA, M. y LAKSHMANAN, J., (1976) . Fast automatic processing of resistivity soundings . Geophysical Prospecting, 26:841-852.

2. GHOSH, D.P., (1971a) . The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements . Geophysical Prospecting, 19:192-217 .

3. GHOSH, D.P., (1971b) . Inverse filter coefficients for the computation of apparent resistivity standard curves for a horizontally stratified earth . Geophysical Prospecting, 19:769-775 .

4. GOMEZ, S.,(1985) . NL2SOL Una subrutina altamente robusta para resolver problemas de minimos cuadrados no-lineales . IIMAS , UNAM .

5. GONZALEZ V., P., (1983) . Interpretación automática de sondeos eléctricos : Tesis de Licenciatura . Facultad de Ingeniería de la - UNAM .

6. JOHANSEN, H.K., (1975) . An interactive computer/graphic-display-terminal system for interpretation of resistivity soundings . Geophysical Prospecting, 23:449-458 .

7. KARP, L., (1977) .Optimización de funciones no-lineales . Centro de - Estudios Interdisciplinarios . E.N.E.P. Acatlán ; UNAM .

8. KELLER, G.V., (1966) . Electrical Methods in Geophysical Prospecting. Ed. Perganon Press, Oxford .

9. KOEFOED , O., (1979) . Geosounding Principles 1 . Ed.Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam .

10. LIAJOV L.L. y YAKUBOUSKII YU. V. . Exploración Eléctrica . Ed Reverté .

11. LIMA L., E.M. (1979) . A new method for the calculation of apparent resistivity curves of horizontally multilayered models . Memoirs of the Fac. of Eng., Kyushu University Vol.39,No.3 .

12. MITAL, K.V. . Métodos de optimización . Ed. Limusa .

13. O'NEILL, D.J.,(1975). Improved linear filter coefficients for application in apparent resistivity computations . Bulletin of -- Australian Society of Exploration Geophycists , 6:104-109.

14. ORELLANA, E., (1982). Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua (2a. Edición), Ed. Paraninfo, Madrid .

15. RAO, S.S. . Optimization theory and application . Ed. A Halsted - Press Book .

16. TEJERO A., A. , ROBOAM L.,S. y GONZALEZ V.,P. . Interpretación iterativa de sondeos eléctricos . F.I. , UNAM (1985) .

17. TELFORD , W. (1978). Applied Geophysics. Ed. Cambridge University , Press , Londres .

18. VAN NOSTRAND , R. (1966) . Interpretation of resistivity data. Ed. U.S.G.S. Prof. Paper No. 499 , Washington .

19. VOZOFF, K. (1958) . Numerical resistivity analysis : horizontal beds. Geophysics, 23:536-556 .