



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN LOS METODOS  
ELECTRICOS DE CORRIENTE CONTINUA

**T E S I S**

Que para obtener el Título de  
INGENIERO GEOFISICO

p r e s e n t a n

**MIGUEL JUAREZ CASAS  
RICARDO MEDRANO MORALES**

MEXICO, D. F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE INGENIERIA  
Dirección  
60-I-70



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

Señores JUAREZ CASAS MIGUEL Y  
MEDRANO MORALES RICARDO,  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Prof. Ing. Roboam León Sánchez, para que lo desarrollen como tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO GEOFISICO.

"LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN LOS METODOS ELECTRICOS DE CORRIENTE CONTINUA"

- PROLOGO.  
I GENERALIDADES.  
II METODOS ELECTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.  
III LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDIOS HOMOGENEOS.  
IV LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN UN CORTE GEOELECTRICO DE DOS CAPAS.  
CONCLUSIONES.  
BIBLIOGRAFIA.  
APENDICES.

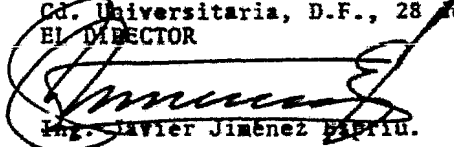
Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberán - - - prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, D.F., 28 de julio de 1982.

EL DIRECTOR

  
Ing. Javier Jiménez Barrio.

Sm  
JOE'MRV:gtg

**A NUESTROS SERES QUERIDOS.**

LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN LOS METODOS  
ELECTRICOS DE CORRIENTE CONTINUA.

RECLOGO.

## PRÓLOGO.

El objetivo que nos llevó a realizar el presente trabajo fue el tratar de aclarar la confusión que existe entre los términos de Profundidad de Penetración y Profundidad de Investigación en los Métodos Eléctricos de Corriente Continua.

El desarrollo se hizo mediante el auxilio de una serie de artículos, los cuales tratan el tema. El trabajo es meramente teórico, sin haber llegado a una comprobación práctica de las expresiones desarrolladas.

El escrito se inicia con un esbozo de los Métodos Geofísicos en general y en particular de los Métodos Eléctricos para, finalmente, tratar la Profundidad de Investigación en medios Homogéneos Isótropos y Anisótropos y en un Corte Geoelectrico de Dos Capas. Debemos hacer la observación de que el tema no está hecho en su forma general, que sería para  $n$  capas.

Esperamos que la presente obra sirva de consulta a las personas interesadas en el tema.



## INDICE.

	Página.
I. GENERALIDADES.	1
II. METODOS ELECTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.	6
- Resistividad Aparente(Definición).	7
- Arreglos Electrónicos Lineales (Descripción).	8
- Arreglos Dipolares(Descripción).	9
- Arreglos Electrónicos Compuestos.	12
II.1 TEORIA DEL SONDEO ELECTRICO VERTICAL.	12
II.1.1 Corte Geoelectrico.	13
II.1.2 Sistema de Potación.	13
II.1.3 Parámetros y Funciones de Dar Zarrouk.	14
II.1.4 Pseudo-Anisotropía.	16
II.1.5 Funciones de Dar Zarrouk.	17
II.1.6 Distribución Vertical de Resistividades en un Corte Geoelectrico Estratificado Cualquiera.	18
II.1.7 El Problema Directo para Medios Estratificados.	19
II.1.8 Resistividad Aparente.	20
II.1.9 La Función Característica.	28
II.1.10 La Curva de Resistividad Aparente.	29
II.1.11 Principales Propiedades de las Cuatro Funciones Fundamentales.	29

II.1.12	Práctica del Sondeo Eléctrico Vertical.	31
II.1.13	Clasificación de los STV.	31
II.1.14	Interpretación.	32
II.1.15	Principales Aplicaciones de los STV.	34
II.1.16	Sondeos Dipolares.	34
II.1.16.1	Características de los Diferentes Arreglos.	36
II.1.16.2	Interpretación.	37
II.1.16.3	Aplicación de los Sondeos Dipolares.	37
II.2	PERFILES ELECTRICOS.	37
II.2.1	Clasificación de Los Perfiles Eléctricos.	37
II.2.2	Consideraciones Teóricas (para Dos Capas).	41
II.2.3	Resolución del Problema Directo.	46
II.2.3.1	Japa Vertical.	46
II.2.3.2	Contacto Vertical entre Dos Medios con Resistividades Diferentes.	48
II.2.3.3	Heterogeneidad en Forma de Cilindro.	50
II.2.3.4	Heterogeneidad Esférica.	51
II.2.4	Trabajo de Campo.	52
II.2.5	Interpretación.	54
II.3	METODO DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES.	54
II.3.1	Circuitos de Exploración y de Emisión.	55
II.3.2	Modos de Operación.	55

II.1.12	Práctica del Sondeo Eléctrico Vertical.	31
II.1.13	Clasificación de los SEV.	32
II.1.14	Interpretación.	32
II.1.15	Principales Aplicaciones de los SEV.	34
II.1.16	Sondeos Dipolares.	34
II.1.16.1	Características de los Diferentes Arreglos.	36
II.1.16.2	Interpretación.	37
II.1.16.3	Aplicación de los Sondeos Dipolares.	37
II.2	PERFILES ELECTRICOS.	37
II.2.1	Clasificación de Los Perfiles Eléctricos.	37
II.2.2	Consideraciones Teóricas (para Dos Capas).	41
II.2.3	Resolución del Problema Directo.	46
II.2.3.1	Capa Vertical.	46
II.2.3.2	Contacto Vertical entre Dos Medios con Resistividades Diferentes.	46
II.2.3.3	Heterogeneidad en Forma de Cilindro.	50
II.2.3.4	Heterogeneidad Esférica.	51
II.2.4	Trabajo de Campo.	52
II.2.5	Interpretación.	54
II.3	METODO DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES.	54
II.3.1	Circuitos de Exploración y de Emisión.	55
II.3.2	Modos de Operación.	55

II.3.3	Fases de Trabajo.	56
II.4	METODO DE CUERPO CARGADO.	57
II.4.1	Trabajo de Campo.	57
II.4.2	Interpretación.	58
II.4.2.1	Interpretación de los Gradientes.	58
III.	LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDIOS HOMOGENEOS.	60
III.1	PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDIOS HOMOGENEOS ISOTROPICOS.	63
III.1.1	Obtención de las Expresiones de Profundidad de Investigación para Diferentes Arreglos Electródicos.	66
III.2	PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDIOS HOMOGENEOS ANISOTROPICOS.	71
III.2.1	Obtención de las Expresiones de Profundidad de Investigación para Diferentes Arreglos Electródicos.	72
III.2.1.1	Estratificación Inclinada.	72
III.2.1.2	Estratificación Horizontal.	77
III.2.1.3	Estratificación Vertical.	79
IV.	LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN UN CORTE GEOELECTRICO DE DOS CAPAS.	80

IV.1	ALGUNOS EJEMPLOS, SUMATORIOS, DOS EJEMPLOS Y UN EJEMPLO MODIFICADO.	81
IV.2	ALGUNOS EJEMPLOS.	85
CONCLUSIONES.		85
a.-	MEDIOS HOMOGENEOS ISOTROPICOS.	89
b.-	MEDIOS HOMOGENEOS ANISOTROPICOS.	94
c.-	MEDIO ESTRATIFICADO DE DOS CAPAS.	100
BIBLIOGRAFIA.		109
APENDICES.		112
-	APENDICE A	
	EQUIVALENCIA ELECTROSTATICA.	113
-	APENDICE B	
	OBTENCION DEL POTENCIAL EN UNA TIERRA HOMOGENA.	115
-	APENDICE C	118
-	APENDICE D	
	OBTENCION DEL POTENCIAL EN UNA TIERRA ESTRATIFICADA HORIZONTALMENTE (FORMA GENERAL Y FORMA DE DOS CAPAS).	121

**I. GENERALIDADES.**

La Geofísica se define como la ciencia que trata del estudio de la física de la tierra. A grandes rasgos, se puede dividir en dos partes:

a.- Geofísica Pura, que se ocupa del estudio de la gravedad, magnetismo, electricidad y sismología terrestre, pero también comprende los estudios de la vulcanología, geodinámica, climatología, oceanografía y otras ciencias relacionadas con la tierra.

b.- Geofísica Aplicada, que trata de la aplicación de la geofísica pura. También se le conoce con el nombre de Prospección Geofísica, definida como el arte de aplicar las ciencias físicas al estudio de la parte más superficial de la corteza terrestre, que puede ser explotada por el hombre.

#### -Clasificación de los Métodos Geofísicos de Exploración.

Los métodos geofísicos estudian la repartición en profundidad de alguna determinada propiedad física de las capas del subsuelo, ó de alguna característica relacionada con dicha propiedad. O sea que, la prospección geofísica consiste en determinar las variaciones de dichas propiedades sobre la zona a explorar.

Dentro de la diversidad de técnicas prospectivas destacan cinco grupos principales que son: gravimétrico, magnético y radiométrico, los cuales son métodos de campo natural, y eléctrico y sísmico, que son métodos de campo artificial y natural.

En los métodos de campo natural, se estudian las perturbaciones que determinadas estructuras ó cuerpos producen sobre campos pre-existentes, como por ejemplo, el de la gravedad terrestre y el geomagnético; en tanto que el de campo artificial es creado por el explorador, lo que presenta la gran ventaja de que puede darle las características más adecuadas para el fin propuesto.

**El Método Gravimétrico.**— Se basa en el campo natural de la gravedad y estudia la variación de la componente vertical del campo gravimétrico terrestre. Los diferentes tipos de rocas tienen densidades diferentes y las rocas más densas ejercen mayor atracción gravitacional.

Su empleo principal es en reconocimientos exploratorios para la búsqueda de petróleo y para estudios de geología regional.

**El Método Magnético.**— La tierra, al comportarse como un imán natural, da lugar al campo magnético terrestre. Las pequeñas variaciones de este campo, pueden indicar la presencia de materiales magnéticos. Este método se utiliza como reconocimiento general en prospección petrolera y geología regional y de detalle en prospección minera.

**El Método Sísmico.**— Produciendo movimientos artificiales en el terreno y registrando los tiempos de llegada de las ondas producidas, una vez reflejadas y refractadas en las distintas formaciones geológicas, podremos llegar a una imagen muy aproximada de las discontinuidades geológicas.

El método sísmico se clasifica en tres tipos:



el de reflexión, el de refracción y el sismoelástico.

**El Método Radiométrico.**- Utiliza la propiedad que tienen algunos elementos de emitir radiaciones y de esta forma poder detectarlos. Actualmente el elemento de mayor importancia económica es el uranio.

**El Método Eléctrico.**- Utiliza las variaciones de las propiedades eléctricas de las rocas y minerales.

Existen muchas modalidades en el método, cada una de ellas con su propio campo de aplicación, sus ventajas y sus defectos. A continuación se da una clasificación, breve, de dichas modalidades (Crellana, 1972):

**I.- Métodos de Campo Natural.**

- a.- Método de Potencial Espontáneo.
- b.- Método de Corrientes Telúricas.
- c.- Método Magneto-Telúrico.

**II.- Métodos de Campo Constante (Corriente Continua).**

- a.- Método de las Líneas Equipotenciales y del Cuerpo Cargado.
- b.- Sondeos Eléctricos.
- c.- Perfiles Eléctricos.

**III.- Métodos de Campo Variable.**

- a.- Sondeos de Frecuencia.
- b.- Sondeos por Establecimiento de Campo.
- c.- Perfiles Electromagnéticos.

**IV.- Método de Polarización Inducida.**

### Principales Aplicaciones de Los Métodos Eléctricos.-

- 1.- Estudios para la localización de aguas subterráneas.
- 2.- Localización de yacimientos minerales.
- 3.- Investigaciones aplicadas a la geotecnia.
- 4.- Estudios tectónicos, para la búsqueda de petróleo.
- 5.- Estudios de zonas muy profundas de la corteza terrestre.
- 6.- Diversas investigaciones como la arqueología, etc.

Los métodos eléctricos exigen el conocimiento de las propiedades electromagnéticas de las rocas y de los minerales que las constituyen. Estas propiedades se expresan por medio de tres magnitudes físicas, que son: la resistividad eléctrica  $\rho$  (ó su inversa, la conductividad  $\sigma$ ), la constante dieléctrica  $\epsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ .

El trabajo que se desarrolla a continuación se basa en la resistividad eléctrica.

## II. MÉTODOS ELÉCTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.

## II. MEDIDAS RESISTIVAS EN CORRIENTES JOYNTAS.

Resistividad aparente (definición).- Si consideramos un subcualco homogéneo, de resistividad  $\rho$ , en cuya superficie colocamos un dispositivo AMN (Fig. II.1) en donde



FIG. II.1

se conecta el electrodo A a un generador de corriente, que produzca un campo, que a su vez es estudiado por los electrodos M y N, que están conectados a un voltímetro; además, se supone un electrodo B en el infinito. Entonces si  $AM = r$  y  $MN = a$

$$\Delta V = U_{MN} = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right) = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{a}{r(r+a)}$$

Ver Apéndice A.

y despejando  $\rho$ :

$$\rho = 2\pi \frac{r(r+a)}{a} \frac{\Delta V}{I}$$

que es la resistividad de un subcualco homogéneo;

$$\rho_a = 2\pi r \frac{(r+a)}{a} \frac{\Delta V'}{I}$$

que es la resistividad aparente de un subcualco heterogéneo; además

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{\Delta V'} = a$$

que es la resistividad aparente, considerada como anomalía, en donde:  $\Delta V$  en un medio homogéneo de  $\rho = 1$  y  $\Delta V'$  en un medio homogéneo de  $\rho = \rho_a$ .

Es también usual, representar a las ecuaciones de resistividad antes descritas de la siguiente manera:

$$\rho = K \frac{\Delta V}{I}$$

$$\rho_a = K' \frac{\Delta V'}{I}$$

en donde  $K$  y  $K'$  son las constantes geométricas del arreglo en particular que se este utilizando.

#### Arreglos Electrónicos Lineales (Descripción).-

Son aquellos en donde los electrodos, A, M, N y B, se encuentran sobre una misma recta. Si además se disponen simétricamente respecto de un centro C, tendremos un arreglo simétrico.

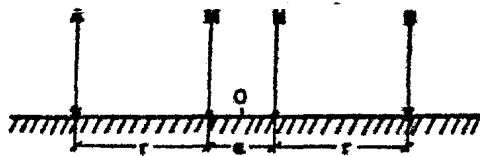
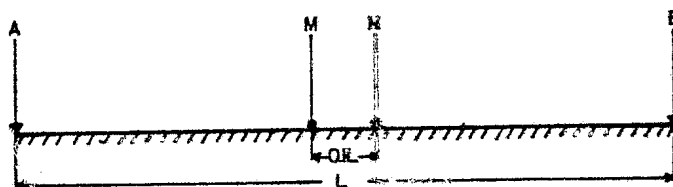


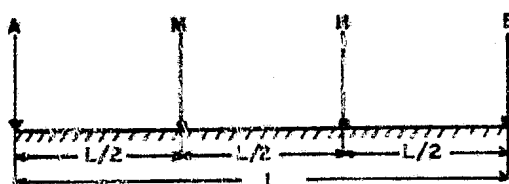
FIG. II.2. Arreglo Schumberger

Si hacemos  $AM = r$  y  $BN = a$

$$\rho = \pi \frac{r(r+a)}{a} \frac{\Delta V}{I}$$



ARREGLO DOS ELECTRODOS.

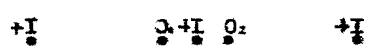


ARREGLO WENNER



2I y R estan en el infinito

ARREGLO UNIPOLO MODIFICADO



(2I - L) estan en el infinito

ARREGLO LATERAL-LOG DE SUPERFICIE

ARREGLOS ELECTRODICOS LINEALES

y si  $AM=BN=2a$  ó sea  $r=a$

$$\rho_a = 2\pi a \frac{\Delta V}{I}$$

resulta el arreglo llamado Wenner, en donde  $r=2\pi a$ .

Si ahora se toma a  $AM=BN=2a$  y  $MN=a$

$$\rho_a = \pi \left( L^2 - \frac{a^2}{4} \right) \frac{\Delta V}{Ia}$$

que es la fórmula general para arreglos lineales simétricos.

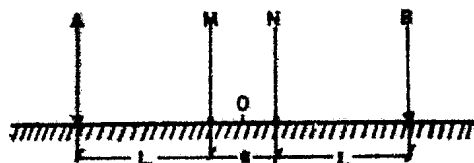


FIG. II.3. Arreglo eléctrico lineal y simétrico

De la misma manera, la fórmula para calcular la  $\rho_a$  en un arreglo Schlumberger, considerando  $AM=AL/5$  es

$$\rho_a = \pi \frac{r(r+a)}{a} \frac{\Delta V}{I}$$

Arreglos bipolares (Descripción).- Si consideramos un arreglo bipolar en el que el dipolo MN forme un ángulo cualquiera  $\psi$  con el radio vector (fig. II.4), entonces - solo actuara la componente  $E\psi$  del campo, que valdrá:

$$E\psi = E_0 \cos \psi + E_0 \sin \psi$$

---- II.4

$$E_r = \frac{M}{R^3} \cos\theta \quad \text{--- II.2}$$

$$E_\theta = \frac{M}{R^3} \sin\theta \quad \text{--- II.3}$$

$$M = \frac{I \rho}{2\pi} \cdot AB \quad \text{--- II.4}$$

y sustituyendo en II.1 a II.2 y II.3

$$E_y = \frac{M}{R^3} (2\cos^4\theta \cos\theta + \sin^4\theta \sin\theta) \quad \text{--- II.5}$$

y aplicando II.4

$$E_y = \frac{I \rho AB}{2\pi R^3} (2\cos^4\theta \cos\theta + \sin^4\theta \sin\theta) \quad \text{--- II.6}$$

finalmente, despejando  $\rho$  y multiplicando  $E_y$  por  $\Delta V/\overline{MN}$ :

$$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{AB \overline{MN}} (2\cos^4\theta \cos\theta + \sin^4\theta \sin\theta)^{-1} \frac{\Delta V}{I} \quad \text{II.7}$$

donde como resultado la ecuación general para correglos dirigidos.

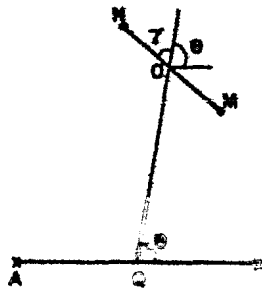
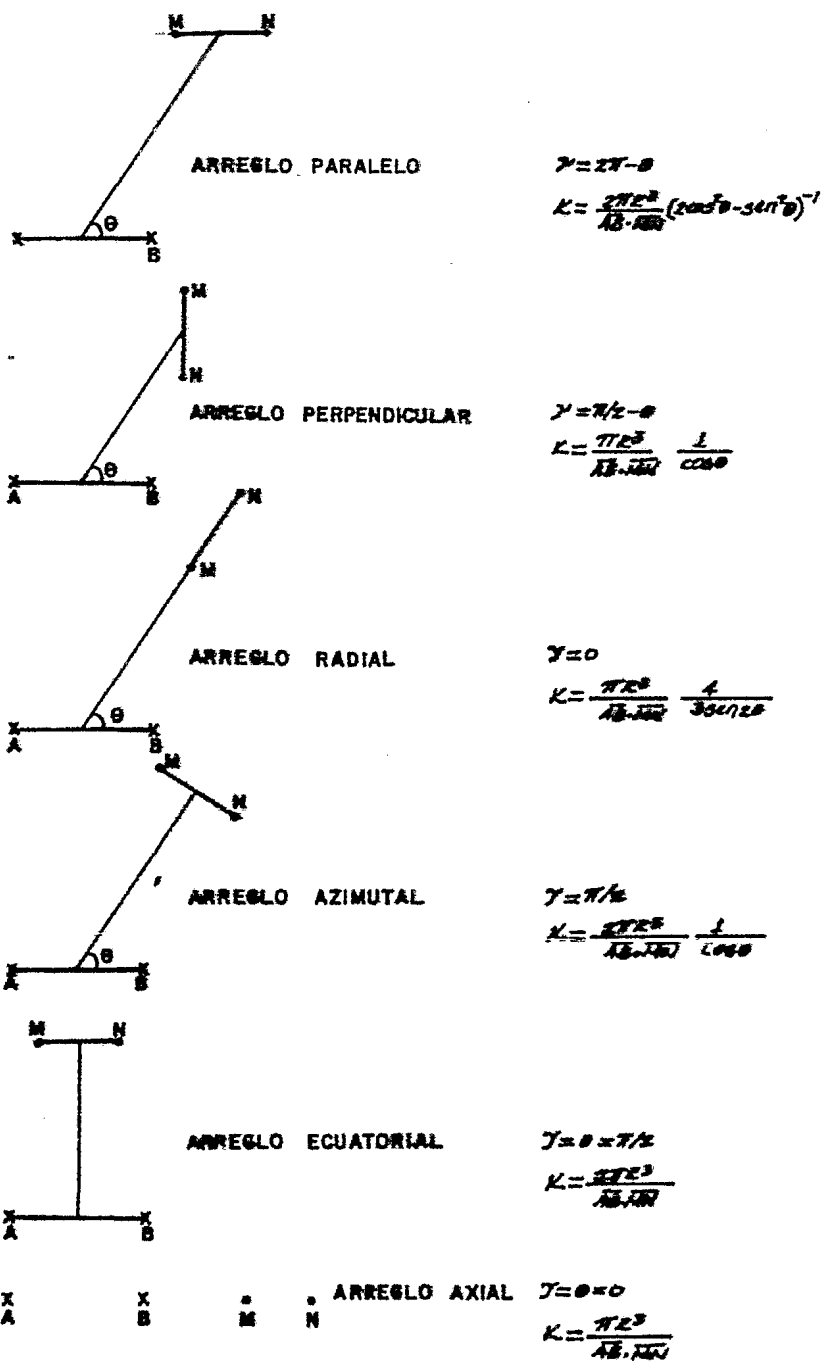


FIG. II. 4. Definición del ángulo  $\theta$





Arreglos Eléctricos Jorjados.- Se dividen en dos:

- Arreglos de Agrupación.- A estos arreglos se les agrega un electrodo de recepción P, el cual está colocado entre los dos nominales M y N y alineado con ellos, de tal forma que las dos diferencias de potencial entre M y P y entre N y P sean iguales.
- Arreglos Apantallados.- Aquí, el electrodo adicional es de corriente y su polaridad debe coincidir con uno de los electrodos A ó B.

### III.2 REGLA DEL PUNTO MEDIDOR VERTICAL.

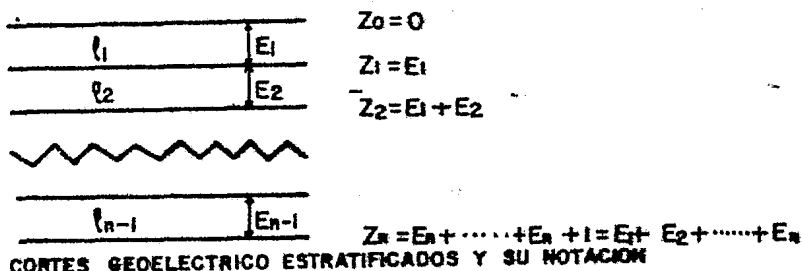
Un sondeo eléctrico vertical es una serie de determinaciones de resistividad aparente, efectuadas con el mismo tipo de arreglo eléctrico y separación creciente entre ellos. Cuando el arreglo es simétrico ó asimétrico con un electrodo en el infinito y durante la medición permanecen fijos el azimut y el centro M, se le llama Sondeo Eléctrico Vertical (SEV).

La finalidad del SEV es averiguar la distribución vertical de resistividades bajo el punto sondeado. La mayor eficacia del método consiste en que los M se realizan sobre un terreno compuesto de capas horizontalmente homogéneas en lo que respecta a la resistividad y azimut, es por planos paralelos a la superficie del terreno.

También se empleará el método eléctrico para arreglos dipolares.

### II.1.1 Corte Geoelectrico.

Sea un medio estratificado, compuesto por dos semi-espacios, el primero representado por la atmosfera de conductividad nula y el segundo que representa el terreno; es un medio heterogeneo compuesto de medios parciales homogeneos e isotropos, de extension lateral indefinida y superficies de separacion paralelas entre si y al plano aire-tierra.



un medio estratificado, con todos los datos representados en la fig. anterior, recibe el nombre de corte geoelectrico. Un corte geoelectrico compuesto por n capas requiere para su especificacion, el conocimiento de n resistividades y n-1 espesores o n-1 profundidades, o sea 2n-1 parametros en total.

### II.1.2 Sistema de Notacion.

Este sistema esta basado en las resistividades que pueden presentarse en determinado corte geoelectrico y es el siguiente:

a.- Corte de dos capas

$l_1 > l_2$  y  $l_1 < l_2$ , sin simbolo.

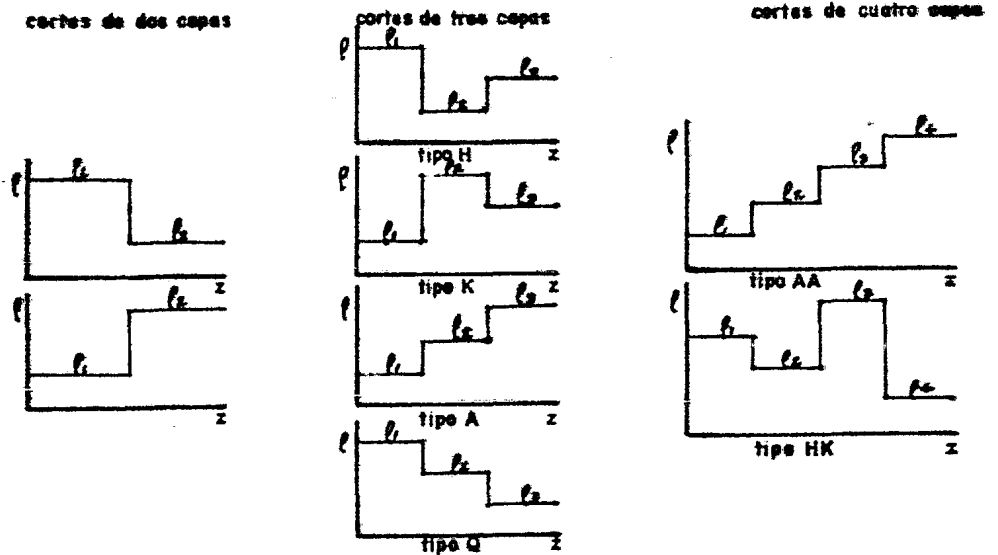
b.- H, F, i y A representan, respectivamente, los cuatro tipos posibles para cortes

de tres capas que son:

- tipo I :  $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$
- tipo J :  $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$
- tipo L :  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$
- tipo M :  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

c.- Los cortes de cuatro capas se distribuyen en ocho grupos, los cuales se forman con la combinación de las letras anteriores, H, K, A, AA, H, K, A, AA.

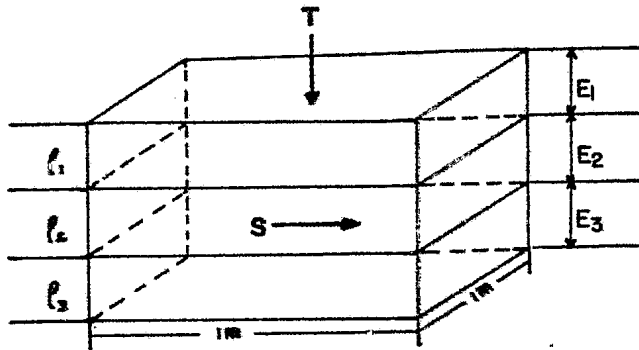
d.- Los cortes de cinco capas se simbolizan siguiendo el mismo método.



#### CURVAS DE RESISTIVIDAD VERDADERA (CRV)

11.1.3 Parámetros y propiedades de las curvas.

Para poder definirlos, consideremos un prisma recto de sección cuadrada, con eje perpendicular a la orientación de las capas y de lado igual a la unidad.



La resistencia del tronco del prisma, perteneciente a la capa  $i$ , será:

$$R_i = R_i = l_i \frac{l}{S} = l_i \frac{E_i}{1 \times 1} = l_i E_i$$

que es la resistencia transversal unitaria; el conjunto de las primeras  $n$  capas tendrá como resistencia total:

$$T = \sum_l E_i l_i \quad T (\text{ohms} \times m^2)$$

Si determinada corriente fluye paralela a la estratificación, en el prisma anterior, entonces:

$$R_i = l_i \frac{l}{S} = l_i \frac{l}{E_{i+1} l} = \frac{l_i}{E_i}$$

de donde:

$$S_i = \frac{E_i}{l_i}$$

que es la conductancia longitudinal unitaria; así, el conjunto de las  $n$  primeras capas del corte, presentará una conductancia total de:

$$S = \frac{\Sigma}{L} \frac{E_i}{\rho_i L}$$

Por supuesto,  $T$  y  $S$  son conceptos como las funciones de Van Lierck.

#### II.1.4 Hojas- anisótropas.

Para definirlas, consideremos las  $n$  primeras capas de un corte helicoidal, en donde  $E$  es el espesor total del conjunto,  $T$  la resistencia transversal unitaria y  $S$  la conductancia longitudinal unitaria. Trataremos de determinar un medio homogéneo con las mismas características.

Primero, se calcula la resistividad media que habrá de tener una sola capa del mismo espesor  $E$  que todo el conjunto, de modo que  $T$  sea la misma;  $\rho_L$  para la resistividad transversal media

$$T = E \rho_L$$

De la misma manera, podemos definir una resistividad longitudinal media  $\rho_{||}$  tal que:

$$S = \frac{E}{\rho_{||}}$$

Si  $\rho_L = \rho_{||}$  para un medio homogéneo e isotrópico con el mismo espesor  $E$  y con las mismas  $T$  y  $S$  que el paquete de capas dado. Pero también tendrá que cumplirse que  $TS = E^2$  que en general no sucede. Esto prueba que el medio equivalente es homogéneo, pero no isotrópico, lo que nos dice que un paquete de capas homogéneas e isotrópicas se comportará como un medio anisótropo. A este fenómeno se le llama hoja-anisotropía.

Númericamente, la pseudo-anisotropía puede representarse de la siguiente forma:

$$A = \sqrt{\rho_L / \rho_{II}} \quad \text{coeficiente de anisotropía}$$

$$\rho_m = \sqrt{\rho_L \rho_{II}} \quad \text{resistividad media}$$

$$\rho_L = A \rho_m$$

$$\rho_{II} = \rho_m / A$$

$$T = A E \rho_m$$

---- II.8

$$S = A \frac{E}{\rho_m}$$

#### II.1.5 Funciones de Dar Zarrouk.

$T$  y  $S$  también pueden calcularse para profundidades intermedias si el espesor de las  $n$  primeras capas es  $z_i$  y su resistencia transversal y conductancia longitudinal son  $T_i$  y  $S_i$ ; dentro de los límites de profundidad de la capa  $i+1$  se cumple que:

$$T = T_i + (z - z_i) \rho_{i+1}$$

---- II.9

$$S = S_i + \frac{z - z_i}{\rho_{i+1}}$$

de este modo,  $T$  y  $S$  se transforman en funciones de  $z$  definidas para  $z > 0$

$$T = T(z) \quad \text{y} \quad S = S(z)$$

que se pueden considerar como expresiones paramétricas de una curva  $S = S(T)$ .

De la expresión II.8, tenemos que:

$$AZ = (TS)^{1/2} \quad \text{--- II.10}$$

$$\rho_m = \left(\frac{T}{S}\right)^{1/2}$$

donde sustituimos  $z$  por  $z$  ya que aquí el espesor es igual a la profundidad.

A las ecuaciones II.10 se les llama curvas de Dar Zarrouk.

### II.1.0 Distribución Vertical de Resistividades en un Corte Geoelectrico Estratificado Cualquiera.

Esta puede especificarse de tres modos diferentes:

- a.- Tanto directamente la resistividad que corresponde a cada profundidad,  $\rho = \rho(z)$ .
- b.- Tanto la función de Dar Zarrouk,  $S = S(T)$ .
- c.- Tanto la curva de resistividades de las

$$\rho_m = \rho_m(Az)$$

con ayuda de la ecuación II.9 y conociendo un corte estratificado y cualquier profundidad  $z$ , con una capa



de resistividad  $\rho$ , siendo  $T$  y  $S$  los valores de las funciones de Dar Zarrouk para  $z$  y  $w = \rho z$ , las coordenadas del punto, se puede calcular la ecuación general de Dar Zarrouk, la cual es:

$$C e^x = \frac{w}{w^2 \rho^2} = \frac{e^y}{e^{2y} \rho^2} \quad \text{---- II.11}$$

### II.1.7 El problema Directo para Medios Estratificados.

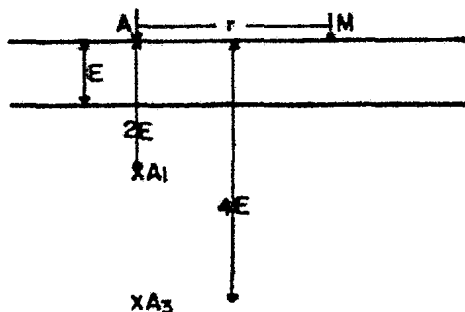
Este es la determinación del potencial producido en la superficie límite aire-tierra de un medio de este tipo, por una fuente puntual de corriente, situada en dicha superficie. Existen dos métodos, que son:

- a.- Método de las Imágenes (para dos capas)  
Supongamos que  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las resistividades de dos capas,  $F$  el espesor de la primera y  $r$  la distancia del punto de observación  $M$  al electrodo de emisión. A considerado como fuente puntual de corriente, en ausencia de la segunda capa el potencial sera:

$$V_m = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{e}{r}$$

$\rho$  = resistividad

MÉTODO DE LAS IMÁGENES  
XA<sub>2</sub>



CÁLCULO DEL POTENCIAL EN LA SUPERFICIE DE UN CORTE DE DOS CAPAS

La segunda capa se calcula incluyendo una fuente ficticia  $A_1$  de existencia  $k$  (factor de reflexión)

$$k = (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2)$$

Por existir dos superficies  $A_1$  se reflejará en la del terreno, produciendo una fuente ficticia  $A_2$  simétrica de dicha superficie, la cual se reflejará en el contacto entre las dos capas y así sucesivamente, obteniéndose la serie infinita de imágenes enunciada.

Las distancias de estas imágenes, al punto  $M$  puede calcularse mediante la expresión:

$$r_n = \left[ r^2 + (2nE)^2 \right]^{1/2}$$

$$r_n = \overline{A_n M}$$

$$\begin{aligned}
 A & \text{-----} e \\
 A_1 & \text{-----} ke \\
 A_2 & \text{-----} k^2e \\
 A_3 & \text{-----} k^3e \\
 A_4 & \text{-----} k^4e
 \end{aligned}$$

El potencial en  $M$  sera la suma del debido a la fuente real y a todas las imágenes

$$V_m = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{(r^2 + 4n^2 E^2)^{1/2}} \right]$$

la cual es la serie de lentes de convergencia para la solución del problema.

- b.- La-Integral de Stefnesco. Si utilizamos un sistema de coordenadas cilíndricas  $r, z, \phi$  con su origen en el electrodo  $A$ , entonces, en todos los puntos se cumple que  $\nabla^2 V = 0$ , excepto en  $A$ . Así, en coordenadas cilíndricas queda:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{--- II.12}$$

y usando el método de separación de variables:

$$V = R(r) \cdot Z(z) \quad \text{---- II.15}$$

substituyendo II.15 en II.12

$$\frac{1}{R(r)} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

y prosiguiendo con el método

$$\frac{1}{R(r)} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2$$

resultando que:

$$Z(z) = e^{\pm \lambda z}$$

$$R(r) = J_0(r)$$

en donde  $J_0(r)$  es la función de Bessel de primera especie y orden cero. Cualquier combinación lineal de las dos soluciones sera:

$$(A' e^{-\lambda z} + B' e^{\lambda z}) J_0(r)$$

que es la solución de la ecuación homogénea; la combinación más general se obtendrá haciendo que los coeficientes

arbitrarias  $A'$  y  $B'$  sean funciones del parámetro  $\lambda$  e integrado respecto de esta variable desde 0 a  $\infty$ :

$$V = \int_0^{\infty} \left[ A'(\lambda) e^{-\lambda z} + B'(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) d\lambda$$

para obtener la solución general del problema no homogéneo, se suma a la solución general del homogéneo una solución particular del primero:

$$V = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

A continuación, si se utiliza la integral de Weber-Lipschitz, con el fin de expresar la suma de dos soluciones en forma compacta:

$$\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda |z|} J_0(\lambda r) d\lambda$$

resultando:

$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\lambda z} + A(\lambda) e^{-\lambda z} + B(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) d\lambda$$

siendo

$$A(\lambda) = A(\lambda) I \rho_1 / 2\pi$$

$$B(\lambda) = B(\lambda) I \rho_1 / 2\pi$$

para la primera capa.

Para la segunda capa:

$$V_2 = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(\lambda) e^{-\lambda z} + D(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda$$

----- 11.14

Así que se deben determinar las funciones

$A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  y  $D(\lambda)$  por lo que, aplicando las siguientes condiciones de contorno:

$V_2 \rightarrow 0$   $z \rightarrow \infty$ , se llega a:

$$D(\lambda) = 0$$

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad \text{límite aire-tierra}$$

y aplicando a 11.14

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \int_0^{\infty} [-\lambda A(\lambda) e^{-\lambda z} + \lambda B(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda$$

lo cual se anula cuando  $z=0$  y como es  $J_0(\lambda r) \neq 0$  en  $z=0$ , debe de ser:

$$-\lambda A(\lambda) + \lambda B(\lambda) = 0$$

$$A(\lambda) = B(\lambda)$$

por tanto  $V_1 = V_2$

$$v_1 = \int_0^{\infty} \left[ e^{-\lambda z} A(\lambda) (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$v_2 = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} c(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

----- II.15

y cuando  $z=E$ ,  $v_1 = v_2$ 

$$e(\lambda) e^{-\lambda E} = e^{-\lambda E} + A(\lambda) (e^{-\lambda E} + e^{\lambda E})$$

y también cuando  $z=F$ 

$$\frac{1}{l_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)_{z=E} = \frac{1}{l_2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)_{z=E}$$

que aplicada a las ecuaciones II.15 da:

$$l_2 \left[ e^{\lambda E} + A(\lambda) (e^{-\lambda E} + e^{\lambda E}) \right] = l_1 c(\lambda) e^{-\lambda E}$$

y eliminando  $c(\lambda)$ 

$$\begin{aligned} A(\lambda) = B(\lambda) &= \frac{(l_2 - l_1) e^{-\lambda E}}{l_1 (e^{-\lambda E} + e^{\lambda E}) + l_2 (e^{\lambda E} - e^{-\lambda E})} = \\ &= \frac{(l_2 - l_1) e^{-\lambda E}}{(l_2 + l_1) e^{\lambda E} - (l_2 - l_1) e^{-\lambda E}} = \frac{k e^{-\lambda E}}{e^{\lambda E} - k e^{\lambda E}} \end{aligned}$$

----- II.16

sustituyendo II.10 en II.15

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(1 + 2 \frac{K e^{-\lambda E}}{e^{\lambda E} - K e^{-\lambda E}}\right) J_0(\lambda r) d\lambda$$

o sea:

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + K e^{-2\lambda E}}{1 - K e^{-2\lambda E}} J_0(\lambda r) d\lambda$$

En resumen, el potencial en la superficie de un medio estratificado, puede expresarse como:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

en donde  $N_n$  es una función de las resistividades y espesores de las capas del corte, así como del parámetro de integración  $\lambda$ , llamada Función Característica.

### II.1.8 Resistividad Aparente.

Ya conocido el potencial, se puede deducir la solución del problema directo, determinándose las resistividades aparentes:

a.- Para un arreglo Schlumberger. Sabemos que:

$$\rho_a = \pi r^2 \frac{E}{I} \quad \text{--- II.17}$$



además:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{I \rho_s}{2\pi a^2} \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$= \frac{I \rho_s}{2\pi} \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad \text{---- II.17}$$

substituyendo II.16 en II.17

$$I a = I_1 r^2 \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$$

en la que desaparece el divisor, porque el campo lo producen dos electrodos.

b.- Para un arreglo Wenner. Aquí:

$$\rho_a = 2\pi r \frac{\Delta V}{I}$$

en donde:

$$\Delta V = \frac{I \rho_s}{\pi} \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - \frac{I \rho_s}{\pi} \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(2\lambda r) d\lambda$$

por lo tanto:

$$\rho_a = 2\pi r \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - 2\pi r \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(2\lambda r) d\lambda$$

### II.1.9 Función característica.

La continuación se presenta mediante las:

a.- De Elichter, para tres ejes:

$$N_3(\lambda) = \frac{L+K_1 e^{-2\lambda E_1} + K_2 e^{-2\lambda(E_1+E_2)} + K_1 K_2 e^{-2\lambda E_2}}{L-K_1 e^{-2\lambda E_1} - K_2 e^{-2\lambda(E_1+E_2)} + K_1 K_2 e^{-2\lambda E_2}}$$

b.- De King. Es numéricamente igual a la de Elichter, aunque algebraicamente no.

Para pasar de una a la otra utilizamos:

$$e^{-2x} = \frac{1 - Thx}{1 + Thx}$$

que aplicada para los ejes, queda:

$$N_2(\lambda) = \frac{L+K e^{-2\lambda E}}{L-K e^{-2\lambda E}} = \frac{l_2 + l_1 ThE\lambda}{l_1 + l_2 ThE\lambda}$$

y para tres ejes:

$$N_3(\lambda) = \frac{l_2 l_3 + l_2^2 ThE_2 \lambda + l_1 l_2 ThE_1 \lambda +}{l_1 l_2 + l_1 l_3 ThE_2 \lambda + l_2 l_3 ThE_1 \lambda +}$$

$$+ \frac{l_1 l_3 ThE_1 \lambda \cdot ThE_2 \lambda}{l_2^2 ThE_1 \lambda \cdot ThE_2 \lambda}$$

c.- De Vanyan. Es, también, equivalente a la de Thiessen y para  $n$  capas es:

$$N_n(\lambda) = Th \left\{ E\lambda + Th^{-1} \left[ \frac{\rho_1 Th(\lambda E_2 + \dots + Th^{-1} \frac{\rho_n}{\tau_{n-1}})}{\rho_2} \right] \right\}$$

para  $\rho_2/\rho_1 < 1$

### II.1.10 La Curva de Resistividad Aparente.

Gráficamente, representa la solución al problema directo. Esta curva depende del tipo de arreglo eléctrico que se utilice en las mediciones y no sólo de los datos que especifican al corte geoelectrónico; está expresada por el siguiente desarrollo:

$$\rho_a(r) = \rho_1 r^2 \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$\lambda = \frac{\omega}{r} ; d\lambda = -\frac{d\omega}{r}$$

$$\begin{aligned} \rho_a(r) &= \rho_1 r^2 \int_0^{\infty} N_n(\omega, r) \frac{\omega}{r} J_1(\omega) \frac{d\omega}{r} = \\ &= \rho_1 \int_0^{\infty} N_n(\omega, r) \omega J_1(\omega) d\omega \end{aligned}$$

que es la mencionada curva.

### II.1.11 Principales Propiedades de las Cuatro Funciones Fundamentales (CEV, CPZ, FC, CEA).

Son las siguientes:

- a.- Curva de Resistividad Verdadera. Expresa la resistividad y espesor de cada capa; la función  $\rho(z)$  y su primera derivada son discontinuas en los valores de  $z$  correspondientes a los contactos. A los valores  $z=0$  y  $z=\infty$  corresponden semirectas, paralelas al eje de las ordenadas.
- b.- Curva de Dar Zarrouk. Representa la variación de la resistividad real  $\rho_m$  en función de la función de la pseudo-profundidad  $Az$ ; la función es continua pero su derivada no. A los valores  $z_0$  y  $z=\infty$  corresponden semirectas de pendientes  $\pm 1$  respectivas  $+1$  y  $-1$ , cuyas intersecciones con el eje  $z=1$  son los valores  $T$  ó  $S$  del conjunto de capas anteriores. Las capas siguientes a la que posee uno de dichos valores límites no se refleja en la curva.
- c.- Función Característica. Expresa las funciones de contorno del problema directo. Es continua así como su derivada; en los casos de  $z_0$ ;  $z=\infty$  tiene por asíntotas las semirectas de Dar Zarrouk; las capas siguientes no se reflejan en la curva.
- d.- Curva de Resistividad Aparente (arreglo Schlumberger). Representa los resulta--

dos de un SEV; es continua así como su derivada; cuando  $\rho_2 = \infty$  la curva tiene por asíntota la misma de la función característica; las capas siguientes a una de resistividad nula ó infinita no influyen en la curva.

#### II.1.12 Práctica del Sondeo Eléctrico Vertical.

Etapas principales:

- a.- Se plantea el problema y se recopilan los datos necesarios
- b.- Se elije el método.
- c.- Se programa, detalladamente, el trabajo de campo.
- d.- Se recopilan, elaboran e interpretan los datos obtenidos.
- e.- Se correlacionan con la geología, interpretan finalmente y se establecen las conclusiones y recomendaciones.

#### II.1.13 Clasificación de Los SEV.

Pueden clasificarse en cuatro grupos:

- a.- Cortos, en donde AB (distancia final) es de hasta 200 m.
- b.- Normales, en donde AB es mayor de 200 m y no superior a 2 ó 3 km.
- c.- Largos, en donde AB está comprendida entre 2 ó 3 km. y 30 ó 40 km.

- d.- Muy largos, en los cuales se ha alcanzado, para AB, el valor máximo de 600 m.

#### II.1.14 Interpretación.

Para llegar a ella, hay que cubrir dos etapas:

- Obtener la distribución de la resistividad en el subsuelo.
- Buscar el significado geológico de tales resistividades.

La interpretación puede dividirse en dos:

- a.- Interpretación Cualitativa. En esta, lo importante es conseguir una idea de la estructura del subsuelo estudiada; se efectúa por medio del trazado de mapas y cortes que representan la distribución de alguna característica de las curvas del SEV. Es conveniente desarrollar la interpretación al mismo tiempo que el trabajo de campo.

Los procedimientos más usuales son:

- Mapas de Tipos de Curvas.
- Mapas de la Conductancia Longitudinal .
- Mapas de Resistividad Aparente.
- Mapas de Coordenadas de Extremos.
- Cortes de los Mapas.
- Comparación de Curvas.

- b.- Interpretación Cuantitativa. Su finali-

dad es determinar la distribución de las resistividades en el subsuelo. Se puede decir, también, que es la resolución del problema inverso, mencionado anteriormente.

Existen varios métodos, que son:

- Método de Superposición. Consiste en la comparación de la curva de campo con las curvas teóricas, hasta encontrar una de estas que coincida con la primera.
- Método de Reducción. Aquí, se disminuyen artificialmente el número de capas de la curva de campo, sustituyendo las dos primeras por una sola equivalente a ellas y así sucesivamente; después se aplica el método de superposición.
- Método de Aproximaciones Sucesivas. Aquí, se obtiene una curva teórica. Si esta coincide con la de campo, la interpretación se considera válida. Si no coincide, se introducen modificaciones en la interpretación hasta que se obtenga una curva teórica coincidente. Esto se puede hacer por medio de aproximaciones.
- Interpretación Directa. Es aquella

es la que la curva de campo se pasa a la función característica y de ésta al corte geoelectrico.

#### II.1.15 Principales aplicaciones de los SW.

Son las siguientes:

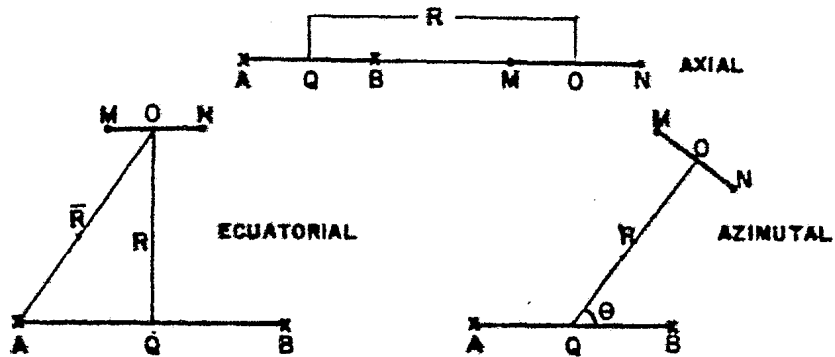
- a.- En Hidrología (los clasificados como normales).
- b.- En la Minería.
- c.- En Geotecnia. (los clasificados como cortos).
- d.- En la búsqueda petrolera (principalmente los largos).
- e.- En Geofísica aplicada (los largos).

#### II.1.16 Sondeos Dipolares.

Son aquellos en donde se hace una serie de determinaciones de la resistividad aparente, por medio de algun dispositivo eléctrico mencionado anteriormente, con separación creciente entre los centros de los dipolos y conservando el mismo arreglo.

En la práctica, solamente se utilizan el sondeo dipolar axial, el sondeo ecuatorial y el sondeo azimutal.





LOS TRES ARREGLOS MAS USADOS

Las condiciones que deben cumplir, para que la teoría de dipolos infinitesimales se satisfaga, son:

a.- Dipoles Dipolares Axiales.

$$AB \leq 0.2R$$

$$MN \leq 0.2R$$

b.- Dipoles Dipolares Ecuatoriales.

$$0.6 \leq AB \leq 1.3R$$

$$MN \leq 0.2R$$

c.- Dipoles Dipolares Azimutales.

$$AB \leq 0.6R$$

$$MN \leq 0.2R$$

$$70^\circ \leq \theta \leq 110^\circ$$

### II.1.1b.1 Características de los Diferentes Arreglos.

Son los siguientes:

- a.- Radial. Aquí, el dipolo  $LI$  se mueve siempre sobre la misma recta. Para la misma distancia  $L$ , es el de menor penetración pero es el de mayor poder resolutorio. El valor observado de  $\Delta V$  crece con el aumento de  $\theta$  desde 0 hasta  $\pi/2$ , siendo nulo para este último ángulo en terreno homogéneo. Cuando  $\theta=0$  se tiene el dispositivo Axial.
- b.- Azimutal. Su penetración es el doble que el Schlumberger. El valor de  $\Delta V$  crece con  $\theta$  y es nulo en terreno homogéneo para  $\theta=0$  y máximo para  $\theta=\pi/2$  que corresponde al arreglo Ecuatorial.
- c.- Paralelo. En este, la forma de la curva depende del ángulo  $\theta$ ;  $\Delta V$  es máximo para  $\theta=0$  y  $\theta=\pi/2$ , y mínimo para valores de  $\theta$  comprendidos entre  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , para los cuales el dispositivo se vuelve muy sensible.
- d.- Perpendicular. Tiene un gran poder resolutorio; existe un caso particular llamado Sondeo 2, en el cual el segmento  $LI$  y polarización pasa por el electrodo  $A_1$ .

### II.1.10.2 Interpretación.

Puede dividirse en:

- a.- Interpretación cualitativa. Se efectúa de la misma manera que en los SW.
- b.- Interpretación cuantitativa. También, se efectúa de la misma manera que en los SW.

### II.1.10.3 Aplicación de los Sondeos Dipolares.

Su principal campo ha sido la prospección petrolera, así como también en el estudio de las propiedades eléctricas de la corteza terrestre, a grandes profundidades.

En general, el sondeo dipolar puede utilizarse cuando existen dificultades para el tendido de líneas AB largas, cuando se requiere mayor poder resolvente que el SW, ó cuando se desean estudiar con precisión buzamientos débiles de un estrato,

## II.2 PERFILES ELÉCTRICOS.

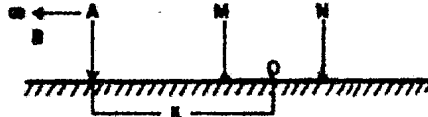
Tienen por objeto el estudio de las variaciones laterales en la resistividad del subsuelo, con investigación horizontal y profundidad aproximadamente constante.

### II.2.1 Clasificación de los Perfiles Eléctricos.

Se dividen en :

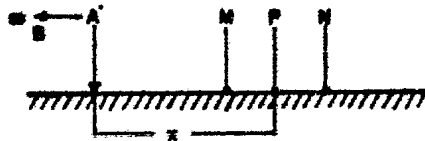
- a.- Métodos de Campo Fijo. A su vez, se dividen en:

- Método de Gradientes. Aquí, el electrodo A se mantiene fijo y los electrodos M y N son los que se van moviendo.



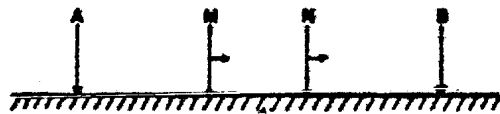
MOVIMIENTO DE LOS ELECTRODOS EN LOS PERFILES POR EL METODO DE GRADIENTES.

- Método Racom. Difiere del anterior por la adición de un tercer electrodo de potencial P, colocado entre el M y el N.



DISPOSICION Y MOVIMIENTO DE LOS ELECTRODOS EN METODO RACOM.

- Perfil Schlumberger. Aquí, ya se emplea el electrodo B colocado a una distancia finita, alineado con los demás electrodos A, M, N. Los electrodos M y N se mueven sobre el tercio central del segmento AB.



PERFIL 'SCHLUMBERGER' DE LOS ELECTRODOS DE POTENCIAL MOVILES.

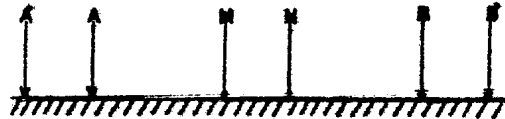
- Método de Bloques. Resulta de extender las mediciones de un perfil Schlumberger a perfiles paralelos al principal; esto es, al que pasa por los electrodos A y B. Se investiga, así, una zona cuadrada del terreno.



ELECTODOS DE EMISION Y PERFILES (LINEAS GRUESAS) EN EL METODO DE BLOQUES (EN PLANTA).

- b.- Métodos de Dispositivo Móvil. Se dividen en:

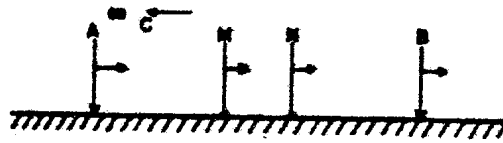
- Perfiles bipolares. Aquí, se emplean dos dipolos de emisión AA' y BB', situados simétricamente respecto del dipolo MN. Para cada posición del conjunto se efectúan dos mediciones de resistividad aparente, una con AA' y la otra con BB'.



ARREGLO ELECTRODICO EN PERFILES DIPOLARES BILATERALES.

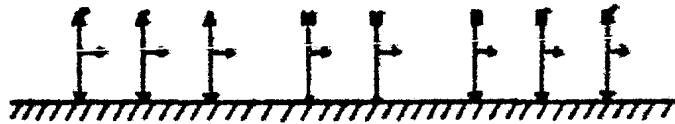
- Perfiles Trielectródicos. Se emplean dos electrodos de emisión A y B, colocados simétricamente respecto

del centro del dipolo MN y un tercer electrodo C situado en el infinito; se toman dos valores de resistividad aparente, el primero con los electrodos AMN y el segundo con BNC.



ARREGLO ELECTRODICO EN PERFILES TRIELECTRODICOS COMBINADOS.

- Perfiles de Dispositivo Simétrico. Consisten de un dispositivo simétrico de cuatro electrodos, de separación constante; pueden hacerse con dos ó tres distancias para efectuar el estudio, con otras tantas penetraciones. Estos perfiles no requieren de un electrodo en el infinito.



ARREGLO ELECTRODICO EN PERFILES SIMETRICOS CON TRES DISTANCIAS.

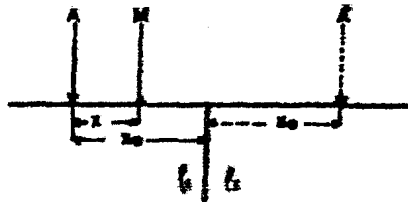
- Perfiles con Arreglos Apantallados y de Cero. Aquí, se emplea alguno de los arreglos compuestos. Se hacen una serie de determinaciones de resistividad aparente a lo lan-

go de un perfil rectilíneo, sin modificar las separaciones interelectrónicas.

- Perfiles Circulares. Aquí, el arreglo no se traslada, sino que gira alrededor de un punto fijo, que puede ser el centro del dipolo de recepción. La variable es el ángulo de azimut del arreglo. Da buenos resultados para determinar rumbos y buzamientos de filones, capas conductoras fallas etc.

### II.2.2 Consideraciones Teóricas (para dos capas).

Consideremos el caso de un contacto vertical entre dos medios, con resistividades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , en donde un electrodo A, por el cual circula una corriente de intensidad  $I$ , se encuentra a la distancia  $X_0$  del contacto; supongamos al electrodo B en el infinito.



CALCULO DE LA ANOMALIA DE POTENCIAL  
PRODUCIDA POR UN CONTACTO VERTICAL

Si se considera el primer medio:

$$V_m = \frac{\rho_l I}{2\pi} \frac{1}{x}$$

$$V_1 = \frac{e}{x} + \frac{e'}{2x_0 - x} \quad \text{--- 11.19}$$

$$x \leq x_0$$

en donde:

$$e = \frac{\rho_l I}{2\pi} \quad \text{emisividad}$$

$e'$  = emisividad en el primer medio

y en el segundo medio, el potencial será:

$$V_2 = \frac{e''}{x} \quad \text{--- 11.20}$$

$$x > x_0$$

en donde:

$e''$  = emisividad en el segundo medio

entonces, por continuidad:

$$V_1 = V_2 = \frac{e}{x} = \frac{e'}{2x_0 - x} = \frac{e''}{x} \quad x = x_0$$

$$e'' = e + e' \quad \text{--- 11.21}$$

y como la componente normal de la densidad de corriente es:



$$\frac{1}{l_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{1}{l_2} \frac{\partial V_2}{\partial x} \quad x = x_0$$

de esta manera, sustituyendo  $V_1$  y  $V_2$  por II.19 y II.20, derivando y haciendo  $x = x_0$ :

$$-\frac{1}{l_1} \left( \frac{e}{x_0^2} - \frac{e'}{x_0^2} \right) = -\frac{1}{l_2} \frac{e''}{x_0^2}$$

$$l_2(e - e') = l_1 e'' \quad \text{--- II.22}$$

si se combina II.21 y II.22:

$$e' = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1} e$$

$$e'' = 2 \frac{l_2}{l_2 + l_1} e$$

y utilizando  $\kappa = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1}$ , factor de reflexión:

$$e' = \kappa e$$

$$e'' = (1 - \kappa) \frac{l_2}{l_1} e \quad \text{--- II.23}$$

así, si se sustituye II.23 en II.19 y II.20

$$V_1 = \frac{e}{z} + \frac{K e}{2x_0 - x}$$

$$V_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{1-K}{K} e$$

sustituyendo a  $e$  por su valor:

$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{K}{2x_0 - x} \right)$$

----- II.24

$$V_2 = \frac{I \rho_2}{2\pi} \frac{1-K}{x}$$

Si suponemos que, los electrodos de potencia  $AB$  están muy cercanos, para un arreglo Schlumberger, entonces

$$\frac{\Delta V}{MN} \approx E$$

que sustituyendo en:

$$\rho_2 = 2\pi x^2 \frac{E}{I} = 2\pi x^2 \frac{\Delta V}{MNI} = 2\pi x^2 \frac{\Delta V}{I} \text{ ----- II.25}$$

entonces, para cada medio, tendremos que:

$$E_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{K}{(2x_0 - x)^2} \right)$$

$$E_2 = \frac{I \rho_2}{2\pi} \frac{1-K}{x^2}$$

que son las derivadas de II.24

Finalmente, sustituyendo en II.25:

$$\rho_a^{(1)} = \rho_1 \left[ 1 - K \frac{x^2}{(2x_0 - x)^2} \right]$$

$$\rho_a^{(2)} = \rho_2 (1 - K) = \frac{2\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Las expresiones anteriores son para cuando se considera fijo el electrodo A ó sea un arreglo inmóvil.

Ahora si se considera que el electrodo A se mueve conjuntamente con M y N, tendríamos un dispositivo móvil y su resistividad aparente sera:

$$\rho_a^{(1)} = \rho_1 \left[ 1 - K \frac{L^2}{(2x_0 - L)^2} \right] = \rho_1 \left[ 1 - \frac{K}{(2x' - 1)^2} \right]$$

$$\rho_a^{(1,2)} = \bar{\rho} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

en donde L es igual a la distancia de A al centro del dipolo MN y  $x' = x_0/L$ .

Si todo el arreglo está sobre el segundo medio entonces, la resistividad aparente está dada por:

$$\rho_a^{(2)} = \rho_2 \left[ 1 + \frac{K}{(2x' + 1)^2} \right]$$

### II.2.3 Resolución del Problema Directo.

Tridimensionalmente, los problemas más importantes son los siguientes:

- a.- Un contacto plano vertical entre dos medios de resistividades diferentes.
- b.- Una capa vertical en un medio homogéneo
- c.- Una capa vertical, que separa dos medios de diferente resistividad.

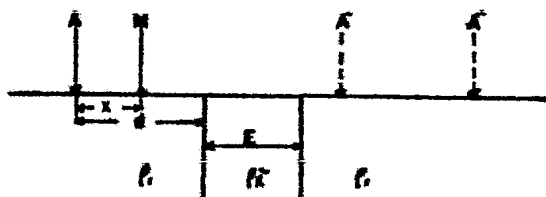
Estos casos pueden presentarse con interfaces oblicuas respecto de la superficie plana del terreno ó también se pueden presentar con recubrimiento.

Tridimensionalmente, existen problemas en los cuales las heterogeneidades tienen un tamaño limitado, ya sea en forma de prismas, esferas, elipsoides, etc. ó de conos que salen a la superficie.

A continuación, se describirán, brevemente, algunos de los casos mencionados con anterioridad.

#### II.2.3.1 Capa Vertical.

Considérese una capa vertical indefinida, de resistividad  $\rho_2$  y espesor  $E$ , intercalada en un semi-espacio homogéneo de resistividad  $\rho_1$ . A una distancia  $x$  del primer contacto se encuentra el electrodo fijo (de emisión), por el cual penetra una corriente eléctrica de intensidad  $I$ .



CALCULO DE LA ANOMALIA PRODUCIDA POR UNA HETEROGENEIDAD LIMITADA POR DOS PLANOS VERTICALES (método de los imágenes)

El potencial se mide en el electrodo N situado a la distancia  $x$  de A.

Cuando N este en el primer plano, se tendrá el siguiente potencial:

$$V_A = \frac{I\rho_1}{2\pi} \frac{1}{x}$$

si se suma el de la imagen  $A'$ :

$$V_{A'} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \frac{K}{2d-x}$$

y sumando la enésima imagen  $A_n$  de esta serie, se producirá en N el siguiente potencial:

$$V_{A_n} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \frac{(1-K^2)K^{2n-1}}{2d+2nE-x}$$

y el potencial total seras

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{K}{2d-x} + (1-K^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n-1}}{2d+2nE-x} \right)$$

Ahora, si sustituimos a N por un dipolo de medición Schlumberger, obtendremos la componente  $E_x$  (derivando y cambiando de signo):

$$E_x = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{K}{(2d-x)^2} + (1-K^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n-1}}{(2d+2nE-x)^2} \right]$$

De la misma manera, en el tercer medio se ten-

donde:

$$V_s = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{z^2 + 2En}$$

y la componente  $x$  del campo será:

$$E_x = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(z + 2En)^2}$$

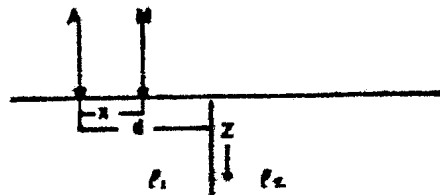
Finalmente, el potencial en  $V$  es:

$$V_2 = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1 + k) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{2nE + z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{2d - z + 2nE} \right]$$

y el campo en  $x$  es:

$$E_x = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1 + k) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(2nE + z)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{(2d - z + 2nE)^2} \right]$$

### II.2.5.2 Contacto Vertical entre Dos Medios con Resistividades Diferentes.



ILUSTRACION DEL METODO DE LONG

Por la simetría del problema, se cumple con la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

La cual puede descomponerse en:

$$V = R(r) \cdot X(z)$$

y así:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 R$$

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = \lambda^2 X$$

cuyas soluciones son:

$$R = J_0(\lambda r)$$

$$X = e^{\pm \lambda z}$$

y su solución lineal es:

$$V = \int_0^{\infty} A(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) dr + \int_0^{\infty} B(\lambda) e^{\lambda z} J_0(\lambda r) dr$$

que, añadiendo una solución particular (para el primer medio) del problema no homogéneo, que puede ser:

$$\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r) d\lambda$$

entonces, los potenciales para el primer y segundo medio son:

$$V_1 = \int_0^{\infty} \left[ e^{\lambda z} A_1(\lambda) e^{-\lambda z} + B_1(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$V_2 = \int_0^{\infty} \left[ A_2(\lambda) e^{\lambda z} + B_2(\lambda) e^{-\lambda z} \right] J_0(\lambda r) d\lambda$$

que, aplicandoles condiciones de contorno, quedan:

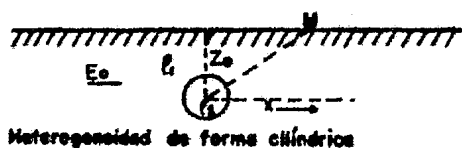
$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \frac{K}{[(z-d-x)^2+r^2]^{1/2}} \right\}$$

$$V_2 = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1+K) \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1+K}{(z^2+r^2)^{1/2}}$$

### II.2.3.3 Heterogeneidad en Forma de Cilindro.

Supongase un cilindro horizontal de radio  $R$  y resistividad  $\rho_2$ , intercalado en un subsuelo de resistividad  $\rho_1$ , a una profundidad  $z_0$  y teniendo al electrodo que crea el campo muy distante.





Heterogeneidad de forma cilíndrica

Partiendo de la ecuación de Laplace y haciendo todas las consideraciones convenientes, se determina que, en el interior del cilindro, el potencial es:

$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos n\phi r^n$$

De igual forma, en el exterior del cilindro se tendrá el siguiente potencial:

$$V_1 = -E_0 r \cos\phi - k E_0 \frac{R^2}{r} \cos\phi$$

y derivando  $V_1$  respecto de  $x$ , se tendrá el campo en la dirección de  $x$ :

$$E_x = E_0 + k E_0 R^2 \frac{(x^2 - z^2)}{r^4}$$

#### II.2.3.4 Heterogeneidad Esférica.

Supongamos una esfera de radio  $R$  y resistividad  $c_2$ , intercalada en un terreno homogéneo de resistividad

$c_1$ , de modo que su centro se encuentra a la profundidad  $z_0$ , y un campo uniforme de intensidad  $E_0$ .



Entonces, el potencial y el campo en el interior de la esfera son:

$$V_2 = \left(-E_0 + \frac{B_1}{R^3}\right) r \cos \theta$$

$$E_z = -\frac{\partial V_2}{\partial z} = E_0 - \frac{B_1}{R^3}$$

; el potencial, en el exterior, será:

$$V_1 = \left[-E_0 r + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_2 + \rho_1} E_0 \frac{R^3}{r^2}\right] \cos \theta$$

#### II.2.4 Errores de Campo.

La principal diferencia, respecto del V.M., radica en que los electrodos M y N se desplazan después de cada lectura. La forma de estabilizar la posición de las estaciones es por medio de un estacado previo.

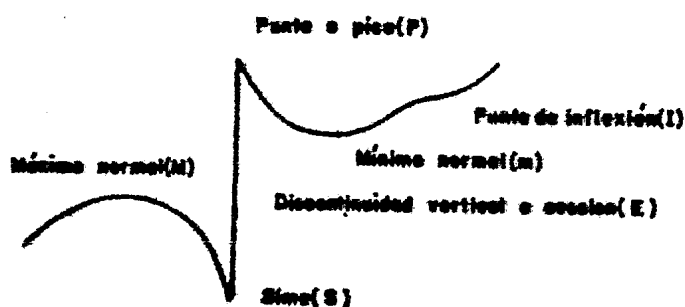
En las hojas de campo se anotan los valores  $\Delta V$  e  $Z$  observados para cada estación; en lo que respecta a las

observaciones, se debe anotar los accidentes topográficos, caminos y cualquier otra referencia de interés.

Es importante, también, anotar las características del arreglo que se este empleando, así como también la separación entre estaciones.

Las anomalías típicas son:

- Contacto entre dos medios.
- Capas anchas.
- Capas delgadas.
- Las producidas por el relieve del terreno.



**PUNTOS CARACTERÍSTICOS Y SUS SIMBOLOS EN LAS CURVAS DE PERFILES ELECTRICOS.**

### II.2.5 Interpretación.

También, se divide en:

a.- Interpretación Cualitativa. Se empieza examinando las curvas, con el objeto de seleccionar las anomalías de interés, que a su vez se comparan con el mapa geológico de la zona ó con información subterránea, si se tiene.

La siguiente es hacer una correlación entre las anomalías de los diferentes perfiles. También se puede interpretar por medio del trazado de mapas de resistividad aparente.

b.- Interpretación Cuantitativa. Aquí, la finalidad es determinar el buzamiento, la posición de los contactos y la anchura de determinadas capas, siguiendo los pasos necesarios y adecuados.

Todo buen resultado depende de la calidad de las mediciones y del espesor del recubrimiento.

### II.3 MÉTODO DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES.

Consiste, en esencia, en el estudio y trazado de las líneas equipotenciales del campo producido por uno ó varios electrodos.

Los inconvenientes de este método son su sensibilidad frente a los accidentes topográficos, su pequeña pen-

tración y la dificultad en el cálculo de profundidades.

### II.3.1 Circuitos de Exploración y de Emisión.

A continuación, se describen brevemente:

a.- Circuito de Exploración. Consta, básicamente, de un instrumento cero unido por medio de cables a dos electrodos en forma de varilla, con mango aislante, de un metro de longitud y uno ó dos metros de diámetro.

El instrumento cero puede ser:

- un galvanómetro.
- un mili-voltímetro.
- un micro-amperímetro.

b.- Circuito de Emisión. Esta formado por:

- un generador (dínamo, alternador, oscilador de válvulas).
- cables de conexión.
- electrodos lineales.

### II.3.2 Modos de Operación.

Principalmente, son dos los modos de operación y a continuación se describen:

a.- Se sigue directamente sobre el terreno la marcha de las líneas de igual potencial, colocando uno de los electrodos en un punto de la equipotencialidad que se estudia, y el segundo en un punto arbitrario, y se lee el instrumento.

Manteniendo fijo el primer electrodo, se va desplazando el segundo, hasta que la lectura del instrumento sea cero. En el lugar del primer electrodo se coloca una estaca; luego, el primer electrodo pasa al lugar del segundo y este vuelve a desplazarse en busca de un nuevo punto y de esta manera se van encontrando puntos del mismo potencial.

- b.- Se traza, previamente, sobre el terreno un sistema de perfiles paralelos entre si y perpendiculares a los electrodos lineales y a lo largo de ellos se va midiendo la caída de potencial en intervalos fijos y contiguos, y partiendo de estos datos, se trazan las equipotenciales en el plano.

### II.3.3 Fases de Trabajo.

Son las siguientes:

- a.- Se elige la ubicación de los electrodos lineales.
- b.- Se hace la corrección del campo.
- c.- Se trazan las líneas equipotenciales, las cuales van acompañadas del levantamiento topográfico.

### II.3.4 Interpretación.

Es preferentemente cualitativamente. Esto se

debe principalmente a que los cuerpos que se buscan tienen forma irregular.

Al efectuarse la interpretación ha de tenerse cuidado con las anomalías producidas por efectos topográficos ó por variaciones en el medio encajonante.

Una vez localizadas las anomalías de interés, es conveniente estudiarlas con un segundo método geofísico.

#### II.4 METODO DE CUERPO CARGADO.

En este método, es necesario que el cuerpo conductor sea accesible desde el exterior y que la conductividad del cuerpo sea notablemente mayor que la del medio encajonante.

La información obtenida se refiere principalmente a la forma, tamaño y posición del cuerpo cargado.

##### II.4.1 Trabajo de Campo.

El método puede aplicarse de dos maneras:

- a.- El trazado de líneas equipotenciales.
- b.- El método de gradientes, en donde se miden las diferencias de potencial entre estacas contiguas y relativamente próximas entre sí.

Los perfiles deben tener orientación perpendicular al rumbo supuesto para la dimensión mayor del cuerpo investigado.

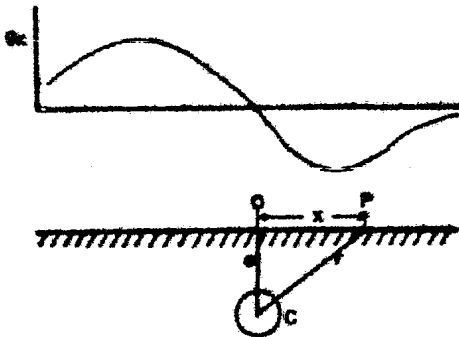
#### II.4.2 Interpretación.

La interpretación de los mapas de equipotencia les requiere comprensión del fenómeno que las origina.

Las líneas equipotenciales que se determinan en el trabajo de campo no son otra cosa que la intersección de las superficies indicadas con la superficie del terreno, por lo que tendrán una forma muy parecida a la proyección del cuerpo en un plano horizontal, si es que éste no está muy profundo. El tamaño del cuerpo puede ser calculado si se conoce la línea equipotencial que corresponde a la superficie exterior del cuerpo.

##### II.4.2.1 Interpretación de los Gradientes.

Para el caso más sencillo, considerese un cuerpo esférico, en donde 'a' es el centro; 'x' y 'r' las distancias para un punto cualquiera.



VARIACION DE GRADIENTE  $G_x$  SOBRE UN CUERPO CARGADO.

El potencial en la superficie del terreno será.

$$V = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + r^2)^{1/2}}$$



y el gradiente:

$$Gz = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

y tomando la derivada:

$$\frac{\partial Gz}{\partial z} = -\frac{\rho I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{z(a^2 + z^2)^{-3/2}}{1} \right] = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{2z^2 - a^2}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right]$$

que indica que los extremos de la curva de gradientes están situados simétricamente respecto del epicentro de la esfera  $x_c = \pm a/\sqrt{2}$ . Por lo tanto, la profundidad del centro de la esfera puede determinarse a partir de la distancia  $d = 2z_c$  entre los extremos de la curva mediante:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} d \approx 0.71d = 1.41x_c$$

Aquí, no es posible determinar el radio de la esfera debido a que la posición de los extremos solo depende de la profundidad del cuerpo.

III. LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDICOS HOMOGENEOS.

### III. LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS ELÉCTRICOS. 61

Profundidad de investigación (definición).— La profundidad de investigación es un concepto importante en los métodos eléctricos. Podemos definirla como aquella profundidad que más contribuye al total de la señal medida en la superficie del terreno.

Por mucho tiempo, la profundidad de investigación ha sido considerada como sinónimo de profundidad de penetración de la corriente, o inferida de la distribución de la corriente en general; también se ha supuesto que un mayor porcentaje de corriente fluyendo a más profundidad significa, necesariamente, una mayor profundidad de investigación. Sin embargo la distribución de líneas de corriente o su profundidad de penetración no es indicativo de la profundidad de investigación; esto se comprueba considerando cualquier sistema electródico y su recíproco (por recíproco entendemos el intercambio de los electrodos de corriente por los de potencial y viceversa).

Si la profundidad de investigación es en ambos idéntica, su profundidad de penetración es distinta. Por el contrario, si su profundidad de penetración es idéntica, su profundidad de investigación es distinta.

Podemos decir que la profundidad de penetración es función de la estructura y composición del terreno, así como de las posiciones de los electrodos de corriente, mientras que la profundidad de investigación es no solamente función de lo antes mencionado sino también de las posiciones de los electrodos de potencial.

Ha habido una serie de ideas y suposiciones con respecto a la mencionada profundidad de investigación --- que si en un arreglo Wenner o Schlumberger la profundidad de investigación es  $L/3$ , donde  $L$  es el espaciado entre electrodos de corriente; que si los puntos de inflexión en la curva de resistividad aparente dan las profundidades de interfase, multiplicando a  $L$  por una constante numérica que, generalmente, se toma como la unidad, etc. - suposiciones que se han hecho sin base, hasta que Evjen (1938) estableció el concepto de profundidad de investigación de la manera en que aquí se definió previamente.

Como es sabido, en métodos resistivos de corriente directa, la señal medida en la superficie del terreno es una diferencia de potencial. Parece difícil evaluar qué porción de la señal medida en superficie viene de cualquier elemento volumétrico del terreno que no está en contacto directo con los puntos de medición del potencial; sin embargo debido a la equivalencia de las líneas de corriente estacionarias -- entre 2 fuentes puntuales en un medio conductor, con las líneas electrostáticas de fuerza entre 2 cargas puntuales de electricidad en un medio dieléctrico, se puede pensar que los elementos volumétricos sometidos a una corriente directa adquieren una polarización de momento dipolar:

$$M = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial s} \cdot ds \cdot dS \quad \text{III.1}$$

en donde  $V$  es el potencial eléctrico debido a las fuentes de corriente,  $s$  es la dirección del campo eléctrico en el elemento de volumen en turno,  $S$  es su sección transversal normal a  $s$  y la derivada es evaluada en ese punto. Cada elemen-

to de volumen del terreno se comporta como un dipolo inducido y su contribución individual al total de la señal medida está dada precisamente por la diferencia de potencial (electroestática) que causa en los puntos de medición en la superficie del terreno. Al sumar o integrar todas las contribuciones para todo el semi-espacio, se llega al valor de la corriente total.

Ver Apéndice A

Al integrar las contribuciones de los elementos de volumen sobre un plano horizontal XY (paralelo a la superficie del terreno) resulta lo que se llama "La Característica de la Profundidad de Investigación" (CPI) (Doll, 1949) para el correspondiente sistema electródico. El CPI es una curva que muestra la variación con respecto a la profundidad Z de la contribución hecha por una capa horizontal delgada del terreno a la señal medida. Para un suelo homogéneo el CPI empieza con un valor cero a una profundidad cero y da un máximo antes de caer a cero para grandes profundidades. Este comportamiento le permite a uno definir la profundidad de investigación de un sistema electródico como aquella profundidad en donde el CPI alcanza el valor máximo. La profundidad de investigación, de acuerdo a esta definición, es la profundidad de la contribución más grande a la señal recibida en la superficie del terreno.

### III.1. PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDIOS HOMOGENEOS ISOTROPOS.

Hagamos coincidir el plano XY con la superficie del terreno, manteniendo el eje Z perpendicular y hacia -

abajo del antes mencionado plano, colocando un electrodo de corriente de magnitud  $+I$  en  $(0,0,0)$ , un electrodo de potencial  $P_1$  en  $(a,0,0)$ , otro electrodo de potencial  $P_2$  en  $(a+b,0,0)$  y el otro electrodo de corriente de magnitud  $-I$  en  $(a+b+c,0,0)$ , en donde  $a, b$  y  $c$  son cualesquier distancias. Entonces, el potencial en cualquier punto  $(x,y,z)$  en un semi-espacio isotrópico homogéneo de resistividad  $\rho$  es:

$$V(x,y,z) = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{\{(x-a-b-c)^2+y^2+z^2\}^{1/2}} \right]$$

III.2

Ver Apéndice B

Los momentos dipolares del elemento de volumen en  $(x,y,z)$  seran proporcionales al campo eléctrico en ese punto y se pueden tomar como:

$$M_x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$M_y = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz$$

III.3

$$M_z = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy$$

en las direcciones  $x, y, z$ .

La diferencia de potencial entre  $P_1$  y  $P_2$  causada por los momentos dipolares es:

$$dV_{A, P_2} = \left[ Mx \frac{\partial}{\partial x} + My \frac{\partial}{\partial y} + Mz \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{III.4}$$

en donde:

$$r_1 = \left[ (x-a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}; \quad r_2 = \left[ (x-a-b)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

sustituyendo las ecuaciones III.2 y III.3 en III.4 tenemos:

$$dV_{A, P_2} = \frac{\rho I}{4\pi z} dz \cdot \left[ \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(z^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \left\{ (x-a)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2}} - \frac{(x-a)(x-a-b-c) + y^2 + z^2}{\left\{ (x-a)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2} \left\{ (x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2}} - \frac{x(x-a-b) + y^2 + z^2}{(z^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \left\{ (x-a-b)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2}} + \frac{(x-a-b)(x-a-b-c) + y^2 + z^2}{\left\{ (x-a-b)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2} \left\{ (x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2}} \right] \quad \text{III.5}$$

Si se integra la ecuación III.5 sobre el plano XY de menos a más infinito para  $x'$  y  $y''$  (ver Apéndice C), se obtiene que el  $CPI$  es:

$$CPI = \int_{x=y=z=-\infty}^{x=y=z=+\infty} dV_{A, P_2} = \left[ \frac{\rho I}{4\pi z} dz \frac{8\pi z}{(a^2 + 4z^2)^{3/2}} - \frac{8\pi z}{\left\{ (b+c)^2 + 4z^2 \right\}^{3/2}} - \frac{8\pi z}{\left\{ (a+b)^2 + 4z^2 \right\}^{3/2}} + \frac{8\pi z}{(c^2 + 4z^2)^{3/2}} \right] \quad \text{III.6}$$

Integrando la ecuación III.6 con respecto a  $z$  de cero a infinito, obtenemos la respuesta total  $V_{AP_2}$  del semi-espacio:

$$V_{RR_2} = \int_{z=0}^{z=\infty} CPI = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c} \right] \quad \text{III.7}$$

La ecuación III.7 nos da la justificación para las suposiciones hechas en la ecuación III.3, incluyendo la suposición del factor de proporcionalidad de  $1/2\pi$ .

### III.1.1. Obtención de las Expresiones de Profundidad de Investigación para Diferentes Arreglos Electrónicos.

-Arreglo Wenner.- En este arreglo electrónico,  $a=b=c=L/3$ , en donde  $L$  es la distancia entre los dos electrodos activos mas alejados. Si dividimos la ecuación III.7 entre  $3\rho I/2\pi L$ , que es igual a la respuesta total del semi-espacio, obtenemos el CPI normalizado del sistema:

$$CPI(N)_{\text{Wenner}} = dz \cdot \frac{8Lz}{3} \left[ \frac{1}{(L^2/9 + 4z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(4L^2/9 + 4z^2)^{3/2}} \right]$$

-Arreglo Schlumberger.- Hagamos, en este arreglo,  $a=c=0.45L$ , y  $b=0.1L$  y de igual manera, dividiendo entre  $\rho I/2 \cdot 45\pi L$  (calculado de la ecuación III.7) encontramos, a partir de la ecuación III.7 :

$$CPI(N)_{\text{Schlumberger}} = dz \cdot 9.9Lz \left[ \frac{1}{\{(0.45L)^2 + 4z^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{0.55L^2 + 4z^2\}^{3/2}} \right]$$



-Arreglo de Dos Electrodos.- Sea, para este arreglo,  $b=c=\infty$  y  $a=l$ . Aquí, el factor de normalización es  $\frac{\rho I}{2\pi L}$ . Entonces, a partir de la misma ecuación III.º se obtiene:

$$CPI(N)_{D.E.} = dz \cdot \frac{4Lz}{(L^2 + 4z^2)^{3/2}}$$

-Arreglo Unipolo Modificado.- Para este arreglo, con una distancia  $L$  entre los dos electrodos positivos de corriente y con el de potencial  $F$  localizado entre los dos antes mencionados, el tercer y cuarto término de la ecuación III.º desaparecen; el segundo término cambia su signo;  $a=(b+c)=L/2$  y el factor de normalización se convierte en  $\frac{2\rho I}{\pi L}$  así tenemos que:

$$CPI(N)_{UNIPOL. MOD.} = dz \cdot \frac{2Lz}{(L^2/4 + 4z^2)^{3/2}}$$

-Arreglo Lateral-Log de Superficie.- Aquí, el potencial  $V_L$  en cualquier punto  $(x,y,z)$  en el terreno debido a los tres electrodos de corriente es:

$$V_L(x,y,z) = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{L}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{4Ll^2}{(L^2 - l^2)^2} \cdot \left. \frac{L}{\{(x - L/2)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}} + \frac{L}{\{(x - L)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}} \right] \right]$$

Utilizando expresiones similares a aquéllas - de la ecuación III.1 para componentes de momentos dipolares y con:

$$r = \left[ \left\{ x - (L \mp l)/2 \right\}^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

como la distancia entre  $O_1$  y  $O_2$  y el elemento de volumen en  $(x, y, z)$ , el potencial en  $O_1$  ú  $O_2$  es:

$$\begin{aligned} dV_{O_1, O_2} = & \frac{\rho I}{4\pi^2} dz \left[ \frac{x \left\{ x - (L \pm l)/2 \right\} + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \left[ \left\{ x - (L \pm l)/2 \right\}^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right. \\ & + \frac{L^3 l}{(L^2 - l^2)^2} \cdot \frac{(x - L/2) \left\{ x - (L \pm l)/2 \right\} + y^2 + z^2}{\left\{ (x - L/2)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2} \left[ \left\{ x - (L \pm l)/2 \right\}^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \\ & \left. + \frac{(x - L) \left\{ x - (L \pm l)/2 \right\} + y^2 + z^2}{\left\{ (x - L)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2} \left[ \left\{ x - (L \mp l)/2 \right\}^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right] dx dy \end{aligned}$$

### III.8

Integrando la ecuación III.8 sobre  $x$  y  $y$  de - menos a más infinito y dividiendo entre el factor de normalización  $\frac{\rho I}{\pi} \cdot \frac{2L(L^2 + l^2)}{(L^2 - l^2)^2}$  obtenemos:

$$CPI(N)_{\text{lat. log. sup}} = dz \frac{(L^2 - l^2)}{L(L^2 + l^2)} \cdot z \cdot$$

$$\left[ \frac{L}{\{(L \pm l)^2/4 + 4z^2\}^{3/2}} + \frac{4Ll^3}{(L^2 - l^2)^2} \frac{L}{(l^2/4 + 4z^2)^{3/2}} + \frac{L}{\{(L \pm l)^2/4 + 4z^2\}^{3/2}} \right]$$

-Arreglos Dipolares.- Si tenemos un electrodo de corriente  $+I$  de coordenadas  $(-l/2, 0, 0)$ , uno de potencial  $P_1$  de coordenadas  $[(L \cos \theta_1 - l \cos \theta_2/2), (L \sin \theta_1 - l \sin \theta_2/2), 0] = (A, B, 0)$ , otro de corriente  $-I$  de coordenadas  $(l/2, 0, 0)$  y otro de potencial  $P_2$  de coordenadas  $[(L \cos \theta_1 + l \cos \theta_2/2), (L \sin \theta_1 + l \sin \theta_2/2), 0] = (C, D, 0)$ , el potencial  $V_0$  en cualquier punto  $(x, y, z)$  en el terreno debido a  $+I$  y  $-I$  es:

$$V_0(x, y, z) = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{L}{\{(z + l/2)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}} - \frac{L}{\{(x - l/2)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}} \right]$$

en donde  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias del elemento de volumen en  $(x, y, z)$  a  $P_1$  y  $P_2$  siendo:

$$r_1 = \{(x - A)^2 + (y - B)^2 + z^2\}^{1/2} \quad \text{y} \quad r_2 = \{(x - C)^2 + (y - D)^2 + z^2\}^{1/2}$$

De este modo, la diferencia de potencial entre  $P_1$  y  $P_2$  causada por el elemento de volumen polarizado es:

$$dV_{0AP_2} = \frac{\rho I}{4\pi z} dz \left[ \frac{(x - A)(x + l/2 + y(y - B) + z^2)}{\{(x - A)^2 + (y - B)^2 + z^2\}^{3/2} \{(x + l/2)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(x-A)(x-l/2) + y(y-B) + z^2}{\{(x-A)^2 + (y-B)^2 + z^2\}^{3/2} \{(x-l/2)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \\
 & - \frac{(x-C)(x+l/2) + y(y-D) + z^2}{\{(x-C)^2 + (y-D)^2 + z^2\}^{3/2} \{(x+l/2)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} + \\
 & + \left. \frac{(x-C)(x-l/2) + y(y-D) + z^2}{\{(x-C)^2 + (y-D)^2 + z^2\}^{3/2} \{(x-l/2)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] dx dy
 \end{aligned}$$

## III.9

Si integramos ambos lados de la ecuación III.9 sobre  $x$  y  $y$  y dividimos entre el factor de normalización que es:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{L}{\{(l/2+A)^2 + B^2\}^{1/2}} - \frac{L}{\{(l/2-A)^2 + B^2\}^{1/2}} \right. \\
 & \left. - \frac{L}{\{(l/2+C)^2 + D^2\}^{1/2}} + \frac{L}{\{(l/2-C)^2 + D^2\}^{1/2}} \right] = \frac{\rho I}{2\pi} W
 \end{aligned}$$

obtenemos:

$$C P I (N)_{\text{dipolar}} = dz \cdot \frac{4z}{W} \left[ \frac{L}{\{(A+l/2)^2 + B^2 + 4z^2\}^{3/2}} - \right.$$

$$\frac{1}{\{(A-l/2)^2 + B^2 + 4Z^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(C+l/2)^2 + D^2 + 4Z^2\}^{3/2}} +$$

$$\left. \frac{1}{\{(C-l/2)^2 + D^2 + 4Z^2\}^{3/2}} \right]$$

Los GPI(N) para los distintos arreglos electro---tródicos se obtienen dando valores a  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $l, l, Z$  y  $dz$ .

### III.2. PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN MEDIOS HOMOGENEOS ANISOTROPOS.

Con el fin de evaluar el efecto de la aniso---tropía en la profundidad de investigación, sustituyamos el --medio anisótropo por un medio homogéneo apropiado de resisti---vidad  $\rho_m$ .

Por otra parte, la función potencial  $V(x, y, z)$  es transformada al caso anisótropo derivándola en  $z > 0$  tal -- que (1) la divergencia de la densidad de corriente es cero -- en cualquier parte y (2) la componente normal de la densidad--de corriente es cero en  $z=0$ . Además las fuentes puntuales de--corriente  $+I$  y  $-I$  son reemplazadas por cargas puntuales de --magnitud  $+\rho_m I / 2\pi$  y  $-\rho_m I / 2\pi$  respectivamente. Esta sustitu---ción es permitida si se miden potenciales electrostáticos en--lugar de señales.

Además, es bien conocido que la estratificación de las formaciones es la causa de la anisotropía y que las

formaciones de rocas anisótropas pueden tener un plano de estratificación con echados que van de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . También es sabido que  $\rho_m = \sqrt{\rho_t \rho_l}$  = resistividad media y que  $\lambda = \sqrt{\rho_t / \rho_l}$  = coeficiente de anisotropía, en donde  $\rho_t$  = resistividad transversal y  $\rho_l$  = resistividad longitudinal.

### III.2.1. Obtención de las Expresiones de Profundidad de Investigación para Diferentes Arreglos Electrónicos.

A continuación se obtendrán las expresiones para el caso de estratificación inclinada, estratificación horizontal y estratificación vertical.

#### III.2.1.1. Estratificación Inclinada.

Supóngase que el plano XY (el de medición) no coincide con el plano de estratificación, como se muestra en la figura III.1

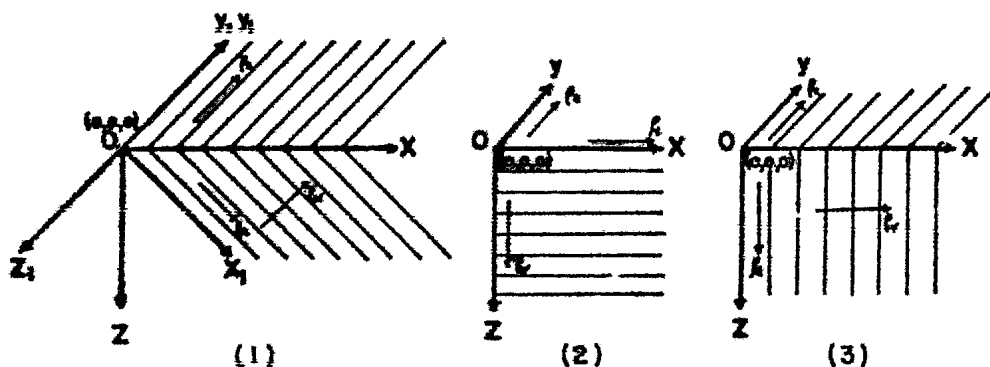


FIG. III.1 Semiespacio anisótropo. Resistividad anisotrópica como resultado de (1) estratificación inclinada:  $x_1, y_1$ , plano de estratificación;  $xy$ , superficie mira-tierra; y  $\alpha$ , echado del de estratificación. (2) estratificación horizontal (3) estratificación vertical.

Si  $X_1Y_1$  es el plano de estratificación que forma un ángulo  $\alpha$  con el plano horizontal, entonces el potencial en  $(x_1, y_1, z_1)$  está dado por:

$$V = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \cdot \frac{L}{(x_1^2 + y_1^2 + \lambda^2 z_1^2)^{1/2}} \quad \text{III.10}$$

Rotando el plano  $X_1Z_1$  sobre el eje  $Y_1$  un ángulo  $\alpha$ , obtenemos:

$$x_1 = X \cos \alpha + Z \sin \alpha$$

$$y_1 = y$$

$$z_1 = -X \sin \alpha + Z \cos \alpha$$

Sustituyendo en la ecuación III.10 tenemos que el potencial es:

$$V = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \left[ \frac{L}{(AX^2 + Y^2 + BZ^2 + 2CXY)^{1/2}} \right] \quad \text{III.11}$$

en donde:

$$A = \cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha$$

$$B = \sin^2 \alpha + \lambda^2 \cos^2 \alpha \quad \text{III.12}$$

$$C = \sin \alpha \cos \alpha (1 - \lambda^2)$$

de donde tenemos la siguiente relación:

$$A + B = \lambda^2 + 1$$

y

III.13

$$AB - C^2 = \lambda^2$$

de donde:

$$AX^2 + BZ^2 + 2C XZ = A \left[ \left( X + \frac{C}{A} Z \right)^2 + Z^2 \left( \frac{AB - C^2}{A^2} \right) \right] = X^2 + Z^2$$

en donde

$$\left( X + \frac{C}{A} Z \right) \cdot \sqrt{A} = X$$

III.14

y

$$\sqrt{\frac{AB - C^2}{A}} = Z$$

III.15

Utilizando las ecuaciones III.12 y III.13 en la ecuación III.14 se obtiene:

$$Z = \frac{\lambda}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \cdot Z \quad \text{III.16}$$

Usando las ecuaciones III.14 y III.15 en la ecuación III.11 se obtiene:



$$V = \frac{\rho_m I}{2\pi} \cdot \frac{L}{(X^2 + y^2 + Z^2)^{1/2}} \quad \text{III.17}$$

que es la expresión para el potencial en el punto  $(X, y, Z)$  debido a una fuente puntual de magnitud de corriente  $I$ , colocada sobre un medio isotrópico homogéneo semi-infinito de resistividad  $\rho_m$ .

De lo anterior se deduce que la profundidad de investigación para un medio homogéneo anisótropo semi-infinito es función de la longitud  $L$  del arreglo, el echado del plano de estratificación  $\alpha$ , del coeficiente de anisotropía  $\lambda$ , y de la profundidad  $z$ .

Las expresiones del CPI para el caso de un medio anisótropo homogéneo con un plano de estratificación inclinada se obtuvieron sustituyendo la ecuación III.16 en las expresiones del CPI para un medio isotrópico homogéneo.

A continuación se presentan las expresiones para algunos arreglos electrodoicos.

-Arreglo Wenner.- Para este arreglo, la expresión queda como sigue:

$$CPI(N)_{\text{Wenner}} = \frac{8L\lambda^2 Z}{3(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \cdot dz \left[ \frac{1}{\left[ \frac{L^2}{9} + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ \frac{4L^2}{9} + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \right]^{3/2}} \right] \quad \text{III.18}$$

-Arreglo Schottky.- Para el caso en particular en que  $L$  (distancia entre electrodos de potencial) es igual a  $C.L$ , la expresión es:

$$CPI(N)_{sch.} = \frac{9.9L\lambda^2 Z}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \cdot dz \left\{ \frac{1}{\left[ (0.45L)^2 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \right]} - \frac{1}{\left[ (0.55L)^2 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \right]^{3/2}} \right\} \quad \text{III.19}$$

-Arreglo de Dos Electrodos.- Aquí, la expresión queda de la siguiente manera:

$$CPI(N)_{D.E} = \frac{4L\lambda^2 Z}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \cdot dz \cdot \frac{1}{\left[ L^2 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \right]^{3/2}} \quad \text{III.20}$$

-Arreglo Dipolo-Axial.- Para el caso en particular en que  $L=l$ ,  $l_1=l_2=C.L$ , la expresión queda como sigue:

$$CPI(N)_{D.A} = - \frac{0.66\lambda^2 Z}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \cdot dz \left\{ \frac{2}{\left[ 0.64 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ 0.36 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2\alpha + \lambda^2 \sin^2\alpha)} \right]^{3/2}} \right\} \quad \text{III.21}$$

-Arreglo Bipolo-Dipolo.- Tomando a  $L=1$ ,  $M=0.1$  nos da la siguiente expresión:

$$CPI(N)_{D.O.} = \frac{36\lambda^2 Z}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \cdot dz \left\{ \frac{1}{\left[ 0.81 + \frac{4Z^2\lambda^2}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{4\lambda^2 Z^2}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \right]^{3/2}} \right\} \quad \text{III.22}$$

-Arreglo Unipolo Modificado.- De la misma manera, la expresión es la siguiente:

$$CPI(N)_{M.M.} = dz \cdot \frac{2L\lambda^2 Z}{\left( \frac{L^2}{4} + \frac{4Z^2\lambda^2}{(\cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha)} \right)^{3/2}} \quad \text{III.23}$$

#### III.2.1.2. Estratificación Horizontal.

Para una estratificación horizontal, el echado  $\alpha$  será igual a cero, por lo que sustituyendo su valor en las ecuaciones III.19 a III.23 y tomando en cuenta las siguientes transformaciones (1) la resistividad del nuevo medio homogéneo isótropo por  $\rho_m$  y (2) la coordenada del punto por  $x, y, z$  - en donde  $Z = \lambda z$  obtenemos las siguientes expresiones:

-Arreglo Wenner.-

$$CPI(N)_w = \frac{8L\lambda^2 Z}{3} \cdot dz \left\{ \frac{1}{\left(\frac{L^2}{9} + 4\lambda^2 Z^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(\frac{4L^2}{9} + 4\lambda^2 Z^2\right)^{3/2}} \right\} \quad \text{III.24}$$

-Arreglo de Helmholtz (er.)- (i=1, i<sub>2</sub>=0.1)

$$CPI(N)_{schl.} = 9.9 L \lambda^2 Z \cdot dz \left\{ \frac{1}{\left[(0.45L)^2 + 4\lambda^2 Z^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(0.55L)^2 + 4\lambda^2 Z^2\right]^{3/2}} \right\} \quad \text{III.25}$$

-Arreglo de los Electrodos.-

$$CPI(N)_{D.E} = 4L\lambda^2 Z \cdot dz \left\{ \frac{1}{(L^2 + 4\lambda^2 Z^2)^{3/2}} \right\} \quad \text{III.26}$$

-Arreglo Dipolo-dipolo.- (i=1, i<sub>2</sub>=i<sub>3</sub>=0.2)

$$CPI(N)_{D.A} = -66\lambda^2 Z \cdot dz \left\{ \frac{2}{(0.64 + 4\lambda^2 Z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(0.36 + 4\lambda^2 Z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + 4\lambda^2 Z^2)^{3/2}} \right\} \quad \text{III.27}$$

-Arreglo Dipolo-Dipolo.- (i=1, i<sub>2</sub>=0.1)

$$CPI(N)_{D.D} = 36\lambda^2 Z \cdot dz \left\{ \frac{L}{(0.81 + 4Z^2\lambda^2)^{3/2}} - \frac{L}{(1 + 4\lambda^2 Z^2)^{3/2}} \right\} \quad \text{III.28}$$

-Arreglo Unipolo Modificado.-

$$CPI(N)_{u.M.} = dz \cdot \frac{2L\lambda^2 Z}{(L^2/4 + 4Z^2\lambda^2)^{3/2}} \quad \text{III.29}$$

### III.2.1.3. ESTRATIFICACION VERTICAL.

Para una estratificación vertical,  $\alpha$  es igual a  $90^\circ$  (fig. III.1) y sustituyendo este valor en las ecuaciones III.18 a III.23 obtenemos las expresiones para este caso, que vienen a ser las mismas que las de un medio homogéneo isotropo.

Esto es debido a que la resistividad aparente  $(\rho_+)_a$  medida normalmente a la estratificación, esta dada por  $(\rho_+)_a = \rho_{\perp} / \lambda = \rho_{\perp}$ ; siendo esta relación consistente con el fenómeno llamado "Efecto de la Anisotropía".

IV. LA PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN UN CORTE  
GECELECTRICO DE DOS CAPAS.

En este capítulo, se tratara el desarrollo de las expresiones de profundidad de investigación en dos partes.

Una, para los arreglos Wenner, Schlumberger, - de Dos Electrodos y Unipolo Modificado y la otra para los - arreglos dipolares.

Esto debido a que el desarrollo de las antes - mencionadas expresiones parte de diferentes fórmulas de poten - cial.

IV.1. ARREGLOS WENNER, SCHLUMBERGER, DOS ELECTRODOS, Y UNIPOLO MODIFICADO.

Supongamos que, una capa de espesor  $h$  y resis - tividad  $\rho_1$ , descansa sobre un semi-espacio de resistividad  $\rho_2$ . Para el electrodo  $+I$  en  $(0,0,0)$ , los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  en cualquier punto  $(x,y,z)$  para  $0 \leq z \leq h$  y  $z \geq h$  son:

para  $0 \leq z \leq h$ .

$$V_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\{x^2 + y^2 + (z + 2nh)^2\}^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\{x^2 + y^2 + (z - 2nh)^2\}^{1/2}} \right] \quad \text{IV.1}$$

y para  $z \geq h$

$$V_2 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \cdot (1+k) \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\{x^2 + y^2 + (z + 2nh)^2\}^{1/2}} \right]$$

## IV.2

en donde  $k = (l_2 - l_1) / (l_2 + l_1)$

Ver Apéndice D

Procediendo de la misma manera, o sea, obteniendo la diferencia de potencial e integrando con respecto a  $x^*$  y  $y^*$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  (ver Apéndice D) obtenemos que, para  $z \leq h$

$$CPI = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4z}{(a^2 + 4z^2)^{3/2}} - \frac{4z}{\{(a+b)^2 + 4z^2\}^{3/2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z + 2nh)}{\{a^2 + (2z + 2nh)^2\}^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z + 2nh)}{\{(a+b)^2 + (2z + 2nh)^2\}^{3/2}} \right]$$

IV.3

para  $z \geq h$

$$CPI = (1 + K) \frac{\rho_1 I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4z}{(a^2 + 4z^2)^{3/2}} - \frac{4z}{\{(a+b)^2 + 4z^2\}^{3/2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z + 2nh)}{\{a^2 + (2z + 2nh)^2\}^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z + 2nh)}{\{(a+b)^2 + (2z + 2nh)^2\}^{3/2}} \right]$$

IV.4

El gradiente de potencial en la ción, que se obtiene integrando las ecuaciones IV.3 y IV.4 con respecto a  $z$ , desde  $z = h$  a  $z = \infty$  y  $z = 0$ , es:



$$FN = \frac{\rho_s I}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left\{ \frac{1}{(a^2 + 4n^2 h^2)^{1/2}} - \frac{1}{\{(a+b)^2 + 4n^2 h^2\}^{1/2}} \right\} \right]$$

IV.5

FN = factor de normalización

-Arreglo Wenner.- Como sabemos que  $a=b=c=L/3$ , la expresión para profundidad de investigación queda como sigue:

$$CIP_w = \frac{\rho_s I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4Z}{(L^2/9 + 4Z^2)^{3/2}} - \frac{4Z}{(4L^2/9 + 4Z^2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^*(2Z+2nh)}{\{L^2/9 + (2nh+2Z)^2\}^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^*(2Z+2nh)}{\{4L^2/9 + (2Z+2nh)^2\}^{3/2}} \right]$$

IV.6

para  $z \leq L$ 

$$CPI_w = (1+K) (\text{parte derecha de la ec. IV.6})$$

-Arreglo Schlumberger.- Tomando  $a=ca$ ,  $b=cb$  y  $c=cl$  y substituyendo, la expresión es la siguiente:

para  $z \leq l$ 

$$CPI_{Schl.} = \frac{\rho_s I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4Z}{\{(0.45L)^2 + 4Z^2\}^{3/2}} - \frac{4Z}{\{(0.55L)^2 + 4Z^2\}^{3/2}} + \dots \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (zZ + 2nh)}{\{(0.45k)^2 + (zZ + 2nh)^2\}^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (zZ + 2nh)}{\{(0.55L)^2 + 4Z^2\}^{3/2}} \Bigg]$$

IV.7

y para  $z \geq k$ :

$$CPI_{schl.} = (1+K) (\text{parte derecha de la ecuación IV.7})$$

- Ejemplo de Dos Electrolitos. - tomemos que  $b=c=\infty$  por lo tanto  $a=1$  y la expresión queda como sigue:

$$CPI_{D.E} = \frac{f_1 I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4Z}{(L^2 + 4Z^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (zZ + 2nh)}{\{L^2 + (zZ + 2nh)^2\}^{3/2}} \right]$$

IV.8

y para  $z \geq k$ :

$$CPI_{D.E} = (1+K) (\text{parte derecha de la ecuación IV.8})$$

- Ejemplo de uno solo de los electrolitos. - En este ejemplo  $a=(b+c)=1/2$ , por lo tanto:

$$CPI_{u.M} = \frac{f_1 I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4Z}{\left\{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 4Z^2\right\}^{3/2}} + \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z+2nh)}{\left\{ \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (2z+2nh)^2 \right\}^{3/2}} \quad \text{IV.9}$$

y para  $z \leq h$

CPI u.m. =  $(1+K)$  (parte derecha de la ecuación IV.9)

#### IV.2. ARREGLOS DIPOLARES.

Supóngase, también, una copa de espesor  $h$  y resistividad  $\rho_1$ , que descansa sobre un semi-espacio de resistividad  $\rho_2$ . Tomando la misma disposición que en el caso homogéneo isótropo (fig. IV.1) tenemos que para el electrodo de corriente  $+I$  en  $(l/2, 0, 0)$ ,  $-I$  en  $(l/2, r, 0)$ ,  $P_1$  en  $[(L \cos \theta_1 - L \cos \theta_2 / z), (L \sin \theta_1 - L \sin \theta_2 / z), 0] = (A, B, 0)$  y  $P_2$  en  $[(L \cos \theta_1 + L \cos \theta_2 / z), (L \sin \theta_1 + L \sin \theta_2 / z), 0] = (C, D, 0)$  tenemos que los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  en cualquier punto  $(x, y, z)$  para  $0 \leq z \leq h$  y  $z \geq h$  son:

$$V_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{\left\{ (x+l/2)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{\left\{ (x-l/2)^2 + y^2 + (z+2nh)^2 \right\}^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{\left\{ (x-l/2)^2 + y^2 + (z-2nh)^2 \right\}^{1/2}} \right] \quad \text{IV.10}$$

para  $0 \leq z \leq h$

y para  $z \geq h$

$$V_z = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \cdot (1+K) \cdot \left[ \frac{1}{\left\{ \left( x + \frac{l}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{\left\{ \left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + y^2 + (z + 2nh)^2 \right\}^{1/2}} \right] \quad (V.11)$$

Ver Apéndice B

en donde  $r_1$  y  $r_2$ , distancias del elemento volumétrico en  $(x, y, z)$  a  $F_1$  y  $F_2$ , están definidas como:

$$r_1 = \left\{ (x-A)^2 + (y-B)^2 + z^2 \right\}^{1/2}$$

$$r_2 = \left\{ (x-C)^2 + (y-D)^2 + z^2 \right\}^{1/2}$$

Procediendo de la misma manera (Ver Apéndice B) se obtiene que para  $z \leq h$ :

$$CPI = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \cdot dz \cdot 2 \left[ \frac{4z}{\left\{ \left( A - \frac{l}{2} \right)^2 + B^2 + 4z^2 \right\}^{3/2}} - \frac{4z}{\left\{ \left( C - \frac{l}{2} \right)^2 + D^2 + 4z^2 \right\}^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z + 2nh)}{\left\{ \left( A + \frac{l}{2} \right)^2 + B^2 + (2z + 2nh)^2 \right\}^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (2z + 2nh)}{\left\{ \left( C + \frac{l}{2} \right)^2 + D^2 + (2z + 2nh)^2 \right\}^{3/2}} \right] \quad (V.12)$$

y para  $z \geq h$ 

$$CPI = (1+K) \text{ (parte derecha de la ecuación (V.12))}$$

## IV.13

A partir de las ecuaciones IV.12 y IV.13 se obtienen las expresiones para los distintos arreglos electrodinámicos dipolares, sustituyendo en ellas los valores para  $A, B, C, D, \lambda$  y  $L$  que se deseen.

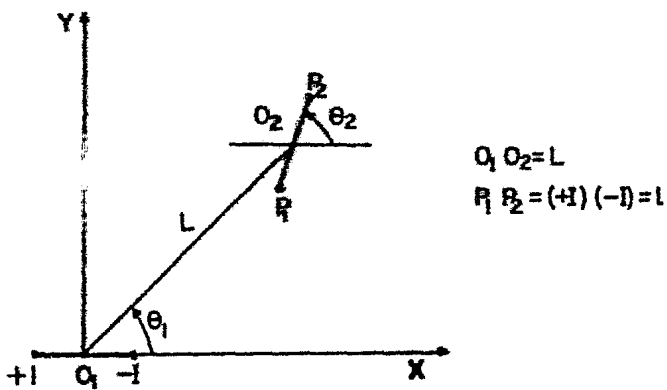


FIG. IV.1 Plan geométrico de arreglos dipolo-dipolo

CONCLUSIONS.

## CONCLUSIONES.

En el presente capítulo se muestran y discuten una serie de gráficas con diversas expresiones tratadas con anterioridad a fin de mostrar resultados objetivos.

## a.- MÉTODOS POLIGRÁFICOS ISOCÉNTOS.

La fig. 1 muestra las curvas características de la profundidad de investigación para los arreglos Wenner, Schlumberger, Lateral-Log de Superficie, Unipolo Modificado y el de Dos Electrodos, en donde  $L=ds=1.0$ .

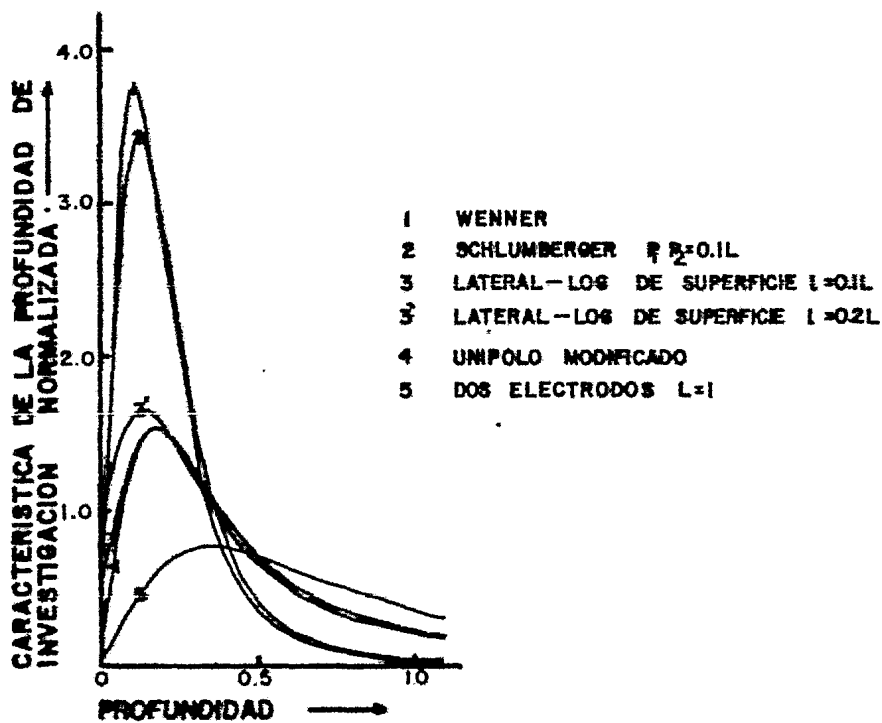


FIG.1. Características de la profundidad de investigación de arreglos Wenner, Schlumberger, lateral-log de superficie, unipolo modificado y dos electrodos

La fig. 2 muestra, a su vez, las curvas características de profundidad de investigación para los arreglos dipolares paralelo, polar, perpendicular y ecuatorial o azimutal, con  $L=ds=1.0$  y  $l=0.1$ . Aquí,  $L$  representa la distancia entre los centros de la fuente y los dipolos receptores, pues las distancias  $l$  de los dipolos se desprecian por su pequeña longitud. En los casos en que  $l$  no sea despreciable,  $L$  no será la distancia entre los centros y se necesitará usar la verdadera distancia entre los electrodos más alejados.

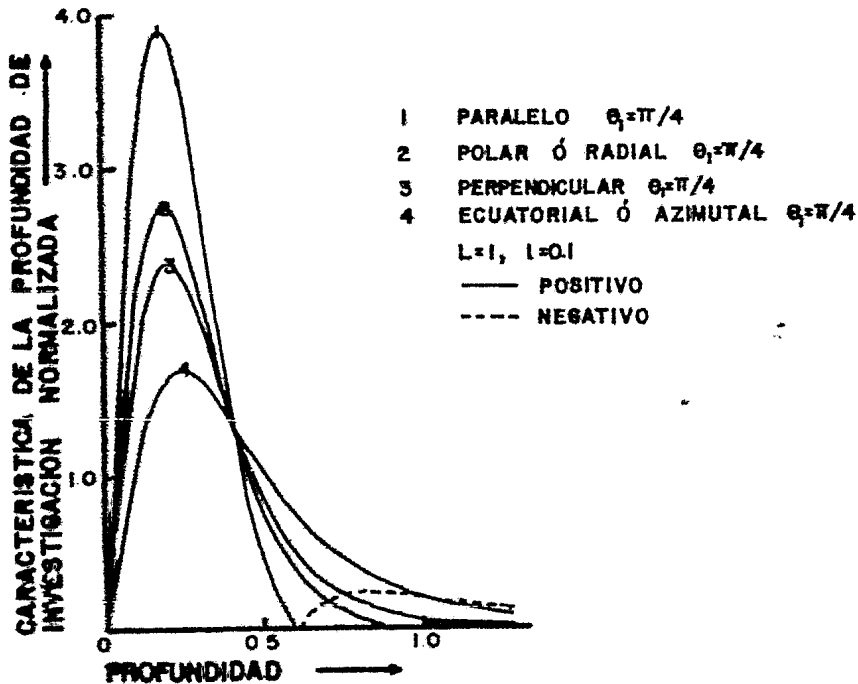


FIG. 2. Características de la profundidad de investigación de algunos arreglos dipolares incluyendo los arreglos polar y ecuatorial



Como se aprecia en ambas figuras, las curvas - empiezan en cero para una profundidad cero, se elevan a un - máximo y después caen a cero, nuevamente, para grandes profun- didades. Por otra parte, los arreglos dipolares paralelo y di- polo polar muestran un pico secundario negativo de mucho me- nor magnitud, antes de caer a cero para grandes profundidades.

A continuación se muestra una tabla, que con- tiene las profundidades de investigación para los mencionados arreglos:

1.- Dos Electrodo.	0.35
2.- Dipolo Equatorial ó Azimutal, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	0.25
3.- Dipolo Perpendicular, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	0.20
4.- Dipolo Polar ó Radial, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	0.195
5.- Dipolo Paralelo, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	0.18
6.- Unipolo Modificado.	0.18
7.- Lateral-Log de Superficie, $\lambda = 0.1L$ .	0.17
8.- Lateral-Log de Superficie, $\lambda = 0.2L$ .	0.135
9.- Schlumberger.	0.125
10.- Wenner.	0.11

De esta tabla se puede apreciar que, un siste-

na enfocado que suministre más corriente hacia el objetivo no es, necesariamente, superior a un arreglo no enfocado, esto - comparado el arreglo de Dos Electrodo's con el Lateral-Log de Superficie ó el arreglo Unipolo Modificado.

Por otra parte, las contribuciones de todos - los elementos polarizados del terreno ( $dx, dy, dz$ ) no son del mismo signo, como se puede apreciar de las líneas de corriente. Los picos negativos secundarios en dos de las características de profundidad de investigación, indican aquéllas profundidades y sistemas para los cuales las contribuciones negativas predominan. Como en los electro-magnéticos, las contribuciones de unas porciones del terreno pueden cancelar aquellas de otras porciones;

El hecho de que, para profundidades pequeñas, - las curvas tengan ordenada cero ó cerca de cero, podría llevar a pensar que los sistemas electródicos son insensibles al material cercano a la superficie del terreno. Esto, desgraciadamente, no es real. Las curvas tienden a cero, con profundidad cero, no porque las contribuciones de los elementos volumétricos, en la capa más somera, sean cero individualmente. - Por el contrario, las contribuciones de los elementos volumétricos en los electrodos alcanzan grandes magnitudes ( singularidades ), aunque estas se cancelan, una con otra, en el proceso sumatorio, en las direcciones  $x$  y  $y$ . Si el terreno no es homogéneo cerca de la superficie, la cancelación no será exacta y se presentarán grandes residuales.

La gran profundidad de investigación del sistema de Dos Electrodo's, tiene, como punto en contra, una baja resolución vertical en el caso de más de un objetivo, con una

nás abajo del otro. Si utilizamos el inverso del ancho en cada curva, tomándolo en la mitad de sus puntos máximos, como un indicativo de resolución vertical, los distintos sistemas electrodoicos se pueden ordenar, en forma decreciente, de la siguiente manera:

1.- Wenner.	1/2.25
2.- Schlumberger.	1/2.45
3.- Dipolo Paralelo. $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	1/3.1
4.- Dipolo Polar ó Radial, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	1/3.45
5.- Dipolo Perpendicular $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .	1/3.8
6.- Lateral-Log de Superficie, $\lambda = 0.2L$ .	1/4.05
7.- Lateral-Log de Superficie con $\lambda = 0.1L$ y Unipolo Modificado.	1/4.35
8.- Dipolo Ecuatorial ó Azimutal, $\theta = \frac{\pi}{4}$ .	1/5.05
9.- Dos Electrodoos.	1/8.4

Si no fuera por los picos secundarios negativos la tabla anterior sería también en el orden de las magnitudes de los picos. Así también, se puede observar que los sistemas enfocados no muestran ninguna ventaja, en especial, sobre los sistemas no enfocados.

Los valores de profundidad de investigación - mencionados aquí, no son factores que pueden ser usados para predecir profundidades de objetivos a partir de las posiciones de los puntos máximos, mínimos, de inflexión, etc. Por otra parte, la profundidad de investigación no significa que el total de la señal medida se originó en una sola profundidad. Las contribuciones a la señal observada vienen de todas las profundidades, pero la contribución de la profundidad de investigación es la más grande. En este sentido, la profundidad de investigación es sinónima a la profundidad de contribución a la señal.

Debido a razones prácticas, como son las de tender cables para los electrodos en el infinito, el sistema de Dos Electrodos es aplicable, preferentemente, a problemas someros como por ejemplo: prospección minera, profundidad de basamento, etc. , en donde su superioridad sobre los demás arreglos es evidente. Para investigaciones más profundas, por ejemplo la prospección petrolera, estudios de la corteza etc. Los arreglos dipolares son los más adecuados.

#### b.- MÉTODOS MONOPOLARES A TIA TRONCO.

En el caso de una estratificación horizontal , y tomando a  $L=1$ ,  $dz=1$  ;  $\alpha = 90^\circ$ , las figuras 3 y 4 nos muestran las curvas características de profundidad de investigación para los arreglos electrónicos Schlumberger, Dipolo Polar, Dos Electrodos y el Dipolo Atrial. Como anteriormente se vio , las curvas empiezan en cero para una profundidad cero, se elevan a un máximo y después caen a cero para grandes valores de  $z$ . El valor de profundidad en donde el EI es máximo de el va

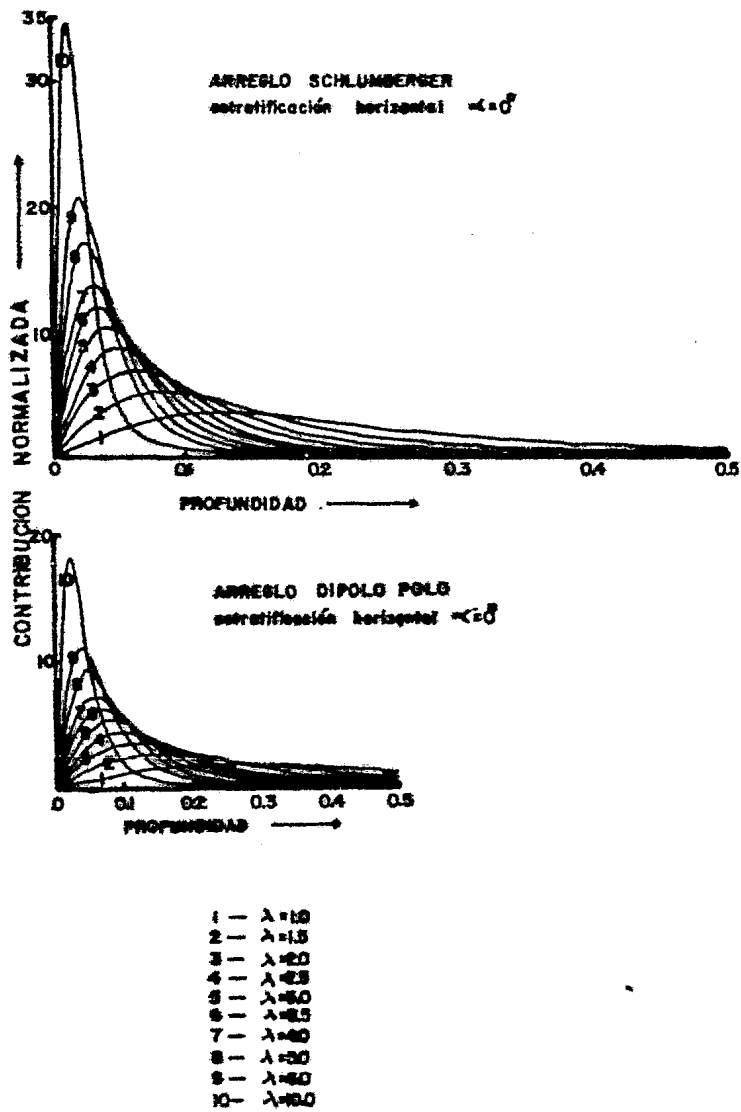


FIG. 3. Características de la profundidad de investigación de los arreglos Schlumberger y dipolo polo para un medio anisótropo con estratificación horizontal.

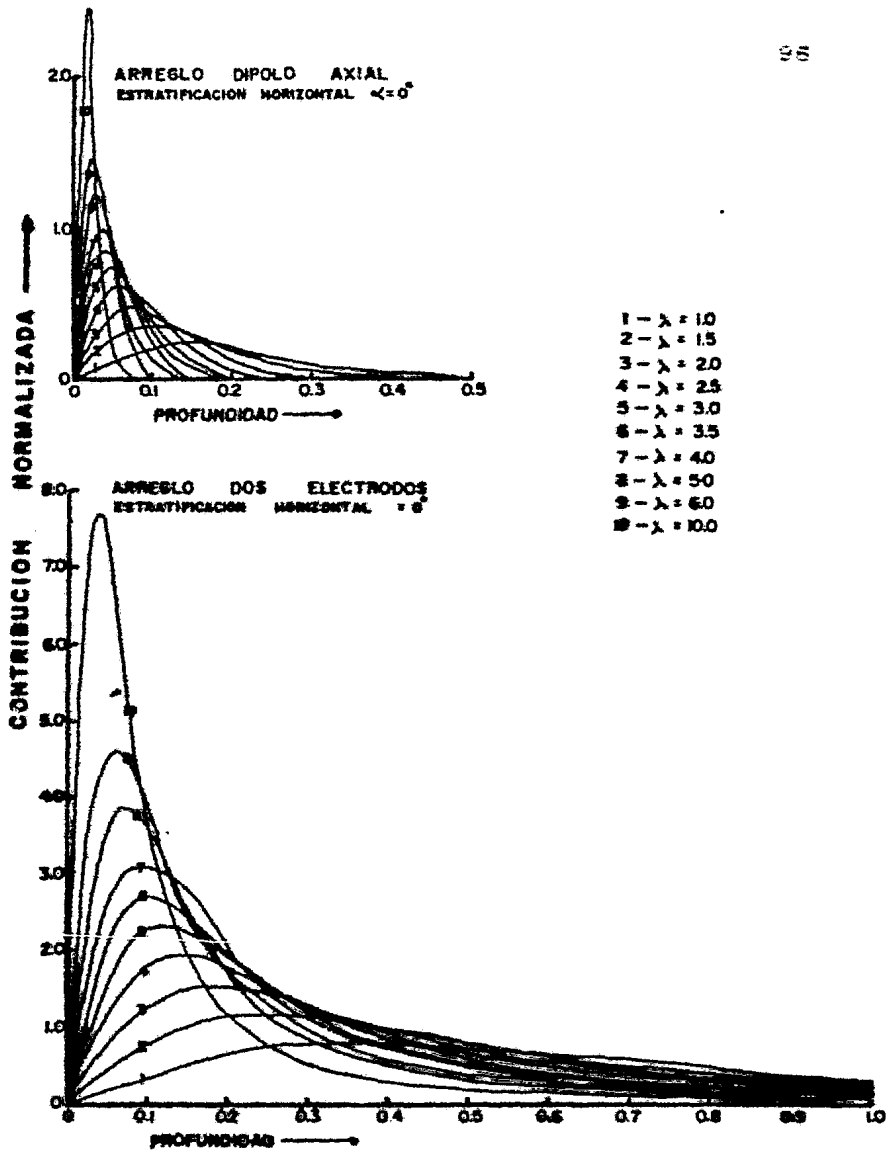


FIG. 4. Características de la profundidad de investigación de arreglos dipolo axial y dos electrodos para un medio unidifase con estratificación horizontal

lor de profundidad de investigación del arreglo electródico en particular, para el valor particular de  $\lambda$ . En todos los casos, la profundidad de investigación decrece al incrementarse el valor de  $\lambda$ . Este hecho es debido a dos factores: (1) la densidad de corriente a lo largo del plano de estratificación es mayor que aquella a lo largo de la normal a este plano y (2) ocurre una expansión en la dirección  $z$  dada por  $z = \lambda z_0$ . Como se aprecia, la profundidad de investigación para los arreglos Schlumberger y de Dos Electrodo, cuando  $\lambda = 1$ , es la misma que aquella obtenida para un medio homogéneo isótropo.

La variación en la profundidad de investigación de diversos arreglos electródicos, con el coeficiente de anisotropía, se muestra en la fig. 5.

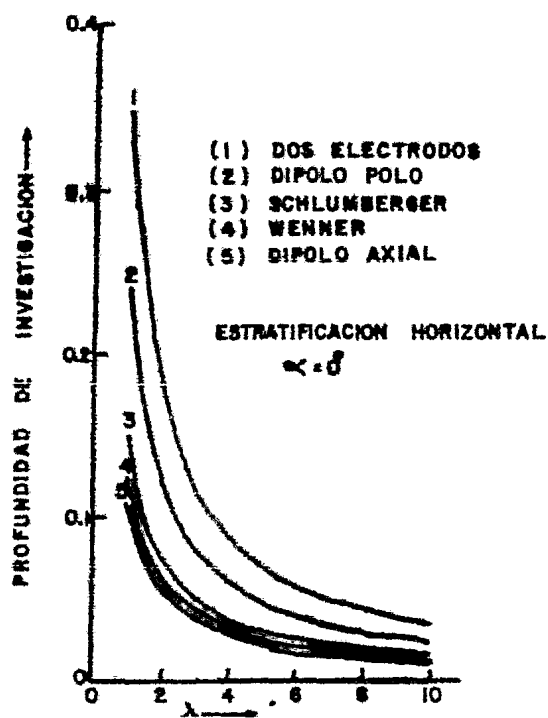


Fig 5 Variación de profundidad de investigación con coeficiente de anisotropía de arreglos electrodo para estratificación horizontal.

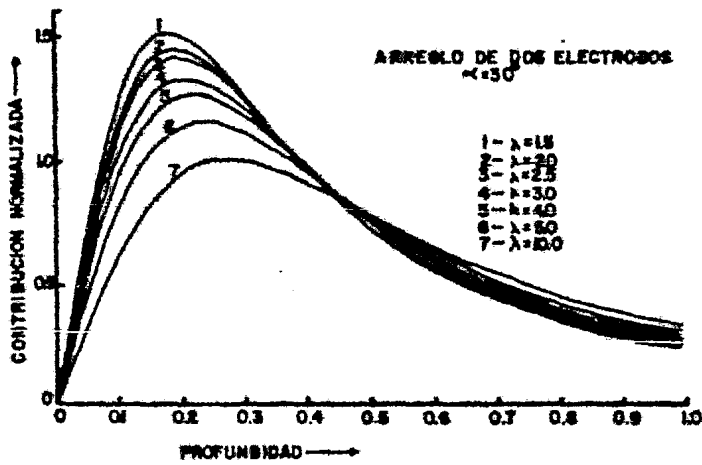
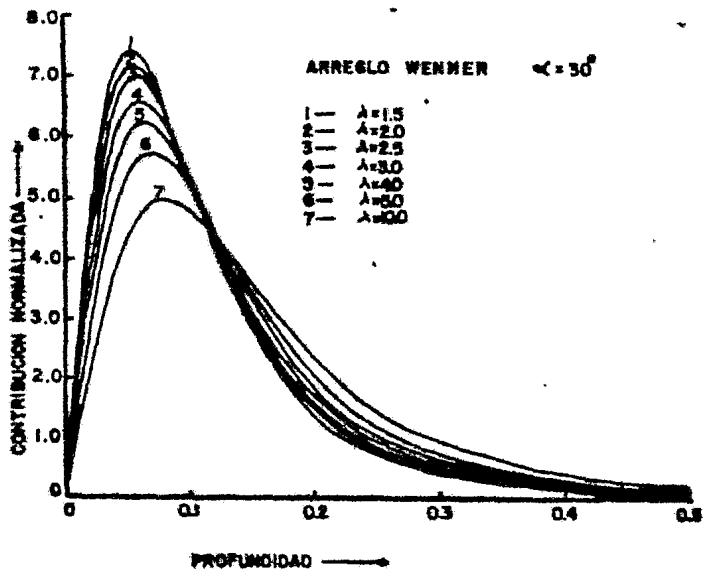


FIG. 6. Características de la profundidad de investigación de arreglos Wenner y dos electrodos para un medio anisótropo con un plano inclinado de estratificación  $\alpha = 30^\circ$



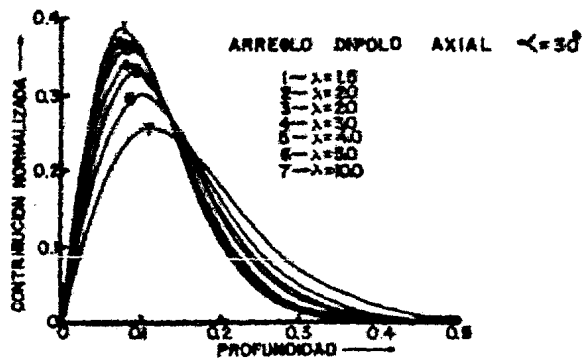
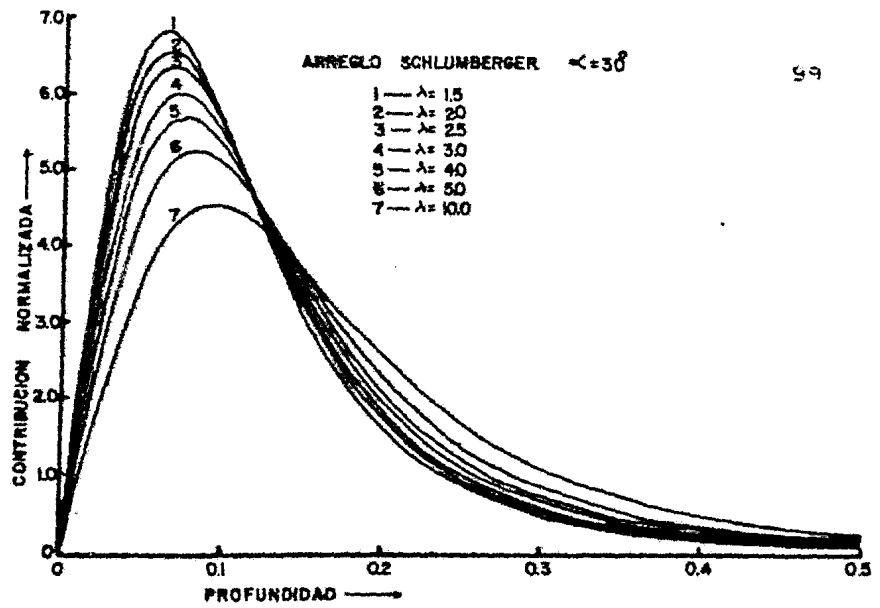


FIG. 7. Características de la profundidad de investigación de arreglos Schlumberger y dipolo axial para un medio anisotrópico con un plano inclinado de este tipo  $\alpha = 30^\circ$ .

Las curvas muestra que la profundidad de investigación, para todos los arreglos, tiene una relación inversa con  $\lambda$  y que el decrecimiento en la misma es, aproximadamente, - gradual para grandes valores de  $\lambda$ .

Para el caso de una estratificación inclinada, se muestran a continuación varias curvas de los antes mencionados arreglos, con diferentes valores de  $\lambda$  y  $\alpha$ , para  $h=1$  y  $dz=1$ . Las curvas del TPI, con distintos valores de  $\lambda$ , para  $\alpha=30^\circ$  se muestran en las figuras 6, 7 y 8 y para  $\alpha=0^\circ$  en las figuras 9 y 10.

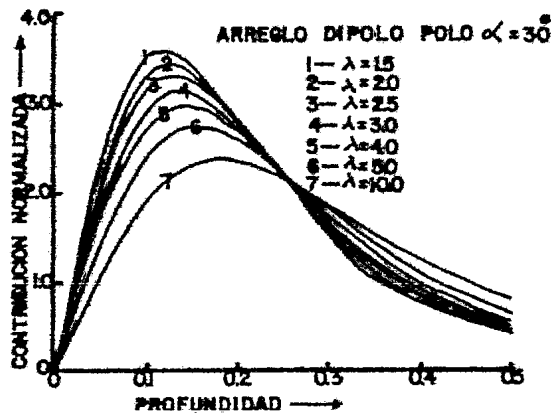


FIG. 8. Características de la profundidad de investigación de un arreglo dipolo polo para un medio estratificado con un plano inclinado de estratificación  $\alpha = 30^\circ$

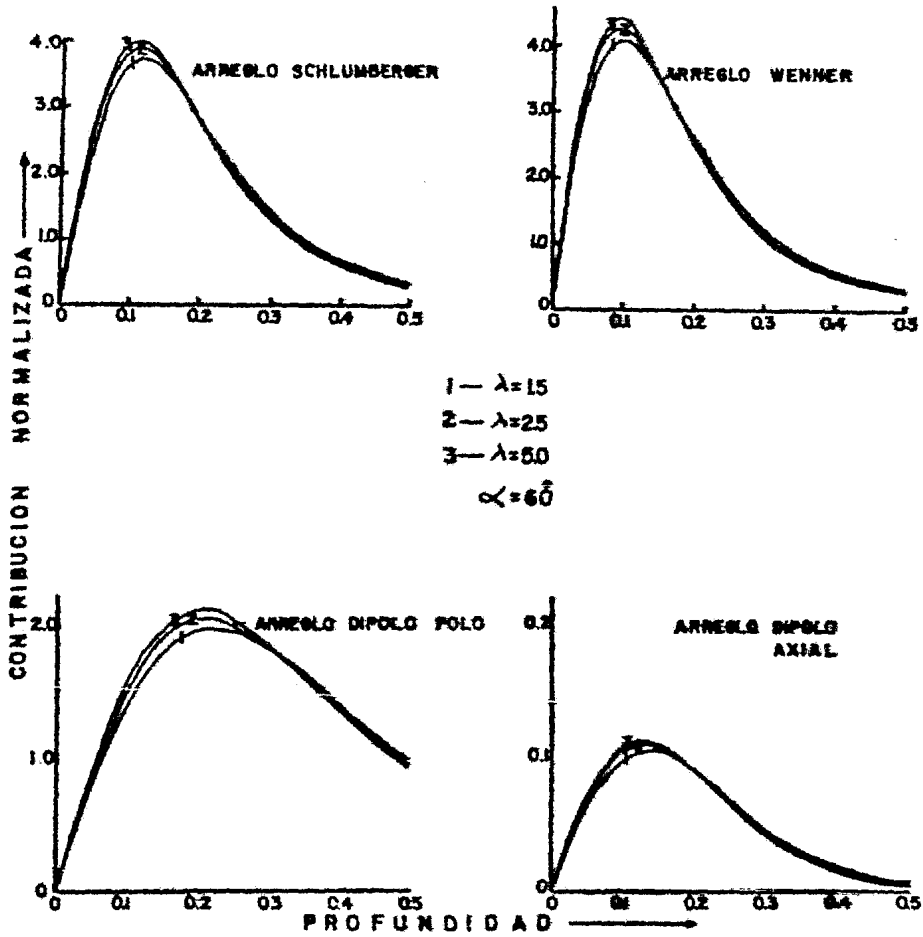


FIG. 9 Características de la profundidad de investigación de arreglos Schlumberger, Wenner, dipolo polo y dipolo axial para un medio anisotrópico con un plano inclinado de anisotropía  $\alpha = 60^\circ$

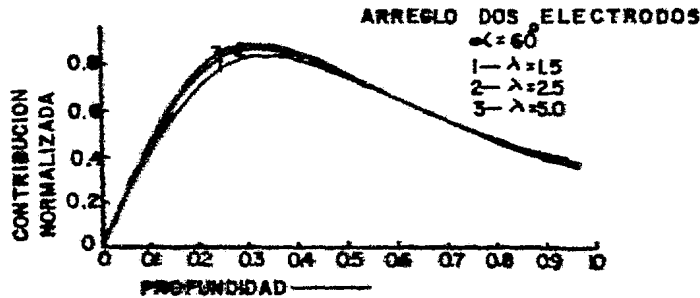


FIG. 10. Características de la profundidad de investigación de arreglo de dos electrodos para un medio anisotrópico con un plano inclinado de estratificación  $\alpha = 60^\circ$ .

Como se aprecia en las curvas  $GFI(z)$ , para un valor de  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ), la cima de la curva cambia a la izquierda a lo largo de la abscisa con el incremento en los valores de  $\lambda$  (ver fig. 3-4 y 6-10). Al mismo tiempo, la cima de la curva se vuelve más puntiaguda y la magnitud de la contribución en la profundidad de investigación aumenta con el incremento en  $\lambda$ . Así, para un valor dado de  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ), el incremento en  $\lambda$  causa en la profundidad de investigación un decremento. Por lo que, mientras mayor sea el coeficiente de anisotropía, menor es la profundidad de investigación para un valor en particular de  $\alpha$ . Esto se cumple para todos los arreglos.

Las curvas del arreglo Dipolo Axial muestran pequeños valores negativos (para  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ) a grandes profundidades y después caen a cero. Los valores negativos indican que a esas profundidades predominan las contribuciones negativas.

En lo que respecta a la variación en la profundidad de investigación con  $\lambda$ , la fig. 11 nos lo muestra, con  $\alpha=30^\circ$  y  $60^\circ$ , respectivamente, para algunos arreglos.

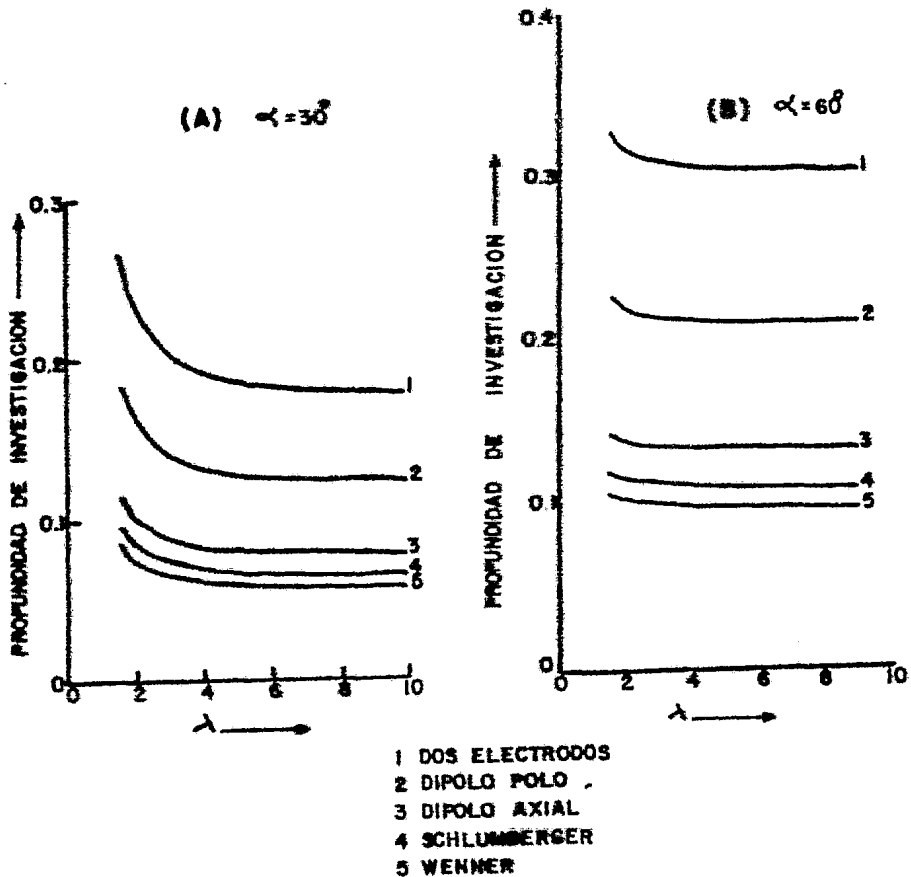


FIG. 11. Variación de profundidad de investigación con coeficiente de anisotropía (A)  $\alpha=30^\circ$  (B)  $\alpha=60^\circ$

Las curvas muestran que, como en la estratificación horizontal, la profundidad de investigación también tiene una relación inversa con  $\lambda$  para cualquier arreglo.

electrónico. Los arreglos son menos sensibles al cambio en  $\lambda$  para  $\alpha=0^\circ$  (fig. 11-1) que aquellos para cuando  $\alpha=0^\circ$  (fig. 5). El cambio es casi insignificante cuando  $\alpha$  se incrementa a  $60^\circ$  (fig. 11-3). Finalmente, en una estratificación vertical ( $\alpha=90^\circ$ ), la profundidad de investigación se independiza de  $\lambda$ , siendo esto consistente con el concepto de paradoja de la anisotropía.

Las variaciones en profundidad de investigación con  $\alpha$  para  $\lambda=1.5, 2.5, 5.0$  y  $10.0$  para distintos arreglos electrónicos, se muestran en la fig. 12. Las curvas muestran que, para cualquier arreglo electrónico, y para un valor particular de  $\lambda$ , la profundidad de investigación se incrementa con el incremento en el valor de  $\alpha$ . Las curvas empiezan desde un valor mínimo de profundidad en  $\alpha=0^\circ$ , gradualmente se levantan con el incremento en el valor de  $\alpha$  y finalmente alcanzan un valor máximo en  $\alpha=90^\circ$ , en donde es exactamente igual al valor de profundidad de investigación para un terreno homogéneo isótropo. Así, para un arreglo electrónico, todas las curvas que corresponden a diferentes valores de  $\lambda$ , se unen en el mismo valor máximo.

Para todos los valores de  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ) y  $\lambda$  los arreglos pueden ser ordenados como sigue: Dos Electrodos, Dipolo Polar, Dipolo Axial, Schlumberger y Wenner.

Resumiendo lo antes escrito, es evidente que desde el punto de vista de profundidad de investigación, el comportamiento de un arreglo electrónico colocado sobre un terreno homogéneo anisótropo es controlado no solo por la longitud del arreglo, sino que también por el coeficiente de anisotropía y el estado del plano de estratificación. Los efec--

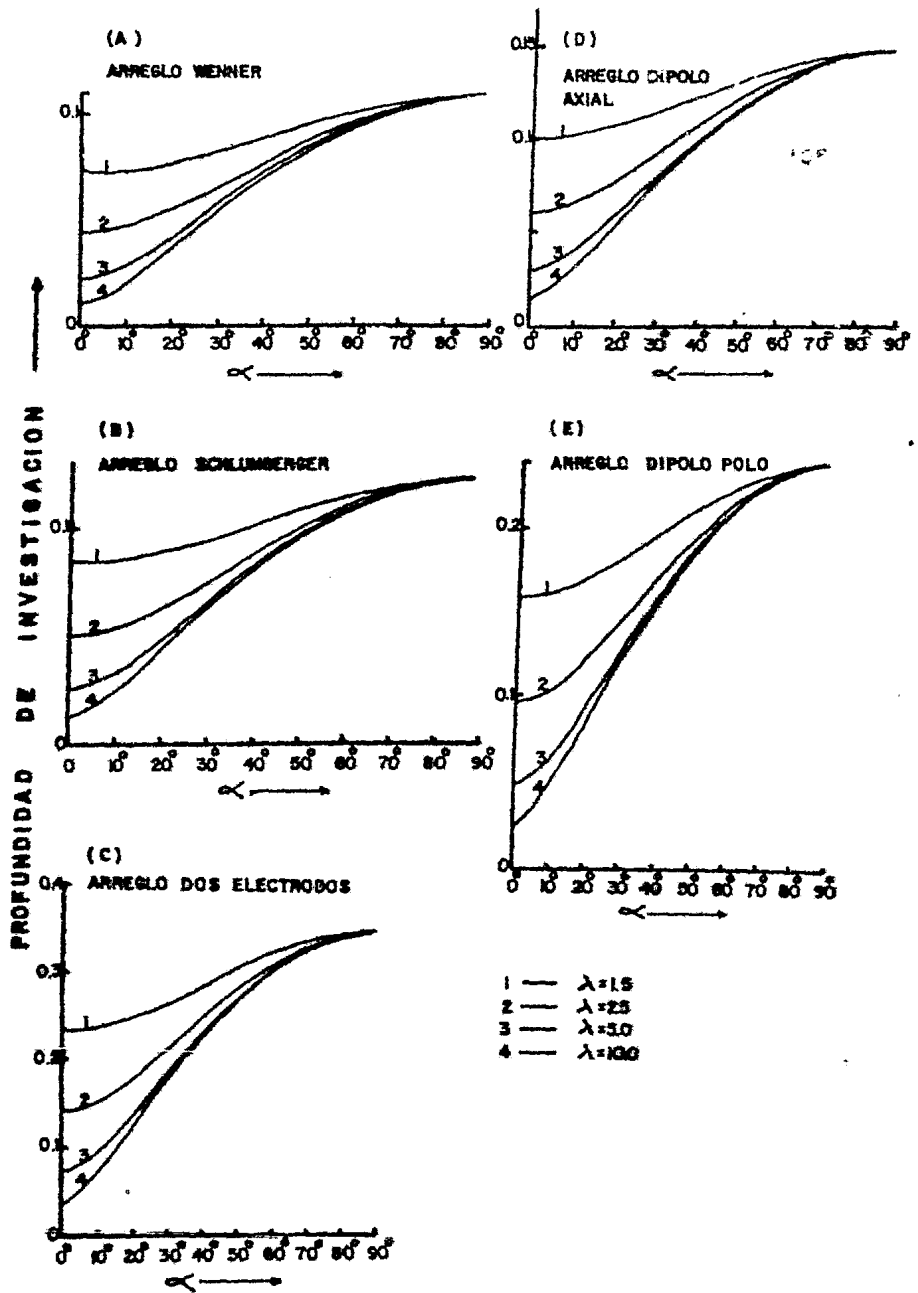


FIG. 12 Variación de la profundidad de investigación con el ángulo de un plano de estratificación para diferentes configuraciones de electrodos: (A) Wenner, (B) Schlumberger, (C) dos electrodos, (D) dipolo axial, (E) dipolo polo

tos de la anisotropía son: (1) el decremento de la profundidad de investigación con el incremento del coeficiente de anisotropía es más pronunciado para una estratificación horizontal, pues la densidad de corriente a lo largo del plano de estratificación es mayor que aquélla a lo largo de la normal a ese plano, como también debido a la expansión en la dirección dada por  $E = \lambda z$ , (2) se vuelve relativamente menos y menos pronunciada con el incremento del echado del plano de estratificación y (3) finalmente se vuelve independiente del coeficiente de anisotropía para una estratificación vertical. Estos resultados muestran que, cualquiera que sea el valor de  $\alpha$  y  $\lambda$ , el arreglo de Dos Electrodo tiene la más grande profundidad de investigación.

#### c.- MEDIO ESTRATIFICADO DE DOS CAPAS.

Como en el caso de un medio homogéneo, ya sea isótropo ó anisótropo, el arreglo de Dos Electrodo tiene una mayor profundidad de investigación que los arreglos Schlumberger, Wenner y Unipolo Modificado. Esto queda de manifiesto en la fig. 13, en donde se grafican las curvas características de la profundidad de investigación para los arreglos arriba mencionados, con  $L=1$ ,  $h=0.5$  y  $h=0.1, 0.2, 0.3$  y en la fig. 14 con  $k=0.5$ ,  $L=1$  y  $h=0.1, 0.2$  y  $0.3$ ; solamente en el arreglo de Dos Electrodo se nota que una porción de la señal proviene de la capa inferior.



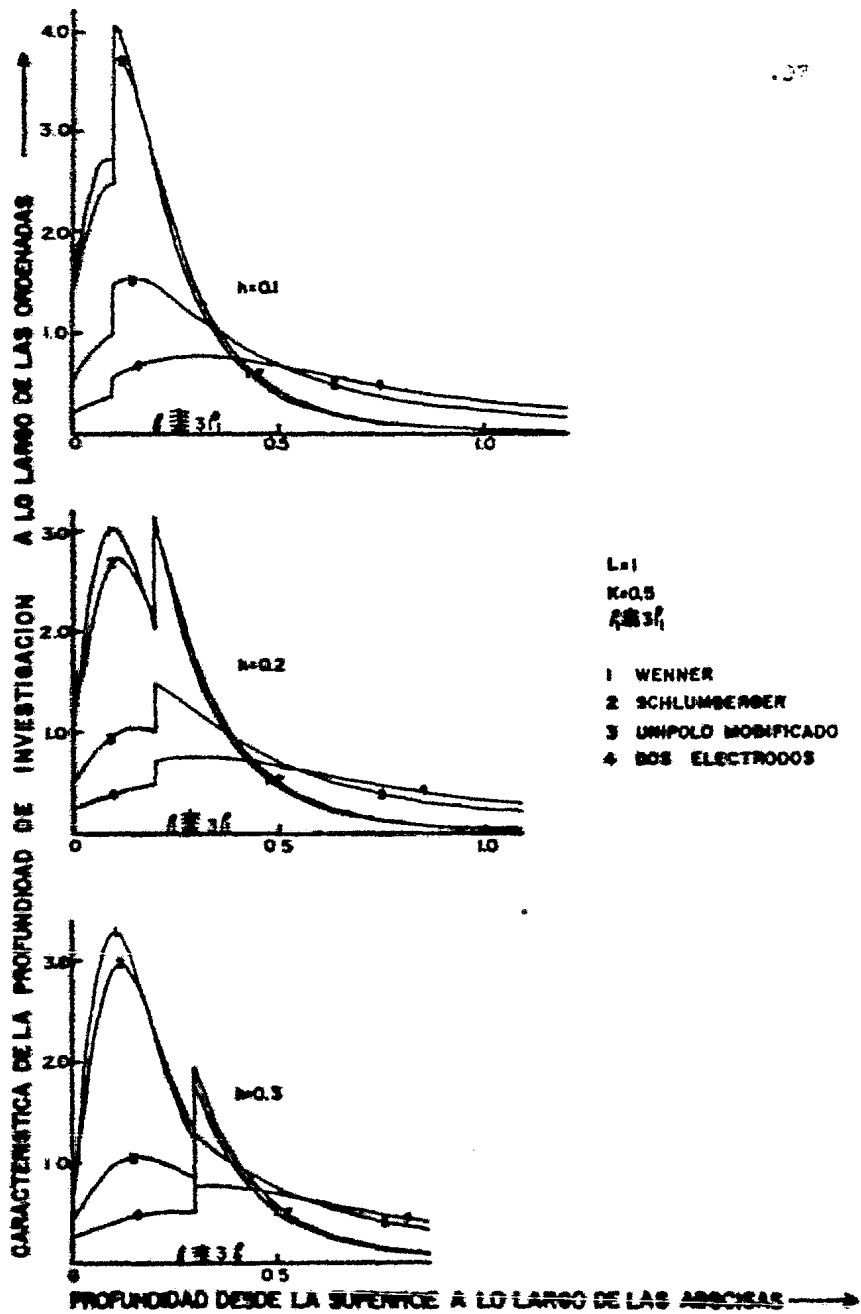


FIG 13 Características de la profundidad de investigación en un modelo de dos capas para  $L=1$ ,  $K=0.5$  y  $n=0.1, 0.2$  y  $0.3$

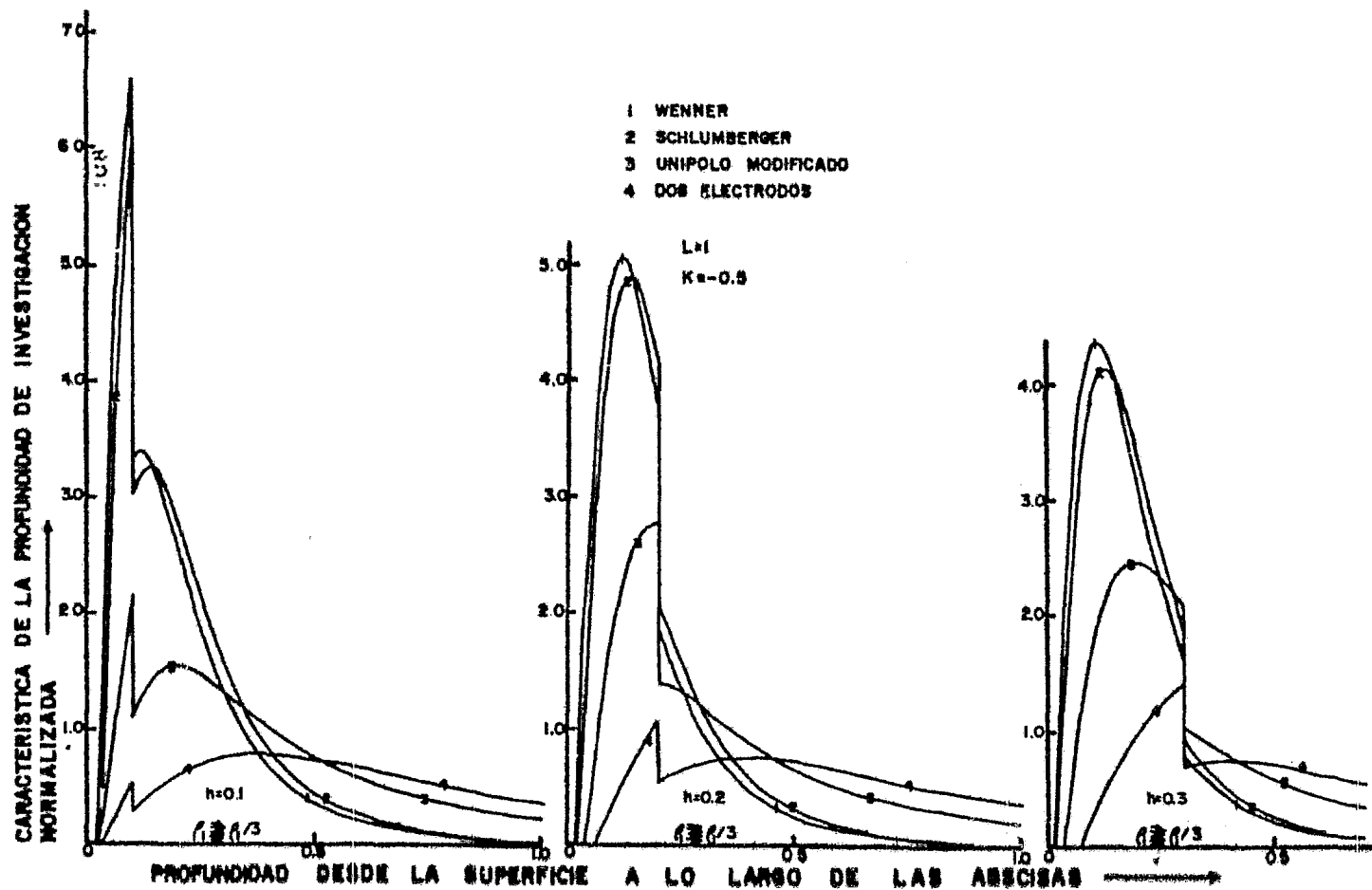


FIG. 14. Características de la profundidad de investigación en un modelo de dos capas para  $L=1$ ,  $K=0.5$  y  $h=0.1, 0.2$  y  $0.3$

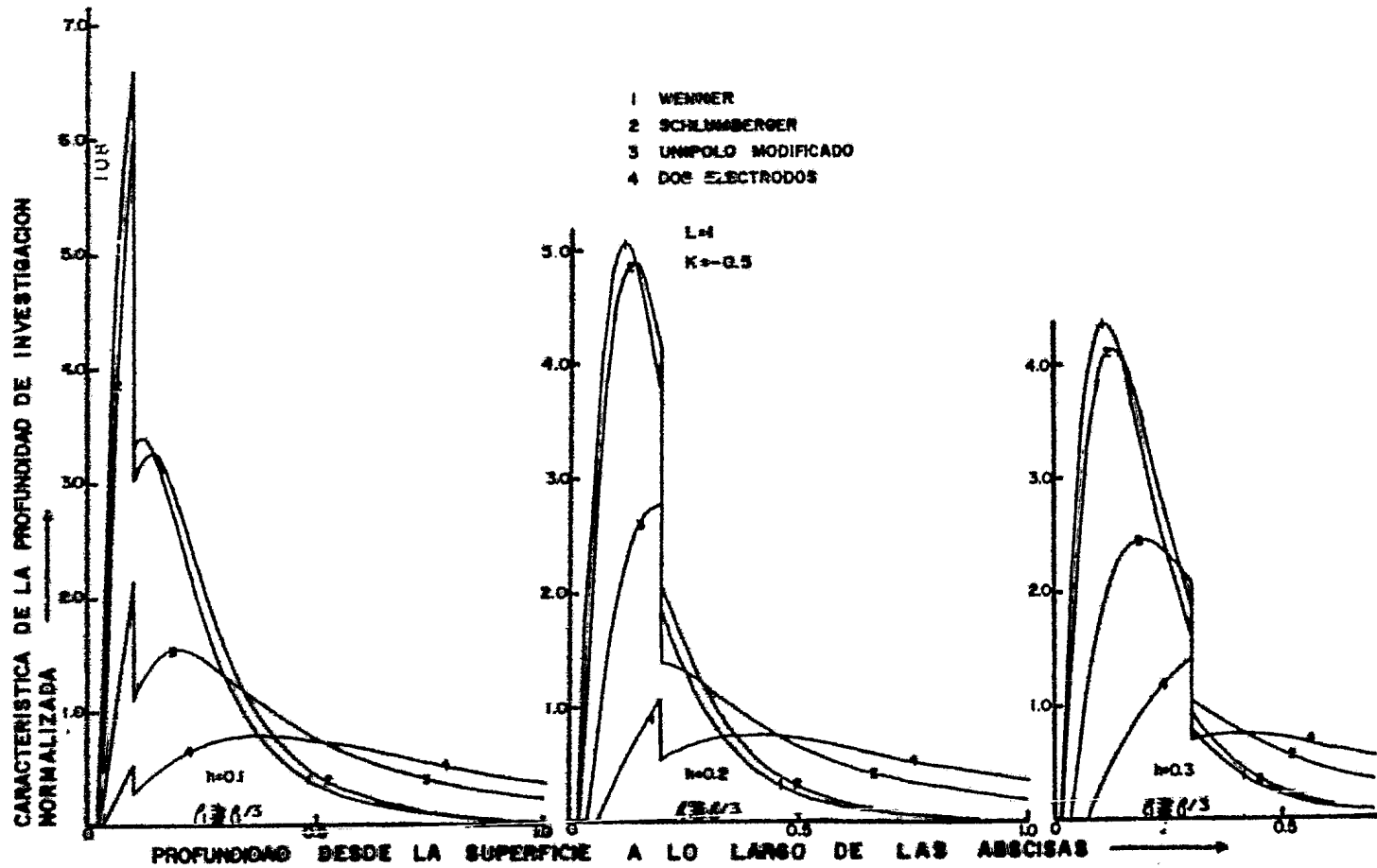


FIG. 14. Características de la profundidad de investigación en un modelo de dos capas para  $L=1$ ,  $K=-0.5$  y  $n=0.1, 0.2$  y  $0.3$

BIBLIOGRAFIA.

1. A. Roy, " Depth of Investigation in Werner, Three Electrode and Dipole-Dipole DC Resistivity Methods " ; Geophysical Prospecting 20, 329-346.
2. A. Roy and A. Apparao, " Depth of Investigation in Direct Current Methods " ; Geophysics, vol. 36, No. 5, (October 1971).
3. B.B. Bhattacharya and M.K. Sen, " Depth of Investigation of Collinear Electrode Arrays over Homogeneous Anisotropic Half-Space in Direct Current Methods " ; Geophysics, vol. 46, No. 5, Mayo 1981.
4. Bhattacharya P.K. and Patra N.P., " Direct Current Geoelectric Sounding : Principles and Interpretation " ; Amsterdam, Elsevier Publishing Co.
5. Santos Figuerola Jose, " Tratado de Geofisica Aplicada " Madrid, 1974.
6. Dobrin Milton S., " Introduction to Geophysical Prospecting " ; New York, 1960.
7. Evjen H.H., " Depth Factors and Resolving Power of Electrical Measurements " ; Geophysics, vol. 3, p. 78-95.
8. Grant & West, " Interpretation Theory in Applied Geophysics " ; 1965.

9. Carrellana Ernesto, "Prospección Geométrica en Corriente Continua " ; 1972.
10. Sinha A.K. and Bhattacharya P.K., " Electric Dipole over an Anisotropic and Inhomogeneous Earth " ; Geophysics, vol. 32, p. 52-57.
11. Van Nostrand R.G. and Cook K.L., " Interpretation of Resistivity Data " ; Paper 499, Washington D.C., Govt. Printing Office.

APPENDICES.

## APÉNDICE A

### EQUIVALENCIA ELECTROSTÁTICA

Dado un sistema de electrodos, se desea encontrar la contribución hecha por cada volumen individual de tierra al total de la señal medida (una diferencia de potencial) en superficie.

Para poder obtenerla, supongamos que los electrodos puntuales que emiten o reciben corriente  $I$  son reemplazados por cargas puntuales de electricidad, de fuerza positiva o negativa ( $q/\sigma$ ), colocadas en la superficie libre de un semi-espacio dieléctrico. Dado que se admite medir potenciales electrostáticos en lugar de señales, tal suposición es permisible, pues el régimen de corriente estacionario del suelo real y el régimen electrostático en su equivalencia dieléctrica tienen propiedades idénticas. Con dicha transformación, cada elemento de volumen rectangular del dieléctrico adquirirá tres componentes de polarización electrostática y dará lugar a campos dipolares en si mismo. El potencial electrostático dipolar, producido en el punto o puntos de medición por el elemento de volumen polarizado, es la contribución más tardía a la señal total.

Cuando las contribuciones de todos los elementos de volumen son sumadas, o integradas, deberíamos obtener la equivalencia potencial a la señal que se mide o calcula teóricamente en la superficie del terreno, si se trabaja con corriente directa.

Como se está tratando con profundidad de inves



tigación, se integra el potencial electrostático, debido a los dipolos inducidos, solo sobre planos paralelos a la superficie horizontal del terreno. Estos valores integrados son las contribuciones al total de la señal, por las capas delgadas horizontales individuales que juntas constituyen el semi-espacio homogéneo.

Los valores integrados o contribuciones individuales, al ser graficados contra las correspondientes profundidades de las capas horizontales delgadas, dan una curva llamada "La Característica de la Profundidad de Investigación", para el sistema particular de electrodos que se considere. La profundidad en donde la curva de un máximo, es la profundidad de investigación para dicho sistema eléctrico.

Debe notarse que las contribuciones individuales de las capas horizontales no puede ser medido; lo que se observa en la superficie del terreno entre los puntos de medición de potencial, es la contribución total de todas las capas constituyentes, dada por el área bajo la curva de la característica de profundidad de investigación (CPI).

APÉNDICE B

OBTENCIÓN DEL POTENCIAL EN UNA TIERRA HOMOGÉNEA

Sabemos que el flujo de corriente está basado en el principio de conservación de la carga, que se expresa como:

$$\operatorname{div} \bar{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{-----} \quad 1$$

en donde  $\bar{J}$  es la densidad de corriente y  $\rho$  es la densidad de carga para un flujo estacionario se reduce a

$$\operatorname{div} \bar{J} = 0 \quad \text{-----} \quad 2$$

Si  $\rho$  es la resistividad del medio, entonces la densidad de corriente  $\bar{J}$  está relacionada con la intensidad de campo eléctrico  $\bar{E}$  ( $\psi/m$ ) por medio de la ley de Ohm:

$$\bar{J} = \frac{1}{\rho} \bar{E} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} V \quad \text{---} \quad 3$$

en donde  $V$  es el potencial.

Para un medio anisótropo, podemos obtener de las relaciones 2 y 3 lo siguiente:

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} V \right) = 0 \quad \text{-----} \quad 4$$

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{\rho} \right) \cdot \operatorname{grad} V + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} V = 0 \quad \text{---} \quad 5$$

Esta es la ecuación fundamental en prospectión eléctrica en corriente continua. Como el medio es homogéneo  $\rho$  es independiente del sistema de coordenadas por lo que la ecuación 5 se reduce a:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = 0$$

$$\text{Ecuación de Laplace} \quad = \nabla^2 V = 0 \quad \text{--- 6}$$

Ahora, supongamos que una corriente es introducida en un medio homogéneo infinito en el punto P. De esta manera el potencial a una distancia  $r$  de P será solamente una función de  $r$ . Por lo tanto, la ecuación de Laplace puede ser escrita como sigue:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

en donde, una solución de ella es:

$$V = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

Como el potencial se vuelve igual a cero para una distancia larga de la fuente  $C_1 = 0$

Para conocer el valor de  $C_2$  sabemos que:

$$J = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\epsilon} \frac{C_2}{r^2}$$

Así, para un radio semi-infinito, la corriente total que fluye fuera de una superficie hemisférica de radio  $r$  está dada por la relación:

$$2\pi r^2 J = (2\pi/\epsilon) C_2$$

y de aquí:

$$C_2 = I \epsilon / 2\pi$$

en donde:

$$I = 2\pi r^2 J$$

De esta manera, el potencial en cualquier pun-

to debido a una fuente de corriente en la superficie de una -  
tierra esférica es:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

A-570177 J

Los integrales del tipo:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \{ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \}^{3/2}} \cdot dx dy \quad \text{--- 1}$$

han sido resueltas analíticamente usando las siguientes tres paires de transformada de fourier:

$$\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \longleftrightarrow 2\pi \cdot \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2 + v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{--- 2}$$

$$-\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \longleftrightarrow 2\pi \cdot (i v) \cdot \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2 + v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{--- 3}$$

$$\frac{|z|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \longleftrightarrow 2\pi \cdot e^{-|z|\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{--- 4}$$

La integral 1 puede ser dividida en tres partes:  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$ .

Entonces, se toma la transformada de fourier de  $I_1$  con respecto a  $x$  y  $y$ , se sustituye  $(x-a) = \alpha$  y  $(y-b) = \beta$  y se ordenan términos. Utilizando  $\tilde{z} = \sqrt{-1}$  y  $u$  y  $v$  como las frecuencias espaciales angulares en las direcciones  $x \equiv y$  y  $b \equiv y$  tenemos que:

$$I_1(\mu, \nu, c, z) = - \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot e^{-i\mu x} \cdot e^{-i\nu y} dx dy}{\{x^2 + y^2 + (z-c)^2\}^{3/2}} \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot e^{-i\mu x} \cdot e^{-i\nu y} dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = (2\pi)^2 \cdot \mu^2 \cdot \frac{e^{-(z-c)\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}}{\mu^2 + \nu^2}$$

para  $(z-c) > 0$  ó

$$(2\pi)^2 \cdot \mu^2 \cdot \frac{e^{-c\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}}{\mu^2 + \nu^2} \quad \text{para } (c-z) > 0$$

Similarmenete para:  
 $(z-c) > 0$

$$I_2(\mu, \nu, c, z) = (2\pi)^2 \cdot \nu^2 \cdot \frac{e^{-(z-c)\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}}{\mu^2 + \nu^2}$$

ó para  $(c-z) > 0$

$$(2\pi)^2 \cdot \nu^2 \cdot \frac{e^{-c\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}}{\mu^2 + \nu^2}$$

Y también para:  
 $(z-c) > 0$

$$I_3(\mu, \nu, c, z) = (2\pi)^2 \cdot e^{-(z-c)\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}$$

ó para  $(c-z) > 0$

$$-(2\pi)^2 \cdot e^{-c\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}$$

usando  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$ , tenemos que:  
para  $(z-c) > c$

$$I(u, v, c, z) = I_1(u, v, c, z) + I_2(u, v, c, z) + I_3(u, v, c, z) =$$

$$(2\pi)^2 \cdot z \cdot e^{-(zz-c)\sqrt{u^2+v^2}}$$

ó para  $(c-z) > c$

$$= 0$$

Por lo tanto, si obtenemos la transformada inversa de  $I(u, v, c, z)$  usando la ecuación 4, resulta que:  
para  $(z-c) > c$

$$I(a, b, c, z) = \frac{4\pi(zz-c)}{\{a^2+b^2+(zz-c)^2\}^{3/2}}$$

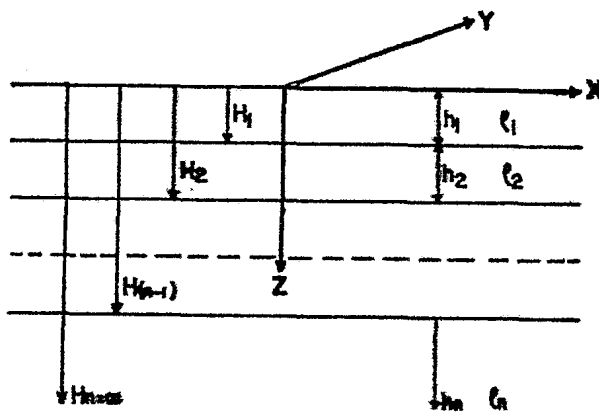
ó para  $(c-z) > c$

$$= 0$$

APENDICE D

DETERMINACION DEL POTENCIAL EN UNA TIERRA ESTRATIFICADA HORIZON--  
TALMENTE ( FORMA GENERAL Y PARA DOS CAPAS ).

Supongamos la siguiente figura:



en donde  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  son las resistividades,  $h_1, h_2, \dots, h_n$  son los espesores de las  $n$  capas y  $H_1, H_2, \dots, H_n$  son las profundidades al fondo de cada capa.

Escojamos un sistema cilíndrico de coordenadas situado como se muestra en la fig. 1 .

La ecuación de Laplace a ser satisfecha en cualquier punto es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{--- 1}$$



cuya solución es:

$$V = \int_0^{\infty} \left\{ A(m) e^{-mz} + B(m) e^{mz} \right\} J_0(mr) dm \quad \text{--- ?}$$

Sabemos que el potencial debido a una fuente puntual, colocada en la superficie de una tierra homogénea es:

$$V_0 = \frac{I\rho}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{I\rho}{2\pi} \frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

El potencial en cualquier punto en una tierra estratificada, puede ser considerado como la suma de los potenciales en un medio homogéneo y un potencial perturbación, debido a las fronteras, dado por la ecuación 2.

Entonces:

$$V_1 = V_0 + V_1'; \quad V_2 = V_0 + V_2'; \quad V_3 = V_0 + V_3' \dots \dots V_n = V_0 + V_n'$$

en donde  $V_1, V_2, \dots, V_n$  son los potenciales totales en los diferentes estratos y  $V_1', V_2', \dots, V_n'$  los potenciales perturbación. El potencial perturbación puede ser eficientemente explicado como la contribución debida a dos series de un número infinito de imágenes en ambos lados de las fronteras.

Así, en general:

$$V_i = \frac{I\rho_i}{2\pi} \frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \int_0^{\infty} \left\{ A_i(m) e^{-mz} + B_i(m) e^{mz} \right\} J_0(mr) dm$$

Las constantes  $A_1$  y  $B_1$  pueden ser determinadas de las respectivas condiciones de frontera. En la frontera - aire-tierra tenemos tener:

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0$$

ahora:

$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \int_0^{\infty} (A_1 e^{-mz} + B_1 e^{mz}) J_0(mr) dm$$

entonces:

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \left\{ \frac{I \rho_1 z}{2\pi (r^2+z^2)^{3/2}} + \int_0^{\infty} (-A_1 e^{-mz} + B_1 e^{mz}) J_0(mr) m dm \right\}_{z=0} =$$

$$= \int_0^{\infty} (B_1 - A_1) J_0(mr) m dm = 0$$

de donde  $B_1 - A_1 = 0$  y  $A_1 = B_1$

y

$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \int_0^{\infty} A_1(m) (e^{mz} + e^{-mz}) J_0(mr) dm$$

Debemos que en la última capa el potencial debe reducirse a cero en  $z = \infty$ ; entonces  $B_n = 0$ .

$$V_n = \frac{I \rho_2}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \int_0^\infty A_n(m) e^{-mz} J_0(mr) dm$$

Las condiciones de frontera que deben satisfacerse en cualquier frontera son:

$$V_i = V_{i+1}$$

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial V_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial V_{i+1}}{\partial z} \quad \text{en } z = H_i \quad \dots$$

Además, sabemos que:

$$\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \int_0^\infty e^{-m|z|} J_0(mr) dm$$

conocida como La Integral de Weber y haciendo  $I \rho_2 / 2\pi = \eta$  tenemos que:

$$V_1 = \eta \int_0^\infty e^{-m|z|} J_0(mr) dm + \int_0^\infty A_1(m) (e^{mz} + e^{-mz}) J_0(mr) dm$$

$$V_i = \eta \int_0^\infty e^{-m|z|} J_0(mr) dm + \int_0^\infty (A_i(m) e^{mz} + B_i(m) e^{-mz}) J_0(mr) dm$$

$$V_n = \eta \int_0^\infty e^{-m|z|} J_0(mr) dm + \int_0^\infty A_n(m) e^{-mz} J_0(mr) dm$$

--- 5

A partir de las ecuaciones 4 y 5 obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\int_0^{\infty} A_1 (e^{mh_1} + e^{-mh_1}) J_0(mr) dm = \int_0^{\infty} (A_2 e^{-mh_1} + B_2 e^{mh_1}) J_0(mr) dm$$

$$-\frac{q}{\rho_1} \int_0^{\infty} e^{-mh_1} J_0(mr) dm + \frac{1}{\rho_1} \int_0^{\infty} A_1 (e^{mh_1} - e^{-mh_1}) J_0(mr) dm =$$

$$= -\frac{q}{\rho_2} \int_0^{\infty} e^{-mh_1} J_0(mr) dm + \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\infty} (-A_2 e^{-mh_1} + B_2 e^{mh_1}) J_0(mr) dm$$

----- 0-1

$$\int_0^{\infty} (A_1 e^{-mh_1} + B_1 e^{mh_1}) J_0(mr) dm = \int_0^{\infty} (A_{1+1} e^{-mh_1} + B_{1+1} e^{mh_1}) J_0(mr) dm$$

$$-\frac{q}{\rho_1} \int_0^{\infty} e^{-mh_1} J_0(mr) dm + \frac{1}{\rho_1} \int_0^{\infty} (-A_1 e^{-mh_1} + B_1 e^{mh_1}) J_0(mr) dm =$$

$$= -\frac{q}{\rho_{1+1}} \int_0^{\infty} e^{-mh_1} J_0(mr) dm + \frac{1}{\rho_{1+1}} \int_0^{\infty} (-A_{1+1} e^{-mh_1} + B_{1+1} e^{mh_1}) J_0(mr) dm$$

----- 0-2

$$\int_0^{\infty} (A_{n-1} e^{-mH_{n-1}} + B_{n-1} e^{mH_{n-1}}) J_0(mr) dm = \int_0^{\infty} A_n e^{-mH_n} J_0(mr) dm$$

$$- \frac{q}{\rho_{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-mH_{n-1}} J_0(mr) dm + \frac{1}{\rho_{n-1}} \int_0^{\infty} (-A_{n-1} e^{-mH_{n-1}} + B_{n-1} e^{mH_{n-1}}) J_0(mr) dm =$$

$$= - \frac{q}{\rho_n} \int_0^{\infty} e^{-mH_n} J_0(mr) dm - \frac{1}{\rho_n} \int_0^{\infty} A_n e^{-mH_n} J_0(mr) dm$$

---- 6-C

Como las ecuaciones 6-A, B y C deben ser válidas para todos los valores de  $r$ :

$$A_2 (e^{-mH_1} + e^{mH_1}) - A_1 e^{-mH_1} - B_2 e^{mH_1} = 0$$

$$A_2 e_2 (e^{mH_2} - e^{-mH_2}) + A_2 \rho_1 e^{-mH_2} - B_2 \rho_1 e^{mH_2} - q(\rho_2 - \rho_1) e^{-mH_2} = 0$$

---- 7-2

$$A_1 e^{-mH_1} + B_1 e^{mH_1} - A_{1+2} e^{-mH_1} - B_{1+2} e^{mH_1} = 0$$

$$\rho_{1+2} (-A_1 e^{-mH_1} + B_1 e^{mH_1}) + \rho_1 A_{1+2} e^{-mH_1} - \rho_1 B_{1+2} e^{mH_1} - q(\rho_{1+2} - \rho_1) e^{-mH_1} = 0$$

---- 7-3

$$A_{n-1} e^{-mH_{n-1}} + B_{n-1} e^{mH_{n-1}} - A_n e^{-mH_{n-1}} = 0$$

$$-A_2 \epsilon_1 e^{-m h_1} + B_2 \epsilon_1 e^{m h_1} + A_1 \epsilon_2 e^{-m h_2} - q(\epsilon_2 - \epsilon_1) e^{-m h_2} = 0$$

--- 7-C

De esta manera, a partir de las ecuaciones 7-A, B y C es teóricamente posible calcular el potencial en cualquier medio.

En los sondeos eléctricos solamente interesa el potencial en la superficie, por lo que es suficiente el calcular el coeficiente  $A_1$ , para algunos casos de interés práctico.

En dos capas:

Supongamos  $h_2 = \infty$ ; entonces el sistema de ecuaciones 7-A, B y C se reduce a:

$$A_1 (e^{-m h_1} + e^{m h_1}) - A_2 e^{-m h_1} = 0$$

$$A_1 \epsilon_2 (-e^{-m h_1} + e^{m h_1}) + A_2 \epsilon_1 e^{-m h_1} - q(\epsilon_2 - \epsilon_1) e^{-m h_1} = 0$$

Resolviendo las ecuaciones y haciendo  $(\epsilon_2 - \epsilon_1) / (\epsilon_2 + \epsilon_1) = K_{12}$ , el coeficiente de reflexión en la frontera, obtenemos:

$$A_1(m) = q \frac{K_{12} e^{-2m h_1}}{1 - K_{12} e^{-2m h_1}} = q (K_{12} e^{-2m h_1} + K_{12} e^{-4m h_1} + \dots + K_{12}^n e^{-2m n h_1} + \dots) = q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n e^{-2m n h_1}$$

por lo tanto:

$$V_1 = q \int_0^{\infty} e^{-mz} J_0(mr) dm + q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \int_0^{\infty} e^{-2nnh_1} (e^{mz} + e^{-mz}) J_0(mr) dm$$

Usando, nuevamente, la fórmula de Weber:

$$V_1 = \frac{q}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \frac{1}{\{r^2 + (2nh_1 - z)^2\}^{1/2}} +$$

$$+ q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \frac{1}{\{r^2 + (2nh_1 + z)^2\}^{1/2}}$$

que es el potencial en el primer medio, en cualquier punto  $(r, z)$ .

Para encontrar el potencial en la superficie, hacemos  $z=0$  y así, tenemos que:

$$V = \frac{qR_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{12}^n}{\{r^2 + (2nh_1)^2\}^{1/2}} \right]$$