

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA



**DIFRACCION DE ONDAS SISMICAS POR IRREGULARIDADES
TRIDIMENSIONALES**

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

INGENIERO GEOFISICO

P r e s e n t a

SERGIO CHAVEZ PEREZ



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Página
ABSTRACT	1
RESUMEN	3
1. INTRODUCCION	5
2. ONDAS SISMICAS	10
3. FORMULACION DEL PROBLEMA	13
3.1 <u>Familias T-completas</u>	15
3.2 <u>Campo libre</u>	16
3.3 <u>Campos difractados y refractados</u>	17
3.4 <u>Descomposición azimutal</u>	19
4. SOLUCION NUMERICA	22
5. RESULTADOS	24
5.1 <u>Resultados para una cavidad semiesférica</u>	26
5.2 <u>Resultados para depósitos aluviales</u>	27
5.3 <u>Resultados para un promontorio</u>	28
6. CONCLUSIONES	29
7. RECONOCIMIENTOS	31
8. REFERENCIAS	32
TABLA	38
FIGURAS	39
APENDICE A. EXPRESIONES DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE. ONDAS P, SV Y DE RAYLEIGH	53
APENDICE B. EXPRESIONES DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS EN COORDENADAS ESFERICAS	59
APENDICE C. FACTORES DE LA DESCOMPOSICION AZIMUTAL	63

ABSTRACT

A boundary method is applied to numerically solve the problem of scattering and diffraction of seismic waves by a three-dimensional topographic irregularity on the surface of an elastic, homogeneous and isotropic half-space. The method makes use of the connectivity completeness of a family of wave functions in order to construct the scattered and refracted displacement fields. These functions, which are solutions of the Navier equation, are given in terms of spherical Bessel or Hankel functions. Such solutions have been widely used in seismology to deal with the free oscillations of the earth and surface waves. Coefficients of the linear forms thus constructed are obtained from a least-squares point matching of boundary conditions. The numerical treatment is extended to part of the half-space surface, because each of the solutions does not satisfy in itself the free-boundary conditions. Axisymmetric scatterers are assumed to make allowance for an azimuthal decomposition. Then, it suffices to solve a "two-dimensional" problem for each azimuthal number. Results are presented for several topographies and incidence of P, SV and Rayleigh

waves discussing their significance from the viewpoint of engineering seismology.

RESUMEN

Se aplica un método de frontera para resolver numéricamente el problema de dispersión y difracción de ondas sísmicas por una irregularidad topográfica tridimensional sobre la superficie de un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo. El método hace uso de la completitud en conectividad de una familia de funciones de onda, con el fin de construir los campos de desplazamientos difractados y refractados. Estas funciones, que son soluciones de la ecuación de Navier, se expresan en términos de funciones esféricas de Bessel o de Hankel, asociadas con funciones trigonométricas y de Legendre. Dichas soluciones han sido ampliamente utilizadas en sismología al tratar con las oscilaciones libres de una esfera y ondas superficiales. Los coeficientes de las formas lineales así construídas, se obtienen de un ajuste de mínimos cuadrados de las condiciones de frontera. El tratamiento numérico se extiende a una parte de la superficie del semiespacio, ya que cada una de las soluciones no satisface por sí misma las condiciones de frontera libre. Se suponen difractores con simetría axial para hacer posible una descomposición azimutal. Por lo tanto, basta resolver un problema "bidimensional" para cada número azimutal. Se presentan resultados para varias topografías e incidencias

de ondas P, SV y de Rayleigh, discutiendo su importancia desde el punto de vista de la ingeniería sísmológica.

1. INTRODUCCION

La gran variabilidad de la amplitud de los desplazamientos del terreno registrados en sismogramas, aún en sitios próximos, ha sido objeto de gran interés por parte de los sismólogos. Al parecer, uno de los factores más importantes de dicha variación es la difracción generada en la zona cercana a la superficie del terreno, o bien sobre la misma, debida a irregularidades geológicas y topográficas y a la rugosidad de las interfases en los estratos. Esta última no es un factor muy importante, ya que el grado de rugosidad es generalmente muy pequeño comparado con la longitud de las ondas incidentes (las longitudes de las ondas sísmicas en la Tierra cerca de la superficie y en el rango de frecuencias de 5 a 20 Hz varían entre los 30 y los 300 m.).

El estudio de la difracción de las ondas sísmicas generada por irregularidades geológicas y topográficas es relevante en distintos aspectos del modelado, ya que tales imperfecciones producen una alteración significativa de la amplitud sísmica, la cual, si se habla de estratos, dependerá de la curvatura de las interfases; disminuirá en estratos convexos y se incremen-

tará en estratos cóncavos (Sheriff, 1975). Lo anterior es consecuencia de la divergencia y convergencia, respectivamente, de las ondas sísmicas incidentes (Jackson, 1971).

La difracción es una característica general de los fenómenos ondulatorios que ocurre dondequiera que una porción de un frente de onda es obstruida. Tal es el caso cuando una onda encuentra alguna irregularidad cuyas dimensiones y radios de curvatura son comparables o menores que la longitud de la onda. El fenómeno es de gran relevancia en ingeniería sísmica y sismología, debido a que las longitudes de las ondas sísmicas de interés son comparables con algunas dimensiones geológicas y topográficas.

El problema de calcular la distribución espacial del movimiento en la vecindad de una irregularidad topográfica o geológica, ante incidencia de ondas sísmicas, ha sido tratado como un problema de difracción de ondas elásticas de un tipo determinado. Debido a su complejidad matemática, el problema dista mucho de estar completamente resuelto. Muchos autores han estudiado el problema de irregularidades bidimensionales ante diversos campos de ondas incidentes haciendo uso de diferentes técnicas numéricas (por ejemplo, Gilbert y Knopoff, 1960; Mc Ivor, 1969; Aki y Larner, 1970; Boore, 1972; Bouchon, 1973; Trifunac, 1973; Wong y Trifunac, 1974a, b; Sabina y Willis, 1975; Sills, 1978; Sánchez-Sesma, 1978; Sánchez-Sesma y Rosenblueth, 1979; Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; England et al, 1980; Bard, 1982; Dravinski, 1982 a,b; Wong, 1982; Ohtsuki y Harumi, 1983; Ohtsuki et al, 1984).

Los problemas tridimensionales son más complicados y solo se conocen algunos trabajos. Hudson (1967) presentó una solución para el caso de cavidades o inclusiones de pendientes pequeñas en la superficie de un semiespacio elástico, en la que se utilizan cargas superficiales equivalentes para repre-

sentar los campos difractados. Con ella se obtuvieron estimaciones de las ondas de Rayleigh difractadas que se antojan razonables al compararse con observaciones (Hudson y Boore, 1980). Bajo la hipótesis de medio acústico, Singh y Sabina (1977) obtuvieron una solución analítica para el caso de difracción de ondas P por una cavidad semiesférica. Desafortunadamente, los resultados son de poca utilidad debido a que tal condición es difícil de encontrar en la práctica. Para la misma geometría, Lee (1978, 1982) ha obtenido resultados para incidencia normal y oblicua de ondas P y S pero considerando un medio elástico. Además, ha analizado el caso de un depósito semiesférico (Lee, 1984). Su metodología consiste en expandir las funciones de onda esféricas en series de potencias, para satisfacer así las condiciones de frontera pertinentes. Sin embargo, la solución conduce a una ecuación matricial infinita que, aparentemente, solo puede resolverse en forma aproximada para bajas frecuencias. Para el caso de irregularidades topográficas axisimétricas, ante incidencia normal de ondas S, se ha presentado un análisis de diferencias finitas con el que se han obtenido acuerdos razonables con observaciones (Liao et al, 1980).

Recientemente, se ha desarrollado y aplicado un método de frontera en la solución de difracción bidimensional de ondas elásticas por diversas geometrías (Sánchez-Sesma, 1978, 1981; Sánchez-Sesma y Rosenblueth, 1979; Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; Wong, 1979, 1982; England et al, 1980; Dravinski, 1982a, 1982b; Sánchez-sesma et al, 1982, 1984b). El método consiste en construir los campos difractados con combinaciones lineales de miembros de una familia T - completa (T en honor a Trefftz) de funciones de onda que son soluciones de las ecuaciones que gobiernan el problema. Tales familias de funciones pueden construirse de manera muy general empleando ondas planas o fuentes sencillas o multipolares cuyas singularidades yaczan fuera de la región de interés. Esta manera de proceder se inspira en

las ideas de Trefftz (Sokolnikoff, 1956). Recientemente, esta técnica se ha formalizado en una teoría algebraica de problemas de valores en la frontera (Herrera, 1984). Por otra parte, debe mencionarse que, en los casos de incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh, cada una de las soluciones mencionadas no satisface por sí misma las condiciones de frontera libre en la superficie del semiespacio elástico considerado, por lo que el tratamiento numérico debe extenderse a parte de la misma. Lo anterior ha dado resultados satisfactorios en un problema bidimensional de incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh (Sánchez-Sesma et al, 1984b).

Esta técnica se ha extendido al análisis de problemas tridimensionales (Sánchez-Sesma, 1983; Sánchez-Sesma et al, 1984a; Chávez-Pérez y Sánchez-Sesma, 1984), en los casos de ondas P, SV y de Rayleigh incidentes ante irregularidades axisimétricas en la superficie de un semiespacio elástico; se ha formulado haciendo uso de una descomposición azimutal. Los campos difractados se construyeron con soluciones multipolares de la ecuación reducida de Navier en coordenadas esféricas (Takeuchi y Saito, 1972; Aki y Richards, 1980). Los coeficientes de las formas lineales así construidas, se obtienen al minimizar el error cuadrático en las condiciones de frontera. El tratamiento numérico incluyó la frontera libre. Sin embargo, solo una pequeña parte de la misma debe considerarse para obtener resultados satisfactorios para el rango de frecuencias que se considera (Sánchez-Sesma et al, 1984b).

El propósito del presente trabajo es evaluar los desplazamientos superficiales producidos por una onda plana incidente ante un rasgo topográfico tridimensional en la superficie de un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo. Para ello, se extenderán los casos ya resultados de incidencia normal de ondas P y SV (Sánchez-Sesma, 1983; Sánchez-Sesma et al, 1984a) apli-

cándolos al análisis de incidencias oblicuas del mismo tipo de ondas, e incidencia de ondas de Rayleigh (problemas de deformaciones planas) ante diversas topografías y propiedades del semiespacio considerado (Chávez-Pérez, S. y F.J. Sánchez-Sesma, 1984).

Se presenta brevemente el método de solución, el cuál, al suponer simetría axial de la irregularidad, permite que la solución general se obtenga a partir de una secuencia de problemas bidimensionales. Posteriormente, se presentan algunos resultados numéricos, discutiendo sus implicaciones, y se sugieren posibles aplicaciones y extensiones de la técnica numérica utilizada.

2. ONDAS SISMICAS

Es usual considerar, en distintos estudios en sismología, que la Tierra es un semiespacio elástico, lineal, homogéneo e isotropo. En un medio continuo de este tipo, pueden propagarse ondas de cuerpo P y S y ondas superficiales de Rayleigh; un movimiento sísmico se podrá modelar razonablemente mediante trenes de ondas elásticas, bajo la hipótesis de que los esfuerzos aplicados al medio por la acción sísmica permiten utilizar la teoría de la elasticidad lineal.

Suponiendo que las ondas son periódicas con dependencia del tiempo dada por $e^{i\omega t}$, donde ω = frecuencia angular, $i = \sqrt{-1}$ y t = tiempo, el movimiento de las partículas del medio, en coordenadas de espacio y tiempo, estará gobernado por la ecuación reducida de Navier (Fung, 1965), cuya forma vectorial (sin considerar fuerzas de cuerpo) está dada por

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u} = 0 \quad (2.1)$$

donde \bar{u} = vector de desplazamientos, λ y μ = constantes de Lamé, ρ = densidad de masa y ∇ = operador gradiente.

Es posible demostrar, utilizando el teorema de Lamé (Aki y Richards, 1980), que la ecuación anterior se satisface si el vector de desplazamientos se expresa en términos de potenciales de Helmholtz mediante

$$\bar{u} = \nabla\phi + \nabla\times\bar{\Psi}, \text{ con } \nabla\cdot\bar{\Psi} = 0 \quad (2.2)$$

donde ϕ (potencial escalar) y $\bar{\Psi}$ (potencial vectorial) son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones de Helmholtz (ecuaciones reducidas de onda)

$$\nabla^2\phi + q^2\phi = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla^2\bar{\Psi} + k^2\bar{\Psi} = 0 \quad (2.4)$$

donde $q = \omega/\alpha$, $k = \omega/\beta$, $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas P y $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas S. Las ondas P o primarias son ondas de compresión u ondas longitudinales, mientras que las ondas S o secundarias son ondas de cortante, las cuales usualmente se descomponen mediante el uso de planos de polarización, de tal manera que hay ondas SH (polarizadas en un plano horizontal) y ondas SV (polarizadas en un plano vertical).

La ventaja de utilizar los potenciales de desplazamientos ϕ y $\bar{\Psi}$ se hace evidente cuando es necesario seleccionar una combinación particular de ondas planas que satisfaga ciertas condiciones de frontera. Tal es el caso en el presente trabajo.

En ausencia de imperfecciones, la existencia de una superficie libre (como la superficie del terreno) introduce reflexiones de las ondas que inciden en ella. Con el fin de estudiar la naturaleza de las mismas, dicha superficie debe considerarse libre de esfuerzos. Además, ya que a grandes distancias

de la fuente es válido suponer frentes de onda planos y, para las longitudes de onda que nos interesan, la curvatura de la Tierra puede ser despreciada; es conveniente estudiar el problema de reflexión de ondas planas por la superficie de un medio elástico infinito. Se supondrá que la superficie es plana.

Sea $\bar{u}^{(ff)}$ la solución de campo libre, es decir los desplazamientos producidos por las ondas incidentes y reflejadas ante una superficie libre y sin imperfecciones. Las expresiones para los desplazamientos y esfuerzos de dicha solución se presentan en el apéndice A para los casos de ondas P, SV y de Rayleigh; el análisis es similar al presentado por White (1965).

3. FORMULACION DEL PROBLEMA

Sea una irregularidad topográfica tridimensional en la superficie de un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo, tal como se muestra en la fig 1; la irregularidad y el semiespacio están definidos por las regiones R y E, respectivamente, siendo $\partial_1 E$ y $\partial_1 R$ las fronteras libres de las mismas y $\partial_2 E = \partial_2 R$ su frontera común.

Es necesario resolver un problema de valores en la frontera para las ecuaciones de elasticidad lineal. Es decir, el vector de desplazamientos \bar{u} satisfará la ecuación reducida de Navier (ec 2.1).

Ante incidencia de ondas elásticas, la irregularidad producirá campos refractados y difractados. Estos últimos, deben superponerse con la solución de campo libre, dada por los campos en ausencia de la irregularidad. Esto es, escribiendo los campos totales como

$$\bar{u}^E = \bar{u}^{(ff)} + \bar{u}^{(s)} \quad (3.1)$$

para la región E, y

$$\bar{u}^R = \bar{u}(r) \quad (3.2)$$

para la región R, donde $\bar{u}^{(ff)}$ = vector de desplazamientos del campo libre, $\bar{u}^{(s)}$ = vector de desplazamientos del campo difractado y $\bar{u}^{(r)}$ = vector de desplazamientos del campo refractado. El campo difractado debe satisfacer la condición de irradiación elástica al infinito (Sommerfeld, 1949; Kupradze, 1965), ya que la energía irradiada por las fuentes debe dispersarse al infinito sin que pueda irradiarse energía desde el infinito hasta las singularidades del campo de desplazamientos.

Además, los campos totales deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$\bar{\tau}(\bar{u}^E) = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 E \quad (3.3)$$

$$\bar{\tau}(\bar{u}^R) = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 R \quad (3.4)$$

$$\bar{\tau}(\bar{u}^E) = \bar{\tau}(\bar{u}^R) \quad \text{en} \quad \partial_2 E = \partial_2 R \quad (3.5)$$

para tracciones (condiciones dinámicas), y

$$\bar{u}^E = \bar{u}^R \quad \text{en} \quad \partial_2 E = \partial_2 R \quad (3.6)$$

para desplazamientos (condición cinemática), donde $\bar{\tau}$ representa el vector de tracción asociado con el vector normal de la frontera y el estado de esfuerzos del desplazamiento \bar{u} . El vector normal se considera dirigido hacia la región R. Las ecs 3.3 y 3.4 representan las condiciones de superficie libre, mientras que 3.5 y 3.6 son las condiciones de continuidad de tracciones y desplazamientos, respectivamente.

Conocidos los vectores $\bar{u}(s)$ y $\bar{u}(r)$, los campos de desplazamientos totales se calculan como se indica en las ecs 3.1 y 3.2. A continuación se construirán representaciones de $\bar{u}(s)$ y $\bar{u}(r)$ en la forma de combinaciones lineales de soluciones de la ec de Navier (ec 2.1). Esta forma de proceder esta inspirada en ideas de Trefftz. Se requiere que dichas soluciones formen parte de familias completas.

3.1 Familias T-completas

Sean $B^E = \{\bar{w}_1^E, \bar{w}_2^E, \dots\}$ y $B^R = \{\bar{w}_1^R, \bar{w}_2^R, \dots\}$ familias T-completas (T en honor a Trefftz) de soluciones de la ecuación 2.1 para las regiones externa (E) e interna (R), respectivamente (Herrera y Sabina, 1978; Herrera, 1984). Además, los miembros de B^E satisfacen la condición de irradiación elástica.

El uso del concepto de T-completitud permite construir sistemas de soluciones que son completos con respecto a los valores de la frontera, independientemente de la región específica que se considere (Herrera, 1980; 1984).

Por lo tanto, es posible aproximar los campos de desplazamientos a través de combinaciones lineales de miembros de las familias B^E , para los campos difractados, y B^R , para los campos refractados. Así, a partir de las ecuaciones 3.1 y 3.2, los campos totales pueden expresarse como

$$\bar{u}^E = \bar{u}(ff) + \sum_{j=1}^3 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n A_{jnm}^N \bar{w}_{jnm}^E \quad (3.7)$$

$$\bar{u}^R = \sum_{j=1}^3 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n B_{jnm}^N \bar{w}_{jnm}^R \quad (3.8)$$

donde A_{jnm}^N y B_{jnm}^N son coeficientes indeterminados, N es el orden de las expansiones y \bar{w}_{jnm} son elementos del conjunto completo de soluciones de la ec 2.1 en cada región. En la sec-

ción 3.3 se darán expresiones explícitas de estas soluciones.

La ventaja de utilizar familias T-completas (Herrera, 1984) consiste en que puede garantizarse convergencia uniforme de la solución al satisfacer, en el sentido de mínimos cuadrados, las condiciones de frontera. Por otra parte, la propiedad de T-completitud es independiente de la forma particular de la región considerada. Estos conceptos han sido ya discutidos e ilustrados con detalle en conexión con problemas bi-dimensionales de ondas SH (Sánchez-Sesma et al, 1982).

3.2 Campo libre

Considérese incidencia de ondas planas en las que el vector normal al frente de onda es paralelo al plano xz ; el semiespacio ocupa la región $z > 0$ y la superficie libre yace en el plano $z = 0$. Considérese, además, un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) con vectores unitarios $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi$ como se muestra en la fig 2. Por otra parte, puede demostrarse que la solución de campo libre, para ondas incidentes P, S y de Rayleigh con variación armónica en el tiempo, se puede escribir en coordenadas cartesianas mediante expresiones de la forma

$$f(z) \exp [i\omega(t - x/c)] \quad (3.9)$$

tanto para esfuerzos como para desplazamientos. Donde $f(z)$ se define de acuerdo con el tipo de onda incidente y c es la velocidad de fase aparente de la onda en la dirección de x .

Al desarrollar el factor de propagación, empleando coordenadas esféricas, en funciones cilíndricas (p. ej. Abramowitz y Stegun, 1972) se obtiene la identidad

$$\exp(-ilx) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m J_m(lr \sin \theta) \cos m\phi \quad (3.10)$$

donde ϵ_m = factor de Neumann (= 1 si $m = 0$; = 2 si $m > 0$),
 $J_m(\cdot)$ = función de Bessel cilíndrica de primera especie y orden m y $l = \omega/c$ = número de onda horizontal. La expresión anterior muestra que el factor de propagación es una función par con respecto al ángulo azimutal ϕ .

Por otra parte, al hacer una transformación de coordenadas a las componentes del campo libre refiriéndolas al sistema esférico, se observa que para movimiento plano (ondas P, SV y de Rayleigh) las componentes de desplazamiento u_r y u_θ son pares y u_ϕ impar con respecto al ángulo ϕ . Los esfuerzos σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\phi\phi}$, y $\sigma_{r\theta}$ son también pares y $\sigma_{r\phi}$ y $\sigma_{\theta\phi}$ son impares, con respecto a ϕ . La situación opuesta se observa en el caso de ondas incidentes antiplanas (ondas SH). Tales propiedades de los campos incidentes permiten el uso de una descomposición en términos del ángulo azimutal ϕ .

3.3 Campos difractados y refractados

En problemas de propagación de ondas sísmicas, es usual considerar que la energía irradiada por la fuente se transmite en forma de ondas de cuerpo y superficiales. Tales movimientos ondulatorios pueden verse, dentro de un contexto más general, como parte de los modos oscilatorios o vibratorios de una esfera. En 1882, Lamb clasificó los tipos generales de vibraciones de una esfera uniforme como de "primera clase" o toroidales y "segunda clase" o esferoidales.

Con el fin de construir los campos difractados y refractados, se hará uso de las soluciones de la ecuación de Navier utilizadas en el análisis de las oscilaciones libres de una esfera y ondas superficiales en la Tierra (Takeuchi y Saito, 1972;

Aki y Richards, 1980).

Las soluciones vectoriales características de la ecuación reducida de Navier, omitiendo el factor $e^{i\omega t}$ de aquí en adelante, están dadas por

$$\bar{w}^T = y_1^T(r) \bar{T}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.11)$$

$$\bar{w}^P = y_1^P(r) \bar{R}_n^m(\theta, \phi) + y_3^P(r) \bar{S}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.12)$$

$$\bar{w}^S = y_1^S(r) \bar{R}_n^m(\theta, \phi) + y_3^S(r) \bar{S}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.13)$$

donde

$$\bar{R}_n^m(\theta, \phi) = Y_n^m(\theta, \phi) \bar{e}_r \quad (3.14)$$

$$\bar{S}_n^m(\theta, \phi) = \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \quad (3.15)$$

$$\bar{T}_n^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \bar{e}_\theta - \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \bar{e}_\phi \quad (3.16)$$

son los armónicos esféricos vectoriales y

$$Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos}{\sin}(m\phi). \quad (3.17)$$

En la expresión anterior, $P_n^m(\cdot)$ = función asociada de Legendre de primera especie de grado n (número radial) y orden m (número azimutal) con $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Las funciones radiales están definidas por

$$y_1^T(r) = \frac{1}{r} [kr \mathcal{E}_n(kr)] \quad (3.18)$$

$$y_1^P(r) = \frac{1}{r} [n \mathcal{E}_n(qr) - qr \mathcal{E}_{n+1}(qr)] \quad (3.19)$$

$$y_3^P(r) = \frac{1}{r} \mathcal{E}_n(qr) \quad (3.20)$$

$$y_1^S(r) = \frac{1}{r} [-n(n+1)\mathcal{E}_n(kr)] \quad (3.21)$$

$$y_3^S(r) = \frac{1}{r} [-(n+1)\mathcal{E}_n(kr) + kr\mathcal{E}_{n+1}(kr)] \quad (3.22)$$

donde

$$\mathcal{E}_n(.) = \begin{cases} j_n(.), & \text{función de Bessel esférica de primera especie y orden } n \text{ (para la región limitada } R); \\ h_n^{(2)}(.), & \text{función de Hankel esférica de segunda especie y orden } n \text{ (para la región ilimitada } E), \end{cases}$$

$k = \omega/\beta =$ número de onda S, $q = \omega/\alpha =$ número de onda P. Se adoptó aquí la notación utilizada por Takeuchi y Saito (1972), agregando únicamente los superíndices T, P y S para denotar oscilaciones toroidales de ondas SH y esferoidales de ondas P y SV, respectivamente.

En el apéndice B, se muestran las expresiones de las componentes de desplazamientos y esfuerzos en coordenadas esféricas, asociadas a los armónicos vectoriales definidos por las ecs 3.14-3.16.

Se supondrá que las soluciones mostradas forman familias T-completas en conectividad, en el sentido introducido por Herrera (1980, 1984).

3.4 Descomposición azimutal

Cuando la forma de la irregularidad es axialmente simétrica con respecto al eje z, su independencia con respecto al ángu-

lo azimutal ϕ y la ortogonalidad de las funciones azimutales asociadas, permite una descomposición del problema en términos del número azimutal m . Es decir, que las propiedades de paridad e imparidad de la solución de campo libre también se observan en los campos difractados y refractados mediante la elección de alguno de los factores azimutales de la ec 3.17.

Como ejemplo, considérese una condición de frontera par, cuya ecuación es de la forma

$$\sum_m \sum_n A_{mn} G_{mn}(r, \theta) \cos m\phi = f(z) \exp(-ilx) \quad (3.23)$$

donde A_{mn} son las incógnitas, G_{mn} representa a los campos difractados y refractados y $f(z)$ es una función, también par, de la solución de campo libre. De acuerdo con la expresión anterior y la ec 3.10, se obtiene una ecuación de la forma (ver apéndice C)

$$\sum_n A_{mn} G_{mn} = \sum_{j=0}^2 \{f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)}\} \quad (3.24)$$

para cada m , donde $m = 0, 1, 2, \dots$ y $f_{m \pm j}^{(j)}$ son términos conocidos y funciones solo de las coordenadas r y θ . Todas las condiciones de frontera se descomponen en forma análoga, lo cual conduce a resolver un problema bidimensional para cada número azimutal, superponiendo cada una de las soluciones obtenidas.

Cuando la excitación incidente es vertical, esto es, ondas planas sin dependencia de x , solo se requiere un número azimutal. En este caso la solución para incidencia vertical de ondas P solo requiere de $m = 0$; para incidencia vertical de ondas SV o SH solo se requiere de $m = 1$.

Si los campos incidentes son oblicuos, o de ondas superficia

les de Rayleigh, la solución requiere de varios números azimutales. Sin embargo, cuatro o cinco términos de m pueden dar buenos resultados si las longitudes de onda horizontales del campo incidente son del orden de la máxima dimensión horizontal de la irregularidad.

El grado de aproximación de la descomposición azimutal puede estimarse con un caso particular de la expresión 3.10. Por ejemplo, el presentado en la tabla. Tal estimación permite determinar el número azimutal máximo, hasta el cual deberán superponerse los problemas bidimensionales resueltos.

En el apéndice C se presentan los factores utilizados en la descomposición azimutal de acuerdo con las componentes pares e impares del campo libre.

4. SOLUCION NUMERICA

Sustituyendo las ecs 3.7 y 3.8 en las ecs 3.3-3.6 se obtiene un conjunto de ecuaciones para cada punto de las fronteras. Al imponerse que tales ecuaciones se satisfagan en un número finito de puntos, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes indeterminados, el cuál estará expresado en sus términos independientes por la solución de campo libre. Los coeficientes de las ecuaciones 3.7 y 3.8 se determinarán al hacer que el error cuadrático medio en las condiciones de frontera sea mínimo. Ello se logra utilizando el método de colocación y mínimos cuadrados, imponiendo las condiciones de frontera en la mitad de las fronteras $\partial_2 E$, $\partial_1 R$ y $\partial_1 E$ en L, K y M puntos, respectivamente (fig 3). Se buscará que el número de ecuaciones sea mayor que el de incógnitas (sistema inconsistente), de tal manera que se tenga un sistema de ecuaciones de la forma

$$[A] \{x\} = \{B\} \quad (4.1)$$

con más ecuaciones que incógnitas. Se ha demostrado (Noble y Daniel, 1977) que la solución que minimiza el error cuadrático medio, se obtiene al resolver el sistema

$$[A^*]^T[A]\{x\} = [A^*]^T\{B\} \quad (4.2)$$

donde el asterisco denota compleja conjugada. La matriz de coeficientes resultante en la ecuación anterior es hermitiana y positiva definida.

Debido a que la frontera $\partial_1 E$ es infinita, solo se considerará un número finito de M puntos. Esta forma de proceder fué utilizada en el caso bidimensional de difracción de ondas P , SV y de Rayleigh (Sánchez-Sesma et al, 1984b) encontrando que basta considerar una distancia de dos o tres veces la dimensión horizontal máxima de la irregularidad para obtener excelentes resultados.

5. RESULTADOS

Se presentan resultados numéricos para los casos de incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh en tres tipos de irregularidades topográficas: cavidades, depósitos aluviales y promontorios.

Para ello se define la frecuencia adimensional

$$\eta_k = \frac{\omega k}{\pi} = \frac{2a}{\lambda_s}$$

donde λ_s = longitud de una onda S incidente y a = semiancho de la irregularidad. Tanto las ondas incidentes, como las difractadas son funciones de dicho parámetro, el cual determina la extensión con que se desarrollan los patrones y amplitudes de los desplazamientos superficiales calculados. Para cada difractor, las componentes normalizadas de los desplazamientos verticales y horizontales corresponden a una frecuencia adimensional unitaria, $\eta_k = 1.0$.

Con el fin de determinar el orden de los desarrollos así como el número y la posición de los puntos de colocación en las fronteras, se emplea un procedimiento de prueba y error. Tal

procedimiento se basa en el análisis del error en las condiciones de frontera y de la estabilidad del campo de superficie libre. En todos los cálculos, el orden de los desarrollos fué de 12 y el número de puntos de colocación de 50 distribuidos en forma uniforme en la mitad de $\lambda_2 R$, $\lambda_1 R$ y en una porción de $\lambda_1 E$ con longitud igual a tres veces el semiancho de la irregularidad (fig 3). Se obtuvieron tracciones residuales que no excedieron 4% del máximo esfuerzo en la solución de campo libre. En los casos de incidencias oblicuas de ondas P y SV y de ondas de Rayleigh, se utilizaron 9 términos de m en la descomposición azimutal.

Con objeto de hacer comparaciones y notar las amplificaciones y reducciones de los desplazamientos en la superficie libre del terreno y de la irregularidad, con respecto a los desplazamientos en ausencia de imperfecciones, es conveniente indicar los desplazamientos de campo libre para las incidencias consideradas. Estos son:

ONDAS P

$$|u_x^{(ff)}| = 0.00 \quad |u_z^{(ff)}| = 2.00 \quad , \text{ para } \gamma_P = 0^\circ$$

$$|u_x^{(ff)}| = 1.1211 \quad |u_z^{(ff)}| = 1.6901 \quad , \text{ para } \gamma_P = 30^\circ$$

$$|u_x^{(ff)}| = 1.7321 \quad |u_z^{(ff)}| = 1.0000 \quad , \text{ para } \gamma_P = 60^\circ$$

ONDAS SV

$$|u_x^{(ff)}| = 2.00 \quad |u_z^{(ff)}| = 0.00 \quad , \text{ para } \gamma_S = 0^\circ$$

$$|u_x^{(ff)}| = 1.7321 \quad |u_z^{(ff)}| = 1.0000 \quad , \text{ para } \gamma_S = 30^\circ$$

$$|u_x^{(ff)}| = 0.5000 \quad |u_z^{(ff)}| = 1.1180 \quad , \text{ para } \gamma_S = 60^\circ$$

ONDAS DE RAYLEIGH

$$|u_x^{(ff)}| = 1.00 \quad |u_z^{(ff)}| = 1.4679$$

Por otra parte, debe notarse que en este trabajo no se realiza un análisis de las fuentes de error debidas al proceso numérico; por ejemplo, los errores de redondeo en el cálculo de las funciones de Bessel, de Hankel y de Legendre.

5.1 Resultados para una cavidad semiesférica

En las figs 4-8 se muestran los resultados obtenidos para este difractor. Se obtuvieron para un valor $\nu = 0.25$ de coeficiente de Poisson. Cabe señalar que, debido a la tridimensionalidad de las soluciones, los resultados que se presentan de aquí en adelante corresponden únicamente a los planos $y = 0$ (con abcisas x/a) y $x = 0$ (con abcisas y/a). Lo anterior permite una mayor resolución al observar los distintos patrones de desplazamientos, aún cuando se pierda la variación de los mismos con respecto a la coordenada azimutal ϕ .

La fig 4 presenta el caso de incidencia normal de ondas P. Debido a que los desplazamientos son independientes del azimut ϕ , esta es la única gráfica que representa el patrón tridimensional completo, consecuencia de la igualdad de las curvas en cualquier dirección. En la fig 5, la incidencia de las ondas P se analizó con un ángulo de 60° . Nótese las importantes amplificaciones que aparecen en el lado de la incidencia y sobre la irregularidad, así como el surgimiento de desplazamientos horizontales producto de la conversión de modos.

Las figs 6 y 7 muestran los casos de incidencia de ondas SV con un ángulo de 0° y 30° , respectivamente. Nótese, en la fig 6, las reducciones de los desplazamientos dentro de la irregularidad. En cambio, en la fig 7 se observan importantes amplificaciones en el lado de la incidencia. Compárese con la fig 5 en el caso de ondas P.

Finalmente, la fig 8 correspondiente a incidencia de ondas de

Rayleigh, muestra reducciones de los desplazamientos en el interior de la cavidad y amplificaciones importantes en el borde de incidencia.

5.2 Resultados para depósitos aluviales

Las figs 9-11 corresponden a las amplitudes de desplazamientos sobre la superficie plana de un depósito aluvial semiesférico con propiedades materiales dadas por $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$ para módulo de rigidez y densidad de masa, respectivamente. Los subíndices R y E denotan al depósito y al semiespacio, respectivamente. Se suponen coeficientes de Poisson de $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$. En la fig 9, incidencia normal de ondas SV, se registran amplificaciones hasta de 200% en el centro del depósito y el surgimiento de importantes desplazamientos verticales aún cuando el campo incidente solo posee una componente horizontal.

Las figs 10 y 11 corresponden a los casos de incidencia de ondas SV a 60° e incidencia de ondas de Rayleigh, respectivamente. Es notable la semejanza entre las gráficas. Sin embargo, las amplificaciones en el interior del depósito son mayores para las ondas de Rayleigh.

Las figs 12 y 13 corresponden a un depósito con profundidad $h/a = 0.5$ y forma de la interfase dada por

$$z = h[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3], \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

donde $\xi = (x^2 + y^2)^{1/2}/a$. En la fig 12 se presentan los desplazamientos superficiales para incidencia vertical de ondas SV. Las propiedades de los materiales en este caso son las mismas que las usadas en el depósito semiesférico. Nótese que al hacer más suave la variación de la forma de la interfase se reducen de manera significativa las amplificaciones y la conver-

si3n de modos. En la fig 13 se muestra qu3 sucede para incidencia de ondas P a 30°. Los resultados no son muy espectaculares.

5.3 Resultados para un promontorio

En las figs 14 y 15 se presentan resultados para un promontorio axisim3trico con altura $h/a = 0.5$ y la forma del dep3sito aluvial estudiado antes. Se han considerado incidencias de ondas SV a 0° y de ondas P a 30°, respectivamente. En los dos casos se observan considerables amplificaciones en la cima del promontorio y estas llegan a 100%. Estos resultados son sorprendentes si se considera la suavidad del perfil de la superficie considerado. En estos c3culos se han tomado $\nu = 0.25$ y, obviamente, id3nticas propiedades para la inclusi3n, que simula al promontorio, y el semiespacio.

6. CONCLUSIONES

Se ha aplicado un método de frontera para resolver el problema de difracción de ondas P, SV y de Rayleigh por irregularidades superficiales tridimensionales de forma axisimétrica. El método consiste en aproximar los campos difractados y refractados mediante combinaciones lineales de funciones de una familia T-completa (T en honor a Trefftz) de soluciones de la ec de Navier. La descomposición azimutal utilizada permite resolver el problema mediante la superposición de una secuencia de problemas "bidimensionales".

Los ejemplos presentados, correspondientes a distintas irregularidades, confirman la importancia del problema desde el punto de vista de la ingeniería sísmológica, ya que muestran importantes efectos de conversión de modos y amplificaciones de los desplazamientos superficiales.

Dichos efectos son de particular importancia en la evaluación del riesgo sísmico, en estudios de microrregionalización y en planeación y diseño sísmico de estructuras civiles.

Sería conveniente que, en estudios futuros, se automatizara el cálculo de los parámetros de cada modelo, a fin de que puedan obtenerse de manera más eficiente las respuestas para un rango de frecuencia más amplio.

La metodología presentada podría emplearse para estudiar el problema de difracción de ondas elásticas por irregularidades no superficiales, tales como inclusiones elásticas.

7. RECONOCIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma por su dirección de este trabajo. Su constante apoyo y respaldo fueron determinantes durante el desarrollo del mismo.

Es grato reconocer la asesoría brindada por Javier Avilés y Miguel A. Bravo así como su gran disponibilidad para aclararme dudas.

El trabajo formó parte del Proyecto 3752 del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Agradezco a su personal las facilidades proporcionadas.

8. REFERENCIAS

Abramowitz, M. e I. A. Stegun (eds) (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, U. S. National Bureau of Standards, Washington.

Aki, K. y K.L. Larner (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves, J. Geophys. Res., 75, 1512-1527.

Aki, K. y P.G. Richards (1980). Quantitative seismology, theory and methods, W. H. Freeman and Co., San Francisco.

Bard, P.Y. (1982). Diffracted waves and displacement field over two-dimensional elevated topographies, Geophys. J. R. Astr. Soc., 71, 731-760.

Booke, D.M. (1972). A note on the effect of simple topography on seismic SH waves, Bull. Seism. Soc. Am., 62, 275-284.

Bouchon, M. (1973). Effect of topography on surface motion, Bull. Seism. Soc. Am., 63, 615-632.

Brune, J.N. y J. E. Nafe y L. E. Alsop (1961). The polar phase shift of surface waves on a sphere, Bull. Seism. Soc. Am., 51, 247-257.

Chávez-Pérez, S. y F.J. Sánchez-Sesma (1984). Ground motion on three-dimensional topographies under incident P, SV and Rayleigh waves (resumen), Earthquake Notes, (sometido para su posible publicación).

Dravinski, M. (1982a). Scattering of SH waves by subsurface topography, J. Eng. Mec. Div., Proc. ASCE, 108, 1-17.

Dravinski, M. (1982b). Influence of interface depth upon strong ground motion, Bull. Seism. Soc. Am., 72, 597-614.

England, R., F.J. Sabina e I. Herrera (1980). Scattering of SH waves by surface cavities of arbitrary shape using boundary methods, Phys. Earth Planet. Ints., 21, 148-157.

Fung, Y.C. (1965). Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

Gilbert, F. y L. Knopoff (1960). Seismic scattering from topographic irregularities, J. Geophys. Res., 65, 3437-3444.

Herrera, I. (1980). Boundary methods. A criterion for completeness, Proc. Natl. Acad. Sci., U.S.A., 77, 4395-4398.

Herrera, I. (1984). Boundary methods: An algebraic theory, Pitman Publ. Co., London.

Herrera, I. y F.J. Sabina (1978). Connectivity as an alternative to boundary integral equations. Construction of bases, Proc. Natl. Acad. Sci., U.S.A., 75, 2059-2063.

Hudson, J.A. (1967). Scattering of seismic waves by a surface obstacle, Geophys. J.R. Astr. Soc.

Hudson, J.A. y D.M. Booth (1967). Scattering of seismic waves by a surface obstacle. Geophys. J.R. Astr. Soc., 60, 123-127.

Jackson, P.S. (1971). Scattering of seismic waves by a surface obstacle. Geophys. J.R. Astr. Soc., 61, 685-695.

Kupradze, V.D. (1965). Scattering of seismic waves by a surface obstacle. Geophys. J.R. Astr. Soc., 10, 1-10.

Lee, V.W. (1978). Dispersion of seismic waves by a hemispherical canyon. Geophys. J.R. Astr. Soc., 53, 1-16.

Lee, V.W. (1982). A note on the scattering of seismic waves by a hemispherical canyon. Geophys. J.R. Astr. Soc., 71, 122-129.

Lee, V.W. (1984). Three-dimensional scattering of seismic waves by a hemispherical canyon. Geophys. J.R. Astr. Soc., 81, 1-16.

Liao, Z., Y. Baipo y Y. Baipo (1984). Scattering of seismic waves by a hemispherical canyon. Geophys. J.R. Astr. Soc., 81, 1-16.

Mc Ivor, I.K. (1969). Scattering of seismic waves by a surface obstacle. Geophys. J.R. Astr. Soc., 59, 1349-1364.

Noble, B. y J.W. Daniel (1977). Applied linear algebra, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

Ohtsuki, A. y K. Harumi (1983). Effect of topography and subsurface inhomogeneities on seismic SV waves, Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 11, 441-462.

Ohtsuki, A., H. Yamahara y K. Harumi (1984). Effect of topography and subsurface inhomogeneity on seismic Rayleigh waves, Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 12, 37-58.

Sabina, F.J. y J.R. Willis (1975). Scattering of SH waves by a rough half-space of arbitrary slope, Geophys. J.R. Astr. Soc., 42, 685-703.

Sánchez-Sesma, F.J. (1978). Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape, Proc. Int. Conf. on Microzonation, 2nd., San Francisco, 2, 729-738.

Sánchez-Sesma, F.J. (1981). A boundary method applied to elastic scattering problems, Arch. Mec., 33, 167-179.

Sánchez-Sesma, F.J. (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities, Bull. Seism. Soc. Am., 73, 1621-1636.

Sánchez-Sesma, F.J. y E. Rosenblueth (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn., 7, 441-450.

Sánchez-Sesma, F.J. y J.A. Esquivel (1979). Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves, Bull. Seism. Soc. Am., 69, 1107-1120.

Sánchez-Sesma, F.J., I. Herrera y J. Avilés (1982). A boundary method for elastic wave diffraction. Application to scattering of SH waves by surface irregularities, Bull. Seism. Soc. Am., 72, 473-490.

Sánchez-Sesma, F.J., S. Chávez-Pérez y J. Avilés (1984a). Scattering of elastic waves by three-dimensional topographies, Proc. World Conf. Earthquake Eng., 8th, San Francisco, 2, 639-646, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

Sánchez-Sesma, F.J., M.A. Bravo e I. Herrera (1984b). Surface motion of topographical irregularities for incident P, SV and Rayleigh waves, Bull. Seism. Soc. Am., (en prensa).

Sheriff, R.E. (1975). Factors affecting seismic amplitudes, Geophys. Prospect, 23, 125-138.

Sills, L.B. (1978). Scattering of horizontally polarized shear waves by surface irregularities, Geophys. J.R. Astr. Soc., 54, 319-348.

Singh, S.K. y F.J. Sabina (1977). Ground motion amplification by topographic depressions for incident P waves under acoustic approximation, Bull. Seism. Soc. Am., 67, 345-352.

Sokolnikoff, I.S. (1956). Mathematical theory of elasticity, Mc Graw-Hill, Inc., New York.

Sommerfeld, A. (1949). Partial differential equations in physics, Academic Press, Inc., New York.

Takeuchi, H. y M. Saito (1972). Seismic surface waves, en Methods in Computational Physics, Vol. 11, B.A. Bolt, ed., Academic Press, New York.

Trifunac, M.D. (1973). Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon, Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 1, 267-281.

White, J.E. (1965). Seismic waves: radiation, transmission, and attenuation, Mc Graw-Hill, Inc., New York.

Wong, H.L. (1979). Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by surface topographies, Report CE 79-05, Department of Civil Engineering, University of Southern California, Los Angeles, California.

Wong, H.L. (1982). Effect of surface topography on the diffraction of P, SV and Rayleigh waves, Bull. Seism. Soc. Am., 72, 1167-1183.

Wong, H.L. y M.D. Trifunac (1974a). Scattering of plane SH wave by a semi-elliptical canyon, Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 3, 157-169.

Wong, H.L. y M.D. Trifunac (1974b). Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH wave, Bull. Seism. Soc. Am., 64, 1389-1408.

TABLA.- Estimación del número azimutal máximo

Argumento	Suma*	Número de términos de la serie	Error(%)**
0.5	0.9384698	1	6.15
	0.9996779	3	0.03
	0.9999993	5	0.00
2.0	0.2238908	1	77.61
	0.9295588	3	7.04
	0.9975503	5	0.24
	0.9999551	7	0.00
3.5	-0.3801277	1	138.01
	0.5371306	3	46.29
	0.9459412	5	5.41
	0.9967991	7	0.32
	0.9998852	9	0.01
5.0	-0.1775968	1	117.76
	-0.0844665	3	108.45
	0.6979982	5	30.20
	0.9600956	7	3.99
	0.9969061	9	0.31
	0.9998417	11	0.02

$$* \quad 1 = J_0(\text{lrsen}\theta) + 2J_2(\text{lrsen}\theta) + 2J_4(\text{lrsen}\theta) + 2J_6(\text{lrsen}\theta) + \dots$$

$$** \quad \text{Error} = |1 - \text{Suma}| \times 100$$

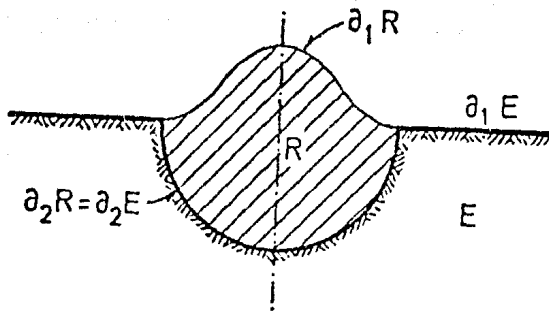


Fig 1. Definición de las regiones E y R y sus fronteras

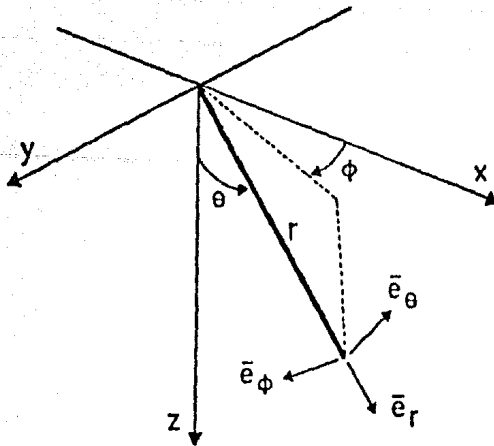


Fig 2. Sistemas de coordenadas cartesianas y esféricas.
Vectores unitarios en el sistema esférico

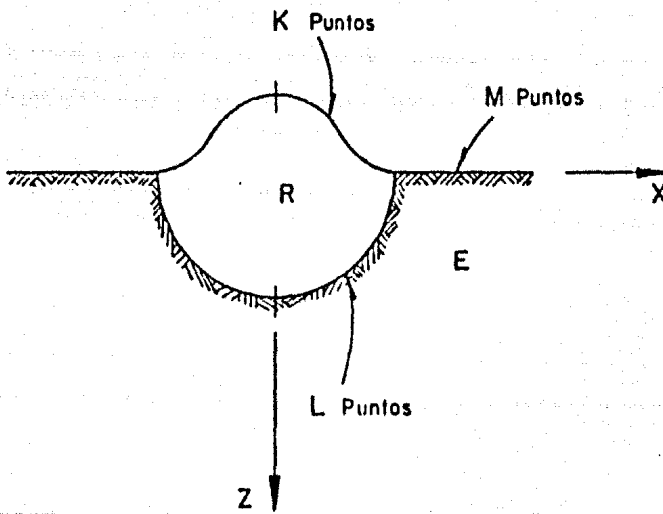


Fig 3. Puntos de colocación en las fronteras

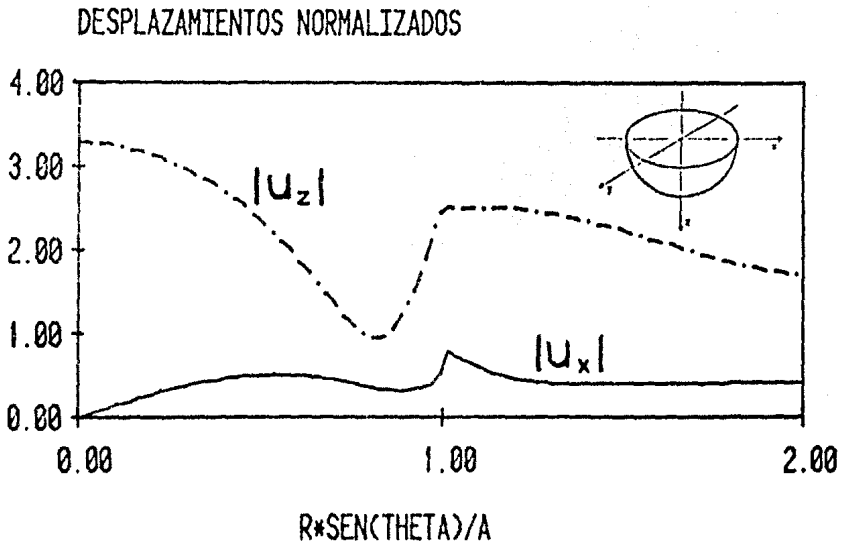


Fig 4. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Componentes horizontal-radial y vertical. Cavity semiesférica. Incidencia vertical de ondas P. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

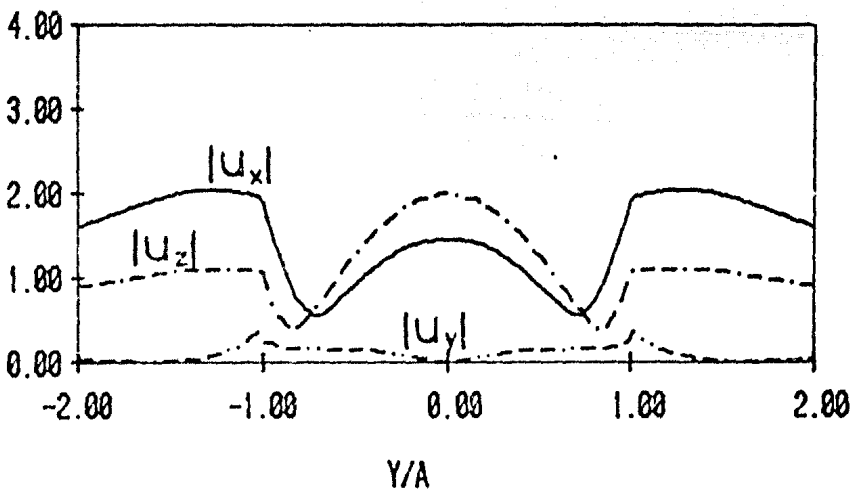
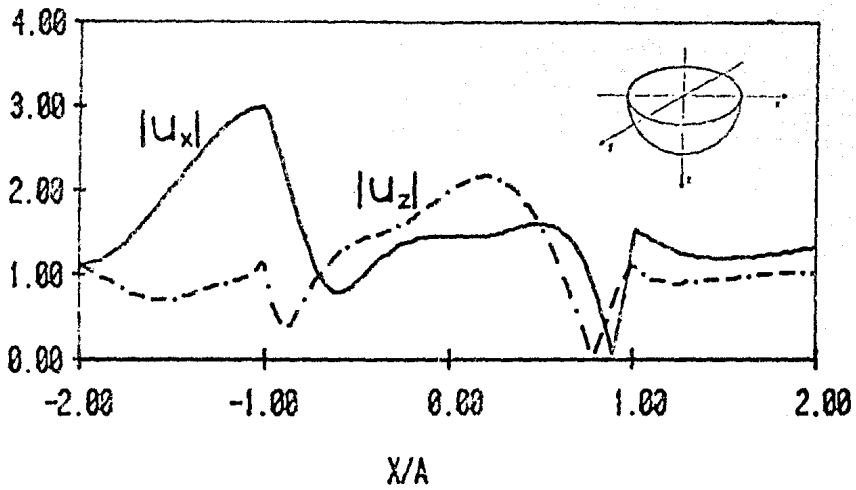


Fig 5. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Cavityad semiesférica. Incidencia de ondas P con 60° de ángulo de incidencia. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

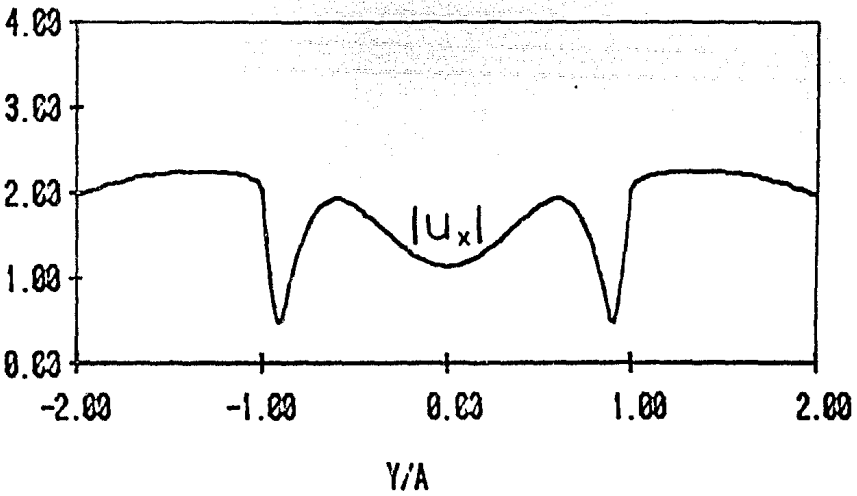
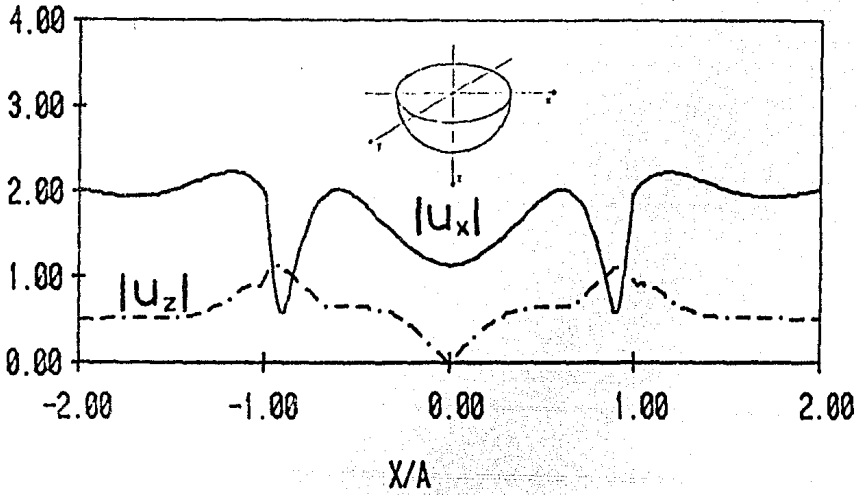


Fig 6. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Cavityad semiesférica. Incidencia vertical de ondas SV. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

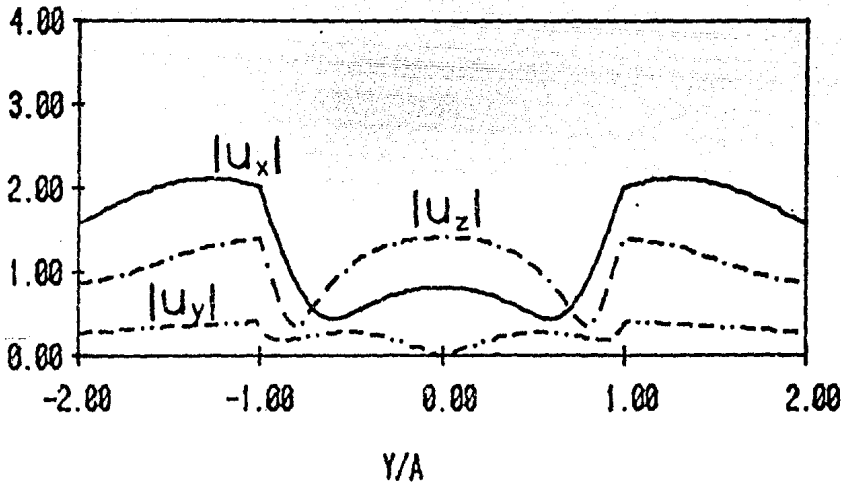
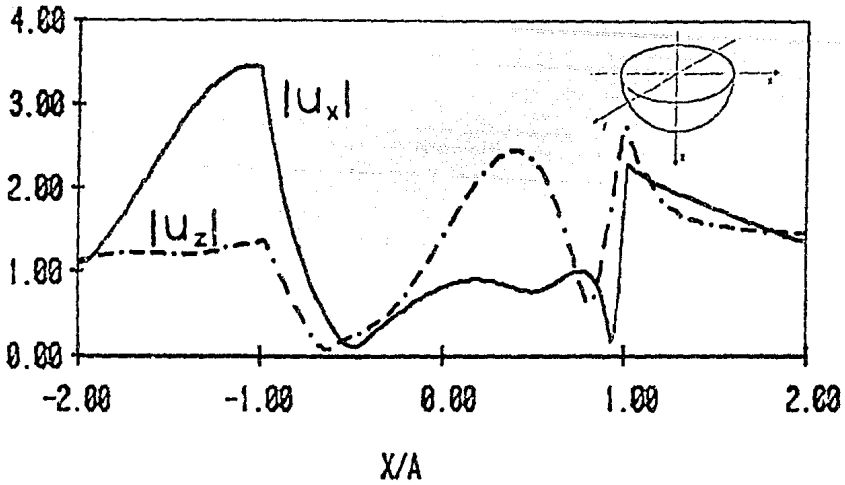


Fig 7. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Cavityad semiesférica. Incidencia de ondas SV con 30° de ángulo de incidencia. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

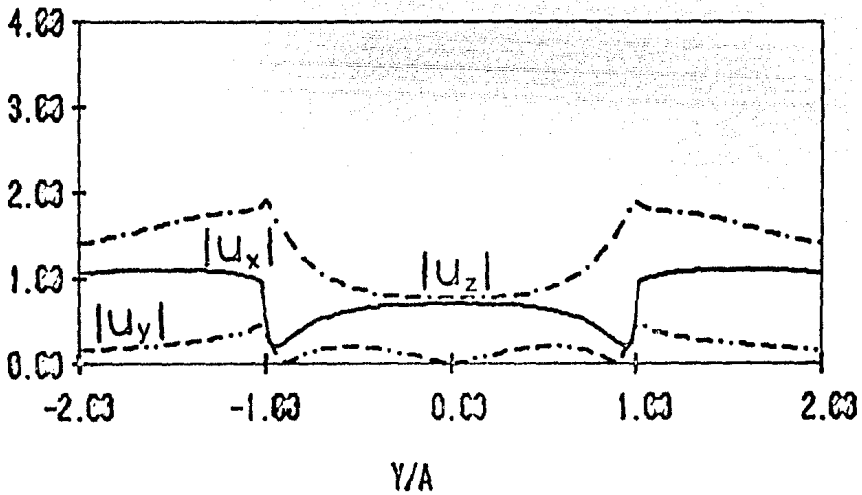
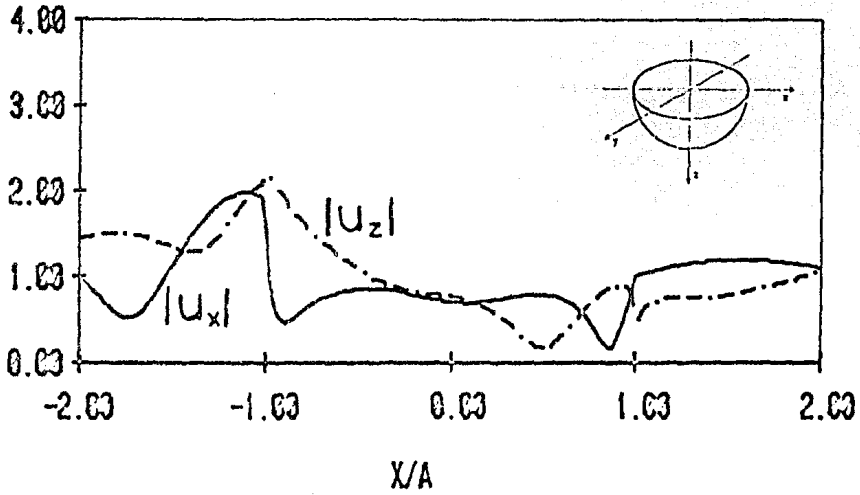


Fig 8. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Cavityad semiesférica. Incidencia de ondas de Rayleigh. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

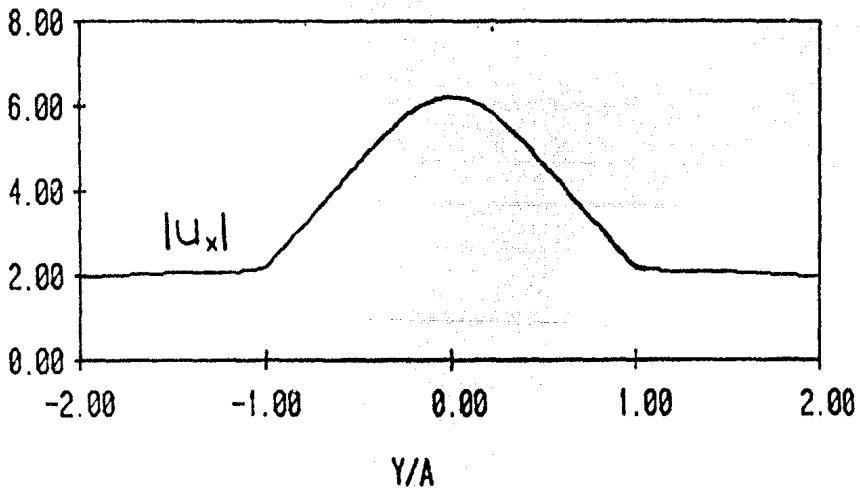
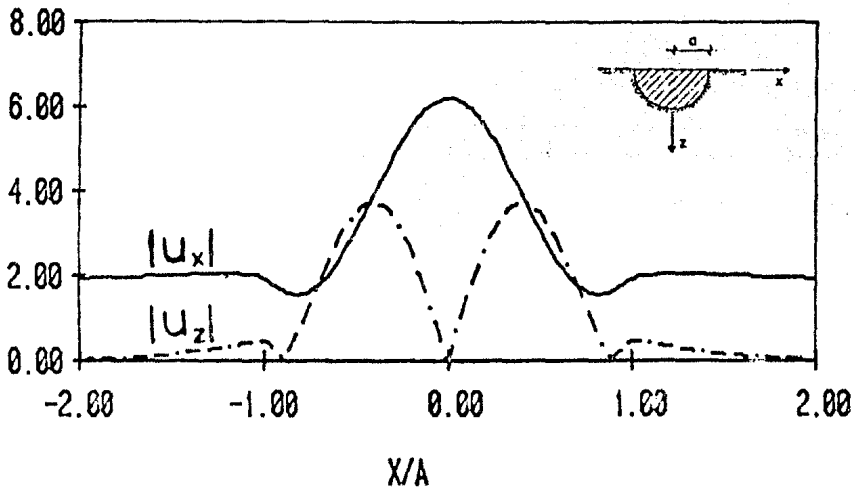


Fig 9. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Depósito semiesférico. Incidencia vertical de ondas SV. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Propiedades materiales: $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$, $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

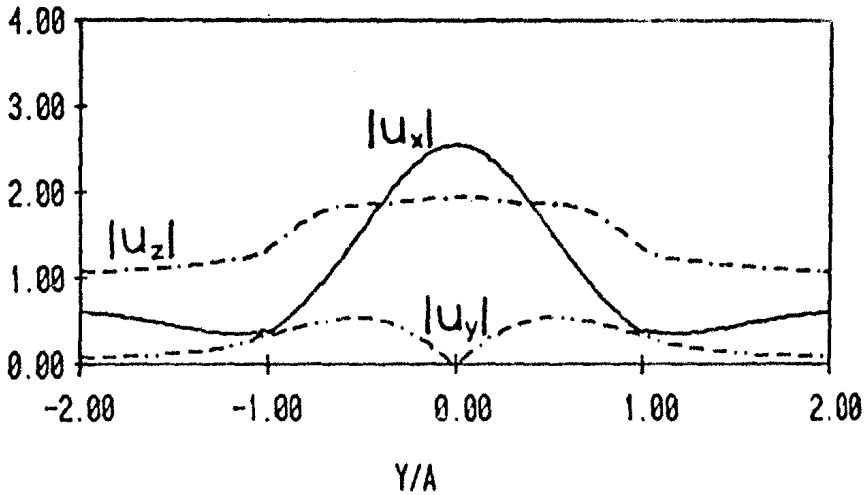
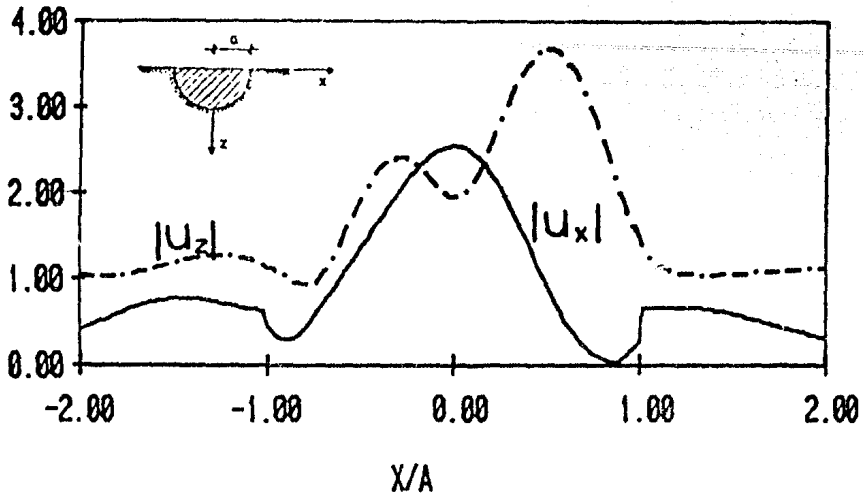


Fig 10. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Depósito semiesférico. Incidencia de ondas SV con 60° de ángulo de incidencia. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Propiedades materiales: $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$, $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

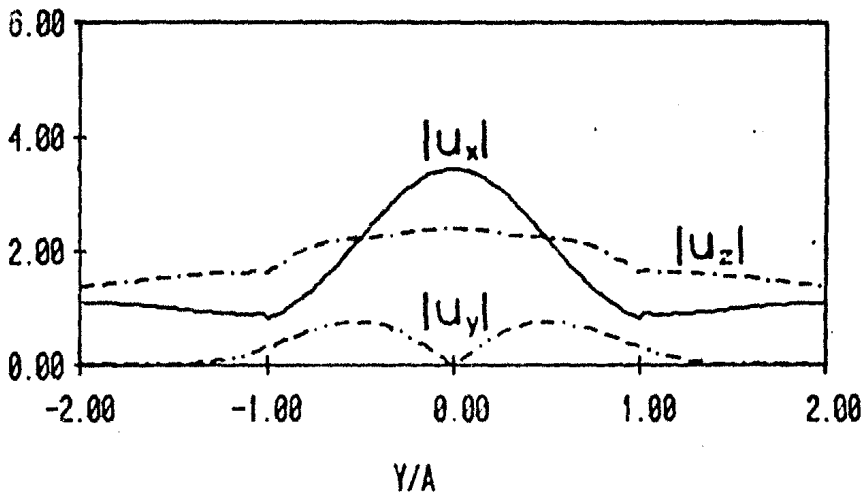
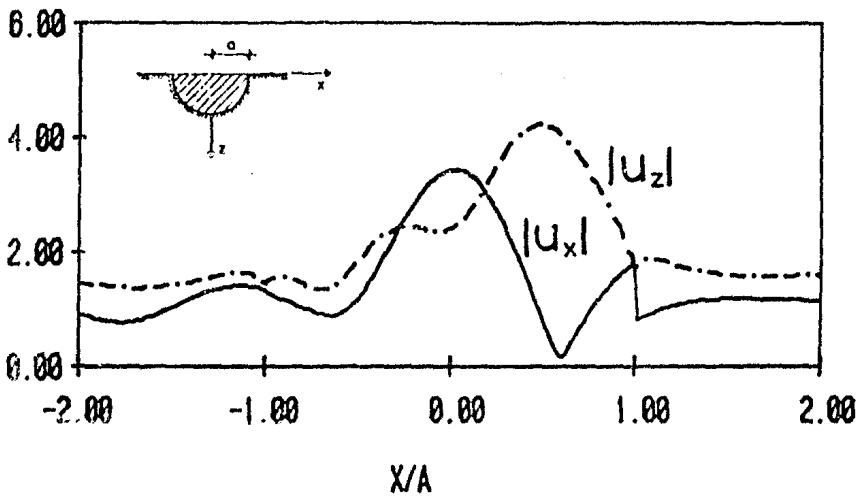


Fig 11. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Depósito semiesférico. Incidencia de ondas de Rayleigh. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Propiedades materiales: $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$, $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

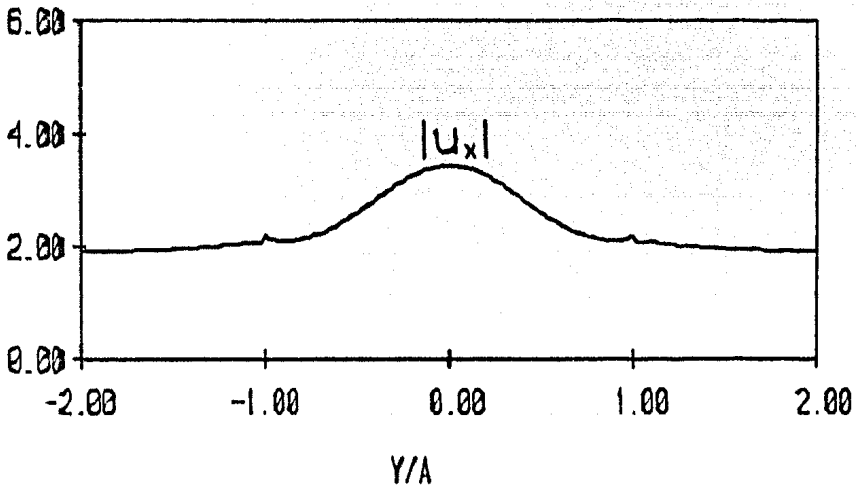
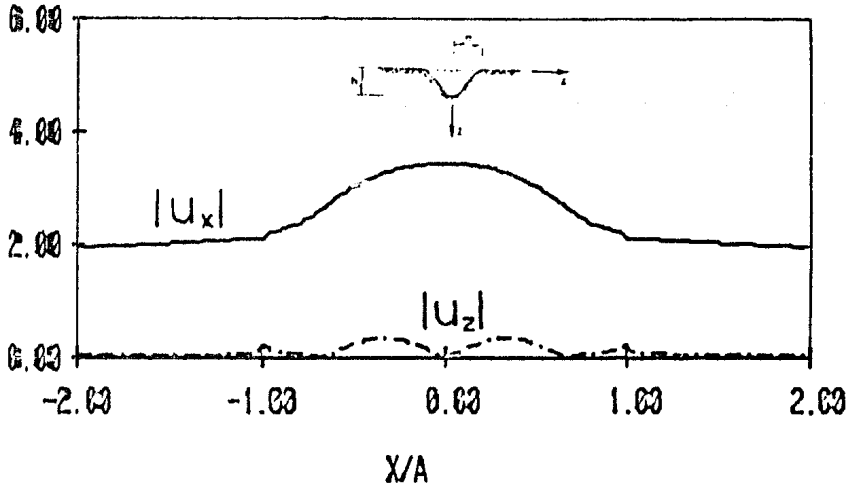
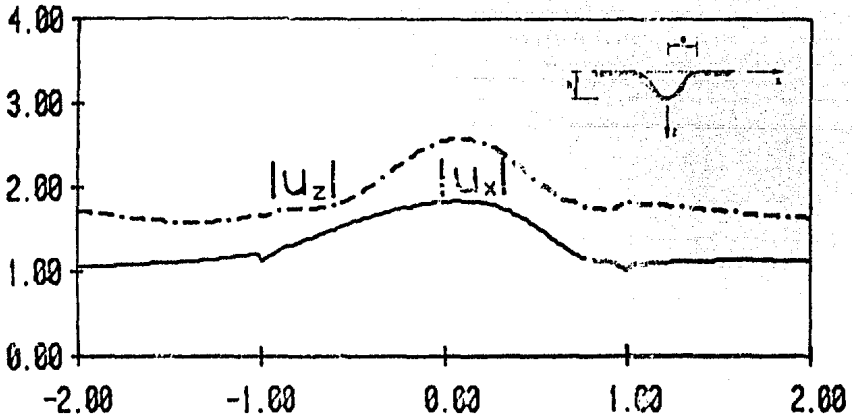
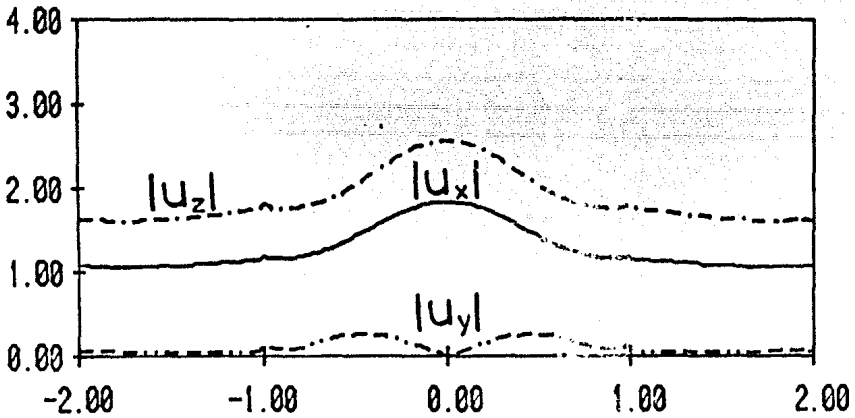


Fig 12. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Depósito senoidal con $h/a = 0.5$. Incidencia vertical de ondas SV. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Propiedades materiales: $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$, $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS



X/A



Y/A

Fig 13. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Depósito senoidal con $h/a = 0.5$. Incidencia de ondas P con 30° de ángulo de incidencia. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Propiedades materiales: $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$, $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$.

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

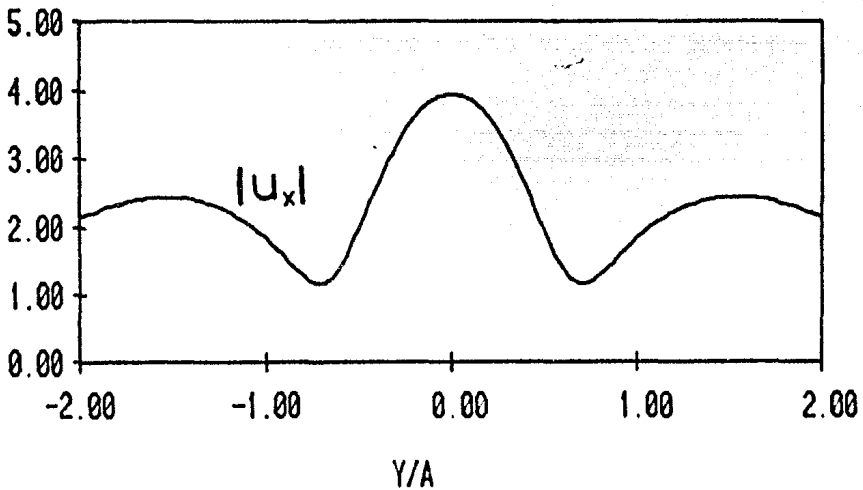
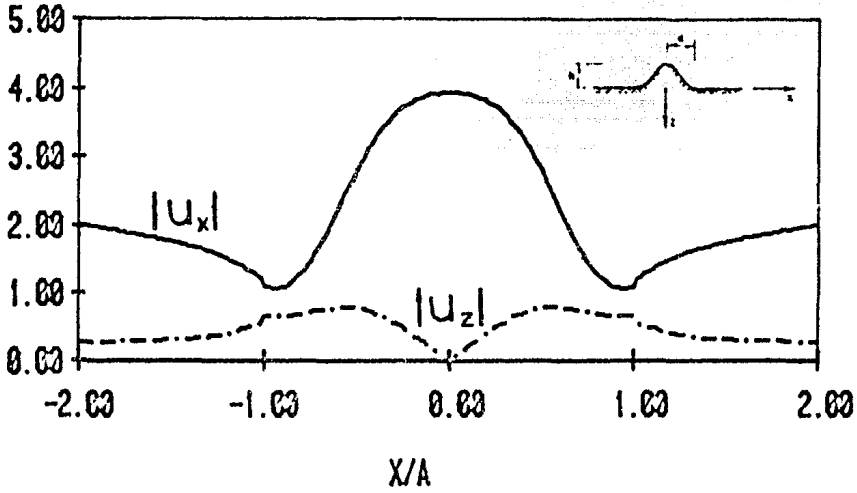


Fig 14. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Promontorio con $h/a = 0.5$. Incidencia vertical de ondas SV. Frecuencia normalizada $\eta_k = 1$. Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

DESPLAZAMIENTOS NORMALIZADOS

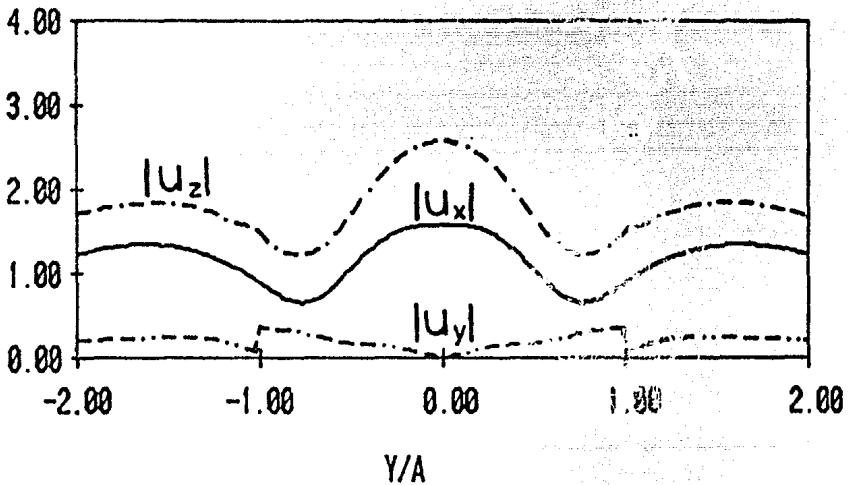
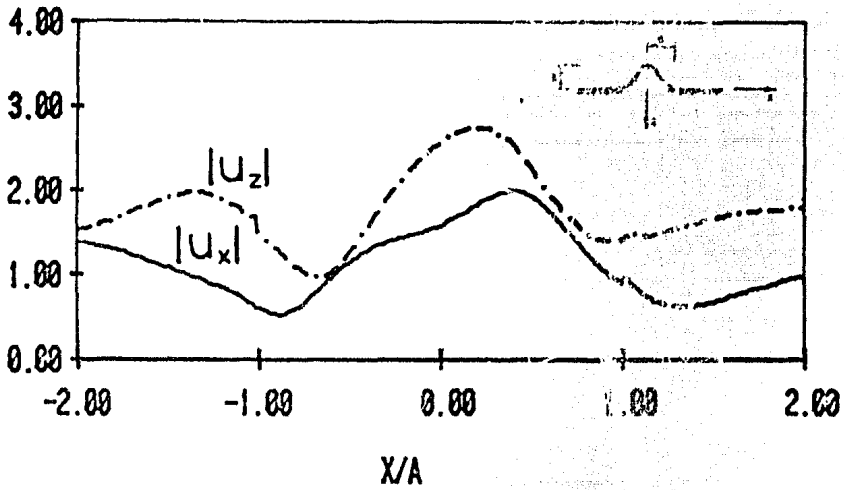


Fig 15. Amplitudes de desplazamientos superficiales. Promontorio con $h/a = 0.5$. Incidencia de ondas P con 30° de ángulo de incidencia. Frecuencia normalizada $\omega_p = 1$. Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$

APENDICE A.- EXPRESIONES DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE. ONDAS P, SV Y DE RAYLEIGH

Sin perder generalidad, supóngase que las direcciones de propagación de las ondas están alojadas en el plano xz y, ya que en el caso de ondas P y SV el movimiento también está en dicho plano, las ecuaciones reducidas de onda se satisfarán si $\bar{\Psi} = \Psi_y = \Psi$.

Por lo tanto, considérense los potenciales

$$\phi(\text{ff}) = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (\text{A.1})$$

$$\psi(\text{ff}) = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (\text{A.2})$$

donde $l = \omega/c$, $m = lf_\alpha$, $k = lf_\beta$, $\omega > 0$ y

$$f_\alpha = (c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

$$f_\beta = (c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

La velocidad de fase aparente en la superficie está relacionada con las velocidades de propagación α y β mediante

$$c = \frac{\alpha}{\text{sen}\gamma_p} = \frac{\beta}{\text{sen}\gamma_s} \quad (\text{A.5})$$

donde γ_p y γ_s = ángulos de incidencia y reflexión de las ondas P y S, respectivamente, como se muestra en las figs A.1 y A.2.

Los coeficientes A_1 y B_1 son las amplitudes de potenciales de ondas planas incidentes P y SV, respectivamente. A_2 y B_2 representan a las ondas reflejadas.

Los desplazamientos de campo libre que satisfacen la ecuación reducida de Navier están dados por

$$u_x^{(ff)} = \frac{\partial \phi^{(ff)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(ff)}}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

$$u_z^{(ff)} = \frac{\partial \phi^{(ff)}}{\partial z} - \frac{\partial \psi^{(ff)}}{\partial x} \quad (\text{A.7})$$

y las componentes del tensor de esfuerzos de campo libre son

$$\sigma_{xx}^{(ff)} = \lambda \left(\frac{\partial u_x^{(ff)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(ff)}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x^{(ff)}}{\partial x} \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{zz}^{(ff)} = \lambda \left(\frac{\partial u_x^{(ff)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(ff)}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z^{(ff)}}{\partial z} \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{xz}^{(ff)} = \mu \left(\frac{\partial u_z^{(ff)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(ff)}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.10})$$

Al sustituir las ecs A.1 y A.2 en las ecs A.6-A.10 se obtiene que

$$u_x^{(ff)} = -il\phi_1 + ik\psi_2 \quad (\text{A.11})$$

$$u_z^{(ff)} = im\phi_2 + il\psi_1 \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_{xx}^{(ff)} = -\lambda(1^2+m^2)\phi_1 + 2\mu[-1^2\phi_1+k1\psi_2] \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_{zz}^{(ff)} = -\lambda(1^2+m^2)\phi_1 + 2\mu[-m^2\phi_1-k1\psi_2] \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_{xz}^{(ff)} = \mu[2m1\phi_2 + (1^2 - k^2)\psi_1] \quad (\text{A.15})$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 y ψ_2 están dados, omitiendo el factor $e^{i\omega t}$, por

$$\phi_1 = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} \quad (\text{A.16})$$

$$\phi_2 = (A_1 e^{imz} - A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} \quad (\text{A.17})$$

$$\psi_1 = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} \quad (\text{A.18})$$

$$\psi_2 = (B_1 e^{ikz} - B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} \quad (\text{A.19})$$

Para incidencia de ondas P, se tiene que $B_1 = 0$ y $\beta < \alpha < |c|$. Las condiciones de frontera libre en $z = 0$, es decir $\sigma_{zz}^{(ff)} = \sigma_{xz}^{(ff)} = 0$, conducen a

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{4f_\alpha (f_\beta^2 - 1)}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.21})$$

que son las amplitudes de los potenciales de las ondas P y SV reflejadas, en términos de la amplitud de la onda incidente.

En la incidencia de ondas SV, $A_1 = 0$, se tienen dos casos; cuando $\beta < \alpha < |c|$ y cuando $\beta < |c| < \alpha$. Este último produce ondas P reflejadas que son inhomogéneas, es decir f_α será una cantidad imaginaria. Si se acepta que $\text{Im}(f_\alpha) < 0$ se tendrá, para las amplitudes de las ondas reflejadas, que en los dos casos

$$\frac{A_2}{B_1} = -\frac{4f_\beta (f_\beta^2 - 1)}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.23})$$

Además, existe otra condición dada por $|c| < \beta < \alpha$ que no corresponde a ondas incidentes P o SV finitas, ya que en este caso f_α y f_β son imaginarias. Entonces, si se acepta que $\text{Im}(f_\alpha) < 0$ e $\text{Im}(f_\beta) < 0$, hay que tomar $A_1 = B_1 = 0$. El sistema de ecuaciones resultante de imponer condiciones de frontera es homogéneo. Así, se obtiene que

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2f_\beta}{(f_\beta^2 - 1)} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{(f_\beta^2 - 1)}{2f_\alpha} \quad (\text{A.25})$$

las cuales deben ser iguales, de donde la condición que debe cumplirse es

$$4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2 = 0 \quad (\text{A.26})$$

que es la ecuación de Rayleigh. Debe notarse que esta ecuación es cúbica en c^2 ; la raíz real $c = c_R$ es la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh. Las ondas de Rayleigh son ondas superficiales que se atenúan con la profundidad, están compuestas de ondas P y SV que viajan acopladas con una velocidad $c_R < \beta$. Las partículas en la superficie describen trayectorias elípticas retrógradas. En la fig A.3 se esquematiza el movimiento característico de las ondas de Rayleigh.

En un caso dado, basta conocer la velocidad de fase, mediante la ec A.5 o la A.26, y calcular f_α y f_β de las ecs A.3 y A.4, con la precaución de tomarlos, cuando sean imaginarios, negativos. Las amplitudes se calculan con las ecs A.20 y A.21 o A.22 y A.23 o A.24 y A.25, dependiendo del caso.

Finalmente, las ecs A.11 a A.15 proporcionan los desplazamientos y esfuerzos de la solución de campo libre.

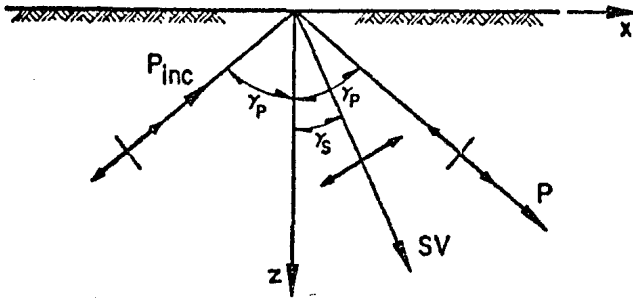


Fig A-1. Incidencia de ondas P

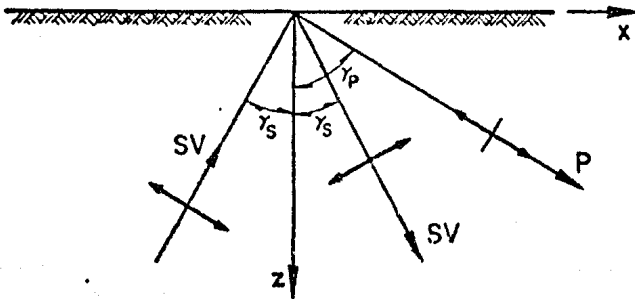


Fig A-2. Incidencia de ondas SV

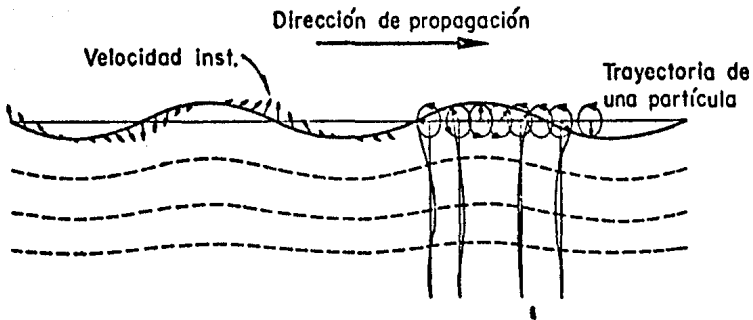


Fig A-3. Ondas de Rayleigh

APENDICE B.- EXPRESIONES DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS EN COORDENADAS ESFERICAS

Los vectores definidos por las ecs 3.14 a 3.16 forman un conjunto de armónicos superficiales vectoriales ortogonales (Takeuchi y Saito, 1972), por lo que un vector arbitrario definido sobre una esfera unitaria puede expandirse en términos de ellos. Por ejemplo, considérese una solución, para el caso de oscilaciones de ondas S, de la forma

$$\bar{u} = \sum_{n,m} \left[y_1^S(r) \bar{R}_n^m(\theta, \phi) + y_3^S(r) \bar{S}_n^m(\theta, \phi) + y_1^T(r) \bar{T}_n^m(\theta, \phi) \right] \quad (B.1)$$

donde \bar{u} = vector de desplazamientos y las funciones radiales se definen por las ecs 3.18 a 3.22.

En forma general, las componentes de desplazamientos en coordenadas esféricas podrán expresarse, en términos de las soluciones de oscilaciones toroidales de ondas SH (superíndice T) y esferoidales de ondas P y SV (superíndices P y S), mediante

$$u_r = \left[y_1^P(r) + y_1^S(r) \right] Y_n^m(\theta, \phi) \quad (B.2)$$

$$u_\theta = \left[y_3^P(r) + y_3^S(r) \right] \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} + y_1^T \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \quad (B.3)$$

$$u_\phi = \left[y_3^P(r) + y_3^S(r) \right] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} - y_1^T(r) \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \quad (B.4)$$

donde de acuerdo con la ec 3.17, $Y_n^m(\theta, \phi)$ es una función esférica superficial (armónico zonal) que representa, si la expresamos en expansiones asintóticas de funciones asociadas de Legendre de primera y segunda especie, una superposición de una onda progresiva hacia el polo y una onda progresiva hacia fuera del polo (Brune et al, 1961).

Los esfuerzos asociados a las componentes de desplazamientos anteriores, siguiendo con la misma notación de superíndices, están dadas por

$$\sigma_{rr}^T = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^T = y_3^T \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial\phi} \right) = -\sigma_{\phi\phi}^T \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_{\theta\phi}^T = \frac{1}{2} y_3^T \left(-\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\phi^2} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\sigma_{r\phi}^T = -y_2^T \frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta} \quad (\text{B.8})$$

$$\sigma_{r\theta}^T = y_2^T \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial\phi} \quad (\text{B.9})$$

para oscilaciones toroidales, y

$$\sigma_{rr}^P = y_2^P Y_n^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.10})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^P = y_5^P Y_n^m(\theta, \phi) + y_6^P \left(\cot\theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\phi^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_{\phi\phi}^P = y_5^P Y_n^m(\theta, \phi) + y_6^P \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\theta^2} \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_{\theta\phi}^P = y_6^P \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial\phi} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\sigma_{r\phi}^P = y_4^P \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial\phi} \quad (\text{B.14})$$

$$\sigma_{r\theta}^P = Y_4^P \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \quad (\text{B.15})$$

$$\sigma_{rr}^S = Y_2^S Y_n^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^S = Y_5^S Y_n^m(\theta, \phi) + Y_6^S \left(\cot \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \phi^2} \right) \quad (\text{B.17})$$

$$\sigma_{\phi\phi}^S = Y_5^S Y_n^m(\theta, \phi) + Y_6^S \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.18})$$

$$\sigma_{\theta\phi}^S = Y_6^S \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\sigma_{r\phi}^S = Y_4^S \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \quad (\text{B.20})$$

$$\sigma_{r\theta}^S = Y_4^S \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \quad (\text{B.21})$$

para oscilaciones esferoidales. Las funciones radiales están definidas por

$$Y_2^T(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left[\frac{1}{2} kr(n-1) \mathcal{E}_n(kr) - \frac{1}{2} k^2 r^2 \mathcal{E}_{n+1}(kr) \right] \quad (\text{B.22})$$

$$Y_3^T(r) = \frac{2\mu}{r^2} [kr \mathcal{E}_n(kr)] \quad (\text{B.23})$$

$$Y_2^P(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left[(n(n-1) - \frac{1}{2} k^2 r^2) \mathcal{E}_n(qr) + 2qr \mathcal{E}_{n+1}(qr) \right] \quad (\text{B.24})$$

$$Y_4^P(r) = \frac{2\mu}{r^2} [(n-1) \mathcal{E}_n(qr) - qr \mathcal{E}_{n+1}(qr)] \quad (\text{B.25})$$

$$Y_5^P(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left[(q^2 r^2 - \frac{1}{2} k^2 r^2 - n^2) \mathcal{E}_n(qr) - qr \mathcal{E}_{n+1}(qr) \right] \quad (\text{B.26})$$

$$Y_6^P(r) = -\frac{2\mu}{r^2} \mathcal{E}_n(qr) \quad (\text{B.27})$$

$$Y_2^S(r) = \frac{2\mu}{r^2} [-n(n+1) [(n-1) \mathcal{E}_n(kr) - kr \mathcal{E}_{n+1}(kr)]] \quad (\text{B.28})$$

$$Y_4^S(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left[-(n^2 - 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2) \mathcal{E}_n(kr) - kr \mathcal{E}_{n+1}(kr) \right] \quad (\text{B.29})$$

$$y_5^S(x) = \frac{2\mu}{r^2} \left[n(n+1) \left[n \xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr) \right] \right] \quad (\text{E.30})$$

$$y_6^S(x) = -\frac{2\mu}{r^2} \left[-(n+1) \xi_n(kr) + kr \xi_{n+1}(kr) \right] \quad (\text{B.31})$$

APENDICE C.- FACTORES DE LA DESCOMPOSICION AZIMUTAL

Bajo transformación de coordenadas, considerando que para geometrías axisimétricas el esfuerzo $\sigma_{\phi\phi}$ no interviene en las condiciones de frontera, las componentes de esfuerzos y desplazamientos de la solución de campo libre en coordenadas esféricas, pueden expresarse en la forma

$$\sigma = (a_0 + a_1 \cos\phi + a_2 \cos 2\phi) e^{-ilx} = e^{-ilx} \sum_{j=0}^2 a_j \cos j\phi \quad (C.1)$$

para σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ y $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma = (a_1 \operatorname{sen}\phi + a_2 \operatorname{sen} 2\phi) e^{-ilx} = e^{-ilx} \sum_{j=1}^2 a_j \operatorname{sen} j\phi \quad (C.2)$$

para $\sigma_{r\phi}$ y $\sigma_{\theta\phi}$:

$$u = (a_0 + a_1 \cos\phi) e^{-ilx} = e^{-ilx} \sum_{j=0}^1 a_j \cos j\phi \quad (C.3)$$

para u_r y u_θ :

$$u = a_1 \operatorname{sen}\phi e^{-ilx} \quad (C.4)$$

para u_ϕ ; donde a_0 , a_1 y a_2 son constantes que dependen de las componentes de esfuerzos y desplazamientos en coordenadas cartesianas (tal como se definen en el apéndice A), y de la coordenada angular ϕ . Por ejemplo, para $\sigma_{\theta\theta}$ las constantes son

$$a_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \cos^2\theta + c_2 \operatorname{sen}^2\theta \quad (C.5)$$

$$a_1 = -\sigma_{xz} \operatorname{sen}\theta \quad (C.6)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos^2\theta \quad (C.7)$$

y en el caso de u_θ ,

$$a_0 = -u_z \operatorname{sen} \theta \quad (\text{C.8})$$

$$a_1 = u_x \operatorname{cos} \theta \quad (\text{C.9})$$

Nótese que en estas ecuaciones, las componentes rectangulares no incluyen el factor e^{-ilx} que ya se ha considerado explícitamente en las ecs C.1-C.4.

Por otra parte, considerando que C.3 y C.4 representan casos particulares de C.1 y C.2, respectivamente, bastará operar con C.1 y C.2. Así, sustituyendo la ec 3.10 en C.1 y C.2, se obtiene que las partes pares e impares de cualquier componente del campo libre estarán dadas por

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 f_m^{(j)} [\operatorname{cos} [(m+j)\phi] + \operatorname{cos} [(m-j)\phi]] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \{f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)}\} x \operatorname{cos} m\phi \quad (\text{C.10})$$

$$y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 g_m^{(j)} [\operatorname{sen} [(m+j)\phi] - \operatorname{sen} [(m-j)\phi]] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{g_{m+j}^{(j)} - g_{m-j}^{(j)}\} x \operatorname{sen} m\phi, \quad (\text{C.11})$$

respectivamente, donde $f_m^{(j)} = g_m^{(j)} = \frac{1}{2} \epsilon_m (-i)^m J_m(lr \operatorname{sen} \theta) a_j$, $j = 0, 1, 2$.

En las ecs C.10 y C.11 se han factorizado las funciones trigonométricas y son directamente utilizables. No obstante, utilizando relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel, los factores azimutales del campo libre pueden expresarse mediante formas más simples para fines de cómputo, es decir

$$\sum_{j=0}^2 \{f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)}\} = a_0 AP_0 + a_1 AP_1 + a_2 AP_2 \quad (\text{C.12})$$

$$\sum_{j=1}^2 \{g_{m+j}^{(j)} - g_{m-j}^{(j)}\} = a_1 AI1 + a_2 AI2 \quad (C.13)$$

donde los factores azimutales pares están definidos por

$$AP0 = \epsilon_{in} (-i)^m J_m(\cdot) \quad (C.14)$$

$$AP1 = \epsilon_{in} (-i)^{m+1} \left[-\frac{m}{(\cdot)} J_m(\cdot) + J_{m+1}(\cdot) \right] \quad (C.15)$$

$$AP2 = \epsilon_{in} (-i)^{m+2} \left[\frac{2m(m-1)}{(\cdot)^2} - \frac{1}{2} \right] J_m(\cdot) - \frac{(m-1)}{(\cdot)} J_{m+1}(\cdot) + \frac{1}{2} J_{m+2}(\cdot) \quad (C.16)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$ y los factores azimutales impares por

$$AI1 = -2 (-i)^{m+1} \left[\frac{m}{(\cdot)} J_m(\cdot) \right] \quad (C.17)$$

$$AI2 = -2 (-i)^{m+2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2m(m-1)}{(\cdot)^2} \right) J_m(\cdot) + \frac{(m-1)}{(\cdot)} J_{m+1}(\cdot) + \frac{1}{2} J_{m+2}(\cdot) \right] \quad (C.18)$$

para $m = 1, 2, \dots$ y, en ambos casos, $(\cdot) = (r \sin \theta)$.

Los factores anteriores se utilizan al resolver los sistemas de ecuaciones, surgidos de las condiciones de frontera, para cada número azimutal m , por lo que los términos $\cos m\phi$ y $\sin m\phi$, tal como aparecen en C.10 y C.11, se eliminarán permitiendo que el problema quede en términos de las coordenadas r y θ (ec 3.24).