

VERDAD NACIONAL

ESTRADA

FACULTAD DE INGENIERIA

Dirección

60-I-206

Señor ESTRADA CASTILLO OCTAVIO.
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Prof. Ing. - Roboam León Sánchez, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO GEOFISICO.

"METODOS ELECTRICOS DE CAMPO ESTACIONARIO"

- PROLOGO.
- I INTRODUCCION.
- II PROPIEDADES ELECTROMAGNETICAS DE LAS ROCAS.
- III FUNDAMENTOS TEORICOS DE LOS METODOS DE CAMPOS ESTATICOS.
- IV TEORIA DEL SONDEO ELECTRICO.
- V PERFILAJE ELECTRICO.
- VI EL METODO DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES.
- VII EL METODO "MISE A LA MASSE".
- APENDICE.
- BIBLIOGRAFIA.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar -- Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como -- requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así -- como de la disposición de la Coordinación de la Administración -- Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los -- ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, D.F., 13 de Octubre de 1983.

EL DIRECTOR

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

Mr
GARCIA MRV'gtg



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A MI MADRE:

SARA CASTILLO ZAMUDIO

SIN CUYO APOYO NO HUBIERA LLEGADO A SER LO QUE SOY.

A MIS HERMANOS:

JOSE JOAQUIN, JORGE ALBERTO, SARA LUISA, GUILLERMO,
LUIS ANTONIO Y MARIA DEL CONSUELO.

A MIS TIOS:

A MIS COMPAÑEROS DE TRABAJO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS -
BÁSICAS.

A LOS INGS. ROBOAM LEÓN SÁNCHEZ Y ALEJANDRO ARROYO CARRASCO POR
SU ATENCIÓN PARA CONMIGO.

A TI PABLO Y A TÍ ROSI, Y QUE EL TIEMPO SE ENCARGUE DE REAFIRMAR
NUESTRA AMISTAD PARA LUCHAR POR LOS IDEALES QUE NOS HEMOS FORMADO.

A MI PADRE . . .

A MIS AMIGOS,

D E D I C A T O R I A

El ser humano al nacer es libre; a medida que transcurre el tiempo se va contaminando del medio que lo rodea, o sea, - se dice que se está educando y esa educación en la mayoría de los casos coarta su libertad. Educar significa concientizar y para concientizar se necesita que la persona que lo efectúa esté concientizada.

Este trabajo está dedicado a aquellas personas que luchan por la libertad de los individuos. A aquellas personas que - desechan su egoísmo y luchan por los demás sin importar barre_rras ó fronteras.

También va dedicado a los oprimidos del mundo, a esas per_rsonas que por no estar concientizadas son manipuladas. Por - ellos, para que luchen por mejores condiciones de vida y supe_rren.

* OCTAVIO ESTRADA CASTILLO.

APUNTES DE PROSPECCION ELECTRICA
EN CAMPO ESTACIONARIO

I N D I C E .

I.- I N T R O D U C C I O N

I,1.- Definiciones

I,2.- Desarrollo de la Prospección Eléctrica

I,2.1 Epoca Antigua

I,2.2 Epoca Clásica

I,2.3 Epoca Contemporánea

I,3.- Clasificación de los Métodos Geoelectricos

I,4.- Justificación de la aplicación de los Métodos Geoelectricos

I,5.- Aplicaciones de los Métodos Geoelectricos de Prospección.

II.- PROPIEDADES ELECTROMAGNETICAS DE LAS ROCAS.

II,1.- Conceptos Básicos de la Conducción de la Electricidad

II,2.- Resistividad Eléctrica.

II,2.1 Definición y Unidades

II,2.1 Conducción de la electricidad en rocas y minerales.

II,3.- Permitividad Eléctrica

II,3.1 Definición y Unidades

II,3.2 Permitividad Eléctrica de los minerales

II,3.3 Permitividad Eléctrica de las rocas.

II,4.- Permeabilidad Magnética

II,4.1 Definición y Unidades

II,4.2 Características de los cuerpos magnéticos.

II,4.3 Permeabilidad Magnética de rocas y minerales.

II,5.- Potenciales Eléctricos Naturales

II,5.1 Introducción y Unidades

II,5.2 Potencial Electrocinético

II,5.3 Potencial de Difusión

II,5.4 Potencial de Nernst.

III FUNDAMENTOS TEORICOS DE LOS METODOS DE CAMPOS ESTATICOS

- III,1 Introducción
- III,2 Ecuaciones de Maxwell
- III,3 Potenciales Eléctricos Producto de fuentes Puntuales.
 - III,3.1 Medio Homogéneo e Isótropo
 - III,3.2 Semiespacio Homogéneo e Isótropo
 - III,3.3 Semiespacio Homogéneo Anisótropo
 - III,3.4 Medio Estratificado
 - III,3.5 Otros Medios
 - III,3.6 Medio Heterogéneo
- III,4 Potencial Eléctrico Producto de fuentes Dipolares
 - III,4.1 Semimedio Homogéneo e Isótropo.
 - III,4.2 Semimedio Estratificado.
- III,5 Potencial Eléctrico Producto de fuentes lineales
 - III,5.1 Medio Homogéneo
 - III,5.2 Medio Estratificado
- III,6 Resistividad Aparente
- III,7 Dispositivos Electrónicos.
 - III,7.1 Dispositivos Lineales
 - III,7.2 Dispositivos Dipolares
- III,8 Fundamentos Teóricos de los Métodos Magnéticos de Resistividad.
 - III,8.1 Definiciones
 - III,8.2 Anomalia Magnetométrica de Resistividad.
 - III,8.3 Semimedio Estratificado Anisótropo
- III,9 Parámetros y Funciones de Dar Zarrouck
 - III,9.1 Introducción
 - III,9.2 Curvas de Dar Zarrouck
 - III,9.3 Ecuación General y Propiedades de las curvas de Dar - Zarrouck.
 - III,9.4 Construcción e inversión de Curvas de Dar Zarrouck.
 - III,9.5 Construcción Gráfica de la Curva de Dar Zarrouck.

IV TEORIA DEL SONDEO ELECTRICO

IV,1 Definición y Generalidades

IV,1.1 Sondeo Eléctrico

IV,2 Cortes Geoeléctricos

IV,3 Funciones Kernel

IV,3.1 Método de las Imágenes

IV,3.2 Método de Stefanescu

IV,3.3 Algoritmos de Recurrencia de la Función Kernel

IV,3.4 Propiedades de la Función Kernel

IV,4 Funciones de Resistividad Aparente.

IV,4.1 Funciones de Resistividad Aparente para diferentes dispositivos.

IV,4.2 Propiedades de la función de resistividad aparente.

IV,5 Métodos de Cálculo de las curvas de resistividad aparente.

IV,5.1 Introducción

IV,5.2 Método de Onodera

IV,5.3 Método de Orellana y Mooney

IV,5.4 Método de Van Dam

IV,5.5 Método de Lima Lobato

IV,5.6 Método de Filtrado Lineal

IV,6 Métodos Clásicos de Interpretación

IV,6.1 Introducción

IV,6.2 Método de Superposición

IV,6.3 Método de Reducción

IV,6.4 Método de Ebert

IV,6.5 Método de Homilius

IV,6.6 Método de la Función Kernel

IV,7 Práctica del Sondeo Eléctrico Vertical

IV,7.1 Etapas que constituyen el SEV en el trabajo de campo.

IV,7.1.1 Planteamiento del problema

IV,7.1.2 Recopilación de Información

IV,7.1.3 Elección del método

IV,7.1.4 Programación del trabajo de campo

IV,7.1.5 Ejecución del trabajo de campo

- IV,7.1.6 Procesamiento de los datos.
- IV,7.1.7 Interpretación Física.
- IV,7.2 Interpretación Cualitativa
 - IV,7.2.1 Mapas de tipos de curvas
 - IV,7.2.2 Mapas de Conductancia Longitudinal "S"
 - IV,7.2.3 Mapas de Resistividad Aparente.
 - IV,7.2.4 Mapas de Coordenadas de Extremos.
 - IV,7.2.5 Representación en cortes.
 - IV,7.2.6 Comparación de Curvas.
- IV,7.3 Interpretación Cuantitativa
 - IV,7.3.1 Problema Inverso
- IV,7.4 Integración.

V PERFILAJE ELECTRICO

- V,1 Definición y Generalidades
- V,2 Clasificación de las Calicatas
- V,3 Consideraciones Teóricas
- V,4 Resolución de Problemas Directos.
 - V,4.1 Capa Vertical
 - V,4.2 Ensayos sobre Modelos Reducidos.
- V,5 Representación Gráfica de las Resistividades Aparentes.
 - V,5.1 Puntos Característicos.
 - V,5.2 Valoración de la anomalía
 - V,5.3 Catálogos de Curvas Patrón
- V,6 Elección del Tipo de Calicata
- V,7 Planteamiento del trabajo
- V,8 Interpretación Cualitativa
- V,9 Interpretación Cuantitativa

VI EL METODO DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES

- VI,1 Generalidades
- VI,2 Trabajo de Campo

- VI,2.1 Modalidades del trabajo
- VI,2.2 Circuito de Exploración
- VI,2.3 Circuito de Emisión
- VI,2.4 Fases del Trabajo
- VI,3 Teoría e Interpretación.

VII EL METODO MISE A LA MASSE

- VII,1 Introducci3n
- VII,2 Trabajo de campo
 - VII,2.1 Trazado de Líneas Equipotenciales
 - VII,2.2 Método de Gradientes
- VII,3 Teoría e Interpretación
 - VII,3.1 Mapa de Equipotenciales
 - VII,3.2 Interpretación de los Gradientes

VIII EL METODO DEL POTENCIAL ESPONTANEO

- VIII,1 Introducci3n
- VIII,2 Causas del Potencial Espontáneo
- VIII,3 Instrumental
- VIII,4 Trabajo de Campo
 - VIII,4.1 Método de Potenciales
 - VIII,4.2 Método de Gradientes
- VIII,5 Interpretación Cualitativa
- VIII,6 Interpretación Cuantitativa
 - VIII,6.1 Cuerpo Polarizado asimilable a un dipolo.

APENDICE A CONDICIONES DE FRONTERA

APENDICE B SOLUCIONES A LA ECUACION DE LAPLACE.

P R O L O G O

MEXICO REQUIERE PARA SU DESARROLLO INTEGRAL, DE UNA ADECUADA Y EFICIENTE EXPLOTACION DE LOS RECURSOS DEL SUBSUELO, ENTRE LOS QUE SE PUEDEN CONTAR SUS RECURSOS ENERGETICOS, LOS MINERALES Y LOS ACUIFEROS ENTRE OTROS, Y PARA EL CUMPLIMIENTO DE ESTA META ES NECESARIO INTENSIFICAR Y MODERNIZAR LOS ESTUDIOS Y TRABAJOS EN LOS CAMPOS DE LA INVESTIGACION Y DE LA EXPLOTACION, ENCAMINADOS AL DESCUBRIMIENTO DE NUEVOS YACIMIENTOS Y A LA EXPLOTACION RACIONAL Y OPTIMA DE LOS QUE ACTUALMENTE ESTAN TRABAJANDO.

ES SABIDO, COMO FENOMENO DE DESARROLLO ECONOMICO, QUE CUANDO LA EXPLORACION Y EXPLOTACION DE RECURSOS DECAEN O NO CONSERVAN UN RITMO ADECUADO, LA SUBSISTENCIA, CONTINUIDAD Y PERMANENCIA DE LA INDUSTRIA NACIONAL CORRE UN SERIO PELIGRO PUES POR UN LADO FAVORECE LA IMPORTANCIA NO SOLO DE MATERIA PRIMA SINO TAMBIEN DE TECNOLOGIA Y POR EL OTRO PROPICIA LA DEPENDENCIA ECONOMICA, RASGO CARACTERISTICO DE LOS PAISES SUBDESARROLLADOS O EN VIAS DE DESARROLLO.

ADEMAS CABE MENCIONAR QUE LA EXPLORACION DE LAS RIQUEZAS TANTO RENOVABLES COMO NO RENOVABLES DEL SUBSUELO, ES UNO DE LOS RENGLOS MAS RIESGOSOS DE LA INVERSION ECONOMICA, DEBIDO A LAS REDUCIDAS POSIBILIDADES DE ALCANZAR EL EXITO, BASTE MENCIONAR COMO EJEMPLO QUE DE ACUERDO A ESTADISTICAS CANADIENSES RECIENTES SOBRE EXPLORACION MINERAL, DE 1000 AREAS QUE SON SOMETIDAS A ESTUDIO, SOLAMENTE UNA LLEGA A CONVERTIRSE EN MINA.

TODOS LO EXPRESADO HACE PENSAR QUE PARA CONTAR CON UNA EXPLO-
TACION DEL SUBSUELO, QUE RINDA BENEFICIO AL PAIS, Y QUE COADYUVE
PARA EL TAN ANSIADO DESPEGUE HACIA EL DESARROLLO, ES INDISPENSABLE
EL CONCURSO INTERDISCIPLINARIO DE INVESTIGADORES Y TECNICOS EN LA
EXPLORACION DE SUS RECURSOS, Y ESTE TRABAJO PRETENDE AYUDAR, DE
MANERA SENCILLA, EN LA FUNDAMENTACION TEORICA Y TECNICA DE LA PROS
PECCION ELECTRICA, HERRAMIENTA IMPORTANTISIMA EN EL CAMPO DE LA
GEOFISICA, CIENCIA QUE TIENE EN SUS AYERES MILLONES DE AÑOS DE HIS
TORIA Y EVOLUCION, Y EN SUS MAÑANAS, QUIZAS, LA CLAVE PARA UNA ME
JOR IDENTIFICACION CON NUESTROS ORIGENES Y SOBRE TODO CON NUESTRO
INCIERTO DEVENIR.

I INTRODUCCION

I.1 Definiciones

La Geofísica es una ciencia tan amplia y extensa, como se quiera, dedicándose al estudio de los fenómenos físicos naturales ó artificiales que tienen lugar sobre la superficie, en el interior y en la atmósfera de la tierra. Sus objetivos pueden ser académicos y/o económicos. La parte de la Geofísica que desarrolla técnicas con fines científicos ó académicos se conoce como pura y a aquella que implementa métodos físico-matemáticos, Teórica. La Geofísica Aplicada resuelve problemas relacionados con la corteza terrestre superficial en la búsqueda de yacimientos minerales y en la solución de ciertos problemas eminentemente ingenieriles, tales como los de la geotecnia.

La Exploración Geofísica es aquella parte de la Geofísica, que emplea técnicas de la Física en la solución de problemas geológicos en la búsqueda de yacimientos minerales (metálicos ó no), agua subterránea (tanto para uso doméstico y de riego, como energético) y petróleo. La Ingeniería Geofísica es la rama de la Ingeniería, que estudia las técnicas y métodos de la física, instrumentación e implementación de modalidades de adquisición de datos.

Los Métodos Geofísicos, son aquellas técnicas empleadas para el conocimiento del subsuelo, por medio de las diferentes propiedades y fenómenos físicos que ocurren o son medibles sobre la superficie de la tierra, o en perforaciones de cualquier tipo. Se dice que existen tantos métodos geofísicos como propiedades físicas se manifiestan, pero en forma general se conocen cuatro métodos conocidos como mayores:

1.- Método Gravimétrico: Se basa en las mediciones en el terreno de diferencias de gravedad debidas a contrastes de densidad del subsuelo.

2.- Método Magnético: Se encarga de medir las anomalías magnéticas causadas por las rocas sobre la superficie del terreno.

3.- Método Sísmico: Se basa en la creación artificial de una señal por medio de una explosión ó vibración y lo que se mide

es la velocidad de propagación de las ondas en el subsuelo.

4.- Método Geoeléctrico: Es el método estudiado en este trabajo.

Existen otros métodos geofísicos conocidos como menores y que son:

1.- Método Termométrico: Se basa en las variaciones locales de temperatura en la superficie del terreno para la búsqueda de fisuras y grietas a lo largo de las cuales se produce transmisión convectiva del calor desde zonas más profundas con el agua como agente.

2.- Método Radiométrico: Se encarga de la determinación de anomalías radioactivas causadas por materiales radioactivos que están contenidos en las rocas.

3.- Método Geoquímico: Se basa en el análisis químico de las sustancias sólidas, líquidas ó gaseosas que componen la corteza terrestre y mediante el cual pueden buscarse indicios de petróleo y otros minerales.

4.- Registros Geofísicos: Son los métodos geofísicos por medio de los cuales se hacen mediciones de resistividad, potencial espontáneo, velocidad de ondas elásticas, temperatura, etc., en el interior de sondeos mecánicos.

5.- Percepción Remota: Es el método mediante el cual se hacen interpretaciones de la composición del subsuelo a partir del análisis por computadora de las fotografías sacadas por aviones y satélites.

I.2 Desarrollo de la Prospección Eléctrica

I.2.1 Epoca Antigua

La Prospección Eléctrica es el arte de medir las propiedades eléctricas de las rocas para el estudio de la estructura y composición de aquellos estratos de la tierra que son lo suficientemente someros para ser explotados por el hombre. Como muchas otras artes, la prospección eléctrica fué concebida hace mucho y los elaborados instrumentos y métodos cuidadosamente desarrollados de la actualidad surgieron de las ideas que evo-

lucionaron en las mentes de hombres desde hace más de dos siglos.

El primer trabajo en prospección eléctrica parece haber sido hecho en 1720 por Gray y Wheeler y por Watson en 1746. Gray y Wheeler hicieron estudios eléctricos de rocas y catalogaron sus conductividades eléctricas. Watson descubrió independientemente que el terreno es un conductor eléctrico.

Sin embargo se prefiere pensar que Robert W. Fox hizo las primeras contribuciones reales a este arte. Fox vivió cerca de Falmouth, Inglaterra, donde hizo investigaciones sobre materias como: vapor a alta presión, geotermia, electricidad y magnetismo terrestre. Entre otras realizaciones en Geofísica, diseñó el primer círculo sumergido para la determinación de la inclinación magnética y la intensidad magnética a bordo de un barco, y fue uno de los primeros en reconocer la existencia del gradiente geotérmico de la tierra.

Fox condujo sus experimentos originales en 1830 en las minas de cobre en Cornwall, donde hizo el trascendental descubrimiento de que hay corrientes eléctricas naturales asociadas a los depósitos minerales sulfurados. En los socavones de varias minas, tuvo éxito en la medición de una corriente eléctrica fluyendo entre dos puntos de una misma veta ó entre dos puntos de diferentes vetas. Sus electrodos consistían en placas de cobre que eran acuñadas contra la vena para hacer contacto. Su insensible galvanómetro consistía en una aguja imanada de 3.25 pulgadas rodeada por 25 vueltas de alambre.

Fox reportó que la corriente medida variaba en proporción a la abundancia de mineral de cobre en las vetas. Este hecho lo condujo a concluir: "Por lo tanto, parece probable que el electromagnetismo se vuelva de utilidad para el minero, en la determinación con cierto grado de probabilidad de la cantidad relativa de mineral en las vetas, y de la dirección en la cual es más abundante". También observó la notable semejanza entre el fenómeno de corriente asociado con vetas y las baterías galvánicas de su tiempo.

En sus experimentos de 1834, Fox construyó el prototipo -

del moderno potenciómetro. De acuerdo con Fox: "El aparato - galvánico consistía de una placa de cobre, y otra de Zinc, sumergidas en agua muy salada a la cual se le agregaba ácido sulfúrico; cada placa exponía cerca de 180 pulgadas cuadradas a la acción del líquido". A partir de sus mediciones con este instrumento concluyó que las vetas minerales suministraban la energía eléctrica y sugirió que: "Este método puede ser útil al minero, ayudándolo a apreciar el valor de sus descubrimientos, y permitiéndole averiguar si los minerales en partes diferentes de una veta están conectados ó aislados, ó si las que parecen vetas paralelas lo son realmente ó simplemente son ramificaciones de la misma veta". Con el tiempo también reconoció que las corrientes eléctricas pueden atravesar considerables espesores de roca.

En Alemania, Von Strombeck (1833), Henwood (1841) y Reich (1839) se dedicaron a verificar los resultados de Fox. En 1837, Henwood, quien había sido un colaborador de Fox, hizo experimentos análogos con electrodos separados unos -- 1100 metros. Sus resultados corroboraron los de Fox, pero insistía en que las corrientes eran obtenidas únicamente cuando los electrodos estaban en contacto con la veta y nunca cuando estaban en contacto con la roca madre estéril. Henwood concluyó que las corrientes son puramente locales y probablemente de -- origen termoeléctrico. En 1841, Henwood encontró que: "La naturaleza y posición de las pequeñas placas empleadas, afectan, no sólo la intensidad, sino en algunos casos también las direcciones de las corrientes; y también hay una considerable diferencia en los resultados cuando las mismas placas de metal son colocadas sobre diferentes compuestos de las vetas, aun cuando estén en estrecho contacto".

En 1839, Reich repitió todos los experimentos de Fox, confirmando estos resultados. Reich estaba convencido de que las corrientes eran un fenómeno electroquímico y no termoeléctrico como creía Henwood.

Fox también vio la conveniencia de estudiar las propiedades eléctricas de los minerales individuales. Él catalogó

21 minerales como conductores, malos conductores ó no conductores. Fox consideraba a la píríta como uno de los mejores y más abundantes conductores y a la estalerita como no conductora. Reconoció que la pizarra parecía poseer la propiedad de conducir la electricidad en leve grado, pero unicamente en la dirección de crucero, tal vez debido a la humedad contenida. También notó la paradoja de que la plata, el zinc y el cobre en el estado metálico son excelentes conductores, pero combinados como sulfuros son considerablemente menos conductores; clasificó los sulfuros de plata y zinc como no conductores y el sulfuro de cobre como uno de los minerales más conductores.

Más tarde, Fox intentó clasificar los minerales con referencia a su actividad eléctrica. Mostró que los minerales poseen las propiedades electroquímicas de los metales, particularmente con respecto a la acción galvánica.

En 1871, W. Skey también realizó experimentos con minerales individuales. Él aumentó la lista de los minerales conductores.

Estos experimentos fueron muy significativos e hicieron una considerable contribución al arte de la prospección eléctrica. Sin embargo, el limitado concepto de fenómenos eléctricos en general, que prevalecía en ese tiempo, restringió las conclusiones de los investigadores. Aunque los potenciales eléctricos naturales conocidos ahora ciertamente existían, es probable que fueran ocultados por las grandes diferencias de potencial que existen cuando dos electrodos son colocados en diferentes soluciones químicas. Más aún, el criterio de Fox para la "actividad" de los materiales terrestres era la magnitud de la corriente que fluía en el circuito de emisión. Cuando los electrodos eran colocados en la tierra estéril de alta resistividad, la resistencia de contacto era alta y poca ó ninguna corriente podía fluir, este hecho explica porque estos primeros autores registraban una actividad nula.

Fox fué aparentemente el primero en postular la existen-

6

cia de corrientes telúricas y su efecto sobre el campo geomagnético, y escribió: "...asumiendo que las vetas metalíferas existen generalmente en la roca primitiva... podría pensar que las corrientes eléctricas, que afectan la aguja del galvanómetro pueden influenciar también la dirección de la aguja magnética sobre la superficie de la tierra..."

Fox (1832) modificó y aumentó su teoría como resultado de sus experimentos sobre termoelectricidad con rocas como pizarras, diorita y serpentina. Encontró que estas rocas difieren en sus propiedades eléctricas; cuando las calentaba algunos especímenes se volvían eléctricamente positivos, y otros eléctricamente negativos, cuando finalizaba el calentamiento. De estos experimentos obtuvo las siguientes conclusiones relativas a las corrientes telúricas y fenómenos relacionados: "Sobre la hipótesis de la existencia de elevadas temperaturas en el interior del globo, necesariamente concluiríamos de los experimentos precedentes que las corrientes eléctricas podrían ser producidas por estas causas, tomando diferentes direcciones y ejerciendo una importante influencia sobre todos los fenómenos de magnetismo terrestre, estos son generales, pero también aparecen como anomalías magnéticas locales."

Las últimas investigaciones de Fox lo inclinaron a pensar que las direcciones de éstas corrientes son probablemente muy influenciadas por la estructura geológica de la tierra.

Otros estudios concernientes al origen de las corrientes terrestres naturales fueron hechos por A.C. Becquerel. El nombre que destaca en las primeras descripciones de las corrientes telúricas es el de Charles Matteucci.

En 1865, Matteucci conectó alambre aislado de cobre a los postes telegráficos en la planicie de Maurice en Francia. Un alambre estaba en el plano del meridiano magnético y un segundo alambre fué colocado normal a esta dirección. Cada alambre tenía 6 km de largo. Cada extremo de alambre era puesto en contacto con el terreno por medio de un electrodo no polarizante que consistía de una tira de amalgama de zinc sumergida en un recipiente de porcelana.

na porosa conteniendo una solución saturada de sulfato de zinc. El recipiente poroso se ponía en contacto con el agua contenida en un vaso de porcelana porosa que estaba enterrado en el suelo. Matteucci usó un galvanómetro en serie con la línea para medir las corrientes directamente. El observó las variaciones diurnas y otras fluctuaciones en el flujo de las corrientes telúricas.

Durante el periodo entre 1844 y 1882 aparentemente se abandonó la investigación sobre la actividad eléctrica de cuerpos minerales, ya que es hasta 1882 cuando Carl Barus publicó su trabajo clásico "Sobre la actividad eléctrica de los cuerpos minerales". Barus hizo sus mediciones eléctricas durante 1880 y 1881 sobre la veta de Comstock y en el distrito minero de Eureka, ambos en Nevada.

Los trabajos mineros en Comstock habían dejado casi agotada la veta y además estas minas eran muy calientes por lo cual Barus abandonó pronto el trabajo en Comstock.

Las condiciones geológicas eran más adecuadas para los experimentos en Eureka. Barus anticipó que el gradiente de potencial sería máximo cerca del cuerpo mineral y desaparecería lejos de éste.

Los primeros electrodos de Barus fueron barras puntiagudas de hierro ó acero. A diferencia de Fox, Barus tuvo mucho esmero en evitar las pérdidas en el alambre de cobre que conectaba los electrodos con el galvanómetro. Después de probar varios dispositivos, decidió suspender el alambre de hilos de seda ó algodón encerado, teniendo cuidado de evitar que el alambre tocara la roca o las vigas.

En sus primeros trabajos en el distrito de Eureka Barus buscó antes que nada eliminar los efectos molestos en los electrodos. Reconoció que el uso de electrodos metálicos era inadecuado, y esto lo condujo a la invención de un ingenioso electrodo no polarizante que denominó "la bolsa".

Su electrodo consistía de una tira metálica de zinc amalgamado inmerso en una solución de sulfato de zinc. La solución estaba contenida en una bolsa cilíndrica de una a una y

media pulgadas de diámetro y 6 a 10 pulgadas de longitud. Los lados estaban hechos con un pedazo de tripa de res tapada a ambos extremos con corcho. Barus ató la tripa de res estrechamente al corcho con hilo de Bramante. Un hoyo en la parte superior del corcho permitía la inserción de la terminal de zinc dentro de la solución en la bolsa. Una estaca de madera se utilizaba como soporte del zinc, y se hacía pasar por la parte central del tapón superior de corcho.

Para su uso en el campo este electrodo se encajaba en un orificio de medida exacta perforado en la roca a un ángulo de 30° con la vertical. Antes de colocar la bolsa el hoyo se llenaba con agua que previamente se había puesto en contacto con el zinc el tiempo suficiente para precipitar toda la materia disuelta que pudiera actuar como electrodo. Barus alcanzó gran exactitud en la medición de los potenciales del terreno. El potencial entre dos electrodos no polarizantes idénticos, situados en el mismo líquido pocas veces era mayor de 5 milivolts y usualmente mucho menor.

La técnica de campo para medir potenciales utilizada por Barus era similar a la usada actualmente. Él mantenía fijo un electrodo y movía el segundo alrededor, midiendo la diferencia de potencial entre ellos. Tomó además la precaución de usar un total de 4 electrodos para checar sus resultados. Los intervalos entre estaciones de lectura del electrodo móvil eran de 50 a 80 pies. Barus graficaba potencial natural contra posición a lo largo de la trayectoria como se hace aún en la actualidad.

Como resultado de su trabajo con potenciales naturales, Barus hizo varias recomendaciones:

- a) Utilizar un sólo tipo de prospección es inadecuado
- b) Las exploraciones deben de hacerse en grandes áreas alrededor de las zonas mineras
- c) El trabajo de campo se mejora investigando las propiedades eléctricas de los minerales.

De 1890 a 1910, los avances en el campo de la electroquímica se aplicaron a los problemas geológicos de alteración y reemplazamiento en depósitos minerales.

En 1891 Braun probó que ciertos fenómenos relativos a la formación de sulfatos eran de naturaleza electroquímica. En 1912 Gohschalk y Buchler mostraron que la oxidación y solución de ciertos sulfuros naturales son aceleradas por la presencia de pirita y marcasita, y atribuyeron en parte la acción catalítica a la acción eléctrica. También apuntaron que la acción electro-lítica de los sulfuros es análoga a la de los metales.

R. C. Wells (1914) hizo investigaciones sistemáticas sobre la actividad eléctrica de cuerpos minerales para aplicar este conocimiento a los problemas de depositación mineral. Mostró que minerales diferentes empleados como electrodos exhiben potenciales diferentes en una solución dada y también que los potenciales mostrados por la mayor parte de los minerales, principalmente en sus valores iniciales dependen en alto grado de la naturaleza de la solución en contacto con los minerales.

La principal contribución de Wells a la prospección eléctrica radica en el hecho de que fué el primero en reconocer la causa principal de las anomalías de potencial natural cerca de cuerpos minerales y especificar la dirección en que fluyen las corrientes cerca de un cuerpo mineral. Wells decía: "Si una masa considerable de mineral está en contacto cerca de la superficie con una solución oxidante (por ejemplo: sulfato férrico acidificado) y a profundidad con una solución menos oxidante (como sulfato ferroso) podría existir acción eléctrica resultando en la oxidación de la solución más profunda y reducción de la solución somera hasta que se alcanzara el equilibrio. La corriente pasaría hacia abajo en el conductor sólido y hacia arriba en el electrolito en el cual la corriente consistiría en la migración de cationes hacia arriba y aniones hacia abajo."

I.2.2 Epoca Clásica

Escuela Francesa

Conrad Schlumberger (1878-1936) fué tal vez la personalidad más notable en el campo de la prospección eléctrica. Inició la llamada escuela francesa.

El primer acercamiento de Schlumberger a la prospección eléctrica fué mapear líneas equipotenciales alrededor de una fuente puntual de corriente.

Schlumberger probó un generador de corriente alterna y un "vibrador" de 1000 ciclos como fuentes de corriente, de ahí que pudiera mapear líneas equipotenciales usando un teléfono como indicador nulo. Debido a la inducción eléctrica dentro de sus líneas de medición, cambió a una fuente de corriente directa con un potenciómetro y electrodos no polarizables para medir cuantitativamente diferencias de potencial. Así pudo entonces trazar mapas de líneas equipotenciales y perfiles de potencial utilizando dos electrodos de corriente.

De 1912 a 1914, Schlumberger realizó largas series de experimentos en Calvados, Normandía donde existen importantes cuerpos minerales de hematita y siderita en formaciones del Silúrico. Schlumberger mostró por estos experimentos que su nuevo método era una herramienta aprovechable para delimitar aproximadamente formaciones conteniendo minerales, y para mostrar cualitativamente la inclinación de los estratos.

Casi desde el principio de su trabajo Schlumberger estaba enterado de las diferencias de potencial natural que existen en la tierra ya que estas interferían con sus mediciones de potencial. Las atribuyó a dos causas principalmente: aquellas debidas a la acción química, y las ocasionadas por las corrientes telúricas asociadas a los campos eléctrico y magnético. Para corregir estos potenciales naturales Schlumberger medía los valores de los potenciales espontáneos y los restaba de los valores medidos cuando la corriente fluía. También sugirió que podrían tomarse mediciones de potencial con la corriente fluyendo primero en una dirección y luego en la opuesta. El potencial del terreno se eliminaba de este par de lecturas tomando simplemente el promedio.

Conrad Schlumberger también reconoció la importancia de los potenciales naturales debidos a la oxidación de los minerales sulfurados. Por medio de este efecto hizo los primeros descubrimientos geofísicos de un cuerpo mineral sulfurado.

El grupo de Schlumberger desarrolló una distribución electródica en la cual los electrodos de potencial están tan cercanos que lo que efectivamente se mide es el campo eléctrico -- entre los electrodos de corriente. A esta distribución se le llama de Schlumberger.

En 1923, Schlumberger delineó exitosamente el domo - Arisesti en Rumania. Este trabajo constituyó la primera aplicación de un método geofísico a la exploración petrolera. En 1926 y 1927 descubrió con el método resistivo varios domos salinos en Alsacia.

En 1926 inauguró la Société de Prospección Electrique que dió lugar a organizaciones como la Compagnie Générale de Géophysique y la Schlumberger Well Surveying Corporation.

En 1934 el grupo de Schlumberger inició trabajos sobre el método de corrientes telúricas. Como el método usa un campo natural unicamente se necesita usar aparatos de medición de potencial. El método telúrico ha sido desarrollado en alto -- grado y proporciona una importante herramienta en las explotaciones extensas.

Louis Cagniard fué uno de los últimos de la escuela francesa en hacer una contribución importante a la prospección -- eléctrica. Para establecer una tecnica que tuviera las ventajas del método telúrico, pero eliminando el requerimiento de una estación base. El desarrolló el método magneto-telúrico. En vez de medir -- unicamente las variaciones en el campo telúrico, proponía medir -- tambien las variaciones correspondientes a la componente horizontal del campo geomagnético. Cagniard aseguraba poder predecir así la naturaleza de los estratos sin necesidad de -- utilizar los datos de una estación base.

Escuela Americana

En esta parte se considerará el desarrollo de la prospección eléctrica durante la primera parte del siglo XX en los Estados Unidos y Canadá. Esta fase comienza en América en 1883 cuando Fred Brown inventó y patentó un método resistivo

de prospección.

En 1902, Leo Daft y Alfred Williams sugirieron el uso de las observaciones de las diferencias de potencial para los trabajos de resistividad. Ellos desarrollaron un método en el cual una corriente alterna de baja frecuencia era introducida al terreno por medio de electrodos, y la distribución de corriente resultante era estudiada por medio de un receptor telefónico sensitivo conectado a dos electrodos situados sobre el terreno. Debido a la inherente debilidad en estos tipos de medidas, la precisión de las observaciones dependía en gran parte del criterio del observador.

El padre de los modernos métodos cuantitativos de resistividad en los Estados Unidos fué Frank Wenner. Su análisis de la teoría del dispositivo de medición de cuatro terminales y sus aplicaciones resultaron en dos importantes contribuciones a la prospección eléctrica. Su primera contribución en 1912, consistió en dar un planteamiento claro al teorema de resistividad aplicado a sus medidas con cuatro electrodos. Su segunda y más importante contribución, fué su invención en 1915 de lo que hoy se designa como la distribución electródica de Wenner. Como un resultado natural de sus mediciones de la resistividad de los metales, colocó cuatro electrodos sobre el terreno, a intervalos iguales, a lo largo de una línea recta. La corriente pasaba al terreno entre los dos electrodos exteriores mientras la diferencia de potencial era medida entre los dos electrodos interiores. Wenner reconoció las dificultades que surgían de los efectos de polarización cuando se usa corriente directa con electrodos metálicos, y por esta razón él usaba corriente alterna. Wenner aplicaba de 50 a 150 volts a través de sus electrodos de corriente, los cuales eran de 3 ó 4 cm. de diámetro e inicialmente situados a 30 ó 50 cm. de separación y a una profundidad de 125 cm. La corriente se leía por medio de un amperímetro. A través de esta línea de corriente estaba conectado un transformador de reducción 10:1 ó 20:1 con el lado de bajo voltaje conectado a los extremos de un

10
potenciómetro. Un galvanómetro de vibración, un desfaseador y un voltímetro eran empleados en el circuito de bajo voltaje para medir la diferencia de potencial entre los dos electrodos interiores. La resistividad aparente que él llamó "resistividad efectiva" era calculada de la medida de resistencia óhmica y la geometría de la distribución de los electrodos.

Wenner llamó la atención sobre el hecho de que la medida de la resistividad aparente depende principalmente de la resistividad cerca y entre los electrodos de potencial, y muy poco de la resistividad a distancias iguales ó mayores que la distancia entre los electrodos de corriente.

Aunque Wenner en 1915 usó su método únicamente para determinar resistividades en un área pequeña, señaló que es posible medir resistividades a mucho mayor profundidad situando los electrodos a mayor distancia.

Algunos contemporáneos de Wenner también contribuyeron al conocimiento de la prospección eléctrica descubriendo ciertos principios involucrados en el flujo de corriente a través de la tierra.

Mc Collum y Logan (1913) midieron las resistencias de los suelos y su polarización. Ellos demostraron que el voltaje de polarización es una función del electrolito, el carácter del electrodo, la densidad de corriente en el electrodo y el tiempo que la corriente ha estado fluyendo. Mc Collum y Logan inicialmente hicieron mediciones de la resistividad del suelo "in situ" por medio del método voltímetro-amperímetro. La técnica era exponer un bloque de tierra haciendo dos excavaciones cercanas y de unos metros de profundidad. Una distribución de anillo en los electrodos se usaba de tal manera que la corriente era obligada a fluir a través del bloque en líneas paralelas. La resistencia del bloque de tierra era entonces medida notando la caída de potencial a través del bloque y la corriente que circulaba. En el laboratorio determinaron la resistividad de muestras de suelo comprimidas en forma de cilindro y aplicando las mediciones voltímetro-amperímetro.

Tenían gran cuidado de conservar el contenido original de humedad del suelo en cada muestra. Así mostraron cuantitativamente el efecto de la humedad y temperatura sobre la resistividad. Encontraron que la resistividad se incrementa grandemente cuando la temperatura del suelo está bajo el punto de congelación del agua.

En 1916, Mc Collum y Arkborn desarrollaron y usaron electrodos no polarizantes para medir diferencias de potencial. Este electivodo consistía de una barra de cobre inmersa en una solución de sulfato de cobre contenida en una taza de cemento poroso. Un exceso de cristales de sulfato de cobre era agregado para asegurar que la solución siempre estaría saturada. la taza era de 5 cm de diámetro exterior y 21 cm de altura, cubierta en la parte superior por una tapa de madera dura. Otro tipo de electivodo no polarizante consistía de un tubo de hierro conteniendo una solución de cloruro férrico. El extremo inferior del tubo estaba cerrado con un tapón poroso. La parte exterior del tubo era aislado de tal manera que el contacto eléctrico con la tierra se hacía únicamente a través del tapón poroso, usualmente una esponja húmeda. Ellos remarcaron que la resistencia entre el electivodo y el suelo húmedo raramente excedía de 250 Ω , la cual es poco importante con el uso de voltímetros de alta sensibilidad.

En 1921 Mc Collum diseñó un aparato para medir la resistividad de suelos y la densidad de corriente. Su arreglo de electrodos era un sistema invertido del de Wenner, con el par de electrodos de corriente interiores y los de potencial exteriores. Los electrodos de potencial eran del tipo no polarizante por lo que el potencial natural podía ser medido. Lo único notable del dispositivo era su capacidad para indicar en una sola operación, el voltaje debido a la corriente alterna inyectada y el potencial natural del terreno.

H.R. Conklin (1917) después de tres años de pruebas de laboratorio y campo, redactó un informe donde explica un método electromagnético de alta frecuencia usado en un intento por localizar sulfuros conductores (galena y pirita),

en el distrito tri-state. Su trabajo constituyó el primer experimento serio con el método electromagnético. Su bobina -- transmisora primaria en la forma de un círculo de 60 metros de diámetro, era colocada sobre el terreno; y el campo electromagnético producido dentro de la anilla era medido por dos pequeñas e idénticas bobinas de exploración balanceadas una contra la otra, en serie y opuestas y estaban conectadas a través de un detector a un galvanómetro. Con una bobina permaneciendo estacionaria, la otra se movía a lo largo de una curva de tal manera que la lectura del galvanómetro permanecía en cero. Sobre un subsuelo homogéneo cada curva trazada ó contorno, llamado por Conklin una "línea isogónica", era un círculo. Lo heterogéneo del terreno producía desviaciones de esta forma normal.

S.F. Kelly trajo a Norteamérica el método del potencial espontáneo desarrollado por la escuela de Schlumberger. Usando electrodos no polarizables y un potenciómetro con sensibilidad de hasta un millivolt, midió el potencial natural a lo largo de perfiles rectilíneos y también mapeo líneas equipotenciales alrededor de un electrodo fijo de corriente.

El primer descubrimiento de un nuevo depósito en Norteamérica a través del uso del método de potencial natural fué hecho por Kelly en 1924. La anomalía fué encontrada en el lago Athapapuskw, región de Manitoba.

Algunas de las más grandes contribuciones a la prospección eléctrica, especialmente aquellas que corresponden a las primeras mediciones de campo, fueron hechas durante la década de 1920 por Gish y Rooney.

Gish (1923) estableció los requisitos para las mediciones de las corrientes telúricas. Para definir las completamente era necesario medir tanto los potenciales naturales a partir de los cuales podían ser determinados los gradientes de potencial superficial como también la resistividad de la tierra en la misma región. En conexión con el potencial natural "V" en su ecuación estableció que: "Es enteramente probable que "V" no es en todos los casos una función analítica

de las coordenadas espaciales. Por ejemplo, pueden existir efectos electroquímicos y polarización a través de planos donde dos diferentes formaciones geológicas hacen contacto, y por lo tanto dando lugar a discontinuidades. Consecuentemente a menos que la estructura de la región donde van a ser estudiadas las corrientes terrestres, sea muy homogénea, parecería aconsejable realizar un estudio de los potenciales terrestres y por lo tanto determinar la magnitud de tales discontinuidades cuando ocurren".

Para estudiar las corrientes terrestres, Gish había instalado en el observatorio del instituto Carnegie en Watheroo, Australia líneas y equipo para la medición constante de potenciales naturales. Las líneas estaban colocadas de norte a sur y de este a oeste. El trabajo de Mauchly (1918) había indicado que los electrodos de alambre aislado, cuidadosamente enterrados eran más adecuados para los estudios de corrientes telúricas de gran extensión (long-range telluric-current) que los electrodos no polarizantes. Por esta razón, Gish usó electrodos de alambre aislado.

Durante la última parte de 1923, Gish hizo mediciones preliminares de resistividad terrestre modificando el medidor de corrientes de Mc Collum, y usando la configuración de Wenner. En todas las mediciones se tomaban cuatro perfiles verticales de resistividad en las cuales la separación de los electrodos variaba regularmente de 1 a 30 metros. Gish reconoció que tanto las variaciones laterales como a profundidad se manifestaban en estos perfiles verticales.

Durante el otoño de 1924 Rooney y Gish midieron la resistividad de volúmenes mayores de roca y correlacionaron los cambios de resistividad con cambios en los estratos. Durante 1924 y 1925 ocuparon cientos de estaciones para tomar tanto perfiles verticales como horizontales.

Un trabajo posterior incluyó estudios de resistividad cerca del observatorio de Watheroo donde un estrato superficial de arena seca de alta resistividad les ocasionó innumerables problemas para poder introducir suficiente corriente al terreno, y

los condujo a concluir que: "prácticamente toda la resistencia de los circuitos de medición puede considerarse concentrada en ó cerca de la superficie de contacto de los electrodos y el terreno. Una condición similar en sus electrodos de potencial, reducía la sensibilidad del galvanómetro de potencial.

Las mayores contribuciones del trabajo de Gish y Rooney son una relativa a la instrumentación y otra que consiste en un método empírico de interpretación. Gish comenzó su trabajo con el medidor de corriente de Mc Collum, pero modificó su diseño, creando lo que ahora es conocido como el conmutador doble de Gish - Rooney. El propósito original del conmutador doble era aplicar una corriente al terreno alternadamente en direcciones opuestas para vencer los efectos de polarización y potencial natural y al mismo tiempo medir el potencial conmutado, entre los electrodos de potencial como si fuera un potencial constante en una sola dirección.

Durante todo su trabajo Gish y Rooney (1925) se esforzaron por encontrar algunas reglas empíricas de las cuales pudieran depender. Como resultado de sus primeros trabajos razonaron que: "El valor de la resistividad así encontrado debe ser, como siempre; considerado como un promedio en el cual la resistividad de la roca cerca de la línea de las terminales influye fuertemente, mientras que esta influencia disminuye al aumentar la distancia, de tal manera que a una distancia lateral ó profundidad igual a la distancia entre las terminales adyacentes la influencia es tan pequeña que toda la roca que se encuentra más allá de estos límites contribuye de manera despreciable al resultado final. incrementando el espacio entre electrodos podemos incluir profundidades mayores de terreno, de tal manera que de una serie de tales mediciones podemos obtener un conocimiento totalmente satisfactorio de la variación de la resistividad con la profundidad siempre y cuando las series de mediciones sean repetidas en posiciones adecuadamente distribuidas sobre la región".

En 1927, Scott Turner, entonces director de la oficina de minas de Estados Unidos reconoció el probable valor de los mé-

todos modernos de prospección e inició un programa de investigación, junto con D.A. Keys, A.S. Eve y C.A. Heiland, que han tenido una profunda influencia en la prospección eléctrica.

En sus pruebas Eve y Keys (1929) desarrollaron un método eléctrico (leap-frog method). Tres alambres de cobre paralelos, X, Y, Z de 30 metros de largo cada uno se fijaban bien al terreno con una separación de 30 metros. Los alambres eran clavados con estacas bien mojadas. Se suministraba un voltaje conocido a través de los alambres exteriores X y Z, y mientras la corriente eléctrica estaba fluyendo se medía con un voltímetro portátil las diferencias de potencial entre el alambre central Y y los alambres exteriores X y Z. La asimetría en las lecturas de las caídas de potenciales indicaría cual de las dos secciones de terreno entre los alambres era la mejor conductora. Una vez hecho esto las tres estacas que fijaban a X eran desenterradas y se hacía pasar el alambre sobre Y y Z hasta una nueva posición A, localizada a 30 metros del alambre Z. Las mediciones se repetían con la corriente fluyendo entre Y y A. Este procedimiento se realizaba muchas veces. Encontrando los cocientes de las caídas de potencial, podía obtenerse la conductividad relativa de cada zona de 30 metros de ancho y así lograr una representación de toda el área. Este método fué bautizado por Eve y Keys como el método del triple salto. En las áreas secas este método funciona bien, pero en áreas pantanosas ó áreas con cambios abruptos de humedad, las resistencias de las estacas varían tanto que el método falla.

Eve, Keys y Lee (1929) dedicaron el verano de 1928 a obtener información sobre la profundidad alcanzable por los métodos eléctricos. Las pruebas se hicieron en Barton Hill y Fisher Hill, N.Y. sobre yacimientos de magnetita de tal manera que las mediciones eléctricas podían chequearse por métodos magnéticos; las dos áreas experimentadas también fueron exploradas por perforación.

Para este trabajo Lee sugirió y usó el Megger para medir con la configuración de Wenner. Un Megger es un tipo de óhmetro que se ha usado ampliamente como instrumento de ingenieros.

ría eléctrica para probar suelos y resistencias de aislamiento. Está basado en el principio de la conmutación simultánea, pero difiere de la distribución Gish-Rooney en que el óhmetro de lectura directa (del tipo de bobina cruzada que proporciona la razón de voltaje a corriente) es sustituido por el amperímetro y el potenciómetro; más aún la corriente en el Megger es generada por -- magneto-generador manual. La velocidad de repetición de este -- instrumento es de alrededor de 50 veces por segundo. El Megger original tenía únicamente 4 terminales para los 4 electrodos de la configuración de Wenner pero los modelos posteriores podían acomodar tres electrodos de potencial en adición a los dos electrodos de corriente, haciendo posible usar el Megger con la configuración de Lee.

Crosby y Leonardon (1928) aplicaron exitosamente los métodos eléctricos para mapear la topografía del lecho de roca en el sitio propuesto para la construcción de una presa en la parte superior del río Connecticut en la que aparentemente fue la primera aplicación ingenieril de estos métodos en los E. U.

Pullen (1929) hizo mediciones de resistividad en el laboratorio con técnicas de corriente directa y alterna, sobre muchos núcleos de rocas metamórficas. El encontró que: 1) las mediciones de resistividad varían con el tiempo debido a la polarización eléctrica, 2) la razón de polarización difiere en varias rocas, 3) la resistividad varía como una función del voltaje aplicado y la frecuencia, 4) el contenido de agua altera fuertemente la resistividad de los materiales, 5) la resistividad de un yacimiento que contiene minerales conductores puede ser mayor si los minerales se encuentran diseminados.

Lee, Voyce y Boyer (1920) sugirieron otras distribuciones para medir la resistividad. Estas nuevas distribuciones son: la distribución asimétrica de Wenner en la cual el segundo electrodo de corriente en una configuración convencional de Wenner se coloca efectivamente en el infinito, la distribución de Lee en la cual un tercer electrodo de potencial se coloca a medio camino entre los electrodos de potencial de la distribución de Wenner, y las mediciones de corriente alterna en las cuales la distribución asimétrica

ca de Wenner se rota alrededor de un único electrodo de corriente.

J. H. Swartz (1931) formó un grupo de experimentos sobre la resistividad de estratos artificiales. Para este propósito cavó en el terreno un gran agujero de 5 metros de largo, 4 de ancho y 1 metro de hondo y lo llenó con estratos alternados de arcilla y arena, haciendo un total de 7 estratos. También fueron modelados cambios laterales y en la topografía. Swartz levantó perfiles verticales de resistividad usando distribuciones de Wenner y Lee. Para la configuración de Lee, la profundidad a la cual ocurría un cambio verdadero de resistividad en el modelo, correspondía a los ojos del autor con exactitud notable al valor de separación de los electrodos en el cual ocurría un rompimiento en el perfil vertical de resistividad. cuando usaba la distribución asimétrica de Wenner con un electrodo de corriente fijo, los resultados eran menos claros que con la distribución de Lee y muy difíciles de interpretar.

Lee y Swartz (1930) condujeron experimentos sobre estratos cargados de petróleo en Allen County, Ky donde las formaciones petrolíferas se encontraban a profundidades muy someras en lentes porosas de caliza. Usando la configuración de Lee, Swartz interpretó directamente los aumentos de resistividad en los perfiles verticales como indicativos de formaciones petrolíferas ó gasíferas, estos indicios se compararon con los obtenidos por una perforación a 245 metros de profundidad y se observó que se correlacionaban de manera aceptable.

Swartz estableció el hecho de que los perfiles verticales de resistividad en ciertos lugares de estas áreas eran dentados -- más que uniformes y que estas roturas dentadas siempre ocurrían dentro del mismo rango de separación de los electrodos de corriente, indicando esto que aparentemente eran características de los horizontes estratigráficos. Swartz reconoció la necesidad de distinguir los efectos de la profundidad de aquellos producidos por los movimientos horizontales de los electrodos de corriente, para lo cual estableció métodos para reconocer estos efectos laterales cuando se presentan.

En los años siguientes a 1930 la mayor parte del trabajo hecho por la escuela americana, consistió en introducir mejoramientos en la instrumentación, refinar las técnicas de campo establecidas y la interpretación teórica.

Otros investigadores.

Además de los investigadores en Francia y Norteamérica los escandinavos también hicieron significativas contribuciones a la prospección eléctrica a través de su interés básico en los problemas mineros.

En 1904 Trustedt en Finlandia sugirió usar un método electromagnético para la prospección.

En 1907, Peterson había formado una compañía para buscar yacimientos minerales, para lo cual utilizaba un método - del tipo de baja frecuencia.

Se introducía directamente al terreno a través de dos electrodos, una corriente alterna de 10 a 40 miliamperes - usando un voltaje de 5000 a 6000 volts. Un circuito disyuntor de mercurio funcionaba como un zumbador que interrumpía la corriente 300 veces por minuto. La intensidad del sonido en un receptor telefónico el cual obtenía su señal de dos electrodos colocados dentro del terreno, daba una indicación de la conductividad de éste.

Bergstrom modificó este método (llamado de Daft-Williams) para incluir el mapeo de líneas equipotenciales usando la señal nula ó mínima en su receptor telefónico como un indicador. Detallados estudios y pruebas se realizaron con este nuevo método. El aparato llenaba todos los requisitos - para la eficiencia en el campo, pero los mapas de exploración de campo obtenidos eran difíciles de interpretar.

En 1907 un noruego llamado Muenster hizo el primer descubrimiento de un depósito mineral importante con la utilización de métodos de prospección eléctrica. El descubrimiento fué hecho en Nautanen, Lapland a través del uso del método del potencial natural.

Durante la primera guerra mundial la necesidad urgente

de minerales sulfurados renovó el desarrollo de los métodos eléctricos en Suecia. Sin embargo ningún aparato ó método fue perfeccionado hasta que los ingenieros mineros, Lundberg y Nathurst inventaron su equipo en 1918.

El sistema de Lundberg y Nathurst usualmente conocido como el método de Lundberg, constaba de un arreglo de dos líneas paralelas de electrodos de mil metros de largo que se colocaban sobre el terreno separados una distancia de mil metros. El contacto con el terreno se realizaba por medio de estacas metálicas clavadas al terreno y fijas al cable no aislado de la línea de electrodos. Hacían pasar una corriente alterna de audio frecuencia (50 a 10 000 ciclos por segundo) a través del terreno entre las líneas de electrodos. Las líneas equipotenciales eran trazadas entre los electrodos de corriente por medio de dos varillas exploradoras. Los puntos equipotenciales se localizaban encontrando un punto nulo con los audífonos de teléfono cuando las varillas se ponían en contacto dentro del terreno.

Los primeros descubrimientos de Lundberg mediante su método equipotencial representaron grandes triunfos para la prospección eléctrica. En 1918 descubrió el yacimiento mineral de Kristineberg en el norte de Suecia y para 1922 ya había investigado y probado 60 depósitos minerales con su método de líneas equipotenciales.

El principal desarrollo de los métodos electromagnéticos en Suecia ocurrió en 1921 cuando Carl Sundberg comenzó a experimentar con varios de estos métodos. El usó métodos galvánico-electromagnéticos en los cuales la corriente se introduce directamente al terreno a través de electrodos; y métodos de inducción en los cuales se obliga a la corriente a fluir en los cuerpos minerales inductivamente por corrientes variando en anillos de alambre aislado del terreno. Para 1928 Lundberg y sus asociados habían descubierto entre 40 y 50 yacimientos minerales de valor comercial en Suecia.

Los germanos también hicieron importantes contribuciones a la prospección eléctrica especialmente a través de sus investigaciones electromagnéticas y electroquímicas. Lowy y -

Leimback usaron un método electromagnético de alta frecuencia. Richard Ambion hizo varias sugerencias para mejorar el método de líneas equipotenciales.

Durante febrero de 1928 a febrero de 1930, la exploradora experimental Geofísica Imperial se organizó en Londres y se dirigió a Australia, su propósito no era encontrar minerales sino probar la aplicabilidad de los métodos geofísicos bajo diferentes condiciones de campo.

En 1924 Petrowsky midió corrientes terrestres naturales y corrientes directas artificiales, usando el método de Kelly con algunas modificaciones. Para introducir la corriente en el terreno, Petrowsky usó lo que llamó el sistema puntual para la distribución de electrodos. Este sistema consistía de un gran número de pequeños electrodos colocados a lo largo de la frontera del campo investigado y conectados por alambres que los mantenían en estado de igual potencial. Aparte de Petrowsky existen indudablemente otros importantes investigadores -- rusos, sin embargo, no es posible describir el desarrollo de los métodos eléctricos en Rusia debido a la carencia de información.

I.2.3 Epoca contemporánea

En la década de 1960-70 las investigaciones geofísicas -- fueron enfocadas hacia los métodos eléctricos basados en la medición de campos electromagnéticos naturales, principalmente en Rusia. Los métodos electromagnéticos más usados se enumeran a continuación:

- 1) Sondeo transitorio: Este método está basado en el estudio de la respuesta transitoria de la tierra al ser inyectada una corriente de corta duración en ella. La naturaleza de esta respuesta depende de los parámetros del corte geoelectrico y del arreglo de electrodos utilizado.
- 2) Sondeo magnetoteléxico: Este método fue propuesto por A.N. Tikhonov y L. Cagniard (Francia). Está basado en el estudio de las variaciones en la componente horizontal del campo electromagnético natural de la tierra.
- 3) Método teléxico de corriente: El perfil magnetoteléxico sirve

como base para el método. En el estudio de corrientes telúricas, las variaciones de gran período (10 a 60 segundos) del campo eléctrico-telúrico son medidas.

Por otra parte, los avances que se obtuvieron en el perfeccionamiento del equipo fueron bastante importantes además de mejores técnicas de interpretación de los métodos eléctricos.

En la década de 1970-80 la interpretación de los sondeos eléctricos ha sufrido un extraordinario cambio. En particular la publicación, en 1970, de la aplicación del método del filtraje lineal, a la interpretación de los sondeos eléctricos resistivos simplificó los cálculos de la interpretación exhaustiva a las mediciones y a un bajo costo. Un segundo desarrollo importantísimo de la última década en la práctica de los sondeos eléctricos es la creación de nuevos instrumentos de medición muy sofisticados y además el uso de las nuevas computadoras digitales que simplifican todo el trabajo.

I.3 Clasificación de los métodos geoelectricos

De lo dicho en el anterior bosquejo histórico se deduce que existen muchas modalidades en los métodos de exploración eléctrica del subsuelo, cada una de ellas con su propio campo de aplicación, sus ventajas y sus defectos. Como las características de cada procedimiento son múltiples, no es fácil establecer una clasificación de ellos.

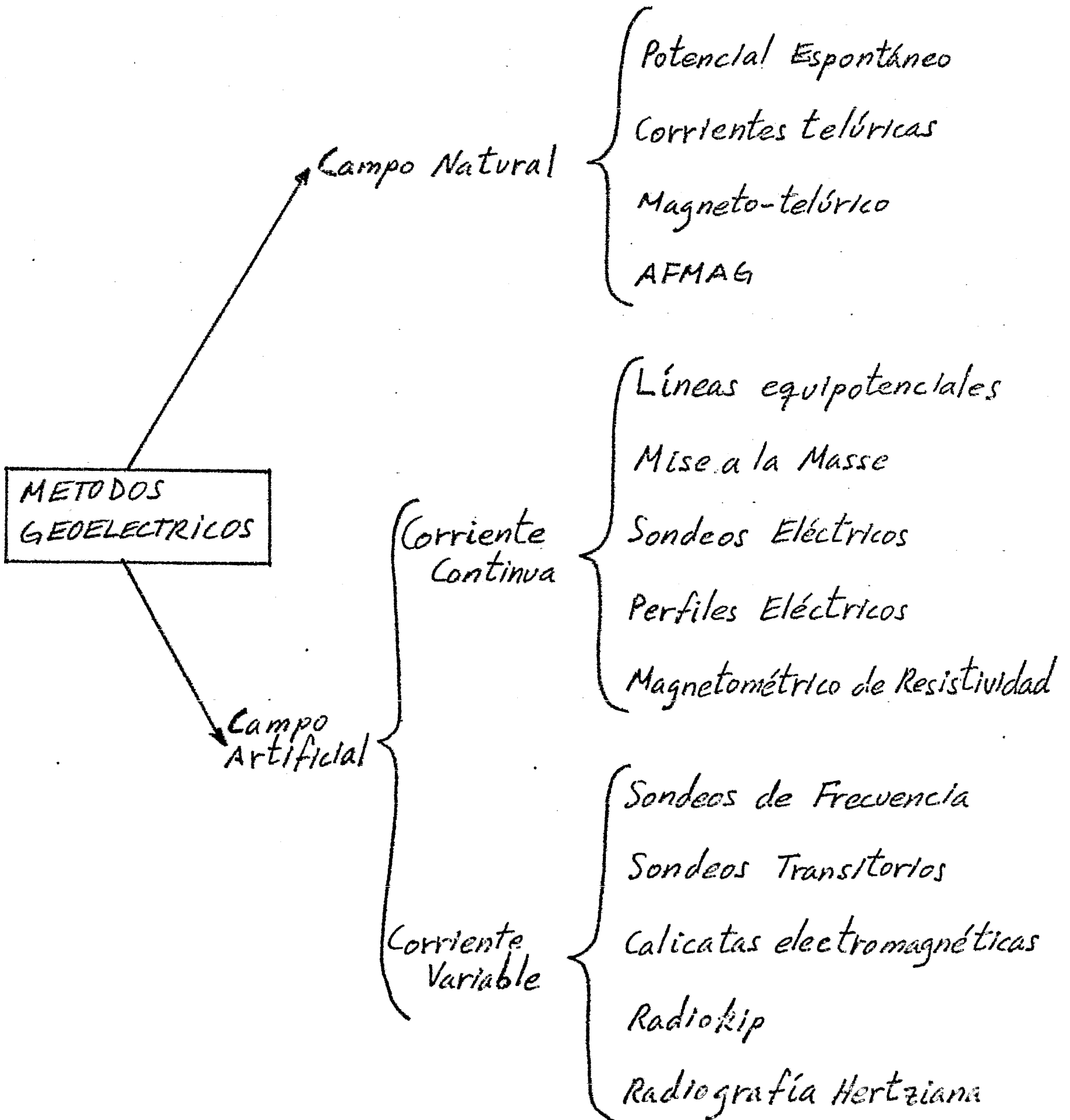
Un criterio muy importante es el que clasifica los métodos según que el campo electromagnético que en ellos se estudia sea de origen natural, ó se cree artificialmente para la prospección.

Otro criterio es el que considera si la información recogida se refiere a la vertical de un punto ó se distribuye a lo largo de un perfil, dentro de un margen de profundidades aproximadamente constante.

También es interesante conocer si en un método determinado el campo electromagnético es constante (corriente continua) ó variable en el tiempo (métodos de campo variable).

Teniendo en cuenta todo lo dicho anteriormente se da a continuación un bosquejo de clasificación de los métodos geoelectri-

cos que, si bien, no es completo, contiene los más importantes y difundidos.



I.4 Justificación de la aplicación de los métodos eléctricos.
Los métodos eléctricos como cualquier otro método geofísico no se justifican a partir de los resultados exactos que se tengan, ya que en este caso perforando en la zona deseada se obtienen resultados más satisfactorios que los que puede aportar la geofísica de exploración.

Las ventajas que se tienen con los métodos geofísicos es que se puede cubrir una vasta zona haciendo una interpretación global en menos tiempo de lo que requiere estar haciendo perforaciones a diestra y siniestra, y la principal, que es la que justifica todo el trabajo geofísico, la economía del trabajo. Efectivamente, comparando el costo de las perforaciones con el costo del estudio geofísico se observa claramente la ventaja de los métodos geofísicos.

Por otra parte, si se comparan los diferentes métodos geofísicos entre sí en cuanto a su utilidad, costo y facilidad (sin contar el objetivo) se observa claramente que los métodos eléctricos son los que menos correcciones necesitan y los que el instrumental utilizado es el más económico posible, por lo que otra vez surge la principal ventaja de los métodos eléctricos que es su bajo costo comparado con los demás (principalmente con el sísmico), como muestra el cuadro técnico-económico de los métodos geofísicos.

I.5 Aplicaciones de los métodos eléctricos de prospección

La información que los métodos eléctricos dan sobre el subsuelo puede utilizarse con fines muy variados. A continuación se enumeran las aplicaciones más importantes y difundidas de los métodos eléctricos:

- 1.- Investigaciones tectónicas para la búsqueda de petróleo.
- 2.- Estudios para la localización de aguas subterráneas.
- 3.- Estudios complementarios para cartografía geológica bajo recubrimiento.
- 4.- Estudios de cuencas carboníferas.
- 5.- Localización de yacimientos de minerales útiles, especialmente menas metálicas.
- 6.- Investigaciones de firmes y cimentaciones para Ingeniería

	METODO GRAVIMETRICO	METODO MAGNETICO	METODOS SISMICOS
Aplicaciones	En petróleo: Estudios de reconocimiento y complementarios. Estructuras anticlinales y sinclinales. Fallas. Diapiros. Domo salinos (mucho empleo). En minerales: Filones y masas de minerales con contrastes de densidad. En aguas: Estructuras. Fallas. Cavernas poco profundas, que pueden contener -- agua (poco empleo).	En petróleo: Profundidad del basamento (gran empleo). En minerales: Menas magnéticas -- Fe, Ni, Cr, Ti. Profundidad y volumen del yacimiento (gran empleo). En aguas: Contactos con rocas hipogénicas que pueden ser de interés hidrológico (empleo muy pequeño).	En petróleo: Estructuras, Trampas, Fallas, Profundidades, Espesores, Secciones tiempo o profundidad de gran perfección. Es el más importante de todos los métodos. En minerales: Grandes masas de minerales. Situación y profundidad (poco empleo).
Valores Medios	Gravedad en miligales	Susceptibilidad magnética de rocas y minerales. Valores medidos en gammas.	Velocidad de propagación de las ondas sísmicas Valores en m. por segundo.
Instrumentos empleados	Gravímetros. Balanzas de torsión y Péndulos -- (en desuso)	Magnetómetros. Balanzas magnéticas. Magnetómetros de protones. Magnetómetros de vapor de Cesio. Magnetómetros de Flujo.	Geófonos. Hidrófonos. Registradores automático y digital.
Tipo de prospección	Terrestre y Marina	Terrestre y aérea. Marina como complemento de otros.	Terrestre: Sísmica por refracción y por reflexión. Sísmica marina
Personal prospector	8	3 en terrestre 4 en área.	15 en terrestre 20 en marina
Resultados obtenidos	Mapas de Bouguer, Residuales y -- Transformados	Profundidad de basamentos Mapas magnéticos, localización y profundidad de masas magnéticas. Cubicación.	Secciones sísmicas gran profundidad. Domo. Diapiros. Fallas. Profundidad de la estratificación.
Costo por equipo y mes en millones de pesos - 1973.	0.21	Terrestre 0.15 Área 1.2 a 1.8	Terrestre 1.8 a 2.4 Marinas 5.4 a 6

METODOS ELECTRICOS	METODOS RADIATIVOS	TESTIFICACION GEOFISICA	METODO GEOQUIMICO
En petróleo: Estructuras. Fallas. Situación a profundidades no muy grandes (poco empleo). En minerales: Minerales conductores en general. Sulfuros. Masas. Filones. (mucho empleo). En aguas: Estructuras. Sinclinales. Resistividad. Profundidad de los acuíferos (gran empleo).	Filones y placeres. Minerales -- radiactivos y sus paragenéticos. U, Th, Ta, Nb, Be, Bi, Sn, etc. Yacimientos potásicos y apatíticos. Diques pegmatíticos.	En petróleo: Resistividad, porosidad, y velocidad de propagación. Rayos gamma. Situación perfecta y espesor de los horizontes productivos (empleo casi imprescindible). En minerales: Toma de muestras en los horizontes atravesados (poco uso). En aguas: Potencia y porosidad de los mantos acuíferos, para su mejor explotación.	Yacimientos petrolíferos y de minerales metálicos. Criaderos de sulfuros.
Resistividad. Potenciales naturales Campos eléctricos inducidos. Profundidad de capas y horizontes acuíferos. Polarización inducida.	Radiactividad de minerales y rocas Medición de las emisiones α, β, γ . Golpes o destellos por minuto.	Resistividad. Potencial espontáneo. Rayos gamma. Velocidad sísmica. Porosidad, inducción magnética Registro de resistividad. Densidades. Inclución y inclinación de las capas $\tan \theta = \frac{\rho}{\rho_0}$	Elementos, medidos en partes por millón.
Potenciómetros. Bobinas electromagnéticas. Equipos de corriente alterna con frecuencia variable.	Detectores Geiger-Müller. Escintilómetros. Berilómetros. Emanómetros.	Testificaciones eléctricas y radiactivas. Rayos gamma. Registrador de neutrones. Inclínómetro y Fotoclínómetro. Sonda sísmica.	Espectrofotómetros. Espectrógrafos. Cromatógrafos. Reactivos y análisis químicos.
Terrestre: Sección de resistividades Campos de potencial. Polarización -- inducida. Electromagnético. Telúrico. Aéreo: Electromagnético. Radiofase. E. fase. Input.	Terrestre y aérea	Terrestre	Terrestre
2 a 3 en terrestre 3 a 4 en aérea	3 en terrestre 3 a 4 en aérea	2 a 4	3 a 5
Fallas Filones. Profundidad de minerales y mantos acuíferos.	Mapas de isonormalias radiactivas y localización de minerales radiactivos.	Caracterización de isonormalias y potenciales eléctricos. Secciones perforales. Espectros. Secciones Diagrafías.	Mapas de isonormalias y de isocóntornos de Propano. Metano, Ni y bacterias en petróleo. Toda clase de elementos en minerales.
Terrestre 0.12 a 0.27 Área .6 a 1.2	Terrestre 0.06 a 0.08 Área 0.3	0.12 a 0.27 de profundidad 1.2 a 1.7 a 2000 m.	.18 a .24

- 7.- Localización y ubicación aproximada de materiales de construcción.
- 8.- Investigación a profundidad muy reducida para la localización de objetos y edificaciones enterradas, como guía y ayuda para las investigaciones arqueológicas.
- 9.- Estudios de zonas muy profundas de la corteza terrestre.

II PROPIEDADES ELECTROMAGNETICAS DE LAS ROCAS.

II.1 Conceptos básicos de la conducción de la electricidad.

La conductividad eléctrica es el movimiento de cargas eléctricas de un lugar a otro. Estas cargas pueden ser llevadas por iones ó electrones, cuyas movillidades varían de material a material. hay todo un espectro de variación de la conductividad desde los metales altamente conductores hasta aislantes casi perfectos.

La conductividad eléctrica puede estar regida por la relación:

$$\sigma = ne\mu \quad \dots \quad (2.1.1)$$

donde "n" es el numero de portadores de carga en un material, "e" es la carga de cada uno, y, "μ" es la movilidad de los portadores. La movilidad está definida como la velocidad de deriva por unidad de campo eléctrico. Puesto que los portadores de cargas pueden ser iones ó electrones, clasificamos la conducción en iónica ó electrónica, dentro del rango 1 a 10^8 mhos/m. Abajo de este rango de conductividad, los materiales pueden ser semiconductores ó aislantes. Para medios porosos, tal como las rocas de la superficie terrestre, los conductores están dentro del rango normalmente cubierto por los semiconductores sólidos.

La conductividad iónica implica el movimiento ordenado de iones en un electrolito aplicandole un campo eléctrico externo. En ausencia de este campo eléctrico, los iones se mueven al azar como un resultado de la agitación termal y de las colisiones con otros iones y átomos. Ya que, tanto los cationes como los aniones están presentes en un electrolito, la conductividad puede ser expresada como:

$$\sigma = e[n^+\mu^+ + n^-\mu^-] \quad \dots \quad (2.1.2)$$

donde los números y movillidades de los iones positivos y

negativos están indicados por el superíndice. Un incremento en la temperatura implica un incremento en la conductividad ya que, la movilidad de ambas especies de iones se incrementa con la temperatura. Cualquier fuerza que modifique las movilidades de los cationes y de los aniones diferencialmente causará un cambio en la razón de contribuciones a la conductividad hecha por cada especie de ión.

Tanto la conductividad iónica como la electrónica son análogas en el sentido de que el movimiento al azar de las partículas es afectado por un campo aplicado. En la conducción electrónica, el movimiento al azar de los electrones valencia entre los átomos es ordenado por la aplicación de un campo eléctrico externo. Los electrones entonces viajan con una velocidad de deriva a través del sólido. Otra aclaración del mecanismo de la conducción electrónica se facilita haciendo referencia a los diagramas de los niveles de energía (Fig. 2.1) para los electrones que rodean al núcleo. Estos electrones son agrupados en cascarones esféricos con distintos niveles de energía; la energía se incrementa desde el cascarón interior (k) a el cascarón exterior (valencia). Sólo aquellos electrones del cascarón " k " tienen energías idénticas. En los electrones que ocupan otros cascarones existen niveles discretos de energía dentro de los cascarones. Van Vlack (1959) simplificó algunos principios importantes de los electrones dentro de cualquier átomo aislado como sigue:

1.- Hay niveles electrónicos específicos de energía alrededor de cada átomo. Los electrones no pueden ocupar espacios entre estos niveles.

2.- Los electrones llenan primero los niveles de energía más bajos. Una cantidad específica de energía, llamada un "cuántum" de energía, debe ser suministrada para mover un electrón al nivel próximo superior.

3.- A lo sumo, sólo dos electrones pueden ocupar algún nivel de energía.

4.- Estos dos electrones con igual valor de energía son "imágenes" de cada uno; esto es, sus características indican que uno de ellos gira en una dirección y el otro en la dirección opuesta. (Fig. 2.2)

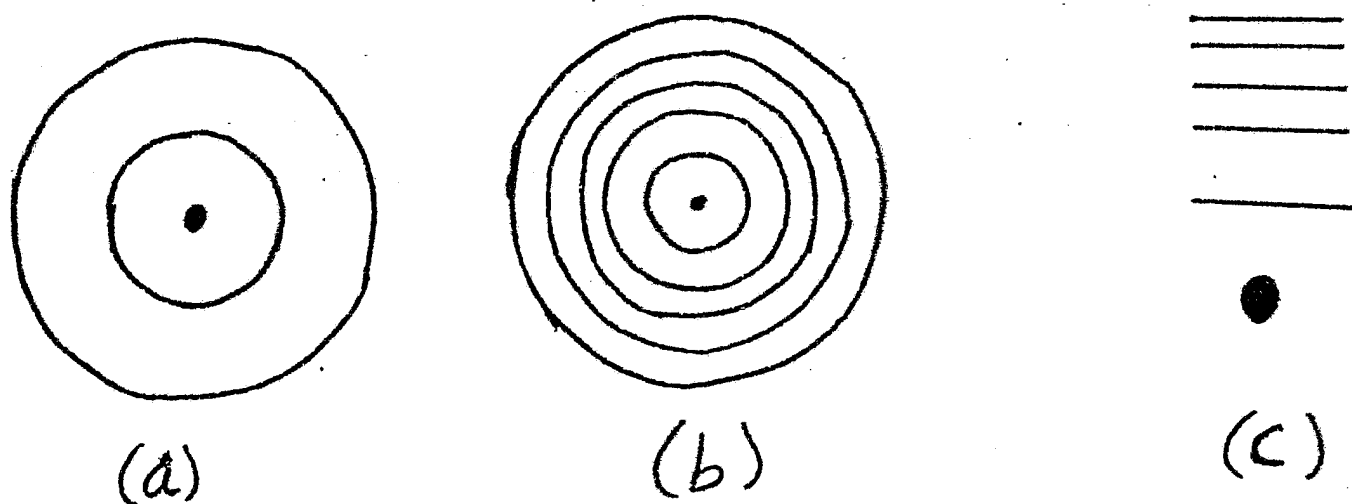


Fig. (2.1) Niveles de energía para el neón. a) Cascarones de energía; b) Niveles de energía y; c) Gráfica de los niveles de energía.

Los principios anteriores son válidos cuando el átomo está lo suficientemente aislado de sus vecinos para comportarse aisladamente. Cuando no es éste el caso, entonces hay interacción de los electrones más alejados o valencia de los átomos adyacentes. Nuevos subniveles se presentan y constituyen una banda de energía correspondiente a un nivel de energía en un átomo simple. Cada banda contiene un subnivel para cada átomo en el material. Los subniveles no están totalmente ocupados (Fig. 2.3), sin embargo, ocurre cuando el cascarón de valencia está parcialmente lleno.

Cuando la valencia está determinada por los dos cascarones exteriores de un átomo simple, se originan dos bandas de valencia. Estas bandas se pueden trazar como en la Fig. 2.4. Los electrones llenarán los subniveles de energía más bajos de la segunda banda de valencia, mientras que los vacantes, los subniveles superiores de la primera banda de valencia.

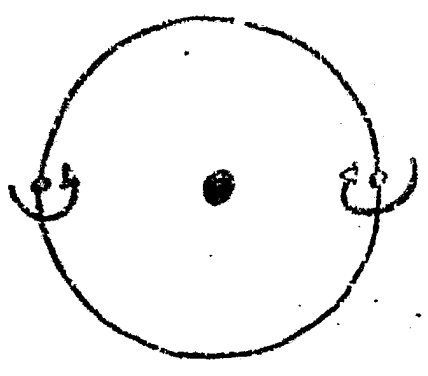
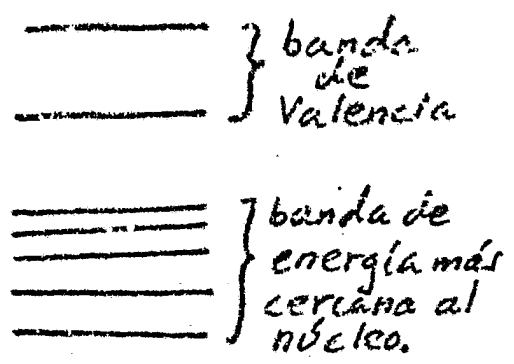


Fig. 2.2 giro opuesto de electrones



● Núcleo

Fig. 2.3 Banda de Valencia del sodio parcialmente llena

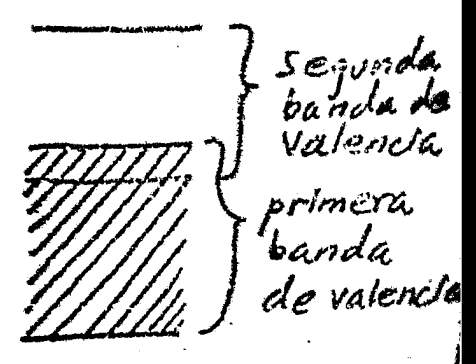


Fig. 2.4 traslapes de bandas de valencia

Un campo eléctrico externo puede suministrar la energía para llevar un electrón de un subnivel a otro superior en una banda dada, ó aún, de una banda a otra. Esto permitirá al electrón "derivar" y disminuir su velocidad a un lugar de energía más bajo siempre y cuando el sitio esté disponible. La dirección de la deriva estará definida por el campo aplicado. Cuando un electrón es llevado a un nivel de energía superior, deja un "agujero" que puede ser ocupado por un electrón que se mueve bajo agitación termal en lugar del campo eléctrico externo. Una contribución a la conducción puede ser realizada a través de "agujeros" así como por electrones.

En algunos materiales las bandas de valencia de energía no se traslapan dejando un "gap" de energía. Si todos los subniveles de una banda de valencia están completos, la única forma de conducción es suministrar suficiente energía para llevar un electrón a través del "gap" de energía a la primera banda de energía que no está totalmente llena. Entre más grande sea el "gap" de energía, más resistivo será el material. Los aislantes son materiales con "gaps" de energía excepcionalmente grandes. Los semiconductores son intermedios, entre los conductores y los aislantes tanto en el tamaño del "gap" de energía como en la conductividad eléctrica.

Se ha indicado que los electrones están distribuidos sobre un número de cascarones. Estas consideraciones se han hecho para el caso de dos ó tres cascarones, mientras, de hecho algunos átomos están distribuidos sobre siete cascarones llamados K, L, M, N, O, P y Q. Estos están caracterizados por

los números quantum principales $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. El número máximo que cada cascarón puede contener es $2n^2$. Además se ha mencionado la fina estructura de los cascarones, cuyos subcascarones se nombran como s, p, d, f correspondiente a los números quantum azimutales $l=0, 1, 2, 3$. El número máximo de electrones en un subcascarón es $2(2l+1)$.

Para muchas discusiones es conveniente representar el diagrama de energía de otra manera de como se representó en la Fig. 2.2. La representación alterna está ilustrada en la Fig. 2.5. La línea curva en la Fig. 2.5a describe el potencial en la vecindad de un núcleo atómico, y las líneas horizontales indican los niveles de energía permitidos.

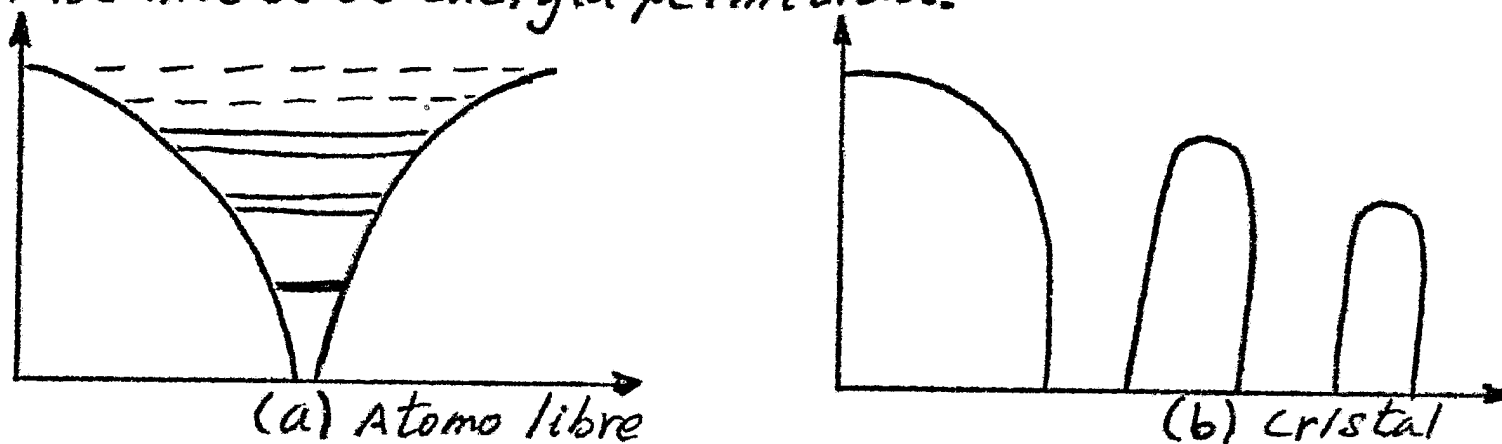


Fig. 2.5 Representación alterna del diagrama de energía

En este ejemplo, los niveles más bajos K y L están completamente llenos. En el nivel M , el subcascarón s normalmente contiene el electrón valencia, mientras que p es un subcascarón que puede estar ocupado. Un metal monovalente tiene un electrón en el subcascarón s , un metal bivalente tiene dos, mientras que un metal trivalente tiene dos electrones en el subcascarón s y un electrón en el subcascarón p .

II.2 Resistividad Eléctrica.

II.2.1 Definición y unidades

La resistividad eléctrica (ρ) de cualquier sustancia es una medida de la dificultad que la corriente eléctrica encuentra a su paso en un material determinado. Esta definición no es la única encontrada en la literatura, por ejemplo, en la

literatura rusa es común encontrar la siguiente definición de resistividad eléctrica: "La resistividad eléctrica de una sustancia es la resistencia que ofrece al paso de la corriente eléctrica un centímetro cúbico de esa sustancia (en forma de cubo) y cuya dirección es perpendicular a una de las aristas del cubo.

Esta definición es errónea debido a que no concuerda con las unidades de resistividad eléctrica (ohms-metro) y además no coincide con la primera definición.

La resistividad eléctrica está dada analíticamente por:

$$\rho = \frac{R \cdot A}{L} \quad (2.2.1)$$

donde L es el largo del conductor, A es la sección transversal del mismo y R su resistencia. Dimensionalmente:

$$[\rho] = \frac{[R][A]}{[L]} = \frac{L^2 M T^{-3} I^{-2} L^2}{L} = L^3 M T^{-3} I^{-2}$$

De la expresión anterior se puede deducir que las unidades de resistividad en el S.I. son ohms-metro ($\Omega\text{-m}$) ó ohms-centímetro ($\Omega\text{-cm}$).

También es importante mencionar que la magnitud recíproca de la resistividad $\sigma = 1/\rho$, se denomina conductividad eléctrica, sus unidades en el S.I. son los mhos sobre metro (V/m).

II. 2. 2 Conducción de la electricidad en rocas y minerales

Para la prospección geoelectrica se puede considerar a una roca como un conductor de la corriente eléctrica, vista como un agregado formado por un esqueleto sólido mineral, de líquidos y gases. Considerando lo anterior se puede decir que en la resistividad de una roca influyen los siguientes factores:

- 1.- La resistividad de los minerales que forman la parte sólida de la roca (esqueleto).
- 2.- La resistividad de los líquidos y gases que rellenen los poros

de la roca.

3- La humedad de la roca.

4- La porosidad de la misma.

5- Su textura, y la forma y distribución de sus poros.

6- Los procesos que ocurren en el contacto de los líquidos de los poros y el esqueleto mineral.

Por estudios hechos se sabe que la resistencia de los minerales constituyentes de las rocas del grupo silicateado, es muy grande y oscila entre 10^6 y 10^{18} Ω -m. y la resistencia de los minerales nativos, que poseen conductividad electrónica oscila entre 10^8 y 10^6 Ω -m. La mayoría de las menas, por el carácter de la conductancia, pertenecen a los semiconductores y se puede decir que los buenos conductores se encuentran en el rango de 10^8 a 10^3 Ω -m. y los relativamente malos de 10^2 a 10^7 Ω -m.

Por todo lo anterior, se observa que si la resistividad de las rocas dependiese únicamente de los minerales constituyentes, la mayoría de las rocas sería considerada como aislante, pero, todas las rocas tienen poros en proporción mayor ó menor, los cuales suelen estar ocupados total ó parcialmente por flúidos, de lo que resulta que en conjunto, las rocas varían su resistividad dependiendo de la concentración de flúidos que contengan sus poros.

Si se habla de aguas naturales se observa que la resistividad mínima (un Ω -m. y menos) la posee en las aguas profundas fuertemente mineralizadas y también las marinas. Para las aguas subterráneas oscila, en función de la mineralización, entre 10^2 a 10^3 Ω -m. y por último, para las aguas fluviales débilmente mineralizadas se observa mucho mayor resistencia (hasta 1500 Ω -m.).

En la resistividad del agua que se encuentra en los poros de las rocas tiene influencia su temperatura. La dependencia de la resistividad de una solución de su temperatura se expresa como:

$$\rho_t = \frac{\rho_{18^\circ}}{1 + \gamma(t - 18^\circ)} \quad \dots \quad (2.2.2)$$

En donde ρ_t es la resistividad de la solución a la temperatura t , ρ_{18° es la resistividad de la solución a 18°C de temperatura, δ es un coeficiente de temperatura de la conductividad eléctrica que varía de 0.022 a $0.0025\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. También hay que tomar en cuenta que la dependencia entre la resistividad de las rocas y la temperatura es más compleja que la citada para el caso de electrolitos puros.

Si los poros de la roca están llenos por petróleo su resistividad es siempre grande y alcanza hasta $10^{16}\ \Omega\text{-m}$, es decir, el petróleo se considera un aislante.

Debido a todo lo anterior se puede decir que la conductividad eléctrica en las rocas es esencialmente electrolítica (iónica) y se deduce que la humedad de las rocas debe influir fuertemente en su resistividad.

Si se designa por ρ_v la resistividad de la roca totalmente saturada de humedad, por k_v un coeficiente igual a la relación del volumen de la parte del espacio poroso, que se puede calcular por medio de:

$$\rho_{k_v} = k_v^{-2.15} \rho_v \quad . \quad . \quad . \quad (2.2.3)$$

Hay que señalar que si la roca se encuentra bajo el nivel de las aguas subterráneas, los poros de la misma están totalmente saturados de humedad.

En la superficie de separación de las fases líquida y sólida de que constan las rocas, es decir, en el contacto del esqueleto mineral y del líquido de los poros, ocurre un proceso de absorción de iones (comúnmente de aniones). Absorbidos en la superficie del esqueleto mineral, estos iones forman un revestimiento de una capa eléctrica binaria fuertemente enlazada con él. Los iones que quedaban en exceso en la solución de signo opuesto, forman un segundo revestimiento de la capa binaria; la parte interna de este revestimiento está rigidamente enlazada con la superficie de separación de las fases y la externa tiene estructura difusa. La concentración de las cargas en ella disminuye al alejarse de la superficie de separa-

ción. En conjunto, en ausencia de un campo eléctrico externo, la capa binaria es eléctricamente neutra.

La relación de la resistencia de las rocas con su estructura queda aclarada en las figuras siguientes.

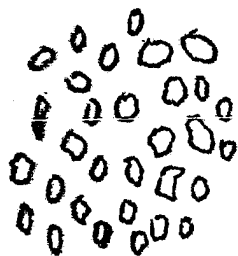


Fig. 2.7a

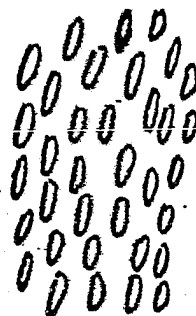


Fig. 2.7b

En la figura (2.7.a) se representa una roca en la que el esqueleto mineral y los poros están orientados en el espacio desordenadamente, por lo tanto, la resistividad de la roca será aproximadamente la misma en cualquier dirección (roca isotrópica).

La figura (2.7.b) representa otra roca con esqueleto mineral y poros que tienen una forma alargada. Esto lleva a que las condiciones de paso de la corriente en la roca sean distintas para las diversas direcciones. O sea, la resistencia de tales rocas depende de la dirección, es decir, la roca, desde el punto de vista eléctrico, es anisotrópica. Si ρ_t es la resistividad que va en sentido de los poros y ρ_n es la resistividad perpendicular al sentido de los poros. Basándose en las figuras (2.7.a) y (2.7.b) se observa que $\rho_n > \rho_t$.

La resistividad de un medio heterogéneo con inclusiones conductoras disminuye notablemente si éstos están en contacto entre sí. Este fenómeno es de gran importancia en las rocas con conductos formados por poros rellenos de electrolito, por lo que conviene considerarlo de modo detallado y cuantitativo.

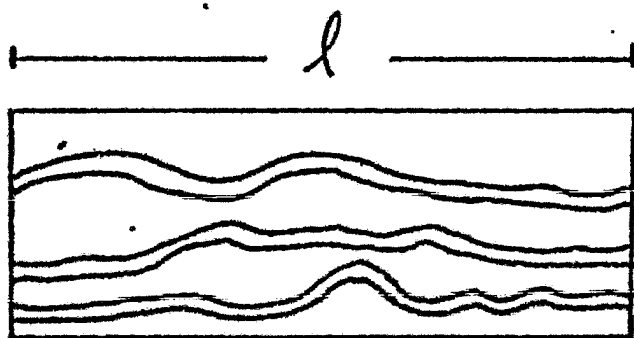


Fig. 2.8 Conducción a través de poros.

Tomando como modelo de roca la figura anterior que muestra a una roca porosa con todos sus poros conectados. - A partir de la fórmula de la resistencia se tiene que:

$$R = \frac{\rho_r \cdot l}{s} \quad \dots \quad (2.2.4)$$

donde "l" es la longitud de la roca, "s" es su sección transversal y ρ_r es la resistencia media de la roca.

Por otra parte, como se supone que la conducción sólo se efectúa a través de los poros, llenos de agua con sales, la resistencia está dada por:

$$R = \frac{\rho_a \cdot l_e}{S_e} \quad \dots \quad (2.2.5)$$

donde "l_e" es la longitud efectiva media de los conductos, y "S_e" es la sección total efectiva de los mismos.

Iguando (2.2.4) y (2.2.5) y despejando ρ_r :

$$\rho_r = \frac{\rho_a \cdot l_e}{l} \cdot \frac{s}{S_e} = \frac{\rho_a \cdot l_e}{l} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{s}{S_e} = \rho_a \cdot \frac{l_e^2}{l^2} \cdot \frac{s \cdot l}{S_e \cdot l}$$

de esta ecuación l_e/l recibe el nombre de tortuosidad "T" y $s \cdot l$ es volumen, por lo tanto,

$$\rho_r = \rho_a T^2 \frac{V}{V_e}$$

donde V = volumen real de la roca
V_e = volumen ocupado por los poros.

a la relación que hay entre el volumen real y el volumen de poros se le conoce como porosidad, entonces, la ecuación anterior queda:

$$\rho_r = \frac{T^2}{p} \cdot \rho_a$$

a la relación T^2/p se le denomina factor de formación "F" de acuerdo a la convención de Archie. De acuerdo a todo lo anterior, la relación entre la resistividad global de la roca y la del electrolito que llena sus poros está dada por:

$$\rho_r = F \rho_a \quad \dots \quad (2.2.6)$$

Este factor de formación es variable y se encuentra en función de la porosidad, aunque la porosidad de una misma clase de roca disminuye con la edad y el grado de metamorfismo.

Las primeras representaciones gráficas de Sundberg y de Jahochy y Hooper fueron expresadas matemáticamente por Archie en 1942. Esta expresión recibe el nombre de Ley de Archie y está dada por:

$$R_r = P^{-m} \rho_a \quad \dots \quad (2.2.7)$$

donde "m" recibe el nombre de parámetro de cementación. Esta ecuación ha sido modificada por la introducción del parámetro "a" que depende de la textura de la roca y suele oscilar de 0.5 a 1.5; el exponente "m" oscila de 1.3 a 2.3, Esta ecuación está dada por:

$$R_r = a P^{-m} \rho_a \quad \dots \quad (2.2.8)$$

Por otra parte, los poros no están siempre saturados de agua, puesto que en ellos puede existir aire, gas natural ó petróleo, Por ello se ha hecho necesario introducir el índice de resistividad, que es la relación entre la resistividad de la roca con el grado de saturación deseado y con sus poros totalmente llenos de agua. Se entiende por el grado de saturación "S" la fracción ocupada por el agua respecto del volumen total de poros:

$$R_r = I F \rho_a \quad \dots \quad (2.2.9)$$

donde I es el índice de resistividad dado por

$$I = S^{-n} \quad \dots \quad (2.2.10)$$

donde $n=2$ según Archie ó $n=1.98$ según Guyod. Algunos otros autores escriben la anterior relación como:

$$I = b S^{-n} \quad \dots \quad (2.2.11)$$

donde $b=0.6$ y $n=2.25$ para areniscas y pizarras arcillosas de porosidad inferior al 40%.

La expresión (2.2.9) puede escribirse, teniendo en cuenta las fórmulas (2.2.7) y (2.2.11) en forma más explícita - como:

$$\rho_r = (ab \rho^{-m} S^{-n}) \rho_a \quad \dots \quad (2.2.12)$$

de donde resulta que la resistividad de una roca cuya conductividad se debe a su contenido en agua, depende de siete parámetros.

Como se mencionó anteriormente la resistividad no es igual en todas direcciones para el caso de una roca heterogénea, es decir, la resistividad no puede expresarse por un escalar sino por un tensor simétrico ρ_{ij} que exige el conocimiento de seis componentes.

Para el caso de los monocristales de mineral se pueden tomar como ejes de coordenadas los cristalográficos que suelen coincidir con las direcciones principales del tensor de resistividad. Si se eligen convenientemente los ejes de coordenadas, ocurre que $\rho_x = \rho_y \neq \rho_z$; por lo que el tensor de resistividad puede expresarse por sólo dos cantidades ya definidas que son ρ_n y ρ_t .

Se define como coeficiente de anisotropía a la relación que hay entre ρ_n (ó ρ_{\perp}) y ρ_t (ó ρ_{\parallel}) dada por:

$$A = \lambda = \sqrt{\frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}}}$$

y la resistividad media como:

$$\rho_m = \sqrt{\rho_{\perp} \rho_{\parallel}}$$

Combinando estas dos ecuaciones se obtienen las expresiones:

$$\rho_n = \rho_m / A$$

$$\rho_t = \rho_m A$$

Por otra parte, las rocas en lo que se refiere a humedad y textura son diferentes para los tres grupos fundamentales - de éstas: sedimentarias, volcánicas y metamórficas y por consiguiente también son diferentes sus resistencias. A continuación se describirán brevemente las propiedades eléctricas de éstos grupos.

Rocas sedimentarias: Se caracterizan por resistencias bajas en comparación con los otros tipos de rocas, aunque también las hay que tienen resistividad elevada; a ellas pertenecen las arenas secas y los sedimentos hidroquímicos compactos y de baja porosidad, por ejemplo: yeso, anhidrita y otros. Es característico, dentro de las rocas sedimentarias, que la resistividad de las arcillas sea habitualmente menor que la resistividad de las arenas. Esto se explica, por una parte, por la considerable influencia del agua vinculada a la superficie de separación de las fases sólida y líquida y por otra, a que en las arcillas, a causa de su baja permeabilidad las aguas subterráneas se estancan y aumenta la mineralización debido a las sales minerales preexistentes en el esqueleto sólido de la roca.

Rocas volcánicas: Se caracterizan por los valores más altos de resistividad y esto se debe a que tienen una porosidad propia muy pequeña en comparación con la porosidad de las demás rocas.

La resistencia de estas rocas fisuradas (donde las fisuras sirven como vía para la circulación de las aguas subterráneas) es más baja que la resistencia de estas mismas rocas en estado masivo (la resistencia de las rocas muy fisuradas alcanza varios cientos de $\Omega\text{-m.}$).

Rocas metamórficas: Su resistividad ocupa una posición intermedia entre las rocas sedimentarias y volcánicas. La porosidad y humedad de dichas rocas depende principalmente de su grado de metamorfismo, por ello, la resistividad de éstas rocas es tanto mayor cuanto mayor es su grado de metamorfismo.

Entre las rocas metamórficas de resistividad baja, se tienen las rocas grafitizadas y carbonificadas, principalmente esquistos. La resistencia de estas rocas se reduce a causa de la

presencia de grafito, conductor electrónico, y el material carbonoso disperso fuertemente metamorfozado.

Hay que mencionar que la resistividad de los minerales de impregnación depende de la relación espacial de las componentes minerales metálicas y no metálicas. Esto quiere decir que si un mineral no metálico es el cemento de una roca, entonces el mineral será de alta resistencia y si el cemento está formado por mineral metálico su resistencia será baja.

A continuación se presenta una tabla de resistividades de algunas rocas:

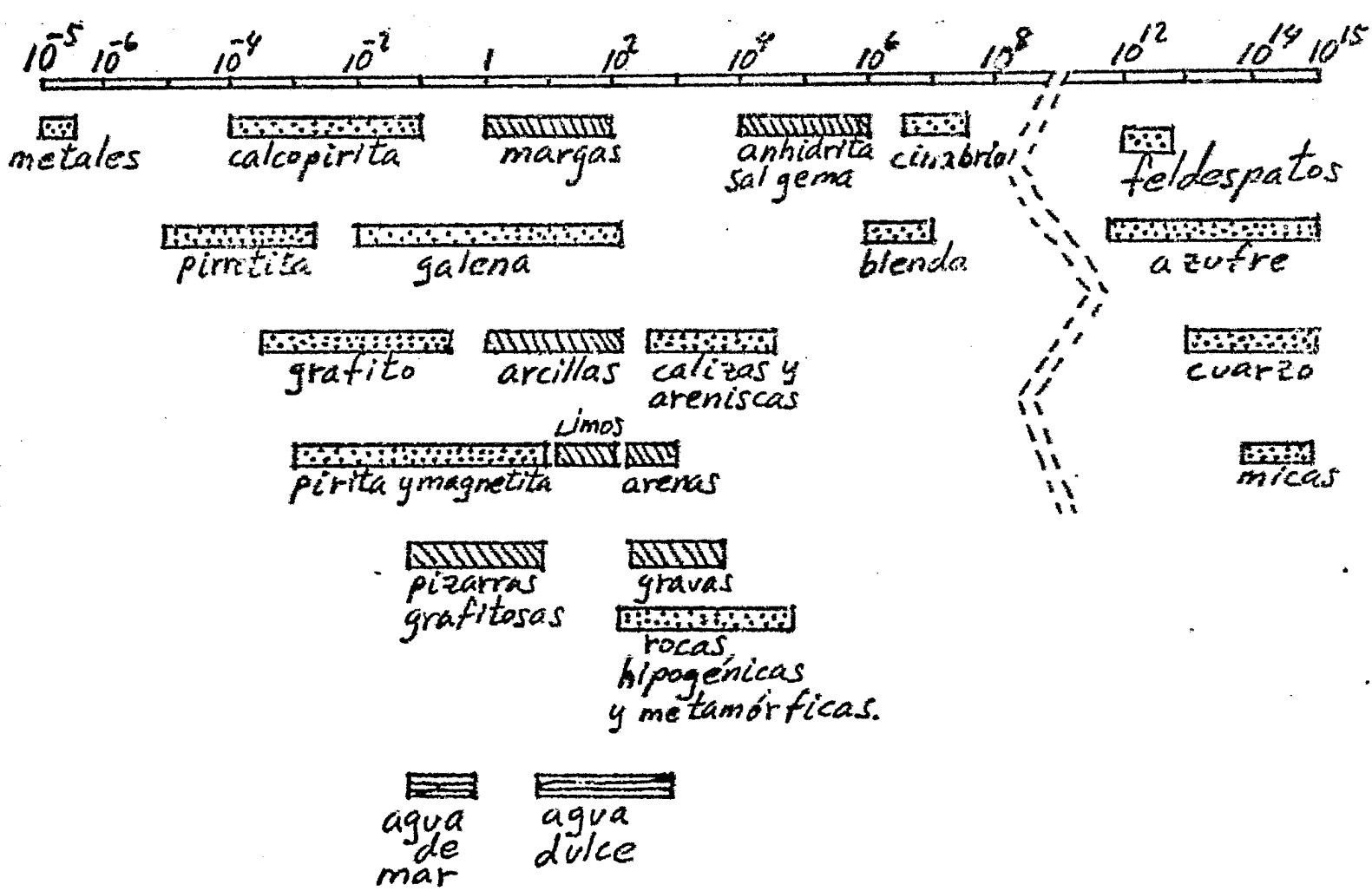


Tabla 1

II.3 Permittividad Eléctrica

II.3.1 Definición y Unidades

La relación entre el campo eléctrico y la densidad de flujo eléctrico (Desplazamiento eléctrico), está dada por:

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \dots \quad (2.3.1)$$

en donde ϵ_{ij} representa un tensor de nueve componentes y es llamado permitividad eléctrica ó constante dieléctrica.

Si el medio en el que se encuentra el campo eléctrico se considera geométrico regular el número de componentes de ϵ_{ij} disminuye grandemente pudiendo llegar a ser un escalar para el caso de un medio isótropo:

$$D = \epsilon E \quad \dots \quad (2.3.2)$$

Por otra parte, las dimensiones del campo eléctrico de acuerdo a su definición son:

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{IT} = \frac{MLT^{-2}}{IT} = MLT^{-3}I^{-1}$$

y las dimensiones del desplazamiento eléctrico son:

$$[D] = \frac{[q]}{[A]} = \frac{IT}{L^2} = L^{-2}TI$$

por lo tanto las dimensiones de ϵ de acuerdo a (2.3.2) son:

$$[\epsilon] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{L^{-2}TI}{MLT^{-3}I^{-1}} = M^{-1}L^{-3}T^4I^2 = \frac{M^{-1}L^{-2}T^4I^2}{L}$$

Si se habla del sistema SI las unidades de la permitividad son Faradios/metro ya que el numerador de la expresión anterior es la dimensión de una capacitancia eléctrica.

En el vacío la permitividad tiene un valor de $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$.

II.3.2 Permitividad Eléctrica de los minerales.

La permitividad eléctrica de los minerales depende de la polarizabilidad individual de sus átomos, o sea, de su composición química y también de su densidad y estructura cristalográfica.

En los minerales formados por un sólo elemento, la permitividad aumenta con la densidad. Los compuestos de cobre, plata y plomo tienen permitividad muy grande; sus sulfuros tienen-

$\epsilon > 700$ PF/m. Los compuestos que tienen oxígeno suelen tener también constante dieléctrica alta, superior a 200 PF/m. Los carbonatos, sulfatos, fosfatos y wolframatos tienen permitividades comprendidas entre 50 y 70 PF/m. Las constantes dieléctricas de los silicatos varían entre los mismos límites de 50 y 70 PF/m. Los valores observados están influidos por la presencia de impurezas, y en mayor grado por la humedad.

II.3.3 Permittividad Eléctrica de las rocas.

La permitividad eléctrica de las rocas es función de las componentes de la roca, de la proporción de éstas componentes, y de su modo de agruparse. Si alguna de sus componentes presenta conductividad apreciable, en los límites de sus granos aparecen polarizaciones interfaciales. La presencia de agua, por la elevada permitividad de ésta (721 PF/m.) influye también notablemente. Cuando las componentes son dos, de permitividades respectivas ϵ_1 y ϵ_2 y ocupan respectivamente las fracciones V y $(1-V)$ del volumen total, la ϵ del conjunto está dada aproximadamente por:

$$Lg S = V_1 Lg \epsilon_1 + (1-V_1) Lg \epsilon_2 \quad \dots \quad (2.3.3)$$

Cuando existe orientación preferente en los granos se observa anisotropía. ϵ es mayor para rocas húmedas que para rocas secas, y también depende de la presión y temperatura a que se haga la medición, así como de la frecuencia de la corriente empleada. La siguiente lista incluye una selección de valores representativos, para frecuencias bajas.

Arenisca	50 PF/m
Caliza, Mármol	75-90 PF/m
Arcillas	100 PF/m
Dolomías	100 PF/m
Granito	15 PF/m
Diabasa, Gabro, Basalto	100-130 PF/m
Talco, Esquistos	280 PF/m.

II.4 Permeabilidad Magnética.

II.4.1 Definición y Unidades

Por analogía con la ecuación (2.3.1) la relación entre el poder imanador (campo magnético) y la inducción magnética (Densidad de flujo magnético) está dada por:

$$B_i = \mu_{ij} H_j \quad \dots \quad (2.4.1)$$

La cantidad tensorial μ_{ij} recibe el nombre de permeabilidad magnética que para un medio isótropo está dada por:

$$\mu = \frac{B}{H} \quad \dots \quad (2.4.2)$$

La permeabilidad magnética " μ " de un cuerpo en función de su susceptibilidad magnética está dada por:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \quad \dots \quad (2.4.3)$$

en donde " χ " es la susceptibilidad magnética del material y que es adimensional y, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío con un valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henrys/metro.

II.4.2 Características de los cuerpos magnéticos

Todos los cuerpos pueden clasificarse en lo que respecta a su comportamiento magnético, como diamagnéticos ($\chi < 0$), paramagnéticos ($\chi > 0$, pero pequeña) y ferromagnéticos ($\chi > 0$ y grande). Dentro de estos últimos existen dos subdivisiones muy importantes, que corresponden a los cuerpos antiferromagnéticos, y a los ferrimagnéticos.

Cuerpos Diamagnéticos:

La Polarizabilidad magnética de los cuerpos diamagnéticos tiene su origen en los electrones de la corteza de los átomos que los constituyen. En efecto, cada uno de estos electrones, al recorrer su órbita alrededor del núcleo describe una espira diminuta que, al estar sometida a la acción de un campo magnético

exterior, se comporta como un giróscopo. La susceptibilidad de los cuerpos diamagnéticos es negativa. El diamagnetismo — puro sólo aparece si los momentos magnéticos de los átomos son nulos en ausencia de campo exterior, como ocurre en los átomos ó iones que poseen capas electrónicas completas.

Cuerpos Paramagnéticos:

La susceptibilidad de las sustancias paramagnéticas es positiva, y es inversamente proporcional a la temperatura — absoluta (Ley de Curie-Weiss). El paramagnetismo hace su aparición cuando los átomos ó moléculas de una sustancia poseen un momento magnético en ausencia de campo exterior y además la interacción magnética entre los átomos es débil. Normalmente los momentos están distribuidos al azar, pero al aplicar un campo tienden a alinearse paralelamente a la dirección del campo, tendencia a la que se opone la agitación térmica.

Cuerpos Ferromagnéticos:

Los átomos de los materiales ferromagnéticos poseen momento magnético y la interacción entre átomos vecinos es tan fuerte, que los momentos de todos los átomos de cada región, llamada dominio, se orientan hacia la misma dirección, aunque no exista campo exterior. Son típicos de los cuerpos ferromagnéticos sus ciclos de histéresis y sus grandes susceptibilidades, que dependen de la excitación magnética alcanzada. El ferromagnetismo desaparece por encima de una temperatura denominada punto de Curie.

Las susceptibilidades de algunas sustancias son por su valor (10^{-5}), propias de cuerpos paramagnéticos, pero no son inversamente proporcionales a la temperatura, sino que al principio aumentan con la temperatura hasta alcanzar un máximo a una cierta temperatura también llamada punto de Curie ó punto λ y decrece luego siguiendo la ley de Curie-Weiss.

La baja susceptibilidad magnética que estas sustancias presentan por debajo del punto λ puede ser explicada por la suposición de un estado ordenado de los átomos, tal que los momentos magnéticos de átomos contiguos son iguales pero antiparalelos.

De este modo, las dos subredes ordenadas, cada una de las cuales recuerda el estado de un cuerpo ferromagnético, se anulan mutuamente, con lo que el momento magnético total es cero. Este estado se llama antiferromagnetismo y su existencia puede comprobarse por estudios de difracción de neutrones.

Existe entre las sustancias antiferromagnéticas una clase en la cual, diciendolo sencillamente, hay dos subredes de iones metálicos con sus momentos magnéticos ordenados antiparalelamente como en el caso general, pero en las que los momentos de las redes no son iguales, dando lugar a un momento resultante no nulo, incluso en ausencia de campo exterior. Estas sustancias se llaman ferrimagnéticas.

II. 4.3 Permeabilidad magnética de rocas y minerales

La susceptibilidad de las rocas depende casi únicamente de la cantidad que contengan de minerales ferrimagnéticos, tamaño de grano de éstos, modo de distribución, etc. y es extremadamente variable.

Hay muchas rocas y minerales que presentan diamagnetismo puro; entre ellos los más destacados son el cuarzo, mármol, grafito, sal gema y anhidrita (yeso). Muchas rocas descritas como paramagnéticas, por ejemplo gneises, pegmatitas, dolomías, sienitas, no parecen serlo verdaderamente, es decir, que su paramagnetismo no es intrínseco, sino que es una manifestación, bien de ferromagnetismo débil debido a la presencia de cantidades variables de magnetita o ilmenita, bien de antiferromagnetismo producido por minerales como hematitas, dióxido de manganeso, etc.

No existen rocas, ni minerales constituyentes que sean verdaderamente ferromagnéticos. Prácticamente todos los minerales que dan a las rocas imanación elevada son ferrimagnéticos, destacando entre ellos la magnetita (Fe_3O_4), la titanomagnetita ($FeO(Fe, Ti)_2O_3$) y la ilmenita ($FeTiO_3$). La imanación espontánea y una susceptibilidad relativamente alta pueden darse también en un cuerpo antiferromagnético si éste presenta defectos estadísticamente sistemáticos, como ocurre, --

según se cree, en la pirrotita (FeS). El efecto de la temperatura de los materiales ferrimagnéticos es complejo.

A continuación se presenta una tabla de susceptibilidades magnéticas de algunas rocas en unidades racionalizadas:

Grafito	100	Gabro	4000 a 90000
Cuarzo	15.1	Dolomía	20000
Anhidrita	14.1	Pirita	1500
Sal de roca	10.3	Pirrotita	600 a 60000
Mármol	9.4	Hematita	2500 a 40000
Granito	1000 a 15000	Ilmenita	3×10^5 a 4×10^6
Basalto	1500 a 25000	Magnetita	1.3×10^6 a 1.5×10^7
Pegmatita	3000 a 75000		

Tabla 3

II.5 Potenciales Eléctricos Naturales.

II.5.1 Introducción y Unidades

Además de la Polarización Espontánea que se analizará en el capítulo VIII, se observa en el terreno la presencia de otros potenciales naturales como son:

- 1).- Potencial Electrocinético
- 2).- Potencial de Difusión
- 3).- Potencial de Nernst
- 4).- Potencial de Mineralización.

Estos potenciales están dados en volts ó en e.m.u. (unidades electromagnéticas) y su conversión es: $1 \text{ volt} = 10^9 \text{ e.m.u.}$

II.5.2 Potencial Electrocinético.

El potencial electrocinético se origina cuando un electrolito fluye a través de un medio permeable no metálico y depende de la presión que exista sobre el material y de la resistividad del electrolito.

Los efectos electrocinéticos aparecen cuando se utiliza un lodo muy pesado para contrarrestar la presión en un pozo que

está atravesando una formación con presión interna alta ó cuando la formación es de baja permeabilidad y la caída de presión es sobre la formación más que sobre el lodo.

El potencial electrocinético en un pozo está dado por:

$$E_s = 0.0391 \sqrt{R_{mc} f_{mc} f_i} \Delta P \quad \dots \quad (2.5.1)$$

en donde E_s es el potencial electrocinético, R_{mc} es la resistividad del lodo, f_{mc} es el espesor del lodo, f_i es la pérdida por filtrado y ΔP la diferencia de presión.

II.5.3 Potencial de Difusión

Este potencial aparece cuando en los poros de las rocas se ponen en contacto electrolitos diferentes, ó existen diferencias de concentración en un mismo electrolito.

Los iones de diferente signo poseen diferente movilidad y los que la presentan mayor se difunden rápidamente, llegan a formarse dos zonas, en cada una de las cuales predominan los iones de un mismo signo, con lo que se establece una diferencia de potencial E_d . Cuando el origen de ésta es la diferencia de concentración en los mismos iones, se verifica que:

$$E_d = \frac{u-v}{u+v} \frac{RT}{nF} \ln \frac{C_1}{C_2} \quad \dots \quad (2.5.2)$$

donde u y v son las movilidades respectivas del catión y el anión, n es la valencia de estos, R es la constante de los gases y vale 8.314 Joules/°C, T es la temperatura absoluta, F es una constante con valor 96.487 coulombs y, C_1 y C_2 son las concentraciones respectivas de los electrolitos en contacto.

II.5.4 Potencial de Nernst

Este potencial se presenta en las lutitas cuando contienen partículas de arena y existe un flujo por sus poros de un electrolito como muestra la figura 2.9:

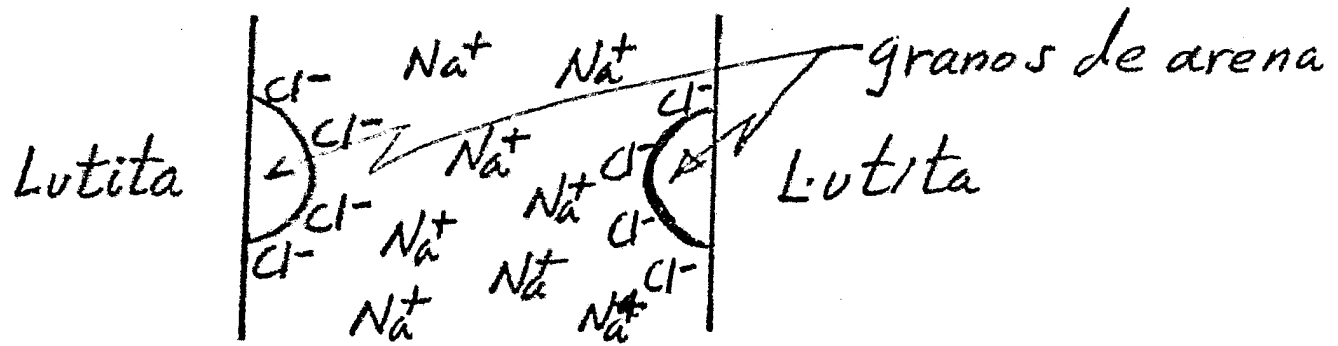


Fig. 2.9

Este potencial está dado por:

$$E_{sh} = \frac{RT}{nF} \ln \frac{C_1}{C_2} \quad . \quad . \quad . \quad (2.5.2)$$

III FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LOS MÉTODOS DE CAMPOS ESTÁTICOS

III.1 Introducción

El análisis teórico de los métodos geoelectrónicos se basa en las ecuaciones de Maxwell dado lo cual, se hará un breve recordatorio de estas ecuaciones tanto para corriente continua como para corriente variable.

A partir del análisis de las ecuaciones de Maxwell se deducirán los potenciales producto de una corriente eléctrica al ser inyectada en la superficie terrestre por medio de diferentes fuentes.

Después del estudio de los diversos potenciales se discutirá el concepto de resistividad aparente y los diversos dispositivos para medirla.

III.2 Ecuaciones de Maxwell

Las leyes básicas del electromagnetismo quedan reducidas a las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm generalizada y el principio de conservación de la carga y son a saber:

$$\nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.2)$$

$$\bar{J} = \nabla \bar{E} \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.4)$$

También son útiles las siguientes expresiones:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.5)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico en Volts/metro, \vec{B} es la inducción magnética en webers/metro², \vec{H} es el campo magnético en ampers/metro, \vec{J} es la densidad de corriente en ampers/metro², \vec{D} es la densidad de desplazamiento eléctrico en coulombs/metro², σ es la conductividad eléctrica en mhos/metro, ϵ es la permitividad eléctrica en faradios/metro, μ es la permeabilidad magnética en henrys/metro y q la densidad de carga.

Estas son, por supuesto bajo condiciones adecuadas, las relaciones que rigen a los métodos eléctricos.

Por otra parte, tomando la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv 0 \quad (3.2.6)$$

Sustituyendo en esta ecuación la ecuación (3.2.1) resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{o sea, } \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

por lo tanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2.7)$$

Esta ecuación indica que las líneas de inducción magnética son cerradas siempre y que según la ecuación (3.2.6) exista un vector llamado potencial eléctrico vectorial que cumpla que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.2.8)$$

Sustituyendo (3.2.8) en (1) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

arreglando términos

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (3.2.9)$$

Se observa de esta ecuación que lo que está dentro del paréntesis es un campo irrotacional, y, por lo tanto, potencial, y

pu diéndose decir que existe una función potencial eléctrico que cumple que:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}U \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.10)$$

También, tomando en cuenta la ecuación (3.2.6) en (3.2.2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

o sea,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})$$

se concluye que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.11)$$

Normalmente se considera que no hay acumulación de cargas en medios de conductividad finita, en otras palabras, que la divergencia del vector densidad de desplazamiento es cero. En el caso de medios muy conductores (conductividad electrónica) y de conducción electrolítica, no se puede hacer esta consideración

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.12)$$

Si se considera cierta esta ecuación, se puede afirmar que existe un vector \vec{A}^* que cumple que:

$$\vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{A}^* \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.13)$$

Sustituyendo (3.2.13) en (3.2.2) se obtiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial (-\vec{\nabla} \times \vec{A}^*)}{\partial t}$$

despejando y sustituyendo (3.2.5) en (3.2.3) y a su vez ésta en la ecuación anterior

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{H} + \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{A}^* + \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3.2.14)$$

de esta ecuación se observa, que lo que está dentro del paréntesis es un campo irrotacional y por lo tanto, existe una función potencial escalar U^* tal que

$$-\nabla U^* = \bar{H} + \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \bar{A}^*$$

por lo tanto

$$\bar{H} = -\nabla U^* - \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial t} - \frac{\sigma}{\epsilon} \bar{A}^* \quad \dots \quad (3.2.15)$$

Todas las ecuaciones deducidas anteriormente están en forma general tanto para corriente continua como para corriente alterna; si ahora se hace la consideración de que se trabaja con corriente continua las derivadas temporales se anulan quedando todas las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad \dots \quad (3.2.16)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad \dots \quad (3.2.17)$$

$$\sigma \bar{E} = \bar{J} \quad \dots \quad (3.2.18)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0 \quad \dots \quad (3.2.19)$$

$$-\nabla U = \bar{E} \quad \dots \quad (3.2.20)$$

$$-\nabla U - \frac{\sigma}{\epsilon} \bar{A}^* = \bar{H} \quad \dots \quad (3.2.21)$$

Sustituyendo (3.2.20) en (3.2.18) se obtiene:

$$-\sigma \nabla U = \bar{J} \quad \dots \quad (3.2.22)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.2.19)

$$\nabla \cdot (-\sigma \nabla U) = -\sigma \nabla^2 U - \nabla U \cdot \nabla \sigma = 0$$

por lo tanto

$$\nabla \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla \sigma = 0 \quad (3.2.23)$$

esta ecuación es la ecuación general que rige a los métodos eléctricos en corriente continua.

III.3 Potenciales Eléctricos producto de fuentes puntuales.

Al inyectar una corriente en el suelo se genera una diferencia de potencial que depende de las características del subsuelo y de la geometría del dispositivo utilizado. En este inciso se analizará el comportamiento del potencial para diferentes medios utilizando fuentes puntuales de corriente.

III.3.1 Medio Homogéneo e Isótropo.

Si se considera un medio con una conductividad uniforme en todo el espacio $\nabla \sigma = 0$ entonces la ecuación (3.2.23) se transforma en la ecuación de Laplace: $\nabla^2 U = 0$

Esta ecuación en coordenadas cartesianas se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.3.1)$$

en coordenadas cilíndricas como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.3.2)$$

y en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{seno } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{seno } \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.3.3)$$

Para el caso de un medio homogéneo e isótropo y por simetría

tría esférica considerando una sola fuente puntual de corriente:

$$\nabla^2 U = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$$

si se integra con respecto a "r" y se resuelve por separación de variables, se obtiene

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3.3.4)$$

Por otra parte, de acuerdo a las condiciones de frontera se sabe que el potencial en el infinito es cero, por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{C_1}{r} + C_2 \right) = 0 \quad \text{tal que } C_2 = 0$$

De la definición de la densidad de corriente y de las ecuaciones (3.2.18) y (3.2.20), y, considerando un área esférica de radio "r"

$$J = \frac{I}{A} = -\sigma \nabla U = -\frac{1}{\rho} \left(-\frac{C_1}{r^2} \right) = \frac{C_1}{\rho r^2}$$

$$\frac{C_1}{\rho r^2} = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2} \quad \text{tal que } C_1 = \frac{\rho I}{4\pi}$$

sustituyendo los valores de las constantes en la ecuación (3.3.4) se obtiene el potencial para un medio homogéneo e isótropo utilizando una fuente puntual de corriente.

$$U = \frac{\rho I}{4\pi r} \quad (3.3.5)$$

como muestra la figura (3.1)

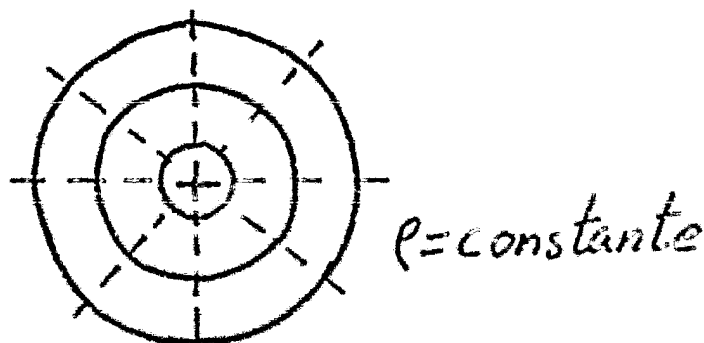


Fig. 3.1

III.3.2 Semiespacio Homogéneo e Isótropo

Considerese un semiespacio homogéneo e isótropo con una resistividad ρ . El otro semiespacio, de resistividad infinita arriba del interior. La ecuación de Laplace se cumplirá en todo el semiespacio conductor exceptuando la superficie de discontinuidad de la resistividad o la región próxima a la fuente puntual de corriente, por lo tanto, si se considera que el área que atraviesa la corriente es semiesférica, como muestra la figura 3.2

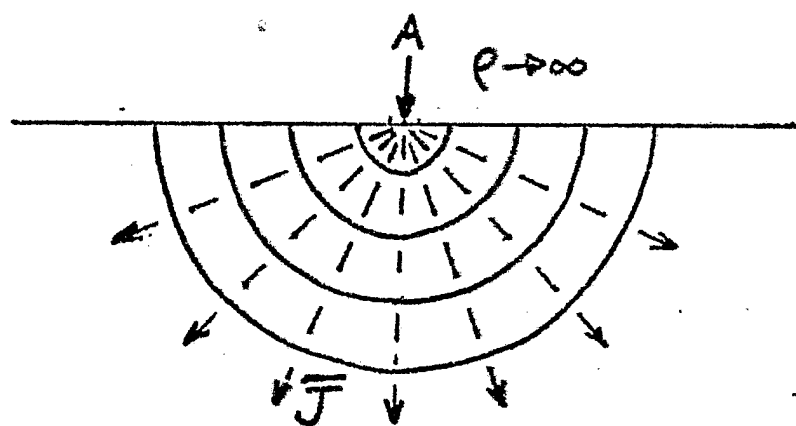


Fig. 3.2

El potencial para un semiespacio homogéneo e isótropo es:

$$U = \frac{\rho I}{2\pi r} \quad \dots \quad (3.3.6)$$

Si se considera el caso de dos fuentes puntuales de corriente como muestra la figura (3.3)

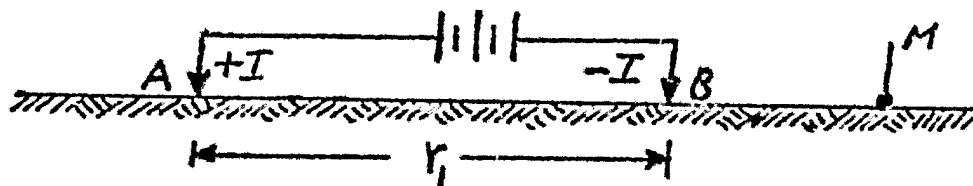


Fig. 3.3

El potencial estará dado por la suma de los potenciales de cada punto, entonces:

$$U_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \dots \quad (3.3.7)$$

En planta, las líneas de campo serán como muestra la figura 3.4

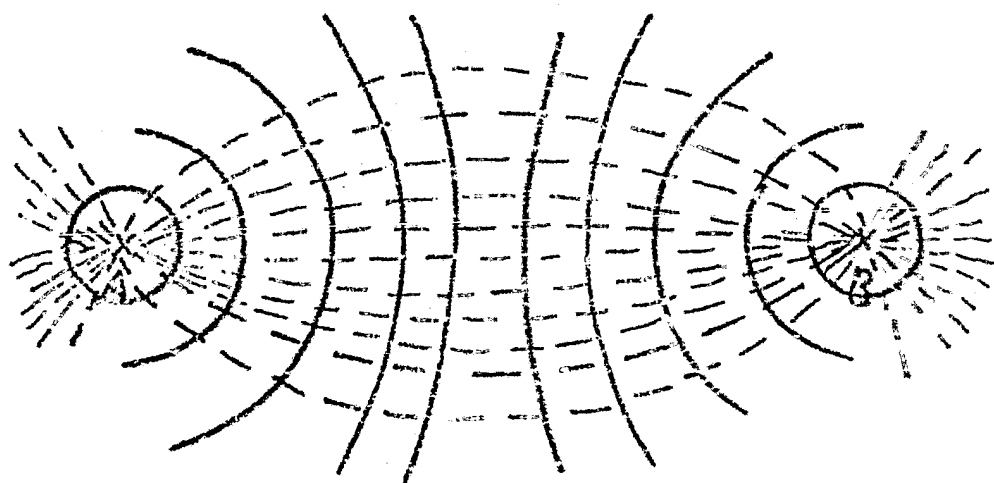


Fig. 3.4

Para el caso de "n" fuentes puntuales se generaliza lo dicho anteriormente:

$$U_M = \frac{\rho I_1}{2\pi r_1} + \frac{\rho I_2}{2\pi r_2} + \dots + \frac{\rho I_n}{2\pi r_n}$$

o sea

$$U_M = \frac{\rho}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{r_i} \quad (3.3.8)$$

Para un cuadrupolo fundamental, o sea, dos electrodos de corriente y dos de potencial como muestra la figura 3.5

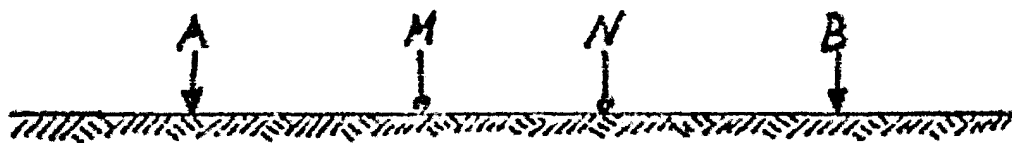


Fig. 3.5

$$U_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) \quad U_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right)$$

y la diferencia de potencial entre los puntos "M" y "N" es:

$$\Delta U_{MN} = U_M - U_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right) \quad (3.3.9)$$

que es el potencial para un cuadrupolo fundamental y depende

de la corriente, del medio y de la geometría del cuadrípulo.

III. 3.3 Semiespacio Homogéneo Anisótropo.

Considerando un semiespacio homogéneo anisótropo la Ley de Ohm en forma puntual (3.2.18) se expresa como:

$$\vec{J} = \sigma_x E_x \hat{e}_x + \sigma_y E_y \hat{e}_y + \sigma_z E_z \hat{e}_z$$

Si se supone anisotropía transversal, o sea, la conductividad eléctrica horizontal es diferente a la vertical, $J_x = J_y \neq J_z$

$$\vec{J} = \sigma_L E_x \hat{e}_x + \sigma_L E_y \hat{e}_y + \sigma_T E_z \hat{e}_z \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2.19) y combinándola con las ecuaciones (3.2.18) y (3.2.20) se obtiene

$$\sigma_L \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma_L \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \sigma_T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.11)$$

que es una ecuación diferencial parcial con coeficientes constantes y para resolverla se hace el siguiente cambio de escala:

$$x = \sqrt{\sigma_L} x_1$$

$$\partial x = \sqrt{\sigma_L} \partial x_1$$

$$y = \sqrt{\sigma_L} y_1$$

$$\partial y = \sqrt{\sigma_L} \partial y_1$$

$$z = \sqrt{\sigma_T} z_1$$

$$\partial z = \sqrt{\sigma_T} \partial z_1$$

Sustituyendo las segundas parciales en la ecuación (3.3.11):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} = 0$$

Esta ecuación es la ecuación de Laplace y su solución es:

$$U = \frac{c}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}} = \frac{c}{\left\{ \frac{1}{\sigma_L} x^2 + \frac{1}{\sigma_L} y^2 + \frac{1}{\sigma_T} z^2 \right\}^{1/2}} = \frac{c}{\sigma_L^{1/2} \left\{ x^2 + y^2 + \frac{\sigma_L}{\sigma_T} z^2 \right\}^{1/2}}$$

o sea:

$$U = \frac{C}{\rho_L^{1/2} \{x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2\}^{1/2}} \quad (3.3.12)$$

De esta ecuación se observa que las líneas equipotenciales -- están dadas por:

$$x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2 = \text{constante} \quad (3.3.13)$$

en la superficie del terreno ($z=0$):

$$x^2 + y^2 = \text{constante}$$

que es la ecuación de una circunferencia, y por lo tanto, se deduce que la anisotropía transversal no es visible en la superficie.

Para el caso de que se tuviera anisotropía transversal sobre un plano que no es paralelo a la superficie como muestra la figura (3.6):

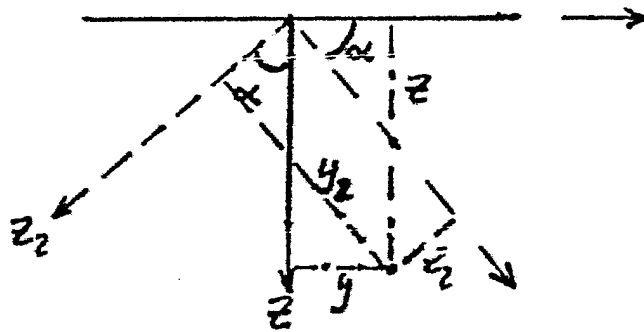


Fig. 3.6

de la figura:

$$x_2 = x$$

$$y_2 = y \cos \alpha + z \operatorname{sen} \alpha$$

$$z_2 = -y \operatorname{sen} \alpha + z \cos \alpha$$

sustituyendo x_2, y_2, z_2 en la ecuación (3.4.12) se obtiene:

$$U = \frac{C}{\rho_L^{1/2}} \left\{ x^2 + y^2 \cos^2 \alpha + 2yz \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \lambda^2 y^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \right. \\ \left. - 2yz \lambda^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \lambda^2 z^2 \cos^2 \alpha \right\}^{-1/2}$$

si se hace:

$$\left. \begin{aligned} L &= \cos^2 \alpha + \lambda^2 \sin^2 \alpha \\ M &= \sin^2 \alpha + \lambda^2 \cos^2 \alpha \\ N &= \sin \alpha \cos \alpha (1 - \lambda^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.14)$$

y sustituyendo en la ecuación del potencial anterior:

$$U = \frac{c}{\rho_L^{1/2}} \{x^2 + Ly^2 + Mz^2 + 2Ny z\}^{-1/2} \quad (3.3.15)$$

De esta ecuación se observa que las líneas equipotenciales están dadas por:

$$x^2 + Ly^2 + Mz^2 + 2Ny z = \text{constante} \quad (3.3.16)$$

en la superficie:

$$x^2 + Ly^2 = x^2 + y^2 + (\lambda^2 - 1) \sin^2 \alpha y^2 = \text{constante}$$

Esta ecuación final representa una elipsoide de excentricidad $E = \frac{a}{b}$ donde "a" es el rumbo y "b" el buzamiento.

$$E = \{1 + (\lambda^2 - 1) \sin^2 \alpha\}^{1/2} \quad (3.3.17)$$

De las ecuaciones (3.3.12) y (3.3.15) se observa una constante "c" que a continuación será determinada. De acuerdo a la ecuación (3.2.9) y (3.2.10):

$$J_x = \nabla_x E_x = -\nabla_x \frac{\partial U}{\partial x} = -\nabla_x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c}{\rho_L^{1/2} (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{1/2}} \right\}$$

$$\bar{J}_x = \frac{cx}{\rho_L^{3/2} (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{3/2}} \quad (3.3.18)$$

$$J_y = \nabla_y E_y = -\nabla_y \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{cy}{\rho_L^{3/2} (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{3/2}} \quad (3.3.19)$$

$$J_z = \nabla_z E_z = -z \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Cz}{\rho_L^{3/2} (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{3/2}} \quad (3.3.20)$$

encontrando la magnitud del vector \vec{J} :

$$|\vec{J}| = \{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2\}^{1/2} = \frac{C}{\rho_L^{3/2}} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{1/2}} = \frac{C}{\rho_L^{3/2}} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2 + (\lambda^2 - 1)z^2)^{3/2}}$$

en coordenadas esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y $z = R \cos \theta$

$$|\vec{J}| = \frac{C}{\rho_L^{3/2}} \frac{R}{\{R^2 + (\lambda^2 - 1)R^2 \cos^2 \theta\}^{3/2}}$$

sustituyendo R^2 por $R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta$ y simplificando:

$$|\vec{J}| = \frac{C}{\rho_L^{3/2}} \frac{R}{\{R^2 \sin^2 \theta + \lambda^2 R^2 \cos^2 \theta\}^{3/2}}$$

pero como $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$ y considerando un semiespacio:

$$I = \frac{C}{\rho_L^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 \sin \theta d\theta d\varphi}{\{R^2 \sin^2 \theta + \lambda^2 R^2 \cos^2 \theta\}^{3/2}}$$

resolviendo esta integral se obtiene

$$I = \frac{2\pi C}{\rho_L^{3/2}} \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi C}{\rho_L^{3/2}} \frac{\rho_L^{1/2}}{\rho_T^{1/2}} = \frac{2\pi C}{\rho_L \rho_T^{1/2}}$$

por definición $\rho_m = (\rho_L \rho_T)^{1/2}$, sustituyendo y despejando C :

$$C = \frac{\rho_m \rho_L^{1/2}}{2\pi I}$$

sustituyendo en la ecuación (3.3.12) el potencial, para un medio homogéneo anisótropo paralelo a la superficie del terreno, queda:

$$U = \frac{\rho_m I}{2\pi \{x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2\}^{1/2}} \quad (3.3.21)$$

Si se sustituye en la ecuación (3.3.15) el potencial para un medio homogéneo anisótropo con un ángulo α con respecto a la superficie es:

$$U = \frac{\rho_m I}{2\pi \{x^2 + Ly^2 + Mz + 2Nz\}^{3/2}} \quad \dots \quad (3.3.22)$$

III.3.4 Medio Estratificado

Un medio estratificado es un medio heterogéneo compuesto de zonas homogéneas e isotrópicas, de extensión lateral indefinida y cuyas superficies de separación son paralelas entre sí y paralelas a la superficie plana del terreno (suponiendo que la resistividad del aire es infinita). A cada una de estas zonas homogéneas e isotrópicas se les conoce como horizonte, capa ó estrato geoelectrico de resistividad ρ_i y espesor h_i como muestra la figura (3.7):

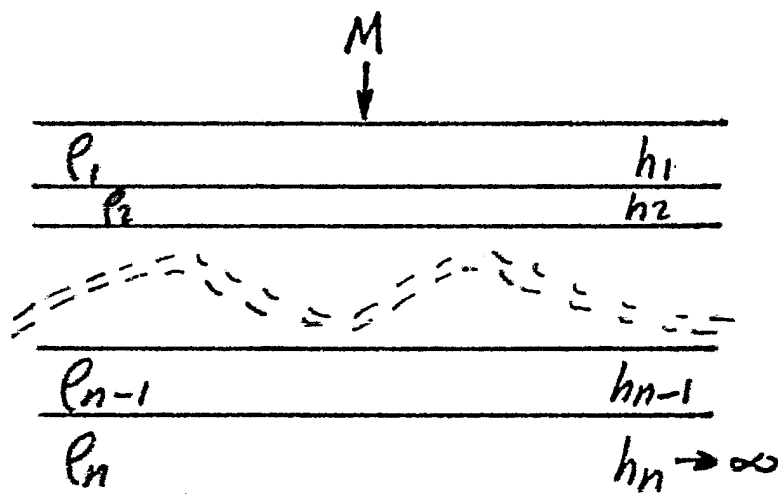


Fig. 3.7

El potencial para un medio estratificado cumple con la ecuación de Laplace, o sea, en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{por simetría} \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

para encontrar la solución de esta ecuación diferencial se utiliza el método de separación de variables suponiendo una solución de la siguiente forma:

$$U = R(r) \cdot Z(z)$$

sustituyendo "U" en la ecuación de Laplace:

$$z \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} z \frac{dR}{dr} + R \frac{d^2 z}{dz^2} = 0$$

separando variables e igualando a una constante arbitraria λ^2

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dz^2} = \lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.23)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.24)$$

la solución de estas dos ecuaciones diferenciales es:

$$Z(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.25)$$

$$R(r) = K_1 J_0(\lambda r) + K_2 Y_0(\lambda r) \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.26)$$

considerando a las constantes C_1 , C_2 y K_i como funciones de " λ " y aplicando condiciones de frontera, la solución general para el potencial estaría dada por:

$$U = \int_0^{\infty} \{A'(\lambda) e^{-\lambda z} + B'(\lambda) e^{\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (3.3.27)$$

esta ecuación representa el potencial de una capa en un medio estratificado y de acuerdo a la ecuación de Laplace no tiene que haber fuentes presentes en esta capa.

Para el caso de la primera capa se sabe que existen una ó más fuentes y, por lo tanto, el potencial en este caso es:

$$U_1 = \frac{I P_1}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \int_0^{\infty} \{A'(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B'(\lambda) e^{\lambda z_1}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.3.28)$$

Por otra parte, de la teoría de funciones Bessel utilizando la integral de Lipschitz:

$$\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.3.29)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (3.3.28)

$$U_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) d\lambda + \int_0^{\infty} \{A'(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B'(\lambda) e^{\lambda z_1}\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

si en esta ecuación se hace:

$$A'(\lambda) = A_1(\lambda) \frac{I \rho_1}{2\pi} \quad B'(\lambda) = B_1(\lambda) \frac{I \rho_1}{2\pi}$$

entonces se obtiene el potencial para la primera capa:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \{e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{\lambda z_1}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.3.30)$$

y para las demas capas:

$$U_i = \frac{\rho_i I}{2\pi} \int_0^{\infty} \{A_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} + B_i(\lambda) e^{\lambda z_i}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.3.31)$$

donde los valores de las $A_i(\lambda)$ y $B_i(\lambda)$ son determinados por las condiciones de frontera.

III. 3.5 Otros medios

III. 3.5.1 Medio con variación lineal.

La mayoría de los estudios realizados para determinar el potencial en un semimedio utilizando fuentes puntuales parten del supuesto de que los valores que toma la resistividad son valores constantes ó discretos sin tomar en cuenta que puede haber semimedios

endonde la resistividad varíe continuamente. En este inciso se analizará la distribución de potencial en un semimedio para dos casos:

- La resistividad aumenta linealmente con la profundidad.
- La resistividad disminuye inversamente con la profundidad.

Considerese un semiespacio con conductividad dada por $\sigma = (a+bz)^n$ y que contiene una fuente puntual de corriente como muestra la figura (3.8)

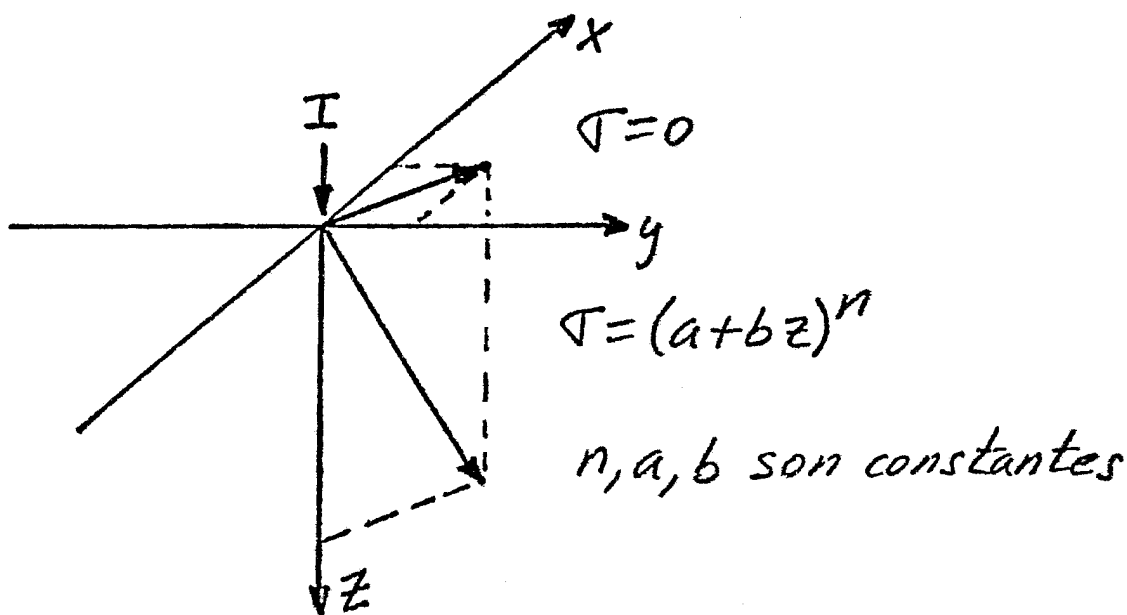


Fig. 3.8

El semiespacio arriba del plano "xy" se supondrá que tiene -- una resistividad infinita. Sustituyendo el valor de la conductividad en la ecuación (3.2.23) resulta:

$$(a+bz)^n \nabla^2 U + \bar{\nabla} (a+bz)^n \cdot \bar{\nabla} U = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{b}{(a+bz)} \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad (3.3.32)$$

la solución general de esta ecuación está dada por Wylie (1966)

$$U = \int_0^\infty \{R_1(\lambda r) + R_2(\lambda r)\} \{z_1(\lambda z) + z_2(\lambda z)\} d\lambda \quad (3.3.33)$$

donde:

$$R_1(\lambda r) = A_1(\lambda) J_0(\lambda r)$$

$$R_2(\lambda r) = A_2(\lambda) Y_0(\lambda r)$$

$$Z_1(\lambda z) = A_3(\lambda) \{\lambda a/b + \lambda z\}^q I_q(\lambda a/b + \lambda z)$$

$$Z_2(\lambda z) = A_4(\lambda) \{\lambda a/b + \lambda z\}^q K_q(\lambda a/b + \lambda z)$$

$$q = (1-n)/2$$

Las $A_i(\lambda)$ son determinadas por las condiciones de frontera; $J_0(\lambda r)$ es la función de Bessel de primer tipo y orden cero, $Y_0(\lambda r)$ es la función de Bessel de segundo tipo y orden cero, $I_q(\lambda a/b + \lambda z)$ es la función modificada de Bessel de primer tipo y q -ésimo orden y $K_q(\lambda a/b + \lambda z)$ es la función modificada de Bessel de segundo tipo y q -ésimo orden.

Para encontrar las $A_i(\lambda)$ se utilizan las siguientes condiciones de frontera:

- 1) El potencial en el infinito es cero
- 2) El potencial es infinito sobre la fuente
- 3) La corriente total dentro del medio es continua
- 4) La componente vertical de la densidad de corriente es cero en la superficie.

La primera condición de frontera es satisfecha únicamente si $A_2(\lambda) = 0$. La segunda condición de frontera requiere que $A_3(\lambda) = 0$, por lo tanto, la ecuación (3.3.33) queda de la siguiente forma:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda (a/b + z) K_1\{\lambda (a/b + z)\} d\lambda \quad (3.3.35)$$

donde se hizo $F(\lambda) = A_1(\lambda) A_4(\lambda)$.

a) La resistividad aumenta con la profundidad

Si se hace $n = -1$ en la ecuación (3.3.34), o sea, $\rho = a + bz$ el potencial queda:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} F_1(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda (a/b + z) K_1\{\lambda (a/b + z)\} d\lambda \quad (3.3.35)$$

donde $F_1(\lambda)$ es determinado aplicando condiciones de frontera. La

conservación de la corriente total dentro del medio puede ser expresada analíticamente como:

$$I = - \int \nabla \bar{V} \cdot ds \quad (3.3.36)$$

Aplicando la cuarta condición, considerando una superficie cilíndrica con radio arbitrario y profundidad "z" desde cero hasta infinito, la corriente queda:

$$I = \frac{2\pi r}{b} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_1(\lambda) \lambda^2 J_1(\lambda r) K_1\{\lambda(a/b + z)\} d\lambda dz$$

integrando con respecto a z y reordenando los términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{Ib}{2\pi r} = \int_0^{\infty} F_1(\lambda) K_0(\lambda a/b) \lambda J_1(\lambda r) d\lambda$$

la transformada inversa de esta ecuación de acuerdo a la teoría de las transformadas de Hankel está dada por:

$$F_1(\lambda) K_0(\lambda a/b) = \frac{Ib}{2\pi r} \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{Ib}{2\pi r}$$

por lo tanto

$$F_1(\lambda) = \frac{Ib}{2\pi r} \frac{1}{K_0(\lambda a/b)}$$

sustituyendo en la ecuación (3.3.35) el potencial en superficie para un semimedio donde la resistividad varía linealmente con la profundidad queda:

$$U(r,0) = \frac{Ia}{2\pi r} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda r) K_1(\lambda a/b)}{K_0(\lambda a/b)} d\lambda \quad (3.3.37)$$

b) La resistividad disminuye inversamente con la profundidad. Haciendo $n=1$ en la ecuación (3.3.34), o sea $\rho = 1/(a+bz)$ el potencial resultante es:

$$U(r, z) = \int_0^\infty F_2(\lambda) J_0(\lambda r) K_0\{\lambda(a/b + z)\} d\lambda \quad (3.3.38)$$

de la ecuación (3.3.36) y similarmente a como se encontró $F_1(\lambda)$ se llega a:

$$F_2(\lambda) = \frac{I}{2\pi a} \left(\frac{1}{K_1(\lambda a/b)} \right)$$

finalmente, la expresión para el potencial en superficie de un semiespacio donde la conductividad crece linealmente con la profundidad es:

$$U(r, 0) = \frac{I}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) K_0(\lambda a/b)}{K_1(\lambda a/b)} d\lambda \quad (3.3.39)$$

III.5.2 Esfera Conductora

Uno de los pocos problemas en la teoría de los métodos geo-eléctricos que tiene un resultado exacto, y que ilustra la dificultad impuesta por el uso de métodos exactos, es el de encontrar la distribución de potencial en la superficie provocada por una esfera conductora dentro de un semimedio homogéneo. Esta solución puede ser importante ya que indica la magnitud de la anomalía que puede ser esperada de una masa conductora de un tamaño dado.

Considerese un arreglo de electrodos como muestra la figura 3.9

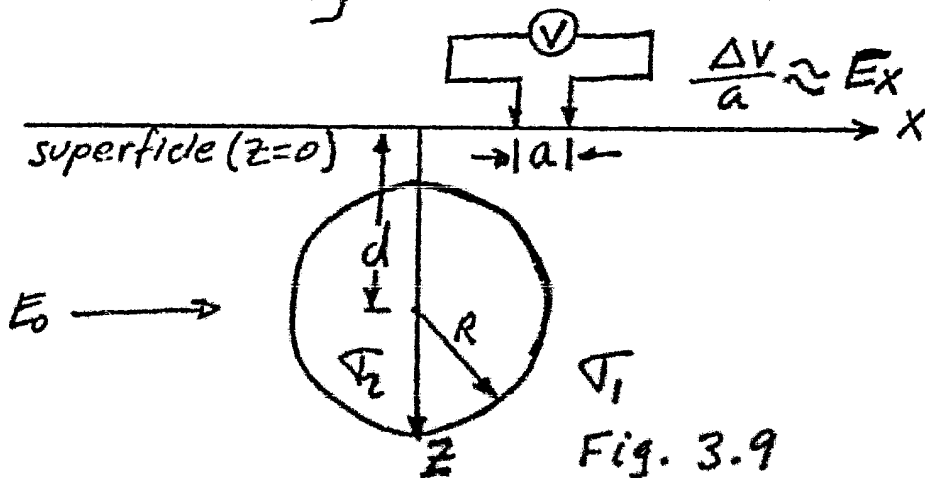


Fig. 3.9

El primer problema es encontrar un conjunto de coordenadas bajo el cual la ecuación de Laplace sea separable y además que la esfera y el plano estén en la misma superficie de nivel. Este sistema coordenado es el sistema biestérico que se obtiene al rotar las coordenadas μ, η y φ alrededor del eje z como muestra la figura 3.10:

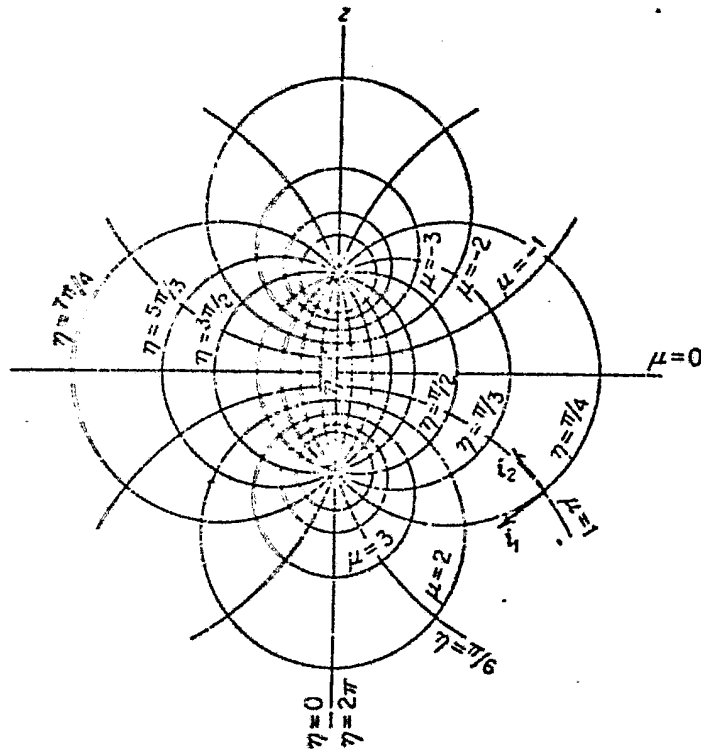


Fig. 3.10

Las coordenadas μ, η y φ en su forma paramétrica están definidas como:

$$x = \frac{f \operatorname{sen} \eta \cos \varphi}{\cosh \mu - \cos \eta}$$

$$y = \frac{f \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \varphi}{\cosh \mu - \cos \eta}$$

$$z = \frac{f \operatorname{senh} \mu}{\cosh \mu - \cos \eta}$$

entonces las superficies $\mu = \text{constante}$ son esferas de radio $r = f / \operatorname{senh} \mu$ con centro en $(0, 0, f \operatorname{coth} \mu)$; las superficies $\eta = \text{constante}$ son superficies de cuarto orden que pueden ser abiertas ó cerradas dependiendo de si η es menor ó mayor que $\frac{1}{2}\pi$;

y las superficies $\varphi = \text{constante}$ son una familia de planos axiales. El rango de μ es de cero hasta infinito si $z \geq 0$, y η desde 0 hasta π . Los dos polos del sistema están en $\mu = \pm \infty$, que corresponde a los puntos $(0, 0, \pm f)$. Así la superficie de la esfera conductora (cuyo radio es R) es la superficie $\mu = \text{senh}^{-1}(f/R) = \mu_0$. La superficie de la tierra es la superficie $\mu = 0$. El centro de la esfera se encuentra a una profundidad $d = f \coth \mu_0$, por lo tanto, se sigue que $f = \sqrt{d^2 - R^2}$. Así el sistema de coordenadas está definido por los dos parámetros Ryd.

Si se hace $U = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} F$, entonces la ecuación de Laplace $\nabla^2 U = 0$ se transforma en:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\text{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\text{sen} \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4} F = 0$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta por separación de variables haciendo $F(\mu, \eta, \varphi) = M(\mu) H(\eta) \Phi(\varphi)$, quedando tres ecuaciones:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \qquad \frac{d^2 M}{d\mu^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 M$$

$$y \quad \frac{1}{\text{sen} \eta} \frac{d}{d\eta} \left(\text{sen} \eta \frac{dH}{d\eta} \right) + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2 \eta} \right\} H = 0$$

La primera de estas ecuaciones es bastante conocida, y la tercera se conoce como la ecuación asociada de Legendre - si se cambia la variable independiente por $\cos \eta$. Consecuentemente, las funciones característica de la ecuación de Laplace en coordenadas bi esféricas son:

$$\sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} e^{\pm (n + \frac{1}{2}) \mu} P_n^{(m)}(\cos \eta) \cos m \varphi \quad |m| \leq n$$

Si en la ausencia de la esfera hay un campo uniforme E_0 en la dirección Ox , se puede escribir el potencial no alterado como:

$$U_0 = -E_0 x = - \frac{E_0 f \sin \eta \cos \varphi}{\cosh \mu - \cos \eta}$$

expandiendo $(\cosh \mu - \cos \eta)^{-1/2}$ por medio del teorema del binomio en potencias de $\cos \eta$, es fácil mostrar que:

$$(\cosh \mu - \cos \eta)^{-1/2} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\mu} P_n(\cos \eta) \quad \mu > 0$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} \frac{\sin \eta}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{1/2}} &= 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{-1}{\sqrt{\cosh \mu - \cos \eta}} \\ &= 2 \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1/2)\mu} P'_n(\cos \eta) \end{aligned}$$

así se tiene

$$U_0 = -\sqrt{8} E_0 f \cos \varphi \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1/2)\mu} P'_n(\cos \eta)$$

La solución general para el potencial fuera de la esfera es

$$U_1 = U_0 + U^{(s)}$$

donde $U^{(s)}$ es el potencial anómalo debido a la presencia de la esfera. En términos de la función característica de la ecuación de Laplace, la expresión completa es:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{8} E_0 f \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1/2)\mu} P'_n(\cos \eta) \cos \varphi \right\} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^m \left\{ A_n^m \cosh(n+1/2)\mu + B_n^m \sinh(n+1/2)\mu \right\} \cos^m \varphi P_n^{(|m|)}(\cos \eta) \end{aligned}$$

dentro de la esfera, se debe elegir una solución que sea finita cuando $\mu \rightarrow \infty$, entonces

$$U_2 = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} C_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\mu} \cos m\varphi P_n^{(m)}(\cos \varphi)$$

Para encontrar la solución general se aplican las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \mu} = 0$$

$$\mu = 0$$

$$U_1 = U_2$$

$$\mu = \mu_0$$

$$y \quad \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial \mu_1} = \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial \mu}$$

$$\mu = \mu_0$$

todos los términos, excepto para $m=1$, desaparecen de manera que la expresión que resulta para el campo potencial anómalo sobre el plano $z=0$ ($\mu=0$) es:

$$U_s(0, \eta, \varphi) = \sqrt{8} E_0 f \sqrt{1 - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\eta) P_n'(\cos \eta) \cos \varphi$$

donde G_n tiene como parámetros μ_0 , σ_1 y σ_2 . Si $\sigma_2 \gg \sigma_1$, la expresión toma la forma:

$$U^{(s)}(0, \eta, \varphi) \approx \sqrt{32} E_0 f \sqrt{1 - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{(2n+1)\mu_0 + 1} \right\}^{-1} P_n'(\cos \eta) \cos \varphi \quad \dots (3.3.40)$$

En la práctica, la diferencia de potencial se mide en dos puntos sobre la superficie terrestre a una distancia fija "a" de separación. En ausencia del conductor anómalo, la diferencia de potencial, permanecerá constante. El efecto debido a la presencia de la esfera será:

$$\Delta U^{(s)} = U^{(s)}(x+a) - U^{(s)}(x)$$

que, por una aproximación conveniente, se puede escribir como:

$$\Delta U^{(s)} = a \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial x} \right)_{x=0} = - \frac{a(1 - \cos \eta)}{f} \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (3.3.41)$$

El efecto de reemplazar la diferencia de potencial con el gradiente de potencial es despreciable. Así el campo eléctrico anómalo debido a la esfera se encuentra diferenciando (3.3.40).

Debido a la complicación que representa la solución del problema de la esfera se ha tenido que considerar a la superficie de la tierra, también como a la esfera, una superficie de separación de las coordenadas. Otra manera de satisfacer la condición de frontera en $z=0$ es remover la superficie de la tierra enteramente e introducir una esfera imagen arriba de la tierra, con su centro en $(0, 0, -f \coth \mu_0)$ (esto no afecta el análisis de ninguna manera). Si se desprecia el efecto entre la esfera y su imagen, el problema se facilita enormemente. En este caso, se tienen dos esferas aisladas sin interacción entre ellas, en un campo eléctrico uniforme, con dirección perpendicular a la línea que une a los dos centros de las esferas. Se puede entonces calcular el potencial debido a cada una de las esferas estando la otra ausente. Así, el potencial en $z=0$ debido a una de las esferas se encuentra como la solución del problema con valor en la frontera de una esfera en un campo eléctrico uniforme:

$$U^{(s)} = - \left(\frac{V_2 - V_1}{V_2 + 2V_1} \right) \frac{E_0 R^3 x}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

donde "x" es medido desde el punto arriba del centro. El potencial anómalo total será dos veces esta cantidad. Y el campo eléctrico anómalo, asumiendo que $V_2 \gg V_1$

$$\Delta U^{(s)} \approx 2 E_0 R^3 a \frac{(2x^2 - d^2)}{(x^2 + d^2)^{5/2}} \quad (3.3.42)$$

III.5.3 Banda conductora en un campo uniforme

Ciertos cuerpos tabulares con un rumbo extenso, como vetas minerales ó cizallas, pueden ser representados por un modelo de banda bidimensional. Para resolver el problema con valor a la frontera de una banda conductora en un campo eléctrico horizontal uniforme, se selecciona el sistema de coordenadas definido por:

$$x' = f \cosh \mu \cos \nu \qquad y' = f \sinh \mu \sin \nu$$

Las líneas $\mu = \text{constante}$ representan una familia de elipses confocales cuyos focos están en $(\pm f, 0)$. El rango de μ es de 0 hasta ∞ . Las líneas $\nu = \text{constante}$ son una familia de hipérbolas con los mismos focos que las elipses, y el rango de ν es de 0 hasta 2π . La banda es representada por la elipse delgada $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es muy pequeño.

La ecuación de Laplace en este sistema de coordenadas es

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} = 0$$

y las funciones características, que se obtienen por el método de separación de variables, son combinaciones de $\cosh n\mu$, $\sinh n\mu$, $\cos n\nu$ y $\sin n\nu$. Si la banda tiene un ángulo de echado α cuando la dirección de E_0 es horizontal y hacia la derecha, como muestra la figura (3.12), entonces el potencial a grandes distancias de la banda, ignorando la presencia de la superficie, será:

$$U_0 = -E_0 x' \cos \alpha + E_0 y' \sin \alpha = E_0 f (\cos \alpha \cosh \mu \cos \nu - \sin \alpha \sinh \mu \sin \nu)$$

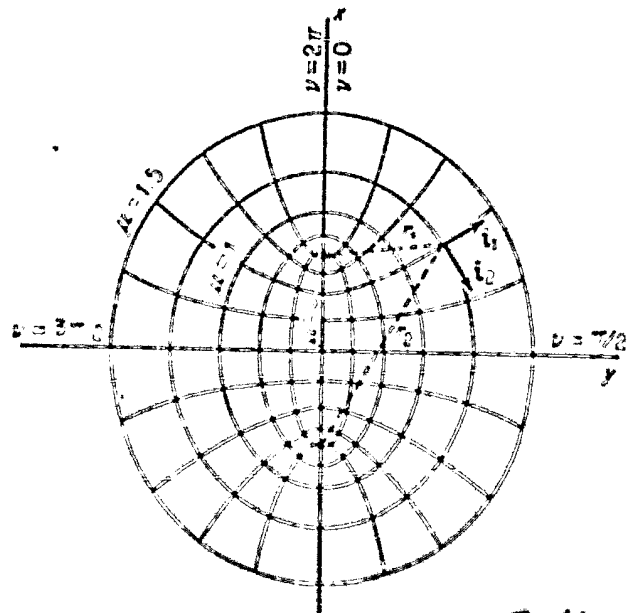


Fig. 3.11

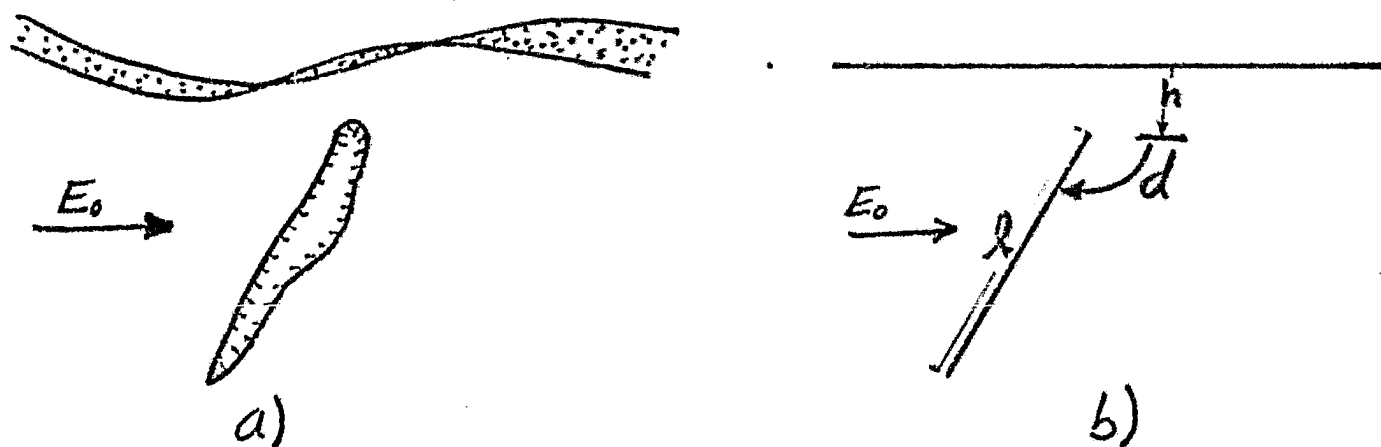


Fig. 3.12

De esto se sigue que $n=1$ y por lo tanto que $U(s)$ debe ser alguna combinación lineal de $\cosh \mu$, $\sinh \mu$, $\cos \nu$ y $\sin \nu$. Como $U(s)$ se debe desvanecer cuando $\mu \rightarrow \infty$, y la única combinación lineal de $\sinh \mu$ y $\cosh \mu$ que cumple esto es $\bar{e}^{\mu} = \cosh \mu - \sinh \mu$. Así

$$U(s) = -\bar{e}^{\mu} (A \cos \nu - B \sin \nu)$$

La condición de frontera que debe satisfacer $U(s)$ es que cuando $\mu_0 \rightarrow 0$ y ν' (de la banda) sea muy grande entonces $U_0 + U(s) \rightarrow 0$ en $\mu = \mu_0$. Consecuentemente

$$A = E_0 f \cos d e^{\mu_0} \cosh \mu_0 \quad \text{y} \quad B = E_0 f \sinh \mu_0$$

ahora, haciendo $\sinh \mu_0 = w/2f$, donde w es el espesor de la banda y suponiendo que $w \ll f$, se puede considerar $\cosh \mu_0 \approx 1$. Entonces la expresión para el potencial anómalo se puede escribir:

$$U(s) = \frac{1}{2} E_0 \bar{e}^{\mu} (l \cos d \cos \nu - w \sin d \sin \nu) \quad (3.3.43)$$

donde $l = 2f$. Si la banda es vertical ($d=90^\circ$) el potencial es proporcional al espesor w , y por lo tanto se desvanece cuando $w \rightarrow 0$.

III.3.6 Medio Heterogéneo

En los incisos anteriores se ha estado trabajando en el supuesto de un medio homogéneo. Sabiendo que físicamente esto es imposible y los errores introducidos al aplicar las ecuaciones de medio homogéneo muchas veces dan resultados que están fuera de la realidad geológica se necesita desarrollar y perfeccionar las expresiones que simulen un medio heterogéneo en todas sus características. En este inciso se deducirá una técnica numérica para encontrar la distribución tridimensional de potencial alrededor de una fuente puntual de corriente localizada en ó sobre la superficie de un semiespacio contentiendo una distribución tridimensional-arbitraria de resistividad. Se partirá de la ecuación de Poisson para reducirla por medio de condiciones de frontera de tal manera que sea resuelta por el método de aproximaciones en diferencias finitas sobre un volumen discretizado del espacio.

Combinando las ecuaciones (3.2.18), (3.2.20) y (3.2.4) resulta:

$$\nabla \cdot (-\sigma(x, y, z) \nabla U(x, y, z)) = -\frac{\partial q}{\partial t} \delta(x-x_s, y-y_s, z-z_s) \quad (3.3.44)$$

donde $\delta(x-x_s, y-y_s, z-z_s)$ es la función delta de Dirac en el punto (x_s, y_s, z_s) donde se encuentra situada la fuente puntual de corriente. Si en esta ecuación se considera un elemento de volumen:

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y, z) \nabla U(x, y, z)) = \frac{I}{\Delta V} \delta(x-x_s, y-y_s, z-z_s) \quad \dots (3.3.45)$$

Para encontrar el potencial en este elemento de volumen se aplicarán las siguientes condiciones de frontera:

a) El potencial eléctrico "V" debe ser continuo a través de cada contacto entre capas.

b) La componente normal de la densidad de corriente "J" $\left(= \sigma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)$ debe ser continua a través de cada contacto entre capas.

El potencial es obtenido de las ecuaciones diferenciales que resultan de la ecuación (3.3.45) al discretizar el espacio sobre el que se desea conocer el potencial. El área que encierra este espacio "S" tiene una normal " η " sobre la cual las condiciones de frontera son del tipo:

$$\alpha(x, y, z) U(x, y, z) + \beta(x, y, z) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial \eta} = f_2(x, y, z) \quad (3.3.46)$$

El semiespacio con distribución de conductividad arbitraria es considerado con fronteras simulando planos distantes infinitos - sobre el eje "x", el eje "y" y el eje "z". Este semiespacio es dividido en una rejilla prismática rectangular con espaciamiento entre nodos arbitrario e irregular. Los nodos en la dirección "x" están indicados por $i=1, 2, 3, \dots, L$; en la dirección "y" por $j=1, 2, 3, \dots, M$; y en la dirección "z" por $k=1, 2, 3, \dots, N$ respectivamente como muestra la figura (3.13):

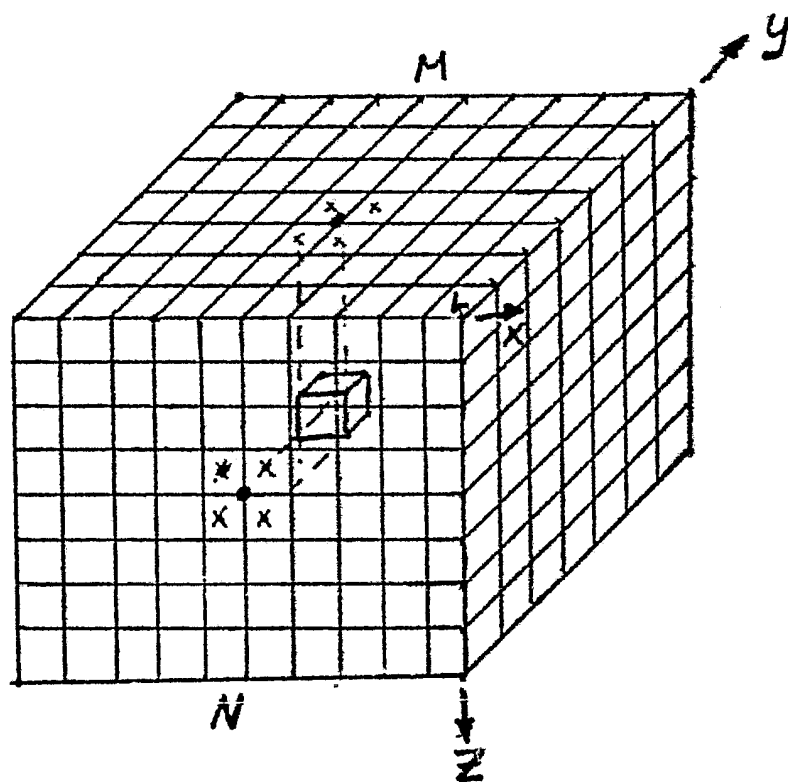


Fig. 3.13

Una condición de frontera mixta es propuesta para los planos de frontera en $x=\pm\infty$, $y=\pm\infty$ y $z=\infty$ usando el comportamiento asintótico de "U" y $\partial U/\partial \eta$ a grandes distancias de la fuente puntual. El potencial total a grandes distancias de la fuente puntual, también como en heterogeneidades tiene la forma general:

$$U(x, y, z) \approx \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{A}{r} \quad \text{donde } A = \text{constante}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial \eta} = -\frac{A}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{\eta} = -\frac{A}{r^2} \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre la distancia radial desde el elemento de volumen al origen y la normal a la superficie. De esta manera, se podría escribir la ecuación (3.3.46) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial \eta} + \frac{U(x, y, z)}{r} \cos \theta = 0$$

Por otra parte, la conductividad $\nabla_{i,j,k}$ en cualquier nodo (i, j, k) del prisma enrejillado como muestra la figura (3.13) es discretizado de manera que $\nabla_{i,j,k}$ representa la conductividad de un volumen encerrado por los nodos (i, j, k) , $(i+1, j, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i+1, j+1, k)$, $(i, j, k+1)$, $(i+1, j, k+1)$, $(i, j+1, k+1)$, $(i+1, j+1, k+1)$. La solución numérica de la ecuación (3.3.45), que consiste de un conjunto discretizado de $U(x, y, z)$ en cada nodo, es evaluada, el nodo (i, j, k) es representado en la figura (3.13) sobre una malla cerrada $\Delta V_{i,j,k}$ alrededor del nodo. De la figura (3.13) se observa que para un punto nodal en el interior:

$$\Delta V_{i,j,k} = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})}{8}$$

donde $\Delta V_{i,j,k}$ es el volumen entre nodos. En el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ para un punto nodal interior:

$$\Delta V_{i,j,k} = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta y_j + \Delta y_{j-1}) \Delta z_k}{8}$$

Para cada nodo (i, j, k) se integra sobre el elemento de volumen correspondiente $\Delta V_{i,j,k}$

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot \{ \nabla U \} dx_i dy_j dz_k &= \iiint \frac{I}{\Delta V_{i,j,k}} \delta(x_i - x_s, y_i - y_s, z_i - z_s) dx_i dy_j dz_k \\ &= I(x_s, y_s, z_s) \end{aligned}$$

usando el teorema de Green:

$$\iiint \nabla \cdot \{\sigma \nabla U\} dv = \iint \sigma \frac{\partial U}{\partial \eta} ds = I(x_s, y_s, z_s) \quad (3.3.47)$$

la integral de superficie en esta ecuación a lo largo de la superficie límite $S_{i,j,k}$ es subdividida en seis integrales de superficie de acuerdo al volumen tomado en la figura (3.13)

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{i,j,k}} \frac{\partial U_{i,j,k}}{\partial \eta} ds_{i,j,k} = \frac{U_{i,j-1,k} - U_{i,j,k}}{\Delta y_{j-1}} \left\{ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta z_{k-1} \Delta x_{i-1}}{4} + \right. \\ & + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta z_{k-1} \Delta x_i}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} \left. \right\} + \\ & + \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{\Delta y_j} \left\{ \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1} \Delta x_{i-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1} \Delta x_i}{4} + \right. \\ & + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} + \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} \left. \right\} + \frac{U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}}{\Delta x_i} \cdot \\ & \cdot \left\{ \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} + \right. \\ & + \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} \left. \right\} + \frac{U_{i-1,j,k} - U_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1}} \left\{ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \right. \\ & + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} \left. \right\} + \\ & + \frac{U_{i,j,k-1} - U_{i,j,k}}{\Delta z_{k-1}} \left\{ \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \right. \\ & + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \left. \right\} + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k}}{\Delta z_k} \left\{ \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \right. \\ \left. + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right\} \quad (3.3.48)$$

Si se sustituye esta ecuación en la ecuación (3.3.47) resulta para un nodo interior, la ecuación discretizada:

$$\underset{\text{tapa}}{C_{i,j,k}} U_{i,j,k-1} + \underset{\text{fondo}}{C_{i,j,k}} U_{i,j,k+1} + \underset{\text{lado izquierdo}}{C_{i,j,k}} + \underset{\text{lado derecho}}{C_{i,j,k}} U_{i+1,j,k} + \underset{\text{lado frontal}}{C_{i,j,k}} U_{i,j-1,k} +$$

$$+ \underset{\text{lado posterior}}{C_{i,j,k}} U_{i,j+1,k} + \underset{p}{C_{i,j,k}} U_{i,j,k} = I \delta(x_i - x_s, y_i - y_s, z_i - z_s) \quad (3.3.49)$$

donde:

$$\underset{\text{tapa}}{C_{i,j,k}} = \frac{1}{\Delta z_{k-1}} \left\{ \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \right. \\ \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right\}$$

$$\underset{\text{fondo}}{C_{i,j,k}} = \frac{1}{\Delta z_k} \left\{ \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \right. \\ \left. + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right\}$$

$$\underset{\text{lado izquierdo}}{C_{i,j,k}} = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \left\{ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} + \right. \\ \left. + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} \right\}$$

$$C_{\text{lado derecho}}^{i,j,k} = \frac{1}{\Delta X_i} \left\{ \nabla_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \nabla_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} + \nabla_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} + \nabla_{i,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right\}$$

$$C_{\text{lado frontal}}^{i,j,k} = \frac{1}{\Delta y_{j-1}} \left\{ \nabla_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \nabla_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} + \nabla_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} + \nabla_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} \right\}$$

$$C_{\text{lado posterior}}^{i,j,k} = \frac{1}{\Delta y_j} \left\{ \nabla_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \nabla_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} + \nabla_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} + \nabla_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} \right\}$$

$$C_P^{i,j,k} = \left\{ C_{\text{tapa}}^{i,j,k} + C_{\text{fondo}}^{i,j,k} + C_{\text{lado izquierdo}}^{i,j,k} + C_{\text{lado derecho}}^{i,j,k} + C_{\text{lado frontal}}^{i,j,k} + C_{\text{lado posterior}}^{i,j,k} \right\}$$

La ecuación en diferencias (3.3.49) indica que el potencial en el nodo (i, j, k) depende únicamente de los valores de "V" en los nodos adyacentes $(i, j, k-1)$, $(i+1, j, k)$, $(i, j-1, k)$, $(i, j+1, k)$. Los coeficientes $C_{i,j,k}^{i,j,k}$ son funciones conocidas de la geometría y de la distribución de propiedades físicas predefinidas en todos los nodos. El conjunto de ecuaciones simultáneas para todos los nodos en la rejilla puede ser escrito simbólicamente:

$$[S] = [C][V] \quad (3.3.50)$$

donde "C" es una matriz de $LMN \times LMN$, llamada la matriz capacitiva, y es función únicamente de la geometría y de la-

distribución de propiedades físicas en la rejilla. El vector "V" consiste de las soluciones no conocidas del potencial total en todos los nodos, y el vector "S" contiene las fuentes puntuales de corriente que entran al semimedro.

Resolviendo la matriz "V" se obtiene el potencial buscado. La manera de resolver esta matriz es muy diversa, utilizando entre éstas, la descomposición de Cholesky de la matriz capacitiva ó también el método iterativo de Cholesky-Gradiente conjugado recientemente desarrollado.

III.4 Potencial Eléctrico producto de Fuentes Dipolares.

En el inciso anterior se deducieron los potenciales eléctricos producto de fuentes puntuales, en este inciso se deducirán los potenciales eléctricos producto de fuentes dipolares, entendiendo como fuente dipolar un arreglo de electrodos en el cual los electrodos fuente se encuentran muy cerca con respecto al punto de observación. Cuando los electrodos fuente se encuentran separados una distancia pequeña pero considerable con respecto al punto de observación se le denomina fuente-bipolar.

III.4.1 Semimedio Homogéneo e isótropo

Considerese un semiespacio homogéneo e isótropo sobre el cual se situaran dos fuentes puntuales de corriente en donde, la distancia entre las fuentes es mucho menor que la distancia al punto de observación como muestra la figura (3.14)

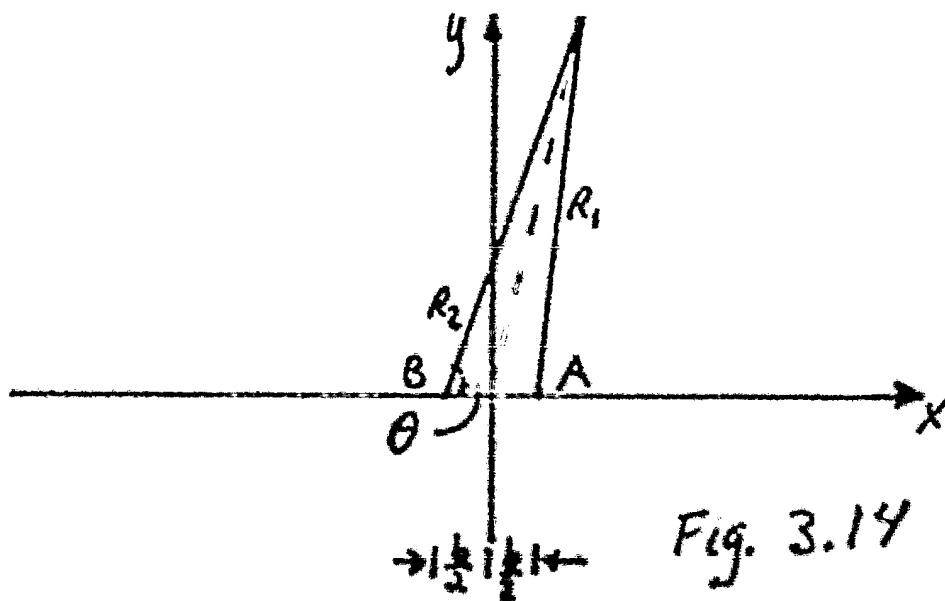


Fig. 3.14

El potencial debido a estas dos fuentes puntuales de corriente está dado según la ecuación (3.3.7) por:

$$U_p = U_p^A - U_p^B = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

de la figura (3.10) y aplicando el teorema de Pitágoras:

$$R_1 = \left\{ \left(x - \frac{1}{2}b \right)^2 + y^2 \right\}^{1/2} = \left\{ x^2 + y^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 \right\}^{1/2}$$

suponiendo que $b \ll x$ entonces $\frac{b^2}{4} \ll \ll R$ tal que:

$$R_1 \approx (x^2 + y^2 - bx)^{1/2} = \left\{ R^2 \left(1 - \frac{bx}{R^2} \right) \right\}^{1/2} = R \left(1 - \frac{bx}{R^2} \right)^{1/2}$$

desarrollando por serie binomial

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{bx}{R^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{b^2 x^2}{R^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{b^3 x^3}{R^6} + \dots \right)$$

despreciando los términos con grado igual o mayor de 2

$$\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{bx}{R^2} \right)$$

similarmente

$$\frac{1}{R_2} \approx -\frac{1}{R} \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{bx}{R^2} \right)$$

sustituyendo en la expresión del potencial

$$U = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{bx}{R^2} = \frac{\rho I b}{2\pi} \frac{\cos \theta}{R^2} \quad \text{ya que } x = R \cos \theta$$

haciendo $M = \frac{\rho I b}{2\pi}$ que recibe el nombre de momento del dipolo, la expresión anterior queda:

$$U = M \frac{\cos \theta}{R^2} \quad \dots \quad (3.4.1)$$

El campo eléctrico para este potencial está dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V = \left(-\frac{\partial}{\partial R} \hat{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right) \left(\frac{M \cos \theta}{R^2} \right)$$

$$\vec{E} = 2M \frac{\cos \theta}{R^3} \hat{e}_R + M \frac{\sin \theta}{R^3} \hat{e}_\theta \quad \dots \quad (3.4.2)$$

En coordenadas rectangulares queda como:

$$\vec{E} = M \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \hat{e}_x + M \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \hat{e}_y \quad \dots \quad (3.4.3)$$

El módulo de \vec{E} en coordenadas polares está dado por

$$|\vec{E}| = (\vec{E}_R^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{M}{R^3} (3\cos^2 \theta + 1)^{1/2} \quad \dots \quad (3.4.4)$$

y en coordenadas cartesianas:

$$|\vec{E}| = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2} = M \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^2} \quad \dots \quad (3.4.5)$$

Considerando un dipolo con orientación entre electrodos de potencial arbitraria, como muestra la figura (3.15)

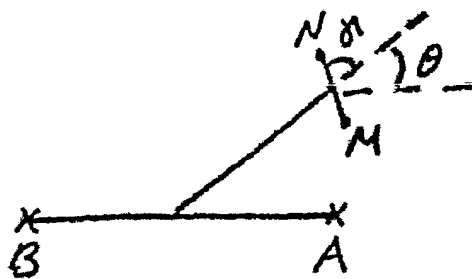


Fig. 3.15

$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_R \cos \theta + E_\theta \sin \theta$$

$$E_\theta = \frac{M}{R^3} (2 \cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta)$$

$$E_{\theta} = \frac{\rho I b}{2\pi R^3} (2 \cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta) \dots (3.4.6)$$

III.4.2 Medio Estratificado

Para el caso de un medio estratificado se demostró que el potencial debido a una fuente puntual de corriente está dado por:

$$(3.4.7) \quad U = \frac{\rho I b}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

también se demostró que para un medio homogéneo el potencial dipolar y el potencial puntual están dados por:

$$U_{dip} = \frac{\rho I b}{2\pi r^2} \cos \theta \quad U_p = \frac{\rho I}{2\pi r}$$

de estas dos expresiones se observa que:

$$U_{dip} = -\frac{\partial U_p}{\partial r} b \cos \theta \dots (3.4.8)$$

por lo tanto, el potencial dipolar para un medio estratificado se puede expresar como:

$$U_{dip} = -b \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\rho I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \right\}$$

$$U_{dip} = -\frac{\rho I b}{2\pi} \cos \theta \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.4.9)$$

El campo eléctrico dipolar en el caso de un medio estratificado está dado por la siguiente expresión:

$$E_{rdip} = -\frac{\partial V_{dip}}{\partial r} = -\frac{I \rho_1 b \cos \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z_2} \right] \cdot \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (3.4.10)$$

$$E_{\theta dip} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{I \rho_1 b \sin \theta}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z_2} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.4.11)$$

en coordenadas cartesianas queda como:

$$E_x = E_r \cos \theta - E_{\theta} \sin \theta = -\frac{I \rho_1 b \cos^2 \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z_2} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \right\} - \frac{I \rho_1 b \sin^2 \theta}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z_2} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.4.12)$$

$$E_y = E_r \sin \theta + E_{\theta} \cos \theta = \frac{I \rho_1 b \sin \theta \cos \theta}{2\pi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z_2} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z_2} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (3.4.13)$$

III.5 Potencial Eléctrico producto de Fuentes Lineales.

En la búsqueda de mejores métodos para determinar -- las resistividades del subsuelo se han diseñado diferentes dispositivos con los cuales se haga fluir corriente eléctrica conocida en el interior de la corteza terrestre y se mida la diferencia de potencial. Uno de los dispositivos utilizados en --

algunos casos es el que utiliza fuentes lineales. En este inciso se deducirá el potencial producto de fuentes lineales.

III.5.1 Medio Homogéneo

Considerese un semiespacio homogéneo sobre el cual se extienden dos líneas de corriente de polaridad diferente separadas paralelamente como muestra la figura (3.16):

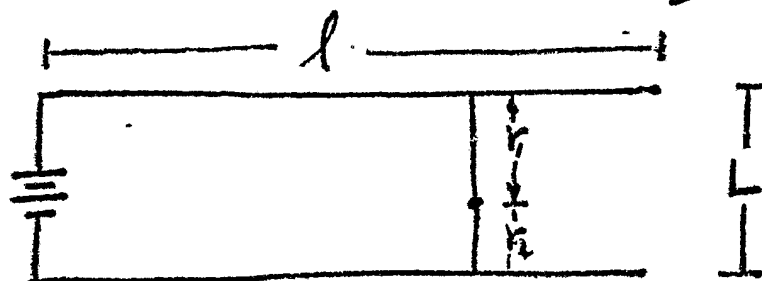


Fig. 3.16

El potencial para el caso de fuentes lineales cumple con la ecuación de Laplace, o sea, en coordenadas cilíndricas y por simetría del problema

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = 0$$

resolviendo esta ecuación:

$$U = C_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2$$

Aplicando condiciones de frontera; $r \rightarrow \infty$ entonces $U \rightarrow 0$ por lo tanto, $C_2 = 0$. Combinando las ecuaciones (3.2.18) y (3.2.20)

$$J = \nabla E = -\frac{1}{\rho} \nabla U = -\frac{C_1}{\rho r}$$

pero $J = I/A$ y considerando el área cilíndrica se obtiene el valor de $C_1 = -\rho I / \pi l$. De esta forma, el potencial para el caso de un medio homogéneo debido a fuentes lineales se puede expresar como:

$$U = -\frac{\rho I}{\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho I}{\pi l} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (3.5.1)$$

Si en vez de un electrodo de potencial se consideran dos electrodos como muestra la figura (3.17)

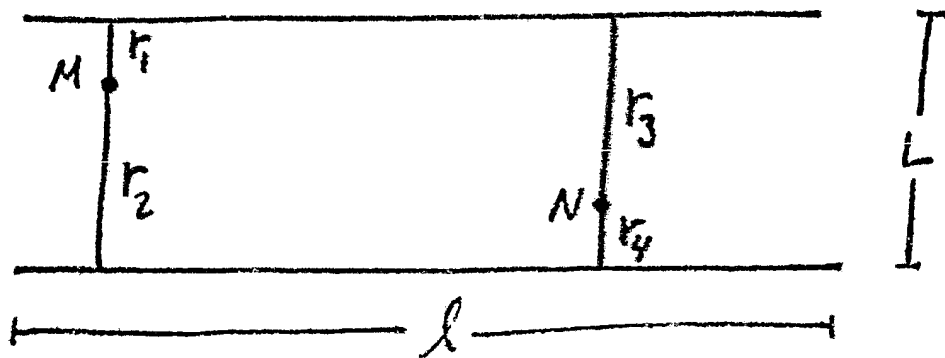


Fig. 3.17

La diferencia de potencial para este caso es:

$$\Delta U_N^M = U_M - U_N = \frac{\rho I}{\pi l} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} - \ln \frac{r_3}{r_4} \right)$$

o sea

$$\Delta U_N^M = \frac{\rho I}{\pi l} \ln \frac{r_1 r_4}{r_2 r_3} \quad (3.5.2)$$

Las líneas de campo eléctrico se muestran en la figura (3.18)

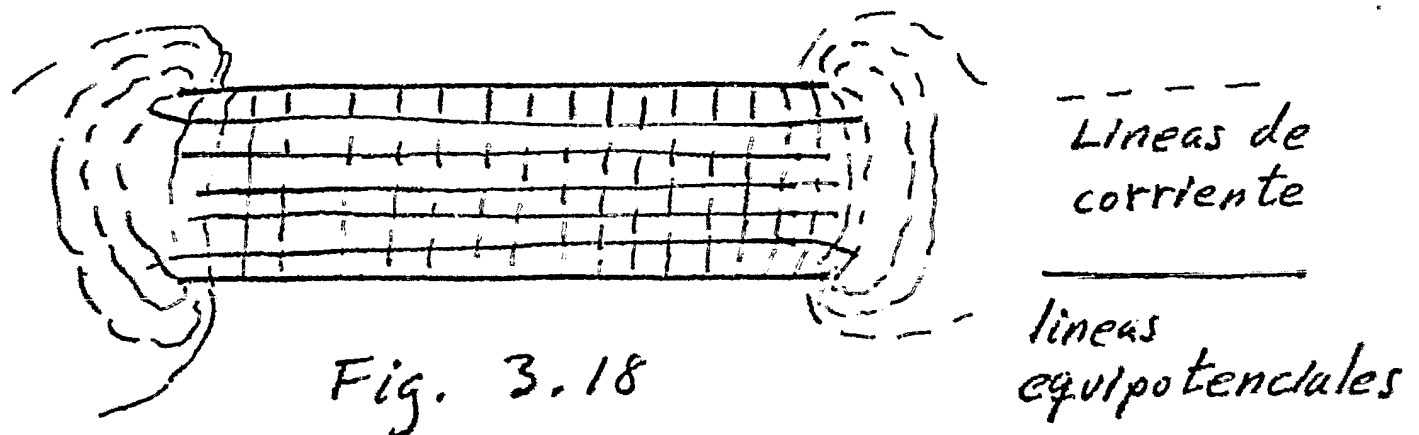


Fig. 3.18

III.5.2 Medio Estratificado

El potencial para el caso de un medio homogéneo para fuentes puntuales y lineales están dados por:

$$U_p = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$$U_L = \frac{\rho I}{\pi l} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

de estas ecuaciones se observa que:

$$U_L = \frac{2}{l} \int_{r_2}^{r_1} U_p dr \quad (3.5.3)$$

De manera que para el caso de un medio estratificado utilizando fuentes puntuales, el potencial se obtiene sustituyendo la ecuación (3.3.30) en la ecuación (3.5.3):

$$U_L = \frac{2}{l} \int_{r_2}^{r_1} \left[\frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1}] J_0(\lambda r) d\lambda \right] dr$$

intercambiando el orden de integración se obtiene el potencial para un medio estratificado utilizando fuentes lineales:

$$U_L = \frac{I \rho_1}{\pi l} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1}] \int_{r_2}^{r_1} J_0(\lambda r) dr d\lambda \quad (3.5.4)$$

El campo eléctrico está dado por

$$\bar{E}_{RL} = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{I \rho_1}{\pi l} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1}] J_0(\lambda r) \Big|_{r_2}^{r_1} d\lambda$$

o sea,

$$E_{RL} = - \frac{I \rho_1}{\pi l} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda z_1} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} + B_1(\lambda) e^{+\lambda z_1}] [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] d\lambda \quad (3.5.5)$$

III. 6 Resistividad Aparente

Todos los métodos geoelectricos de resistividad involucran una diferencia de potencial generada por una corriente eléctrica al ser inyectada en el subsuelo. Esta diferencia de potencial depende de la geometría del arreglo de electrodos utilizado y de la distribución de resistividades en el subsuelo. Al efectuar un conjunto de mediciones en una región y tratar de interpretar éstos datos se utilizan las expresiones para el caso de un medio homogéneo por sencillez. La resistividad obtenida de ésta manera no es la resistividad verdadera del subsuelo ya que de sobra se sabe que el terreno no es homogéneo. Esta resistividad recibe el nombre de "Resistividad Aparente (ρ_a)" y es la resistividad obtenida en un medio heterogéneo como muestra la figura (3.19):

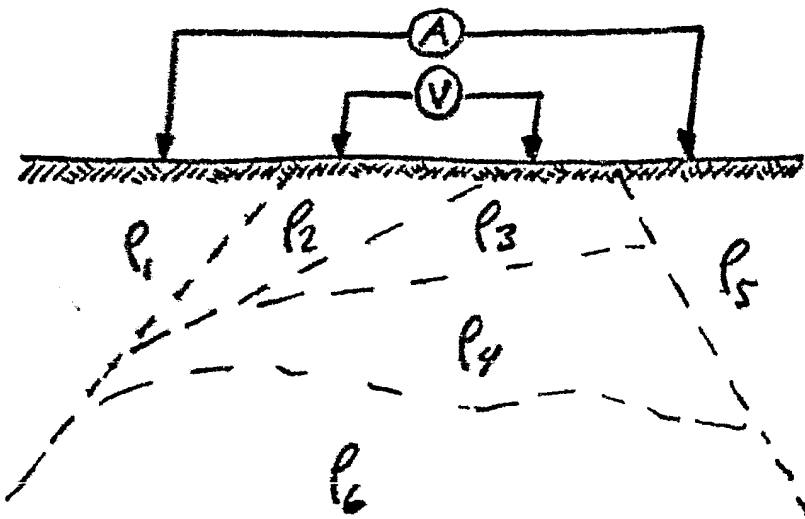


Fig. 3.19

También se podría considerar a la resistividad aparente como una anomalía si se compara la diferencia de potencial observada con la diferencia de potencial calculada para el caso de un subsuelo homogéneo de resistividad $\rho=1$, es decir,

$$\Delta U_N^M = \frac{\rho_a I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad \text{resistividad observada}$$

$$\Delta U_N^M |_{\rho=1} = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad \text{resistividad calculada.}$$

efectuando la división:

$$\rho_a = \frac{\Delta U_N^M}{\Delta U_N^M|_{\rho=1}} = \rho_a(\rho_i, x, y, z, \text{geometría}) \quad (3.6.1)$$

de esta ecuación se observa que la resistividad aparente depende de las resistividades que existen en el subsuelo, de la posición de los electrodos y, de la geometría y separación de éstos.

De acuerdo a esto, las resistividades aparentes para los diferentes medios y con diferentes fuentes quedan:

a) Medio homogéneo e isótropo con una fuente puntual:

$$\rho_a = 4\pi r \frac{U}{I} \quad (3.6.2)$$

b) Semimedio homogéneo e isótropo con una fuente puntual

$$\rho_{ay_2} = 2\pi r \frac{U}{I} \quad (3.6.3)$$

c) Semimedio homogéneo e isótropo con dos fuentes puntuales

$$\rho_a = 2\pi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{U}{I} \quad (3.6.4)$$

d) Semimedio homogéneo e isótropo con el cuadrípolo fundamental

$$\rho_a = 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \frac{U}{I} \quad (3.6.5)$$

e) Semimedio homogéneo e isótropo con dos fuentes lineales

$$\rho_a = \pi \ln \frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.6.6)$$

f) Semimedio homogéneo e isótropo con fuentes dipolares.

$$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{ABMN} \left(2 \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \right) \frac{\Delta U}{I} \quad (3.6.7)$$

g) Semimedio estratificado paralelo con fuentes puntuales

$$\rho_a = 2\pi(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{3/2} \frac{V}{I} \quad (3.6.8)$$

h) Semimedio estratificado inclinado con fuentes puntuales

$$\rho_a = 2\pi(x^2 + Ly^2 + Mz^2 + 2NyZ)^{-1/2} \frac{V}{I} \quad (3.6.9)$$

Independientemente de la disposición de los electrodos se observa que:

$$\rho_a = K \frac{\Delta V}{I} \quad (3.6.10)$$

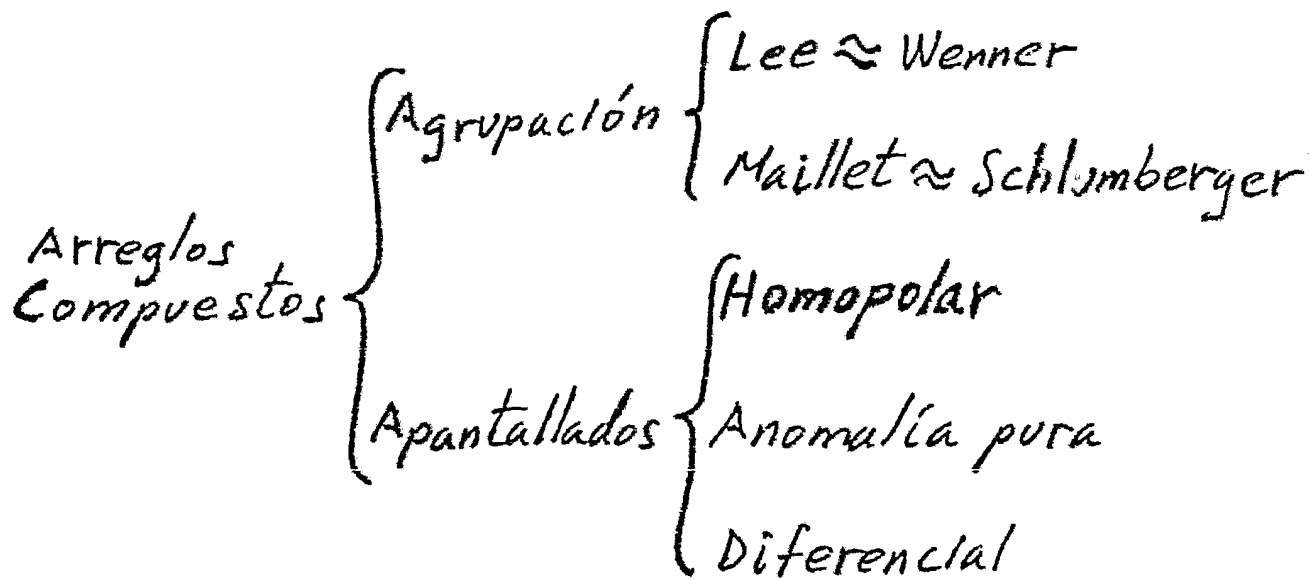
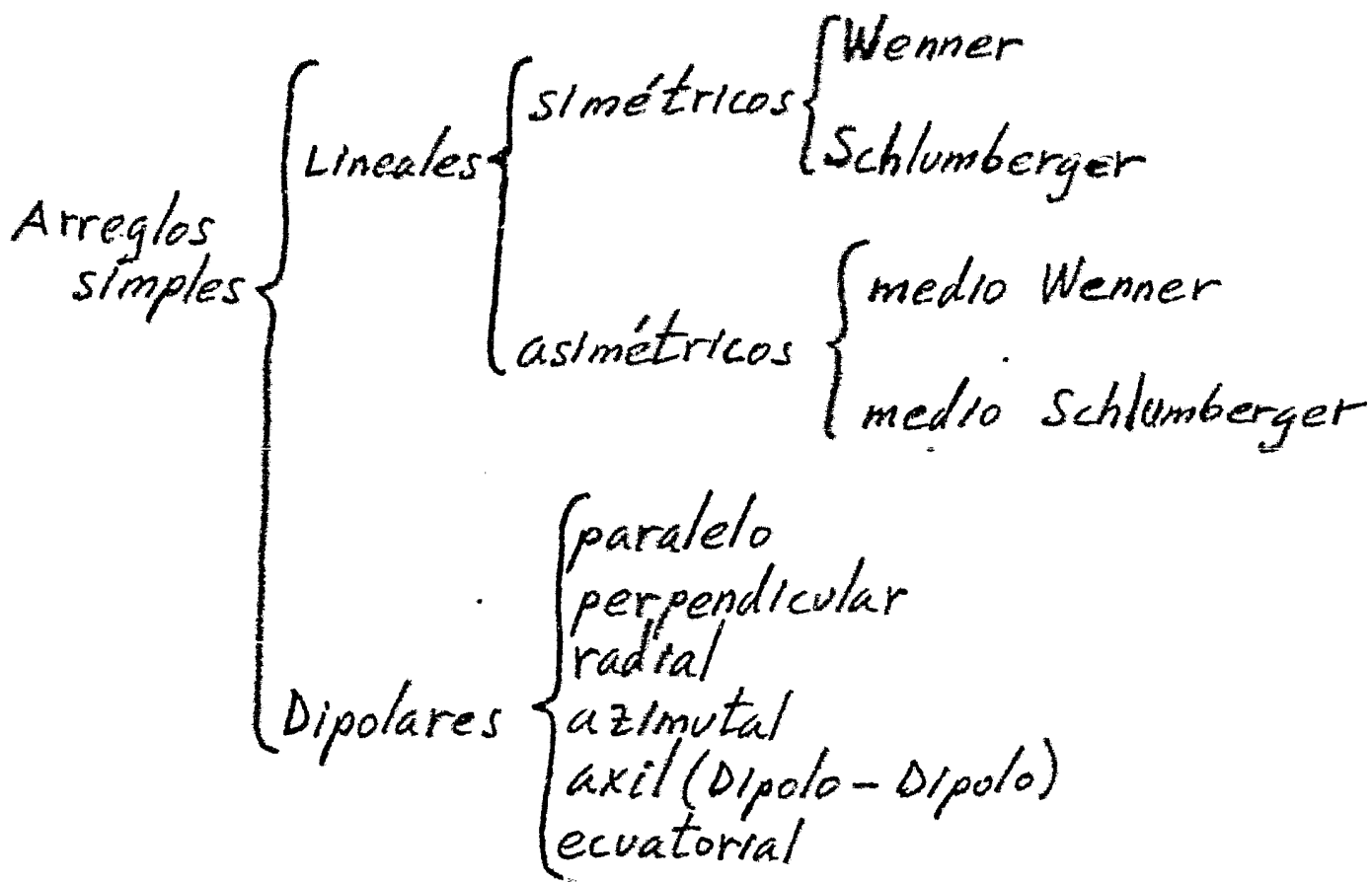
en donde K recibe el nombre de factor geométrico y tiene unidades de longitud.

III. 7 Dispositivos Electródicos

En todos los métodos geoelectrónicos de resistividad una corriente eléctrica es inyectada en el subsuelo y una diferencia de potencial es medida. La manera en que se inyecta ésta corriente y se mide la diferencia de potencial es llevada a cabo en la práctica por medio de un conjunto de electrodos, en donde, los electrodos que inyectan la corriente reciben el nombre de electrodos de corriente, electrodos fuente ó emisores, y, a los que miden la diferencia de potencial se les denomina electrodos de potencial ó receptores. Tanto los electrodos de corriente como los de potencial pueden adoptar cualquier disposición geométrica. A estas disposiciones geométricas se les conoce como arreglo de electrodos, dispositivo electródico ó configuración electródica.

A continuación se dará una clasificación dependiendo del número de electrodos que exista en el arreglo.

- ARREGLOS { Polo - Polo ó Normal (dos electrodos)
- { Anomalía pura (de cero ó polo - dipolo. Tres electrodos)
- { Simples (4 electrodos)
- { Compuestos. (más de 4 electrodos).



III. 7.1 Dispositivos lineales

a) Dispositivo Polo - Polo

También conocido como arreglo normal se compone de un -- electrodo de corriente y un electrodo de potencial. Los otros electrodos se consideran situados en el infinito. La separación entre electrodos es "a" como muestra la figura (3.20)

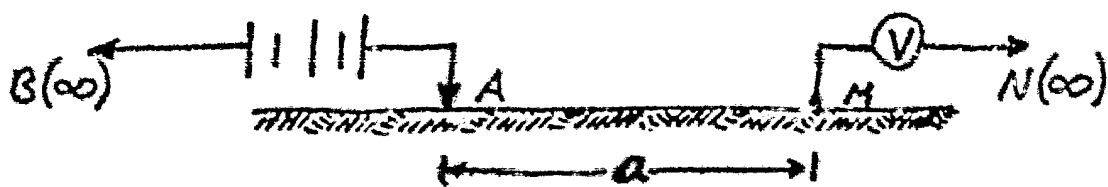


Fig. (3.20)

de la figura (3.20) se observa que el factor geométrico es $K_{pp} = 2\pi a$ y por lo tanto

$$\rho_a = 2\pi a \frac{U}{I} \quad (3.7.1)$$

b) Dispositivo Polo - Dipolo

Se compone de dos electrodos de potencial y un electrodo de corriente. El otro electrodo de corriente se considera situado en el infinito.

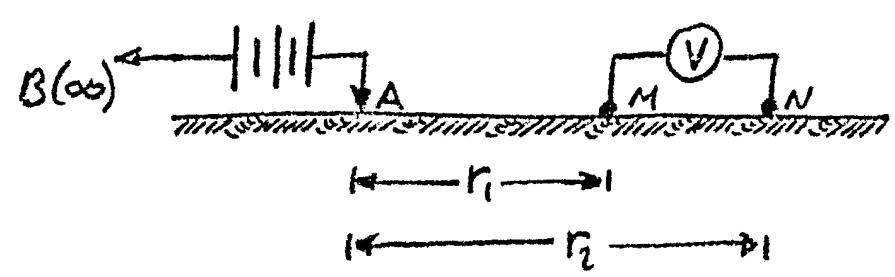


Fig. 3.21

Según la ecuación (3.3.7) y observando la figura (3.21)

$$K_{pd} = 2\pi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \quad (3.7.2.a)$$

entonces

$$\rho_a = 2\pi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.2)$$

si se considera que la fuente puntual de corriente está situada en medio de los dos electrodos de potencial como muestra la figura (3.2.2) el dispositivo recibe el nombre de dispositivo de anomalía pura.

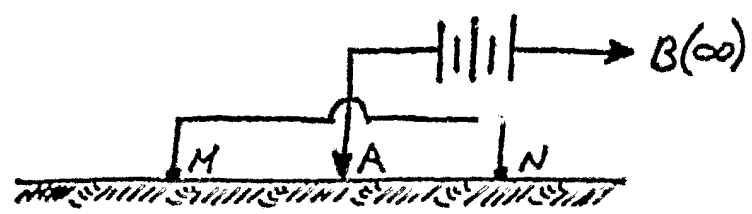


Fig. 3.2.2

por (3.7.2a) se observa que $K_{pd} = 0$ pero en la práctica $K_{pd} = 1$

por lo tanto

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} \tag{3.7.3}$$

c) Dispositivo simétrico general

Para el caso simétrico en general se considera un cuádrupolo fundamental en el cual los electrodos "A" y "M" están situados simétricamente a los electrodos "B" y "N" respectivamente a partir del origen.

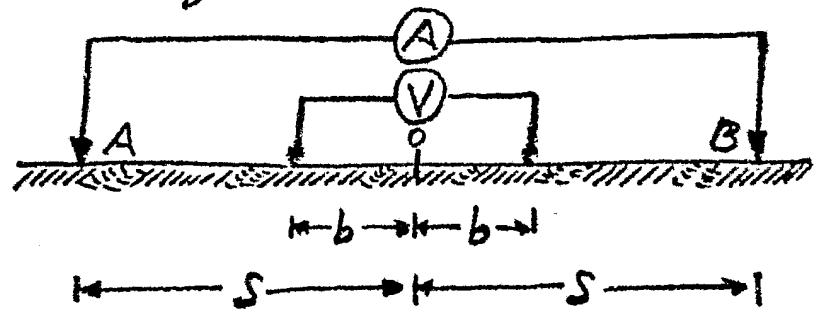


Fig. 3.23

De la ecuación (3.3.9) se obtiene el valor del factor geométrico

$$k_{sim} = 2\pi \left(\frac{2}{s-b} - \frac{2}{s+b} \right)^{-1} = \pi \frac{s^2 - b^2}{2b}$$

por lo tanto

$$\rho_{sim} = \pi \frac{s^2 - b^2}{2b} \frac{\Delta V}{I} \tag{3.7.4}$$

d) Dispositivo Wenner

El dispositivo Wenner es un dispositivo simétrico en el cual la separación entre todos los electrodos es la misma y es representada por "a" como muestra la figura (3.24)

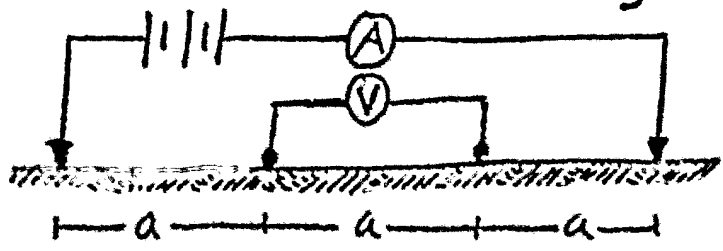


Fig. 3.24

De la figura (3.20) sustituyendo los valores de "s" y "b" para el caso simétrico en la ecuación (3.7.4)

$$K_w = \frac{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2(\frac{1}{2}a)} = 2\pi a \quad \text{entonces}$$

$$\rho_{aw} = 2\pi a \frac{\Delta V}{I} \quad (3.7.5)$$

e) Dispositivo Schlumberger.

Este dispositivo es simétrico y en el cual la separación entre los electrodos de potencial se considera despreciable. Es uno de los dispositivos más utilizados en la práctica junto con el Wenner.

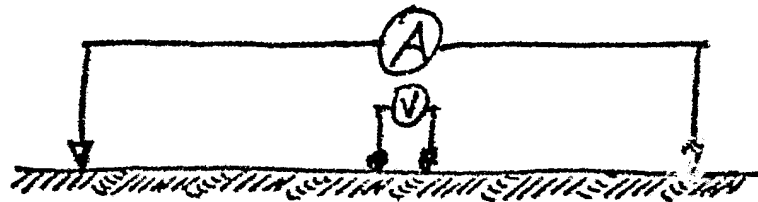


Fig. 3.25

De la figura (3.23) y (3.24) se observa que $\Delta V/a = \Delta V/2b$ y como se está haciendo la consideración de que $a \rightarrow 0$, entonces se puede suponer sin gran error que $\Delta V/a \approx E$, por lo tanto

$$E = \Delta V/a = -2 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=L} = -2 \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho I}{\pi L^2}$$

de esta forma la resistividad aparente para el arreglo -- Schlumberger es:

$$\rho_{as} = \frac{\pi}{a} L^2 \frac{\Delta V}{I} \quad (3.7.6)$$

f) Dispositivo Medio Wenner

En este dispositivo se considera un electrodo de corriente en el infinito partiendo de un arreglo wenner como muestra:

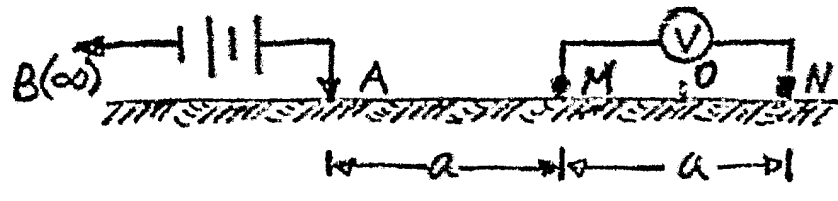


Fig. 3.26

De la ecuación (3.7.2a) se obtiene $K_{\frac{1}{2}W} = 4\pi a$ entonces

$$\rho_{\frac{1}{2}W} = 4\pi a \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.7)$$

g) Dispositivo Medio Schlumberger

En este dispositivo se considera un arreglo Schlumberger con un electrodo de corriente en el infinito como muestra la figura (3.27)

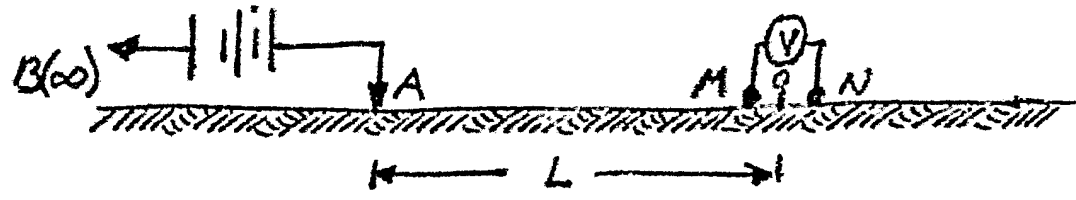


Fig. 3.27

Su factor geométrico está dado por $K_{\frac{1}{2}L} = 2\pi \frac{L^2}{a}$ y su resistividad es

$$\rho_{\frac{1}{2}L} = 2\pi \frac{L^2}{a} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.8)$$

III. 7.2 Dispositivos Dipolares

Los dispositivos dipolares están formados por un cuadrípolo fundamental y en el cual los electrodos fuente se consideran muy cerca del punto de observación. En casi todos los dispositivos dipolares los electrodos de corriente no se encuentran alineados con los electrodos de potencial. Para deducir la resistividad aparente de los diferentes dispositivos dipolares se partirá de la ecuación general del factor geométrico de los dispositivos dipolares

$$K_{dip} = \frac{2\pi R^3}{ABMN} (2\cos\delta\cos\theta + \sin\delta\sin\theta)^{-1} \quad (3.7.9)$$

a) Dispositivo Dipolar Paralelo

Como su nombre lo dice en este dispositivo los electrodos de potencial se encuentran situados paralelamente a los electrodos de corriente

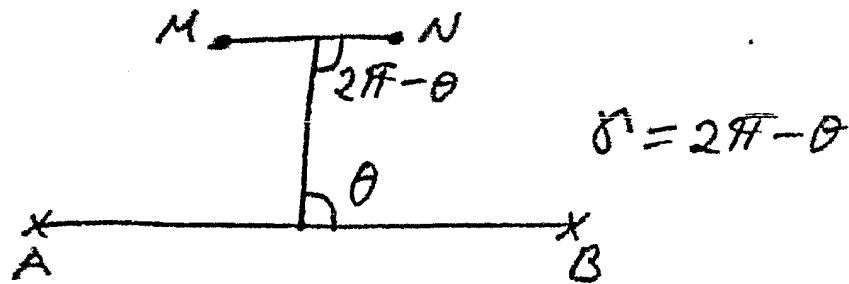


Fig. (3.28)

De la ecuación (3.7.9) se obtiene: $K_{pl} = \frac{2\pi R^3}{ABMN} (2\cos^2\theta - \sin^2\theta)^{-1}$ de esto resulta

$$P_{apl} = \frac{2\pi R^3}{ABMN} (2\cos^2\theta - \sin^2\theta)^{-1} \frac{\Delta V}{I} \quad (3.7.10)$$

b) Dispositivo Dipolar perpendicular

En este arreglo, los electrodos de corriente son perpendiculares a los electrodos de potencial.

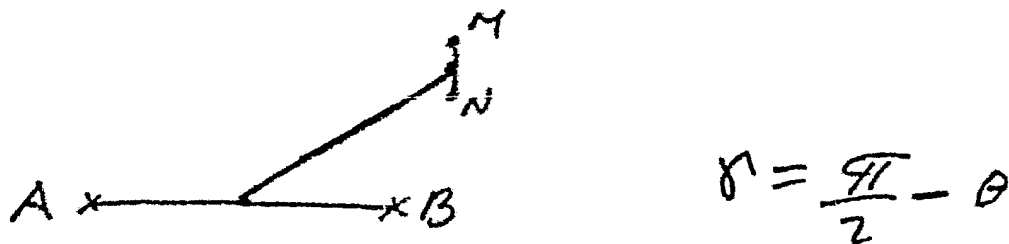


Fig (3.29)

De la ecuación (3.7.9) $K_{\perp} = \frac{\pi R^3}{ABMN} \frac{4}{3\sin 2\theta}$ entonces

$$P_{adr} = \frac{\pi R^3}{ABMN} \frac{4}{3\sin 2\theta} \frac{\Delta V}{I} \quad (3.7.11)$$

c) Dispositivo Dipolar Radial

En este dispositivo los electrodos de potencial se encuentran alineados con la línea que une los centros de los electrodos de corriente y de potencial.

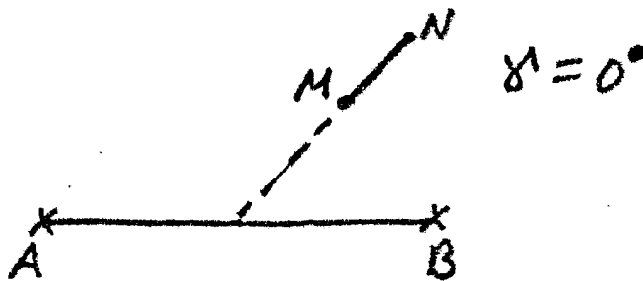


Fig. 3.30

De la ecuación (3.7.9) $K_{Dr} = \frac{\pi R^3}{AB MN} \frac{1}{\cos \theta}$ entonces:

$$\rho_{ADR} = \frac{\pi R^3}{AB MN} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.12)$$

d) Dispositivo Dipolar Azimutal

En el arreglo azimutal los electrodos de potencial son perpendiculares a la línea que une los centros de los electrodos de corriente con los de potencial.

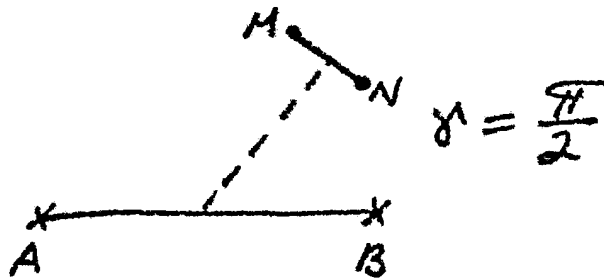


Fig. 3.31

De la ecuación (3.7.9) y sustituyendo en la resistividad aparente

$$\rho_{ADZ} = \frac{2\pi R^3}{AB MN} \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.13)$$

e) Dispositivo Dipolar Axial

En este arreglo los electrodos de potencial se encuentran alineados con los de corriente como muestra la figura (3.32)

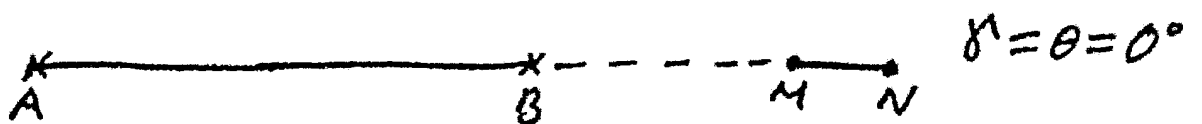


Fig. 3.32

De acuerdo a la figura y utilizando (3.7.9) $K_0 = \frac{\pi R^3}{AB MN}$ tal que

$$\rho_{AO} = \frac{\pi R^3}{AB MN} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.14)$$

f) Dispositivo Dipolar Ecuatorial

En el dispositivo ecuatorial los centros de los electrodos de corriente y de potencial se encuentran formando 90° entre sí.

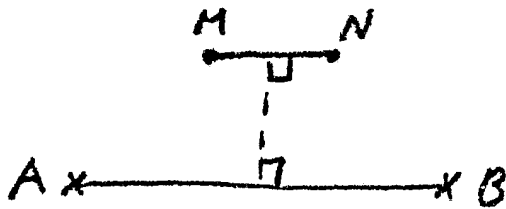


Fig. 3.33

De la ecuación (3.7.9) y de la figura la resistividad aparente es:

$$\rho_{aec} = \frac{2\pi R^3}{ABMN} \frac{\Delta V}{I} \quad (3.7.15)$$

III.7.3 Dispositivos Compuestos

a) Dispositivo de Lee

Este dispositivo es idéntico al Wenner con la diferencia de que tiene un electrodo de potencial de más en el punto de observación.



Fig. 3.34

De la ecuación (3.3.7) y (3.3.9) se deduce que:

$$K_L = 2\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{3}{2}a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{\frac{3}{2}a} \right)^{-1} = 4\pi a \quad \text{tal que:}$$

$$\rho_{aL} = 4\pi a \frac{\Delta V}{I} \quad (3.7.16)$$

b) Dispositivo de Maillat

Este arreglo es el mismo que el Schlumberger con la diferencia de que éste tiene un electrodo de potencial adicional en el punto de observación.



Fig. 3.35

De la ecuación (3.7.2a) resulta $K_M = 2\pi \frac{L^2}{a}$, por lo tanto

$$\rho_{AM} = 2\pi \frac{L^2}{a} \frac{\Delta U}{I} \quad (3.7.17)$$

c) Dispositivo Homopolar

El dispositivo homopolar es muy parecido al Wenner conteniendo adicionalmente otro electrodo de corriente en el infinito y teniendo la misma polaridad entre el electrodo "A" y el electrodo "B" como muestra la figura (3.36)

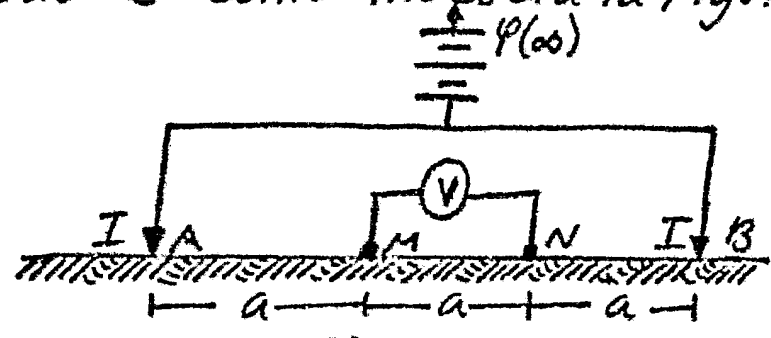


Fig. 3.36

d) Dispositivo de Anomalia pura

El dispositivo de anomalia pura es muy parecido al Wenner con la diferencia de que tiene otro electrodo de corriente en el punto de observación y además los electrodos "A" y "B" tienen la misma polaridad (Fig. 3.37)

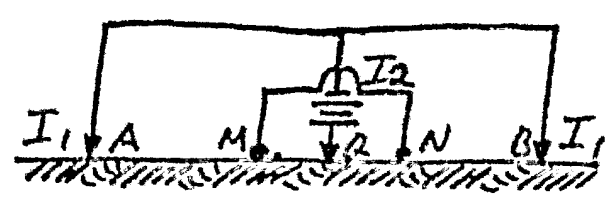


Fig. 3.37

III.8 Fundamentos teóricos de los métodos magnéticos de resistividad

III.8.1 Definiciones

Los métodos magnéticos de resistividad son poco conocidos en la literatura de los métodos de prospección geofísica y debido a esto son poco empleados. En los métodos magnéticos de resistividad (también llamados magnetométricos) se mide una componente del campo magnético total en la vecindad de un arreglo de electrodos situados en la superficie de un medio con una distribución de resistividad arbitraria. Este conjunto de mediciones obtenidas sirven para inferir la resistividad aparente del medio sobre el cual se hace el estudio. En este inciso se presentan las bases teóricas del método magnetométrico de resistividad (MMR), en particular las soluciones analíticas para el campo magnético debido al flujo de corriente de una fuente de corriente en la superficie de un semimedio.

Para poder establecer la relación que hay entre el campo magnético producto de una corriente eléctrica y la conductividad eléctrica del medio se partirá de la ley experimental de Biot-Savart:

$$\vec{H}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \hat{e}_R}{R^2} dv \quad (3.8.1)$$

en donde $H(r)$ es la intensidad del campo magnético, " \vec{J} " la densidad de corriente eléctrica, " R " la distancia que hay del punto donde se quiere conocer la intensidad del campo magnético y el punto donde está situado el elemento diferencial de volumen y " \hat{e}_R " el vector unitario en la dirección de " R " como muestra la figura (3.39)



Fig. 3.39

Si se considera un volumen "V" conteniendo una distribución de elementos de corriente $J dv$ encerrado por una superficie cerrada "S" como se muestra en la figura (3.40)

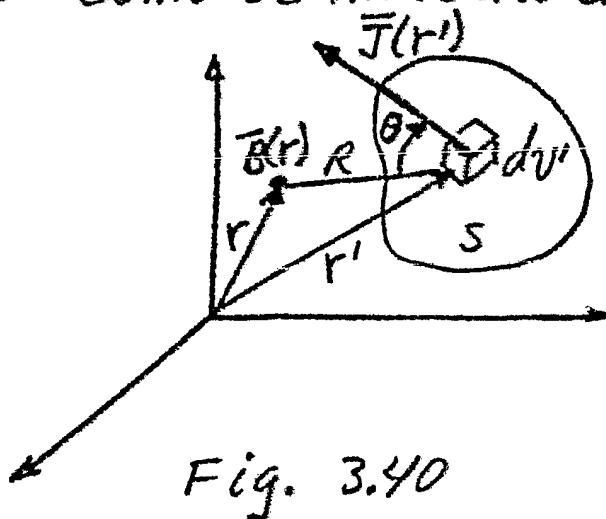


Fig. 3.40

De la figura se observa que $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Sustituyendo esto en la ecuación (3.8.1) y sustituyendo $\vec{H} = \mu \vec{B}$ resulta

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J(r') dv' \times \hat{e}_R}{|r-r'|^2} \quad (3.8.2)$$

pero: $\frac{\hat{e}_R}{|r-r'|^2} = \frac{r-r'}{|r-r'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|r-r'|} \right)$

en donde ∇' es el operador nabla con respecto a r' . Sustituyendo en la ecuación (3.8.2)

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V J(r') \nabla' \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) dv'$$

aplicando la identidad vectorial $\nabla \times (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \phi$ y utilizando el teorema de Stokes el campo magnético queda como

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times J(r')}{|r-r'|} dv' - \int_S \hat{n} \times \frac{J(r')}{|r-r'|} ds$$

en donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie "S". La segunda integral en la ecuación (3.8.2) se desvanece ya que de acuerdo a las condiciones de frontera la densidad de corriente normal a la superficie es cero, entonces:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times J(r')}{|r-r'|} dV' \quad (3.8.3)$$

pero, de acuerdo a las ecuaciones (3.2.18) y (3.2.20) se obtiene el valor de \bar{J} y sustituyendolo en la ecuación (3.8.3)

$$B(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \left\{ \nabla'(r') \nabla' U(r') \right\}}{|r-r'|} dV'$$

aplicando la identidad vectorial $\nabla \times (\phi \nabla U) = -\nabla U \times \nabla \phi$ se obtiene la expresión para el campo magnético en función de la distribución de conductividad eléctrica dentro del volumen "V"

$$B(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' U(r') \times \nabla' \nabla'(r')}{|r-r'|} dV' \quad (3.8.4)$$

Si se considera que el volumen utilizado es el subsuelo, entonces esta expresión es muy útil ya que puede ser resuelta descomponiendo la integral de volumen en una serie de integrales de superficie (suponiendo el subsuelo compuesto de capas) y se puede obtener el campo magnético de una manera relativamente fácil.

Para calcular analíticamente la componente vertical del campo magnético de un flujo de corriente confinado al semiespacio $z \geq 0$ sobre la superficie de éste se utilizará el método ideado por Stefanescu en 1958 que se explica a continuación. Considere un pequeño volumen "dv" sobre el punto "p" como muestra la figura (3.41):

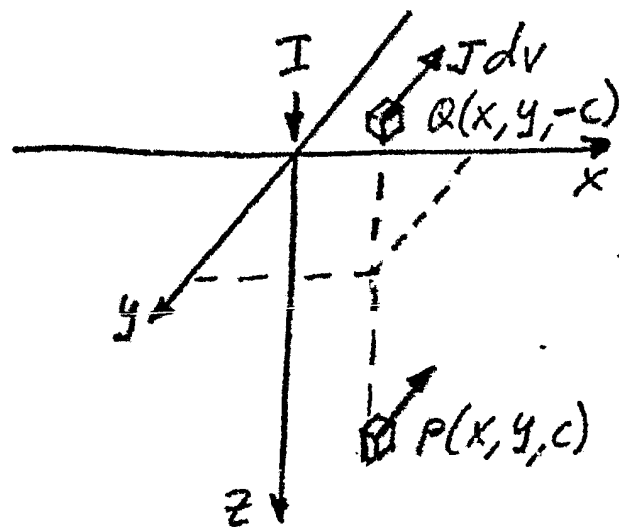


Fig. 3.41

este volumen contiene un elemento de corriente el cuyas componentes son $J_x dv$, $J_y dv$, $J_z dv$ respectivamente. Si se considera que todo el espacio tiene la misma distribución de conductividad, los elementos de corriente en el punto $P(x, y, z)$ y su imagen $Q(x, y, -z)$ (imagen con respecto al plano $z=0$) cambian quedando $\frac{1}{2}(J_x dv, J_y dv, J_z dv)$ y $\frac{1}{2}(J_x dv, J_y dv, -J_z dv)$ respectivamente debido a que la corriente se distribuye en todo el espacio. Es fácil ver que esta redistribución de corriente deja la componente vertical del campo magnético invariante sobre $z=0$; tal procedimiento lleva a pensar un flujo solenoidal de corriente con simetría axial sobre un eje horizontal en el plano $z=0$. Este problema puede ser resuelto utilizando la ley circuital de Ampere alrededor de un círculo sobre el eje de simetría. El campo magnético es fácilmente calculado como constante alrededor del círculo. Esto coincide con la componente vertical requerida sobre el plano $z=0$. La corriente a través del circuito es calculada usando una integral de superficie sobre una superficie convenientemente limitada por el círculo.

Las componentes horizontales " B_x " y " B_y " pueden ser calculadas analíticamente a partir de la componente vertical " B_z " por medio de las integrales de convolución de Steeels y Watson (1949). Las componentes " B_x " y " B_y " están relacionadas a " B_z " por medio de:

$$B_x(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{B_z(x', y', 0)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right\} dx' dy' \quad (3.8.5)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{B_z(x', y', 0)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right\} dx' dy' \quad (3.8.6)$$

Estas ecuaciones son válidas únicamente en la región $z \geq 0$ y como ya se dijo antes son integrales de convolución de manera que pueden ser evaluadas usando la teoría de las transformadas de Fourier. Para el caso bidimensional las transformadas de Fourier son:

$$F(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(px+qy)} dx dy \quad (3.8.7)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, q) e^{-i(px+qy)} dp dq \quad (3.8.8)$$

De la teoría de Fourier se sabe que la transformada de Fourier de una convolución de dos funciones en el tiempo es el producto de las transformadas de cada función:

$$\mathcal{F}\{f_1 * f_2\} = F_1 \cdot F_2 \quad (3.8.9)$$

en donde f_1, f_2 son las funciones en el dominio de la posición y F_1, F_2 son las transformadas de cada función; el signo "*" representa la operación convolución. Aplicando este teorema a las ecuaciones (3.8.7) y (3.8.8) se obtienen las expresiones en el dominio del número de onda para las componentes horizontales del campo magnético:

$$B_x(p, q; z) = - \frac{i p e^{\{-|z|(p^2+q^2)^{1/2}\}}}{(p^2+q^2)^{1/2}} B_z(p, q; 0) \quad (3.8.10)$$

$$B_y(p, q; z) = - \frac{i q e^{\{-|z|(p^2+q^2)^{1/2}\}}}{(p^2+q^2)^{1/2}} B_z(p, q; 0) \quad (3.8.11)$$

válidas únicamente para $z < 0$

Por otra parte, supongase un electrodo de corriente situado en la superficie $z=0$ de un semimedio de conductividad uniforme ∇ y alimentado con una corriente constante I . El campo magnético que se mide en la superficie consta de dos componentes: el campo debido al flujo de corriente en el cable que alimenta al electrodo y el campo debido al flujo de corriente en el semimedio producido por corrientes generadas en él (en el caso de que el semimedio fuera la tierra, serían las corrientes polares).

El gradiente de la conductividad es cero en cualquier punto excepto sobre el plano $z=0$, donde tiene únicamente una componente vertical $\partial \nabla / \partial z = \delta(z) \nabla$. Su producto vectorial con cualquier vector no puede tener componente vertical y por lo tanto, de la ecuación (3.8.4) se observa que el campo magnético normal no tiene componente vertical. De acuerdo a lo dicho anteriormente, de la ecuación (3.3.6) el potencial para un semiespacio homogéneo e isótropo es:

$$U(x, y, 0) = \frac{I}{2\pi \nabla (x^2+y^2)^{1/2}}$$

sustituyendo el valor de U y el de $\partial \nabla / \partial z$ en la ecuación (3.8.4) se obtiene para la componente x del campo normal sobre $z=0$

$$B_x^n(x, y, 0) = \frac{\mu I}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ \frac{1}{(x'^2+y'^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}} \right\} dx' dy'$$

Esta integral es resuelta interpretandola como una autocorrelación y aplicando el teorema (3.8.9) resulta:

$$B_x^n(p, q, 0) = \frac{\mu I}{2} \left(\frac{-iq}{p^2 + q^2} \right)$$

aplicando el teorema de la transformada inversa se obtiene el resultado deseado:

$$\begin{aligned} B_x^n(x, y, 0) &= \frac{\mu I}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-iq}{p^2 + q^2} e^{-i(px + qy)} dp dq = \\ &= -\frac{\mu I}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} iq e^{-iqy} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px}{p^2 + q^2} dp = \\ &= -\frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-|q|y} \operatorname{sen} qy dq = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.8.12) \end{aligned}$$

similarmente, la componente "y" del campo normal sobre $z=0$ está dada por

$$B_y^n(x, y, 0) = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (3.8.13)$$

III.8.2 Anomalia Magnetométrica de Resistividad

Supongase una componente del campo magnético debida a un flujo de corriente en el semimedio $z > 0$ que está siendo medida a lo largo de un perfil AA' distante l unidades del electrodo de corriente mostrado en la figura (3.42). El eje "x" es elegido paralelo a la línea AA' y formando un ángulo recto con el eje "y". El origen se considera situado en I y el perfil en $-l$. El ángulo β es positivo para $x > 0$. De la ecuación (3.8.12) la componente teórica del campo magnético normal a lo largo de AA' es:

$$B_x^n(0, -l, 0) = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{l}{l^2 + x^2} \quad (3.8.14)$$

teniendo su valor máximo en el centro del perfil

$$B_x^n(0, -l, 0) = \frac{\mu I}{l^2 + x^2} \quad (3.8.15)$$

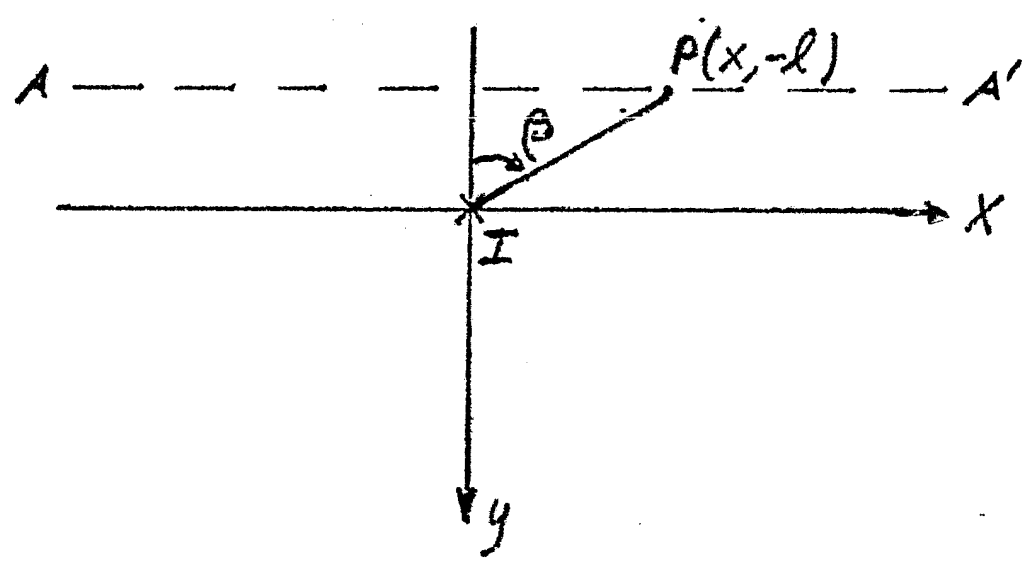


Fig. 3.42

Cualquier componente del campo magnético total medido a lo largo de AA' será $B_c(x, -l, 0)$. Los valores teóricos normales de esta componente a lo largo de AA' serán $B_c^n(x, -l, 0)$. De esta forma se define el campo magnético anómalo " B_c^a " como:

$$B_c^a(x, -l, 0) = B_c(x, -l, 0) - B_c^n(x, -l, 0) \quad (3.8.16)$$

y la anomalía magnetométrica de resistividad (ζ) como:

$$\zeta = 100 \frac{B_c^a(x, -l, 0)}{B_c^n(x, -l, 0)} \quad (3.8.17)$$

la anomalía magnetométrica de resistividad es por lo tanto básicamente el campo anómalo que está siendo expresado como un porcentaje de un valor único.

Semimedio estratificado uniforme y horizontal.

Para el caso de un medio estratificado, uniforme y horizontal claramente se observa que no existe anomalía ya que ∇V tiene únicamente una componente vertical en la interfaz

y entonces $\nabla \times \nabla U$ debe tener sólo componentes horizontales para cualquier "U".

III. 8. 3 Semimedio Estratificado Anisótropo

En este caso la densidad de corriente está dada por las ecuaciones (3.3.18), (3.3.19) y (3.3.20)

$$J_x = \frac{I \lambda}{2\pi} \frac{x}{(\lambda^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$J_y = \frac{I \lambda}{2\pi} \frac{y}{(\lambda^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$J_z = \frac{I \lambda}{2\pi} \frac{z}{(\lambda^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

La anomalía en el campo vertical es calculada usando el algoritmo de Stefanescu, donde el circuito de Ampere es tomado sobre el eje "x". La densidad de corriente en la dirección "x" debe ser dividida en dos partes; una parte normal J_x^n que genera el campo normal en el plano $z=0$ y una parte J_x^a anómala que genera el campo anómalo; entonces:

$$J_x^n = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{3.8.18}$$

por lo tanto

$$J_x^a = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{2x}{(\lambda^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \tag{3.8.19}$$

Si se hace $s^2 = y^2 + z^2$ entonces el algoritmo de Stefanescu se reduce a

$$2\pi y B_z^a = \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} J_x^a(s) 2\pi s ds$$

Integrando y sustituyendo la componente vertical anómala está dada por:

$$B_z^a(x, y, 0) = \frac{\mu I}{4\pi y} \left\{ \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{2x}{(2^2x^2+y^2)^{1/2}} \right\} \quad (3.8.20)$$

De esta forma, la anomalía magnetométrica de resistividad en el campo vertical a lo largo de AA', en $y = -l$ mostrada en la figura (3.38) para el caso de un medio estratificado anisótropo es, por lo tanto,

$$S = 100 \left\{ \frac{2x}{(2^2x^2+l^2)^{1/2}} - \frac{x}{(x^2+l^2)^{1/2}} \right\} \quad (3.8.21)$$

III.9 Parámetros y Funciones de Dar Zarrouck.

III.9.1 Introducción:

Los parámetros y funciones de Dar Zarrouck, fueron obtenidos y desarrollados por Raimond Mailliet en 1947. Dichos parámetros son de importancia básica en la teoría del sondeo eléctrico vertical y son de gran utilidad en la interpretación, por lo cual se analizan en esta sección.

Como se sabe, de las propiedades eléctricas de las rocas, un medio no posee igual resistencia al paso de la corriente eléctrica en cualquier dirección. A este fenómeno se le llama anisotropía, la cual se puede considerar dividida en tres partes: a) la microanisotropía; b) la macroanisotropía; y c) la pseudoanisotropía.

La microanisotropía como se menciona anteriormente es una propiedad física de los materiales, que se refiere al hecho en el cual la corriente eléctrica fluye más fácilmente en dirección de las capas; por ejemplo, en las capas de arcilla en donde los cristales planos, horizontalmente alineados están separados por láminas capilares de agua conduciendo así la corriente más fácilmente a lo largo de las capas que perpendicularmente a ellas. La macroanisotropía se encuentra relacionada con la alternancia repetida de dos facies diferentes litológicamente, como en los depósitos

sitos tipo flychs, en este caso la corriente eléctrica fluirá más fácilmente en dirección de las capas, utilizando los estratos conductores.

El efecto de la microanisotropía será similar al de la macroanisotropía si las dimensiones de los dispositivos de medición son mayores que el espesor de capas individuales.

Un teorema fundamental en la prospección eléctrica con corriente continua establece que una capa micro o macroanisótropa con coeficiente de anisotropía λ y espesor h es equivalente en sus efectos eléctricos exteriores, a una capa isotropa de espesor λh y resistividad media ρ_m donde:

$$\rho_m = \sqrt{\rho_t \rho_L} \tag{3.9.1}$$

$$\lambda = \sqrt{\rho_t / \rho_L} \tag{3.9.2}$$

combinando estas ecuaciones

$$\rho_t = \lambda \rho_m \tag{3.9.3}$$

$$\rho_L = \rho_m / \lambda$$

En su trabajo, Maillet puso de manifiesto que en la relación entre una capa anisótropa y su correspondiente capa isotropa, las siguientes cantidades permanecen invariantes:

- 1) El producto del espesor por la resistividad transversal.
- 2) El cociente del espesor entre la resistividad longitudinal.

Estas relaciones representan una nueva manera de caracterizar al medio, y lleva a considerar las siguientes integrales:

$$T(z) = \int_0^z \rho_t(z) dz = \int_0^z \lambda(z) \rho_m(z) dz \tag{3.9.4}$$

$$S(z) = \int_0^z \frac{dz}{\rho(z)} = \int_0^z \frac{\lambda(z)}{\rho_m(z)} dz \quad (3.9.5)$$

A la primera ecuación se le llamó variable de Dar Zarrouk ó resistencia transversal unitaria y a la segunda función de Dar Zarrouk ó conductancia longitudinal.

Un aspecto muy importante en cualquier ecuación son las dimensiones; en este caso T tiene dimensiones de resistividad por longitud al cuadrado (en el SI son $\Omega \cdot m^2$), las dimensiones de " S " son de conductancia (en el SI son V). Las ecuaciones anteriores se conocen con el nombre de parámetros de Dar Zarrouk. La interpretación física de los parámetros anteriores puede ser de cualquier forma confusa debido a que fueron definidos en forma generalizada pero si en lugar de suponer que la función $\rho = \rho(z)$ que caracteriza al medio geoelectrico puede ser de cualquier forma, la adoptamos con un conjunto de segmentos constantes, entonces se vuelve obvia la significación física de los parámetros de Dar Zarrouk.

Con lo anterior se propuso adoptar un medio geoelectrico como un medio horizontalmente estratificado y delimitado en el un prisma recto de sección cuadrada unitaria como muestra la figura (3.43)

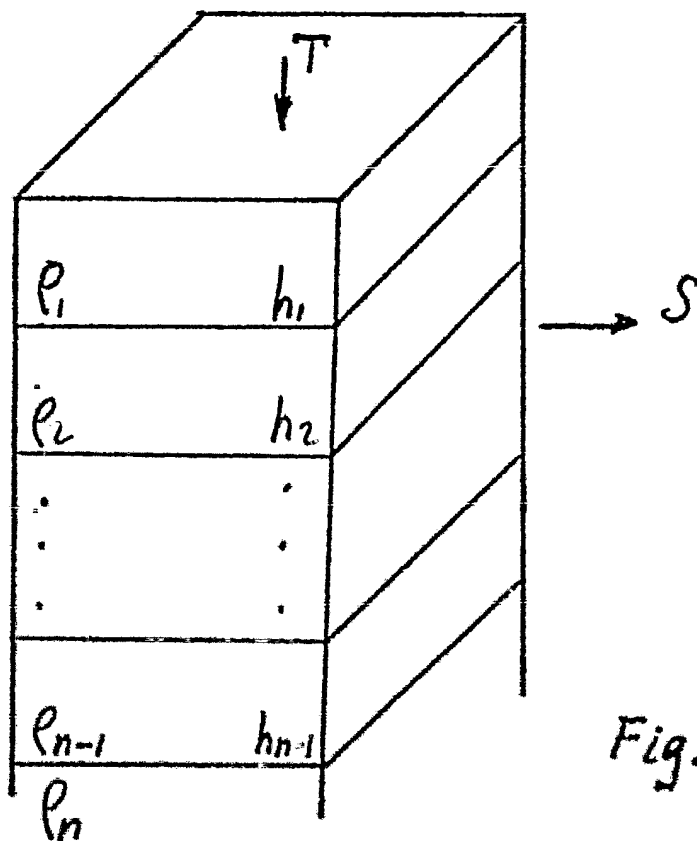


Fig. 3.43

Para este caso T mide la resistencia opuesta a una corriente eléctrica fluyendo perpendicularmente a la estratificación, - por lo que las capas se comportan como conductores en serie. La parte del prisma en la i -ésima capa presenta una resistencia eléctrica:

$$T_i = \rho_i h_i \quad (3.9.6)$$

Por la propiedad de aditividad de las resistencias en serie, la resistencia transversal total del prisma es:

$$T = \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i h_i \quad (3.9.7)$$

" S " mide la conductancia ofrecida a la corriente eléctrica - que fluye paralela a los estratos, los cuales se comportan como conductores en paralelo. La conductancia eléctrica de la i -ésima capa del prisma es:

$$S_i = h_i / \rho_i \quad (3.9.8)$$

Por la propiedad de la suma de las conductancias en paralelo, la conductancia longitudinal total del prisma es:

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} h_i / \rho_i \quad (3.9.9)$$

Las expresiones (3.9.6) a (3.9.9) representan la forma simplificada de los parámetros de Dar Zarrowk para medios estratificados.

Se puede ahora, a partir de T calcular la resistividad media del conjunto de capas medida perpendicularmente a la estratificación.

$$\rho_T = T/H \quad (3.9.10)$$

y la resistividad media paralela a la estratificación será

$$\rho_L = H/S \quad (3.9.11)$$

donde $H = \sum_{i=1}^{N-1} h_i$

De lo anterior se concluye que un medio estratificado es similar en sus efectos eléctricos exteriores a un medio anisótropo de resistividad media $\rho_m = \sqrt{\rho_T \rho_L}$ y anisotropía $\lambda = \sqrt{\rho_T / \rho_L}$. A este fenómeno se le denomina Pseudoanisotropía.

Por el teorema fundamental de la Prospección Eléctrica se sabe que un medio anisótropo es equivalente en sus efectos eléctricos exteriores a un medio isotrópico de parámetros

$$\rho_m = \sqrt{\rho_T \rho_L} = \sqrt{T/S} \quad \text{y} \quad L_m = \lambda H = \sqrt{TS} \quad (3.9.12)$$

Las expresiones anteriores (3.9.6) al (3.9.12) admiten una representación gráfica simple, un sistema coordenado logarítmico por medio de dos líneas oblicuas de pendiente unitaria, y que forman un triángulo isosceles ZHJ conocido como triángulo de anisotropía como muestra la figura (3.44)

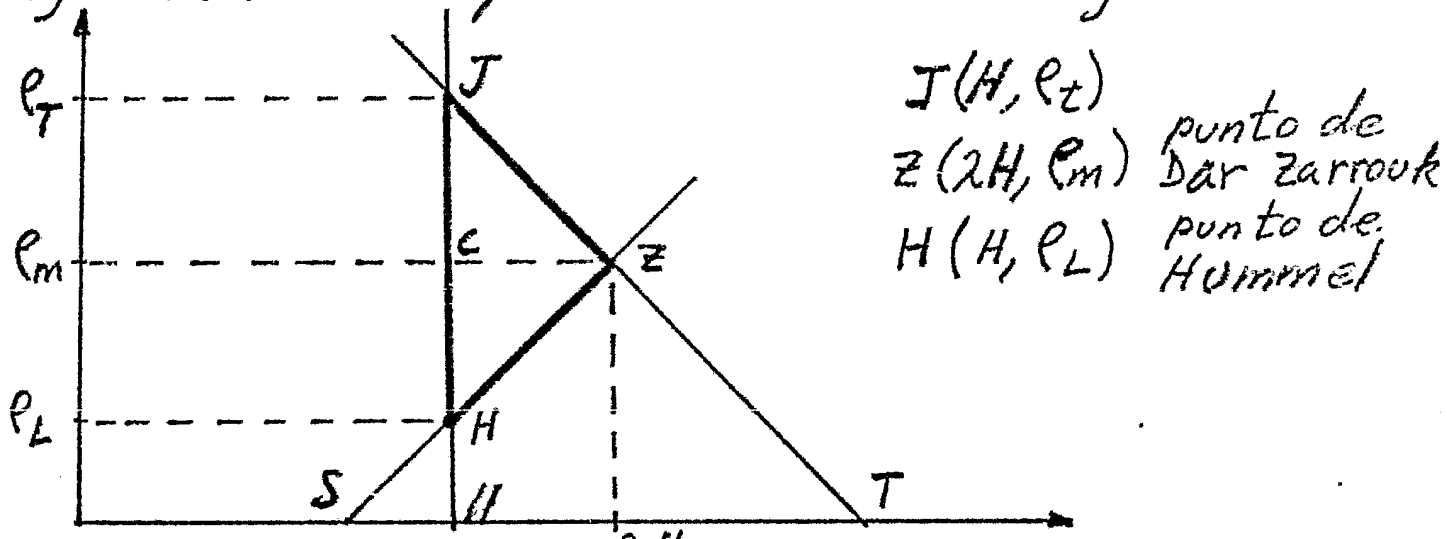


Fig. 3.44 λH

III. 9.2 Curvas de Dar Zarrouck

Para el caso de las expresiones simplificadas de los parámetros de Dar Zarrouck para medios estratificados es también posible establecer "T" y "S" como funciones de z. Para ello, si las primeras "n" capas tienen un espesor total z_n , una resistencia transversal T_n y conductancia longitudinal S_n , entonces -- dentro de la capa subyacente son válidas las ecuaciones:

$$T = T_n + (z - z_n) \rho_{n+1} \quad (3.9.13)$$

$$S = S_n + \frac{(z - z_n)}{\rho_{n+1}}$$

que representan las ecuaciones paramétricas de la curva de Dar Zarrouk $S = S(T)$ para medios estratificados. Usando las ecuaciones (3.9.13) es posible generalizar las expresiones (3.9.12) como ecuaciones paramétricas de una curva -- $\rho_m = \rho_m(\lambda z) = \rho_m(L_m)$ que representa la variación de la resistividad media ρ_m y el pseudoespesor L_m con la profundidad z para un medio estratificado dado. Esta curva que podría llamarse "curva de resistividades medias", prefiere denominarse "curva de Dar Zarrouk" por su dependencia respecto a las funciones $T(z)$ y $S(z)$, y, porque es posible demostrar que ambas admiten representación gráfica común.

III.9.3 Ecuación general y propiedades de las curvas de DZ .

Para cualquier punto de una curva de Dar Zarrouk en su representación logarítmica, las coordenadas lineales "X" y "Y" serán:

$$\begin{aligned} X &= \ln(L_m) = \frac{1}{2}(\ln T + \ln S) \\ Y &= \ln(\rho_m) = \frac{1}{2}(\ln T - \ln S) \end{aligned} \quad (3.9.14)$$

si se consideran las ecuaciones (3.9.13) se tiene que:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2} \frac{S\rho^2 - T}{T\rho S} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} \frac{S\rho^2 + T}{T\rho S} \quad (3.9.15)$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho^2 - \rho_m^2}{\rho^2 + \rho_m^2} \quad (3.9.16)$$

que representa la ecuación diferencial o la pendiente del arco de la curva de Dar Zarrouk correspondiente a una capa de resistividad ρ . Si se integra la ecuación (3.9.16) se obtiene:

$$K(L_m) = \frac{\rho_m}{\rho_m^2 - \rho^2} \quad (3.9.17)$$

que es la ecuación general buscada para la curva de Dar Zarrouk. De las ecuaciones (3.9.15) a (3.9.17) es posible deducir las siguientes propiedades de las curvas de Dar Zarrouk en su representación logarítmica:

- a) A un medio estratificado de "N" capas le corresponde una CDZ de "N" arcos, los cuales se unen en puntos angulosos que representa la transición de una capa a otra.
- b) El arco DZ correspondiente a la primera capa ($t_1=1, \rho_1=\rho$) del medio es una línea recta horizontal con $\rho_m=1, L_m=1$.
- c) Cada arco de DZ tiene una asíntota horizontal por la derecha de ordenada $\rho_m=\rho$ cuando L_m crece indefinidamente.
- d) Los arcos DZ ascendentes tienen concavidad hacia abajo y los descendentes concavidad hacia arriba.
- e) En dos casos la CDZ se convierte en una línea recta, cuando $\rho_n=0$ y $\rho_n \rightarrow \infty$. En el primer caso la línea recta tiene pendiente -1 y pasa por el punto de abscisa $T = \sum_{i=1}^n h_i \rho_i$. En el segundo caso la pendiente es $+1$ y la línea recta corta al eje de abscisas en $S = \sum_{i=1}^n h_i / \rho_i$.
- f) Cualquier arco de una curva de DZ puede ser obtenido desplazando sobre el gráfico logarítmico una de las curvas fundamentales de Dar Zarrouk que corresponden respectivamente a los casos en que el parámetro "k" de la ecuación general de DZ es positivo ó negativo.
- g) Las curvas DZ satisfacen el principio de equivalencia. Por medio de los parámetros y curvas DZ es posible plantear con mayor claridad el fenómeno de que medios estratificados diferentes dan lugar a curvas D.Z. y de resistividad aparente idéntica entre sí, para ello se hace uso de los conceptos de equivalencia en T y S, que pueden establecerse como sigue:
 - 1) Cuando una capa del medio estratificado es de poco espesor y mucho más resistiva que los adyacentes, tiene una conductancia longitudinal mucho menor que la total S_n de las capas suprayacentes, entonces puede dividirse su espesor y multiplicarse su resistividad por un número mayor de 1 dejando invariable la resistencia transver-

sal T_i de la capa y sin que la CDZ del medio en su conjunto modifique apreciablemente; a este fenómeno se le denomina equivalencia en T.

2) Cuando una capa del medio estratificado es de poco espesor y mucho más conductora que las adyacentes, tiene una resistencia transversal T_i mucho menor que la total T_n de las capas supradyacentes entonces, puede multiplicarse su espesor y resistividad por un mismo número mayor que 1, dejando invariable la conductancia longitudinal de la capa y sin que la curva de DZ del medio se altere considerablemente; a este fenómeno se le denomina equivalencia en S.

En resumen, se puede decir que modificaciones importantes en los parámetros de un medio estratificado pueden reflejarse de manera poco notoria en la CDZ. Si se trabajase con datos totalmente exactos entonces, cualquier alteración en las CDZ serviría para identificar los cambios en los parámetros del medio estratificado pero, como la precisión de los datos empíricos es limitada entonces a una CDZ pueden corresponderle medios estratificados diferentes.

III. 9. 4 Construcción e Inversión de CDZ.

La construcción e inversión de curvas de DZ puede llevarse a cabo mediante el cálculo numérico de los puntos extremos de cada arco de DZ, es decir, considerando cada capa del medio como una unidad, para ello se emplean las ecuaciones (III. 9. 12) reescritas como:

$$L_{mj} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^j \rho_i h_i \right) \left(\sum_{i=1}^j h_i / \epsilon_i \right)}$$

$$\rho_{mj} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^j \rho_i h_i}{\sum_{i=1}^j \frac{h_i}{\epsilon_i}}}$$

(3. 9. 18)

estas ecuaciones presentan la desventaja de que aquellas capas del medio estratificado que tienen mucho espesor, están representadas por arcos de DZ muy largos y por tanto tienen puntos extremos muy separados dificultándose la construcción del arco correspondiente por interpolación. La construcción exacta de las CDZ puede lograrse calculando puntos intermedios para cada arco de DZ empleando la siguiente fórmula que relaciona ρ_m y L_m directamente

$$\rho_m = \frac{-L_{mj-1}(\rho_j^2 - \rho_{mj-1}^2) + \sqrt{[L_{mj-1}(\rho_j^2 - \rho_{mj-1}^2)]^2 + 4(L_m \rho_{mj-1} \rho_j)^2}}{2L_m \rho_{mj-1}} \quad (3.9.19)$$

esta ecuación permite calcular puntos intermedios del j -ésimo arco de DZ para la j -ésima capa de resistividad ρ_j , el cual comienza en el punto con coordenadas de DZ (L_{mj-1}, ρ_{mj-1}) que son las coordenadas del punto extremo del $(j-1)$ -ésimo arco de DZ y que representan la resistividad media y pseudo espesor de la capa homogénea e isotrópica equivalente que sustituye al medio estratificado hasta la profundidad $H = \sum_{i=1}^j h_i$. Las fórmulas de inversión de curvas de DZ permiten obtener los medios estratificados para los que fueron calculadas dichas curvas y son:

$$\rho_j = \sqrt{\frac{L_{mj} \rho_{mj} - L_{mj-1} \rho_{mj-1}}{\frac{L_{mj}}{\rho_{mj}} - \frac{L_{mj-1}}{\rho_{mj-1}}}} \quad (3.9.20)$$

$$h_j = \rho_j \left[\frac{L_{mj}}{\rho_{mj}} - \frac{L_{mj-1}}{\rho_{mj-1}} \right]$$

Sustituyendo en (3.9.20) las coordenadas de dos puntos de DZ sucesivos se obtienen el espesor y resistividad de la j -ésima capa que genera el segmento de arco de DZ entre los puntos j y $(j-1)$ -ésimo.

III. 9.6 Construcción gráfica de la CDZ

La CDZ correspondiente a un corte geoelectrico determinado puede trazarse siguiendo dos métodos diferentes que son el método de Orellana y el método de Zohdy.

Método de Orellana

El método de Orellana se basa en una propiedad muy interesante de las CDZ: todos sus arcos son segmentos de una de las dos curvas fundamentales (Orellana 1963). Para la utilización de este método es necesario disponer de un ábaco en el que figuren las dos curvas básicas de DZ: ascendente y descendente, así como dos rectas S y T de pendientes respectivas +1 y -1 como muestra la figura (3.44). Estas curvas se grafican sobre papel bilogaritmico calculandolas de la ecuación (4.3.19) dando a ϵ y ρ valores fijos arbitrarios.

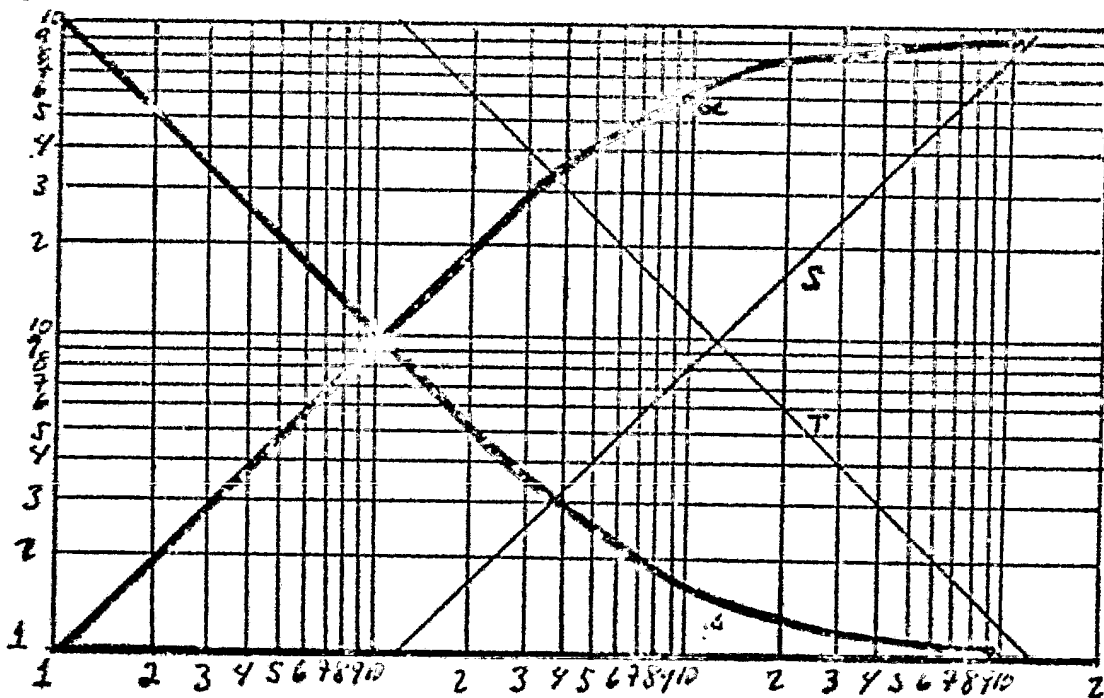


Fig. (3.44)

Para trazar la CDZ se necesita que el corte esté normalizado, ó sea, que todas las resistividades de las diferentes capas sean divididas entre la resistividad de la primera capa y que todos los espesores sean divididos entre el espesor de la primera capa. También se necesita papel bilogaritmico transparente de la misma escala que el ábaco utilizado. Los pasos que se siguen para trazar la CDZ son:

- 1) En el papel bilogaritmico transparente se dibuja la gráfica de $\rho(z)$ contra Z ($\rho(z)$ normalizado).

- 2) El primer arco de DZ coincide con la recta $\rho=1$ y termina en $L_m = \lambda H = 1$ (λH recibe el nombre de pseudo espesor y se simboliza como L_m).
- 3) Se desplaza el papel bilogarítmico sobre el ábaco (conservando paralelismo con los ejes) hasta hacer coincidir la asíntota de una de las dos curvas (ascendente ó descendente) con la recta ρ_2 (de la curva de resistividades verdaderas) y que la curva pasa por el punto $(1, 1)$ y se calca.
- 4) Se calcula el valor de $S_1 + S_2$ y se coloca en el eje de las abscisas y de ahí se traza una recta de pendiente igual a $\frac{1}{2}$ hasta cortar la curva en el punto "p" que es el extremo del segundo arco de la CDZ y comienzo del tercero.
- 5) Se procede repetitivamente para las capas siguientes.

IV TEORIA DEL SONDEO ELECTRICO

IV.I Definición y Generalidades

Se llama sondeo eléctrico a una serie de determinaciones de resistividad aparente, efectuadas con el mismo tipo de dispositivo y separación creciente entre los electrodos de emisión y recepción. Existen dos tipos de sondeos eléctricos: los sondeos eléctricos verticales (SEV) y los sondeos eléctricos dipolares (SED). El sondeo eléctrico vertical tiene separación creciente entre los electrodos de corriente y potencial como muestra la figura 4.1

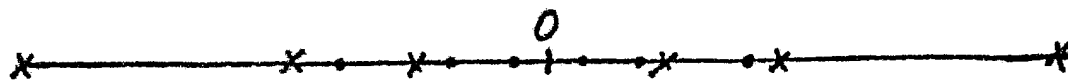


Fig. 4.1

El sondeo eléctrico dipolar tiene un incremento en la distancia entre los centros de los dipolos de corriente y de potencial como muestra la figura (4.2)

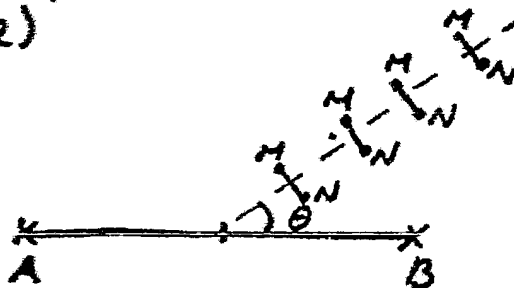


Fig. 4.2

Los datos de resistividad aparente obtenidos en cada sondeo eléctrico se representan por medio de una curva en función de una distancia y que recibe el nombre de curva de resistividades aparentes. Para el SEV esta curva está en función de la separación entre electrodos $\rho_a = \rho_a(\overline{AB}, \overline{MN})$ y en el caso del SED la curva de resistividades aparentes está en función de la separación entre los centros de los dipolos $\rho_a = \rho_a(R)$.

El punto de atribución en los SEVs es el centro de simetría del dispositivo (scan simétricos ó no). En los SEDs el punto de atribución es el centro del dipolo de corriente.

En los incisos que siguen se hablará solamente del sondeo

eléctrico vertical por ser el más utilizado en la práctica.

IV.1.1 Sondeo Electrico Vertical

El SEV denominado así en la prospección eléctrica sus iniciales derivan del ruso "VEZ" (Vertikal'noe Elektricheskoe Sondirovanie) y del inglés "VES" (Vertical Electrical Sounding); su uso en la prospección como método indirecto en el campo sirve para analizar y estudiar la distribución vertical de resistividades aparentes bajo un punto deseado.

La eficiencia de los resultados de los datos que se proporcionen redundará en beneficio y prestigio del geofísico, aunado a la experiencia que se va adquiriendo en el uso del mismo en campañas subsiguientes; por lo que es conveniente y recomendable hacerlo cuidadosamente para evitar repeticiones de trabajo, es necesario tener bien claro lo que se pretende hacer y apoyarse en las bases teóricas que para cada caso sea utilizado el SEV. Como se verá más adelante es de un extenso uso práctico para los estudios e investigaciones de apoyo para otras ramas de la ingeniería como son: Investigación Petrolera, Investigaciones Hidrogeológicas, Ingeniería Minera, Ingeniería Civil, Ingeniería Geológica, Sondeos de gran profundidad y Sondeos oceánicos.

Al abordar el tema se observa que se está trabajando en un problema directo, (esto es, se tiene el modelo físico conocido y con ayuda de diferentes dispositivos se obtiene su comportamiento representado por curvas de resistividades aparentes obtenidas durante el sondeo.

Por lo que corresponde a la interpretación de dichas curvas se tomará el modelo del problema inverso en donde el geofísico se encuentra en la posibilidad de analizar las curvas de resistividades aparentes obtenidas y dar a conocer los resultados factentes de la zona estudiada.

El sondeo eléctrico en términos generales es la medición de una serie de resistividades aparentes hechas con un mismo dispositivo y que estas resistividades dan como resultado un patrón característico de cada zona sondeada por lo que el diseño y tipo de dispositivo se ha de seleccionar con anterioridad a la campaña.

na que se vaya a efectuar ya que el tipo de dispositivo requerirá de separación creciente entre los electrodos de emisión y los electrodos de recepción.

Bajo estas primicias se puede definir al "SEV" como el dispositivo ya sea simétrico ó asimétrico, con un electrodo en el infinito y durante la medición permanecen fijos el azimut del dispositivo y el centro del segmento MN ó electrodos de potencial ó de recepción.

En el presente capítulo se hablará de los dispositivos Wenner, en el que la configuración de electrodos permanece siempre geoméricamente semejante; y el dispositivo Schlumberger, en el que la distancia de los electrodos de potencial ó de recepción MN se les considera prácticamente nula frente a los electrodos de corriente ó emisión AB.

Cuando es utilizado el dispositivo Schlumberger, las resistividades aparentes R_a se llevan en ordenadas y en abscisas las distancias $OA = AB/2$; en un gráfico logarítmico.

Cuando es utilizado el dispositivo Wenner, se llevan en abscisas los valores sucesivos de la distancia "a". Las escalas sobre ambos ejes han de ser logarítmicas, esto es, por razones teóricas y prácticas en ambos casos. A la curva así obtenida, se le llama curva del SEV.

Es pertinente aclarar que la eficacia del método corresponde al caso en que los sondeos se efectúan sobre un terreno compuesto por capas lateralmente homogéneas en lo que respecta a la resistividad, y limitadas por planos paralelos a la superficie del terreno (medio estratificado). La experiencia demuestra que los resultados teóricos obtenidos para medios de esta clase, son válidas para estratos menores de 30° ; así como se verá que esta eficacia es también afectada por diversos parámetros inherentes a los medios sondeados.

IV.2 Cortes Geoeléctricos

Un corte geoeléctrico es la especificación de espesores y resistividades de cada medio parcial homogéneo e isótropo de extensión lateral indefinida (llamado capa geoeléctrica) que

componen un medio estratificado; gráficamente:

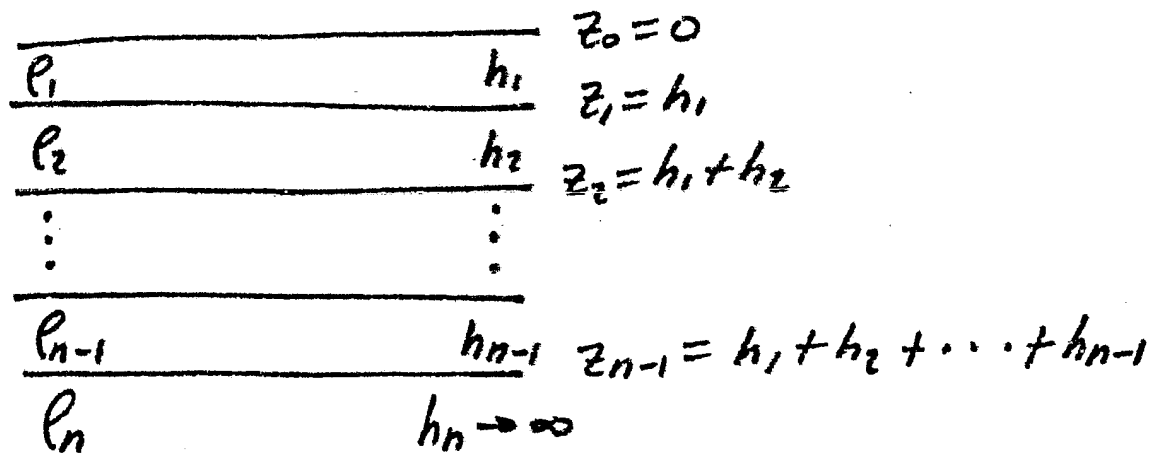
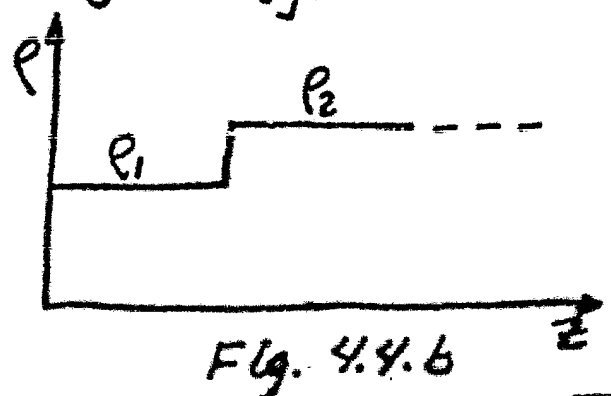
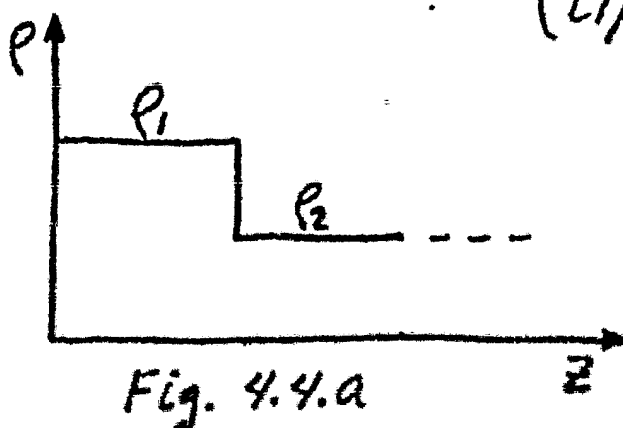


Fig. 4.3

De esta figura se observa que el número de parámetros necesarios para conocer el corte geoelectrico es $2n-1$. Si se dibujan sobre papel bilogarítmico, en un eje horizontal las resistividades y en un eje vertical las profundidades se obtiene una curva llamada curva de resistividades verdaderas. De esta forma la curva de resistividades verdaderas (CRV) puede clasificarse según el número de capas que tenga el corte:

Cortes de dos capas {
 ascendente $\rho_1 < \rho_2$ Fig. 4.4.a
 descendente $\rho_1 > \rho_2$ Fig. 4.4.b

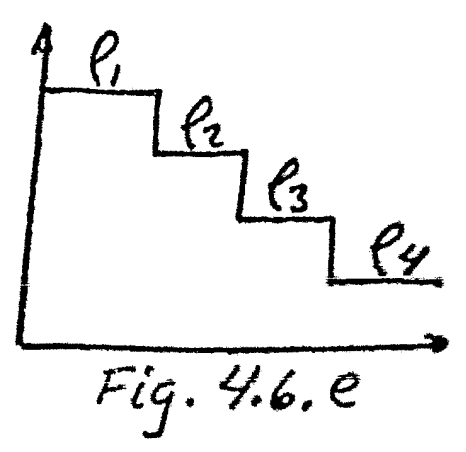
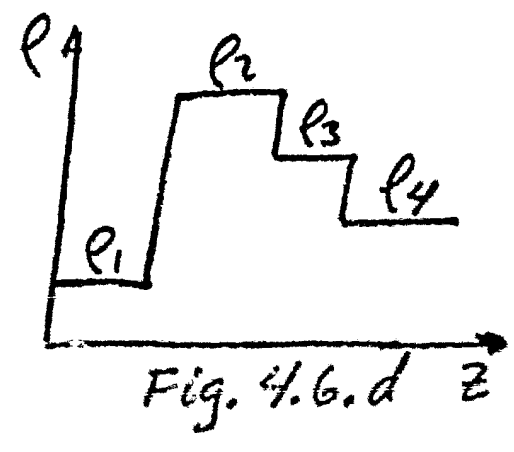
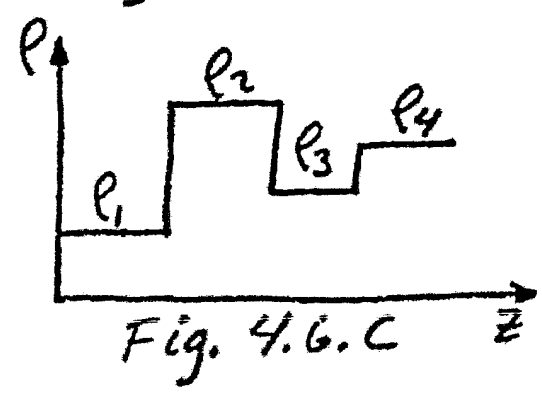
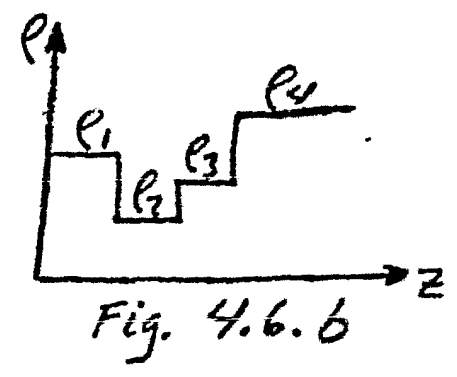
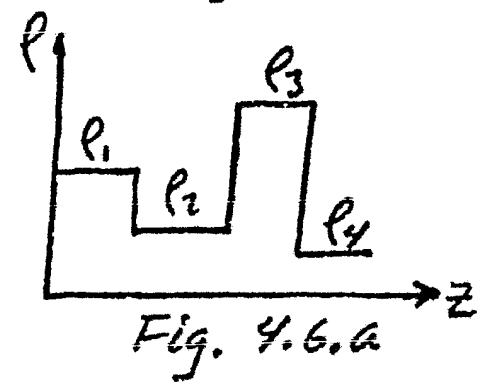
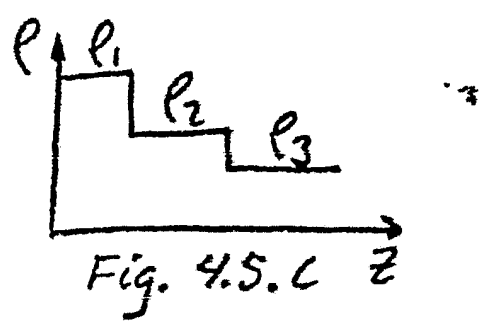
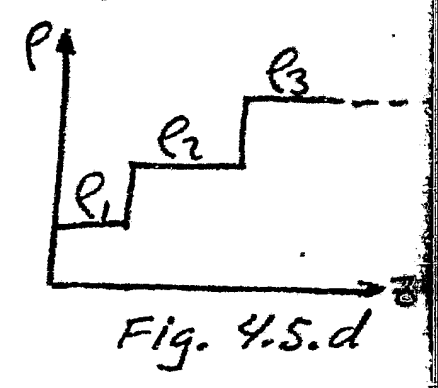
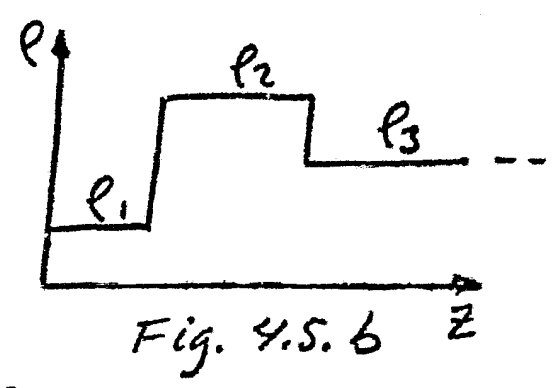
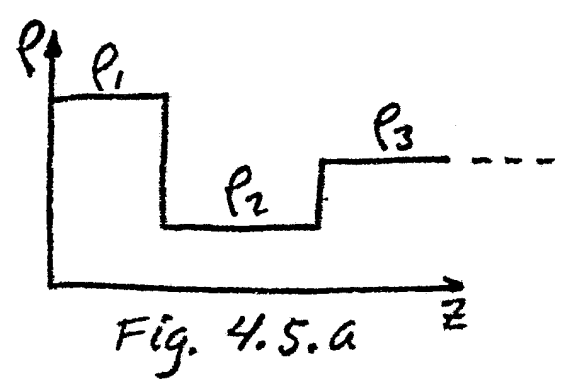
Cortes de tres capas {
 tipo H: $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ Fig. 4.5.a
 tipo K: $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$ Fig. 4.5.b
 tipo Q: $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ Fig. 4.5.c
 tipo A: $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ Fig. 4.5.d.



cortes de 4 capas

- tipo HK: $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3 > \rho_4$
- tipo HA: $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$
- tipo KH: $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3 < \rho_4$
- tipo KA: $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3 > \rho_4$
- tipo QQ: $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \rho_4$
- tipo QH: $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 < \rho_4$
- tipo AK: $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 > \rho_4$
- tipo AA: $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$

- Fig. 4.6.a
- Fig. 4.6.b
- Fig. 4.6.c
- Fig. 4.6.d
- Fig. 4.6.e
- Fig. 4.6.f
- Fig. 4.6.g
- Fig. 4.6.h



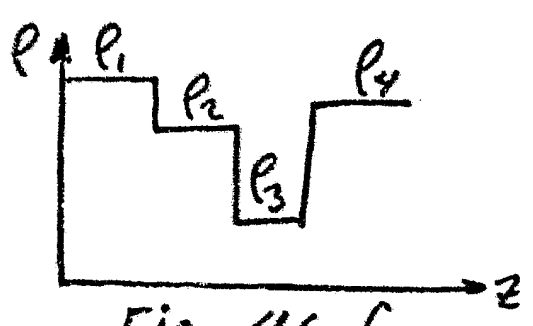


Fig. 4.6.f

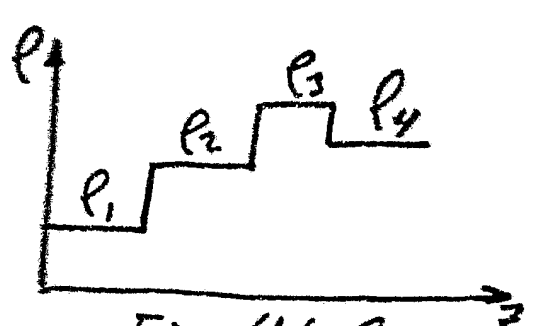


Fig. 4.6.g

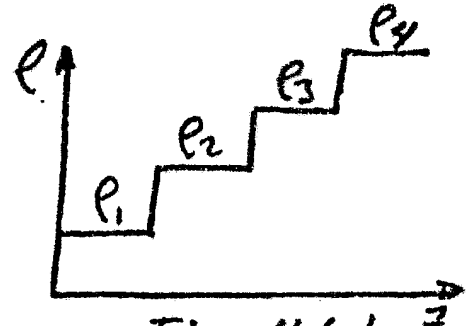


Fig. 4.6.h

IV.3 Funciones Kernel

Hay un número de procedimientos matemáticos que han sido usados en el cálculo de campos potenciales en medios estratificados, el procedimiento más simple es el uso de óptica geométrica, basada en muchos hechos al respecto; las corrientes eléctricas tienen un comportamiento similar al de los rayos de luz. Un segundo procedimiento es buscar una solución especial al Laplaciano que satisfaga un apropiado número de condiciones de contorno. El tercero es integrar directamente el Laplaciano.

IV.3.1 Método de las Imágenes.

Una analogía puede ser dibujada entre el camino en el cual viaja la corriente a través de la tierra y el camino de los rayos de luz al propagarse en el espacio. Por ejemplo, la densidad de flujo de corriente de un punto fuente, varía con el inverso del cuadrado de la distancia. Los rayos de luz se comportan similarmente, decreciendo de intensidad con el cuadrado de la distancia recorrida. Esta analogía no prueba que los principios de óptica geométrica puedan ser usados para resolver problemas en el flujo de corrientes eléctricas, pero se puede tratar de resolver el problema óptico y ver si la solución satisface los requerimientos para una función de potencial eléctrico; si lo es, se tendrá una solución válida para el problema eléctrico. Esto no prueba que la analogía óptica sea necesariamente válida para cualquier problema de potencial eléctrico. De hecho, la analogía óptica es aplicada a un limitado número de problemas, de los cuales el problema de la primera capa es uno de ellos.

Al establecer la analogía óptica, las fuentes de corriente son reemplazadas con fuentes de luz y los planos que sepa-

ran las regiones con diferente resistividad son reemplazados con espejos semi transparentes. Luego la correlación entre los coeficientes de reflexión y transmisión, y la resistividad de las capas debe ser establecida.

Esto puede hacerse considerando un espacio dividido en dos medios seminfinitos; cada uno con su propia resistividad, como se muestra en la figura 4.7. Considere una fuente de corriente en el punto A, localizado a una distancia h , del plano de separación entre los dos medios semi-infinitos. La resistividad en uno de los lados es ρ_1 y en el otro ρ_2 . La función potencial debe satisfacer las siguientes condiciones:

- 1) La función potencial V , debe ser continua a través del límite entre los dos medios, sino fuera así, habría una diferencia de potencial infinita sobre una distancia corta a través del límite, lo cual correspondería a un gradiente de potencial infinito. De acuerdo a la ley de Ohm esto traería como resultado una densidad de corriente infinitamente grande, lo cual no es posible.
- 2) La componente normal del flujo de corriente a través del límite debe ser continua. Esta condición es consecuencia del hecho de que la corriente se conserva (toda la corriente que entra en un lado del plano límite debe salir del otro), la componente paralela al límite no necesariamente debe ser continua, y en general, es discontinua a través del límite cuando la resistividad en los dos lados es igual.

Considere ahora una analogía óptica para el problema descrito en la figura 4.7

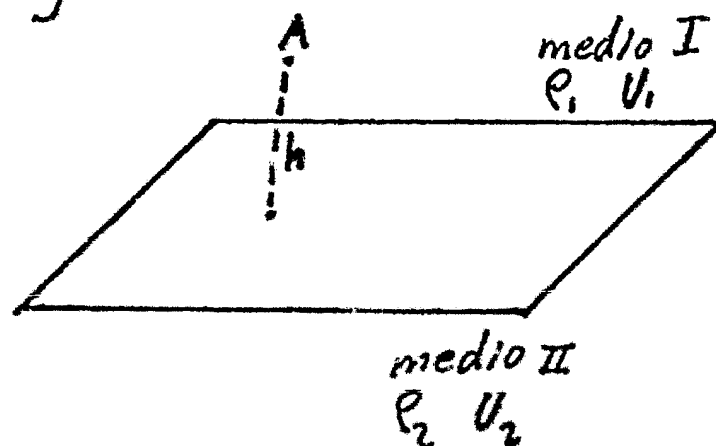


Fig 4.7

La fuente de corriente en el punto A es reemplazada con una fuente de luz y el límite es reemplazado por un espejo con coeficiente de reflexión H y un coeficiente de transmisión $1-K$. Si la luz es vista desde el punto M_1 , en el lado superior del espejo (figura 4.8.a), la fuente original es vista con toda su intensidad y, en suma, una fuente imagen es vista, reflejada desde el espejo. Esta fuente imagen aparece localizada abajo del espejo a una distancia h y tiene una intensidad I' .

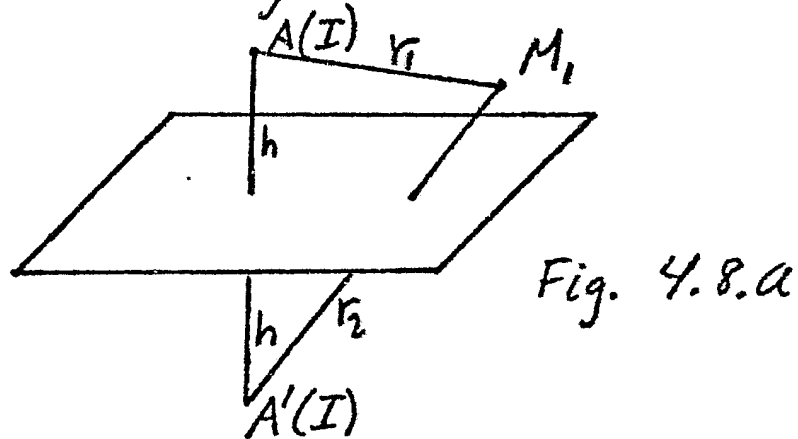


Fig. 4.8.a

Si la luz es vista desde el lado oscuro del espejo (figura 4.8.b); sólo la fuente primaria es observada con intensidad reducida. Esto sugiere que se debe buscar una función para dos funciones potenciales, una de ellas válida arriba del plano, y la otra válida abajo del plano. Estas funciones serán forzadas a igualarse en la frontera.

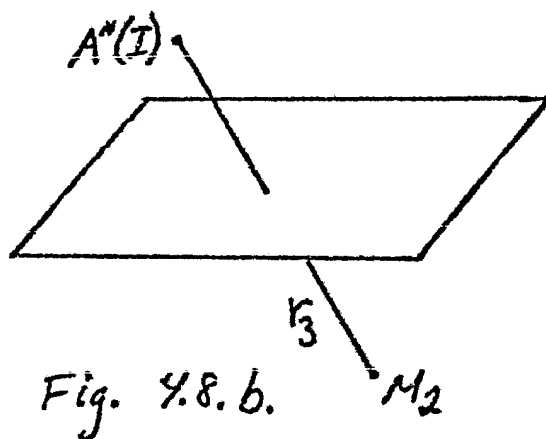


Fig. 4.8.b.

La función potencial para la región arriba del plano límite, consiste de la suma de dos términos, uno representa la contribución de la fuente primaria y el otro representa la contribución de la fuente imagen.

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{4\pi r_1} + \frac{\rho_1 I'}{4\pi r_2} \quad (4.3.1)$$

La función potencial para el área abajo del plano límite consiste de un término representando la contribución de la fuente original vista oscuramente a través del espejo.

$$U_2 = \frac{\rho_2 I''}{4\pi r_3} \quad (4.3.2)$$

A lo largo del límite, las dos funciones potenciales deben tener el mismo valor numérico de acuerdo a la condición N°1. En un punto de observación M , a lo largo del plano límite, las distancias r_1, r_2, r_3 serán iguales, por la primera condición se tiene:

$$U_1 = U_2 \quad \frac{\rho_1}{4\pi r_1} (I + I'') = \frac{\rho_2 I}{4\pi r_3}$$

$$\rho_1 (I + I'') = \rho_2 I \quad (4.3.3)$$

La segunda condición requiere que la componente de la densidad de corriente normal al plano límite, J_n , debe ser la misma en ambos lados del límite:

$$J_{n,1} = J_{n,2} \quad \text{en el límite}$$

La densidad de corriente es relacionada a las funciones potenciales U_1 y U_2 usando la ley de Ohm. En un punto M , en el medio 1, el vector densidad de corriente es la suma de dos vectores componentes, uno debido a la fuente primaria y el otro debido a la fuente imagen.

$$J_1 = \frac{I}{4\pi r_1^3} r_1 + \frac{I'}{4\pi r_2^3} r_2 \quad (4.3.4)$$

Sea θ_1 el ángulo entre la dirección r_1 y la normal a la superficie; entre la dirección r_2 y la normal a la superficie, θ_2 . Luego, la componente de corriente normal a la superficie en el medio uno es:

$$J_{1,n} = \frac{I \cos \theta_1}{4\pi r_1^2} + \frac{I' \cos \theta_2}{4\pi r_2^2} \quad (4.3.5)$$

En el medio inferior, hay sólo una componente de la densidad de corriente, debido a la fuente primaria con un decrecimiento de intensidad dado por:

$$J_2 = \frac{I''}{4\pi r_3^3} r_3 \quad (4.3.6)$$

la componente normal en el límite es:

$$J_{2,n} = \frac{I'' \cos \theta_3}{4\pi r_3^2} \quad (4.3.7)$$

donde θ_3 está definido como el ángulo entre la dirección r_3 y la normal a la superficie. En la superficie $J_{1,n}$ debe ser igual a $J_{2,n}$. Las tres distancias r_1, r_2, r_3 son iguales a lo largo del límite, de tal manera que:

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos \theta_3$$

$$I - I' = I'' \quad (4.3.8)$$

La cantidad desconocida I'' puede ser eliminada de las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.8)

$$\rho_1(I + I') = \rho_2(I - I')$$

$$I' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} I = K_{1,2} I \quad (4.3.9)$$

donde $K_{1,2}$ tiene el significado de un coeficiente de reflexión para el límite cuando es visto desde el medio uno. Una solución similar para I'' en términos de I está dada por:

$$I - KI = I''$$

$$I'' = (1 - K) I \quad (4.3.10)$$

Los problemas de límite simple sirven sólo como un medio para identificar el significado de un coeficiente de reflexión ó transmisión en términos de contraste de resistividad. Ahora

se procederá con el problema de dos límites horizontales, también conocido como el problema simple de la primera capa. La geometría del problema es mostrada en la figura 4.9 una capa con espesor t y resistividad ρ_1 , está limitada por dos planos paralelos separados de un espacio semi-infinito con resistividad ρ_2 . El espacio superior es la atmósfera, pero esto no se necesita considerar en la formulación del problema. Una fuente de corriente A , está localizada a una profundidad h , debajo del plano superior, y un punto de observación M , está localizado a la misma distancia h abajo del plano superior, pero a una distancia horizontal "a" de la fuente de corriente. En la práctica la fuente de corriente y el punto de medida se suponen localizados en el límite superior

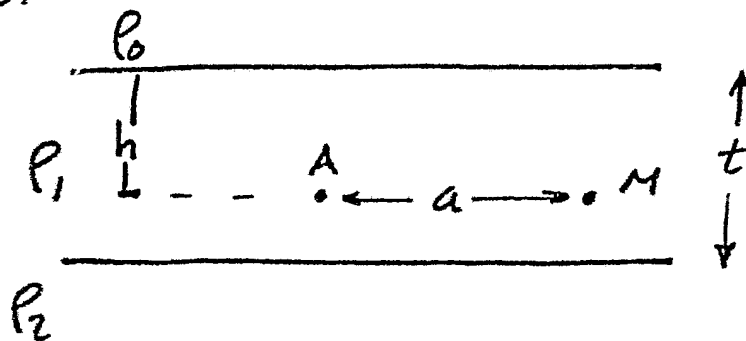


Fig. 4.9

el potencial en el punto M debido a A es:

$$V_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi a} \quad (4.3.11)$$

Si cada uno de los planos límites es reemplazado con un espejo semitransparente con coeficientes de reflexión definidos en (4.3.9), un observador en el punto M verá imágenes de la fuente primaria reflejadas de ambos límites (superior e inferior) como se muestra en la figura (4.10). La intensidad aparente de la fuente imagen superior es $IK_{1,0}$ donde $K_{1,0}$ es la reflectividad del plano superior cuando es visto de abajo. La intensidad aparente de la fuente imagen inferior es $IK_{1,2}$, donde $K_{1,2}$ es la reflectividad del plano inferior visto desde arriba. Las contribuciones a la función potencial en el punto M de estas imágenes son:

$$V_1^{(0)} = \frac{\rho_1 I K_{1,0}}{4\pi (a^2 + 4h^2)^{1/2}} \quad (4.3.12)$$

$$U_1^{(2)} = \frac{\rho_1 I K_{1,2}}{4\pi (a^2 + 4(t-h)^2)^{1/2}} \quad (4.3.12)$$

donde el superíndice se refiere al medio en el cual la fuente imagen parece estar y el subíndice indica que este es el primero en una serie de imágenes. La serie de imágenes se suceden como en el caso óptico; no hay límite al número de imágenes formadas por múltiple reflexión de rayos de luz entre los dos espejos. Considerando solamente las trayectorias en las cuales el primer salto está fuera del plano inferior, se puede examinar el comportamiento de imágenes por múltiple reflexión (Fig. 4.11). Para una trayectoria con una reflexión de cada plano la fuente imagen parece estar en el medio 0, y tiene una intensidad $I K_{1,2} K_{1,0}$. La contribución al potencial total en el punto M de esta imagen es:

$$U_2^{(0)} = \frac{\rho_1 I K_{1,2} K_{1,0}}{4\pi (a^2 + 4t^2)^{1/2}} \quad (4.3.13)$$

La trayectoria de los rayos con dos reflexiones del plano superior e inferior está mostrada en la figura 4.11.b; la magnitud de la imagen es reducida en cada reflexión por el correspondiente coeficiente de reflexión tal que la magnitud de la imagen es $I K_{1,2}^2 K_{1,0}^2$. La imagen parece estar a una distancia $2t$ más arriba del plano superior que la imagen presente. La contribución al potencial M debido a esta imagen es:

$$U_3^{(0)} = \frac{\rho_1 I K_{1,2}^2 K_{1,0}^2}{4\pi (a^2 + 16t^2)^{1/2}} \quad (4.3.14)$$

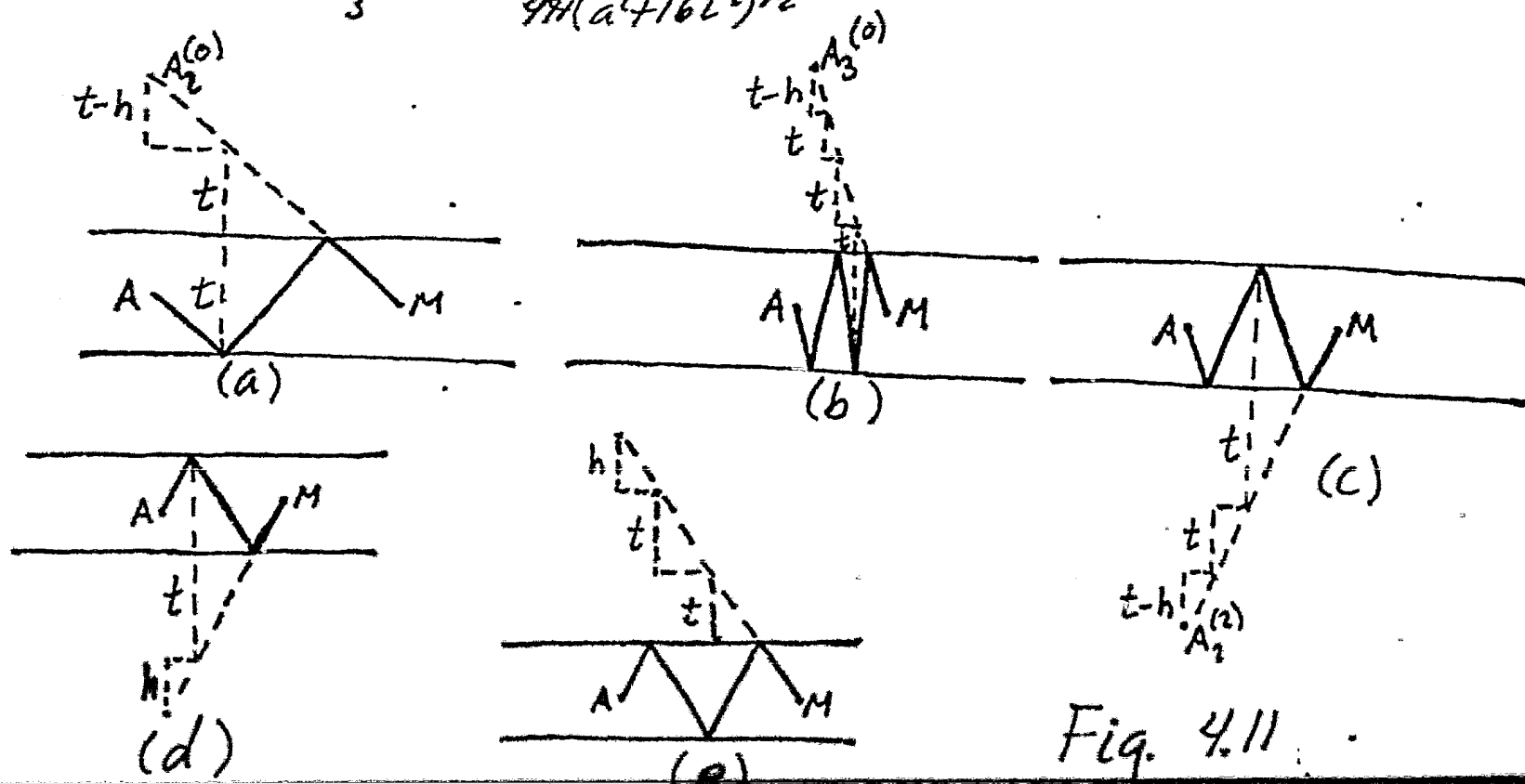


Fig. 4.11

Para cada par adicional de reflexiones, una del plano superior y una del plano inferior, la correspondiente magnitud de las imágenes será reducida por el factor $K_{1,2} K_{1,0}$ y parecerá estar a una distancia $2t$ más abajo del plano superior.

Es ahora posible escribir una serie infinita que representa el potencial debido a imágenes correspondientes a trayectorias de rayos reflejados un igual número de veces de los planos superior e inferior, la primera reflexión engendrada del plano inferior es:

$$U_I = \sum \frac{\rho_1 I K_{1,2}^n K_{1,0}^n}{4\pi [a^2 + (2nt)^2]^{1/2}} \quad (4.3.15)$$

Similarmente se pueden construir una serie de imágenes para trayectorias con un número impar de reflexiones, la primera partiendo del plano inferior. La trayectoria de los rayos y su correspondiente imagen para la primera en dicha serie se muestra en la figura 4.11.c. El potencial originado de esta imagen particular es:

$$U_2^{(2)} = \frac{\rho_1 I K_{1,2}^2 K_{1,0}}{4\pi [a^2 + \{2t + 2(t-h)\}^2]^{1/2}} \quad (4.3.16)$$

Cada par adicional de reflexiones reducirá la magnitud de la imagen por el factor $K_{1,0} K_{1,2}$ y la imagen estará localizada a una distancia $2h$ más abajo del plano inferior. El potencial debido a una serie infinita de tales imágenes es:

$$U_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_1 I K_{1,2}^{(n+1)} K_{1,0}^{(n)}}{4\pi \{a^2 + [2nt + 2(t-h)]^2\}^{1/2}} \quad (4.3.17)$$

Se han considerado sólo la mitad de las posibles trayectorias de reflexiones múltiples dentro de una capa. Pueden haber también trayectorias de rayos con un número par ó impar de reflexiones, con la primera generándose desde arriba más que desde la inferior. La figura 4.11.d muestra la primera de una serie de reflexiones desde el plano superior. La serie del potencial debido a imágenes para trayectorias con un número par de reflexiones es:

$$U_{III} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_1 I K_{1,0}^n K_{1,2}^n}{4\pi [a^2 + (2nt)^2]^{1/2}} \quad (4.3.18)$$

El primer caso con un número impar de reflexiones, el primero generándose del plano superior, es mostrado en la figura 4.11.e. El potencial debido a una secuencia infinita de tales reflexiones es:

$$U_{IV} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_1 I K_{1,0}^{(n+1)} K_{1,2}^{(n)}}{4\pi [a^2 + (2nt + 2h)^2]^{1/2}} \quad (4.3.19)$$

El potencial total en el punto M es encontrado sumando todos los términos incluidos en las ecuaciones (4.3.11), (4.3.15), (4.3.17), (4.3.18), y (4.3.19).

$$U_M = \frac{\rho_1 I}{4\pi a} \left\{ 1 + \frac{K_{1,0}}{[1 + (2h/a)^2]^{1/2}} + \frac{K_{1,2}}{[1 + \{2(t-h)/a\}^2]^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,2}^n K_{1,0}^n}{[1 + (2nt/a)^2]^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,2}^{(n+1)} K_{1,0}^n}{[1 + \{2nt/a + 2(t-h)/a\}^2]^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,0}^n K_{1,2}^n}{[1 + (2nt/a)^2]^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,0}^{(n+1)} K_{1,2}^n}{[1 + \{2nt/a + 2h/a\}^2]^{1/2}} \right\} \quad (4.3.20)$$

Esta ecuación puede ser simplificada considerablemente estableciendo que los puntos A_2 y M están en el límite superior ($h=0$), y que el semiespacio superior es aire con una resistividad infinita. El coeficiente de reflexión $K_{1,0}$ es:

$$K_{1,0} = \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} = 1 \quad (4.3.21)$$

Bajo estas condiciones, la ecuación (4.3.20) se reduce a:

$$U_M = \frac{\rho_1 I}{4\pi a} \left\{ \frac{4 K_{1,2}}{[1 + (2t/a)^2]^{1/2}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,2}^{(n+1)}}{[1 + \{2(n+1)t/a\}^2]^{1/2}} + 2 \right\}$$

haciendo $m=n+1$ y sustituyendo "n" en la sumatoria

$$U_M = \frac{\rho_1 I}{4\pi a} \left\{ \frac{4 K_{1,2}}{[1 + (2t/a)^2]^{1/2}} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{4 K_{1,2}^m}{[1 + (2mt/a)^2]^{1/2}} + 2 \right\}$$

Como $K_{1,2}$ es el coeficiente de reflexión para el límite visto desde el medio 1, es decir, cuando $m=1$ y como "m" es un subíndice, la expresión anterior se reduce a:

$$U = \frac{\rho_1 I}{2\pi a} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,2}^n}{[1 + (2nt/a)^2]^{1/2}} \right\} \quad (4.3.23)$$

El potencial consiste de dos partes, un potencial debido a un semiespacio homogéneo isótropo llamado potencial normal y otro debido a la serie infinita llamado potencial de distribución.

IV.3.2 Método de Stefanescu

En el inciso anterior se explicó un método sencillo de conocer el potencial eléctrico en un medio estratificado debido a una fuente puntual de corriente para el caso de dos capas. En el caso de considerar un medio estratificado de más de dos capas, el problema, utilizando el método de las imágenes, se complica demasiado por lo que es necesario hacer la deducción del potencial de una forma analítica proponiendo una solución especial al Laplaciano y satisfaciendo un apropiado número de condiciones de contorno. Este método fué el que siguió Stefanescu en 1930 para llegar a la expresión integral que da el potencial en superficie para un medio estratificado.

La expresión integral de Stefanescu ya fué deducida en el inciso (III.3.4), por lo que en este inciso solamente se aplicarán las condiciones de frontera para encontrar el potencial para un medio estratificado de "n" capas.

El potencial en la primera capa para un medio estratificado está dado según la ecuación (3.3.30).

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-2z} + A_1(\lambda) e^{-\lambda z} + A_2(\lambda) e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.3.24)$$

y para las demás capas.

$$U_i = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ A_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} + B_i(\lambda) e^{\lambda z_i} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.3.25)$$

Las condiciones de frontera que deben satisfacer las expresiones del potencial eléctrico para medios estratificados son:

1.- La función potencial eléctrico "U" debe ser continua a través del plano de contacto entre dos capas sucesivas.

$$U_i = U_{i+1} \quad \text{para } z = h_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

2.- La componente vertical de la densidad de corriente debe ser continua a través del plano de contacto entre dos capas sucesivas.

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial U_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial z} \quad \text{para } z = h_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

3.- La componente vertical de la densidad de corriente en la superficie del medio debe ser cero.

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = 0$$

4.- Para la capa más profunda a una distancia muy grande, el potencial debe tender a cero.

$$U_n = 0 \quad \text{para } z = h_n \rightarrow \infty$$

Caso de dos capas

El problema a resolver es conocer el potencial U_1 en $z=0$. Para ello es necesario conocer las funciones $A_i(\lambda)$ y $B_i(\lambda)$ aplicando las condiciones de frontera mencionadas anteriormente:

Aplicando la cuarta condición en la ecuación (4.3.25) se obtiene que $B_2(\lambda) = 0$. Aplicando la tercera condición en la ecuación (4.3.24) resulta que $A_1(\lambda) = B_1(\lambda)$. Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones (4.3.24) y (4.3.25) y aplicando la primera y segunda condición a las ecuaciones resultantes se obtienen:

$$A_1(\lambda) \{ e^{-\lambda h_1} + e^{\lambda h_1} \} - A_2(\lambda) e^{-\lambda h_1} = -e^{-\lambda h_1} \quad (4.3.26)$$

$$A_1(\lambda) \{ e^{-\lambda h_1} - e^{\lambda h_1} \} - A_2(\lambda) e^{-\lambda h_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = -e^{-\lambda h_1} \quad (4.3.27)$$

resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores:

$$A_1(\lambda) = \frac{\kappa_1 e^{-\lambda h_1}}{e^{\lambda h_1} - \kappa_1 e^{-\lambda h_1}} \quad (4.3.28)$$

donde $\kappa_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ se llama coeficiente de reflexión como se dijo --

anteriormente en el método de las imágenes. Sustituyendo (4.3.28) en (4.3.24) se obtiene el potencial en la primera capa:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{-\lambda z} + \frac{\kappa_1 e^{-\lambda h_1}}{(e^{\lambda h_1} - \kappa_1 e^{-\lambda h_1})} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

en la superficie $z=0$:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ 1 + \frac{2 \kappa_1 e^{-\lambda h_1}}{(e^{\lambda h_1} - \kappa_1 e^{-\lambda h_1})} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \tag{4.3.29}$$

otra forma de expresarlo sería:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 + \kappa_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - \kappa_1 e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda \tag{4.3.30}$$

Caso de "n" capas:

efectuando un cambio de variable $B_i(\lambda) = X_i(\lambda)$, $A_i(\lambda) = 1 + \theta_i(\lambda)$, el potencial para diferentes capas queda como:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{-\lambda z} + \theta_1(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}] \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$U_2 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{-\lambda z} + \theta_2(\lambda) e^{-\lambda z} + X_2(\lambda) e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

⋮

$$U_i = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{-\lambda z} + \theta_i(\lambda) e^{-\lambda z} + X_i(\lambda) e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

⋮

$$U_n = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{-\lambda z} + \theta_n(\lambda) e^{-\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Si siguiendo la misma consideración que para el caso de dos capas y aplicando las condiciones de frontera se obtienen:

$$e^{-\lambda z_i} \theta_i(\lambda) + e^{\lambda z_i} X_i(\lambda) - e^{-\lambda z_{i+1}} \theta_{i+1}(\lambda) - e^{\lambda z_{i+1}} X_{i+1}(\lambda) = 0 \quad (4.3.31)$$

$$p_{i+1} e^{-\lambda z_i} \theta_i(\lambda) - p_{i+1} e^{\lambda z_i} X_i(\lambda) - p_i e^{-\lambda z_{i+1}} \theta_{i+1}(\lambda) + p_i e^{\lambda z_{i+1}} X_{i+1}(\lambda) = p_i e^{-\lambda z_i} - p_{i+1} e^{\lambda z_{i+1}} \quad (4.3.32)$$

haciendo $u_i = e^{-\lambda z_i}$, $v_i = e^{\lambda z_i}$ y $P_i = p_i/p_{i+1}$ las ecuaciones (4.3.31) y (4.3.32) se transforman en:

$$u_i \theta_i(\lambda) + v_i X_i(\lambda) - u_i \theta_{i+1}(\lambda) - v_i X_{i+1}(\lambda) = 0 \quad (4.3.33)$$

$$-u_i \theta_i(\lambda) + v_i X_i(\lambda) + P_i u_i \theta_{i+1}(\lambda) - P_i v_i X_{i+1}(\lambda) = (1 - P_i) u_i \quad (4.3.34)$$

Todas estas ecuaciones forman un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas como se muestra a continuación:

$$i=1 \quad \begin{aligned} (u_1 + v_1) \theta_1(\lambda) - u_1 \theta_2(\lambda) - v_1 X_2(\lambda) &= 0 \\ (v_1 - u_1) \theta_1(\lambda) + P_1 u_1 \theta_2(\lambda) - P_1 v_1 X_2(\lambda) &= (1 - P_1) u_1 \end{aligned}$$

$$i=2 \quad \begin{aligned} u_2 \theta_2(\lambda) + v_2 X_2(\lambda) - u_2 \theta_3(\lambda) - v_2 X_3(\lambda) &= 0 \\ -u_2 \theta_2(\lambda) + v_2 X_2(\lambda) + P_2 u_2 \theta_3(\lambda) - P_2 v_2 X_3(\lambda) &= (1 - P_2) u_2 \end{aligned}$$

$$i=j \quad \begin{aligned} u_j \theta_j(\lambda) + v_j X_j(\lambda) - u_j \theta_{j+1}(\lambda) - v_j X_{j+1}(\lambda) &= 0 \\ -u_j \theta_j(\lambda) + v_j X_j(\lambda) + P_j u_j \theta_{j+1}(\lambda) - P_j v_j X_{j+1}(\lambda) &= (1 - P_j) u_j \end{aligned}$$

$$i=n-1 \quad \begin{aligned} u_{n-1} \theta_{n-1}(\lambda) + v_{n-1} X_{n-1}(\lambda) - u_{n-1} \theta_n(\lambda) &= 0 \\ -u_{n-1} \theta_{n-1}(\lambda) + v_{n-1} X_{n-1}(\lambda) + P_{n-1} u_{n-1} \theta_n(\lambda) &= (1 - P_{n-1}) u_{n-1} \end{aligned}$$

$$(4.3.35)$$

De acuerdo a la ecuación (4.3.29), sólo resalta de interés la solución del sistema lineal de ecuaciones (4.3.35) para la función $\theta_1(\lambda)$, que se conoce con el nombre de "Función Kernel de Stefanescu". Esta solución del sistema de ecuaciones puede obtenerse por la aplicación de la regla de Cramer, como el cociente de dos determinantes:

$$\theta_1(\lambda) = \frac{\tilde{P}}{\tilde{D}} \tag{4.3.36}$$

donde:

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} -u_1 & -u_1 & -v_1 & & & \\ u_1 & p_1 u_1 & -p_1 v_1 & & & \\ 0 & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \\ 0 & -u_2 & v_2 & p_2 u_2 & -p_2 v_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & u_{n-1} & v_{n-1} & -u_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & -u_{n-1} & v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} (u_1 + v_1) & -u_1 & -v_1 & & & \\ (v_1 - u_1) & p_1 u_1 & -p_1 v_1 & & & \\ \vdots & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & u_{n-1} & v_{n-1} & -u_{n-1} & & \\ -u_{n-1} & v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} & & & \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, la solución de las expresiones anteriores para el caso de medios estratificados con dos y tres capas conduce a las siguientes expresiones para la función Kernel en términos de los coeficientes de reflexión y las profundidades a los planos de frontera:

$$\theta_2(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} \tag{4.3.37.a}$$

$$\theta_3(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + b_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2 - h_1)} - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2}} \tag{4.3.37.b}$$

donde k_i se denomina coeficiente de reflexión y está dado por la expresión:

$$k_i = \frac{p_{i+1} - p_i}{p_{i+1} + p_i} \tag{4.3.38}$$

En forma general, la expresión para el potencial en un medio estratificado está dado por:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \{1 + 2\theta_1(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda \tag{4.3.39}$$

De esta ecuación puede obtenerse otra expresión para la función Kernel:

$$K(\lambda) = 1 + 2\theta_1(\lambda) \tag{4.3.40}$$

La función $K(\lambda)$ se denomina "función Kernel de Slichter", su expresión matemática puede obtenerse aplicando la regla de Cramer; solucionando el sistema de ecuaciones (4.3.35) de la misma forma que para la función $\theta_1(\lambda)$ y usando la ecuación:

$$K(\lambda) = 1 + 2 \frac{\tilde{P}}{\tilde{D}} = \frac{\tilde{D} + 2\tilde{P}}{\tilde{D}} \tag{4.3.41}$$

por lo tanto

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi^2} \int_0^{\infty} K(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \tag{4.3.42}$$

De esta manera, es posible obtener la expresión matemática para la función Kernel de Slichter en función de coeficientes de reflexión y profundidades a los planos de contacto entre capas sucesivas, como ejemplo, para medios estratificados de dos y tres capas para la función Kernel de Slichter es:

$$K_1^{(2)}(\lambda) = \frac{1 + K_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_1 e^{-2\lambda h_1}} \tag{4.3.43a}$$

$$K_1^{(3)} = \frac{1 + K_1 e^{-2\lambda h_1} + K_2 e^{-2\lambda h_2} + K_1 K_2 e^{-2\lambda(h_2 - h_1)}}{1 - K_1 e^{-2\lambda h_1} - K_2 e^{-2\lambda h_2} + K_1 K_2 e^{-2\lambda(h_2 - h_1)}} \tag{4.3.43b}$$

Existen dentro de la teoría del sondeo eléctrico vertical otras expresiones para la función Kernel derivadas de las formas originales de Slichter y Slichter; las más conocidas han sido introducidas en la literatura por G. Westerd y son:

a) la función Kernel aumentada definida como:

$$H(\lambda) = e(\lambda) + \frac{1}{2} \tag{4.3.44}$$

despejando y sustituyendo (4.3.4) en (4.3.39)

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{\pi} \int_0^{\infty} H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.3.45)$$

b) La función Kernel Modificada ($G(\lambda)$) se define como:

$$G(\lambda) = \frac{\theta(\lambda)}{\theta(\lambda) + 1} \quad (4.3.46)$$

despejando y sustituyendo (4.3.46) en (4.3.39)

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+G(\lambda)}{1-G(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.3.47)$$

Ambas formas (4.3.45) y (4.3.47) aparecen relacionadas al método clásico de interpretación de sondeos eléctricos verticales usando la función Kernel.

c) La Transformada de resistividad ($T(\lambda)$) se define como:

$$T(\lambda) = \rho_1 K(\lambda) \quad (4.3.48)$$

o sea,

$$U_1 = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} T(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.3.49)$$

Esta expresión es una forma muy importante utilizada en la aplicación de la teoría de filtros digitales a la interpretación de sondeos eléctricos verticales.

IV.3.3 Algoritmos de recurrencia de la función Kernel.

Aunque la solución del sistema de ecuaciones lineales usando regla de Cramer, es la forma más obvia de obtener las expresiones para las funciones Kernel, existen procedimientos más adecuados en forma de fórmulas de recurrencia o algoritmos. Las formas de recurrencia más

conocidas son:

1- La fórmula de Flathe: cuya secuencia de aplicación consiste en obtener previamente la función kernel para un medio homogéneo, usando este resultado se encuentra la función kernel para un medio de dos capas, resultado que a su vez se utiliza para obtener la de un medio de tres capas y así sucesivamente hasta llegar a la función kernel deseada, es decir, el efecto de la fórmula de Flathe consiste en agregar una nueva capa en la parte inferior de la secuencia de capas originales. La fórmula de Flathe consiste en:

$$D_{n+1}(u) = D_A(u) - K_n u_n^2 D_n(1/u) \quad (4.3.50)$$

$$N_{n+1}(u) = N_A(u) + K_n u_n^2 N_n(1/u)$$

donde D y N son el denominador y numerador de la función kernel de Slichter respectivamente.

2- La fórmula de Pekeris: permite determinar la función kernel de Slichter en la capa superficial partiendo de la función kernel de la capa más profunda, es decir, el efecto de la fórmula de Pekeris consiste en agregar una nueva capa en la parte superior de la secuencia de capas original, junto con el desplazamiento del dispositivo eléctrico a la superficie de la nueva capa. La fórmula de Pekeris es:

$$K_i = \frac{K_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda h_i)}{\rho_i + K_{i+1} \tanh(\lambda h_i)} \quad (4.3.51)$$

donde h_i es el espesor de la i -ésima capa. Esta fórmula se usa -- partiendo de que $K_n = 1$, siendo K_n la función kernel de la última capa.

3- La fórmula de Lima-Lobato: es un procedimiento alternativo a los anteriores pues emplea una función generadora que debe calcularse empezando por la capa más profunda hasta llegar a obtener la función generadora en la segunda capa, expresión que se utiliza para obtener la función kernel de Stefanescu en la primera capa del medio estratificado. En la fórmula de Lima-Lobato la función generadora es:

$$L_i(\lambda) = \frac{K_i + L_{i+1}^N(\lambda)}{1 + K_i L_{i+1}^N(\lambda)} \quad (4.3.52)$$

donde $i=1, 2, 3, \dots, N-1$ y N es el número de capas del medio-estratificado. Para la última capa del medio $L_N(\lambda)=0$ y la función Kernel de Stefanescu es:

$$\theta_1(\lambda) = \frac{[K_1 + L_2(\lambda)] e^{-2\lambda t_1}}{1 + K_1 L_2(\lambda) - [K_1 + L_2(\lambda)] e^{2\lambda t_1}} \quad (4.3.53)$$

IV. 3.4 Propiedades de la función Kernel.

Los resultados más interesantes para la teoría del sondeo eléctrico vertical aparecieron cuando se realiza el estudio de las propiedades de la función kernel en la forma de Slichter $K(\lambda)$. En la representación gráfica de la función kernel es necesario tomar como variable independiente, no λ , sino su inversa que tiene dimensiones de longitud y hacer uso de escalas logarítmicas para los ejes cartesianos. Las propiedades de la función kernel de Slichter que pueden derivarse de las expresiones matemáticas anteriores son:

a) Asintotas horizontales

La función Kernel es siempre una función continua, suave y acotada que muestra comportamiento asintótico para valores muy grandes y pequeños de la distancia λ^{-1} , es decir, $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ entonces $K(\lambda^{-1}) \rightarrow \rho_1$ cuando $\lambda^{-1} \rightarrow \infty$ entonces $K(\lambda^{-1}) \rightarrow \rho_n$

b) Asintotas oblicuas

La función Kernel presenta un comportamiento especial cuando se trata de medios estratificados en los que la última capa tiene resistividad nula ó infinita. En el caso de que $\rho_n = 0$ para valores grandes de λ^{-1} , la función $K(\lambda^{-1})$ es una recta de pendiente -1 , que corta al eje de las abscisas en el punto $\lambda^{-1} = T = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \rho_i$. En cambio si $\rho_n \rightarrow \infty$ para valores grandes de λ^{-1} , la función $K(\lambda^{-1})$ es una recta de pendiente $+1$ que corta al eje de las abscisas en el punto $\lambda^{-1} = S = \sum_{i=1}^{N-1} h_i / \rho_i$.

c) La función kernel cumple con el principio de equivalencia, el cual se refiere a que medios estratificados diferentes entre sí

en términos de espesores y resistividades pueden generar funciones kernel muy similares. La figura (4.12) ilustra el principio de equivalencia en la función kernel de Slichter.

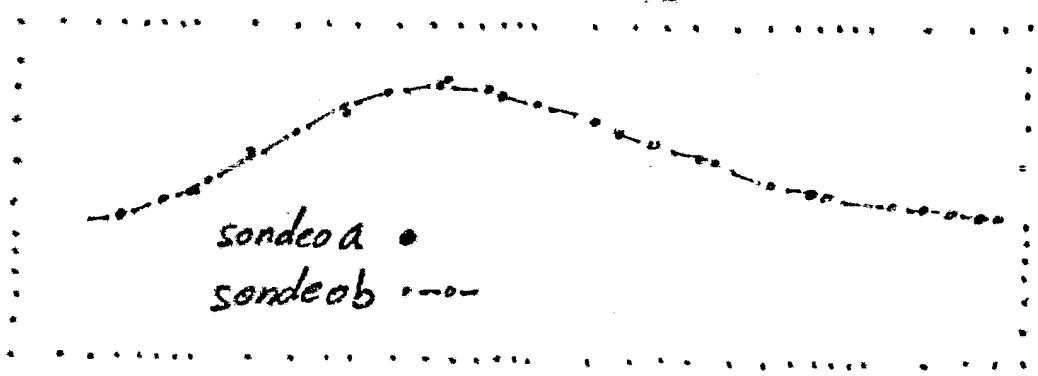


Figura 4.12 $E_1 = \rho_1 = 1$; $\rho_3 = 1$ corte a) $E_2 = 1$, $\rho_2 = 20$; corte b) $E_2 = .5$, $\rho_2 = 40$, $T_2 = 20$. Las curvas se superponen prácticamente.

IV. 4. Funciones de Resistividad Aparente.

IV. 4.1 Funciones de resistividad aparente para diferentes dispositivos.

En el apartado (IV. 3.2) se ha logrado establecer la expresión para el potencial eléctrico en la superficie de un medio estratificado, conocida la cual es posible deducir la solución del problema directo en la forma más interesante para la teoría del sondeo eléctrico vertical: dado un medio estratificado determinar las funciones de resistividad aparente y su gráfica que se obtendría sobre él con un dispositivo electrodico determinado. El dispositivo electrodico de mayor uso en la práctica es el dispositivo Schlumberger, para el que la resistividad aparente viene dada por:

$$\rho_{a,s} = - \frac{2\pi L^2}{I} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=L} \tag{4.4.1}$$

sustituyendo (4.3.49) en (4.4.1), derivando y desarrollando queda:

$$\rho_{a,s} = \rho_1 + L^2 \int_0^{\infty} \{T(\lambda) - \rho_1\} J_1(2L\lambda) \lambda d\lambda \tag{4.4.2}$$

que es la función de resistividad aparente para el dispositivo Schlum-

berger para medios estratificados.

Para el dispositivo Wenner la resistividad aparente es:

$$\rho_{a,w} = 2\pi a \frac{\Delta V}{I} \quad (4.4.3)$$

donde ΔV es la diferencia de potencial entre puntos situados a las distancias a y $2a$ de los dos electrodos de corriente, y está dada por:

$$\Delta V = 2[V(a) - V(2a)] \quad (4.4.4)$$

sustituyendo (4.3.39) en (4.4.4) resulta:

$$\rho_{a,w} = 2a \int_0^{\infty} T(\lambda) [J_0(2a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \quad (4.4.5)$$

que es la función de resistividad aparente para el dispositivo Wenner en medios estratificados.

Las expresiones (4.4.2) y (4.4.5) establecen las relaciones entre las funciones de resistividad aparente Schlumberger y Wenner y la función de transformada de resistividad (es necesario no olvidar que la función transformada de resistividad depende sólo de las resistividades y espesores de las capas del medio estratificado, siendo independiente del dispositivo de medición empleado, por lo cual, la función $T(\lambda)$ es idéntica en ambas expresiones).

Estas ecuaciones deberán ser modificadas para hacerlas más adecuadas en su uso posterior, para ello se sustituirán las variables independientes de las funciones ρ_a y $T(\lambda)$ por variables logarítmicas. Esta sustitución ya fue empleada en el apartado anterior sin justificarla. La ventaja de usar escala logarítmica en vez de escala lineal, es que las representaciones gráficas de las funciones de resistividad aparente y de transformada de resistividad tienen una apariencia más regular en la escala logarítmica, en el sentido de que los periodos de las oscilaciones de las funciones tienden a permanecer del mismo orden de magnitud a lo largo de la extensión completa de las curvas. Esta regularidad en las curvas de resistividad aparente y transformada de resistividad tiene un significado más profundo, que se relaciona con el empleo de la teoría del filtrado lineal,

la cual será explicada detalladamente más adelante. La definición de las variables logarítmicas independientes debe tomar en cuenta que λ tiene las dimensiones del recíproco de la distancia y que es conveniente que las variables independientes en las funciones ρ_a y T sean dimensionalmente comparables, por lo cual las variables logarítmicas se definen como: $x = \ln L$ y $y = \ln(\lambda^{-1})$ con este cambio las expresiones para la resistividad aparente son:

$$\rho_{as} = \rho_1 + \int_{-\infty}^{\infty} [T(y) - \rho_1] J_1(e^{x-y}) e^{2(x-y)} dy \quad (4.4.6)$$

$$\rho_{aw} = 2 \int_0^{\infty} T(y) [J_0(e^{x-y}) - J_0(2e^{x-y})] e^{(x-y)} dy \quad (4.4.7)$$

Una vez determinadas las expresiones matemáticas para las funciones de resistividad aparente es de sumo interés lograr la representación gráfica de ellas para obtener las curvas de resistividad aparente; para ello con el uso de computadoras ha sido posible manipular las expresiones matemáticas para obtener conjuntos de valores numéricos graficados en forma de curvas teóricas de resistividad aparente. A estas representaciones se les denomina curvas teóricas por haberse obtenido para medios estratificados ideales. Los conjuntos de curvas teóricas de resistividad aparente son necesarias para la interpretación de los sondeos eléctricos verticales.

En la práctica del sondeo eléctrico la medición de la diferencia de potencial entre los electrodos de recepción M y N, y de la intensidad de la corriente eléctrica (I) introducida al terreno, así como el conocimiento de las distancias entre los electrodos del dispositivo provee de las cantidades necesarias para hacer uso de la fórmula (3.6.11) y determinar el parámetro de resistividad aparente cuya representación gráfica proporcionará las curvas de campo de resistividad aparente.

Las curvas de resistividad aparente sean teóricas ó de campo pueden clasificarse atendiendo al número de capas y la relación entre las resistividades de los medios estratificados que les corres-

ponden. Por comodidad se llamarán curvas de dos capas a las curvas de resistividad aparente teóricas ó de campo correspondiente a medios de dos capas estratificados y lo mismo para las curvas correspondientes a medios estratificados con mayor número de capas como ya se vió con anterioridad para el caso del corte geoelectrico se utilizará la misma simbología de las capas que la utilizada en el inciso IV. 2.

Por otra parte, anteriormente se deducieron las expresiones de la función resistividad aparente para los dispositivos más usados en los métodos geoelectricos. A continuación se deducirán las expresiones de la función de resistividad aparente para los demás dispositivos conocidos.

a) Dispositivo Polo-Polo

Sustituyendo la ecuación (4.3.49) en la ecuación (3.7.1) se obtiene la función resistividad aparente para el dispositivo Polo-Polo:

$$\rho_{a,p} = a \int_0^{\infty} \tau(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.4.8a)$$

b) Dispositivo Medio-Wenner

$$\rho_{a,w/2} = 2a \int_0^{\infty} \tau(\lambda) \{J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\} d\lambda \quad (4.4.8b)$$

c) Dispositivo Medio-Schlumberger.

$$\rho_{a,s/2} = \rho_1 + L^2 \int_0^{\infty} \{\tau(\lambda) - \rho_1\} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (4.4.8c)$$

d) Dispositivo lineal asimétrico

La resistividad aparente del dispositivo lineal asimétrico se deduce de la ecuación (3.7.4) y su expresión es:

$$\rho_{a,asim} = \frac{\pi(s^2 - b^2)}{b} \frac{\Delta V}{I} \quad \text{donde } \Delta V = U(s-b) - U(s+b)$$

de manera que sustituyendo (4.3.39) en la ecuación anterior:

$$\rho_{a,asim} = \frac{1-c^2}{2c} s \int_0^{\infty} \tau(\lambda) \{J_0[\lambda s(1-c)] - J_0[\lambda s(1+c)]\} d\lambda \quad (4.4.8d)$$

Para el caso de los dispositivos dipolares se usará la ecuación (3.4.8) que relaciona el potencial para una fuente puntual con el potencial dipolar, o sea.

$$U_{DIP} = -\frac{\partial U}{\partial r} b \cos \theta \quad (3.4.8)$$

sustituyendo (4.3.9) en la ecuación anterior y derivando:

$$U_{DIP} = \frac{I}{2\pi} b \cos \theta \left\{ \int_0^{\infty} [\tau(\lambda) - \rho_1] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda + \rho_1 / r^2 \right\} \quad (4.4.9)$$

El campo eléctrico está dado por:

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{I b}{2\pi} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_0^{\infty} [\tau(\lambda) - \rho_1] J_1(\lambda r) d\lambda + \rho_1 / r^2 \right\} \quad (4.4.10a)$$

$$E_{\theta} = \frac{I b \operatorname{sen} \theta}{2\pi r} \left\{ \int_0^{\infty} [\tau(\lambda) - \rho_1] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda + \rho_1 / r^2 \right\} \quad (4.4.10b)$$

e) Dispositivo Azimutal

Si se supone $\Delta V / MN \approx \bar{E}$ de la ecuación (3.6.11) se obtiene:

$$\rho_{a,dip} \approx K_{dip} \frac{\Delta V}{I} = K_{dip} \frac{\Delta V}{MN} MN = K_{dip} MN \frac{\bar{E}}{I}$$

sustituyendo (3.7.13) y (4.4.10b) en la ecuación anterior - resulta:

$$\rho_{a,\theta} = \rho_1 + r^2 \int_0^{\infty} [\tau(\lambda) - \rho_1] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = \rho_{a,s} \quad (4.4.11)$$

Esta ecuación expresa que la función resistividad aparente para el dispositivo dipolar azimutal es la misma que para el dispositivo Schlumberger.

f) Dispositivo Radial

Sustituyendo (4.4.10a) en la ecuación (3.7.12) y desarrollando se obtiene la expresión para la función resistividad aparente utilizando un dispositivo dipolar radial:

$$\rho_{a,R} = \rho_1 - \frac{r^3}{2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} \{\tau(\lambda) - \rho_1\} J_1(2r\lambda) \lambda d\lambda \quad (4.4.12a)$$

Esta ecuación se puede escribir en términos de la resistividad para el dispositivo Schlumberger quedando como se muestra:

$$\rho_{a,R} = \rho_{a,S} - \frac{r}{2} \frac{\partial \rho_{a,S}}{\partial r} \quad (4.4.12b)$$

g) Dispositivo Paralelo

Cambiando las ecuaciones (4.4.10a) y (4.4.10b) a coordenadas cartesianas ($E_x = E_R \cos \theta - E_\theta \sin \theta$) y sustituyendo en la ecuación (3.7.10) se obtiene:

$$\rho_{a,x} = \rho_1 - \frac{r^3}{(3\cos^2\theta - 1)} \left\{ \frac{\sin^2\theta}{r} \int_0^{\infty} \{\tau(\lambda) - \rho_1\} J_1(2r\lambda) \lambda d\lambda + \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} \{\tau(\lambda) - \rho_1\} J_1(2r\lambda) \lambda d\lambda \right\} \quad (4.4.13a)$$

En función de la resistividad para el dispositivo Schlumberger queda:

$$\rho_{a,x} = \rho_{a,S} - \frac{\cos^2\theta}{3\cos^2\theta - 1} r \frac{\partial \rho_{a,S}}{\partial r} \quad (4.4.13b)$$

h) Dispositivo perpendicular

Cambiando las ecuaciones (4.4.10a) y (4.4.10b) a coordenadas cartesianas ($E_y = E_R \sin \theta + E_\theta \cos \theta$) y sustituyendo en la ecuación (3.7.11) resulta:

$$\rho_{a,y} = \rho_1 - \frac{r^3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} \{\tau(\lambda) - \rho_1\} J_1(2r\lambda) \lambda d\lambda + \frac{r^2}{3} \int_0^{\infty} \{\tau(\lambda) - \rho_1\} J_1(2r\lambda) \lambda d\lambda \quad (4.4.14a)$$

de otra manera

$$\rho_{a,y} = \rho_{a,S} - \frac{1}{3} r \frac{\partial \rho_{a,S}}{\partial r} \quad (4.4.14b)$$

i) Dispositivo Ecuatorial

$$\rho_{a,eq} = \rho_{a,s} \quad (4.4.15)$$

ii) Dispositivo Axial

$$\rho_{a,ax} = \rho_{a,r} \quad (4.4.16)$$

En forma general, la función de resistividad aparente -- para los dispositivos dipolares está dada por:

$$\rho_{a,dip} = \rho_{a,s} - pr \frac{\partial \rho_{a,s}}{\partial r} \quad (4.4.17)$$

en donde, si $p=0$ se trata del dispositivo azimutal ó ecuatorial; si $p=\frac{1}{2}$ se trata del dispositivo radial ó axial; si $p=\frac{1}{3}$ entonces es el dispositivo perpendicular; y, si se trata del dispositivo paralelo entonces $p = \cos^2 \theta / (3\cos^2 \theta - 1)$.

IV. 4.2 Propiedades de la función de resistividad aparente.

Las expresiones matemáticas del apartado anterior establecen la relación entre la función de resistividad aparente y la función kernel, muestran que ésta no sólo depende de los datos que especifican el medio estratificado, sino del tipo de dispositivo de medición empleado.

Para establecer las propiedades de la función de resistividad aparente se limitará el análisis al caso de la función de resistividad aparente tipo Schlumberger en virtud de la simplicidad de la expresión matemática que la representa y sabiendo que las propiedades así determinadas pueden extenderse a la función tipo Wenner. Para esto se utilizará la expresión (4.4.2) mediante la sustitución $\lambda_s = w$ obteniendo que:

$$\rho_a(s) = \int_0^{\infty} T(w,s) w \cdot T_1(w) dw \quad (4.4.18)$$

sabiendo además, que la función transformada de resistividad - tiene las siguientes cualidades:

$$T(\omega, 0) = \rho_1$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T(\omega, s) = \rho_N$$

(4.4.19)

Se pueden demostrar las siguientes propiedades de la función resistividad aparente.

a) Continuidad

De las propiedades de la función kernel se sabe que siempre que la resistividad de la última capa del medio estratificado es finita, la función kernel es acotada, es decir, sus valores son finitos y puede elegirse arbitrariamente un número R tal que es mayor que todos los valores de la función $T(\omega, s)$ en el intervalo $(0, \infty)$, con lo cual se cumple que:

$$T(\omega, s) \omega J_1(\omega) < R \omega J_1(\omega) \quad \text{y además} \quad \int_0^{\infty} R \omega J_1(\omega) d\omega < R$$

ya que:
$$\int_0^{\infty} x J_1(x) dx = 1$$

con lo cual queda demostrado que la expresión (4.4.2) para la función de resistividad aparente es una función acotada. Además del hecho de que el integrando de la expresión (4.4.2) es una función continua, por ser el producto de dos funciones continuas $T(\omega)$ y $J_1(\omega s)$ y sabiendo que la resistividad aparente es continua.

b) Asintotas horizontales

La función de resistividad aparente muestra el mismo comportamiento asintótico ya mencionado para la función kernel, es decir, para valores muy pequeños y grandes de la distancia $S = AB/2$ ó $a = AB/3$ según se trate del dispositivo Schlumberger ó Wenner, la función de resistividad aparente tiende a los valores de las -

sabiendo además que la función transformada de resistividad tiene las siguientes cualidades:

$$T(\omega, 0) = \rho_1$$

(4.4.19)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T(\omega, s) = \rho_N$$

Se pueden demostrar las siguientes propiedades de la función resistividad aparente.

a) Continuidad

De las propiedades de la función kernel se sabe que siempre que la resistividad de la última capa del medio estratificado es finita, la función kernel es acotada, es decir, sus valores son finitos y puede elegirse arbitrariamente un número R tal que es mayor que todos los valores de la función $T(\omega, s)$ en el intervalo $(0, \infty)$, con lo cual se cumple que:

$$T(\omega, s) \omega J_1(\omega) < R \omega J_1(\omega) \quad \text{y además} \quad \int_0^{\infty} R \omega J_1(\omega) d\omega < R$$

ya que:
$$\int_0^{\infty} x J_1(x) dx = 1$$

con lo cual queda demostrado que la expresión (4.4.2) para la función de resistividad aparente es una función acotada. Además del hecho de que el integrando de la expresión (4.4.2) es una función continua por ser el producto de dos funciones continuas $T(\omega)$ y $J_1(\omega s)$ y sabiendo que la resistividad aparente es continua.

b) Asintotas horizontales

La función de resistividad aparente muestra el mismo comportamiento asintótico ya mencionado para la función kernel, es decir, para valores muy pequeños y grandes de la distancia $S = AB/2$ ó $a = AB/3$ según se trate del dispositivo Schlumberger ó Wenner, la función de resistividad aparente tiende a los valores de las -

resistividades de la primera y última capa del medio estratificado ρ_1 y ρ_n respectivamente.

La demostración de las propiedades anteriores para la función resistividad aparente Schlumberger puede hacerse como sigue: de las expresiones (4.4.19) se tiene que cuando $S=0$ entonces --
 $T(\omega, 0) = \rho_1$, sustituyendo este resultado en (4.4.18) se tiene que:

$$\rho_a(0) = \int_0^{\infty} \rho_1 \omega J_1(\omega) d\omega = \rho_1 \int_0^{\infty} \omega J_1(\omega) d\omega = \rho_1$$

y cuando $S \rightarrow \infty$, de acuerdo a (4.4.19) entonces

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \rho_a(S) = \int_0^{\infty} \rho_n \omega J_1(\omega) d\omega = \rho_n \int_0^{\infty} \omega J_1(\omega) d\omega = \rho_n$$

c) Asintotas Oblicuas

En el caso de un medio estratificado en el que la resistividad de la última capa es infinita $\rho_n \rightarrow \infty$, la función de resistividad aparente posee una asíntota rectilínea de pendiente +1 que corta al eje de las abscisas a $a = 1.3863 S$ para dispositivo Wenner. La demostración de esta propiedad para la función de resistividad aparente Schlumberger debe partir de que:

$$\lim_{\rho_n \rightarrow \infty} T(\lambda^{-1}) = \frac{\lambda^{-1}}{S} = \frac{S}{\omega S}$$

empleando el resultado anterior en (4.4.18) se obtiene que

$$\rho_a(S) = \int_0^{\infty} \frac{S}{\omega S} \omega J_1(\omega) d\omega = \frac{S}{S} \int_0^{\infty} J_1(\omega) d\omega = \frac{S}{S}$$

donde, tomando logaritmos resulta:

$$\text{Lg } \rho_a(S) = \text{Lg } S - \text{Lg } S$$

que representa la ecuación de la asíntota rectilínea mencionada. En el caso en el que $\rho_n = 0$, puede procederse de forma similar partiendo de la propiedad de la función transformada de resistividad:

$$\lim_{\substack{\lambda^{-1} \rightarrow \infty \\ \rho_N = 0}} T(\lambda^{-1}) = \frac{T}{\lambda^{-1}} = T\lambda = \frac{TW}{S}$$

Sustituyendo este resultado en (4.4.18) da:

$$\rho_a(s) = \int_0^{\infty} \frac{TW}{S} \omega J_1(\omega) d\omega = \frac{T}{S} \int_0^{\infty} \omega^2 J_1(\omega) d\omega = 0$$

Puesto que la expresión anterior se anula es posible concluir que la función de resistividad aparente carece de asíntota oblicua descendente para el caso $\rho_N = 0$

d.) Principio de equivalencia

Al igual que en el caso de la función kernel, existen medios estratificados muy diferentes entre sí que originan curvas de resistividad aparente muy similares, es decir, la función de resistividad aparente satisface el principio de equivalencia.

IV.5 Métodos de cálculo de las curvas de resistividad aparente (CRA)

IV.5.1 Introducción

En el presente inciso se desarrollarán los métodos de cálculo numérico de las curvas teóricas de resistividad aparente empleando una computadora digital. El conocimiento y la programación de estos métodos resulta de interés por dos razones principales:

1. Como se sabe, la finalidad del método de resistividad en su modalidad de sondeo eléctrico vertical es determinar los espesores y resistividades de las capas horizontales que forman el subsuelo partiendo de los datos de resistividad aparente observados. A esta etapa del método de resistividad se le denominará interpretación cuantitativa. Como se verá más adelante, tradicionalmente la interpretación cuantitativa se ha hecho comparando las curvas de campo de resistividad aparente con curvas teóricas para modelos estratificados ideales, reunidas en diferentes colecciones. Frecuentemente el interpretador no en-

encuentra en estas colecciones las curvas teóricas que le permitan interpretar su curva de campo, viéndose entonces obligado a recurrir a otros métodos de interpretación menos satisfactorios. En estos casos el conocimiento de los métodos de cálculo numérico de curvas de resistividad aparente y su programación en una computadora digital permiten al intérprete generar sus propias curvas teóricas para complementar las colecciones ya existentes y llevar a cabo la interpretación.

2) Cuando el intérprete realiza la interpretación cuantitativa de las curvas de campo de resistividad aparente, una vez determinados los espesores y resistividades del medio estratificado, puede desear calcular nuevamente la curva de resistividad aparente correspondiente a este medio y compararla con la curva de campo original para de esta manera verificar la calidad de su interpretación y si es necesario modificar los resultados obtenidos hasta que sean satisfactorios. La realización de este proceso sugiere realizarlo por medio de los métodos de cálculo numérico de curvas de resistividad aparente y su programación en una computadora digital.

En este inciso se tratarán los métodos más importantes y se hará un breve análisis de los resultados obtenidos con cada método. En general en cada uno de los métodos los datos de salida son los espesores y resistividades del medio estratificado dadas las resistividades aparentes calculadas para las distancias $AB/2$ ó $AB/3$ dadas, y el tiempo empleado en el cálculo; otros datos particulares en cada caso se describirán al tratar cada método.

El cálculo numérico de las curvas de resistividades aparentes consiste en evaluar las expresiones matemáticas (4.4.2) ó (4.4.5) y (4.4.6) ó (4.4.7) que representan la función de resistividad aparente para los dispositivos electródicos utilizados. De acuerdo a la manera en que se evalúen estas ecuaciones, los métodos de cálculo numérico de las curvas de resistividad aparente pueden dividirse en dos grupos:

A) Métodos que emplean la expansión en series de la función ferial, los cuales son:

- A.1) Método de Onodera
- A.2) Método de Orellana y Mooney.

A.3) Método de Van Dam

A.4) Método de Lima-Lobato

B) Método de filtrado lineal.

A continuación se presenta la teoría y el análisis de los resultados obtenidos con cada método:

A) Métodos que emplean la expansión en series de la función kernel.

La dificultad del cálculo numérico de las funciones de resistividad aparente (4.4.2) y (4.4.5) radica en la evaluación de la integral infinita que aparece en ellas; los métodos descritos en seguida salvan esta dificultad empleando un artificio matemático que consiste en aproximar la función kernel $\theta(\lambda)$ por una serie finita de términos de $e^{-2n\lambda}$, es decir,

$$\theta(\lambda) \approx \sum_n^m Q(n) e^{-2n\lambda} \quad (4.5.1)$$

de tal forma que sustituyendo la ecuación (4.5.1) en (4.4.2) y (4.4.5) y empleando la integral de Weber-Lipschitz:

$$\int_0^{\infty} \lambda^m e^{-\alpha\lambda} J_m(\lambda r) d\lambda = \frac{r^m}{(\alpha^2 + r^2)^{m+1/2}} \quad (4.5.2)$$

Las ecuaciones (4.4.2) y (4.4.5) se transforman en:

$$\rho_{as}(s) = \rho_1 \left\{ 1 + 2 \sum_n^M Q(n) \frac{1}{\left(1 + \frac{4n^2}{s^2}\right)^{3/2}} \right\} \quad (4.5.3)$$

$$\rho_{aw}(s) = \rho_1 \left\{ 1 + 2 \sum_n^M Q(n) \left[\frac{2}{\left(1 + \frac{4n^2}{a^2}\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right)^{1/2}} \right] \right\} \quad (4.5.4)$$

Por lo tanto, la esencia de estos métodos consiste en la forma particular de evaluar los coeficientes $Q(n)$ de la expansión en series de la función Kernel.

4.5.2 Método de Onodera

El método desarrollado por Onodera consiste en aproximar la función kernel por medio de un sistema de polinomios ortogo-

nales normalizados empleando el método de aproximación por mínimos cuadrados. Para ello, haciendo un cambio de variable $z = e^{-2\lambda}$, la función $\theta(\lambda)$ es transformada en una función $\theta(z)$ de la variable z en el intervalo $[0, 1]$ ya que λ está definida en un intervalo de $[0, \infty]$. Ahora es posible tratar de aproximar la función $\theta(z)$ por medio de una función aproximante $F(z)$:

$$\theta(z) \approx F(z) = \sum_n a_n g_n(z) = \sum_n a_n (2n+1) P_n(z) \quad (4.5.5)$$

donde las funciones $P_n(z)$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$, modificados por la transformación $x = 2z - 1$ para hacerlos ortogonales en el intervalo $[0, 1]$ y multiplicados por el factor $(2n+1)$ para normalizarlos, siendo de la forma:

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= 2z - 1 \\ P_2(z) &= 6z^2 - 6z + 1 \\ P_3(z) &= 20z^3 - 30z^2 + 12z - 1 \\ P_4(z) &= 70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1 \\ P_5(z) &= 252z^5 - 630z^4 + 560z^3 - 210z^2 + 30z - 1 \\ P_6(z) &= 924z^6 - 2772z^5 + 3150z^4 - 1680z^3 + 420z^2 - 42z + 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

La aproximación se realiza usando el método de aproximación por mínimos cuadrados por el cual se sabe que los coeficientes a_n de la aproximación son:

$$a_n = \int_0^1 \theta(z) g_n(z) dz \quad (4.5.7)$$

donde se usa la notación

$$b_n = \int_0^1 \theta(z) z^n dz \quad (4.5.8)$$

La función kernel aproximada es:

$$\theta(z) \approx F(z) = \sum_n Q(n) z^n = \sum_n Q(n) e^{-2n\lambda} \quad (4.5.9)$$

donde las a_n están dadas por:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 12 & -30 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -20 & 90 & -140 & 70 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 30 & -210 & 560 & -630 & 252 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -42 & 420 & -1680 & 3150 & -2772 & 924 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.5.10)$$

y las $Q(n)$ por:

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \\ Q(4) \\ Q(5) \\ Q(6) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 & 9 & -11 & 13 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 6 & -30 & 84 & -180 & 330 & -546 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 30 & -210 & 810 & -2130 & 5460 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 140 & -1260 & 6160 & -21840 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 630 & -6930 & 40950 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2772 & -36036 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12012 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.5.11)$$

El éxito del método de Onodera requiere que la aproximación de la función kernel sea lo más exacta posible. Onodera obtuvo errores aceptables en la aproximación usando sólo los seis primeros polinomios de Legendre; de esta forma la función de error en la aproximación de la función kernel es:

$$E(z) = \theta(z) - \sum_{n=0}^6 Q(n) z^n \quad (4.5.12)$$

El análisis de las curvas de resistividad aparente calculadas con el método permite establecer las siguientes conclusiones:
 1) Aunque el cálculo de curvas de resistividad aparente de las curvas resulta poco indispensable en la práctica, el análisis de este-

tipo de cosas ha permitido establecer estimaciones preliminares - sobre la eficiencia de los distintos programas escritos. Para curvas de dos capas el programa del método de Onadera da resultados correctos cuando el coeficiente de reflexión, K_1 , adopta valores en el intervalo $-1 \leq K_1 \leq .8$. El error máximo permitido en la aproximación de la función kernel para poder obtener resultados adecuados debe ser: $ERMAX < .0001$ cuando $-1 \leq K_1 < 0$ y $ERMAX < .03$ cuando $0 < K_1 < .8$.

3) El análisis de las curvas calculadas para medios de tres capas permite corroborar las conclusiones anteriores, es decir, es posible obtener buenos resultados cuando los coeficientes de reflexión K_i del modelo adoptan valores tales que $-1 \leq K_i < .8$. La excepción a esto la constituyen las curvas tipo A donde la obtención de curvas de buena calidad requiere que $0 < K_i < .6$. Los errores máximos permitidos en la aproximación de la función kernel para obtener resultados adecuados deberán ser $ERMAX < .0001$ para modelos tipo H, K, y A y $ERMAX < .001$ para tipo Q.

3) El cálculo de curvas de resistividad aparente de buena calidad requiere que las relaciones de los espesores del modelo sean tales que $0 < t_i/t_1 < 5$.

4) El análisis de las curvas calculadas de cuatro capas permite establecer que el programa se vuelve muy ineficiente al aumentar el número de capas del modelo, siendo necesario que los contrastes de resistividad y las relaciones de espesores sean aún más moderados para obtener resultados satisfactorios. En general, los resultados son adecuados cuando los coeficientes de reflexión K_i adoptan valores entre $-.8 \leq K_i < .8$ y las relaciones de espesores son $0 < t_i/t_1 < 5$, el error máximo en la aproximación de la función kernel debe ser $ERMAX < .006$

5) El tiempo empleado en el cálculo de 15 puntos sobre una curva de resistividad aparente de tres ó cuatro capas varía generalmente entre 16 y 18 segundos en una computadora digital modelo - PDP-1140.

IV.5.3 Método de Orellana y Mooney.

El método descrito a continuación fue desarrollado por

Orellana y Mooney y empleado en el cálculo de las curvas teóricas de resistividad aparente contenidas en el álbum publicado por ellos en 1966. El desarrollo del método parte de la expresión matemática para la función kernel $\theta(\lambda)$ usada por Flathe:

$$\theta(\lambda) = \frac{P(z)}{H(z) - P(z)} \quad (4.5.13)$$

donde $z = e^{-2\lambda}$, P y H son polinomios en z . Si se adopta la restricción de que los espesores de las capas del modelo deben ser múltiplos enteros de un parámetro t_0 que se llamará espesor fundamental: $t_i = m_i t_0$ y $m_i =$ número entero entonces para cualquier modelo, las funciones $P(z)$ y $H(z)$ pueden ser representadas como:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(1)z + P(2)z^2 + \dots + P(h_{N-1})z^{h_{N-1}} \\ H(z) &= 1 + H(1)z + H(2)z^2 + \dots + H(h_{N-1})z^{h_{N-1}} \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

donde los coeficientes $P(n)$ y $H(n)$ pueden obtenerse de las fórmulas de recurrencia de Flathe que son:

$$\begin{aligned} P_{j+1}(z) &= P_j(z) + H_j(z^{-1}) K_j z^{h_j} \\ H_{j+1}(z) &= H_j(z) + P_j(z^{-1}) K_j^j z^{h_j} \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

donde $P_1(z) = 0$ y $H_1(z) = 1$

El procedimiento de Orellana y Mooney consiste en expandir la función kernel en una serie como la que se muestra:

$$\theta(\lambda) = \sum_n Q(n) z^n \quad (4.5.16)$$

donde los coeficientes $Q(n)$ pueden determinarse combinando las ecuaciones (4.5.12) y (4.5.16)

$$\sum_n Q(n) z^n = \frac{P(z)}{H(z) - P(z)} = \frac{\sum_n^{h_{N-1}} P(n) z^n}{\left\{ \sum_n^{h_{N-1}} H(n) - \sum_n^{h_{N-1}} P(n) \right\} z^n} \quad (4.5.17)$$

realizando el cociente de funciones del miembro derecho e igualando las cantidades de ambos miembros que tienen la misma po-

tencia de Z . Siguiendo este razonamiento es posible determinar la expresión general para los coeficientes $Q(n)$ como:

$$Q(n) = P(n) + \sum_{i=1}^d [P(i) - H(i)] Q(n-i) \quad (4.5.18)$$

donde " d " es el menor de los números enteros h_{N-1} ó $(n-1)$.

Orellana y Mooney han considerado el problema de la serie (4.5.16) en cuanto a su convergencia y han demostrado que la serie es convergente para todos los modelos de medios estratificados, exceptuando los casos de modelos con la última capa perfectamente conductora ó totalmente aislante. En estos casos, el problema de no convergencia de la serie puede salvarse usando dos artificios en el cálculo numérico: para el caso de modelos con $R_N \rightarrow \infty$ es posible utilizar la existencia de la asíntota rectilínea de pendiente $+1$ en las curvas de resistividad aparente, donde los valores asíntóticos son $\rho_{a,s} = \rho_s / s$ para el dispositivo Schlumberger y $\rho_{a,w} = 1.386292 \rho_s / s$ para el dispositivo Wenner. Para el caso de modelos con $R_N \rightarrow \infty$ el cálculo numérico se comienza con un coeficiente de reflexión K_{N-1} ligeramente diferente a 1 y cada valor de resistividad así calculado se compara con el valor asíntótico conocido, entonces cuando la diferencia entre ambos se vuelve menor que un valor escogido, los valores de resistividad aparente para las siguientes abscisas " s " ó " a " se hacen iguales a los valores asíntóticos. Para modelos con $R_N = 0$ el cálculo numérico de los valores de resistividad aparente se realiza haciendo simplemente el coeficiente de reflexión K_{N-1} ligeramente diferente a -1 .

La automatización del método de Orellana y Mooney requiere que la evaluación de las ecuaciones (4.5.3) y (4.5.4) se haga empleando un número finito de términos en las sumatorias involucradas, con lo cual aparece el problema de la evaluación del error por truncamiento en la serie después del m ésimo, o dicho de otra forma la determinación del número M de términos que hay que considerar en la sumatoria para evaluar los valores de resistividad aparente con un error dado. Orellana y Mooney han establecido que el error máximo posible por truncamiento está dado por:

para dispositivo Schlumberger: $E_{Max} = S^3/8M^2$ (4.5.19)
 para dispositivo Wenner : $E_{Max} = 3a^3/8M^2$

El análisis de las curvas de resistividad aparente calculadas con el programa del método susodicho permite establecer las siguientes conclusiones:

- 1) Para todos los modelos probados el programa proporciona valores numéricos de resistividad aparente similares a los publicados por Orellana y Mooney, siempre y cuando el valor de N_{Max} (número máximo posible de términos empleados para calcular la resistividad aparente) escogido por el usuario, sea suficiente.
- 2) El valor del parámetro N_{Max} para calcular los valores de resistividad aparente, con exactitud similar a los publicados, depende de los coeficientes de reflexión y los espesores del medio estratificado así como del valor de la distancia $AB/2$ ó $AB/3$ dados.
- 3) Para las curvas calculadas correspondientes a medios de tres capas, un valor máximo $N_{Max} = 600$ fue suficiente para calcular los valores de resistividad aparente con exactitud en todos los casos extraídos del álbum de Orellana y Mooney. En estos, la relación de espesores t_2/t_1 máxima es de 25 y la abscisa $AB/2$ ó $AB/3$ máxima es de 250. El tiempo empleado para calcular 15 puntos sobre una curva de resistividad aparente varía entre 7 y 38 segundos dependiendo del número de términos y por tanto, el mayor tiempo de cálculo se requiere en los casos en que $\rho_w = 0$ ó ∞ .
- 4) Para las curvas de resistividad aparente de cuatro capas fue suficiente un valor máximo de 1000. En estos, las relaciones de espesores máximos permitidos son $t_2/t_1 = 5$ y $t_3/t_1 = 25$; y la abscisa $AB/2$ ó $AB/3$ máxima es de 250. El tiempo empleado para calcular 15 puntos de la curva teórica varía entre 7 y 50 segundos.

IV. 5. 4 Método de Van Dam

El desarrollo del método de Van Dam para el cálculo de las curvas teóricas de la resistividad aparente parte de las expresiones matemáticas (4.5.12) y (4.5.15) ya establecidas para el método de Orellana, siendo la diferencia esencial la forma en que se establece la expansión en series de la función $\theta(\lambda)$, la cual se basa en el hecho de

que bajo ciertas condiciones una función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ puede sustituirse por una serie de términos infinita y convergente tal que:

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad n \rightarrow \infty \quad (4.5.20)$$

La serie es convergente sólo si se cumple que $|x| < 1$, y la convergencia es más rápida si x adopta valores cercanos a cero. Aplicando el análisis anterior al desarrollo en series de la función $\theta(z)$ se tiene que:

$$\theta(z) = \frac{P(z)}{H(z)-P(z)} = \frac{P(z)}{R(z)} = \frac{P(z)}{1-S(z)} \quad (4.5.21)$$

donde $z = e^{-2\lambda}$ y $S(z) = 1 - R(z)$. Para que la serie sea convergente es necesario que $|S(z)| = |1 - R(z)| < 1$ ó bien: $0 < R(z) < 2$. La primera parte de esta condición se satisface automáticamente puesto que siempre $R(z) > 0$. Por otro lado Van Dam estableció que la segunda parte de la condición siempre se satisface si los polinomios $P(z)$ y $R(z)$ se multiplican por el factor $a = 2 / (R_{max} + R_{min})$, donde R_{max} y R_{min} son los valores extremos de $R(z)$ en el intervalo $[0, 1]$. Además de esto, la multiplicación por el factor "a" acelera la convergencia de la serie, pues además de evitar que $R(z)$ sea mayor que 2, obliga a que los valores de $S(z)$ se aproximen a cero. Con lo anterior se define un nuevo conjunto de polinomios:

$$\begin{aligned} P'(z) &= a P(z) \\ R'(z) &= a R(z) \\ S'(z) &= 1 - R'(z) \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

de tal manera que la función $\theta(z)$ puede ser expresada como:

$$\theta(z) \approx P'(z) \sum_{i=1}^n \{ S'(z) \}^{i-1} \quad (4.5.23)$$

donde "n" puede denominarse el "grado de aproximación" de la expansión en series. La ecuación (4.5.23) puede escribirse como:

$$\theta(z) \approx \sum_{i=1}^{nh_{n-1}} Q(i) z^i \quad (4.5.24)$$

Los coeficientes $Q(i)$ se obtienen de la suma de los productos de las funciones $P'(z) \{S'(z)\}^i$. Esta es la forma como el método de Van Dam determina los coeficientes Q necesarios para el cálculo numérico de las expresiones (4.5.3) y (4.5.4)

En este método, al aumentar el grado de aproximación todos los valores de $Q(n)$ cambian y se agregan nuevos coeficientes, en contraste con el método de Orellana donde los $Q(n)$ también se calculan en base a los ya existentes pero sin necesidad de alterar estos. Teóricamente, en cada grado de aproximación, la curva calculada está más cercana a la curva exacta, sin embargo, después de un grado de aproximación óptimo los resultados se vuelven inexactos nuevamente, dando lugar a curvas muy diferentes a la curva exacta. Estas conclusiones fueron establecidas por Van Dam en su publicación y reproducidas nuevamente en este caso al analizar los resultados obtenidos con el programa de este método. La desventaja más seria del método de Van Dam radica en la inexistencia de un criterio para la detección automática del grado de aproximación óptimo después de alcanzado el cual detener los cálculos.

1) Para todos los modelos aprobados, la curva de resistividad aparente calculada con el grado de aproximación óptimo "n" mostraron * diferencias menores al 5% respecto a los valores calculados por Orellana y Mooney siempre que los coeficientes de reflexión K_i del medio estratificado sean tales que $-1 \leq K_i \leq .923$ tanto para medios de dos, tres y cuatro capas. Siempre que los resultados son satisfactorios, el valor mínimo del error es menor de .1 obteniéndose los mayores resultados cuando el error es menor de .005.

2) La obtención de curvas de buena calidad no parece depender de la magnitud de las relaciones de espesores del medio, pudiendo mejorar el programa todas las usadas por Orellana y Mooney. Sin embargo en ciertos casos el emplear relaciones de espesores t_i/t_j mayores de 10 requiere de tiempos de cálculo demasiado largos.

* En este método el grado de aproximación óptimo es considerado como el grado de aproximación mayor de la curva de resistividad aparente calculada.

4) El tiempo empleado en el cálculo de 15 puntos sobre una curva de resistividad aparente de tres ó cuatro capas varía generalmente entre 7 y 44 segundos dependiendo del valor del grado de aproximación óptimo.

IV.5.5 Método de Lima Lobato

El método desarrollado por E.M. Lima Lobato consiste en un procedimiento que combina la expansión en series de la función kernel y la analogía entre el cálculo de la resistividad aparente de un modelo de dos capas y el cálculo de la resistencia equivalente de un circuito de resistencias en serie. El desarrollo original de los fundamentos del método no parte de las expresiones (4.4.2) y (4.4.5) como en los métodos anteriores, sino de la expresión matemática para la función de resistividad aparente para un dispositivo tetraelectrónico, lineal y simétrico dada por:

$$\rho_a(L) = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{L^2 - b^2}{b^2} \int_0^\infty \theta(\lambda) [J_0\{\lambda(L-b)\} - J_0\{\lambda(L+b)\}] d\lambda \right\} \quad (4.5.25)$$

donde $L = AB/2$ y $b = MN/2$. Si se considera que en la expresión analítica (4.5.25) la función $\theta(\lambda)$ adopta su forma más simple para un medio estratificado de dos capas:

$$\theta(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda t_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda t_1}} \quad (4.5.26)$$

Desarrollando el cociente de funciones de la ecuación (4.5.26) se expande la función kernel en una serie de funciones exponenciales - dada por:

$$\theta(\lambda) = k_1 e^{-2\lambda t_1} + k_1^2 e^{-4\lambda t_1} + \dots + k_1^M e^{-2\lambda M t_1} + \dots \quad (4.5.27)$$

Sustituyendo la ecuación (4.5.27) en (4.5.25) y empleando la integral de Weber-Lipschitz (4.5.2) se obtiene la expresión de la función de resistividad aparente para un medio de dos capas.

$$\rho_a(L) = \rho_1 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M K_i^i F(L, b, t, i) + E(L, b, M+1) \right\} \quad (4.5.28)$$

donde:

$$F(L, b, t_1, i) = D \left[\frac{1}{\sqrt{(2t_1 i)^2 + (L-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2t_1 i)^2 + (L+b)^2}} \right] \quad (4.5.29)$$

$D = (L^2 - b^2)/b$ y $E(L, b, M+1)$ es el error debido al truncamiento de la expansión en series en el $M+1$ ésimo término:

$$E(L, b, M+1) = D \int_0^{\infty} K F(\lambda) \left[J_0\{\lambda(L-b)\} - J_0\{\lambda(L+b)\} \right] d\lambda \quad (4.5.30)$$

donde:

$$K F(\lambda) = \frac{(k_1 e^{-2\lambda t_1})^{M+1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda t_1}} \approx \frac{(k_1 e^{-2\lambda t_1})^{M+1}}{1 - k_1} \quad (4.5.31)$$

Es posible obtener una evaluación aproximada del error por truncamiento dado por:

$$E(L, b, M+1) \approx \frac{k_1^{M+1}}{1 - k_1} F(L, b, t_1, M+1) \quad (4.5.32)$$

De la teoría de circuitos eléctricos se sabe que en un circuito de resistencias conectadas en serie, la resistencia equivalente total de éste puede obtenerse calculando primero la resistencia equivalente parcial de un primer grupo de resistencias y entonces combinar este resultado con el resto de las resistencias del circuito, hasta haberlas combinado todas, para obtener la resistencia equivalente total. Basándose en la analogía entre el cálculo de las resistividades de un modelo de dos capas y el cálculo de la resistencia equivalente de un circuito en serie, Lima Lobato desarrolló un procedimiento para las resistencias aparentes de un medio estratificado de N capas dividiéndolo en varios medios de dos capas, como se describe enseguida:

- 1) Como primer paso se consideran las dos capas superiores del modelo y usando las expresiones (4.5.28), (4.5.29) y (4.5.32) se calcula la resistividad aparente del medio de dos capas.
- 2) Las dos primeras capas se consideran como una sola capa de espesor total igual a la suma de sus espesores particulares, y de re-

sistividad igual a la resistividad aparente calculada en el paso anterior, con lo que para cada espaciamento de electrodos, la capa equivalente tendrá una resistividad diferente. Se considera después la tercera capa del modelo original y usando las mismas expresiones que en el paso 1 se calcula la resistividad aparente para un modelo estratificado formado por las tres primeras capas del modelo original.

3) Se repite el procedimiento descrito en el paso 2 hasta considerar todas las capas del modelo, obteniéndose así la resistividad aparente para un medio estratificado de N capas.

El método de Lima Lobato se reduce entonces a la aplicación de las siguientes fórmulas de recurrencia.

$$j\rho_a(L) = \rho_j \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M [j_{i-1} K(L)] F(L, b, j, t_i, L) + E(L, b, M+1) \right\}$$

$$\text{donde: } j_{i-1} K(L) = \frac{\rho_i - j_{i-1} \rho_a(L)}{\rho_i + j_{i-1} \rho_a(L)} \quad (4.5.33)$$

$$(4.5.34)$$

$$E(L, b, j, T, i) = D \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2jT_i)^2 + (L-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2jT_i)^2 + (L+b)^2}} \right\} \quad (4.5.35)$$

$$jT = \sum_{n=1}^{j-1} t_n \quad j=2, 3, \dots, N \quad (4.5.36)$$

Un aspecto novedoso del método descrito, radica en el hecho de que para calcular la curva de resistividad aparente de un modelo de N capas es necesario calcular previamente las curvas de resistividad aparente para medios de 2 a $N-1$ capas del mismo modelo, -siendo posible entonces obtener $N-1$ curvas teóricas en una sola llamada del programa.

El análisis de los resultados obtenidos con este método se describe en los siguientes puntos:

1) El análisis de las curvas calculadas para medios de dos capas permite establecer que el programa del método de Lima da resultados correctos cuando el coeficiente de reflexión K_1 , adopta valores en el intervalo $-0.818 \leq K_1 \leq 0.818$.

2) Para el cálculo de curvas de resistividad aparente de tres capas, el análisis de los resultados obtenidos confirma la conclusión anterior, es decir, si los coeficientes de reflexión K_i del medio adoptan valores en $-.818 \leq K_i \leq .818$, las curvas calculadas son correctas. La excepción la constituyen las curvas tipo A que requieren que $0 < K_i < .6$ para ser calculadas con exactitud. El tiempo empleado para calcular 15 puntos de una curva de tres capas varía entre 11 y 17 segundos.

3) El análisis de las curvas de cuatro capas calculadas con el programa permite observar que este se vuelve más ineficiente para la obtención de valores numéricos satisfactorios y requiere que los coeficientes de reflexión sean tales que $-.6 \leq K_i \leq .6$ y en el caso con curvas de ramas tipo A es necesario que $0 < K_i < .5$, siempre que las relaciones de los espesores t_i/t_j del medio sean menores de 25 y aumenten con la profundidad. El tiempo empleado en el cálculo de 15 puntos de una curva de cuatro capas varía entre 17 y 28 segundos.

4) Existe mayor exactitud y seguridad de que los resultados sean correctos cuando las relaciones de espesores de los modelos sean $t_i/t_j > 50$, sobre todo para calcular curvas de resistividad aparente de más de tres capas siendo posible de esta manera aumentar la eficiencia del programa. Esta conclusión es importante pues el método no proporciona un parámetro que de una estimación del error de cálculo.

IV.5.6 Método de Filtrado lineal

La aplicación de la teoría del filtrado lineal para calcular la curva de resistividad aparente a partir de la función transformada de resistividad ha sido uno de los grandes logros de la geofísica de exploración. Este método pudo ser aplicado gracias a la relación lineal que hay entre la función de resistividades aparentes y la función transformada de resistividad.

El desarrollo del método de filtrado lineal para el cálculo de las curvas de resistividad aparente parte de la expresión matemática (4.4.6) siendo muy diferente a los métodos vistos anteriormente:

$$\rho_{a,s}(x) = \int_0^{\infty} T(y) J_1 \{ e^{-(y-x)} \} e^{-2(y-x)} dx \quad (4.5.37)$$

Haciendo $I(y-x) = e^{-2(y-x)} J_1(e^{-(y-x)})$ la expresión anterior queda como:

$$\rho_{a,s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T(y) I(y-x) dx \tag{4.5.38}$$

Esta expresión se puede ver como una integral de convolución que relaciona la entrada $T(y)$ con la salida $\rho_{a,s}(x)$, o sea,

$$\rho_{a,s}(x) = T(x) * I(x) \tag{4.5.39}$$

En el dominio del número de onda, la relación **Entrada-salida** dada por la ecuación (4.5.39) toma la siguiente forma algebraica:

$$\tilde{\rho}_{a,s}(f) = \tilde{T}(f) \cdot \tilde{I}(f) \tag{4.5.40}$$

donde $\tilde{\rho}_{a,s}(f)$ es la transformada de Fourier de $\rho_{a,s}(x)$, $\tilde{T}(f)$ es la transformada de Fourier de $T(x)$ y $\tilde{I}(f)$ es la transformada de Fourier de $I(x)$

Como $I(x)$ es una función conocida se puede digitalizar y los valores de esta función dan los coeficientes del operador de filtraje que convolucionados con $T(x)$ dan directamente la función $\rho_{a,s}(x)$.

IV.6 Métodos Clásicos de Interpretación.

IV.6.1 Introducción

La Interpretación de los datos de resistividad aparente obtenidos mediante la técnica del sondeo eléctrico vertical consiste en la determinación de los espesores y resistividades de las capas que forman el subsuelo a partir de la curva de resistividad aparente obtenida mediante el trabajo de campo. Este difícil problema que enfrenta el geofísico interpretador es el denominado problema inverso de la prospección eléctrica con corriente continua para medios estratificados.

La resolución del problema inverso u obtención de los espesores y resistividades del medio estratificado, tradicionalmente es -

llevada a cabo empleando los métodos clásicos ó indirectos de interpretación que son un conjunto de técnicas gráficas rigurosas ó semiesféricas cuyas diferentes variables se exponen a continuación.

IV.6 Métodos clásicos de interpretación.

IV.6.1 Introducción.

La interpretación de los datos de resistividad aparente - obtenidos mediante la técnica del sondeo eléctrico vertical - consiste en la determinación de los espesores y resistividades de los capas que forman el subsuelo a partir de la curva de resistividad aparente obtenida mediante el trabajo de campo, este difícil problema que enfrenta el geofísico interpretador es el denominado problema inverso de la prospección eléctrica con corriente continua para medios estratificados.

La resolución del problema inverso u obtención de los espesores y resistividades del medio estratificado tradicionalmente es llevada a cabo empleando los métodos clásicos ó métodos indirectos de interpretación que son un conjunto de técnicas gráficas rigurosas ó semiesféricas cuyas diferentes variables se exponen a continuación.

IV.6.2 Método de super posición.

El método indirecto de interpretación más empleado es el método de superposición que es una técnica basada en una teoría física rigurosamente científica y que consiste básicamente en la comparación de la curva de campo completa que se desea interpretar, con las curvas teóricas de un álbum hasta encontrar una de éstas que coincida con la primera. Los principales álbumes de curvas teóricas de resistividad aparente, publicados y disponibles para uso del geofísico interpretador usando el método de superposición son los siguientes:

a) El álbum de la Cic. Generale de Geophysique - -

197

(1933-36) que contiene 480 curvas para medios de 3 capas, publicado por la EAE6 en 1955.

b) El álbum de Orellana y Mooney (1966) que contiene 25 curvas de 2 capas, 912 de 3 capas y 480 de 4 capas.

c) El álbum holandés de Rijwaterstaat publicado por la EAE6 (1969), contiene 2268 curvas de 3 capas.

d) El álbum de Flathe (1963) que contiene 72 curvas de 5 capas.

Todos estos álbumes se complementan entre sí, sólo contienen curvas de resistividades aparentes, Schlumberger y están presentados en escala logarítmica de módulo de 62.5 mm.

Para la interpretación de curvas de campo obtenidas con dispositivos Wenner, existen 2 álbumes importantes.

a) El álbum de Mooney y Wetzel (1956) que contiene 2300 curvas para tres y cuatro capas en módulo logarítmico de 5 pulgadas. Donde los espesores y resistividades obtenidas podrán presentar variaciones dependiendo de la forma en que cada interpretador mueva sus diagramas.

b) Como se emplea toda la curva de campo, es posible advertir las irregularidades en la curva producidas por variaciones laterales ó porque el subsuelo no cumple las condiciones teóricas.

Las desventajas más importantes del método son:

a) Aún para el interpretador experimentado puede ser tardado lograr localizar una curva teórica que coincida perfectamente con la curva de campo.

b) La cantidad de curvas teóricas posibles es tan grande que resulta imposible preparar y manejar un álbum que las contenga a todas; es decir que en este sentido todos los álbumes resultan incompletos, y es frecuente para el intérprete el hecho de no encontrar entre todas las curvas de los álbumes que posee, una que se ajuste a la curva que desea interpretar. Aunque es necesario reconocer que esta limitación del método de superposición, ya no es tan importante desde el advenimiento de las técnicas modernas digitales y computarizadas que permiten generar rápidamente la curva teórica correspondiente a cualquier modelo.

2) Se superpone a la lámina de curvas teóricas el papel transparente que contiene la curva de campo, este se desplaza sobre el primero manteniendo siempre los ejes coordenados paralelos, hasta lograr que la curva de campo coincida con alguna de las curvas teóricas.

3) Se copian sobre el papel transparente la cruz y las marcas de resistividad de la familia de curvas teóricas. Se toma nota de las relaciones de resistividades de la familia y de los parámetros que representan la relación de espesores - que identifica a la curva teórica para la cual se obtuvo coincidencia.

4) La abscisa y la ordenada de la cruz copiada sobre el papel transparente representan el espesor y la resistividad de la primera capa. Las resistividades de los copos sucesivas pueden obtenerse gráficamente de las ordenadas sobre el papel transparente de sus respectivas marcas de resistividad ó bien numéricamente mediante las relaciones de resistividades que identifican a la familia de curvas teóricas. Los espesores de las capas del medio se obtienen numéricamente usando las relaciones de espesores que corresponden a la curva teórica elegida.

a) Al lograr la coincidencia perfecta entre la curva de campo completa y una de las curvas teóricas, es posible determinar exactamente los espesores y resistividades del medio estratificado, lo que no sucede con los métodos de interpretación que ajustan por partes la curva de campo.

b) El álbum de Orellana y Mooney que contiene el mismo número de curvas que para dispositivo Schlumberger en módulo logarítmico de $3\frac{1}{2}$ pulgadas.

Las curvas se agrupan por familias de acuerdo a su tipo, y para cada familia en la parte superior de la lámina que la contiene se presentan los valores de las resistividades del medio estratificado correspondiente, estos valores son también representados gráficamente como señales numeradas sobre el eje vertical a los que se denomina: "marcas de resistividad". Cada curva de la familia va además identificada por un parámetro que representa la relación de los espesores del medio. El origen de coordenadas de cada familia de curvas teóricas se denomina "cruz".

La aplicación del método de superposición requiere que las curvas de campo estén dibujadas sobre el papel bilogarítmico transparente del mismo módulo que el utilizado en las curvas teóricas, y que el interpretador establezca, si la curva de campo representa un medio estratificado de dos, tres y más capas. Una vez hecho esto, los etopos sucesivos que se deben seguir para la interpretación de una curva de campo son:

1) Se solucionan las láminas de curvas teóricas más parecidas a la curva de campo.

IV.6.3 Método de reducción

El método de reducción ó de ajuste parcial de curvas es una técnica gráfica empírica en las que las curvas de campo van siendo interpretadas por segmentos, usando las curvas teóricas de dos capas, la idea básica del método es que conforme cada porción de la curva es interpretada, las

capas del medio estratificado correspondientes al segmento interpretado son combinadas teóricamente para formar una sola capa ficticia homogénea e isotrópica. Este procedimiento requiere del uso de diagramas de curvas auxiliares junto con las colecciones de curvas teóricas de 2 y 3 capas, y es conocido también con el nombre de método del punto auxiliar.

Las limitaciones propicias del método de superposición han hecho que el método del punto auxiliar sea ampliamente usado el cual con un poco de práctica permite al interpretador obtener resultados de muy buena calidad.

Diagramas de curvas auxiliares

El método del punto auxiliar se desarrolló originalmente para la interpretación de curvas de campo de tres capas por medio de curvas teóricas de dos capas, su concepción puede ser comprendida fácilmente a través de un ejemplo particular.

La figura muestra una curva de tres capas que se desea interpretar; la primera parte de esta curva obtenida con las separaciones más corta de electrodos se ha ajustado a una de las curvas teóricas de dos capas, al lograrlo las coordenadas de la cruz de la lámina de curvas de dos capas sobre el papel bilogarítmico que contiene la curva de campo proporcionan los resistividades y el espesor de la primera capa, y el contraste de resistividad que corresponde a la curva de dos capas permite obtener la resistividad de la segunda capa. El problema que resuelve el método del punto auxiliar comienza aquí, es decir; ¿Cómo combinar las dos capas superiores que ya han sido interpretadas, en una sola capa homogénea e isotrópica de tal forma de tal forma que el segmento restante de la curva de campo que representaría entonces un medio estratificado de dos capas, pueda ser ajustado y de esta forma interpretado usando nuevamente las curvas teóricas de dos capas?, ó planteando de otra manera, ¿Cómo encontrar los coordenadas de un "punto auxiliar" sobre el cual colocar la cruz de las curvas teóricas de dos capas de tal forma que la parte derecha de la curva de campo que corresponde a las separaciones mayores de electrodos, quede -

ajustada por una de las curvas teóricas, así poder determinar el espesor de la segunda capa y la resistividad de la tercera - capa, de parámetros anteriormente desconocidos?, las coordenadas de este "punto auxiliar" representarían el espesor y la resistividad de la capa homogénea e isotrópica equivalente en sus efectos eléctricos exteriores a las dos capas superiores del medio estratificado.

Para responder a estas preguntas fué necesario hacer idealizaciones sobre las características del flujo de corriente en el medio estratificado de tres capas para separaciones grandes de electrodos, lo cual permitió definir las expresiones matemáticas semiempíricas para combinar los dos capas superiores en una sola capa homogénea e isotrópica. Puesto que solo existen cuatro tipos de medios estratificados de tres capas entonces existirán cuatro diferentes maneras de combinar los dos capas superiores.

Las expresiones matemáticas semiempíricas surgidas del análisis de la idealización del flujo de corriente en el subsuelo fueron las relacionadas a los medios estratificados tipo H y A, estas expresiones fundamentales que permiten calcular el espesor L^* y la resistividad ρ^* de la capa homogénea e isotrópica están dadas por:

Caso I: Tipo H ($\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$)

$$\xi_H = \frac{1 + \gamma}{1 + \frac{\gamma}{\mu}} \dots \dots \dots (4.5.48)$$

$$\eta_H = 1 + \gamma$$

Caso II: Tipo A ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$)

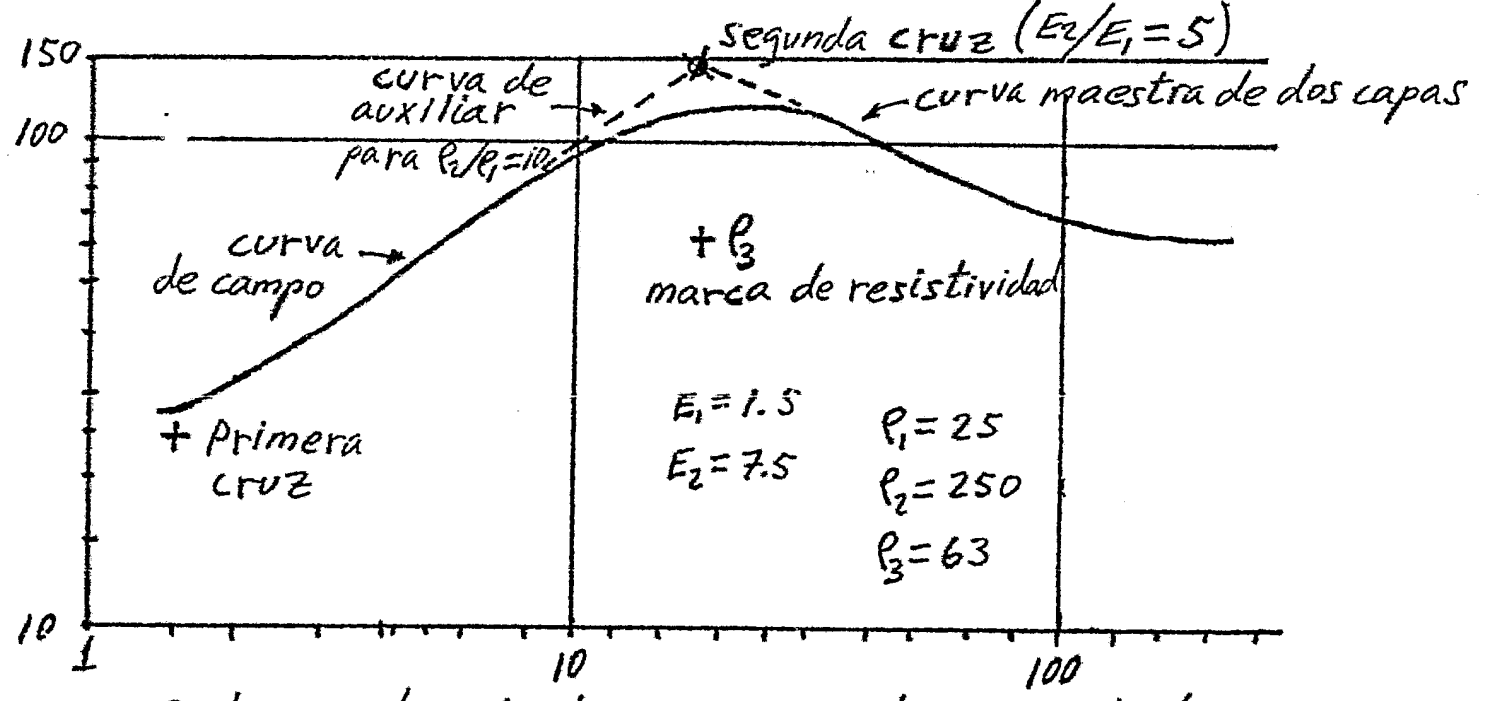
$$\xi_A = \sqrt{\frac{1 + \gamma \mu}{1 + \frac{\gamma}{\mu}}} \dots \dots \dots (4.5.49)$$

$$\eta_A = \sqrt{(1 + \mu \nu) \left(1 + \frac{\nu}{\mu}\right)}$$

Donde los variables adicionales ξ, η, μ, ν están dadas por:

$$\xi = \frac{l^*}{l_1}, \quad \eta = \frac{L^*}{t_1}, \quad \mu = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{t_2}{t_1}$$

Dando valores en las expresiones matemáticas (4.5.48) y (4.5.49) a las variables independientes $\mu = \rho_2/\rho_1$ y $\nu = t_2/t_1$, ha sido posible construir conjuntos de curvas de puntos - auxiliares, a las cuales se denomina diagramas auxiliares. - Así las expresiones (4.5.48) y (4.5.49) son las ecuaciones paramétricas de los diagramas auxiliares tipo H y A. Estos diagramas auxiliares se emplean en la interpretación de curvas de resistividad aparente tipo H y A, respectivamente.



Interpretación de una curva de campo de tres capas usando el método del punto auxiliar.

Las expresiones matemáticas semiempíricas para la combinación de las dos capas superiores en una sola capa homogénea e isotropa relacionadas a los medios estratificados tipo Q, K son semejantes a las desarrolladas para medios tipo H, y A, - respectivamente debido a que las condiciones del flujo de corriente en los medios Q y K son algo similares a las condiciones del flujo en los medios H y A sobretodo a separaciones

pequeñas de electrodos, sin embargo las expresiones (4.5.48) y (4.5.49) deben ser modificadas para los casos Q y K puesto que la experiencia práctica ha demostrado que la interpretación de estos tipos de curvas empleando diagramas auxiliares H y A conduce a resultados erróneos y esto es consecuencia de la diferencia en las condiciones del flujo de corriente entre los distintos casos de separaciones grandes de electrodos. Por lo tanto las expresiones (4.5.48) y (4.5.49) modificadas para representar las ecuaciones paramétricas de los diagramas auxiliares Q y K respectivamente están dadas por:

Caso III : Tipo Q ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$)

$$\xi_Q = \frac{1}{\pi} \xi_H = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \frac{\nu}{\mu}} \right) \dots \dots \dots (4.5.50)$$

$$\eta_Q = \frac{1}{\pi} \eta_H = \frac{1}{\pi} (1 + \nu)$$

Donde π es un factor empírico que depende de μ y ν

Caso IV : Tipo K ($\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$)

$$\xi_K = \xi_A = \sqrt{\frac{1 + \mu\nu}{1 + \frac{\nu}{\mu}}} \dots \dots \dots (4.5.51)$$

$$\eta_K = \epsilon \eta_A = \epsilon \sqrt{(1 + \mu\nu) \left(1 + \frac{\nu}{\mu}\right)}$$

Donde ϵ es un factor empírico que depende de A, el coeficiente de anisotropía.

Las expresiones (4.5.50) y (4.5.51) son entonces las ecuaciones paramétricas de los diagramas auxiliares tipo Q y K y que se emplean en la interpretación de curvas de resistividad aparente tipos Q y K.

Es necesario mencionar que los diagramas auxiliares Q y K

presentados solo son aplicables a la interpretación de curvas de resistividad aparente tipo Schlumberger puesto que han sido determinados empíricamente a través del análisis de curvas de este mismo tipo.

Etapas en la interpretación

El método del punto auxiliar ha sido tratado por varios autores, por lo que presenta distintas modalidades, en esta sección se describirá el método en su forma original (Ebert 1943) que está basado en el uso de diagramas auxiliares, junto con una colección de curvas teóricas de dos capas, y el método de Homilius en el que se usan diagramas auxiliares en combinación con colecciones de curvas teóricas de tres capas.

Como paso previo a la aplicación del método, el interpretador debe decidir si la curva de campo es de tipo H, K, A, QH, KH, etc.

IV. 6.4 Método de Ebert

Para la aplicación del método de Ebert a la interpretación de curvas de campo de tres o más capas se siguen las etapas descritas a continuación:

1) Se superpone el papel transparente que contiene la curva de campo a la lámina de las curvas teóricas de dos capas y se desplaza manteniendo siempre los ejes coordenados paralelos hasta que se hace coincidir la parte izquierda de la curva de campo con una ~~curva~~ curva teórica de dos capas. Se calcan sobre el papel transparente la marca de resistividad y la cruz a la cual se denomina "primera cruz" de cuyos coordenadas se determinará t_1 y l_1 . Se anota la relación ρ_2/l_1 de donde se obtiene el valor ρ_2 .

2) Se superpone el papel transparente que contiene la curva de campo, al diagrama auxiliar que corresponda a la parte de la curva de campo, que se está interpretando, concurrendo los ejes coordenados paralelos. Para curvas H y Q se coloca

La primera cruz sobre el origen de coordenadas del diagrama auxiliar. Para curvas A y K se coloca la primera cruz sobre el eje vertical izquierdo del diagrama auxiliar, con una ordenada igual al valor ρ_2/ρ_1 .

3) Se calca sobre el papel transparente la curva auxiliar que inicia en la primera cruz y que corresponde al valor ρ_2/ρ_1 .

4) Nuevamente se superpone el papel transparente con la hoja de campo a la lámina con los curvas teóricas de dos capas, y se desplaza una sobre otra de tal manera que la cruz de las curvas patrón coincida siempre con la curva auxiliar trazada, hasta que la parte derecha de la curva de campo coincida con una de las curvas teóricas. Los ejes coordenados siempre deben considerarse paralelos.

5) Se calca sobre el papel transparente la "segunda cruz" de coordenadas (t_{II}, ρ_{II}) y la marca de resistividad de la curva teórica, así también se anota el parámetro ρ_3/ρ_{II} que identifica a la curva teórica. Los coordenadas (t_{II}, ρ_{II}) sitúan adecuadamente el punto auxiliar y representan el espesor y la resistividad de la capa homogénea e isotrópica que sustituye a las dos capas superiores.

El valor de ρ_3 se obtiene gráficamente de la ordenada de la marca de resistividad o numéricamente a partir del valor de ρ_{II} y la relación ρ_3/ρ_{II} .

6) El papel transparente se superpone nuevamente al diagrama auxiliar en la misma posición que en el paso 2. La segunda cruz caerá sobre o cerca de una de las líneas punteadas, de donde se obtiene la relación t_2/t_1 , pudiendo calcularse el valor de t_2 .

La interpretación de una curva de campo de tres capas finalizaría en la etapa anterior, más sin embargo aunque el método del punto auxiliar fue originalmente concebido sólo para éste propósito, es posible aplicarlo para interpretar curvas de campo de más de tres capas. Los etapas adicionales requeridos consisten en la aplica-

ción reiterada del procedimiento anteriormente descrito. Como ejemplo se extenderá para un caso de cuatro capas:

7) Una vez lograda la interpretación de los dos primeros "ramos" de la curva de campo, el papel transparente se superpone al diagrama auxiliar adecuado que corresponda a la segunda parte de la curva de campo. Se calca sobre el papel transparente la curva auxiliar que inicia en la segunda cruz y que corresponde al valor ρ_3/ρ_{II} .

8) Se superpone el papel transparente con la curva de campo a la lámina con las curvas teóricas de dos capas y se procede como en el paso 4.

9) Se calca sobre el papel transparente la "tercera cruz" de coordenadas (ρ_{III}, t_{III}) y la marca de resistividad de la curva teórica, así también se anota el parámetro ρ_4/ρ_{III} que identifica a la curva teórica. Las coordenadas (ρ_{III}, t_{III}) del punto auxiliar representan el espesor y la resistividad de la capa homogénea e isotrópica equivalente a las tres capas superiores el valor de ρ_4 se obtiene gráficamente de las coordenadas de la marca de resistividad o numericamente a partir de la ordenada de la tercera cruz y de la relación ρ_4/ρ_{III} .

10) El papel transparente se superpone nuevamente al diagrama auxiliar en la misma posición que en el paso 7: La posición de la tercera cruz con respecto a las demás líneas —planteadas del diagrama proporciona el valor t_3/t_{II} calculándose el valor de t_3 .

Las ventajas más importantes que presenta la utilización del método es mucho mayor que para el método del punto auxiliar en la movilidad de Ebert son las siguientes:

a) El número de casos reales al que es aplicable el método es mucho mayor que para el método de superposición, en vista del número limitado de curvas teóricas contenidas en los álbumes exist-

tentes.

b) El método del punto auxiliar es rápido y en general suficientemente exacto para los casos favorables cuando es aplicado por un interpretador experto.

Las desventajas relacionadas al método del punto auxiliar son:

a) Cuando el método se aplica a la interpretación de curvas de campo de más de tres capas, los resultados obtenidos disminuyen en calidad. Esto se debe a que el método es utilizado — para situaciones que exceden el propósito para el que originalmente fué concebido.

b) Para los casos de curvas de campo de forma complicada, se observa que segmentos importantes de la curva de campo no son aproximados por las curvas teóricas de dos capas, por lo cual los resultados obtenidos serán de mala calidad.

c) El método del punto auxiliar requiere de considerable criterio por parte del interpretador, y los buenos resultados sólo pueden ser obtenidos con bastante práctica.

IV. 6.5 Método de Homilius.

El método de Homilius consiste en una extensión del método del punto auxiliar, en la que los diagromas auxiliares se usan en combinación con colecciones de curvas teóricas de tres capas. El uso de este método permite que en muchas de las capas difíciles de interpretar mediante la modalidad de Ebert se obtengan mejores resultados. Para la aplicación del método de Homilius a curvas de cuatro ó más capas se siguen las siguientes etapas:

1) Se clasifica la parte izquierda de la curva de campo como una de tipo H, K, Q ó A.

2) Se seleccionan las láminas con curvas teóricas de tres — capas más parecidas a la parte izquierda de la curva de campo.

Se superpone el papel transparente con la curva de campo a las láminas seleccionadas hasta que se logra hacer coincidir, la parte izquierda de la curva de campo con una curva teórica. Se calcan sobre el papel transparente la "primera cruz", cuyas coordenadas proporcionan los valores de ρ_1 y t_1 . Se toma nota de las relaciones t_2/t_1 y ρ_2/ρ_1 que identifican a la curva teórica y se calculan los valores de t_2 y ρ_2 .

3) Se superpone el papel transparente al diagrama auxiliar correspondiente y puesto que se conocen los valores t_2/t_1 y ρ_2/ρ_1 se determina directamente la posición de la "segunda cruz" de coordenadas (ρ_{II}, t_{II}) .

4) Se clasifica la parte derecha de la curva de campo y se seleccionan las láminas con las curvas teóricas más similares a ella. Colocando el origen de coordenadas de las láminas sobre la segunda cruz se busca la curva teórica que coincida con la parte derecha de la curva de campo. Se toma nota de los parámetros que identifican la curva teórica que en este caso serán ρ_3/ρ_{II} , t_3/t_{II} y ρ_4/ρ_{II} , de donde se calculan los parámetros para la tercera y cuarta capas.

La interpretación de una curva de campo de cuatro capas finalizaría en el paso anterior, más la aplicación reiterada de las etapas descritas permite la interpretación de curvas de cinco o más capas mediante el método de Homilius. Lógicamente entre mayor sea el número de capas representadas para una curva de campo más difícil resultará la aplicación del método y la obtención de resultados confiables.

IV.6.6 Método de la función Kernel.

La aplicación de la función Kernel a la interpretación de mediciones de resistividad aparente fue sugerida en 1933 por L.B. Slichter, quien estableció que la determinación de los espesores y resistividades de un medio estratificado a partir de una curva de resistividad aparente, podía realizarse en dos etapas:

1ª Determinar la curva de función Kernel del medio estratificado a partir de la curva de resistividad aparente. Este paso tiene su justificación en el hecho de que es la función Kernel la que contiene directamente toda la información (espesores, y resistividades) sobre el medio estratificado.

2ª Determinar los espesores y resistividades del medio estratificado a partir de la curva de función Kernel.

O. Koefoed ha desarrollado un método de interpretación que sigue la línea sugerida por Slichter, los fundamentos y pasos de este método son descritos a continuación:

1) Determinación de la curva de función Kernel a partir de la curva de resistividad aparente.

Para llevar a cabo la primera etapa del procedimiento sugerido por Slichter, Koefoed estableció el método de descomposición que se describe a continuación:

Partiendo de la función de resistividad aparente para dispositivo Schlumberger:

$$\rho_{as} = \rho_1 \left\{ 1 + 2s^2 \int_0^{\infty} \theta(\bar{n}) J_1(\bar{n}s) \bar{n} d\bar{n} \right\} \dots (4.5.51)$$

Es posible aplicando la transformada de Hankel a esta expresión obtener una expresión explícita para la función Kernel de Stefanescu de la forma:

$$\theta(\bar{n}) = \int_0^{\infty} \frac{\rho_{as} - \rho_1}{2\rho_1 s} J_1(\bar{n}s) ds \dots \dots \dots (4.5.52)$$

Ahora suponiendo que es posible expresar la función de resistividad aparente como una suma de funciones parciales de resistividad aparente, es decir que:

$$\rho_{as} = \sum_{i=1}^n \Delta_i \rho_{as} \dots \dots \dots (4.5.53)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (4.5.53) en (4.5.52) se obtiene:

$$\theta(\lambda) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \frac{\Delta_i \rho_{as}}{2 \rho_{1s}} J_1(\lambda s) ds - \frac{1}{2} \dots \dots (4.5.54)$$

E introduciendo el concepto de funciones parciales Kernel definidos por:

$$\Delta_i \theta(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\Delta_i \rho_{as}}{2 \rho_{1s}} J_1(\lambda s) ds \dots \dots (4.5.55)$$

Sustituyendo ahora la ecuación (4.5.55) en (4.5.54) se obtiene:

$$H(\lambda) = \theta(\lambda) + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^n \Delta_i \theta(\lambda) \dots \dots (4.5.56)$$

El desarrollo anterior que establece las bases para la determinación de la función Kernel en este caso la función - Kernel aumentada $H(\lambda)$, a partir de la curva de resistividad aparente siguiendo los etapos descritos a continuación:

- 1) Se aproxima una parte de la curva de resistividades aparentes por medio de una función parcial de resistividad aparente $\Delta_1 \rho_{as}$.
- 2) Se resta $\Delta_1 \rho_{as}$ de la suma de resistividad aparente.
- 3) La primera parte de la curva obtenida por la operación descrita del paso 2, se aproxima por una segunda función parcial de resistividad aparente $\Delta_2 \rho_{as}$.
- 4) Se resta $\Delta_2 \rho_{as}$ de la curva obtenida en el paso 2.
- 5) Las etapas anteriores son repetidas hasta que la curva de resistividad aparente ha sido aproximada en su totalidad por medio de funciones parciales de resistividad aparente.

6) Se determinan las funciones Kernel parciales $\Delta_i \theta(\bar{\rho})$ correspondientes a las funciones parciales de resistividad aparente $\Delta_i \rho$ obtenidas en los pasos anteriores.

7) La función Kernel aumentada $H(\bar{\rho})$ se obtiene sumando las funciones Kernel parciales $\Delta_i G(\bar{\rho})$ obtenidas.

Para que el procedimiento descrito fuera aplicable, Koefoed estableció las expresiones matemáticas de las funciones parciales de resistividad aparente de tal forma que permitieran realizar en forma analítica la integración que aparece en la ecuación (4.5.55) y que tuvieran la forma adecuada para usarlos en la aproximación de la curva de resistividad aparente. Estas expresiones matemáticas para las funciones parciales Kernel y de resistividad aparente han sido graficadas en papel bilogarítmico para formar un conjunto de curvas patrón usadas en la determinación de la función Kernel aumentada.

El método de determinación de la función Kernel aquí descrito sirve para la interpretación de curvas de resistividad aparente tipo Schlumberger, sin embargo es también aplicable a las curvas de resistividad aparente tipo Wenner adecuadas. Es posible demostrar que las funciones parciales de resistividad aparente tipo Wenner pueden ser derivadas de las funciones parciales de resistividad aparente tipo Schlumberger correspondientes a los mismos funciones parciales Kernel mediante la ecuación:

$$\Delta_i \rho_{aw} = 2a \int_a^{2a} \frac{\Delta_i \rho_{as}}{s^2} ds \dots \dots (4.5.57)$$

Una forma adicional más versátil y rápida de llevar a cabo el primer paso del método sugerido por Slichter, sería aplicar filtro lineal directo a la curva de resistividad aparente muestreada para obtener la función transformada de resistividad $T(\bar{\rho})$ y usando la relación:

$$H(\bar{\rho}) = \frac{T(\bar{\rho})}{2f_i} \dots \dots (4.5.58)$$

Determinar la función Kernel aumentada $H(\bar{\alpha})$. La técnica de filtrado lineal ha sido descrita en el capítulo anterior.

Determinación de los espesores y resistividades del medio estratificado a partir de la función Kernel aumentada.

Para llevar a cabo la segunda etapa del procedimiento sugerido por Slichter, Koefoed modificó el método originalmente desarrollado por Pekeris, este nuevo método parte del hecho fundamental de que para valores pequeños de $1/\bar{\alpha}$, la función Kernel modificada $G(\bar{\alpha})$ se aproxima asintóticamente a la función:

$$y_1 = K_1 e^{-2\bar{\alpha}h_1} \dots \dots \dots (4.5.59)$$

A partir de la relación entre las funciones Kernel aumentada y modificada dada por:

$$H(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + G(\bar{\alpha})}{1 - G(\bar{\alpha})} \right) \dots \dots \dots (4.5.60)$$

Se puede, sustituyendo la ecuación (4.5.59) en (4.5.60) concluir que para valores pequeños de $1/\bar{\alpha}$ la función Kernel aumentada se aproxima asintóticamente a la función:

$$Z = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + y_1}{1 - y_1} \right) \dots \dots \dots (4.5.61)$$

La ecuación (4.5.61) representa la función Kernel aumentada para un medio de dos capas con espesor h_1 y coeficiente de reflexión K_1 , y con ella se ha construido una lamina de espesor de curvas patrón de funciones Kernel aumentadas para distintos valores de K .

Unido a lo anterior, el método emplea la propiedad de las funciones Kernel que permite transformar la función Kernel aumentada para un caso de N capas en la función Kernel aumentada para el mismo medio pero con $(N-1)$ capas, el cual se obtiene eliminando la capa superior del medio de -

N capas. La ecuación básica para esta transformación es:

$$H_{(N-1)} = \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{H_N - W_1}{\frac{1}{2} - 2H_N W_1} \dots \dots \dots (4.5.62)$$

De donde:

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \gamma_1 / K_1}{1 + \gamma_1 / K_1} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-2\pi h_1}}{1 + e^{2\pi h_1}} \dots \dots (4.5.63)$$

La cual representa la función Kernel comentada para un medio de dos capas con espesor h_1 y coeficiente de reflexión $K_1 = -1$

El desarrollo anterior sugiere los etapos que deben seguirse para la determinación de los espesores y resistividades a partir de la función Kernel y que se describirá enseguida:

1) Observando la curva de resistividad aparente determinar con la mayor exactitud posible el valor de ρ_1 para la resistividad de la primera capa, y asimismo hacer una suposición aproximada de los valores de las resistividades para el resto de las capas del medio, con objeto de obtener una idea de los valores esperados para los coeficientes de reflexión K_i .

2) Determinar la función Kernel comentada $H(\bar{\rho})$ por medio de uno de los procedimientos de funciones de resistividad aparente parciales.

3) Superponer el papel transparente que contiene la función $H(\bar{\rho})$, a la lámina de curvas patrón de funciones Kernel de dos capas desplazándolas una sobre otra conservando los ejes coordenados paralelos hasta lograr que una de las curvas teóricas se ajuste a la parte izquierda de la función $H(\bar{\rho})$. Una vez hecho esto se anota el valor de K_1 que identifica la curva teórica y se calca la posición de la abscisa $1/\bar{\rho}h = 1$ de la lámina patrón. Conocidas ρ_1 y K_1 se determina el valor de ρ_2 y de la posición de $1/\bar{\rho}h = 1$ se determina h_1 , el espesor de -

la primera capa.

4) Conservando los diagramas en la posición del paso anterior se calca la curva W_1 y se procede a determinar la función Kernel aumentada H_{N-1} de acuerdo a la relación (4.5.62).

5) Se repite el paso 3, ahora usando la función H_{N-1} , determinándose así el parámetro K_2 de donde se obtiene ρ_3 la resistividad de la tercera capa, y de la posición de la abscisa $1/\bar{\rho}h = i$ sobre el papel transparente se determina h_2 , el espesor de la segunda capa.

La interpretación de una curva de resistividad aparente para un medio de tres capas terminaría en este momento, sin embargo la interpretación de curvas de cuatro ó más capas se logra procediendo a la aplicación repetida de los pasos 3 y 4. Las ventajas más importantes que presenta la utilización del método de la función Kernel son las siguientes:

1) El método descrito dota al interpretador de un método de interpretación complementario a los de comparación de curvas de resistividad aparente, con la particularidad de que la interpretación de la función Kernel,

2) Si para la determinación de la función Kernel aumentada se emplea la técnica de filtrado lineal, usando un filtro directo de poca longitud que permita realizar el proceso numérico en una calculadora de mano, se elimina así la parte más lenta y difícil del método, el cual, entonces adquiere una versatilidad similar a la del método del punto auxiliar, pues se vuelve bastante rápido y sólo necesita una lámina de curvas patrón.

En contraposición es necesario señalar, que las desventajas más importantes del método son:

1) El interpretador debe realizar una suposición inicial de -

Los valores de los parámetros del medio estratificado sobre todo la exactitud con que se determine inicialmente el valor de ρ se reflejará en todo el proceso de interpretación.

2) El cálculo sucesivo de las funciones Kernel aumentadas H_{N-1} , debe realizarse gráficamente, lo cual origina una pérdida de precisión que en ocasiones puede reflejarse la manera importante en los resultados finales de la interpretación.

IV.7 Práctica del sondeo eléctrico vertical.

IV.7.1 Etapas que constituyen el SEV en el trabajo de campo.

- 1) Planteamiento del problema.
- 2) Recopilación de información.
- 3) Elección del método.
- 4) Programación del trabajo de campo.
- 5) Ejecución del trabajo de campo.
- 6) Procesamiento de información obtenida.
- 7) Interpretación física.
- 8) Interpretación definitiva.

La calidad de los resultados finales nunca será superior a la conseguida en alguna de las etapas, ya que si alguna de las etapas fue ejecutada con errores esto redundará en todas las demás etapas.

IV.7.1.1 Planteamiento del problema.

El problema a resolver debe estar claramente planteado, sea en términos geológicos ó geotécnicos (en función de la geometría) y debe existir un contraste en alguna propiedad física en el terreno de estudio. No debe aceptarse un estudio si no se han determinado dos puntos básicos: - objetivo y escala.

El objetivo podría ser, por ejemplo, seguir el techo de una formación calcárea, ó el del Paleozoico, la localización de "peces" (bolsadas), la determinación de los cambios de espesor de una formación determinada, etc. Si no es así es difícil que el ingeniero Geofísico pueda tener éxito, si no se le especifica con claridad lo que se desea de él. Deben desecharse los estudios efectuados con la finalidad de mejorar el informe, un trabajo geológico, ó, para justificar ciertas conclusiones, esto, a la larga desprestigia la profesión.

Con respecto a la escala, los estudios geofísicos se pueden realizar con diferentes grados de detalle, desde el reconocimiento general a gran escala hasta la investigación minuciosa de objetivo de tamaño pequeño, y el modo de expresar cuantitativamente este grado de detalle es por medio de la escala de trabajo. La elección de la escala debe realizarse en función del tamaño de los objetivos, tipo de investigación (reconocimiento, detalle, etc.), condiciones geológicas, experiencias en problemas análogos, etc. De esta forma la cartografía topográfica y geológica debe estar en consonancia con el estudio.

IV.7.1.2 Recopilación de información.

Se realiza con el objeto de decidir si es posible y conveniente aplicar un método geofísico determinado al área en estudio. La información necesario es:

- Topografía.
- Planos y secciones geológicas.

- Informes geológicos
- Geología del subsuelo
- Otros estudios geofísicos
- Logística
- Ecología

IV.7.1.3 Elección del método.

La elección del método, técnica y modalidad estará en función de:

- a) Objetivo {
 - Tamaño.
 - Profundidad.
 - Forma.
 - Contraste en la propiedad.

b) Poder resolutivo.

c) Costo (economía).

d) Tiempo.

e) Datos geológicos y topográficos.

f) Causas de perturbación extrañas.

IV.7.1.4 Programación del trabajo de campo.

a) Distancia entre sondeos (densidad).

b) Elección de los centros de sondeo.

c) Distancia : AB final y R final.

d) Rumbo de las olas

a) Distancia entre sondeos.

Fijar este dato, es uno de los puntos más importantes de la programación. Si se utiliza el concepto de escala, la densidad de sondeos se determina en función de ésta. Cuando no se aplica ésta idea hay que proceder de otro modo, lo que en el fondo equivale a una determinación de escala. La regla básica es que dicha distancia debe ser proporcional a la distancia prevista para el objetivo. El factor de proporcionalidad depende del grado de detalle de la investigación, y puede variar entre uno y cuatro. Para estudios de reconocimiento puede emplearse el factor 2 y en caso de zonas muy uniformes puede elevarse a 4.

Si el estudio se efectúa con distancias mayores a la recomendada, el trabajo pierde calidad y pueden producirse errores y equivocaciones, la correlación entre sondeos se hace insegura y problemática e incluso pueden adoptarse soluciones falsas, sin contar que pueden pasar por desapercibidas fallas, pliegues y otros accidentes.

Si las formaciones geológicas presentan una direccionalidad (rumbo) más ó menos constante, los sondeos pueden colocarse sobre perfiles perpendiculares a dicho rumbo, y la distancia entre ellos a lo largo del perfil puede ser la mitad ó la cuarta parte de la distancia entre perfiles.

Cuando el rumbo de las formaciones cambia, no es conveniente conservar el paralelismo entre los perfiles, sino establecerlos de modo que cada uno de ellos corte transversalmente los contactos y accidentes geológicos.

b) Elección de centros de sondeos.

Se realiza en base a:

— Fotografías aéreas

— Planos topográficos

— Planos geológicos.

Con el auxilio de este material es posible determinar con precisión el lugar donde se ubicará el sondeo.

d) Rumbo de las alas.

Utilizando lo anterior se define el centro y el "rumbo de las alas", cuidando que los electrodos de corriente — "jamás" crucen una falla o contacto.

Debe procurarse que las alas caminen sobre una curva de nivel y al mismo tiempo paralelas a las estructuras. El rumbo debe estar en función de las condiciones superficiales y de las estructuras profundas.

El rumbo de la línea debe ser tal que no atravesase obstáculos insolvables o difíciles, y el que el relieve sea lo más llano posible. Además los electrodos no deben pasar nunca sobre ningún contacto geológico aflorante o subaflorante que separe formaciones de resistividad diferente, ya que ello deformaría considerablemente la curva de campo.

En cuanto a las circunstancias profundas, hay que atender a la presencia en el sustrato de escalones o bloques hundidos o levantados. En general, y en contra de lo que suele creerse, es preferible que el rumbo de los sondeos sea ortogonal a las fallas que delimitan estas estructuras, aunque es más seguro efectuar sondeos en cruz.

En terrenos llanos y uniformes de tectónica sencilla y subhorizontal, la elección del rumbo no es problema y puede ser la del perfil.

Cuando la tectónica es complicada y el relieve abrupto, las condiciones anteriores pueden ser contradictorias por lo que se imponen soluciones de compromiso. En estos casos es frecuente tener que recurrir a dispositivos lineales asimétricos, en los que se mueve sólo uno de los electrodos de corriente.

c) Distancia \bar{AB} final.

La determinación de ésta distancia es probablemente el punto más difícil de la programación.

La profundidad máxima interpretable de la curva de sondeo, depende por una parte de la distancia AB máxima, de la abertura, MN y del corte geoelectrico (más precisamente de la pseudoanisotropía.).

El procedimiento más seguro en la práctica es adoptar un AB provisional y que sobre la marcha se modifica. Este AB provisional se toma de las curvas DZ para varios casos posibles de sondeos de ensayo en puntos preestablecidos en la zona de estudio.

IV. 7. 1.5 Ejecución del trabajo de campo.

Antes de comenzar las reglas más comunes para la ejecución del trabajo de campo, es necesario revisar las condiciones instrumentales.

- Electrodo
- Cables
- Carretes
- Transmisor
- Receptor

Electrodos.

Usualmente son barras redondas ó barras de un metro aproximadamente, su diámetro suele tener entre 1 a 3 cm., haciendo filo ó punta para que se pueda clavar más fácilmente en el terreno, estas barras pueden ser de diversos materiales los más usuales son de fierro ó acero. otros de bronce, cobre, latón, etc., para tener una mejor conductividad de la corriente sobre todo en lo que respecta a los electrodos de emisión, su conexión puede hacerse con caimones apropiados al diámetro de la barra ó bien entredándole el cable a la barra unos 10cm., abajo del extremo superior y aislándolo con cinta.

Existen otras modalidades de electrodos según los difi-

cultades del terreno, estos pueden hacerse bien por medio de placas de acero, de aluminio ó de otro material y poniéndolos en contacto con el terreno poniéndoles tierra encima o bien enterrándolos muy poco y mojando el terreno para tener un mejor contacto.

Cable

El cable debe ser de buena calidad y muy baja resistencia óhmica, de buen aislamiento y una alta resistencia a la tracción esto debido a su manejo y uso en el campo.

Carretes

Los carretes son los dispositivos donde va enredado el cable, existen dos tipos que son:

a) Carrete móvil: El carrete móvil como su nombre lo dice es el carrete que se desplaza a medida que se incrementa la abertura entre electrodos. Ante la circunstancia de peso y volumen estos deberán ser ligeros, maniobrables para su uso práctico que da una mayor eficacia en el trabajo, del operador.

b) Carrete fijo: Usado por los geofísicos franceses y soviéticos, consiste en el empleo de carretes grandes de material aislante, que se colocan junto al centro del sondeo. El cable se extiende tirando de él hasta que se desenrolle la longitud de cable necesaria para la estación que va a medirse.

Circuito transmisor

Esta compuesto de una fuente de poder F (generador), dos electrodos "A" y "B", un amperímetro y el cable de corriente como muestra la figura 4.24 a

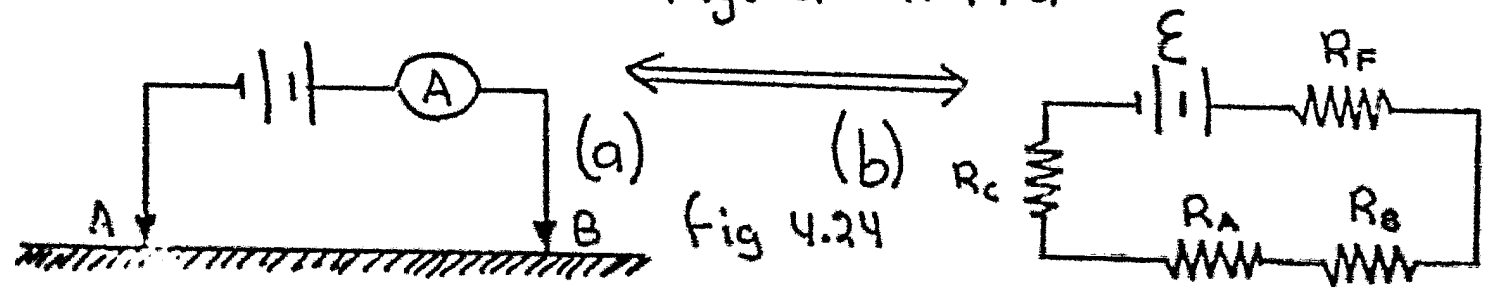


Fig 4.24

En la figura (4.24.b)

R_F = resistencia de la fuente de corriente

R_c = resistencia del cable

R_A y R_B = resistencias de contacto de los electrodos A y B

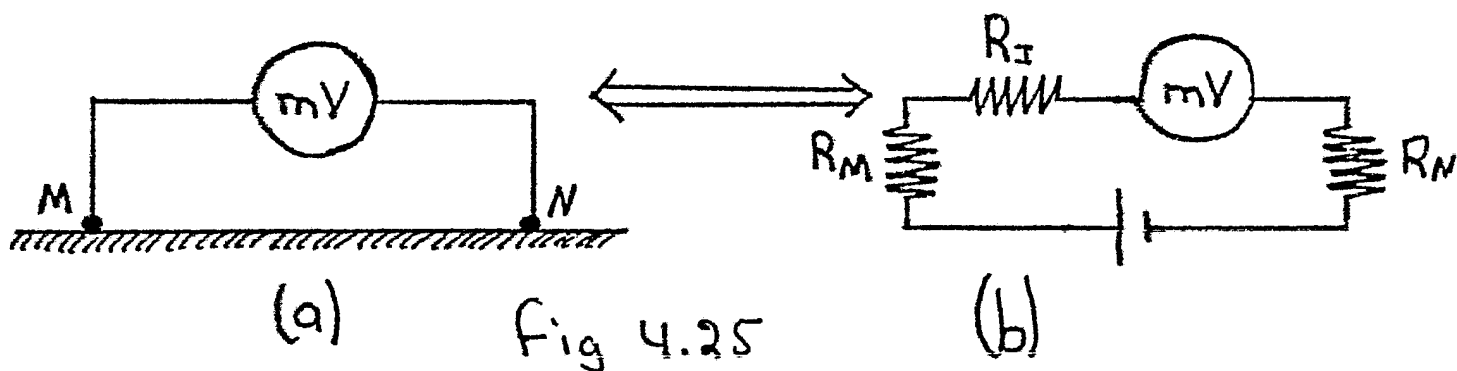
\mathcal{E} = fem del generador.

Por lo tanto de las leyes de Kirchhoff

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_F + R_c + R_A + R_B} \quad \dots \quad (4.6.1)$$

Circuito receptor

Está compuesto de un medidor de voltaje de dos electrodos (generalmente de cobre) y del cable (fig (4.25)).



En la figura (4.25.b)

R_I = resistencia del instrumento

R_M y R_N = resistencias de contacto de los electrodos M, N.

Aplicando las leyes de Kirchhoff.

$$\Delta V' = \frac{R_I}{R_I + R_M + R_N} \Delta V \quad \dots \quad (4.6.2)$$

En donde

$\Delta V'$ = fem leída por el instrumento

ΔV = fem creada por el campo eléctrico del circuito emisor.

Los problemas más comunes que sufren estos instrumentos son:

- 1.- Resistencias de contacto.
- 2.- Fugas.
- 3.- Electrodo al infinito.
- 4.- Polarización de electrodos.
- 5.- Corrientes perturbadoras.
- 6.- Medición de distancias.
- 7.- Carrete fijo ó carrete móvil.
- 8.- Tiempo de espera de la lectura.
- 9.- Hojas de campo.
- 10.- Calidad de las curvas.

Resistencias de contacto.

Son las resistencias que más influyen en las ecuaciones (4.6.1) y (4.6.2) debido a su alto valor. La resistencia del terreno no influye prácticamente en la intensidad del circuito de emisión, salvo en la parte más próxima al electrodo; por esta causa se le denomina resistencia de contacto.

La resistencia de contacto de los electrodos es el factor que limita en la práctica el valor de la intensidad I . El medio más conveniente para aumentar ésta no es elevar la tensión del generador, sino disminuir las resistencias de contacto de los electrodos A y B. Para esto, puede emplearse alguno de estos procedimientos ó incluso todos ellos:

- a) Clavar más profundamente los electrodos
- b) Disminuir la resistencia del terreno en contacto con los electrodos regándolo con agua salada.
- c) Sustituir cada uno de los electrodos por un "tomatierras" — compuesto por varias barrenas metálicas conectadas entre sí.

Fugas:

Son unos de los causas de error más frecuentes y graves en

los mediciones geoeléctricas y se puede deber a que el cable esté sin aislar en algún punto.

Electrodos al infinito

Es el error cometido al suponer un electrodo en el infinito cuando en realidad está a una gran distancia del centro del sondeo.

Polarización de electrodos

El origen de este error es que si los electrodos M y N son metálicos, al estar en contacto con los electrolitos del subsuelo, se comportan como semi-elementos de una pila eléctrica. Este error se puede eliminar empleando electrodos impolarizables. Éstos en su modelo más sencillo y usual, constan de un vaso poroso lleno parcialmente por una solución acuosa de sulfato de cobre y sumergido en éste una varilla de cobre electrolítico, conectada exteriormente a la línea de medición.

Corrientes perturbadoras.

En el terreno suelen existir tensiones perturbadoras — bien de origen natural (polarización espontánea, corrientes telúricas) ó bien artificial (ferrocarriles eléctricos, instalaciones industriales ó mineras, etc.).

Medición de distancias.

Como hay que enterrar el electrodo para diferentes aberturas se necesita un proceso de medición de distancias de separación entre electrodos. Uno de los procesos más comunes es una cuerda con los valores de separación marcados en ella mediante nudos o morcos. Otro método es con cinta de colores sobre el cable a distancias, crecientes con el riesgo de que la cinta se deslice y mida erróneamente las distancias.

Tipo de carrete usado

En este caso el tipo de carrete más conveniente es el carrete móvil ya que el cable no se maltrata y evita que el cable -

se enrede con los arbustos, su desventaja es que es más incómodo para manejarse.

Hojas de campo.

La correcta anotación de las observaciones de campo es uno de los factores que más influyen en la calidad de los resultados finales. Es necesario que el operador anote todos los factores que pueden influir en la medición, como estado y anomalías de los instrumentos, pruebas de fugas, estabilidad de la compensación, estado del tiempo, naturaleza y estado del suelo, etc; así como los accidentes topográficos, caminos, líneas eléctricas, etc; que hayan sido atravesadas por los electrodos de corriente. También son muy importantes los datos geológicos incluyendo en cada hoja de campo un croquis de la situación del centro del sondeo.

Calidad de las curvas de campo.

Es necesario poner gran cuidado, no sólo en la elección del centro y azimut de cada sondeo, sino en todas las circunstancias que puedan influir en la medición, tales como estado de los cables, accesorios e instrumentos, ubicación de los electrodos, medida correcta de las distancias, etc; es fundamental el trazado de la curva en el campo, antes de dar por terminado el SEV repitiendo las mediciones que parezcan dudosas y eliminando las causas del error.

Proceso de medición de campo.

Se pueden clasificar en 4 grupos. Para los fines que uno requiera del SEV quedan perfectamente definidos en este caso y que obviamente dependerá de la abertura final de AB.

- a) SEV cortos, con AB final de 200 m.
- b) SEV normales con AB final mayor de 200 m. y no superior a 2 ó 3 km.

c) SEV largos con AB final comprendidos entre 2 ó 3 Km y 30 ó 40 Km.

d) SEV muy largos ó ultraprofundos en los que se ha alcanzado (hasta ahora) para AB el valor máximo de 600 Km (Van Zyl) et al, 1970.

Los SEV cortos, se realizan para estudios previos ó de análisis para la Ingeniería Civil

Los SEV normales para investigaciones hidrogeológicas.

Los SEV largos en la prospección petrolera.

Los SEV muy largos para los estudios de Geofísica pura.

La utilización de los sondeos eléctricos verticales en la Ingeniería Civil son de determinante apoyo para los trabajos subsiguientes de la obra civil por lo que se debe de esperar determinar la profundidad de la roca sana* y firme bajo las capas de recubrimiento (intemperismo sea del subsuelo ó de la roca misma) determinándose el posible origen de las capas de los sedimentos si los hay o bien el origen de la roca; en el caso por ejemplo de los trabajos previos de la prospección eléctrica para el desplante de una cortina de una presa para fines de la obra de cimentación de dicha presa, es apoyada inclusive cada sondeo eléctrico con tendidos en la misma línea de prospección sísmica, coincidiendo estos puntos de tiro con los puntos ó centros de los sondeos eléctricos. Ahora bien como podemos observar la investigación se reduce a unos cuantos metros de profundidad o sea en una forma un tanto superficial por lo que AB no logra pasar de los 200 m. En cuanto al método a seguir es preferible el uso de Schlumberger Vs Wenner. Según Orellana por su práctica ya experimentada.

* El término "sano" en Ingeniería Civil equivale a decir que la roca sea suficientemente compacta y con el mínimo de fracturamiento.

El sondeo eléctrico vertical normal.

El uso de los sondeos eléctricos verticales en cuanto a sus detalles confiere, se verá a continuación en forma concisa ya que con los métodos para Schlumberger y Wenner en el caso del uso normal ó de investigación hidrogeológica es donde mayoritariamente muestran la superioridad del SEV.

Se entrará primeramente en detalles de los tendidos en general sobre el terreno y zona de estudio

Se comienza por elegir el punto ó centro del SEV en el que se colocará una estaca para fijar además los cables a la hora de abrir los alas y se procede a elegir el rumbo del sondeo el que deberá coincidir con lo previsto en el programa de trabajo, se irán clavando los electrodos "AB" en las señales numeradas ó marcadas sea en el cable ó con una cuerda paralela a éste y de la misma manera para los otros electrodos "MN" haciendo notar que los electrodos AB irán habiéndose a mayor distancia cuanto más se alejen del centro no así los electrodos MN que dependiendo del dispositivo que se utilice será su separación (Schlumberger ó Wenner).

Ahora bien el operador deberá proceder a conectar las terminales de los electrodos MN a la entrada del milivoltímetro, las terminales de los electrodos A y B a la entrada de la unidad amperimétrica y esta a la caja de baterías una vez terminada esta operación las puntas se conectarán a los electrodos mismos y se procederá a un chequeo de todo lo anterior y una vez hecho esto el operador procederá a anotar los datos generales del SEV en la hoja de campo correspondiente; compensará la tensión parásita presente como se ha estudiado en los electrodos de potencial y se cerrará el circuito de emisión, oprimiendo el botón ó *switch* de la unidad amperimétrica se leen rápidamente los valores de ΔV e I correspondientes a la 1ª estación.

Enseguida a esto los ayudantes desplazaron los electrodos junto con sus carretes a la siguiente estación.

Ahora bien en cada estación deben compensarse cuidadosamente la tensión entre los electrodos M y N inmediatamente

antes de cerrar el circuito de emisión para la lectura de ΔV e I deben efectuarse rápidamente, saltando el switch y observando si la aguja del milivoltmetro vuelve a cero. Si esto no ocurriera y diera saltos hacia el lado contrario - guerra decir que la polarización a las tensiones parásitas la han modificado durante la lectura, por lo que deberá repetirse ésta.

Cuando los valores ΔV entre estación y estación tienden a ser difíciles de leer se procederá a hacer un "empalme" explicado con mayor detalle en el texto de Orellana.

El operador al ir avanzando en el sondeo deberá ir cuidando la calidad de los resultados que se van obteniendo, por lo que es recomendable ir calculando y dibujando la curva de resistividades aparentes (si se prefiere con el auxilio de un óbaco que permita el trazado directo de la curva de SEV) - una vez conocidos los valores consecutivos del cociente $\Delta V/I$ y así se evita el empleo de las tablas del coeficiente K .

Regresando ahora al 2º punto en importancia que tienen los SEV en la investigación Hidrogeológica o de los SEV normales.

Según ASTIER (1968) más del 80% de las prospecciones geofísicas para hidrogeología se hace utilizando los métodos eléctricos. Sabiendo que el mayor volumen se efectúa por SEV.

Para este tipo de estudio, como se ha repetido se requiere que los objetivos sean muy claramente fijados en términos de resistividades. Ya que no tiene ningún sentido efectuarla sin más una campaña de SEV, "para buscar agua" si no se ha efectuado antes un estudio hidrogeológico que se hayan fijado los materiales o estructuras que deben buscarse, además es recomendable que el lector tome a bien investigar antes los siguientes términos si no se ha llevado antes la materia de Geohidrología ya que dichos términos se utilizarán - con frecuencia tales como cuenca hidrológica, precipitaciones fluviales anuales en la zona de estudio, Isoyetas, recarga fluvial, niveles piezométricos, pozos existentes, zonas de

recargu, formas geológicas de la zona: permeables ó impermeables, evapotranspiración, ríos, ciclo hidrológico. Todo esto con el propósito de que ésta es una de las prospecciones más accesibles económicamente y los resultados de estas prospecciones, - está, en la conveniencia de efectuar ó no pozos ó perforaciones que a la larga resultan más costosos que el propio costo del SEV.

Los SEV largos en la investigación petrolera

En lo que respecta a este campo, ha tenido sus controversias así como escépticos en la materia debido a su falta de difusión. Sin embargo, los escuelas soviéticas y francesas lo han utilizado con éxito, recordando que la aplicación de los métodos eléctricos a la prospección de petróleo data de los primeros tiempos de la prospección Geoelectrónica.

Aunque sin menospreciar las dificultades en este tipo de estudio el SEV tiene dos principales desventajas, por una parte, la necesidad de tener líneas AB excesivamente largas, y la otra la presencia de copos de altísima resistividad que actúan como pantallas en algunas regiones. Es lógico pensar que ante estas dos dificultades obviamente se apoyará con otros métodos prospectivos como son el sísmico y el gravimétrico para una mejor resolución ante esta investigación.

Actualmente existe el interés por el método magneto-telúrico estudiados recientemente por HENDERSON y HENDERSON en (Nueva Gales del sur de Australia) aplicando el SEV y SD.

Trabajos actuales se han efectuado con toda seriedad en el sentido de la búsqueda de mejores resultados para la prospección eléctrica en el petróleo (ver números de Geophysics, a partir de 1962.).

Los sondeos eléctricos verticales de gran profundidad - para los estudios de Geofísica pura.

Entre 1961 y 1963, el Geological Survey, de Estados Unidos, hizo una serie de estudios y mediciones de la resistividad eléctrica de las capas profundas de la corteza terrestre, con objeto de decidir la factibilidad de un método propuesto - para la detección de explosiones nucleares subterráneas. Los sondeos

efectuados dipolares y magneto-telúricos, se encuentran reseñadas en seis artículos de vivo interés para el lector efectuados por Keller y otros autores, que aparecen reseñados en el número de diciembre de 1966 de la revista Geophysics.

Entre otras aplicaciones de los SEV se pueden citar sus aplicaciones en menor escala para la minería y en sondeos acústicos; no se trata de decir con esto que revista menor importancia para estudios que se quisieran realizar en alguna zona sino que muchas veces no resulta operativo para los fines que se persiguen.

IV.7.1.6 Procesamiento de los datos.

La secuencia de pasos a seguir es:

A.- Verificar los valores de ρ_a

B.- Trozar la curva de ρ_a

C.- Eliminar datos erróneos

D.- Suavizar la curva $\left\{ \begin{array}{l} \text{Visual} \\ \text{Operador de filtraje} \end{array} \right.$

E.- Correcciones

F.- Interpretación automática.

IV.7.1.7 Interpretación física.

Interpretación $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cualitativa} \\ \text{Cuantitativa} \end{array} \right.$

La interpretación cualitativa sirve para definir la estructura geométrica del subsuelo.

La interpretación cuantitativa sirve para definir las variaciones de la resistividad con la profundidad, debajo del punto centro del sondeo.

Interpretación cualitativa.

1.- Correlación entre formas de curvas de sondeo contiguas.

2.- Perfiles.

3.- Mapas o planos.

IV. 7.2. Interpretación cualitativa.

La interpretación cualitativa tiene por objeto conseguir una primera idea ó aproximación a la estructura del suelo estudiado. Se efectúa por medio del trazado de mapas y cortes que representan la distribución en el espacio de alguna característica ó parámetro de las curvas de SEV obtenidas en la campaña.

Los procedimientos más utilizados en la interpretación — cualitativa son los mapas de tipos de curvas y los cortes.

IV. 7.2.1 Mapas de tipos de curvas.

Se comienza por clasificar las curvas de SEV atendiendo, no sólo al número de capas y tipo (H₁K, KH, etc.), si no también a la posición de sus extremos, valores absolutos de la resistividad aparente, etc., luego se escribe al lado del centro de cada SEV, en el mapa de situación de estos, un símbolo representativo del grupo que le corresponde en la clasificación y se delimitan las zonas de SEV de características semejantes, las cuales serán zonas de condiciones geológicas aproximadamente homogéneas.

Así por ejemplo, una zona cuyas curvas comienzan por un tipo K puede indicar la presencia de un grueso recubrimiento aluvial, otra zona donde las curvas ascienden rápidamente hacia resistividades elevadas puede corresponder a la presencia de calizas a poca profundidad, etc. La existencia de una falla ó discontinuidad tectónica se manifestará por una línea a cuyos lados las curvas de SEV serán de tipos ó características diferentes.

IV. 7.2.2 Mapas de la conductancia longitudinal "S".

Muchas veces, la finalidad de los compañías de SEV es el estudio de la marcha subterránea de un sustrato resistivo. Si el conjunto de capas comprendidas entre la superficie y el sustrato, es lateralmente homogéneo, ó conserva la misma resistividad longitudinal media ρ_L , su conductancia longitudinal "S" es proporcional a la profundidad Z del techo del sustrato, ya que según la ecuación (3.9.11) es $Z = S\rho_L$. El parámetro "S" puede utilizarse, por consiguiente, como índice de la profundidad del sustrato, si bien muchas veces no existirá proporcionalidad entre —

ambas magnitudes, por no ser constante ρ_1 . Aún así, un mapa de valores iguales de "S" permite discernir las zonas donde la profundidad del sustrato es máxima ó mínima, la presencia de fallos ó cambios laterales de facies, que corresponderán a zonas estrechas de cambio rápido de S, etc.

La ventaja del parámetro "S" es que su valor puede determinarse de modo sencillo, que no requiere el conocimiento - previo de las resistividades y no está afectado por ambigüedades debidas a efectos de equivalencia. El modo de proceder al cálculo de S es el siguiente:

La curva de SEV dibujada en papel transparente en escala logarítmica del mismo módulo que la colección de curvas patrón, se superpone a la lámina de ésta correspondiente a las curvas de dos capas y se desplaza sobre éste, conservando paralelos - los ejes, hasta que la rama ascendente de la curva de campo - coincida con alguna de las curvas patrón de $\rho_2 > \rho_1$. Entonces se calca en el papel transparente la asíntota rectilínea de la - curva patrón de $\rho_2 \rightarrow \infty$ y se prolonga hasta cortar la línea horizontal $\rho_a = 1$ del papel transparente. La abscisa de la in - tersección da el valor de S. En vez de la línea horizontal in - dicada puede tomarse otra cualquiera (preferiblemente $\rho_a = 10$; $\rho_a = 100$, etc.) y dividir la abscisa de la intersección por la - ordenada ρ_a de la línea horizontal utilizado.

IV.7.2.3 Mapas de resistividad aparente

También conocidos como mapas de líneas iso-óhmicas se obtienen uniendo entre sí los puntos que dan igual resistividad aparente para un valor determinado, fijo para cada mapa, de la distancia AB

Como es obvio, para trazar un mapa de este clase, se anota en el plano, junto a cada SEV, el valor de la resistividad apa - rente que le corresponde, y con esta base se trazan iso-resis - tivas ó iso-óhmicas, para valores redondos de la resistividad, del mismo modo que se hace para las curvas de nivel topográ - ficas. Es costumbre que los intervalos entre estas líneas sean - uniformes, por ejemplo, cada 10 ó 20 $\Omega\text{-m}$, deben referirse

intervalos en progresión geométrica. Una serie muy conveniente para los valores de las isolíneas es la siguiente; 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, etc.

Los mapas de líneas iso-resistivas son también muy útiles para determinar el límite de la zona litoral de infiltración marina, delimitación de zonas carstificadas, etc.

IV. 7.2.4 Mapas de coordenadas de extremos.

También puede trazarse mapas de las coordenadas X_m, Y_m del mínimo en las curvas del tipo H, QH, KH, etc. ó de las X_m, Y_m del máximo en las curvas del tipo K, HK, AK, etc., los cuales dan idea aproximada de la marcha del sustrato. En el primer caso (sustrato resistivo) los resultados conjuntos de los dos mapas son semejantes a los mapas de S, que tiene la ventaja de ser uno sólo, pero en el segundo (sustrato conductor), los mapas de X_m, Y_m no pueden sustituirse por un mapa de valores de T calculado directa y simplemente como ocurre con la S.

IV. 7.2.5 Representación en cortes.

Los datos y magnitudes cuya representación en mapas se acaba de describir, pueden también representarse en cortes que expresan su variación a lo largo de un perfil determinado.

Cuando la magnitud representada es la "S", es conveniente llevar sus valores sobre un eje de ordenadas, dirigido hacia abajo; de este modo la curva de variación de "S" en función de la distancia sobre el perfil presentará una marcha toscamente paralela a la del sustrato resistivo, pues los valores mayores de S corresponderán a mínimos en la curva.

Los cortes de resistividad aparente se construyen trazando curvas de los valores $AB/2$ que corresponden a un solo valor de ρ_a , utilizando como en el caso anterior, un eje de ordenadas dirigido hacia abajo. Estos cortes han de interpretarse con cuidado, porque un aumento del valor $AB/2$ para una misma resistividad aparente, puede deberse tanto a un incremento en la profundidad, como a una disminución en la resistividad verdadera de las capas superiores.

IV.7.2.6 Comparación de curvas

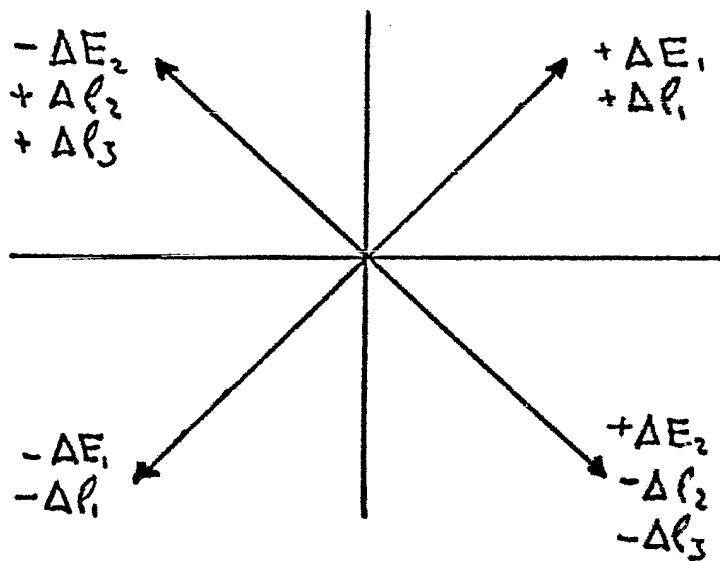
La profundidad relativa de los contactos puede determinarse de modo cualitativo comparando entre sí las curvas de campo de un mismo perfil. El aumento ó la disminución de las coordenadas de los máximos ó mínimos de las curvas puede tomarse hasta cierto punto como índice cualitativo de la profundidad, sin olvidar que tales cambios pueden deberse también a variaciones en la resistividad de las capas. Un ejemplo de esto se da en las siguientes reglas para las curvas tipo H.

a) El aumento (disminución) del espesor ó resistividad de la primera capa produce un desplazamiento del mínimo en sentido ascendente y hacia la derecha (izquierda).

b) El aumento (disminución) de E_2 y la disminución (aumento) de ρ_3 produce un desplazamiento del mínimo hacia abajo y a la derecha (arriba y a la izquierda).

c) El aumento (disminución) de ρ_3 produce un desplazamiento del mínimo hacia arriba y a la izquierda (abajo y a la derecha).

Estas reglas se explican gráficamente en la figura.



En las curvas tipo K con máximo visible, pueden establecerse reglas análogas:

a) El aumento (disminución) del espesor de la primera capa —

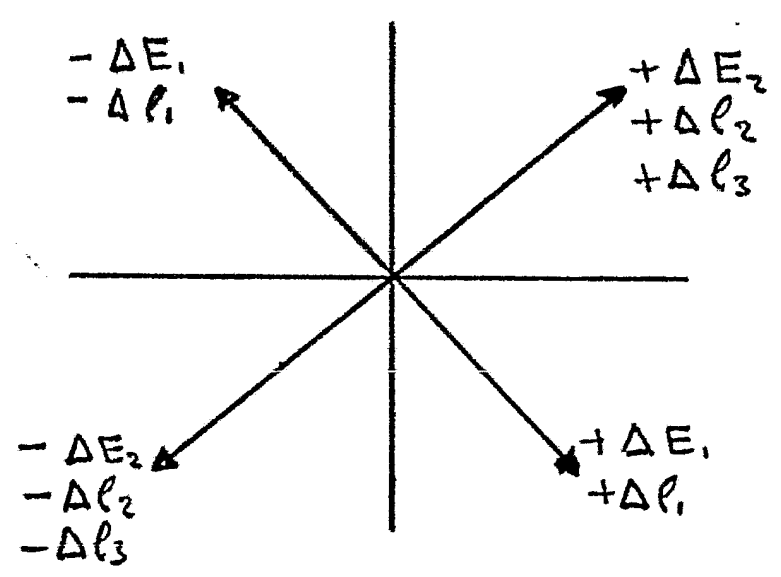
produce un desplazamiento del máximo hacia abajo y a la derecha (hacia arriba y a la izquierda).

b) El aumento (disminución) de la resistividad de la primera capa origina un desplazamiento del máximo hacia arriba y a la izquierda (hacia abajo y a la derecha).

c) El aumento (disminución) de E_2 ó de ρ_2 desplaza al máximo hacia arriba y a la derecha (abajo y a la izquierda).

d) El aumento (disminución) de ρ_2 produce un desplazamiento del máximo hacia arriba y a la derecha (hacia abajo y a la izquierda.).

Estas reglas se explican gráficamente en la siguiente figura.



IV. 7.3 Interpretación cuantitativa.

IV. 7.3.1 El problema inverso.

Como ya se ha dicho la finalidad de la interpretación cuantitativa es determinar la distribución espacial de las resistividades en el subsuelo, partiendo de los datos de resistividad aparente ó de potencial observados en la superficie del terreno. Puede definirse también como la resolución del problema inverso al tratado en los incisos IV.3.1, IV.3.2, IV.3.3, etc.

A partir de la fórmula (4.5.52) es posible calcular la -

función Kernel en función de la curva de resistividades aparentes y de la curva Kernel pasar a la curva de resistividades aparentes, utilizando los métodos vistos en el capítulo IV, - con lo que se resuelve el problema inverso.

IV. 7.4 Integración

Cuando se inicia una prospección sea cual sea la índole de ésta, hay una serie de factores que influyen notablemente en la elección del método geofísico más apropiado así como en el debido escalonamiento de los métodos que suelen seguir a continuación ya que no se puede emplear un sólo método, sino dos ó más que se complementen y hagan la investigación más eficiente.

Inicialmente el planteamiento de una prospección es geológico. Es decir, por ejemplo, en una prospección petrolífera de una determinada región, que es explorada por primera vez, en principio habría que hacer un estudio geológico a ser posible de detalle para conocer las posibilidades petrolíferas de la cuenca, - espesores de formaciones, condiciones estructurales, etc. Realizando este primer trabajo geológico, se pasa al estudio de la zona por un método geofísico de reconocimiento general (magnético, gravimétrico ó ambos) y una vez acabado esto se delimitaron las zonas más interesantes deducidos de los estudios anteriores y en ellos se utilizará un método de detalle como puede ser el sísmico de reflexión.

En prospección minera se escalona, asimismo, los distintos métodos geofísicos según el problema que haya que resolver. En general, se utiliza un método (el más apropiado para el caso) y se suele complementar con otro u otros, de manera que la interpretación final esté basada en la comparación de varios resultados.

Influye, así mismo, como es lógico, el aspecto económico de la prospección, que es al fin y al cabo el método ó métodos a elegir. Los métodos que emplean campos naturales (gravimétrico, magnético, ó electromagnético, AFMAG, etc.), son generalmente métodos más económicos, mientras que los métodos sísmicos son muy caros.

El planteamiento y la interpretación final de un problema de

prospección suelen ser geológicos, mientras que el desarrollo de la misma se lleva a cabo por uno ó varios métodos geofísicos.

En toda prospección existe una cierta interdependencia entre el geólogo y el geofísico, ya que el primero debe tener los suficientes conocimientos geofísicos para poder dar una interpretación geológica al mapa de anomalías del geofísico y este debe tener, a su vez, los conocimientos geológicos necesarios para poder dar una planificación a el trabajo e interpretar bien sus medidas geofísicas. La interpretación final será el fruto del acuerdo entre las hipótesis del geólogo y las del geofísico.

La dificultad de la labor interpretativa tiene doble origen. Por una parte, si bien el problema directo es estable, el inverso, es inestable desde un punto de vista práctico. Por otra parte, tampoco existe solución única en la identificación litológica de las resistividades. La primera ambigüedad se manifiesta en los efectos de equivalencia y de supresión y otros andlogos, que pueden resumirse diciendo que lo que la curva de SEV refleja es la CDZ. La presencia de capas anisótropas exagera las profundidades interpretadas en la hipótesis de isotropía.

Muchas de estas ambigüedades pueden resolverse por medio de la correlación entre SEV contiguos ó mediante los SEV - paramétricos (los sondeos paramétricos son SEV efectuados junto a perforaciones y por su importancia para la interpretación deben efectuarse con el mayor cuidado y, a ser posible en cruz).

Un aspecto muy importante es la relación con la geología. Nunca puede prescindirse de la orientación suministrada por ésta, pero el geofísico debe utilizar su espíritu crítico, no sólo sobre sus propios métodos, sino sobre la información geológica también.

La identificación litológica de las capas geoelectricas no es siempre labor sencilla, y debe basarse en la información previa existente sobre la zona, especialmente si en ella ó en sus proximidades se han efectuado otras compañías de SEV.

El interpretador debe tener en cuenta que las curvas de SEV pueden estar alteradas por causa de los efectos laterales ó superficiales y debe cuidar de no atribuir tales anomalías a causas profundas. Los efectos laterales pueden detectarse - por correlación entre SEV próximos y comparación con las curvas teóricas para contactos verticales y análogos. El efecto superficial más frecuente es la influencia de la resistividad del material en que están colocados los electrodos de potencial. Los errores aislados de medición ó los efectos superficiales pueden corregirse mediante suavización de las curvas, pero esto sólo es aceptable cuando las perturbaciones son pequeñas. La precisión de las profundidades determinados mediante SEV no es nunca mejor que un 10 ó 15 %.

Finalmente, no debe olvidarse que el método SEV da resultados confiables siempre que todos los etapos del trabajo se efectúen teniendo en cuenta los principios teóricos en que este se basa, y mediante el uso correcto de las técnicas adecuadas.

V PERFILAJE ELECTRICO.

V.1 Definición y generalidades.

En los métodos geoelectricos el perfilaje eléctrico es mejor conocido como calicateo eléctrico denominándosele a un perfil como calicata. La finalidad de las calicatas eléctricas es el estudio de las variaciones laterales en la resistividad del subsuelo, entendiéndose entonces que se trata de un método de investigación horizontal, a profundidad aproximadamente constante, muy adecuado para detectar contactos geológicos verticales ó inclinados, cambios laterales de facies, metalizaciones, diques y otros cuerpos ó estructuras que se presentan como heterogeneidades laterales de resistividad.

V.2 Clasificación de las calicatas.

Existen dos grandes grupos:

1) Métodos de campo fijo.

En los que los electrodos de corriente permanecen fijos durante la medición, de modo que se crea en el terreno un campo estacionario, el cual es explorado colocando los electrodos M y N en diversas posiciones.

2) Métodos de dispositivos móviles.

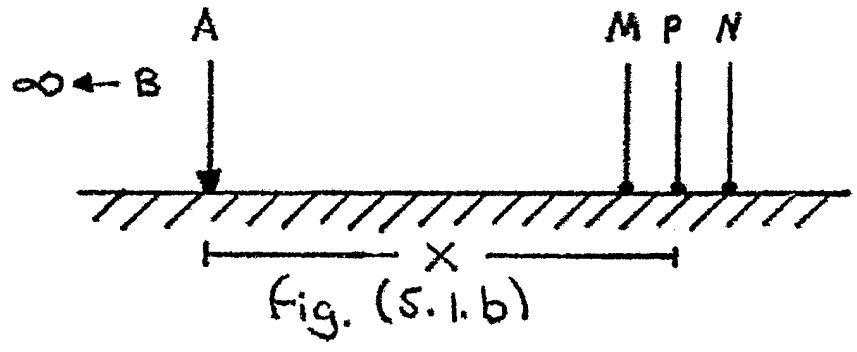
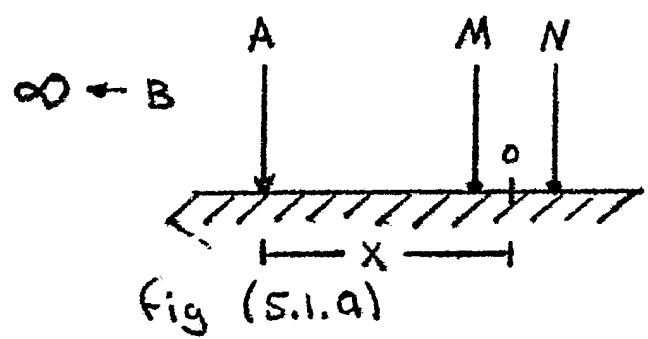
Son los métodos en los que los cuatro electrodos se desplazan conjuntamente, conservando sus distancias y posiciones mutuas, o sea, en los que el dispositivo se traslada sobre un perfil como un todo rígido.

Métodos de campo fijo { Método de Gradientes
Método RACOM (ó de relaciones de diferencia de potencial)
Calicata Schlumberger
Método de bloques.

Métodos de dispositivo móvil { Calicotas dipolares axiales (mono y bilaterales)
 Calicotas trielectrónicas (simples y combinadas)
 Calicotas de dispositivo simétrico
 Calicotas de dispositivos apantallados y de cero
 Calicotas circulares
 Otros tipos de calicotas.

a) Método de Gradientes.

En este método se utiliza un dispositivo en el que el electrodo de corriente A permanece fijo mientras que el B está situado en el infinito. Los electrodos de potencial M y N se desplazan conjuntamente, manteniéndose alineados con el A, y poco separados entre si. Se muestra en la figura (S.1.a)



b) Método RACOM

También se le denomina método de relaciones de caída de potencial (potencial Drop Ratio = P.D.R.) Deriva del anterior por adición de un tercer electrodo de potencial "P" colocado entre el "M" y el "N" como muestra la figura (S.1.b). Lo que se mide es el cociente entre la diferencia de potencial entre M, P y la existente entre P, N.

c) Calicota Schlumberger

Es también una modificación del método de Gradientes, con el electrodo B a distancia finita, alineado con los A, M y N, y situado al lado opuesto del primero respecto de los otros dos. Los electrodos M y N se mueven sobre el tercio central del segmento AB, donde el campo es más uniforme y pueden detectarse más fácilmente los cambios laterales de resistividad. Se muestra en la figura (S.1.c)

d) Método de Bloques.

Se le conoce también por los nombres de Rectángulo de Resistividad y de Método del Gradiente Medio. Resulta de extender las mediciones de una calicata Schlumberger a perfiles paralelos al principal. Esto es, al que pasa por los electrodos A y B, o ambos lados de éste, como se muestra la figura (S. 1. d). Se investiga así una zona cuadrada o rectangular de terreno.

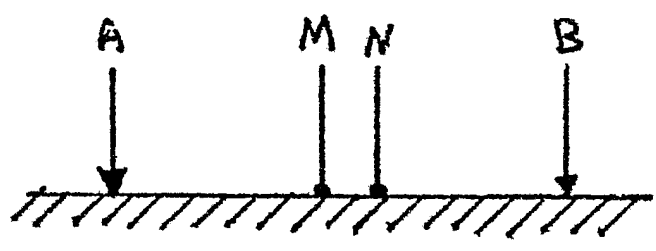


Fig (S. 1. c)

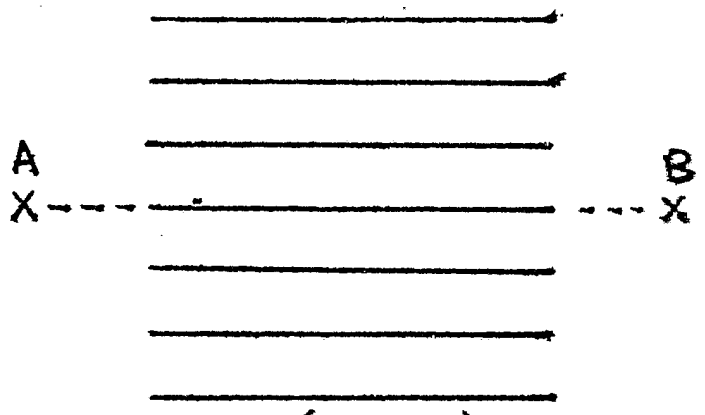


Fig (S. 1. d)

e) Calicatas Dipolares

En ellas se desplaza sobre el terreno, a lo largo de un perfil rectilíneo, un dispositivo dipolar axial, manteniéndose constantes las separaciones interelectródicas como muestra la figura (S. 2. a). Es muy frecuente el uso de calicatas dipolares bilaterales (fig S. 2. a) en los que se emplean dos dipolos de emisión A'A y BB' situados simétricamente del dipolo MN.

f) Calicatas trielectródicas

Se emplea en ellas un dispositivo trielectródico o semi Schlumberger, que es desplazado a lo largo de cada perfil - sin modificación de sus separaciones mutuas. También aquí es frecuente el empleo de la modalidad bilateral - (fig S. 2. b). En ella se emplean dos electrodos de emisión A y B, colocados simétricamente respecto del centro del dipolo MN y un tercer electrodo C situado en el infinito.

g) Calicatos de dispositivo simétrico.

La investigación por este método consiste en una serie de determinaciones de resistividad aparente por medio de un dispositivo simétrico de cuatro electrodos de separación constante. Se usan generalmente el de Wenner, ó el de Schlumberger. Una modalidad de este tipo de investigación consiste en la adición de un tercer electrodo de potencial colocado en el centro ϕ del dipolo MN (fig 5.2.c)

h) Calicatos con dispositivos apantallados y de cero

Se emplea en este tipo de investigación alguno de los dispositivos compuestos descritos en el inciso III.7 bien del tipo cero, bien apantallado

i) Calicatos circulares

En este método el dispositivo no se traslada, sino que gira alrededor de un punto fijo que puede ser el centro del dipolo de recepción MN . La variable independiente no es, pues, la distancia a un origen, sino el azimut del dispositivo. Los resultados se expresan en coordenadas polares, en forma de diagramas resistividad aparente-azimut. Este procedimiento se emplea para determinar rumbos y buzamientos de filones, capas conductoras, fallos ó diaclasos, etc.

j) Otros tipos de calicatos.

En el método denominado tripotencial, se utiliza un dispositivo de cuatro electrodos igualmente espaciados, como en el dispositivo Wenner. En cada estación se efectúan tres determinaciones de resistividad aparente, en las que se altera el carácter de emisión ó recepción de los electrodos.

En el dispositivo cuadrado se toman también tres valores de resistividad aparente en cada estación; en este método los electrodos están ubicados en los vértices de un cuadrado

Keller y Frischnecht (1966) describen un dispositivo que denominan semi-wenner el cual consta de sólo dos electrodos

A y M, estando en el infinito los B y V.

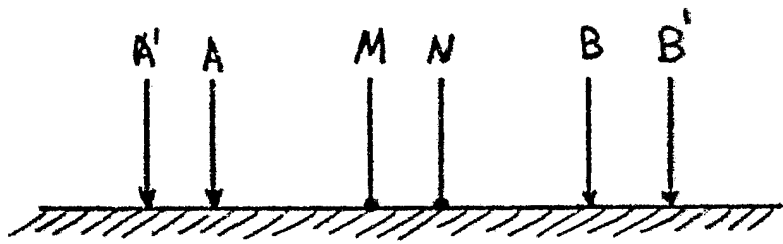


Fig (5.2.A)

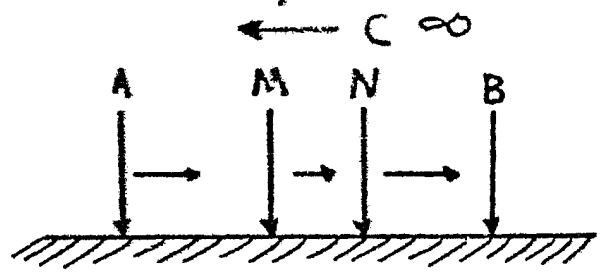


Fig (5.2.b)

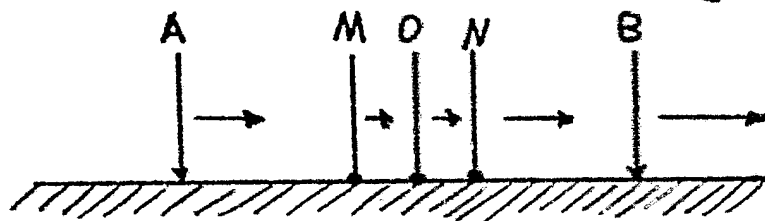
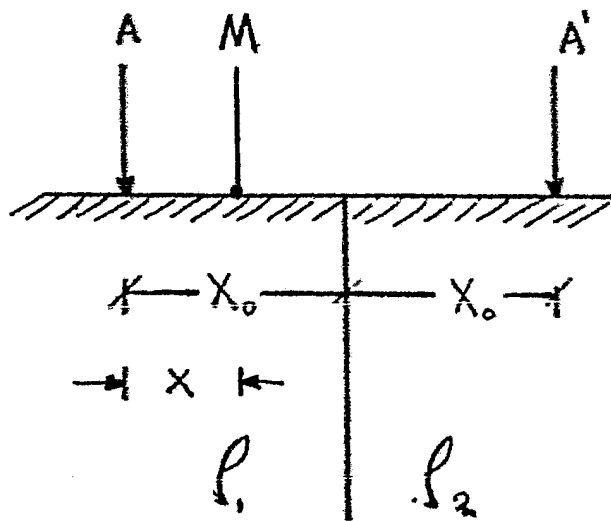


Fig (5.2.G)

III Consideraciones teóricas.

Considerese el caso de un contacto vertical entre dos medios, de respectivas ρ_1 y ρ_2 como muestra lo figura (5.3).



En ausencia del segundo medio el potencial en la superficie, medido por un electrodo M distante "x" de "A" sería:

$$U_M = e \frac{1}{x}$$

Donde $e = \frac{\rho_1 I}{2\pi}$ se denomina emisividad.

El efecto del segundo medio (suponiendo que el contacto es normal a la línea AM) puede substituirse, en lo que respecta al primero, por un electrodo ficticio ó -

imagen A' , simétrico del A respecto del contacto, y -
cuya emisividad e' se determinará a continuación.
El potencial en el medio 2 puede obtenerse dando a la
emisividad e del electrodo A un nuevo valor e'' que
incluya el efecto del contacto.

Las emisividades e' y e'' se calculan mediante las con-
diciones de contorno del modo siguiente:

En el medio 1, el potencial vendrá dado por:

$$U_1 = \frac{e}{x} + \frac{e'}{2x_0 - x} \quad (x \leq x_0) \quad \dots \dots \dots (5.3.2)$$

Mientras que el potencial en el medio 2, habrá de
expresarse en la forma:

$$U_2 = \frac{e''}{x} \quad (x > x_0) \quad \dots \dots \dots (5.3.3)$$

De la continuidad del potencial se deduce que:

$$U_1 = U_2 = \frac{e}{x} + \frac{e'}{2x_0 - x} = \frac{e''}{x} \quad (x = x_0)$$

o sea:

$$e'' = e + e' \quad \dots \dots \dots (5.3.4)$$

De la continuidad de la densidad de corriente se
deduce que:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad (x = x_0)$$

Sustituyendo (5.3.2) y (5.3.3) en la ecuación -
anterior derivando y haciendo $x = x_0$ resulta:

$$-\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{e}{x_0^2} - \frac{e'}{x_0^2} \right) = -\frac{1}{\rho_2} \frac{e''}{x_0^2}$$

Lo que equivale a:

$$l_2(e - e') = l_1 e'' \quad \dots \quad (5.3.5)$$

Combinando las ecuaciones (5.3.4) y (5.3.5) se obtiene:

$$e' = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1} e \quad e'' = 2 \frac{l_2}{l_2 + l_1} e \quad \dots \quad (5.3.6)$$

Utilizando el factor de reflexión $k = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1}$ las ecuaciones (5.3.6) toman la forma:

$$e' = k e$$

$$e'' = (1 - k) \frac{l_2}{l_1} e \quad \dots \quad (5.3.7)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (5.3.2) y (5.3.3)

$$U_1 = \frac{e}{x} + \frac{k e}{2x_0 - x}$$

$$U_2 = \frac{l_2}{l_1} \frac{1 - k}{x} e$$

o sea:

$$U_1 = \frac{I l_1}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{k}{2x_0 - x} \right)$$

$$U_2 = \frac{I l_2}{2\pi} \frac{1 - k}{x} \quad \dots \quad (5.3.8)$$

En la práctica, la medición es de potencial a partir del electrodo A, y de la perturbación producida en ella por la presencia del contacto, se efectuaría -

más comodamente añadiendo un segundo electrodo de potencial N , y midiendo la diferencia de potencial ΔV entre ambos, para diversas posiciones del par. El cálculo, se simplifica si M y N están muy próximos entre sí, ya que:

$$\frac{\Delta V}{MN} \approx E \quad \text{si } MN \rightarrow 0$$

En estas condiciones, suponiendo que se mantiene fijo el electrodo A , y colocando el par MN en una serie de posiciones a lo largo del perfil, sobrepasando ampliamente el contacto, se podría representar el conjunto de los resultados como una curva de la variación de E con la distancia x , pero es más expresivo transformarla en una curva de resistividades aparentes, mediante la fórmula:

$$\rho_a = 2\pi x^2 \frac{E}{I} \dots \dots (5.3.9)$$

En donde x es la distancia del electrodo A al centro del segmento MN , supuesto muy corto.

Por otra parte, supongase, para fijar ideas, que $\rho_1 < \rho_2$. Podría pensarse desde un punto de vista "intuitivo" o "sentido común" que la citada magnitud será aproximadamente igual a ρ_1 a corta distancia del electrodo A , y que la presencia del segundo medio se manifestará por un aumento gradual de la resistividad aparente conforme los electrodos M y N se aproximan al contacto. Una vez que dichos electrodos hayan penetrado en el segundo medio, la resistividad aparente sería próxima a ρ_2 y esto tanto más cuanto más dentro se encuentren los electrodos en este medio. Sin embargo, lo que ocurre en realidad es muy distinto, como se verá a continuación.

A partir de las ecuaciones (5.3.8) que sustituidas en la ecuación (3.2.22), derivando y desarrollando dan el valor del campo eléctrico en cada medio:

$$E_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{X^2} - \frac{k}{(2X_0 - X)^2} \right\} \dots \dots \dots (5.3.10)$$

$$E_2 = \frac{I \rho_2}{2\pi} \frac{1-k}{X^2} \dots \dots \dots$$

Por lo tanto, se tendrá para el primer medio

$$\rho_a^{(1)} = \rho_1 \left\{ 1 - k \frac{X^2}{(2X_0 - X)^2} \right\} \dots \dots \dots (5.3.11)$$

y en el segundo:

$$\rho_a^{(2)} = \rho_2 (1-k) = \frac{2 \rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \dots \dots \dots (5.3.12)$$

Como se vé, la variación de la resistividad aparente con la distancia X del electrodo fijo A al centro del por MN, es muy diferente de lo supuesto "intuitivamente" como muestra la figura (5.4). Cuando X es muy pequeño, el valor observado es prácticamente igual a ρ_1 , pero al acercarse los electrodos M y N al medio - más resistivo la resistividad aparente no aumenta, sino que disminuye. Cuando los electrodos móviles cruzan sobre el contacto, la resistividad aparente experimenta un brusco aumento y, desde entonces cuando los electrodos se mueven en el segundo medio, ρ_a permanece constante, con valor diferente del verdadero de dicho medio.

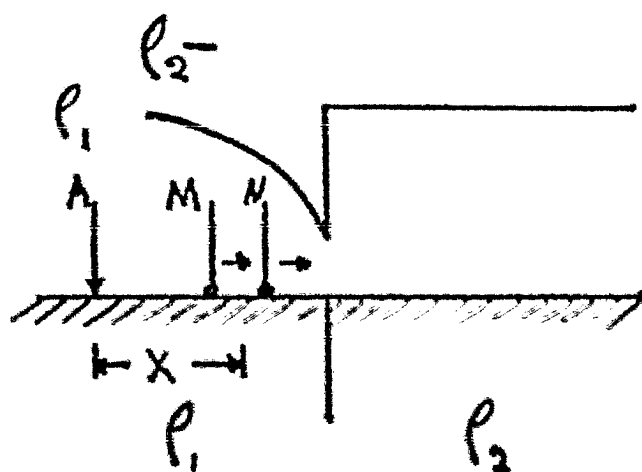


Fig (5.4)

Si fuese $\rho_1 > \rho_2$ la variación de la resistividad aparente es semejante a la descrita, salvo que aumenta con la aproximación de los electrodos al medio conductor.

En los razonamientos anteriores se ha supuesto que el electrodo de corriente permanece fijo, mientras que se desplazan conjuntamente los de potencial. Se trata pues de un método de los que en el apartado anterior se han denominado de campo fijo (método de gradientes).

Si en vez de mantener inmóvil el electrodo A, se hubiese trasladado conjuntamente con los M y N se tendría una calicata del tipo de dispositivo móvil (calicata trielectródica). En este caso, hay que considerar la variación de la resistividad aparente en función de la distancia al contacto de alguno de los electrodos, por ejemplo el A. Esta variación puede calcularse por medio de las mismas fórmulas anteriores, sin más que tener en cuenta que ahora la variable es X_0 , mientras que X tiene valor constante, que se puede representar por L y es igual a la distancia de A al centro del corto dipolo MN. Entonces las expresiones (5.3.11) y (5.3.12) se escribirán:

$$\rho_a^{(1)} = \rho_1 \left\{ 1 - K \frac{L^2}{(2X_0 - L)^2} \right\} = \rho_1 \left\{ \frac{K}{\left(\frac{2X}{L} - 1\right)^2} \right\} \dots (5.3.13)$$

$$\rho_a^{(1,2)} = 2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \dots \dots \dots (5.3.14)$$

En este caso, la resistividad aparente se comporta de modo semejante a como lo hace en el método de gradientes anteriormente estudiado, es decir, que la aproximación del dispositivo al contacto, va acompañada de una disminución gradual de la resistividad aparente, si el segundo medio es más resistivo que el primero y un aumento si ocurre lo contrario (fig 5.4).

La ecuación (5.3.14) es aplicable cuando el dispositivo se encuentra a "horcajados" de ambos medios, con el electrodo A en el primer medio, y los MN en el segundo. En estas condiciones la resistividad aparente permanece constante.

Cuando todo el dispositivo se encuentra sobre el segundo medio, ya no es aplicable la ecuación (5.3.14) pudiéndose utilizar la ecuación (5.3.13) válida cuando los tres electrodos se encuentran en el mismo medio, pero sustituyendo ρ_1 por ρ_2 , cambiando de signo K en virtud de su definición, y teniendo en cuenta que X_0 y L tienen ahora signos opuestos. Efectuados estos cambios queda finalmente:

$$\rho_a^{(2)} = \rho_2 \left\{ 1 + \frac{K}{\left(2\frac{X}{L} + 1\right)^2} \right\} \dots \dots (5.3.15)$$

Ecuación que expresa que la resistividad aparente en el segundo medio se aproxima asintóticamente a la resistividad verdadera de éste cuando el dispositivo se aleja del contacto.

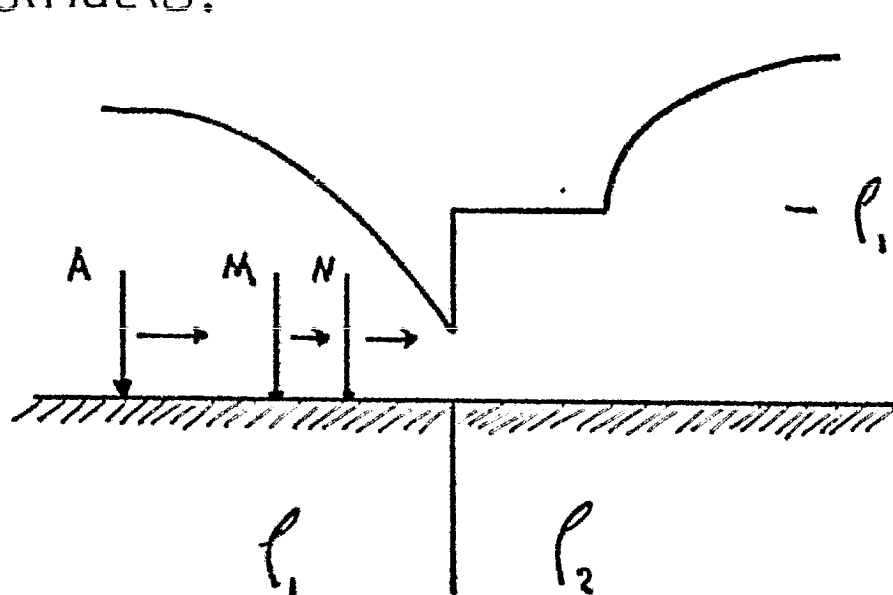


Fig 5.4

V.4 Resolución de problemas directos.

Hasta ahora sólo se conoce un método científico para la interpretación de los colicatas eléctricas, que consiste en comparar las curvas de resistividad aparente

obtenidos en el campo, con curvas patrón correspondientes a cortes geoeléctricos conocidos. Esta comparación puede hacerse visualmente, ó por superposición en gráficos semilogarítmicos; un tercer procedimiento consiste en establecer, mediante análisis de las curvas patrón, relaciones entre la posición de los puntos característicos de aquellos (máximos, mínimos, etc.), y la geometría del corte geoeléctrico correspondiente. Estas relaciones se aplican luego a los curvas de campo para la determinación de las discontinuidades laterales de la resistividad del subsuelo.

Lo que en realidad ha de calcularse es la desviación ó anomalía respecto del campo correspondiente a un medio homogéneo, producida por alguna heterogeneidad en la distribución de resistividades, la cual, por sus características, pueda representar algún accidente geológico de interés.

Dentro de la dificultad general, los problemas más sencillos son los de geometría bidimensional, en los que la heterogeneidad se extiende indefinidamente en dirección perpendicular al plano vertical que pasa por el perfil de observaciones. Dentro del tipo bidimensional, los problemas más importantes son los siguientes:

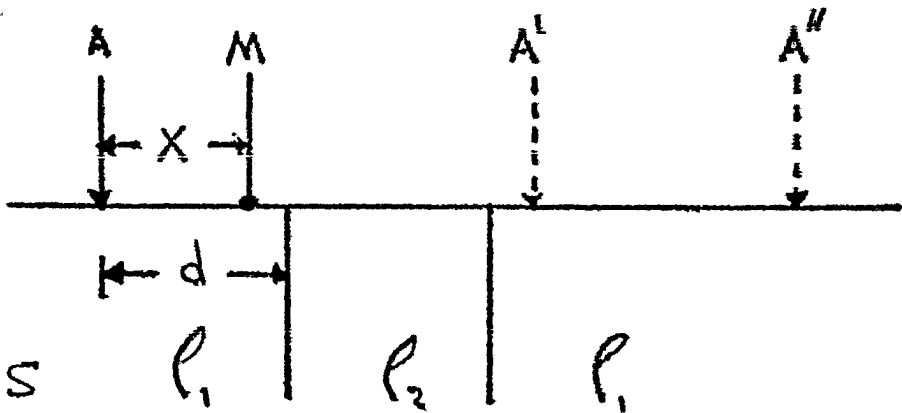
- a) Contacto plano vertical entre dos medios de resistividad diferente.
- b) Capa vertical en medio homogéneo.
- c) Capa vertical que separa dos medios de resistividad diferente.
- d) Los mismos tres casos anteriores con interfaces oblicuas respecto de la superficie plana del terreno.
- e) Los cuatro casos anteriores con recubrimiento, esto es, con una capa superficial de resistividad distinta a la presentada por el medio ó medios indicados anteriormente.

f) Heterogeneidades de extensión lateral indefinida, y sección de forma geométrica regular (circular, elíptica, rectangular, etc.), que pueden representar estructuras geológicas tales como metalizaciones, cavidades kársticas, etc., de gran longitud respecto del tamaño de los dispositivos.

Por último existen problemas tridimensionales, en los cuales las heterogeneidades tienen tamaño limitado en sus tres dimensiones, en forma de prisma, esferas, elipsoides, etc., ó de conos que salen a la superficie del terreno.

V.4.1 Capa vertical.

Considere-se el caso de una capa vertical indefinida de resistividad ρ_2 y espesor E , intercalado en un semiespacio homogéneo de resistividad ρ_1 , como muestra la figura: (S.S).



Cuando M está en el primer medio, al potencial que produciría el electrodo A en medio homogéneo.

$$U_A = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1}{X}$$

Se suma el de la imagen A' simétrica de A respecto del primer contacto.

$$U_{A'} = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{k}{2d-X}$$

A estos potenciales hay que añadir los debidos a una

serie infinita de imágenes situadas a distancias crecientes hacia la derecha, con intervalo constante $2E$, y cuya intensidad se obtiene multiplicando por K^2 la de la imagen anterior. La primera de esta serie es la A'' , simétrica de A respecto del segundo contacto, y la intensidad $(1-K^2)K$ veces la de A . Por lo tanto, la imagen enésima A''_n de esta serie producirá en M el potencial:

$$U_{A''_n} = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{(1-K^2)K^{2n-1}}{2d+2nE-x}$$

y el potencial total será:

$$U = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{K}{(2d-x)^2} - (1-K^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n-1}}{(2d+2nE-x)^2} \right\} \dots (5.4.1)$$

Si el electrodo M se sustituye por un dipolo de medición Schlumberger, se obtendrá la componente E_x del campo eléctrico, que vendrá dada por la derivada del potencial U respecto de x cambiada de signo, o sea:

$$E_x = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{K}{(2d-x)^2} - (1-K^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{2n-1}}{(2d+2nE-x)^2} \right\} \dots (5.4.2)$$

El potencial en el tercer medio, o sea a la derecha de la capa, según la figura 5.5, es igual al producido por una serie infinita de imágenes, la primera de las cuales coincide con A en posición, y su emisividad es la de ésta multiplicada por $(1-K^2)$; las demás guardan intervalos de $2E$ y la emisividad de cada uno es igual a la de la anterior multiplicada por K^2 .

$$U_3 = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1-K^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{2n}}{(x+2En)^2} \dots (5.4.3)$$

y la componente x del campo

$$E_x = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1-K^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{2n}}{(x+2En)^2} \dots (5.4.4)$$

Cuando el electrodo M se encuentra sobre la capa, el potencial puede considerarse como debido a dos series de imágenes situadas en los mismos puntos que en los casos anteriores y con la misma relación entre sus emisividades, la emisividad de la primera imagen del primer medio es $(1+k)$ y de la primera del tercer medio es $-(1+k)k$, tomando como unidad f_a de la fuente real A . El potencial en M resulta en este caso:

$$V_2 = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1+k) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{2nE+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{2d-x+2nE} \right\} \dots (5.4.5)$$

y el campo:

$$E_x = \frac{I \rho_1}{2\pi} (1+k) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(2nE+x)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{(2d-x+2nE)^2} \right\} \dots (5.4.6)$$

V.4.2 Ensayo sobre modelos reducidos.

Las dificultades que presenta el cálculo numérico de las anomalías producidas por heterogeneidades del subsuelo incluso de forma regular, hace que esto se realice de forma experimental por medio de ensayos sobre modelos reducidos. Existen tres clases de estos modelos.

- a) Ensayos efectuados sobre el terreno, excavando una zanja y rellenándola con materiales sólidos (arcilla, cemento, arena, etc.) dispuestos de forma que reproduzcan, en proporciones reducidas, el corte que se desea estudiar.
- b) Ensayos en la cuba electrolítica, la cual consiste en un recipiente grande, del orden de un metro en su dimensión mínima, lleno de agua con algo de sal común ó otro líquido debilmente conductor. La superficie límite de este representa la del terreno. Dentro del líquido se colocan cuerpos de la forma deseada, que representan a escala conveniente, heterogeneidades perfectamente conductoras si son de metal, o aislantes, si son de -

bakelita, plexiglás, etc. Los valores de potencial medidos se aplican al caso real por simple relación de semejanza geométrica.

c) Ensayos con papel conductor. Este método es válido para el estudio de cortes bidimensionales, esto es, de heterogeneidades de extensión indefinida en dirección perpendicular al perfil sobre el que se hacen las mediciones. El modelo se construye cortando y pegando trozos de papel conductor, como el "Teledeltos", para formar una reducción a escala del corte que desea estudiarse. Las heterogeneidades perfectamente conductoras pueden representarse por papel de estaño ó aluminio, ó pintando sobre el papel conductor con amalgama de plata.

V.5 Representación gráfica de las resistividades aparentes.

Las observaciones efectuadas en las diferentes modalidades de calicotas eléctricas se traducen en resistividades aparentes de acuerdo a la ecuación (3.6.11) los valores de ρ_a así obtenidos se representan gráficamente (salvo para calicotas circulares) en función de la distancia del origen del perfil a alguno de los electrodos, que puede elegirse arbitrariamente. La escala horizontal del gráfico puede ser cualquiera lineal.

Cuando los calicotas sean de medición múltiple (calicotas con dos distancias, trielectrónicas combinadas, etc.) las curvas correspondientes deben tratarse en el mismo gráfico, a fin de facilitar su comparación e interpretación, distinguiéndolas por colores diferentes ó por la clase de línea (continua, de trazos, etc.). En el caso de calicotas combinadas ó bilaterales es conveniente distinguir de algún modo los dos dispositivos utilizados.

En el gráfico debe dibujarse también a la misma escala horizontal, el dispositivo ó dispositivos empleados, lo que resulta muy útil en la interpretación. El -

gráfico de 62.5 mm., de módulo resulta de tamaño muy adecuado. Los diagramas polares de las calicatos circulares deben trazarse también en escala logarítmica.

V.5.1 Puntos característicos.

En terreno homogéneo, la curva de resistividades aparentes es una recta paralela al eje de abscisas. La presencia de cambios laterales en la resistividad se manifiesta en la curva ρ_a por desviaciones respecto de la línea horizontal indicada. Las desviaciones producidas por una sola heterogeneidad constituyen una anomalía. La forma de estas anomalías suele ser complicada, y presenta varios puntos característicos tales como máximos, mínimos, etc., de diferentes clases. Estos puntos se muestran en la figura (5.6) y son:

- Máximo Cuspidal, que se denominará punta o pico (P)
- Máximo Normal, es decir, sin discontinuidad en la derivada (M)
- Mínimo Cuspidal o Sima (S)
- Mínimo Normal, sin discontinuidad en la derivada (m)
- Punto de Inflexión (I)
- Discontinuidad vertical o escalón (E)

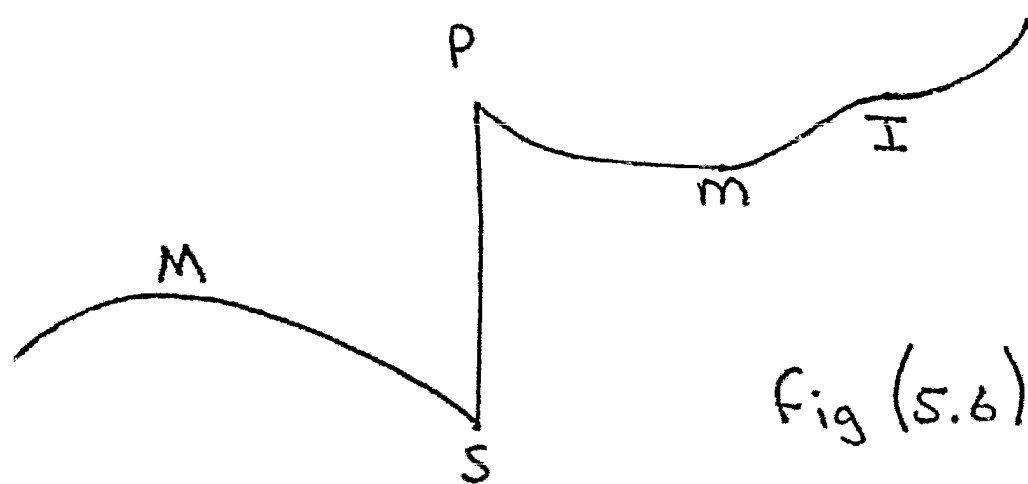


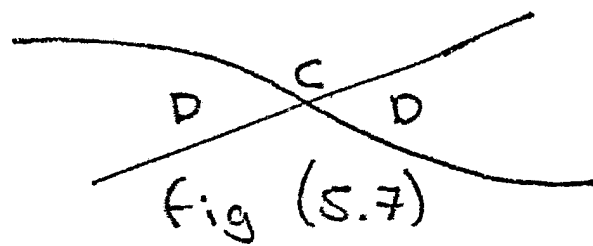
Fig (5.6)

La presencia de dos curvas en los gráficos de calicatos trielectródicos combinadas y dipolares bilaterales,

da lugar a dos nuevos rasgos característicos como muestra la figura (5.7)

g) Zonas en las que los valores de resistividad aparente de los dos curvas son sensiblemente diferentes entre sí. Cada una de estas zonas se llama divergencia (D).

h) Puntos donde las dos curvas se cortan, o cruces (C)



V. 5.2 Valoración de las anomalías

Es conveniente disponer de un índice o medida de la intensidad con que una anomalía determinada aparece en la curva, a fin de poder compararla con otras, o para separar los más destacados de un perfil o zona. Dicha valoración ha de basarse en comparar la resistividad máxima ρ_m observada en la anomalía, con la mínima ρ_m de la misma. Se tiene así una medida I_1 de la intensidad de la anomalía.

$$I_1 = \frac{\rho_M - \rho_m}{\rho_0} \quad \dots \quad (5.5.1)$$

Donde ρ_0 es el valor medio de la resistividad aparente en la parte exterior a la zona de anomalía.

Blokh propone el empleo de un nuevo índice, que denomina Amplitud de la anomalía y cuyo valor es:

$$I_2 = \frac{\rho_M}{\rho_m} \quad \dots \quad (5.5.2)$$

Tarkhov, por su parte, propone un tercer índice,

que resulte de dividir la diferencia de resistividades entre el máximo y el mínimo, por el promedio de estas, y multiplicar por 2 el resultado, obteniéndose

$$I_3 = \frac{\rho_M - \rho_m}{\rho_M + \rho_m} \dots \dots \dots (5.5.3)$$

En forma de tanto por ciento :

$$I_4 = 100 \frac{\rho_M - \rho_m}{\rho_M + \rho_m} \dots \dots \dots (5.5.4)$$

V.5.3 Catálogos de curvas patrón.

Hoy día son pocos los catálogos de curvas maestras, las más importantes son:

a) Un álbum de 21 láminas con 277 curvas publicados por Blokh.

b) Una colección de 30 grandes láminas con 296 curvas para el dispositivo axial.

c) Una serie de 85 curvas referentes a las anomalías producidas por cavidades esféricas ó semi-elipsoidales situadas en la superficie límite de un medio homogéneo, y rellenas por material de resistividad diferente. Solo para el dispositivo Wenner y en algún caso el de Lee.

V.6 Elección del tipo de calicata.

Para cada problema concreto, la elección del tipo de calicata más adecuada debe tener en cuenta muchos factores, tales como el corte geológico a serado (anchura de las heterogeneidades, contrastes de resistividad, espesor y grado de homogeneidad del recubrimiento). Las caracte-

rísticas de la zona de trabajo en lo que respecta a su relieve, vegetación, presencia de perturbaciones eléctricas, la clase de prospección (estudio general ó de detalle, etc.), así como las consideraciones económicas.

Existen tres tipos de calicata eléctrica que, por sus características, deben considerarse básicas y tenerse en cuenta, en primer lugar. Son respectivamente, las de dispositivo dipolor axial (CED), la trielectródica combinada (CETC) y la simétrica (CES).

Dentro de las calicatas simétricas están las de dispositivo Wenner (CESW) y la de dispositivo Schlumberger (CESS) siendo más ventajosa en la práctica la Wenner pero para fines de interpretación la Schlumberger ya que en la curva de resistividades aparentes se produce alguna discontinuidad, extremo ó inflexión cada vez que un electrodo pasa sobre un cambio lateral de resistividad, con lo que resulta que cuanto mayor sea el número de electrodos tanto más oncha y complicada será la anomalía. La complejidad hace más difícil la interpretación, y el aumento en anchura incrementa el peligro de solape entre dos anomalías próximas, lo que también redundará en dificultades interpretativas. En el dispositivo Wenner, cada uno de los electrodos de potencial produce su correspondiente anomalía dada la separación entre ellos, mientras que en el Schlumberger, estos electrodos están muy próximos y sus anomalías respectivas se superponen, originando una anomalía más sencilla.

Por otra parte la diferencia de potencial entre los electrodos M y N representa una integral del gradiente de potencial entre ellos. Cuanto más separados estén los electrodos, tanto más suavizado o promedio estará dicho gradiente, diluyéndose más los máximos ó mínimos en el valor medio. Por esta causa, las anomalías obtenidas con el dispositivo Wenner -

son mucho menos intensas que las proporcionadas sobre el mismo corte por un dispositivo Schlumberger de la misma distancia AB.

La Figura (5.8) ilustra un ejemplo, que corresponde a la anomalía producida por un contacto vertical entre dos medios. Como puede verse, la curva del dispositivo Wenner es más ancha y complicada, y de menor amplitud que la Schlumberger.

Otro inconveniente del dispositivo Wenner, es que una capa subvertical conductora y muy delgada puede producir un máximo en vez del mínimo esperado en la curva de resistividades aparentes.

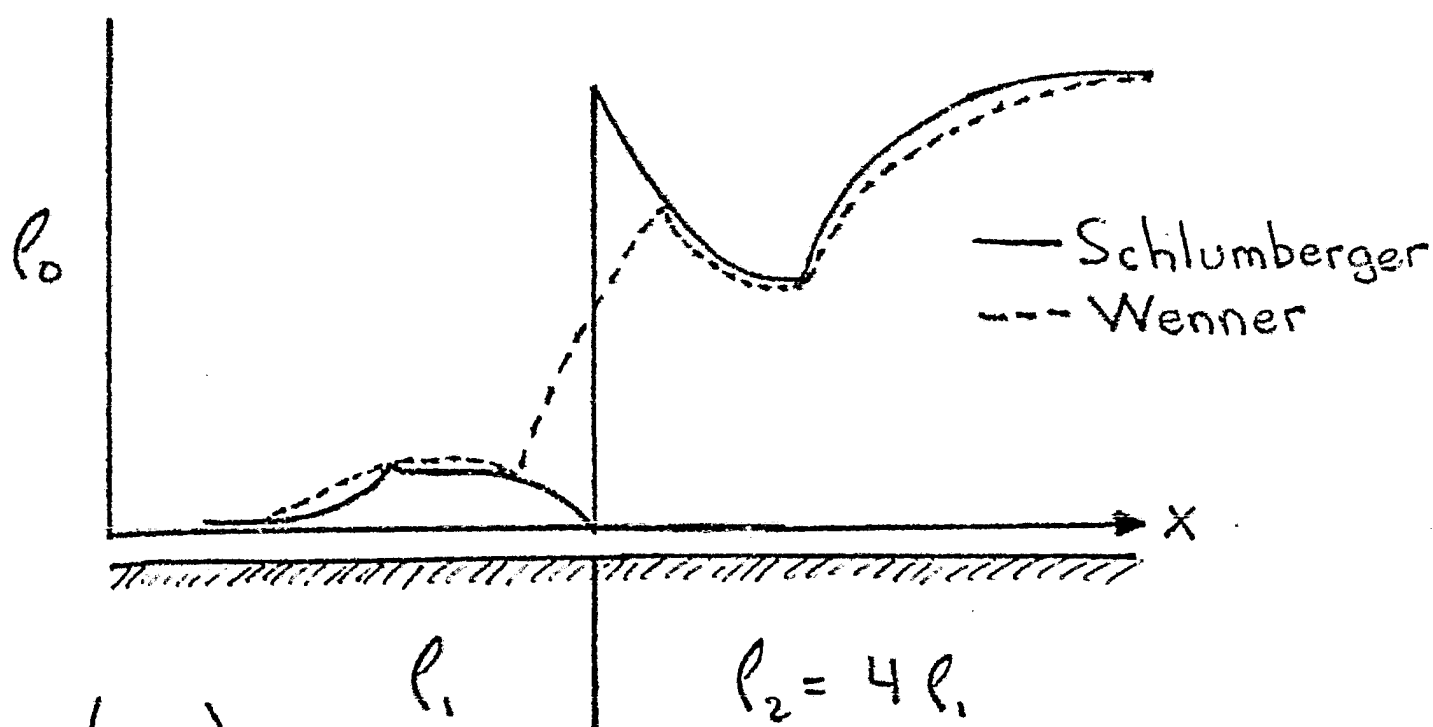


Fig (5.8)

De la comparación entre las anomalías obtenidas por calicatas eléctricas (CE) de diversos tipos y sus técnicas de campo resultan las siguientes conclusiones

- Entre los tres tipos básicos de calicatas, la CED y CETC suministran, en igualdad de condiciones, anomalías de intensidad poco diferente entre sí, algo mayores que las del primero, pero muy superiores a las que proporcionaría una CES.

b) En cuanto al trabajo de campo, el más sencillo - corresponde a los CES, mientras que los CETC y CED son más complicados, puesto que la primera de ellas exige el tendido de una línea "de infinito" y las segundas exigen mayor número de operaciones en la medida de las distancias que avanzan los electrodos.

c) Entre todos los tipos de CE son los de campo - fijo los de mayor sencillez en el trabajo de campo, una vez establecida la línea AB, pues solo hay que mover los electrodos M y N, y los de empleo más complejo, por lo general, los dispositivos - compuestos (apantallados y de cero).

La elección del tipo de CE más adecuado - para cada problema concreto puede hacerse siguiendo las recomendaciones que se exponen a continuación:

a) Contactos y capas anchas:

Cuando las heterogeneidades que se buscan aparecen, desde el punto de vista eléctrico, como contactos entre medios de diferente resistividad, lo suficientemente distantes entre sí para que las anomalías no se superpongan, deben emplearse CETC ó CED, a menos que las condiciones topográficas sean malas, caso en - que deben preferirse las CES. Si se emplea el dispositivo dipolar es conveniente que sea bilateral.

b) Capas delgadas.

En este caso pueden aplicarse las mismas recomendaciones con la diferencia de que no es aconsejable el empleo de CES.

c) Capas delgadas resistivas y subverticales.

El método más sencillo para el estudio de las heterogeneidades de este tipo es el de la colicata - "Schlumberger" siempre que el recubrimiento sea bastante uniforme.

d) Si los métodos recomendados anteriormente no diesen buen resultado, pueden ensayarse dispositivos compuestos (trieletródicos apantallados, homopolar, etc) cuyo uso en primera instancia no es conveniente - por causa de su complicación.

V.7 Planteamiento del trabajo

Al establecer el programa de trabajo, debe comen- zarse por fijar la posición y longitud de los perfiles, y la distancia entre estos; luego se determina la den- sidad de las observaciones que se efectuarán sobre ellos. Esta densidad se expresa por la distancia en- tre cada dos estaciones contiguas ó paso. Finalmente deben escogerse las separaciones entre electrodos.

La orientación de los perfiles debe ser perpendicu- lar al rumbo supuesto para las estructuras ó cuerpos buscados; por otra parte el relieve debe ser mínimo, por lo que los perfiles pueden situarse a lo largo de valles, depresiones, lo más alargadas, etc., esto es si- guiendo en lo posible una curva de nivel. Ambas con- diciones pueden resultar contradictorias, y entonces puede variarse un tanto la condición de perpendicu- laridad, sobre todo si los contactos tienen bureamiento suave.

La longitud de los perfiles debe ser tal que cubra, con ligero exceso, la zona que se estudia. El sobre- posarla un poco tiene por objeto evitar que alguna anomalía quede registrada de modo incompleto, y no - pueda interpretarse debidamente.

La distancia entre cada dos perfiles contiguos de- pende del grado de detalle requerido y de lo com-

plejidad de las circunstancias geológicas; nunca debe ser tan grande que dificulte la correlación de unos perfiles con otros.

El paso o distancia entre cada dos estaciones depende sobre todo del tamaño de los objetos buscados, ó más exactamente, de la anchura de la anomalía que estos produzcan, pues por ejemplo, las copos delgadas con buzamiento suave, dan anomalías anchas.

La elección de la longitud del dispositivo está relacionada con la profundidad de investigación. Esta depende para un corte dado, de la distancia \overline{AB} para las CES, de la $\overline{OA} = \overline{OB}$ para las CETC, y de \overline{OQ} para los CED. Se llamarán a cada una de estas distancias tamaño del dispositivo correspondiente. Este tamaño debe ser tal que, las resistividades aparentes leídas estén influidas, de modo decisivo, por la roca donde encajan las heterogeneidades buscadas, y no por el recubrimiento.

En condiciones geológicas análogos, el tamaño de los dispositivos habrá de ser mayor en las regiones secas - que en las regiones húmedas.

Debe procurarse además que el tamaño del dispositivo no sea semejante a la anchura de los accidentes topográficos, a fin de minimizar la perturbación producida por éstos.

En los métodos por calicoteo por campo constante, la separación \overline{AB} depende más bien de la longitud del perfil que va a estudiarse, y suele ser suficiente para la profundidad de investigación requerida en la práctica.

La distancia \overline{MN} debe ser la menor compatible con valores lo suficientemente grandes para ser leídas con exactitud, y nunca mayor que la anchura horizontal supuesta de los cuerpos ó estructuras buscados. En general puede tomarse $\overline{MN} = \overline{AB}/10$, procurando que el valor elegido sea igual al paso ó divisor de él y también divisor de \overline{AB} , para lo que deben acomodarse entre sí estas

tres longitudes.

V.7.2 Instrumental y trabajo de campo.

La técnica de campo de las calicatas eléctricas es semejante a la del SEV, por lo que vale en líneas generales todo lo dicho a este respecto en el capítulo IV. Lo mismo puede decirse del instrumental.

La principal diferencia respecto del SEV radica en que los electrodos M y N han de desplazarse después de efectuada cada estación.

Las operaciones se simplifican con el empleo de corriente alterna de baja frecuencia, que no requiere la utilización de electrodos impolarizables y operaciones de compensación. Esta clase de corriente puede utilizarse si las calicatas se efectúan en terrenos de resistividad elevada ó si la profundidad de investigación es relativamente pequeña. Es necesario que el milivoltímetro esté sintonizado a la frecuencia del generador, ó que al menos disponga de filtros que eliminen prácticamente los parásitos industriales de 50 Hz. Deben tomarse precauciones para evitar el acoplo inductivo entre los circuitos de emisión y de recepción, pero estos no son necesarios para el dispositivo dipolar axial.

En los hojas de campo deben anotarse los valores de ΔV e I observados para cada estación, al lado del número correspondiente a ella. Es importante anotar en la columna de observaciones el caso por accidentes topográficos, caminos y otras referencias, en especial cuando no se ha estacado previamente. Más importante aún es anotar correctamente las características del dispositivo, y el paso ó intervalo entre estaciones, y sobre todo la orientación relativa de los puntos inicial ó final del perfil, y cuando la calicata es combinada y bilateral, la orientación del electrodo activo respecto del centro a que corresponde cada lectura.

En el caso de cuerpos de extensión limitada es ne-

cesario que el perfil pase sobre él, puesto que la amplitud de la anomalía varía poco si el perfil en vez de pasar por su centro pasa por su borde, pero disminuye rápidamente fuera de éste, de modo que es casi inapreciable a distancias del borde superiores a la longitud del dispositivo.

Además de las anomalías producidas por los cambios laterales de resistividad, pueden aparecer otras debidas a que la superficie del terreno no es plana. Las perturbaciones topográficas son más intensas en los dispositivos trielectródicos y dipolos que en los simétricos, en la razón de la mayor sensibilidad de los primeros.

Por otro parte, en lo anterior se ha supuesto que el perfil sobre el que se realiza la calicata era perpendicular al rumbo de las heterogeneidades que se trataban de detectar. Cuando no ocurre así, la curva de resistividades aparentes se suaviza, y los puntos característicos se señalaban con menos claridad que en el caso de intersección normal.

V.8 Interpretación cualitativa.

Una vez efectuadas las operaciones de campo y dibujadas las curvas correspondientes en escala semilogarítmica se comienza por examinar las curvas, con objeto de identificar y separar las anomalías interesantes de origen geológico, desechando las debidas a perturbaciones eléctricas ó a accidentes del terreno. Estos últimos se detectan por correlación con el mapa topográfico de la zona y teniendo en cuenta las características de los anomalías producidas por lomas ó valles.

Las anomalías escogidas como interesantes se comparan con el mapa geológico de la zona, así como la información subterránea disponible (perforaciones, labores mineros, etc.), a fin de identificar sus causas.

La etapa siguiente consiste en establecer correlación entre las anomalías de los diferentes perfiles, lo que se efectúa comparando entre sí las correspondientes curvas.

Otra modalidad de interpretación cualitativa es el trazado de mapas de resistividad aparente. Estos se dibujan

del mismo modo que en el SEV (capítulo IV).

V.9 Interpretación cuantitativa.

Terminada la interpretación cualitativa puede pasarse a la cuantitativa, cuya finalidad es determinar la posición exacta, anchura y buzamiento aproximado de las heterogeneidades detectadas.

La riqueza y precisión de los datos obtenidos en esta etapa de la interpretación depende de la calidad de las mediciones, así como del espesor del recubrimiento, ya que es preciso que los puntos característicos aparezcan claramente visibles en los curvas.

Se comienza por identificar y señalar los puntos característicos de las curvas, atribuyéndoles las letras y subíndices que les corresponden, de acuerdo con las curvas patrón, que deben tenerse a la vista.

a) Determinación del buzamiento.

La verticalidad de un contacto aislado se manifiesta porque la punta y la sima son igualmente claros. Si la punta es más marcada que la sima el contacto buza hacia el medio más conductor, y hacia el más resistivo en caso contrario.

La anomalía de capa ancha vertical se distingue por la asimetría de la curva respecto de la sima o punta central (CES) o la simetría de las curvas respecto del cruce (CETC o CED). Si la capa es inclinada, la curva o curvas son asimétricas y a un lado se señalan simas y al otro puntas. Si la capa es conductora, buza en el sentido punta-sima, y es resistiva, en el sima-punta.

Debe tenerse en cuenta que la presencia de recubrimientos suele atenuar los puntos y simas en máximos y mínimos respectivamente.

b) Posición exacta de los contactos o interfaces.

El caso más sencillo es el de un sólo contacto entre dos medios, en posición vertical. Entonces, en los CES el contacto queda debajo del escalón vertical. Más exactamente, y -

para cualquiera de los tipos básicos de calicatos, su abscisa es la del punto medio de las abscisas de los puntos característicos P_M y S_M . Si el contacto buza hacia el medio conductor, la abscisa de la intersección del plano del contacto con la superficie (recubrimiento excluido) se obtiene llevando la distancia $\overline{MN}/2$ desde P_M hacia el medio conductor. Cuando el contacto buza hacia el medio más resistivo, se lleva hacia éste, desde S_M , la distancia $\overline{MN}/2$.

c) Anchura de la capa.

La anchura de la capa puede determinarse a partir del cálculo de anomalías típicas y mediante comparación con éstas.

La interpretación cuantitativa puede efectuarse también por superposición de las curvas de campo (en escala semilogarítmica de 62.5 mm. de módulo) con las curvas patrón de la colección de Blokh.

VI EL METODO DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES.

VI.1 Generalidades.

El método de las líneas equipotenciales consiste en — esencia en el estudio y trazado, sobre la superficie del terreno, de las líneas equipotenciales del campo producido por uno ó varios electrodos.

Cuando se emplea un solo electrodo (es decir, que el segundo electrodo B está muy alejado de la parte del terreno que se estudia) y el subsuelo es homogéneo ó estratificado horizontalmente, los equipotenciales serán circulares. Lo mismo ocurrirá si las capas tienen anisotropía transversal con eje normal a la superficie del terreno.

Cuando el eje de anisotropía no es vertical, la forma elíptica de las equipotenciales pone de manifiesto la anisotropía e indica la proyección de los ejes de ésta sobre la superficie.

La presencia de un contacto vertical ó inclinado entre dos formaciones isótropas se refleja en un cambio de dirección en las líneas equipotenciales debido a la refracción que éstos sufren.

Más interesante es el empleo de este método para la detección de inclusiones resistivas ó conductoras en un medio homogéneo. Las inclusiones más resistivas que el medio encajante se manifiestan por una aproximación mutua de los equipotenciales, y las más conductoras por una rarefacción de éstas.

En estas investigaciones, a fin de hacer más fácilmente visibles las deformaciones de las líneas equipotenciales, suelen emplearse dos electrodos rectilíneos y paralelos conocidos como electrodos de Petrosky los cuales crean un campo con equipotenciales también rectilíneos en medio homogéneo, cuyas deformaciones resaltan más claramente que cuando son circulares. Sin embargo, los resultados del método de equipotenciales pueden obtenerse, en general, con mayor precisión y seguridad mediante colicatas eléctricas.

Entre los inconvenientes del método figuran su sensibili-

dad frente a los accidentes topográficos, su exigua penetración (unas pocas decenas de metros para cuerpos grandes) y la dificultad en el cálculo de profundidades.

Existe, no obstante, una modalidad muy extendida en todo el mundo y muy útil en minería, la del "cuerpo cargado" o "Misse a la Masse" en la que se utiliza como electrodo creador del campo la propia mineralización conductora, siempre que esta aflore ó sea accesible por medio de perforaciones ó labores mineras. En estas condiciones se puede delimitar el cuerpo conductor y estudiar sus relaciones y continuidad con otros próximos. Este método se explicará en el capítulo VII.

VI.2 Trabajo de campo.

VI.2.1 Modalidades del trabajo.

En el método de líneas equipotenciales, cabe distinguir dos modos principales de operar: en uno de ellos se sigue directamente sobre el terreno la marcha de las líneas de igual potencial; en el otro, lo que se mide es la caída del potencial a lo largo de una serie de perfiles, y partiendo de estos datos, se trazan los equipotenciales en el plano ó mapa de la zona.

Puede hacerse otra división según que se emplee corriente continua ó variable; esta última puede ser alterna (sinusoidal) ó de impulsos. No obstante, sea cual sea el tipo de corriente utilizado, las observaciones se interpretan según las leyes de la corriente continua, lo que es aproximadamente válido siempre que la frecuencia sea suficientemente baja y la conductividad media del subsuelo no sea demasiado grande.

Salvo en lo que respecta al generador y al circuito de exploración, los técnicas de trabajo son las mismas para corriente continua que para alterna, ó de impulsos.

VI.2.2 Circuito de exploración:

Este circuito es el que se emplea para el trazado de -

las equipotenciales y consta esencialmente de un instrumento de cero unido por medio de dos cables a dos electrodos en forma de varilla con mango aislante, de un metro de longitud, y uno ó dos cm de diámetro, aunque también pueden emplearse electrodos impolarizables.

Cuando se emplea corriente continua ó de impulsos puede emplearse como instrumento de cero un galvanómetro robusto, un milivoltímetro electrónico ó un microamperímetro con cero en el centro de la escala, conectados en serie con un compensador de polarización. Para corriente alterna puede utilizarse un microamperímetro (con rectificador) ó un milivoltímetro electrónico para este tipo de corriente, no siendo preciso el compensador de polarización.

El "modus operandi" es como sigue: se coloca uno de los electrodos en un punto de la equipotencial que se estudia y el segundo en un punto arbitrario situado, por ejemplo, a 10 ó 15 m. de distancia, y se lee el instrumento. Manteniendo fijo el primer electrodo, va desplazándose el segundo en dirección perpendicular a la prevista (fig 6.1) para la equipotencial (la cual, en ausencia de anomalías debe ser paralela a los electrodos lineales que crean el campo), hasta que la lectura del instrumento sea cero. Entonces los dos electrodos exploradores estarán por definición en la misma equipotencial. En el lugar ocupado por el primer electrodo se coloca una estaca, señalada con el número de orden que se haya atribuido a la línea equipotencial. Luego, el primer electrodo pasa al punto donde se hallaba el segundo, y este vuelve a desplazarse en busca de un nuevo punto de la equipotencial.

Si se emplea corriente continua, la polaridad de la tensión leída indica en que sentido debe desplazarse el electrodo móvil para acercarse a la equipotencial. Esta ventaja, está contrarrestada por la presencia del potencial de polarización, y en muchos casos, del potencial espontáneo, lo que obliga a efectuar cada vez la compensación previa de tales ruidos con el circuito de emisión

desconectado.

Estas dificultades desaparecen con el empleo de corriente alterna, puesto que los ruidos de continua no afectan a los instrumentos para aquel tipo de corriente, siempre que estén adecuadamente contruidos, con un condensador en serie ó filtro a la entrada. Por lo tanto es preferible, en general, el uso de esta corriente, en lo que respecta a rapidez del trabajo, aunque tampoco esta exenta de desventajas. Como las lecturas carecen de polaridad, no es posible conocer "a priori" el sentido en que debe desplazarse el electrodo móvil después de cada una de ellas. Por otra parte, la aplicación de tensiones alternas hace que a la corriente "galvánica" - que entra en el terreno a través de los electrodos, se suma otra inducida desfasada respecto de la primera un cuarto de periodo aproximadamente, y que se compone con aquella, dando lugar a una polarización elíptica. Entonces lo que se determina en realidad es la dirección, en cada punto, del eje menor de la elipse de polarización que, como los equipotenciales, es normal a la dirección de máxima densidad de corriente. Cuando el electrodo móvil está en el punto buscado no se obtiene lectura nula, sino mínima.

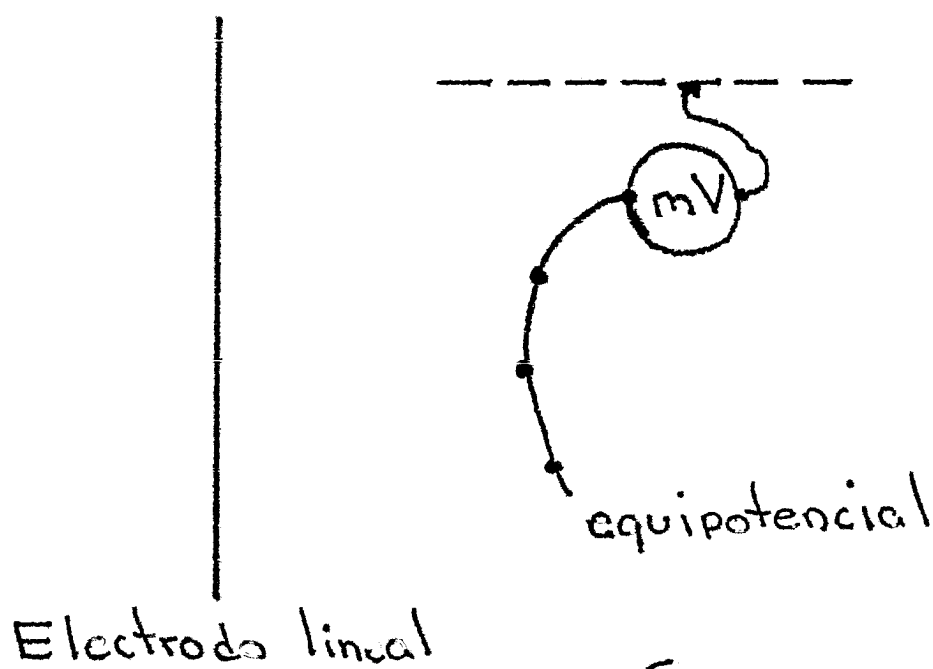


Fig 6.1

En el segundo método de trabajo, mencionado más arriba, se traza previamente sobre el terreno un sistema

de perfiles paralelos entresí y perpendiculares a los electrodos lineales, y a lo largo de ellos se va midiendo la caída de potencial en intervalos fijos y contiguos, por ejemplo cada 20 m intercalando cuando sea conveniente puntos intermedios. Se utilizan dos electrodos y un instrumento de medida, que en caso de emplearse corriente continua puede ser un potenciómetro ó un milivoltímetro electrónico, ambos con dispositivos de compensación, y para corriente alterna un milivoltímetro. Los perfiles se enlazan entre sí por uno ó dos transversales, y de este modo, sumando algebraicamente las lecturas se puede atribuir potencial a cada punto respecto de un origen arbitrario. Estos valores, llevados a un plano, sirven para trazar sobre él las equipotenciales. Este modalidad de trabajo es más rápida y regular que el trazado directo en el terreno, aunque las equipotenciales no quedan determinadas de modo tan preciso.

VI.2.3 Circuito de emisión.

Consta de dos partes: generador y electrodos lineales. Para corriente continua, el generador puede ser una dinamo de 100-200 watios de potencia, movido por un motor de gasolina, ó una batería de acumuladores. Las pilas secas resultan menos adecuadas en razón de la intensidad relativamente grande que suele ser necesaria (2 ó 3 amperias). En el trabajo con corriente alterna se utiliza un alternador movido por un motor de gasolina, ó un oscilador de válvulas. Las tensiones de salida usuales son de 100 a 200 voltios, tanto para corriente continua como para corriente variable.

Los electrodos lineales constan de una fila de piquetes metálicos clavados en el suelo, y unidos electricamente entre sí por medio de un cable ó alambre. Este artificio es mucho más fácil de montar que un cable ó alambre, enterrado, que sería el verdadero electrodo lineal y produce el mismo campo que este, salvo a muy corta distancia.

El paralelismo entre las equipotenciales y los electrodos, supone que el medio es homogéneo, o lo que es lo mismo, que la intensidad de corriente que pasa al terreno por unidad de

longitud del electrodo es la misma a todo lo largo de él. Esto no ocurre en la práctica, puesto que la resistencia de contacto - suele ser muy variable. Por esta razón una vez instalados los electrodos se procede a la "corrección del campo" que se efectúa como sigue: se trazan dos equipotenciales, situadas en la zona interior de los electrodos y distantes de éstos alrededor de la décima parte de la separación entre los electrodos. Frente a los puntos donde la densidad de corriente emitida por el electrodo es menor, la equipotencial se separa del electrodo más próximo, mientras que donde la densidad de corriente sea mayor, las equipotenciales se acercan al electrodo. Entonces se incrementa la densidad de piquetes en las partes donde ocurra lo primero, y se disminuye donde se produzca lo contrario, hasta conseguir que las dos equipotenciales de ensayo sean sensiblemente rectilíneas.

VI.2.4 Fases del trabajo.

Se comienza por elegir la ubicación de los electrodos lineales, los cuales deben colocarse perpendicularmente al rumbo previsto para la dimensión mayor del objeto buscado, siempre que este sea conductor.

La longitud de los electrodos lineales suele hacerse igual a la distancia que separa éstos, que suele oscilar entre 500 m y 3 km. La conexión del cable a los electrodos lineales puede hacerse en los extremos de éstos más próximos al generador, pero es preferible hacerlo en el centro de cada electrodo, para mayor homogeneidad del campo.

Una vez instalados los electrodos se procede a la "corrección del campo" del modo descrito más arriba; a continuación puede comenzarse el trazado de las equipotenciales. Para ello debe estaquillarse un perfil base perpendicular a los electrodos lineales; sobre este perfil se señalan los puntos de comienzo de las equipotenciales, que generalmente se escogen a intervalos iguales. La extensión de estos intervalos depende del tamaño supuesto, para el cuerpo buscado y no debe ser mayor que la mitad de la longitud esperada para éste.

La zona explorada es siempre la situada entre los electrodos, evitando la proximidad de éstos. Es recomendable - trabajar solamente en el tercio central de la zona situada entre los electrodos, que es donde la repartición es - más homogénea.

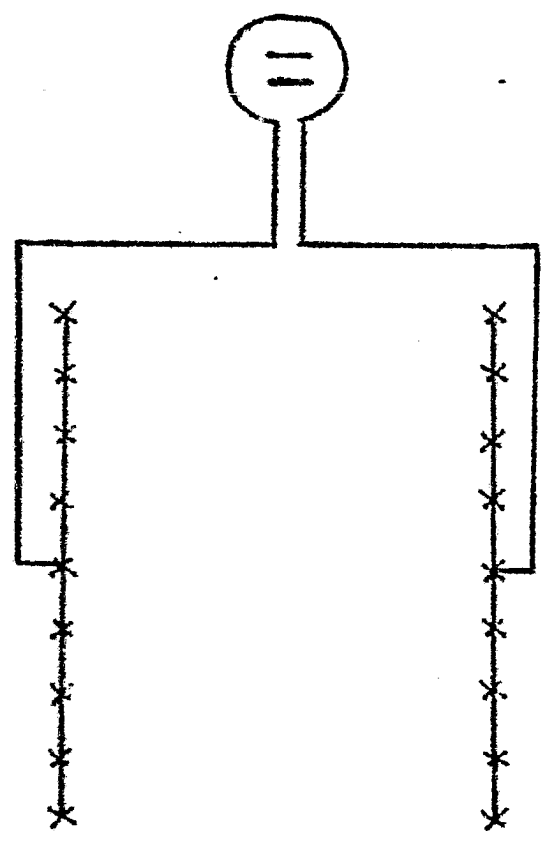


Fig 5.2

Partiendo de los puntos señalados en el perfil base, se trazan sobre el terreno las respectivas equipotenciales, siguiendo el procedimiento expuesto en el apartado 2.2 de este capítulo. El objeto de la investigación es el de encontrar zonas anómalas, o sea de curvatura de las equipotenciales, que son síntomas de heterogeneidad en el subsuelo, la cual puede deberse a la presencia de alguno de los cuerpos buscados. Por consiguiente, cuando se observe que alguna equipotencial se desvía, debe acortarse el paso ó distancia entre los electrodos exploradores, a fin de conocer más detalladamente la estructura de la anomalía.

El trazado de las equipotenciales ha de acompañarse del levantamiento topográfico de las mismas. El intervalo entre equipotenciales se determina sobre el perfil base, midiendo la caída de potencial entre las sucesivas estacas iniciales. Los datos topográficos se llevan a un plano de escala adecuada, en el que además de las líneas equipotenciales debe

incluirse la situación del generador, cables y electrodos, así como los accidentes topográficos, afloramientos y otros datos útiles al interruptor.

VI.3 Teoría e interpretación.

La interpretación del método de líneas equipotenciales es preferentemente cualitativa. Ello se debe principalmente a que los cuerpos que se buscan (filones, diques, bolsadas, etc) suelen tener forma muy irregular, por lo que el cálculo de las anomalías que producen es, hasta ahora, prácticamente imposible.

Considérese un medio homogéneo sobre el cual se sitúan dos electrodos rectilíneos de longitud $2b$, separados por la distancia $2a$ como muestra la figura (6.3).

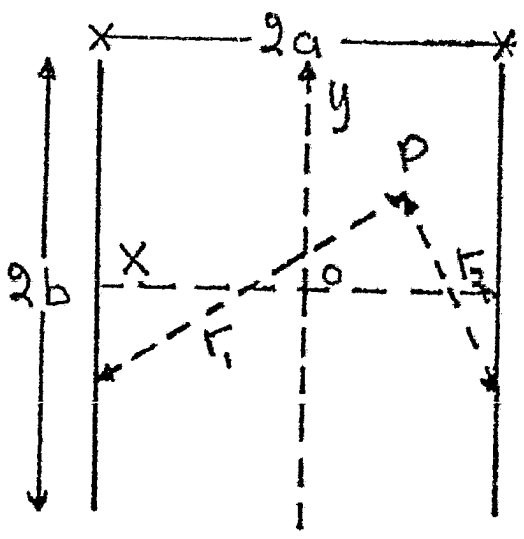


Fig (6.3)

Entonces, de acuerdo a la figura (6.3), el potencial dU producido en un punto cualquiera P de coordenadas X, Y , por un elemento de longitud dy del primer electrodo que diste r_1 del punto P será:

$$dU = \frac{\rho I dy}{2\pi \cdot 2b} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Si se añade la contribución al potencial de un elemento análogo del segundo electrodo, que diste r_2 del punto considerado P se tendrá:

$$dU = \frac{\rho I dy}{4\pi b} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{\rho I dy}{4\pi b} \left\{ \frac{1}{[(a+x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(a-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}} \right\}$$

Por lo tanto el potencial total es:

$$U = \frac{\rho I}{4\pi b} \int_{-b}^b \frac{dy}{[(a+x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}} - \frac{\rho I}{4\pi b} \int_{-b}^b \frac{dy}{[(a-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}} =$$

$$U = \frac{\rho I}{4\pi b} \left\{ \ln \frac{b-y_1 + [(a+x_1)^2 + (b-y_1)^2]^{1/2}}{-(b+y_1) + [(a+x_1)^2 + (b-y_1)^2]^{1/2}} - \ln \frac{b-y_1 + [(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2]^{1/2}}{-(b+y_1) + [(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2]^{1/2}} \right\}$$

... (6.3.1)

Haciendo $A = \frac{b-y_1}{a+x_1}$; $B = \frac{b+y_1}{a+x_1}$; $C = \frac{b-y_1}{a-x_1}$; $D = \frac{b+y_1}{a-x_1}$ —
resulta:

$$U = \frac{\rho I}{4\pi b} \left\{ \ln [A + (1+A^2)^{1/2}] - \ln [-B + (1+B^2)^{1/2}] - \ln [C + (1+C^2)^{1/2}] + \right.$$

$$\left. + \ln [-D + (1+D^2)^{1/2}] \right\} \dots (6.3.2)$$

Por otra parte, de variable compleja se sabe que:

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln \left\{ x + (1+x^2)^{1/2} \right\}$$

Sustituyendo esta ecuación en (6.3.2) se obtiene:

$$U = \frac{\rho I}{4\pi b} \left\{ \operatorname{senh}^{-1} A + \operatorname{senh}^{-1} B - \operatorname{Senh}^{-1} C - \operatorname{Senh}^{-1} D \right\} \dots (6.3.3)$$

Este potencial se obtuvo para medios homogéneos; si en uno de éstos existiesen localmente zonas más conductoras

o más resistivas, las equipotenciales se enrarecerían en el primer caso, y se apilarían en el segundo, como muestra la figura (6.4)

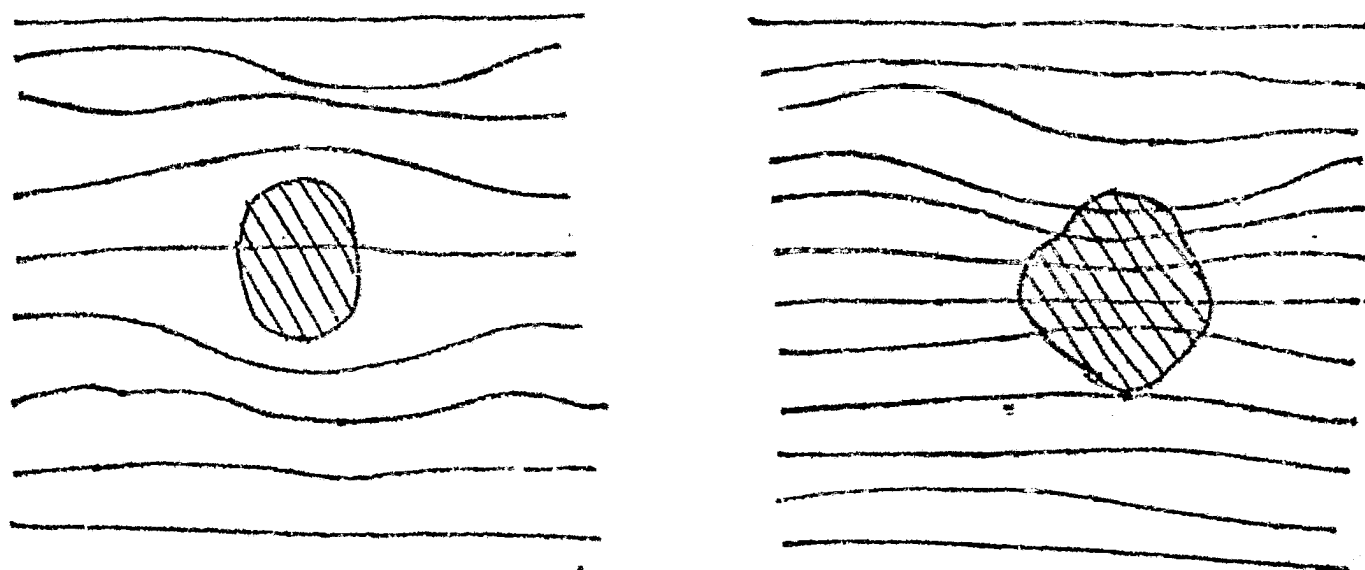


Fig (6.4)

Los estudios teóricos y las mediciones sobre modelos han permitido establecer ciertas conclusiones sobre la detectabilidad de diferentes cuerpos por aplicación del método de las líneas equipotenciales. Las conclusiones más importantes son las siguientes: La zona más favorable para la detección es la próxima al centro del rectángulo determinado por los electrodos, dada la mayor homogeneidad del campo en ella. Si el cuerpo es alargado, la posición más favorable para su detección es la perpendicular a los electrodos, si es más conductor que el medio, y paralela en caso opuesto. La detectabilidad aumenta con el contraste de resistividad entre el cuerpo y el medio circundante hasta alcanzar la saturación donde empieza a disminuir; también la detectabilidad disminuye con la profundidad del cuerpo. Cuando el cuerpo por su forma, puede considerarse como una lámina (filones, diques) su detectabilidad aumenta con el buzamiento. Los cuerpos de posición horizontal ó de forma complicada son los de detección más difícil.

Suele ocurrir que la capa superficial del terreno (recubrimiento ó zona meteorizada) sea más conductora que la roca infrayacente. En estas condiciones se produce una concen-

tración de la corriente en la capa superficial que disminuye la penetración efectiva del método, la cual, por otra parte, crece con la separación entre los electrodos.

La deformación de las equipotenciales indica no solo la presencia de heterogeneidades sino la clase de éstas y su posición aproximada.

VII EL METODO MISE A LA MASSE"

VII.1 Introducción

Este método es una variante del método de equipotenciales y su traducción al español sería "Excitación de la masa" conocido también como "Método del cuerpo cargado" que da una idea clara del método, ya que, matemáticamente, el efecto obtenido es el mismo que el de cargar electrostáticamente un cuerpo conductor.

Para la aplicación de este método, es necesario que el cuerpo conductor (generalmente un yacimiento de sulfuros, una falla con relleno conductivo, etc.) sea accesible desde el exterior, bien porque aflore, bien por haber sido cortado en alguna perforación ó labor mecánica. Es también necesario que la conductividad del cuerpo sea notablemente mayor que la del medio encajante.

La información obtenida se refiere principalmente a la forma, tamaño y posición del cuerpo cargado, así como la presencia de otros cuerpos conductores próximos. Por lo tanto, el método resulta muy útil cuando se conoce por afloramiento, ó por medio de trabajos mecánicos de exploración, una zona metalizada y se desea saber si forma parte de un yacimiento extenso, y en caso afirmativo, cuales son las características de éste.

El método consiste en esencia en el estudio de las equipotenciales producidas en el terreno por un electrodo que es la propia metalización. El circuito creador del campo se cierra por medio de una toma de tierra muy alejada ó electrodo de infinito.

Los resultados del método del cuerpo cargado tienen carácter cualitativo y de tosca aproximación. El alcance en profundidad depende del tamaño del cuerpo y no suele superar la mitad de la corrida de éste, si las mediciones se efectúan en la superficie del terreno.

VII.2 Trabajo de campo.

El método del cuerpo cargado puede aplicarse en dos modalidades diferentes, que son el trazado directo de líneas equipotenciales y el procedimiento llamado de gradientes. En ambos casos es necesario instalar un circuito de excitación. Este circuito consta de la fuente de alimentación y de los cables - que la unen, por una parte, al cuerpo conductor, y por otra al toma tierra lejano. La distancia entre las dos tomas de tierra debe ser 10 a 15 veces la longitud de la zona que se pretende estudiar.

Si el cuerpo conductor es accesible en algún afloramiento ó en labores mineras, la toma de tierra correspondiente puede hacerse clavando en él varios barrenos cortos conectados entre sí. Si existiesen dificultades para la perforación, se deben emplear electrodos "blandos" compuestos por filtros, esponja, goma-espuma ó otro material análogo impregnado de agua-salada.

El punto por donde el cuerpo conductor recibe la corriente eléctrica recibe el nombre de punto de carga. El toma tierra lejano debe estar compuesto por 4 ó 5 barrenos algo separados entre sí clavados en un lugar de buenos contactos (charca ó lugar húmedo). La fuente de alimentación puede estar constituida por una batería de pilas secas ó un grupo motor de explosión dinamo que se conectará a un interruptor automático cuando se trabaja por el método de impulsos.

VII. 2.1 Trazado de líneas equipotenciales.

Este procedimiento no difiere esencialmente del descrito en el método de las líneas equipotenciales y el instrumental es el mismo.

Las equipotenciales determinadas sobre el terreno - se llevan a un plano de escala adecuada, en el que deben figurar los datos topográficos y geológicos que puedan ser de ayuda para el interpretador.

VII. 2.2 Método de gradientes.

En esta modalidad lo que se miden son las diferen -

cias de potencial entre estacas contiguas y relativamente próximas entre sí (20 m.), situadas sobre perfiles paralelos que cubren la zona de trabajo. Si se divide cada d.d.p. - observada por la separación entre las estacas correspondientes, se obtiene el valor medio del gradiente del potencial, y a esto se debe el nombre de este método, que se emplea principalmente con corriente continua, para el estudio de cuerpos conductores con buzamiento fuerte.

Los perfiles deben tener orientación perpendicular al rumbo supuesto para la dimensión mayor del cuerpo investigado. Las mediciones consisten sencillamente en determinar la d.d.p. entre cada par de estacas contiguas a lo largo de todos los perfiles.

Los valores ΔV_i observados se reducen al valor correspondiente a un ampere en la corriente de emisión, dividiendo por la intensidad I_i correspondiente. Los valores finales del gradiente medio que se utilizan para la interpretación son los:

$$G_i = \frac{\Delta V_i}{I_i MN} \quad \dots \quad (7.2.1)$$

Los gradientes medios así calculados se representan — graficamente en función de la distancia sobre el perfil, atribuyéndolos al punto medio de cada intervalo. Los resultados de los diferentes perfiles pueden representarse conjuntamente en un mapa.

VII. 3 Teoría e interpretación

VII. 3.1 Mapa de equipotenciales

Cuando el trabajo de campo se ha efectuado por el procedimiento de líneas equipotenciales, sus resultados quedan resumidos en un mapa de estas líneas, que es la base de la interpretación esencialmente cualitativa.

Las líneas equipotenciales que se determinan en el trabajo de campo no son otra cosa que las intersecciones

de las superficies indicadas con la superficie del terreno por lo que su forma será muy parecida a la de la proyección del cuerpo sobre un plano horizontal, siempre que aquél no sea muy profundo. La forma de las líneas equipotenciales permite, pues, fijar de modo aproximado dicha proyección, sobre todo si el cuerpo está más o menos horizontal.

El tamaño del cuerpo podría ser determinado si se conociese cuál de las líneas equipotenciales es la corriente a la superficie exterior del cuerpo. Dada la continuidad de la componente normal J_{\perp} de la densidad de corriente en la superficie de contacto entre dos medios $J_{\perp}' = J_{\perp}''$ y por lo tanto $E_{\perp}'/\rho_1 = E_{\perp}''/\rho_2$. Ahora bien, como $\rho_2 > \rho_1$, pues en caso contrario el método no sería aplicable, resulta que el campo eléctrico es muy intenso en la inmediata proximidad del cuerpo, lo que produce una condensación de las equipotenciales, observable en la superficie del terreno, si la diferencia de potencial entre cada dos líneas en ella es constante. Habrá, pues, que buscar en el plano la zona de condensación de equipotenciales, y tomar una intermedia de ellos como traza aproximada del cuerpo.

Si el cuerpo investigado tiene buzamiento apreciable, su parte superior influye mucho más en las equipotenciales que el inferior. Una condensación de equipotenciales concéntricas y de pequeño radio, cuyo centro recibe el nombre de punto umbilical, señala aproximadamente la posición de la cima ó borde superior del cuerpo cargado. En cambio, su extremo inferior no se refleja con claridad como muestra la figura 7.1

La existencia de una zona de enrarecimiento de las equipotenciales puede señalar la presencia de un segundo cuerpo conductor próximo al cargado, según se aprecia en la figura 7.2.

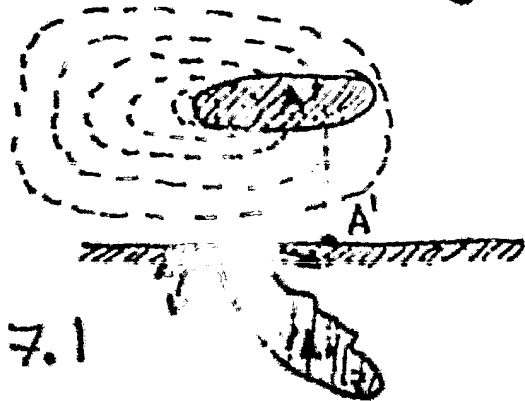


Fig 7.1

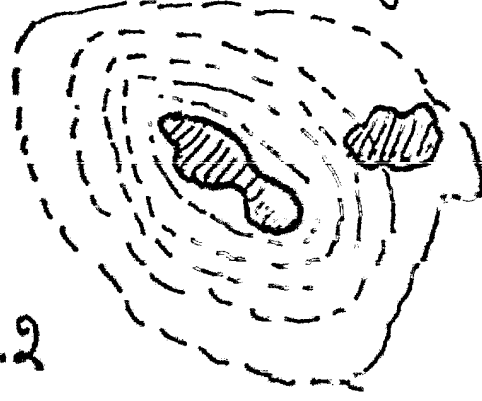


Fig 7.2

VII.3.2 Interpretación de los gradientes.

La modalidad de gradientes en el método del cuerpo cargado es mucho más sensible que el trazado directo de equipotenciales. Un cuerpo cargado de forma esférica con su centro a profundidad igual a su diámetro produce una anomalía muy débil en el potencial, mientras que la observada en el gradiente es mucho más clara y puede llegar hasta el 50%. Para este caso, si "a" es la profundidad de dicho centro, y "x", "y", "r" las distancias indicadas en la figura para un punto genérico "P" situado en la interfaz tierra-aire. El efecto de esta superficie límite, según se deduce de la teoría de las imágenes, es la duplicación del potencial observado en ella. Por lo tanto el potencial U en la superficie del terreno valdrá:

$$U = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \dots \dots \dots (7.3.1)$$

Y el gradiente G_x sobre dicha superficie será:

$$G_x = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = - \frac{\rho I}{2\pi} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \dots (7.3.2)$$

De esta expresión se deduce que el gradiente se anula para x=0, propiedad que puede emplearse para determinar el epicentro de la esfera, si se dispone de un perfil de gradientes que pase sobre él. Para valores positivos de "x" el gradiente es negativo, y positivo en caso contrario.

A fin de averiguar la posición de los extremos de la curva de gradientes, se calculará la derivada:

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{2x^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^{5/2}} \dots \dots \dots (7.3.3)$$

Esta expresión indica que los extremos de la curva de gradientes están situados simétricamente respecto del epicentro de la esfera a la distancia $x_e = \pm a/\sqrt{2}$. Por lo tanto, la profundidad del centro de la esfera puede determinarse

a partir de la distancia $d = 2X_e$ entre los extremos de la curva mediante la ecuación:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} d \approx 0.7071 d = 1.4142 X_e \dots \dots (7.3.4)$$

En cambio no puede calcularse el radio de la esfera, ó lo que es lo mismo, el tamaño de la bolsada, ya que la posición de los extremos sólo depende de la profundidad del cuerpo.

Se ha supuesto en el cálculo anterior, que el perfil de gradientes pasaba por el epicentro de la esfera. Si no fuese así, habría que tener en cuenta la distancia "y" del perfil al centro, y poner $r^2 = a^2 + y^2 + x^2$. Como y es constante, basta con sustituir a^2 por $a^2 + y^2$ en el resultado final, de modo que los puntos extremos del gradiente tendrán la ecuación:

$$2x^2 - y^2 = a^2 \dots \dots \dots (7.3.5)$$

Que corresponde a una hipérbola, sobre la cual se hallarán todos los puntos de gradiente extremo correspondientes a un sistema de perfiles paralelos al primero, cuya dirección es arbitraria.

Análogamente podría calcularse el gradiente en la superficie del terreno del potencial producido por cuerpos cargados de diversas formas y geométricas regulares y con diferentes buzamientos.

VIII EL METODO DEL POTENCIAL ESPONTANEO

VIII.1 Introducción.

El método del potencial espontáneo es el método geoelectrico más antiguo conocido y en contraste con los demás es un método de campo natural por lo que no precisa de circuito de emisión.

So principal ventaja es la sencillez, tanto en el instrumental como en el trabajo de campo. Se utiliza para el descubrimiento de cuerpos conductores, especialmente de yacimientos de sulfuros. Se basa este método en que, en determinadas condiciones, ciertos heterogeneidades conductoras del subsuelo se polarizan, convirtiéndose en verdaderas pilas electricas, que originan en el subsuelo corrientes eléctricas. Estas corrientes producen una distribución de potenciales observable en la superficie del terreno, y que delata la presencia del cuerpo polarizado.

Entre los cuerpos que pueden presentar este fenómeno figuran los yacimientos de algunos sulfuros (pirita, pirrotita, calcosina, etc.), ciertos óxidos (magnetita, pirolusita), minerales ó rocas carbonosas (grafito, antracita). La polarización espontánea (P.E) más intensa suele ser la de la pirita y pirrotita.

VIII.2 Causas del potencial espontáneo.

El fenómeno de la P.E. tiene indudable origen electroquímico, aunque las causas no están bien conocidas: y debido a esto existen muchas teorías. Algunas teorías atribuyen la P.E. a la oxidación de los sulfuros. Otras teorías afirman que la oxidación no tiene nada que ver, y que la P.E. se debe a que el cuerpo que la origina produce una pila de concentración de oxígeno, o bien a otros fenómenos tales como potenciales de electroósmosis, potenciales de difusión, corrientes telúricas, electrofiltración, etc.

Del análisis de muchas de estas teorías se deducen, entre otras cosas, las conclusiones siguientes:

- a) Los cuerpos productores de P.E. son siempre buenos — conductores electrónicos, generalmente con continuidad eléctrica en su interior.
- b) Las anomalías de la P.E. son casi siempre negativas en la proximidad del extremo superior del cuerpo.
- c) El valor de la d.d.p. total observada suele ser de algunos centenares de mV y puede llegar hasta 0.5 V.
- d) El cuerpo debe yacer al menos en parte, en zona de oxidación activa.
- e) El potencial espontáneo es relativamente estable en el tiempo.

En base a estas conclusiones Sato y Mooney establecieron su propia teoría que brevemente dice lo siguiente:

La P.E. se debe a reacciones electroquímicas con diferente carácter en dos alturas de la interfaz cuerpo-roca encajante, las cuales se encuentran, generalmente y respectivamente, por encima y por debajo del nivel freático, con el cuerpo sirviendo de enlace eléctrico entre ellas. Las sustancias disueltas alrededor de la parte superior del cuerpo sufren reducciones, tomando electrones del cuerpo, mientras que en la parte inferior las sustancias disueltas se oxidan, cediendo electrones al cuerpo. Este sirve únicamente como conductor para los electrones, cuyo flujo de abajo arriba hace que las reacciones químicas puedan mantenerse indefinidamente, y no interviene en tales reacciones, por lo que permanece inalterable.

En rocas muy sanas y compactas, la P.E. no puede darse. Lo mismo ocurre en zonas heladas, pues la baja temperatura retrasa las reacciones y las copas de congelación impiden el movimiento iónico. Las zonas desérticas tampoco son favorables para la aparición del fenómeno, entre otros motivos, por la escasa humedad. La polarización espontánea encuentra, pues,

los condiciones más favorables en las zonas templadas.

VIII.3 Instrumental.

La falta de circuito de emisión hace que el instrumental requerido por el método del potencial espontáneo sea muy sencillo, y conste solamente de un voltímetro, dos electrodos impolarizables, cable y un correte (no siempre). El circuito de compensación no se utiliza. Los electrodos impolarizables han de estar provistos de un mango largo que permita su rápida y cómoda colocación y levantamiento. El cable puede ser de cualquier tipo flexible, ligero, y con buen recubrimiento aislante.

VIII.4 Trabajo de campo.

Existen dos modalidades básicas, que son el método de potenciales y el método de gradientes. Aunque teóricamente son equivalentes, desde el punto de vista práctico son muy distintos. El primero, con mucho, es el más empleado.

VIII.4.1 Método de potenciales.

Este método consiste en esencia, en determinar directamente la diferencia de potencial de una serie de estaciones respecto de un punto fijo de referencia. Las estaciones ó puntos de observación se disponen a intervalos iguales (por ejemplo, de 25 ó 50 m) sobre una serie de perfiles paralelos entre sí. Estos perfiles se estaquillan en el terreno partiendo de una línea base ó magistral perpendicular a todos ellos y que contiene sus orígenes. Uno de los electrodos permanece fijo en el origen del primer perfil, junto con el instrumento de medida y el segundo electrodo, móvil, se va colocando sucesivamente en los puntos de observación previamente estaquillados sobre el perfil.

El correte puede estar fijo junto al electrodo inmóvil, desenrollándose el cable conforme se aleja el segundo electrodo, de este modo el cable se arrastra y roza contra el suelo, con lo que se va deteriorando su aislamiento. Por ello es preferible

que el obrero que traslada el electrodo móvil, lleve al propio tiempo el carrete, que ha de ser liviano, soltando cable a medida que avanza. El electrodo fijo debe instalarse en un pocillo húmedo de unos 5 ó 10 cm. de profundidad previamente excavado.

Las d.d.p. leídas en el instrumento incluyen la diferencia P entre las polarizaciones de los electrodos, nunca nula a pesar del nombre de estos. En éste método, por ser de campo natural, no es posible utilizar el dispositivo de compensación, pues el operador no puede distinguir, como es obvio, la parte del potencial leído que corresponde a los electrodos. El valor P puede determinarse colocando los dos electrodos sobre tierra húmeda, a pocos cm. de distancia mutua y leyendo la d.d.p. que aparece entre ellos. Otro procedimiento más exacto es el que se describe a continuación. Se excavan dos pocillos como los indicados más arriba, a varios metros de distancia mutua. Sea U la diferencia de potencial natural entre ellos e_1 y e_2 los fem producidas respectivamente por los electrodos 1 y 2. Al colocar éstos en los pocillos como muestra la figura (8.1) se observará entre ellos la d.d.p. .

$$\Delta V_1 = U + e_1 - e_2 = U + P \dots \dots (8.4.1)$$

Entonces se desconectan los electrodos y se truecan los lugares que ocupan, cuidando que los bornes de entrada del aparato vayan a electrodo distinto que en la primera observación - (figura 8.1 b). El valor leído ahora será:

$$\Delta V_2 = U - e_1 + e_2 = U - P \dots \dots (8.4.2)$$

Partiendo de (8.4.1) y (8.4.2) pueden determinarse los valores de U y de P , que son:

$$U = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{2} \dots \dots (8.4.3)$$

$$P = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_2}{2}$$

Procedimiento de este modo podría eliminarse el error debido a la polarización de electrodos.

VIII. 4.2 Método de gradientes.

Esta modalidad de trabajo consiste en medir sucesivamente las diferencias de potencial $\Delta V_1 = U_1 - U_0$; $\Delta V_2 = U_2 - U_1$, etc., entre cada dos estacas contiguas del perfil. El trabajo es más lento y requiere más cuidado que el método de potenciales; no obstante, puede ser necesario el empleo del método de gradientes en zonas donde las perturbaciones, bien de origen industrial, bien naturales, tengan valores apreciables.

La zona en estudio se estaquilla en perfiles, partiendo de una línea base, del mismo modo que en el método de equipotenciales. El intervalo entre cada dos estacas ó estaciones suele ser de 20 ó 25 m. En zonas de anomalía pueden establecerse, sobre la marcha, puntos de detalle a intervalos de 5 ó 10 m.

La medición suele hacerse en polígonos cerrados, como muestra la figura (8.2).

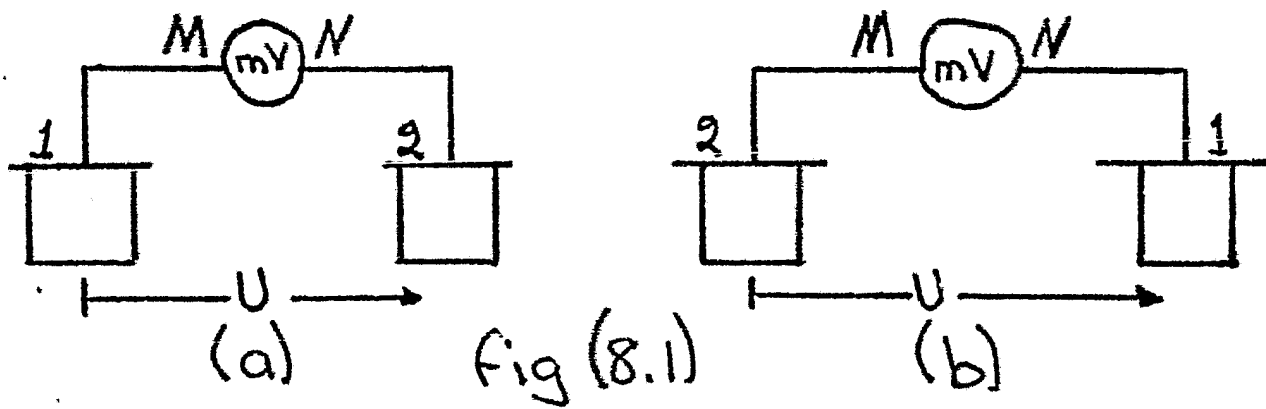
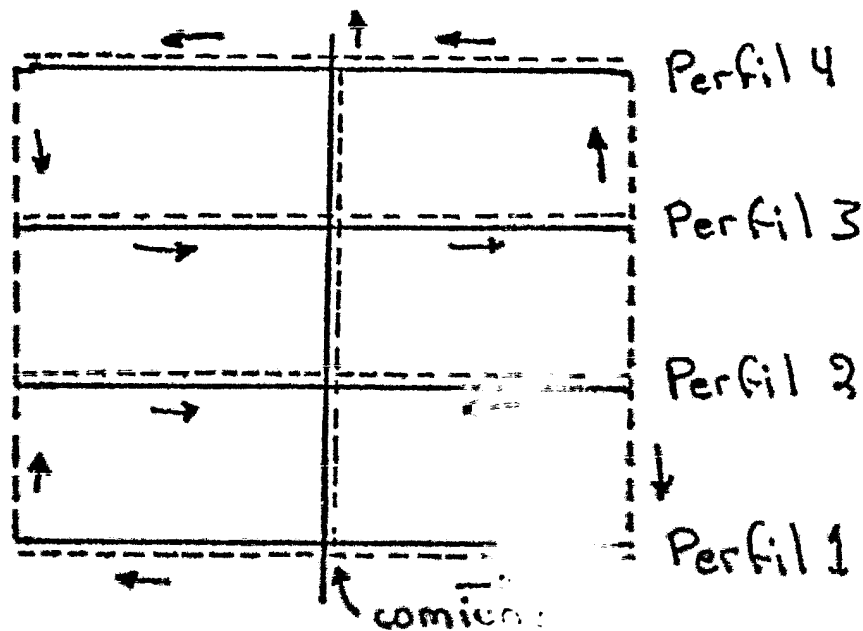


Fig (8.2)



La medición en polígonos cerrados tiene la gran ventaja de proporcionar un control de la medición en el error de cierre.

En el método de gradientes, el error debido a la polarización residual de los electrodos es mayor que en el método de equipotenciales, porque en este caso son mucho menores las d.d.p. leídas mientras que P es del mismo orden. Las mediciones requieren gran cuidado, puesto que una observación errónea influye en todos los siguientes.

VIII. 5 Interpretación Cualitativa.

Los resultados de las mediciones de P. E. se representan en forma de mapa de equipotenciales. Junto a cada línea se escribe el valor y el signo del potencial correspondiente. El cuerpo causante del fenómeno puede considerarse esquemáticamente como un dipolo, ya que tiene un polo negativo en su parte superior y otro más positivo; la línea que los une se llama eje de polarización o eje del dipolo.

La existencia de metalizaciones viene indicada por la presencia de centros negativos, es decir, por líneas equipotenciales de valor decreciente según se aproximan a un centro de potencial mínimo (máximo en valor absoluto) al que rodean. Si estas líneas son aproximadamente circulares, puede deducirse que el cuerpo es aproximadamente isométrico, o sea de revolución, con su eje de simetría en posición más o menos vertical. Esta verticalidad del eje de simetría (que será también el de polarización) se confirma por la ausencia de equipotenciales de valor máximo que rodeen a la zona de valores mínimos. El centro negativo coincide con el epicentro del polo superior del cuerpo.

Si las equipotenciales son líneas cerradas alargadas, en forma de óvalos o elipses, puede decirse lo mismo del cuerpo polarizado, cuyo eje, en proyección horizontal, coincide en dirección con el rumbo de la dimensión mayor de las equipotenciales.

Cuando junto a la zona de potenciales mínimos existe otra de potenciales máximos, debe atribuirse a un cuerpo —

cuyo eje de polarización difiere bastante de la vertical. En este caso, cada una de las zonas está producida por uno de los polos del cuerpo.

Entre las causas de error en la interpretación figuran los efectos topográficos y los potenciales debido a la electrofiltración. Estos son difícilmente separables de los producidos por cuerpos de interés minero, aunque en la mayor parte de los casos no tienen valor suficiente para perturbar la interpretación de modo importante. Un factor perturbador en la búsqueda de sulfuros por la P.E. lo constituyen las pizarras grafitosas, los cuales se comportan del mismo modo que los sulfuros, originando en los mapas de equipotenciales, fuertes anomalías negativas que pueden atribuirse erróneamente a yacimientos de sulfuros. Otras causas de error pueden ser los debidos a perturbaciones eléctricas de origen industrial ó bien a fenómenos electroquímicos producidos por corrosión de tuberías enterradas, cultivos con abonos químicos, escombreras de minas, etc.

VIII.6 Interpretación cuantitativa.

La interpretación cuantitativa se basa en el estudio teórico del campo producidos por cuerpos polarizados de forma geométrica lo suficientemente sencilla para permitir su cálculo matemático sin grandes dificultades. Las observaciones de campo se comparan con los diversos modelos teóricos así obtenidos, entre los cuales se elige el que mejor se acomode a aquellas. En algunos casos ocurre que las observaciones concuerdan relativamente bien con los resultados de dos modelos teóricos diferentes; entonces pueden atribuirse al cuerpo investigado características intermedias entre los que corresponden a cada uno de los modelos.

La base de la interpretación cuantitativa no es directamente el mapa de equipotenciales, sino curvas de la variación del potencial a lo largo de perfiles rectilíneos que pasen por el centro de la anomalía. Cuando ésta es alargada, el perfil debe ser, además, perpendicular al eje mayor de la anomalía. Estas curvas pueden obtenerse a partir del mapa de equipotenciales, o bien, lo que es más seguro y exacto, por medio de observaciones

de campo efectuadas especial y detalladamente con este fin, constituyendo lo que se llama un perfil de campo.

A continuación se estudia brevemente un modelo teórico.

VIII.6.1 Cuerpo polarizado asimilable a un dipolo.

El tipo más sencillo de cuerpo polarizado es un dipolo. Una bolsada de mineral de forma más o menos esférica, ó una metalización en forma de columna, pueden representarse matemáticamente de este modo simplificado.

El potencial del campo producto de un dipolo de momento M , vale, según se sabe (Ec.).

$$U = M \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \dots \quad (8.6.1)$$

Suponiendo que el dipolo es vertical y se encuentra a una profundidad z_0 . Habrá de tener en cuenta el efecto de la interfaz tierra-aire que es el de duplicar el campo en ella, según se deduce de la teoría de las imágenes, pues el factor de reflexión valdrá la unidad por ser finita la resistividad del medio inferior e infinita la del superior. Habrá, pues, que introducir un factor 2 en la expresión anterior. Si se toma el centro del dipolo como origen de un sistema de coordenadas cartesianas (fig 8.3), la expresión anterior queda:

$$U = -2M \frac{\cos \theta}{r^2} = -2M \frac{z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad \dots \quad (8.6.2)$$

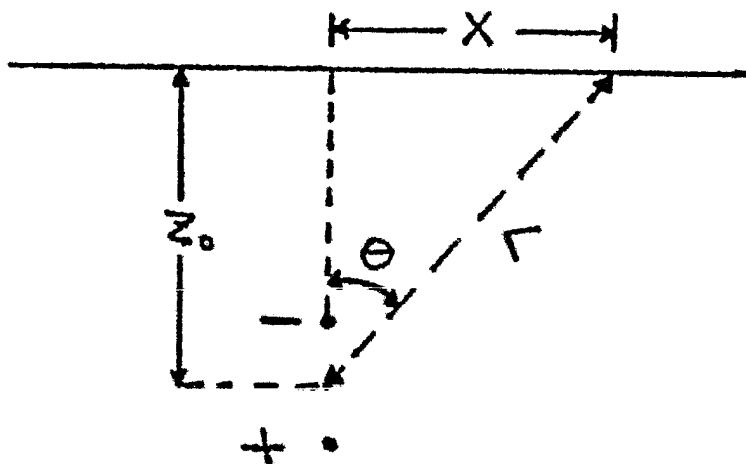


Fig (8.3)

En la ecuación anterior el signo menos se debe a que el polo más próximo a la superficie del terreno es negativo. En el epicentro del dipolo, $x=y=0$ y el potencial será máximo en valor absoluto, con un valor U_m tal que:

$$U_m = - \frac{2M}{z_0^2} \dots \dots \dots (8.6.3)$$

Si el perfil pasa por el epicentro, $y=0$ y la expresión (8.6.2) puede escribirse en la forma:

$$U = U_m \frac{z_0^3}{(x^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{U_m}{(1 + \mathcal{J}^2)^{3/2}} \dots \dots \dots (8.6.4)$$

con $\mathcal{J} = \frac{x}{z_0}$. De aquí resulta.

$$\frac{U}{U_m} = \frac{1}{(1 + \mathcal{J}^2)^{3/2}} \dots \dots \dots (8.6.5)$$

Es decir, que la curva de potenciales es siempre la misma si se toman como unidades de potencial y de distancia a U_m y z_0 respectivamente.

APENDICE "A"

CONDICIONES DE FRONTERA

En este apéndice se definirán los comportamientos de los vectores electromagnéticos \vec{B} , \vec{D} , \vec{J} , \vec{E} , \vec{H} y el potencial eléctrico "V" en las fronteras de dos medios de características electromagnéticas diferentes.

A.1 Inducción Magnética \vec{B}

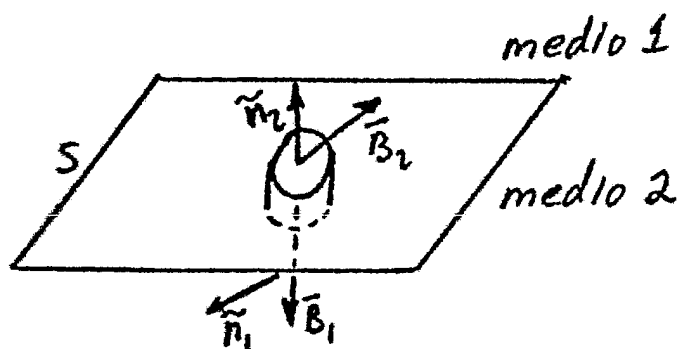
Del teorema de la divergencia, que relaciona una integración sobre un volumen con una integración sobre una superficie:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \cdot dV = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\tilde{n}} \cdot dS \quad (\text{A.1})$$

y de la tercera ecuación de Maxwell, se puede decir que:

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{\tilde{n}} \cdot dS = 0 \quad (\text{A.2})$$

Considerese un medio como el que se muestra en la siguiente figura, con el objeto de determinar el comportamiento de \vec{B} en la frontera (contacto) entre los dos medios.



El cilindro de la figura tiene una altura Δh y una sección transversal Δa . Si se considera que el cilindro tiene una tapa muy pequeña ($\Delta a \rightarrow 0$), se puede inferir que los vectores \vec{B} son constantes en ese lugar, quedando la ecuación (A.2) como:

$$(\vec{B}_2 \cdot \vec{\tilde{n}}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{\tilde{n}}_1) \Delta S + \text{paredes} = 0$$

haciendo tender la altura del cilindro a cero ($\Delta h \rightarrow 0$) y si además $\tilde{n}_1 = -\tilde{n}_2$, entonces

$$(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) \cdot \tilde{n} = 0$$

Esta ecuación establece que la componente normal, B_n de \bar{B} es continua a través de la frontera S , que puesta de otra manera:

$$B_{n,1} = B_{n,2} \tag{A.3}$$

A.2 Densidad de Desplazamiento Eléctrico (\bar{D})

Empleando la cuarta ecuación de Maxwell y aplicando el mismo procedimiento que para el vector \bar{B} , se obtiene:

$$\int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{D} dv = \int_S \bar{D} \cdot \tilde{n} ds = \int_V \dot{q} dv = Q = q \Delta h \Delta S$$

tomando en consideración la figura pasada, pero reemplazando \bar{D} por \bar{B} y haciendo que $\Delta h \rightarrow 0$ y $\Delta Q \rightarrow 0$ se obtiene

$$(\bar{D}_2 \cdot \tilde{n}_2 + \bar{D}_1 \cdot \tilde{n}_1) \Delta S = (q \Delta h) \Delta S$$

o sea
$$(\bar{D}_2 - \bar{D}_1) \cdot \tilde{n} = q \Delta h$$

Donde la cantidad $q \Delta h$ representa a la densidad de carga superficial. Esta ecuación indica que la componente normal- (D_n) de D es discontinua debido a la acumulación de cargas en el contacto; sin embargo, esta densidad de carga se disipa rápidamente; pensando que el término de la derecha de esta ecuación se anula, entonces:

$$\bar{D}_{n,1} = \bar{D}_{n,2} \tag{A.4}$$

A.3 Densidad de corriente (\bar{J})

Recordando la ley de Ohm y la expresión que relaciona al vec-

tor \bar{D} con \bar{E} , se tiene

$$\bar{J} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \bar{D} \quad (\text{A.5})$$

De esta ecuación, se puede inferir que \bar{J} se comporta como el vector \bar{D} . Por lo tanto, se cumple.

$$J_{n,1} = J_{n,2} \quad (\text{A.6})$$

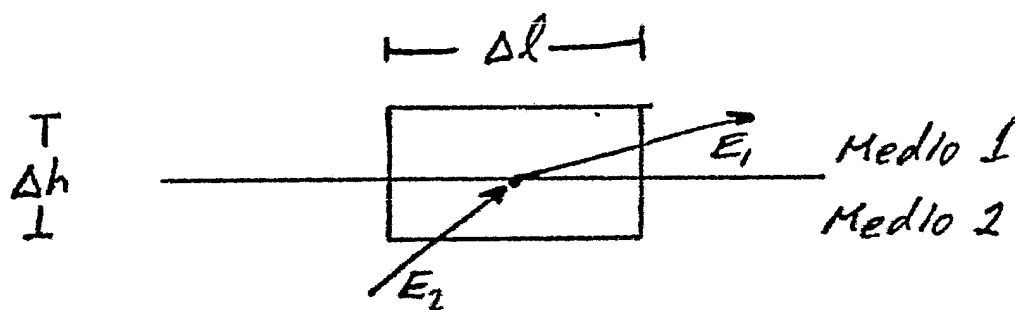
A.4 Campo Eléctrico (\bar{E})

Integrando la primera ecuación de Maxwell sobre una superficie acotada y siendo "n" el vector unitario normal a ella

$$\int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot \tilde{n} ds + \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \tilde{n} ds = 0$$

Recordando el teorema de Stokes

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \bar{F} \cdot \tilde{n} ds \quad (\text{A.7})$$



De esta figura se observa que:

$$-\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \tilde{n} da = \int_C \bar{E} \cdot d\vec{l} = E_2 \cdot \Delta l + E_1 (-\Delta l) + \text{Lados}$$

Haciendo $\Delta h \rightarrow 0$ entonces:

$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \tilde{n} \Delta h \Delta l = (E_2 - E_1) \cdot \Delta l = 0$$

o sea, las componentes tangenciales del campo eléctrico en la -- frontera de dos medios debe ser la misma.

A.5 Campo Magnético (\vec{H})

Haciendo para \vec{H} el mismo tratamiento que para \vec{E} , pero tomando en cuenta la segunda ecuación de Maxwell, se obtiene:

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} da = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} da \quad (\text{A.8})$$

La integración se realiza en la misma forma que el vector \vec{E} , obteniéndose:

$$\vec{n} \times (H_2 - H_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot \Delta h$$

entonces:

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (\text{A.9})$$

A.6 Potencial eléctrico (V)

El potencial eléctrico V debe ser continuo a través de la frontera. Si no sucediera así, la diferencia de potencial en una distancia muy corta sería muy grande, es decir, el gradiente de potencial sería infinito y por ende la densidad de corriente, cosa totalmente irreal.

APENDICE B

SOLUCIONES A LA ECUACION DE LAPLACE

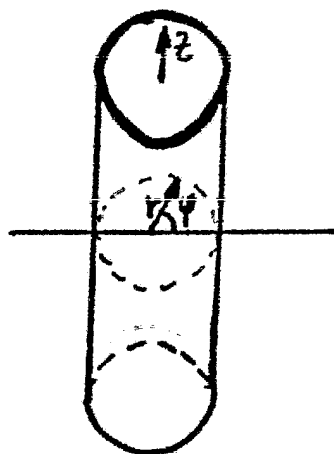
En este apartado se obtendrán ciertas soluciones simples de la ecuación de Laplace, que se extenderá posteriormente a una solución general y que se adaptará a las condiciones que se deben satisfacer en las fronteras planas.

B.1 Soluciones Simples

Es posible pensar que el potencial eléctrico debido a una fuente puntual de corriente puesta en la superficie de una tierra estratificada horizontalmente, debe ser simétrico con respecto a la línea vertical que pasa por la fuente de corriente. En vista de esta simetría es conveniente escribir la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0 \quad (B.1)$$

En esta ecuación "z" representa el eje vertical considerándose positivo hacia abajo, "r" es la distancia de cualquier punto "P" al eje vertical "z" y "ψ" es el ángulo entre la línea que une "P" con el eje vertical y una línea horizontal fija de base, como muestra la figura:



Dada la simetría cilíndrica, el potencial eléctrico "V" es independiente del ángulo "ψ" y por lo tanto, el último término de la ecuación (B.1) es nulo. La ecuación, por lo tanto, se transforma en

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (B.2)$$

La solución de la ecuación (B.2) se puede obtener con el método de separación de variables, asumiendo que la solución existe y es de la forma:

$$V(r, z) = U(r) \cdot W(z) \quad (B.3)$$

donde U es una función de r y W es una función de z . Si se sustituye la solución propuesta (B.3) en la ecuación diferencial (B.2) se obtiene:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{U \cdot r} \frac{dU}{dr} + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} = 0 \quad (B.4)$$

Esta última expresión se puede descomponer en dos ecuaciones dada la separabilidad de los términos en:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{U \cdot r} \frac{dU}{dr} = -\lambda^2 \quad (B.5)$$

y

$$\frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} = \lambda^2 \quad (B.6)$$

donde λ es una cantidad que puede tener cualquier valor.

La solución de la ecuación (B.5), se expresa en términos de series de potencias y es conocida como la integral de la ecuación de Bessel de primera especie y orden cero:

$$U = C J_0(\lambda r) \quad (B.7)$$

La solución de la ecuación (B.6), es:

$$W = C e^{\pm \lambda z} \quad (B.8)$$

La introducción de las soluciones (B.7) (B.8) en la ecuación (B.3) da soluciones de la ecuación de Laplace para un medio homogéneo e isotrópico:

$$V_1 = C_1 J_0(\lambda r) e^{-\lambda z}$$

$$V_2 = C_2 J_0(\lambda r) e^{\lambda z}$$
(B.9)

donde C_1 , C_2 y λ asumen valores arbitrarios, según sean las condiciones impuestas al problema.

B.2 Solución General de la Ecuación de Laplace con Simetría Cilíndrica.

Las ecuaciones (B.9) representan una infinidad de soluciones de la ecuación de Laplace. Sin embargo, la solución puede ser extendida, considerando que una combinación lineal de ellas es también una solución de la ecuación de Laplace. La expresión más general de tal combinación, donde C_1 , C_2 y λ toman cualquier valor, es:

$$V = \int_0^{\infty} \left\{ \varphi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \theta(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \right\} d\lambda$$
(B.10)

En esta ecuación la integración con respecto a λ viene del hecho de la independencia de λ , y que la suma de un número infinito de soluciones con valores distintos de λ también debe ser solución de la ecuación de Laplace cuando exista simetría con respecto al eje z (simetría cilíndrica). El cambio de C_1 y C_2 por las variables $\varphi(\lambda)$ y $\theta(\lambda)$, que son funciones de λ son totalmente arbitrarias, a menos de que se trate de un problema particular. Es conveniente realizar algún cambio en la ecuación (B.10), de tal forma que:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ 1 + \kappa(\lambda) \right\}$$

$$\theta(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \chi(\lambda)$$
(B.11)

obteniéndose:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \kappa(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \chi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \right\} d\lambda \quad (B.12)$$

Se puede observar, de esta ecuación, que el primer término corresponde a la solución de la ecuación de Laplace para un medio homogéneo e isotrópico, si se toma en cuenta la integral de Weber-Lipschitz:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (B.13)$$

o sea que:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (B.14)$$

B.3 Solución General de la ecuación de Laplace para un medio estratificado con fronteras planas y paralelas.

La ecuación solución (B.12) es válida en el interior de cada una de las capas ó estratos, donde lo único que varía son las funciones de λ , $\kappa(\lambda)$ y $\chi(\lambda)$ para las diferentes capas, entonces, el potencial en la capa enésima es:

$$V_n = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \kappa_n(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \chi_n(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \right\} d\lambda \quad (B.15)$$

$$V_{n+1} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \kappa_{n+1}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} + \chi_{n+1}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \right\} d\lambda \quad (B.16)$$

En el contacto de dos estratos sucesivos dos condiciones de frontera deben ser satisfechas. La primera de estas condiciones es que el potencial debe ser continuo a través del contacto, y la

segunda establece que la componente vertical de la densidad de la corriente en la frontera debe variar continuamente. La primera de ellas expresada matemáticamente:

$$\int_0^{\infty} \{ J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} + k_n(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} + \chi_n(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} \} d\lambda =$$

$$= \int_0^{\infty} \{ J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} + k_{n+1}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} + \chi_{n+1}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} \} d\lambda \quad (B.17)$$

donde H_n , es la profundidad del contacto entre los estratos enésimo y $(n+1)$ -ésimo. Para que la igualdad se cumpla es necesario que los integrandos sean iguales. La segunda condición, implica que se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial V_n}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{n+1}} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial z} \quad (B.18)$$

a la profundidad H_n , imponiendo esta última condición se obtiene:

$$\int_0^{\infty} \{ -\lambda J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} - \lambda k_n(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} + \lambda \chi_n(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} \} d\lambda =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \{ -\lambda J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} - \lambda k_{n+1}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} + \lambda \chi_{n+1}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda H_n} \} d\lambda \quad (B.19)$$

El problema todavía no ha sido resuelto pues falta aplicar dos condiciones adicionales. La primera se refiere a que el componente vertical del campo eléctrico en el contacto aire-tierra es cero y la segunda es, que el potencial de la última capa es nulo. La primera condición adicional implica que se cumpla que: $\partial V_1 / \partial z = 0$ a una profundidad $z=0$, que incluida en la primera de las ecuaciones (B.18) para la capa $n=1$, se tiene que:

$$\int_0^{\infty} \{-2J_0(\lambda r) - 2K_1(\lambda) J_0(\lambda r) + 2\chi_1(\lambda) J_0(\lambda r)\} d\lambda = 0 \quad (B.20)$$

Como la componente vertical del campo es cero en todo punto de la superficie, y consecuentemente el primer término de la ecuación (B.20) da una contribución nula al integrando, los términos restantes deben sumar cero para cualquier valor "r" obteniéndose:

$$K_1(\lambda) = \chi_1(\lambda) \quad (B.21)$$

Ahora es posible mostrar que el potencial en la superficie ($n=1, z=0$) es:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} \left\{ \frac{1}{r} + 2 \int_0^{\infty} K_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (B.22)$$

obtenido combinando la igualdad (B.19) y la ecuación (B.15) tomando en cuenta la integral de Weber-Lipchitz (B.13). A $K_1(\lambda)$ se le conoce comúnmente con el nombre de "función kernel".

La segunda condición adicional es aplicable a la última capa del medio, obteniéndose así que $\chi_n(\lambda) = 0$, ya que para que se cumpla la condición es necesario que $V_n = 0$ (la función $\chi_n(\lambda)$ se encuentra multiplicada por $e^{2\lambda z}$ que crece indefinidamente).

El resultado de todo este tratamiento, cuyo problema es conocer el valor de $K_1(\lambda)$ ó $\chi_1(\lambda)$. Estas se obtienen a partir de un sistema de $2(n-1)$ ecuaciones con $2(n-1)$ incógnitas, producto de las igualdades de los integrandos de las ecuaciones (B.17) y (B.18) y no olvidando que $K_1(\lambda)$ y $\chi_1(\lambda)$ son iguales y que $\chi_n(\lambda) = 0$.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Alpin, L.M. et al. 1966. Dipole Methods For Measuring Earth Conductivity. (Trad. G.V. Keller)
- 2.- Astier, J.L. 1975. Geofísica Aplicada a la Hidrogeología. - Edit: Paraninfo, Madrid.
3. Bertin, J, y Loeb, J. 1976. Experimental and Theoretical Aspects of Induced Polarization.
4. Bhattacharya, P.K y Patra, H.P. 1968. Direct Current Geoelectric Sounding.
5. Grant, F.S. y West, G.F. 1961. Interpretation Theory in Applied Geophysics- Edit. Mc.Graw-Hill Book Co. Nueva York.
6. Iakubovskii, I.V. y Liajov, L.K. 1980. Exploración Eléctrica. Ed. Reverté. Barcelona.
7. Kaufman, A.A. y Keller, G.V. 1980. The Magnetotelluric Method. Edit. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
8. Keller, G.V. 1968. Electrical Prospecting for Oil. Quart. Colorado School Mines, Vol. 63, No. 2
9. Keller, G.V. y Frischknecht, F.C. 1966. Electrical Methods in Geophysical Prospecting. Edit: Pergamon Press. Oxford.
10. Koefoed, O. 1968. The Application of the Kernel Function in Interpreting Geoelectrical Resistivity Measurements.
11. Koefoed, O. 1979. Geosounding Principles, 1. Edit; Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.

12. Kunetz, G. 1966. Principles of Direct Current Resistivity Prospecting. Geoexploration Monographs Series 1, No. 1
Ed. Gerbrüder Borntraeger. Berlin.
13. Kuzvart, M y Bohmer, M. 1978. Prospecting and Exploration for Mineral Deposits.
Ed. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
14. Morse, J. G. 1977. Nuclear Methods in Mineral Exploration and Production.
Ed. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
15. Orellana, E. 1972. Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua
Ed. Paranifo, Madrid.
16. Orellana, E. 1973. Prospección Geoeléctrica por Campos variables.
Ed. Paraninfo, Madrid.
17. Patra, H.P. y Mallick, K. 1980. Geosounding Principles, 2.
Ed. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
18. Porstendorfer, G. 1974. Principles of Magneto-Telluric Prospecting
Ed. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
19. Parasnis, D.S. 1979. Principles of Applied Geophysics 3a. Edición.
Ed. Chapman and Halle (A Halsted Press Book).
Londres.
20. Parasnis, D.S. 1971. Geofísica para.
Ed. Paraninfo. Madrid.
21. Parkhomenko, E.I. 1967. Electrical Properties of Rocks.
(Trad. G. Keller)
Ed. Plenum Press, New York.
22. Society of Exploration Geophysicists. 1967. Mining Geophysics
Vol. 1
Ed. Society of Explor. Geoph. Tulsa.

23. Stoyer, C.H. 1980. Geoelectricity and Geoelectromagnetism.
Ed. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
24. Summer, J. 1976. Principles of Induced Polarization for
Geophysical Exploration.
Ed. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam.
25. Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E. y Keys, D.A. 1978.
Applied Geophysics.
Ed. Cambridge University Press. Londres.
26. Van Nostrand, R. y Cook, K. 1966. Interpretation of Resistivity
Data.
Ed. United States Geological Survey Professional -
Paper No. 499.
27. Verma, R.K. 1980. Master Tables for Electromagnetic Depth Sounding
Interpretation.
Ed. Plenum Press. Nueva York.
28. Wait J.R. 1970. Electromagnetic Waves in Stratified Medium.
Ed. Pergamon Press. Oxford Inglaterra.