



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Aspectos Teóricos del Modelado de Resistivi-
dades para Cuerpos Simétricamente
Axiales, Aplicando el Método
del Elemento Finito**

T E S I S

Que para obtener el Título de :

INGENIERO GEOFÍSICO

P R E S E N T A :

Hilarión Simón Cruz Galindo



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Dirección
02-1-140

Señor CRUE GALINDO HILARONSENIN.
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Prof. Ing. - Eusebio León Sánchez, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO MECÁNICO.

"ASPECTOS TEÓRICOS DEL MODELADO DE RESISTIVIDADES PARA CUERPOS SIMÉTRICAMENTE AXIALES, APLICANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO"

- PROLOGO.
- I GENERALIDADES.
- II CÁLCULO VARIACIONAL.
- III MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO.
- IV MODELADO DE RESISTIVIDADES PARA CUERPOS SIMÉTRICAMENTE AXIALES.
- CONCLUSIONES.
- BIBLIOGRAFÍA.

Después a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración y Registrar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.
"POR MI RAZA HABLA MI ESTUDIO"
D. Universidad, D.F., 20 de julio de 1967.
D. DIRECCIÓN

[Firma manuscrita]
D. Servicio de Asesoría Técnica

600
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

A MIS PADRES:

Sr. Simón Cruz Galindo.

y

Sra. Elvira Galindo de Cruz.

Por quienes debí haber terminado este
trabajo antes.
Que con su vida llena de trabajo y
sacrificios hicieron posible mi for-
mación.

Para ellos mi gratitud Eterna.

A MIS HERMANOS:

Elvira, Rocio, Martina

Juan, Pedro y Virginia.

Con Fraternal Cariño

AL INGENIERO.

ROBOAM LEON SANCHEZ.

Director de este trabajo, por su paciencia y ayuda sin la cual no se hubiese podido realizar.

AL INGENIERO.

CARLOS E. TAKAHASHI FLORES.

Maestro y Amigo por su apoyo y enseñanzas.

A MIS MAESTROS:

Que Forjaron mi Espíritu.

AL PUEBLO TRABAJADOR DE MEXICO:
Y A TODOS LOS QUE LUCHAN POR
QUE NO EXISTA LA OPRESION.

A LA FACULTAD DE INGENIERIA.

Forjadora de la Independencia
Tecnológica de México.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO.

ENTRAÑABLEMENTE.

INDICE

| | Pág. |
|---|------|
| PROLOGO | 1 |
| RESUMEN | 2 |
| CAPITULO I | |
| GENERALIDADES. | |
| I.0. Introducción | 4 |
| I.1. Problema Fundamental de la Prospección Geoelectrica | 4 |
| I.2. Heterogeneidad General | 13 |
| I.2.1. El Método De Alfano | 14 |
| I.2.2. El Método De Estefanescu | 14 |
| I.2.3. El Método De Diferencias Finitas | 15 |
| I.2.4. El Método De Los Elementos Finitos. | 19 |
| CAPITULO II. | |
| CALCULO VARIACIONAL | |
| II.0. Introducción | 22 |
| II.1. Breve Reseña Histórica. | 22 |
| II.2. Antecedentes Teóricos. | 25 |
| II.3. La Ecuación De Euler. | 26 |
| II.3.1. Lema Fundamental. | 29 |
| II.3.2. Aplicación del Lema. | 30 |
| II.4. Aplicación de la Ecuación de Euler. | 31 |
| II.5. Generalización de la Ecuación de Euler para dos Dimensiones. | 32 |
| II.5.1. Lema Fundamental. | 34 |
| II.5.2. Aplicación Del Lema. | 35 |
| II.6. Generalización Del Problema Elemental del Cálculo de Variaciones. | 36 |
| II.7. Tratamiento de las condiciones de Frontera que no son del Tipo Dirichlet. | 38 |
| CAPITULO III. | |
| METODO DEL ELEMENTO FINITO. | |
| III.0. Introducción | 46 |
| III.1. Métodos Directos del Cálculo Variacional (Antecedentes.) | 47 |
| III.2. El Método De Rayleigh - Ritz. | 49 |
| III.3. El Método Del Elemento Finito. | 52 |

| | Pág. |
|---|------|
| III.4. Métodos Numéricos Para la Solución De Las Ecuaciones del Elemento Finito | 56 |
| III.4.1. Método de Gauss | 57 |
| III.4.2. Método de Crout | 57 |
| III.4.3. Método de Gauss Modificado | 57 |
| III.4.4. Método de Crout Modificado | 58 |
| III.4.5. Método de Cholesky | 59 |

CAPITULO IV

MODELADO DE RESISTIVIDADES PARA CUERPOS SIMÉTRICAMENTE AXIALES.

| | |
|---|----|
| IV.0. Introducción | 61 |
| IV.1. Planteamiento Del Problema | 62 |
| IV.2. Cuerpos Axialmente Simétricos | 63 |
| IV.3. Aplicación Del Método Del Elemento Finito | 64 |

CONCLUSIONES 71

BIBLIOGRAFIA 74

PROLOGO

La rápida evolución de la enseñanza, exige nuevas orientaciones en la preparación del ingeniero, los métodos desconocidos hasta ayer ahora encuentran gran aplicación en la solución de los problemas que tienen mayor grado de complejidad.

Partiendo de lo anterior, este trabajo que presento como Tesis recepcional, tiene el objeto de mostrar de manera adecuada, una herramienta matemática para la solución de problemas en ingeniería. El tratamiento es puramente matemático, de tal forma que las teorías que lleva involucradas se formalizan.

El método descrito se da de una manera general y más bien a un nivel elemental para que sirva y sea entendido por alumnos de los últimos semestres de la carrera de Ingeniero Geofísico. Esta y no otra ha sido mi idea al llevar a cabo este trabajo.

Se debe observar que en este trabajo, se da como un método general la forma de aplicarlo y no como una receta o norma. Esto tiene una finalidad que necesita otra cosa más que evitar el mecanismo al aplicar teorías; y que al leer este trabajo, las personas que lo hagan, encuentren los fundamentos necesarios para resolver cualquier problema de Ingeniería que no será necesariamente en el área de la prospección geofísica.

Se advertirá además que la moderación que se usa en este trabajo es la matemática y consiste en expresar en un lenguaje formal o matemático, las condiciones que gobiernan al comportamiento de los fenómenos físicos.

El método de los Elementos Finitos pueden hoy en día definirse en forma general de una manera tan amplia que puede incluir otros procesos de aproximación muy útiles.

Por ejemplo los métodos de diferencias finitas se reconocieran como sub-clase de este procedimiento.

Por otro lado, el Método del Elemento Finito, es una arma matemática muy poderosa, ya que nos ayuda a minimizar casi todos los problemas de ingeniería donde se requiera el uso de funcionales. Depende esencialmente, para su éxito, del uso correcto de computadoras y técnicas numéricas eficientes.

RESUMEN

El trabajo se divide en cuatro capítulos a saber:

El primero de ellos trata del problema fundamental de la prospección geoelectrica de donde partimos para ver la necesidad de la aplicación del Método del Elemento Finito.

El segundo capítulo formaliza la teoría del cálculo variacional que será de gran ayuda para entender como se aplica el Método del Elemento Finito, este último es materia del tercer capítulo. Se observará que al ejemplificar las aplicaciones del Cálculo de Variaciones se utilizan problemas de Geohidrología, esto lo hice pensando que es más sencillo el uso de estos conceptos y que no nos apartan del desarrollo general de las ideas centrales.

Ya en el cuarto y último capítulo, se muestra la aplicación del Método del Elemento Finito al problema de modelar cuerpos de interés en la prospección geoelectrica, así como las limitaciones que conlleva.

CAPITULO
I

Capítulo. I. Generalidades

I.0. Introducción.

En este capítulo, se estudia el problema fundamental de la prospección Geo-eléctrica, donde se muestra que este tiene solución única desde el punto de vista matemático.

Se generaliza el problema hasta tres dimensiones y se proponen cuatro métodos de solución.

Se esbozan las características de cada uno de ellos para su aplicación en el modelado de resistividades.

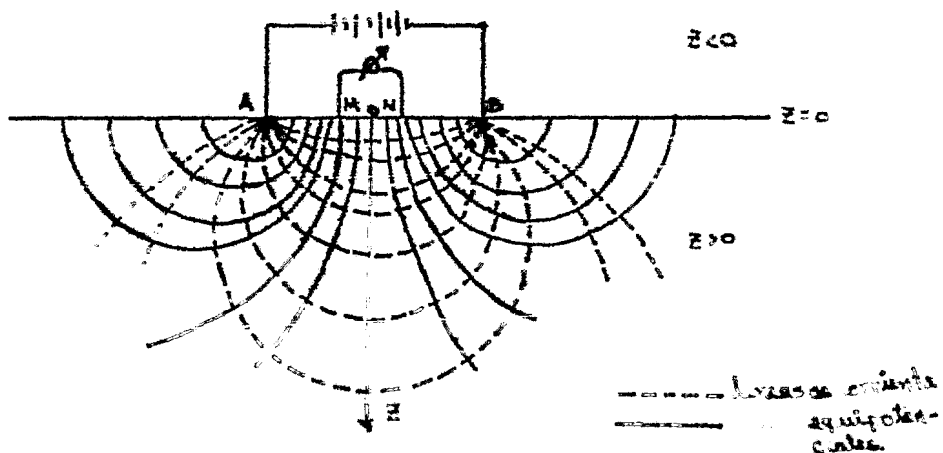
Se menciona entre ellos al Método del Elemento Finito, siendo esto el punto de partida para su tratamiento más amplio.

I.1. Problema Fundamental De La Exploración Geoelectrica.-

Para el estudio de heterogeneidades de la corteza terrestre con el fin de explorar los yacimientos minerales útiles, en la actualidad se aplican ampliamente los métodos eléctricos.

El esquema fundamental de la exploración eléctrica mediante una corriente constante, consiste en lo siguiente:

Mediante electrodos conectados a tierra (galvánicamente), se hace circular por el subsuelo una corriente eléctrica de una fuente de alimentación (batería).



En la superficie de la tierra se miden en otros puntos las tensiones del campo eléctrico formado de este modo.

Mediante observaciones en la superficie y un análisis en la interpretación del área, se determina la estructura subterránea. Los métodos de determinación de estas estructuras subterráneas (interpretación de las observaciones) se basan en la resolución matemática de las ecuaciones que rigen el comportamiento del potencial o del campo eléctrico.⁽⁵⁾

El potencial del campo de una corriente continua en un medio homogéneo, satisface a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (Z > 0) \quad I-1$$

con la condición complementaria.

$$\left. \frac{\partial V}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0 \quad ; \text{ya que } z > 0 \text{ es un eje dirigido hacia abajo.} \quad I-2$$

La cual significa que la componente vertical de la densidad de corriente en la superficie de la tierra $Z=0$ es igual a cero, puesto que el semi-espacio, $Z < 0$ (el aire) no es conductor.

Consideremos un electrodo puntual en la frontera del semi-espacio, en el punto A. Evidentemente, el potencial del campo será igual a⁽¹⁾:

$$V = \frac{I \rho}{2 \pi r} \quad I-3$$

donde r es la distancia a la fuente A; ρ la resistividad del medio; e I , la intensidad de la corriente.

Esta función se diferencia de la función de la fuente en el espacio no acotado por el coeficiente 2 , en virtud de la condición I-2.⁽²⁾

Midiendo la diferencia de Potencial en los puntos M y N que se hallan sobre la misma línea recta junto con A, se obtiene, con ayuda del circuito de medición:

$$V(M) - V(N) = \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r$$

donde Δr es la distancia entre los puntos M y N. Suponiendo que los puntos M y N se hallan suficientemente próximos uno del otro se obtiene:

$$\frac{V(M) - V(N)}{\Delta r} \approx \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \approx \frac{I \rho}{2\pi r^2}$$

donde r es la distancia del Punto O (dentro del circuito de medición MN) al electrodo de alimentación.

La intensidad de corriente I en el circuito de alimentación se conoce, puesto que se registra en el transcurso del trabajo. De aquí se obtiene para la resistividad del semiespacio homogéneo:

$$\rho = \frac{2\pi r^2}{I} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \quad \text{I-4}$$

Si el medio no es homogéneo, la magnitud ρ que se determina por la fórmula I-4, es llamada ahora, resistividad aparente y la denotaremos $\rho_a^{(3)}$; es evidente que ρ_a no es una magnitud constante.

Consideremos el problema del sondeo eléctrico vertical cuando las capas del sub-suelo se disponen en forma horizontal, y su resistividad depende solo de la profundidad:

$$\rho = \rho(z)$$

(5)

en este caso, la resistividad aparente será una función de la distancia $r = AO$.

El problema de la interpretación de los resultados de los sondeos eléctricos verticales consiste en la determinación de la función $\rho(z)$ que da el corte geoelectrico del medio, partiendo de los valores de $\rho_a(r)$.

Analicemos con más detalle el problema de un medio de dos capas, cuando una capa homogénea de espesor " l " y resistividad ρ_0 se halla en un medio homogéneo de resistividad ρ_1 ,

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{para } 0 \leq z < l \\ \rho_1 & \text{para } l < z \end{cases}$$

Es evidente que en distancias cortas, $r \ll l$, la resistividad aparente ρ_a es igual a ρ_0 , puesto que la influencia del medio subyacente será muy pequeña. Para distancias grandes ($r \gg l$), ρ_a es igual a ρ_1 .

El problema se reduce, de este modo, a hallar la solución de la ecuación de Laplace V_0 en la capa $0 < z < l$ y V_1 en el semi-espacio $z > l$ y además debe cumplirse la condición para la cual $z = l$, también deben cumplirse las condiciones:

i) Continuidad del potencial

$$V_0 \Big|_{z=l} = V_1 \Big|_{z=l} \quad \text{I-5}$$

ii) Continuidad de las componentes normales de la densidad de corriente

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial V_0}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=l} \quad \text{I-6}$$

(7)

Para $z=0$, el potencial V_0 debe satisfacer a la condición I-2. en el punto A (el cual tomaremos como origen de las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) donde además el potencial V_0 debe tener una particularidad del tipo I-3:

$$V_0 = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + v_0 \quad \text{I-7}$$

donde v_0 es una función acotada

La función V_1 debe ser acotada en el infinito.

Las funciones v_0 y V_1 satisfacen a la ecuación de Laplace, la cual, en virtud de la simetría cilíndrica del problema, adquiere la forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

El método de separación de variables nos da para V_1 dos tipos de soluciones acotadas para $r=0$ (ya que las funciones Bessel son soluciones regulares en el origen).:

$$e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r),$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero y λ , el parámetro de la separación de zeros de la función de Bessel. Buscaremos la solución de la forma:

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + \int_0^{\infty} (A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

y

$$V_1(r, z) = \int_0^{\infty} (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

donde A_0, B_0, A_1 y B_1 son constantes.

(8)

La condición I-2 nos da el nexo entre A_0 y B_0 .
 Calculemos la derivada.

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 I}{2\pi} \cdot \frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}} + \int_0^{\infty} (-\lambda A_0 e^{-\lambda z} + \lambda B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

La condición I-2 toma la forma (ya que $z=0$):

$$\int_0^{\infty} (B_0 - A_0) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 0$$

para un "r" arbitrario, tendremos:

$$B_0 = A_0$$

De la condición de acotación de V_1 cuando $z \rightarrow \infty$ se deduce que

$$B_1 = 0$$

De esta manera,

$$V_0(r, z) = \int_0^{\infty} [q e^{-\lambda z} + A_0 (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_0(\lambda r) d\lambda$$

y

$$V_1(r, z) = \int_0^{\infty} A_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda ;$$

aquí hemos utilizado la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad \text{I-8}$$

e introducido la notación

$$q = \frac{\rho_0 I}{2\pi}$$

Las constantes A_0 y A_1 , se determinan de las condiciones I-5 y I-6 para $z = \ell$, las cuales se reducen al sistema de ecuaciones algebraicas:

(9)

$$A_0 (e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -q e^{-2\lambda l}$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0 (e^{-2\lambda l} + 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l}$$

de donde se halla el coeficiente

$$A_0 = q \frac{(\rho_1 - \rho_0) e^{-2\lambda l}}{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0) e^{-2\lambda l}}$$

y por tanto la solución V_0 para la capa superior se da por la fórmula

$$V_0(r, z) = \frac{I \rho_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + \frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I-9}$$

donde se hizo

$$k = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0}$$

Transformemos la expresión obtenida:

Como $|k| < 1$ podemos escribir:

$$\frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^{\infty} k^n e^{-2\lambda l n}$$

$$V_0(r, z) = \frac{I \rho_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda(2n l + z)} J_0(\lambda r) d\lambda +$$

$$+ \frac{I \rho_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda(2n l - z)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I-9'}$$

(10)

De aquí, aplicando la fórmula I-8, se obtiene:

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} K^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - 2n\ell)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} K^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2n\ell)^2}} \right]$$

Esta expresión para la solución (I-9) se puede escribir directamente, si se resuelve el problema por el método de las imágenes.

Haciendo $z=0$ se obtiene la distribución de potencial en la superficie de la tierra:

$$V_0(r, 0) = -\frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{\sqrt{r^2 + (2n\ell)^2}} \right] \quad \text{I-11}$$

de donde

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n r}{[r^2 + (2n\ell)^2]^{3/2}} \right]$$

¿ para ρ_a , según la fórmula I-4, se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_a &= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n r^3}{[r^2 + (2n\ell)^2]^{3/2}} \right] = \\ &= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n \left(\frac{\xi}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \eta^2\right]^{3/2}} \right] = \rho_0 f\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned} \quad \text{I-12}$$

Esta expresión es la solución a la resistividad aparente.

(11)

donde $\xi = \frac{r}{l}$, y $f(\xi)$ denota la expresión entre corchetes.

Para $r \ll l$, se tiene que

$$\rho_a \approx \rho_0$$

Para apreciar el comportamiento de ρ_a para r grandes, hagamos en la fórmula I-12:

$$r \longrightarrow \infty \quad (\xi \longrightarrow \infty)$$

En el límite del n -ésimo término de la suma será igual a k^n , donde se desprende que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_a = \rho_0 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right) =$$

$$= \rho_0 \frac{1+k}{1-k} = \rho_0 \frac{\rho_1 + \rho_0 + \rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0 - (\rho_1 - \rho_0)} =$$

$$= \rho_0 \frac{2\rho_1}{2\rho_0} = \rho_1$$

Comparando la curva experimental con la determinada por la fórmula I-12, se puede determinar ρ_0 a partir de los valores de ρ_a para valores pequeños de r , y ρ_1 para valores grandes de r .

La potencia de la capa superior " λ " se determina mediante pruebas. Esta es igual al valor de l , para el cual la curva empírica, como función $\rho(\xi) = \rho\left(\frac{r}{l}\right)$, se aproxima más a la curva calculada por la fórmula I-12. Existe un procedimiento en el cual se ocupan escalas bilogarithmicas, pero en este trabajo no se tratará.

En el caso de cortes de varias capas las curvas ρ_a se calculan análogamente. El carácter del corte geoelectrico del medio se determina probando las curvas teóricas que se aproximen más a la empírica.

Al aumentar el número de capas, la técnica de la interpretación se complica mucho, puesto que el número de curvas teóricas, aumenta grandemente.

Se debe observar que para cortes geoelectricos diferentes, $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$, las funciones de resistividades aparentes también son distintas:

$$\rho_K^{(1)}(r) \neq \rho_K^{(2)}(r)$$

por tanto, el problema de la determinación del corte geoelectrico a partir de la resistividad aparente tiene una solución única desde el punto de vista matemático.

I.2. Heterogeneidad General:

Una posible generalización de lo visto anteriormente, sería que las resistividades variasen de modo continuo en sentido vertical, según una ley matemática definida, parabólica o exponencial por ejemplo, pero su empleo y utilidad práctica no es grande.

De mucho mayor interés, por su realismo y carácter más general, son las distribuciones en las que la resistividad cambia no solo en sentido vertical (problema monodimensional $\rho = \rho(z)$), sino también lateralmente (problema bidimensional $\rho = \rho(x, z)$) e incluso según una tercera dirección ortogonal a las anteriores (problema tridimensional $\rho = \rho(x, y, z)$).

La resolución de estos casos generalizados requiere el empleo de métodos matemáticos más complejos.

Dentro de esos métodos encontramos los siguientes:

1. El Método de Alfano.
2. El Método de Estefanenco.
3. El Método de diferencias finitas.
4. El Método de los Elementos finitos.

I.2.1. El Método de Alfano.-

Este método es una teoría para el cálculo de potenciales y curvas de resistividad aparente sobre medios discontinuos.

Se incluye el concepto de potencial normal (primario) $V_0(x, y, z)$ o sea el que produciría la fuente en terreno homogéneo.

Además indica que el potencial en cada punto (x, y, z) , de una región i, j es la suma del potencial primario con un potencial perturbador o secundario producido por una distribución de cargas ficticias de densidad σ_j .

I.2.2. El Método De Estefanescó.

Este método se basa en que, si se cumple la ecuación

$$\nabla \sigma \cdot \nabla U + \sigma \nabla^2 U = 0 \quad \text{I-13}$$

en un medio heterogéneo e isotrópico.

Y además si se introduce una nueva variable auxiliar α tal que $\alpha = \sqrt{\sigma}$ se tendría.

$$\nabla \sigma = \nabla \alpha^2 = 2\alpha \nabla \alpha \quad \text{I-14}$$

y

$$\sigma \nabla^2 U + 2 \nabla \alpha \cdot \nabla U = 0 \quad \text{I-15}$$

aquí Estefanescó introduce la variable ψ , a la que llama para-potencial

$$\psi = \alpha U = U \sqrt{\sigma} \quad \text{I-16}$$

entonces se tiene:

$$\nabla^2 \psi = \alpha \nabla^2 U + 2 \nabla \alpha \cdot \nabla U + U \nabla^2 \alpha \quad \text{I-17}$$

de las ecuaciones I-15 y I-16 tendremos:

$$\frac{\nabla^2 \alpha}{\alpha} = \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} \quad \text{I-18}$$

(1-18)

Por tanto, si α es función armónica, (o será también el para potencial ψ , de donde se deduce fácilmente U mediante I-16.

Esto quiere decir que para distribuciones de resistividad que sean funciones armónicas (medios alfa-armonicos) el potencial en cada punto puede calcularse con relativa sencillez.

I.2.3. El Método De Diferencias Finitas.

Cuando la solución de las ecuaciones diferenciales por medios analíticos es difícil, por no decir imposible, la solución numérica es la única forma de proceder para resolver los problemas geoelectricos. Dentro de esos métodos tenemos dos; a saber:

a).- Métodos de Diferencias Finitas.- Donde la solución numérica de las ecuaciones presenta respuesta a puntos discretos dentro del sistema. La transformación de una ecuación diferencial (continua) a una forma discreta se hace por el uso de diferencias finitas

b).- Métodos Variacionales.- Estos métodos no tan solo resuelven las ecuaciones en puntos discretos, sino además aproximan las soluciones por medio de un conjunto de polinomios de diversos grados.

Ahora bien del método señalado en el inciso (a) plantearémos sus principios básicos.

Consideremos una función continua $f(x)$, que puede ser expandida en una serie de Taylor alrededor de x en la dirección positiva:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots \quad \text{I-19}$$

resolviendo para la primera derivada obtenemos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + R(\Delta x) \quad \text{I-20}$$

donde $R(\Delta x)$ es el resto, que contiene términos de orden superior.

(11)

Si no tomamos en cuenta los términos del resto de la ecuación I-20 la primera derivada es aproximadamente:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{I-21}$$

Esta es llamada una aproximación de diferencias hacia adelante, tal que la serie de Taylor fue expandida alrededor de x en la dirección positiva.

También podemos expandir $f(x)$ en la dirección negativa:

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \dots + \quad \text{I-22}$$

resolviendo nuevamente para $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]$ y no tomando en cuenta el resto $R(\Delta x)$ obtenemos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{I-23}$$

esta es la aproximación de diferencias hacia atrás para la primera derivada de $f(x)$.

La segunda derivada de $f(x)$ puede obtenerse sumando las ecuaciones I-19 y I-22:

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) = 2f(x) + \frac{2(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + R[(\Delta x)^2]$$

y resolviendo para $\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right]$ tenemos:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad \text{I-24}$$

(16)

el resto que contiene términos de ordenes superiores no los tomamos en cuenta.

Podemos decir ahora, que es posible expresar cualquier ecuación diferencial en esquemas de diferencias finitas, por ejemplo las ecuaciones de Laplace y Poisson en prospección geoeléctrica.

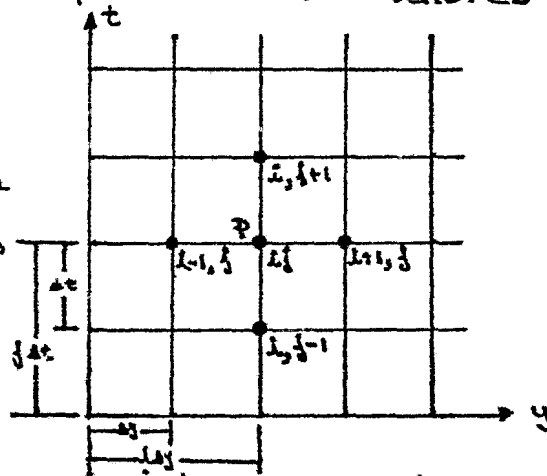
Para clarificar, tomemos la ecuación diferencial (Ecuación de difusión) siguiente.

$$\frac{\partial^2 J(y,t)}{\partial y^2} = \mu \sigma \frac{\partial J(y,t)}{\partial t} \quad \text{I-25}$$

donde μ es la permeabilidad magnética y σ es la conductividad.

Además se asigna una rejilla para los valores de la región donde se especifican los valores y notaciones requeridas.

rejilla de puntos
superpuesta sobre
un plano $y-t$.
Es un nodo típico
con coordenadas
(y_i, t_j)



$$y_i = i \Delta y$$

$$i = (0, 1, 2, \dots, n)$$

$$t_j = j \Delta t$$

$$j = (0, 1, 2, \dots, n)$$

Por las expresiones I-21 y I-24 la ecuación en diferencias quedará como:

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} = \mu \sigma \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta t} \quad \text{I-26}$$

(17)

que se resolvería para las w_i que no son otra cosa que aproximaciones para J .

La ecuación de Laplace quedará:

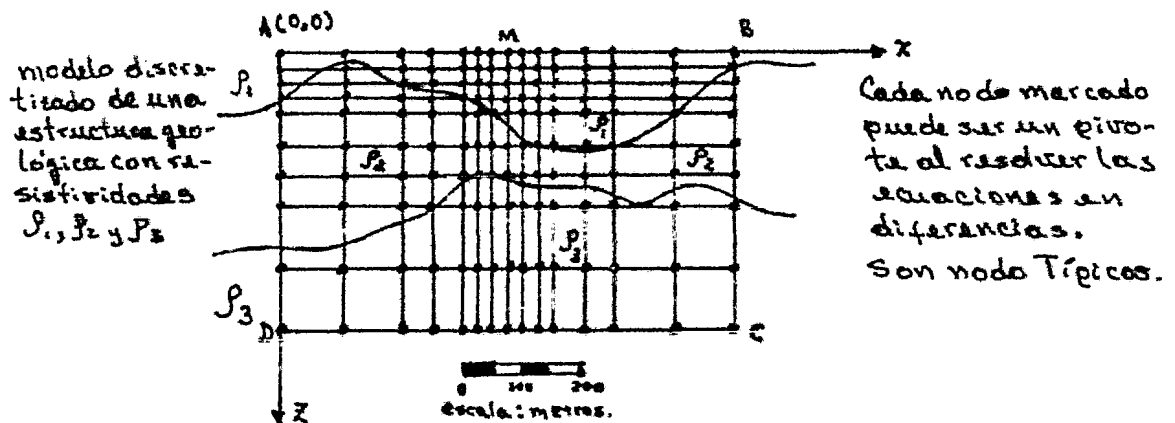
$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

I-27

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} = 0$$

donde las w_i son aproximaciones para U , y Δt es ahora Δx en la figura.

Para el modelado de resistividades Muftic (1976) discretiza un modelo geológico como el que aparece en la figura.



y aplica los esquemas de diferencias a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + q(x,z) = 0 \quad \text{I-28}$$

(18)

Hasta que encuentra la matriz de resistividades, quedándole una relación de la siguiente forma:

$$[R] [v] = [b]$$

$$R = [r_{i,j}] \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

donde las $r_{i,j}$ de la Matriz $[R]$ son directamente relacionados con la distribución de resistividades. Y las v_i son los potenciales requeridos.

I.2.4. El Método De Los Elementos Finitos.

Como se indicó en el inciso (b) del apartado I-2.3. existen métodos variacionales para discretizar ecuaciones de interés práctico, dentro de estos podemos encontrar aplicación de principios variacionales a elementos que pueden tomar la forma que más nos convenga.

Estos elementos deben ser de tamaño y forma tanto finito como definida, respectivamente.

Al aplicar estos principios variacionales a los elementos finitos podemos aproximar las soluciones por medio de polinomios de grado variable.

Este método es el llamado de los elementos finitos pero no solamente se pueden aplicar conceptos variacionales a esos elementos, sino también los conceptos de los llamados residuos ponderados que tienen gran campo de aplicabilidad.

En este trabajo solo desarrollaremos los conceptos del cálculo variacional y su aplicación a los elementos finitos, ya que como es la minimización de energía lo que nos importa, el cálculo

de variaciones es lo más marcado como herramienta matemática

En el capítulo II, se desarrollará de manera formal el cálculo Variacional y en el capítulo III se formalizará el Método del Elemento Finito.

CAPITULO
II

Capítulo II Cálculo Variacional

II.0. Introducción:

En este capítulo se expone una breve relación; del porque el Elemento Finito lleva ese nombre; así de como se involucra el Cálculo Variacional de manera natural para el desarrollo formal de la teoría de esta herramienta matemática.

Se plantea la Ecuación de Euler como un problema de la teoría de las variaciones en una y dos dimensiones, con sus respectivas demostraciones.

A partir de aquí se generaliza la Ecuación de Euler para funcionales que dependan de derivadas de orden superior de m funciones y de funciones de varias variables.

Para llegar a eso se define de manera precisa el concepto de funcional y se termina el capítulo tratando las condiciones de frontera que no son de tipo Dirichlet.

Se debe observar que este capítulo y el capítulo III pueden ser uno solo, pero preferi separarlo para que se estudiara de manera independiente por si la gente que en esta tesis tiene conocimientos del cálculo variacional elemental no pierda el tiempo en los repases de estos conceptos.

II.1. Breve Reseña Histórica.

Para empezar la exposición sobre el Método del Elemento Finito y el Cálculo Variacional consideremos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace sobre el dominio R limitado por una curva C .

Ahora bien, se formula el problema de encontrar una función ϕ que satisfaga:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} &= f(x, y) \text{ sobre } C \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En el método de diferencias finitas, esta formulación es usada en la generación de las ecuaciones de diferencias, las que nos da una solución aproximada.

Supongamos que si ϕ nos hace la integral I,

$$I = \iint_R \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \text{II-2}$$

un mínimo (comparada con todas las funciones con segundas derivadas continuas e iguales a $f(x,y)$ sobre C), entonces ϕ es solución del problema II-1. Esto se conoce como el Principio De Dirichlet. Es la formulación variacional del problema dado por (II-1).

El método del elemento Finito busca obtener una solución aproximada usando la formulación variacional (es decir minimizando aproximadamente II-2) para generar un conjunto de ecuaciones de diferencias.

El Método del Elemento Finito, proporciona otro modo por el cual podemos derivar ecuaciones en diferencias, y en además un arma más poderosa para derivar con mayor ventaja que los métodos de diferencias finitas. Para un punto de una malla simple y regular, las ecuaciones de diferencias derivadas por los dos métodos son idénticos.

Sin embargo, para ciertos problemas complejos, el Método del Elemento Finito, tiene varias ventajas. Las condiciones de frontera son manejadas en forma natural por el método del elemento finito, en contraste al método de diferencias finitas, donde algunas formulas especiales tiene que ser desarrolladas para los problemas con valor en sus fronteras.

El tamaño de los elementos pueden variarse fácilmente. Elementos pequeños pueden ser usados en áreas de cambio rápido. Los elementos grandes pueden ser usados donde las variaciones sean menos fuertes. También la presencia de heterogeneidades y anisotropía se tienen en cuenta fácilmente.

El Método del Elemento Finito, es un método desarrollado recientemente. Courant propuso el método, no obstante, no llevó en ese tiempo el nombre del elemento finito. El Método recibió su nombre porque fue introducido por Turner en 1956 como un método para resolver problemas en análisis estructural por medio del cual una estructura continua es aproximada por una serie de "Elementos Finitos". Más tarde fue redescubierto que el procedimiento, está asociado con el cálculo variacional. Zienkiewicz juega un papel significativo en el desarrollo del método con respecto a problemas estructurales y también indicó el uso potencial de la utilidad de los elementos finitos en hidrología subterránea.

Teoría del Cálculo Variacional.

II.2. Antecedentes Teóricos:

El propósito de esta discusión de cálculo variacional es introducir algunos principios y notaciones, y mostrar la correspondencia entre las ecuaciones diferenciales y la formulación del problema variacional. El tratamiento que se dará en este trabajo, será reducido, pero no por ello será menos completo.

En cálculo elemental normalmente se introduce a la teoría y técnicas de la determinación de máximos y mínimos de funciones.

La rama de las matemáticas conocida como "El cálculo de variaciones" está interesada con una extensión del problema de determinación de extremos. En cálculo variacional un mínimo es buscado no para una función, sino para una "funcional".

Definición:

Una funcional es una magnitud variable cuyos valores se determinan mediante la elección de una ó varias funciones.

Esto es, se asigna un número a cada función de alguna clase.

Una funcional será denotada encerrando el argumento dentro de los corchetes, como por ejemplo:

$$I [y]$$

Para clasificar la idea de una funcional, examinemos el siguiente ejemplo:

Considere el conjunto de todas las curvas planas diferenciables que unen a los puntos (a, y_0) y (b, y_1) , entonces:

$$I [y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad \text{II-(3)}$$

define una funcional.

La funcional asigna un número, es decir la longitud de la curva, para cada función, y , que se esté considerando.

Se puede observar que una función, y , más que una variable discreta es una "variable independiente".

Supongamos por ejemplo, que la función particular considerada es la parábola, $y = Cx^2 + Dx$, (donde C y D son constantes); elegida para que la función y , vaya de los puntos (a, y_0) al (b, y_1) .

Entonces el valor particular de la funcional (3) será

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (2Cx + D)^2} dx$$

Para los puntos (1,2) y (2,6)

$$I[y] \approx 4.1$$

Ahora podemos decir que la funcional tendrá otros valores para otras curvas de diferente forma.

Una funcional más general, que abarque (II-3) como un caso especial, está dada por:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad \text{II-4}$$

El problema del cálculo variacional es todo lo concerniente con la determinación de los extremos de las funcionales, esto es, encontrar una función $y(x)$, que dé un mínimo o un máximo relativo para

$I[y]$

Un ejemplo simple de problema variacional, será encontrar una función que minimice (II-3). O sea, encontrar la curva de longitud mínima que una dos puntos dados.

En este caso particular la solución es obviamente una línea recta.

II.3 La Ecuación De Euler

Procederemos a mostrar como problemas del cálculo variacional se relacionan con problemas que involucren ciertas ecuaciones diferenciales.

Estas ecuaciones diferenciales fueron derivadas primero por Euler y son conocidas como las "Ecuaciones de Euler". Representan una condición necesaria pero no suficiente, para minimizar o maximizar una funcional dada.

Consideremos primero el problema simple del cálculo variacional, encontrar una función que minimice (II-4).

Las curvas admisibles son aquellas para las cuales $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$ y que tienen segundas derivadas continuas.

Supongamos que la función F es doblemente continua y diferenciable con respecto a sus argumentos.

También que $y = f(x)$ es la función que minimiza (II-4), entonces la funcional evaluada con funciones en una vecindad de $f(x)$ será mayor que $I[f(x)]$. En una vecindad de f , donde todas las funciones $z(x)$ son muy próximas, tal que:

$$|f - z| < \delta \quad \text{y} \quad |f' - z'| < \delta$$

para $a \leq x \leq b$ donde δ es un número positivo arbitrariamente pequeño.

Ahora consideremos una función $\eta(x)$ con las siguientes propiedades:

La segunda derivada de η es continua sobre $a \leq x \leq b$, y $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces, $g = f + \epsilon \eta$ es una curva admisible que está en una vecindad pequeña de f para un ϵ suficientemente pequeño.

La función $I[g] = I[f + \epsilon \eta]$ puede ser considerada como una función del parámetro ϵ y denotada como $I[\epsilon]$, porque f da a la funcional un valor menor que el dado por una función en una vecindad de f , de lo que se tiene que concluir que

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Podemos escribir lo anterior en notación de funciones

$$I[\epsilon] = \int_a^b F(x, f + \epsilon \eta, f' + \epsilon \eta') dx \quad \text{II-5a}$$

(27)

haciendo la sustitución $q = \bar{f} + \epsilon \eta$, diferenciando y usando la regla de la cadena.

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} \left(F(x, q(\epsilon), q'(\epsilon)) \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial q'} \frac{dq'}{d\epsilon} \right) dx \quad \text{II-5b}$$

así que :

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} \eta + \frac{\partial F}{\partial f'} \eta' \right) dx = 0 \quad \text{II-6}$$

porque :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial f} ; \left. \frac{\partial F}{\partial q'} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial f'} ; \frac{dq}{d\epsilon} = \eta \quad y$$

$$\frac{dq'}{d\epsilon} = \eta'$$

El segundo término sobre el lado derecho de (II-6) será transformado usando la fórmula de integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{II-7}$$

(II-8)

haciendo:

$$\frac{\partial F}{\partial f^i} = u \quad \text{y} \quad \eta' dx = dv$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f^i} \eta' dx = \eta \frac{\partial F}{\partial f^i} \Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f^i} dx \quad \text{II-8}$$

entonces, y recordando que

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f^i} \eta' dx = - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f^i} dx \quad \text{II-9}$$

de este modo (II-6) puede ser escrita como:

$$\int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f^i} \right) dx = 0 \quad \text{II-10}$$

La ecuación anterior da una condición necesaria para que f minimize la funcional (II-4).

II.3.1 Lema Fundamental:

El lema fundamental del cálculo variacional, nos permite derivar de la expresión (II-10) la ecuación diferencial que buscamos.

Sea $h(x)$ una función continua en $a \leq x \leq b$.

Sea $\eta(x)$ una función arbitraria doblemente continua.

y diferenciable sobre el mismo intervalo con:

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

entonces si:

$$\int_a^b \eta(x) h(x) dx = 0$$

para todas las funciones de η satisfaciendo la hipótesis $h(x) = 0$.

Demostración:

Suponga que $h(x)$ no es idénticamente igual a cero, decimos que es positiva para alguna x . Entonces debe ser positiva también sobre algún intervalo (x_0, x_1) en virtud de la suposición de la continuidad de $h(x)$.

Escogemos $\eta(x)$ tal que:

$$\eta(x) = (x-x_0)^3 (x-x_1)^3 \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \text{ y } \eta(x) = 0$$

para todos los otros valores de x .

Esta η satisface la hipótesis

Sin embargo

$$\int_a^x \eta(x) h(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^3 (x-x_1)^3 h(x) dx < 0$$

que contradice la hipótesis.

Por consiguiente la suposición de que $h(x)$ pueda ser diferente de cero debe ser un error; esto es $h(x) = 0$, que es el argumento del lema.

II.3.2. Aplicación del Lema.

Aplicando el lema fundamental a (II-10) a la ecuación diferencial que es una condición necesaria para que sea una función extremal

Esta ecuación diferencial es denominada la "Ecuación de Euler" y es:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \quad \text{II-11}$$

II.4. Aplicación de la Ecuación de Euler.

Para mostrar la conexión entre una función y la ecuación de Euler, consideremos la ecuación (3). Es necesario encontrar una función que minimize

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

donde $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$.

Como indicamos anteriormente, este problema es equivalente a encontrar la curva más corta que una dos puntos.

Para este caso:

$$F(x, y, y') = (1 + (y')^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \left[\frac{1}{2} (1 + (y')^2)^{-1/2} \right] \cdot 2y'$$

La ecuación de Euler como se indica en (2-11), es entonces.

$$-\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0$$

Integrando:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = A$$

o

$$(y')^2 = A^2 (1 + (y')^2)$$

donde A es una constante de integración

(*)

Resolviendo para $(y')^2$

$$(y')^2 = \frac{A^2}{1-A^2} \equiv B^2$$

ó $y' = B$, integrando nuevamente:

$$\frac{dy}{dx} = B \Rightarrow dy = B dx \Rightarrow \int dy = B \int dx$$

$$y = Bx + C$$

II-(12)

Las constantes, B y C están determinadas de las condiciones de frontera:

$$y(a) = y_0 ; y(b) = y_1$$

La solución del problema es una línea recta, como lo habíamos supuesto.

II.5. Generalización De la Ecuación de Euler para dos dimensiones.

La extensión de los resultados anteriores incluye funcionales que involucren variables dependientes, derivadas superiores, ó adición de variables independientes sin que el desarrollo técnico sufra muchos cambios.

Yes el caso de varias variables independientes el que más nos interesa, tanto en el campo de la prospección geoeléctrica, como en la hidrología subterránea.

La Ecuación de Euler se derivará ahora para este caso:
Considere la funcional:

$$I[u(x,y)] = \iint_R F(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) dx dy \quad \text{II-(13)}$$

Supongamos que deseamos encontrar un mínimo de (II-13), para una clase admisible de funciones compuestas de funciones doblemente continuas y diferenciables que toman valores dados sobre la frontera, C, de la Región, R, supongamos después que $\phi(x,y)$ minimiza (II-13).

Sea $\eta(x, y)$ que tiene segundas derivadas continuas, que desaparece sobre C , entonces $u = \phi + \epsilon \eta$ es una función permitida y tenemos de nuevo

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Se sigue el procedimiento usado previamente, esta es la primera condición necesaria

$$\iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad \text{II-(4)}$$

Los últimos dos términos de (II-4) pueden ser modificados integrando por partes. La fórmula de integración por partes para este caso puede ser desarrollada como sigue:

$$\begin{aligned} \iint_R \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (u w) + \frac{\partial}{\partial y} (v w) \right] dx dy \\ &\quad - \iint_R w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad \text{II-(5)}$$

Recordando el teorema de Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy \quad \text{II-(6)}$$

Para que el primer término sobre el lado derecho de (15) pueda ser modificado hacemos:

$$\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (u v) + \frac{\partial}{\partial y} (v w) \right] dx dy = \int_C -v w dx + u w dy \quad (33)$$

y (15) queda:

$$\iint_R \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = \int_C w (-v dx + u dy) - \iint_R w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{II-(17)}$$

La ecuación anterior es la fórmula deseada para integrar por partes.

Aplicando a (II-14) la condición necesaria, tendremos:

$$\int_C \left[\eta \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} dy - \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} dx \right] + \iint_R \left[\eta \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \right] \right] dx dy \quad \text{II-(18)}$$

y porque η se anula sobre "C".

$$\iint_R \left[\eta \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \right] \right] dx dy = 0 \quad \text{II-(19)}$$

Una forma de extender el lema fundamental se usará a continuación para obtener la ecuación de Euler.

II.5.1. Lema Fundamental.

Sea $h(x, y)$ una función continua definida en R . Sea $\eta(x, y)$ una función arbitraria con dos derivadas continuas en R , y que se anula en C entonces si:

$$\iint_R \eta(x, y) h(x, y) dx dy = 0$$

para todas las funciones η que satisfacen la hipótesis, $\eta(x, y) \equiv 0$

Demostración:

Esta demostración es una extensión de la demostración para el caso de una variable independiente.

Supongamos que $h(x, y)$ no es cero. Sea como que es positiva en un punto (x_0, y_0) en R . Entonces $h(x, y)$ es positiva en algún disco

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2$$

tomemos $\eta(x, y) = 0$ fuera del disco y

$\eta(x, y) = [\delta^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]^3$ en su interior (del disco).

Entonces $\eta(x, y)$ satisface la hipótesis, pero la integral no es cero. Esto es una contradicción, luego entonces $h(x, y)$ debe ser idénticamente igual a cero.

Aplicando el lema fundamental a (II-19) nos da la ecuación de Euler para el problema bidimensional bajo la consideración:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \right] = 0 \quad \text{II-21}$$

II.5.2. Aplicación:

Para ilustrar como la ecuación (II-20) corresponde a ecuaciones de interés en prospección geofísica, consideremos la funcional:

$$I[\phi] = \iint_R \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \text{II-22}$$

Para este caso:

$$F = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right]$$

(35)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

y encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{II-(22)}$$

Lo que nos indica que la ecuación de Euler es la ecuación de Laplace.

Así (II-21) es la formulación variacional para problema de flujo de corriente estacionaria en un terreno homogéneo e isotrópico con sus fronteras especificadas.

II.6. Generalización del Problema Elemental Del Cálculo De Variaciones.

Tomemos como variables de acuerdo a sus elementos integrantes:

1. Funciones que dependen de derivadas de ordenes superiores.

2. Funciones que dependen de m funciones.

3. Funciones que dependen de n variables variables.

El número 3, ya se estudió, pero veamos los resultados del punto (1) y del (2).

1. Si se tiene la funcional

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] dx \quad (36)$$

donde F es una función diferenciable $n+2$ veces respecto a todos los argumentos e $y(x) \in C_n [x_0, x_1]$ y supongamos que las condiciones de frontera tienen la forma:

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \\ y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \end{aligned} \right\}$$

Entonces la ecuación de Euler quedará de la siguiente forma:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \quad \text{II-(20a)}$$

2. En el caso de una funcional que depende de m funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$

$$I [y_1, y_2, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y'_1, y'_2, \dots, y'_m) dx$$

y con las condiciones de frontera de tipo:

$$y_k(x_0) = y_k^0, y_k(x_1) = y_k^1 \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

Entonces las ecuaciones de Euler, forman un sistema de ecuación diferenciales el cual queda:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad \text{II-(20b)}$$

Se puede apreciar que estas dos últimas ecuaciones (II-20a), (II-20b), se establecieron sin entrar en valores totales matemáticos, porque el desarrollo para los casos elementales es análogo para estos casos.

II.7. Tratamiento De las Condiciones De Frontera, Que No Son Del Tipo De Dirichlet.

Como hemos visto las condiciones de frontera tienen que ser asumidas del tipo Dirichlet, los valores de la variable dependiente hasta ahora se han especificado en las fronteras.

Ahora se estudiarán las modificaciones necesarias para manipular otras condiciones.

Consideremos ahora el problema de encontrar un mínimo de (II-4). Aquí se requerirá que $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$.

Podemos proceder como anteriormente lo hicimos, escogiendo $\eta(x)$ de una manera similar.

La restricción que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ no se requerirá más porque $g = f + \epsilon \eta$ es una función admisible.

La derivación sigue el mismo curso como en el caso con condiciones de Dirichlet hasta la ecuación (II-8). Podemos no igualar a cero el primer término del lado derecho de (II-8). De aquí vemos que la condición necesaria (II-10) nos da

$$\eta \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_a^b + \int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) dx = 0 \quad \text{II-(23)}$$

Porque η es arbitraria, la ecuación (II-23) (en particular para funciones donde $\eta(a) = \eta(b) = 0$) puede quedar como:

$$\int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) dx = 0$$

Por nuestro razonamiento previo esto requiere que la ecuación de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \quad \text{II-11}$$

debe ser satisfecha porque (II-11) es independiente de η , sin embargo debe ser idénticamente igual a cero para todo η (II-23) dada:

$$\eta \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_a^b = 0$$

(38)

Considerando funciones con $\eta(a)$ arbitraria y $\eta(b) = 0$ determinamos que:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_a = 0 \quad \text{II-(24)}$$

Considerando funciones con $\eta(a) = 0$ y $\eta(b)$ arbitraria, determinamos que:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_b = 0 \quad \text{II-(25)}$$

Ahora, si ambas ($\eta(a)$ y $\eta(b)$) no están especificadas, se requiere que se cumpla lo siguiente:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_a = \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_b = 0$$

Las ecuaciones (II-24) y (II-25) especifican las condiciones de frontera naturales.

Para ver como son usadas las condiciones de frontera naturales en problemas diversos veamos una aplicación sencilla en un problema de hidrología subterránea, que es muy parecido a los aspectos que nos interesan en geo-electricidad.

Consideremos la funcional

$$I[\phi] = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{2q}{k} y \right] dx \quad \text{II-(26)}$$

Con $y(a) = y_0$ pero con la condición de frontera natural en $x = b$, la ecuación de Euler es

$$\frac{2q}{k} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2q}{k} \quad \text{II-(27)}$$

(39)

Si y se sustituye por h^2 , (II-27) es la ecuación que gobierna el flujo unidimensional para agua subterránea confinada con las suposiciones de Dupuit⁽⁶⁾ y con una evaporación uniforme ó razón de descarga q . La condición de frontera natural (II-25) es:

$$\left. \frac{dh^2}{dx} \right|_{x=b} = 0 \quad \text{II-28}$$

que es una condición de no flujo en la frontera en nuestro tratamiento.

Ahora tenemos representadas a ambas:

- a): Una frontera constante principal y una frontera de flujo nulo
- b): La otra condición de interés para nosotros es una frontera donde el flujo se especifica.

Para obtener tal modificación, se adiciona un término a la funcional

Considere:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx + (\alpha x)_{x=a} - (\beta y)_{x=b} \quad \text{II-29}$$

donde α y β son constantes. La condición necesaria para la minimización es entonces modificada de (II-23) para obtener.

$$\eta \left. \frac{\partial F}{\partial f^i} \right|_a^b + \int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f^i} \right) dx + \alpha \eta \Big|_{x=a} - \beta \eta \Big|_{x=b} = 0$$

ó

$$\eta(b) \left(\frac{\partial F}{\partial f^i} - \beta \right)_{x=b} - \eta(a) \left(\frac{\partial F}{\partial f^i} - \alpha \right)_{x=a} + \int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f^i} \right) dx = 0 \quad \text{II-30}$$

(40)

Razonando en forma similar a la obtención de condiciones de frontera naturales, se puede concluir que la ecuación de Euler será satisfecha con las condiciones de frontera siguientes:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_{x=0} = \beta \quad \text{II-(31)}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_{x=a} = \alpha \quad \text{II-(32)}$$

Comparando II-(25), II-(26), II-(30), II-(31) y II-(32) podemos decir que II-(31) y II-(32) son las condiciones de tipo deseada para los problemas que pueden plantearse.

Este ejemplo muestra que las condiciones de frontera naturales pueden ser modificadas sumando términos a término todos los elementos que constituyen a la ecuación de Euler.

En cualquier caso la ecuación de Euler habrá de ser satisfecha.

La extensión de los resultados anteriores para dimensiones superiores es de la misma forma que para el caso unidimensional tratado anteriormente.

Por otro lado para el caso bidimensional considerado previamente en II-(18) es la condición necesaria cuando los valores de ϕ no se especifican en la frontera.

Introduciendo el parámetro S , que es la longitud del arco a lo largo de la frontera de la curva II-(18) puede ser reescrita como:

$$\int_C \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \frac{dx}{ds} \right] ds + \iint_R \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad \text{II-(23)}$$

Usando razonamientos análogos a los que se emplearon en el caso unidimensional, la condición de frontera natural es:

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \frac{dx}{ds} = 0 \quad \text{II-(34)}$$

Para mostrar el sentido de II-(34) en problemas de hidrología subterránea, considere la funcional:

$$I[\phi] = \iint_R \frac{1}{2} \left[k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \text{II-(35)}$$

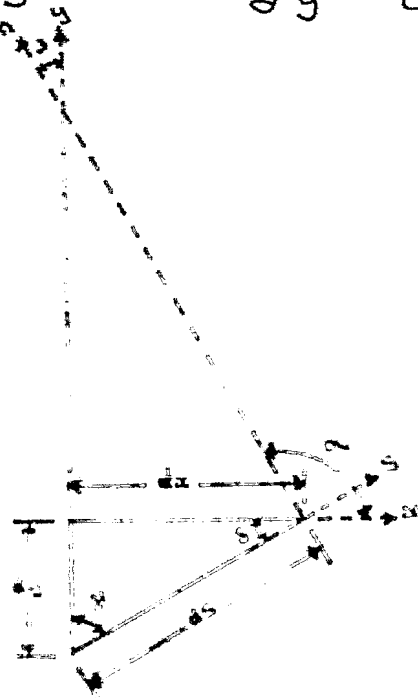
La ecuación de Euler es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{II-(36)}$$

Que es la ecuación de flujo estable.

La condición de frontera natural es:

$$k \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} - K \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} = 0 \quad \text{II-(37)}$$



- Relación entre las direcciones x, y, s y θ

Considere la construcción en la figura donde
 η = dirección normal a la curva.

$$\alpha = \hat{x} \cdot \eta, \quad \chi$$

$$\beta = \hat{x} \cdot \eta, \quad y$$

$$\gamma = \hat{x} \cdot s, \quad y$$

$$\delta = \hat{x} \cdot s, \quad \chi$$

Entonces:

$$\frac{dy}{ds} = \cos(s, y) = -\cos(\eta, \chi)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos(s, \chi) = \cos(\eta, y)$$

y (37) puede ser escrito como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cos(\eta, \chi) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos(\eta, y) = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{II-(38)}$$

Así la condición de interés es generada como anteriormente se vio, sumando una frontera al término de la funcional, esto es:

Consideremos la funcional

$$I[\phi] = \iint_{\Omega} (x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}) dx dy - \int_C \alpha \phi ds \quad \text{II-(39)}$$

Entonces:

$$\left. \frac{\delta I}{\delta \phi} \right|_{\phi=0} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\delta \Pi}{\delta \phi} - \frac{\partial \Pi}{\partial s} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \alpha \right] +$$

$$- \int_C \left[\frac{\delta \Pi}{\delta \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\delta \Pi}{\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\delta \Pi}{\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} \right] \right] ds$$

$$\times dx dy = 0$$

(43)

y la condición de frontera es:

$$\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)} \frac{dx}{ds} = \alpha \quad \text{II-(40)}$$

Inspeccionando la relación entre II-(34), II-(37), II-(38) y II-(40) muestra que II-(40) es verdaderamente la especificación del flujo en que estamos interesados.

CAPITULO
III

Capítulo III

Método Del Elemento Finito

III.0. En este capítulo se extienden los conceptos del cálculo variacional elemental, para llegar a los métodos directos de esta teoría. Aquí es donde encontramos el Método de Rayleigh-Ritz, que puede usarse para aproximar las soluciones de un gran número de problemas de valores de contorno con coeficientes constantes o variables en una o más dimensiones. Añadiéndole a este método algunas propiedades, llegamos al planteamiento del Método Del Elemento Finito el cual se clarifica al hacer un ejemplo numérico.

De aquí se ve la necesidad de plantear los métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de los Elementos Finitos.

En forma general se tratan los métodos de Gauss y Crout para que a partir de ellos se define el Método de Cholesky, que se utiliza en el modelado de resistividades.

III.1. Métodos Directos Del Cálculo Variacional. Antecedentes.

Hay diversidad de problemas físicos para los cuales una formulación variacional aparece en una forma natural. Por ejemplo, consideremos un rayo de luz viajando a través de un medio no-homogéneo bidimensional. Recordando el principio de Fermat, la trayectoria que seguirá el rayo será tal que el tiempo de viaje entre dos puntos sea el mínimo.

La determinación de esta trayectoria, por tanto, aparece en forma natural como el problema variacional de minimización de la funcional, dando el tiempo de viaje:

$$T[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{c(x,y)} dx \quad \text{III-1}$$

donde $c(x,y)$ es la velocidad de la luz en cualquier punto medio.

El cálculo de variaciones se ha desarrollado con métodos proporcionados por el deseo para resolver problemas "naturales". Por lo general se recurre a las ecuaciones de Euler, donde se resuelven ecuaciones diferenciales, para hallar la solución del problema que se tiene.

Cuando los problemas que se tratan no conducen a formulaciones variacionales, evidentemente la vía indirecta de las ecuaciones de Euler no nos sirve de mucho.

El procedimiento usado para resolver tales problemas es encontrar una funcional que produzca la ecuación diferencial gobernante parecida a su ecuación de Euler (esto refiere a sus propiedades) y operar con la funcional tal como que se usa para determinar una solución.

Por consecuencia, los libros de "Métodos Directos del Cálculo Variacional" tienen un carácter más variacionalmente.

III.2. El Método De Rayleigh-Ritz.

Supongamos que se requiere un mínimo para una funcional $I[\phi]$. Sea este mínimo representado por m .

Entonces: La filosofía de los métodos directos es escoger una sucesión de funciones w_1, w_2, w_3, \dots , tal que $I[w_i] \rightarrow m$ como $i \rightarrow \infty$. de donde decimos que $\lim_{i \rightarrow \infty} w_i = \phi$, teniendo así la solución para el problema variacional, ya de aquí podemos pasar a la ecuación de Euler.

La demostración de convergencia es generalmente no trivial. Uno de los métodos mejor conocidos para la generación de tales sucesiones minimizantes es el método de Rayleigh-Ritz. A continuación describiremos algunos conceptos necesarios para una mejor comprensión.

La idea de selección de una solución para una posible minimización de una funcional para cierta clase de funciones admisibles es de tal manera que estas funciones pertenecerán a un espacio función porque los elementos del espacio (vectores) son funciones. Tales espacios función son espacios vectoriales de dimensión infinita.

Como un ejemplo, considere el problema de minimización de

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad \text{II 4}$$

La admisibilidad de funciones es regulada por requerimientos de continuidad y condiciones de frontera.

En el caso considerado, la función se requiere continua y que tenga primera y segunda derivadas continuas. Tales funciones satisfacen todas las propiedades de los elementos de un espacio vectorial, por lo que concluimos que estas funciones forman un espacio función: Por ejemplo, si f_1 y f_2 son elementos, entonces $\alpha f_1 + \beta f_2$ es un elemento, esto es, doblemente continua y diferenciable, donde α y β son escalares; hay también un elemento cero $f(x) = 0$, y el inverso.

La intuición aplicada en la interpretación geométrica, es usada para introducir una medida de la distancia entre vectores (funciones). Estas medidas son llamadas "normas". Las normas se hallan íntimamente relacionadas con vectores en un espacio euclidiano de dimensión finita. Para espacios función, las normas tienen las mismas propiedades.

Por ejemplo, una norma que puede ilustrar lo anterior puede ser:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

(4B)

Considere la siguiente sucesión infinita de funciones linealmente independientes u_1, u_2, u_3, \dots . Esta sucesión se dice que es "completa" en un espacio función, si es una función f en el espacio y un $\epsilon > 0$, existe un n independiente sobre ϵ y una combinación lineal

$$\mathcal{U}_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Tal que $\|f - \mathcal{U}_n\| < \epsilon$. esta es heurísticamente la condición mediante la cual una función en el espacio puede ser aproximada arbitrariamente por una combinación lineal de los elementos de la sucesión.

Supongamos por ejemplo funciones continuas y diferenciables sobre el intervalo $(0, 1)$. Entonces las funciones $1, x, x^2, \dots$ forman un conjunto completo para la norma dada anteriormente. Esto es: una función puede ser aproximada arbitrariamente por un polinomio de grado suficientemente alto.

El método de Raleigh-Ritz parte de la selección de un conjunto de funciones "coordenadas" para un conjunto completo.

Las funciones coordenadas tendrán la propiedad: que todas las combinaciones lineales de estas funciones son funciones admisibles para la funcional considerada. Esto es, las combinaciones lineales de las funciones coordenadas deben satisfacer las condiciones de frontera y son suficientemente diferenciables.

Si ϕ^* es la función que minimiza $I[\phi]$, se sabe de lo anterior que ϕ^* puede ser aproximada arbitrariamente por una combinación lineal de funciones coordenadas, $\mathcal{U}_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$.

La solución ϕ^* convierte $I[\phi]$ un mínimo, $I[\phi^*] = m$. Por consiguiente si los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n fueron escogidos tal que $I[\mathcal{U}_n]$ fuera minimizada. $I[\mathcal{U}_n]$ puede ser ajustada a m y \mathcal{U}_n será una buena aproximación de ϕ^* y de esta forma podemos construir una sucesión minimizante.

El problema de encontrar un mínimo de $I[\mathcal{U}_n]$ es mucho más fácil, que encontrar un mínimo para el problema original.

$I[\mathcal{U}_n]$ es ahora una función ordinaria de las n variables a_1, a_2, \dots, a_n , tal que las condiciones por

minimización son simplemente :

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \quad \text{con } i=1, \dots, n \quad \text{III-2}$$

Estas ecuaciones, forman un conjunto de ecuaciones algebraicas que son resueltas para las a_i .

Un ejemplo bastante simple aclarará el procedimiento:

Considere la funcional

$$I[y] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (y')^2 + \alpha y \right] dx \quad \text{III-3}$$

con condiciones de frontera $y(0) = y(1) = 0$.

Intentaremos una minimización aproximada usando el método de Rayleigh-Ritz.

Como es cerrado el conjunto de funciones $1, x^2, x^3, \dots$, lo escogeremos para hacer una aproximación polinomial. Todas las combinaciones lineales de las funciones coordenadas satisfacen las condiciones de frontera, tal que estos polinomios deben tener ceros entre 0 y 1. Consecuentemente, escogeremos:

$$y_n = x(1-x) \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} \quad \text{III-4}$$

como la combinación lineal de las funciones coordenadas

La primera aproximación es:

$$y_1 = a_1 x(1-x) \quad \text{III-5}$$

Sustituyendo en III-3 y diferenciando en III-2, determinaremos a_1 tal que $I[y_1]$ es un mínimo

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \int_0^1 [a_1(1-4x+4x^2) + \alpha x(1-x)] dx = 0 \quad \text{III-6}$$

Realizando la integración

$$a = \frac{\alpha}{2}$$

ó

$$y_1 = -\frac{\alpha}{2} x(1-x) \quad \text{III-7}$$

como la solución aproximada

Sucede en este caso que U_1 es la solución al problema. También en este caso las funciones coordenadas escogidas permite una buena aproximación hecha con un solo parámetro. Supongamos otra combinación lineal de funciones coordenadas

$$U_n = \sum_{i=1}^n a_i \text{sen } i \pi x \quad \text{III-8}$$

La primera aproximación es $U_1 = a_1 \text{sen } \pi x$ y procediendo como sigue

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \int_0^1 (a_1 \pi^2 \cos^2 \pi x + \alpha \text{sen } \pi x) dx = 0 \quad \text{III-9}$$

de esto, encontramos:

$$a_1 = -4 \frac{\alpha}{\pi^3}$$

y la aproximación:

$$U_1 = -\frac{4}{\pi^3} \alpha \text{sen } \pi x \quad \text{III-10}$$

Una comparación de la Solución exacta y esta primera aproximación está en la tabla (1).

Usando términos adicionales en la aproximación (con la exactitud que se desee) que debe ser cerrada

| Tabla (1). | | |
|---|--|--|
| Comparación de la solución exacta y de la aproximación de Rayleigh-Ritz para el problema de minimización de III-3 | | |
| x | Solución Exacta $y = -\frac{\alpha}{2} x (1-x)$ | Solución Aproximada $U_1 = -\frac{4}{\pi^3} \alpha \text{sen } \pi x$ |
| 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.250 | -0.094 α | -0.091 α |
| 0.500 | -0.125 α | -0.129 α |

Varias cosas resaltan del ejemplo anterior.

Primera:

Se observa que la selección de las funciones coordenadas, determina qué tan buena será la solución aproximada. Esto en general es verdadero. Si conocemos la forma de la solución es mucho más fácil el trabajo, las funciones coordenadas pueden ser escogidas apropiadamente y se podrán obtener soluciones aceptables que serán encontradas usando pocos parámetros. Si no se aprovecha el conocimiento a-priori de la forma de la solución o existe una mala selección de funciones coordenadas, el resultado sería una convergencia lenta.

Segunda:

Se pone de relieve que la propiedad de completitud de la sucesión de funciones es importante; por ejemplo si hacemos una ligera modificación de (48).

$$U_n = \sum_{l=1}^n a_l \sin 2l \pi x \quad \text{III-11}$$

destruyendo su completitud, la minimización indicará que $a_l = 0$, $l = 1, \dots, n$. Las funciones III-11 son incapaces de describir la solución.

Tercera:

Las ecuaciones II-5 y III-9 muestran que para más parámetros o problemas más complejos, la integración relacionada con el método es difícil (sumamente complicada). Además con fronteras y condiciones de frontera compleja que estén implícitas con problemas bi y tridimensionales hará más difícil adecuar las funciones coordenadas.

Hasta aquí llegan los prolegómenos y es el momento de empezar a estudiar el Método Del Elemento Finito.

III.3. El Método del Elemento Finito.-

El método del elemento finito es una extensión del método de Rayleigh - Ritz, que evita algunas dificultades mencionadas anteriormente.

En el Método del Elemento Finito, desaparece una de las restricciones sobre la aproximación de funciones.

En lugar de requerir que la función tenga la misma forma que la solución buscada, esta función es aproximada con fragmentos de curvas. En muchos es conveniente escoger funciones lineales.

En el caso unidimensional es necesario que la curva (la solución) sea aproximada por una serie de segmentos de línea recta.

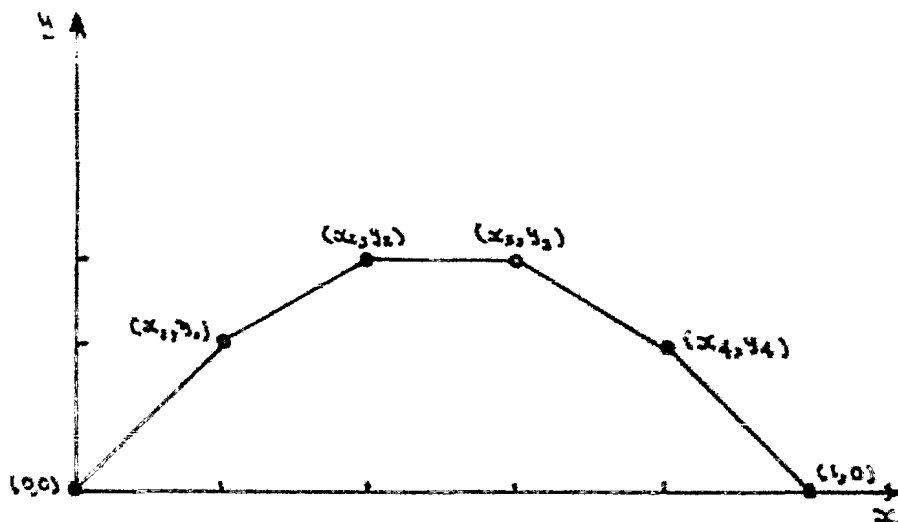
En dos (o más) dimensiones, la solución es aproximada por porciones de planos (o hiperplanos). El dominio de aplicabilidad de cada segmento de la función lineal fragmentaria es denominado un "elemento finito".

Para obtener una mejor apreciación del método real vamos un ejemplo:

Apliquemos el Método Del Elemento Finito a la minimización aproximada de:

$$I[y] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (y')^2 + \alpha y \right] dx \quad (III-3)$$

Usaremos, en aproximación, una curva consistente de cinco segmentos de líneas rectas teniendo sus puntos extremos igualmente espaciados en la dirección x como se aprecia en la figura.



Segmentos de línea recta usados para obtener una minimización aproximada de la ecuación III-3

(53)

Cada intervalo (x_i, x_{i+1}) es un "elemento" en este caso
Una función aproximante es:

$$y = y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i) \quad \text{III-12}$$

ó

$$y = y_i + 5(x - x_i)(y_{i+1} - y_i) \quad \text{con } i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{III-13}$$

porque: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, etc

también, sobre cualquier intervalo.

$$y' = 5(y_{i+1} - y_i) \quad \text{III-14}$$

La funcional III-3 ahora puede ser escrita como:

$$I[y] = \sum_{i=0}^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{3\alpha}{2} (y_{i+1} - y_i)^2 + \alpha y_i + \alpha 5(x - x_i) x (y_{i+1} - y_i) \right] dx \quad \text{III-15}$$

ó

$$I[y] = \sum_{i=0}^4 \left[\frac{\alpha}{2} (y_{i+1} - y_i)^2 + \frac{\alpha}{5} y_i + \frac{5\alpha}{2} (x_{i+1}^2 - x_i^2) x (y_{i+1} - y_i) - \alpha x_i (y_{i+1} - y_i) \right] \quad \text{III-16}$$

La funcional está nuevamente reducida a una función arbitraria

Las variables ó parámetros en este caso son y_1, y_2, y_3 y y_4 usando las condiciones de frontera previamente establecidas

$$y(0) = y(1) = 0$$

La minimización aproximada requiere que:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ y } 4.$$

Así, la ecuación obtenida es:

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} = 10y_1 - 5y_2 + \frac{\alpha}{5} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial y_2} = 5y_1 - 10y_2 - 5y_3 + \frac{\alpha}{5} = 0 \quad \text{III-17}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y_3} = 5y_2 + 10y_3 - 5y_4 + \frac{\alpha}{5} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial y_4} = 5y_3 + 10y_4 + \frac{\alpha}{5} = 0$$

Aquí podemos observar que y_3 es un parámetro en dos segmentos de líneas, uno de (x_2, y_2) a (x_3, y_3) al otro de (x_3, y_3) a (x_4, y_4) .

Por otro lado, la ecuación III-17 puede ser puesta en forma matricial para que la visualización sea mejor, por lo que la ecuación III-17 quedará de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{25} \\ -\frac{\alpha}{25} \\ -\frac{\alpha}{25} \\ -\frac{\alpha}{25} \end{bmatrix} \quad \text{III-18}$$

Este sistema de ecuación puede resolverse por cualquier método numérico conocido.

Varias ventajas del Método del Elemento Finito pueden apreciarse del ejemplo anterior.

- El uso de elementos de tamaño variable (con Δx no constante en el caso de una dimensión) no presenta mayor problema.
- Su aplicación a problemas de dimensiones mayores siguen el mismo procedimiento (esencialmente) al aplicado aquí.
- Es diferente a la aplicación clásica del método de Rayleigh-Ritz, donde las condiciones de frontera son igualadas fácilmente por las funciones coordenadas.
- Finalmente, porque sólo son usadas funciones lineales, las integraciones son hechas fácilmente.

III.4. Métodos Numéricos Para La Solución De Las Ecuaciones Del Elemento Finito.

Después del ejemplo que acabamos de ver podemos aseverar que para poder aplicar el Método Del Elemento Finito en la solución del problema de prospección geoelectrica es necesario el uso de una computadora digital.

En este apartado resumiremos los aspectos numéricos que forman parte de los algoritmos asociados al Método del elemento finito.

Los métodos matemáticos de solución para resolver la ecuación fundamental.

$$[A][X] = [b] \quad \text{III-19}$$

Conforman dos grandes grupos:

- a).- Métodos directos.
- b).- Métodos iterativos.

Para el elemento finito se usan los directos y dentro de estos los dominados compactos que describiremos a continuación

Métodos Directos Generales.

En algebra lineal se demuestra que cualquier matriz $[A]$, no singular, se puede descomponer en el producto de dos matrices triangulares, una inferior $[L]$ y otra superior $[U]$, con la condición de que alguna de ellas este normalizada (Los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad) Entonces, se puede escribir lo siguiente:

$$[A] = [L][U] \quad \text{III-20}$$

Las matrices triangulares $[L]$ y $[U]$ se cuantifican con la ecuación 2 y a tal proceso se denomina triangulación así sustituir la ecuación III-19 en la ecuación se obtiene

$$[L][U][X] = [b] \quad \text{III-21}$$

La ecuación se puede escribir como

$$[L][Y] = [b] \quad \text{III-22}$$

donde:

$$[U][X] = [Y] \quad \text{III-23}$$

Las ecuaciones III-22 y III-23 conocidas como sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, respectivamente, establecen que el proceso de triangulación III-20 transforma el sistema original, que es arbitrario III-19, en dos sistemas triangulares que son mucho más simples de resolver.

De acuerdo con las dos posibilidades para seleccionar la matriz normalizada, se obtienen los dos métodos siguientes.

III.4.1 Método De Gauss.-

El método de eliminación de Gauss, en forma compacta, se obtiene cuando la matriz triangular inferior está normalizada, es decir

$$L_{ii} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, h \quad \text{III-24}$$

III.4.2 Método De Crout.-

El método de Crout, en forma compacta, se obtiene cuando la matriz normalizada es la triangular superior, o sea

$$U_{ii} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{III-25}$$

Métodos Directos Para Matrices Simétricas.-

Si la matriz de coeficientes es simétrica, es decir,

$$[A]^T = [A] \quad \text{III-26}$$

los métodos de Gauss y de Crout se pueden modificar para tomar en cuenta tal situación.

Para ello la ecuación III-20, con base en la matriz identidad, [I], se puede escribir como:

$$[A] = [L] [I] [U] = [L] [D] [D]^{-1} [U] = [L] [D]^{-1} [D] [U]$$

III-27

donde [D] es una matriz diagonal, formada con la diagonal de [U], en el método de Gauss, ó bien con la diagonal [L], en el método de Crout.

III.4.3 Método De Gauss Modificado.-

En la ecuación III-20 queda arregada como:

$$[A] = [L] [D] [D]^{-1} [U] = [L] [D] [U] \quad \text{III-28}$$

donde:

$$[\bar{U}] = [D]^{-1} [U] \quad \text{III-29}$$

al hacer que la ecuación satisfaga la condición de simetría III-26 se obtiene que

$$[\bar{U}]^T [D] [L]^T = [L] [D] [\bar{U}] \quad \text{III-30}$$

de donde se concluye lo siguiente:

$$[\bar{U}] = [L]^T \quad \text{III-31}$$

al sustituir la ecuación III-31 en la ecuación III-26 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Gauss modificado para matrices simétricas y resulta ser:

$$[A] = [L] [D] [L]^T \quad \text{III-32}$$

La ecuación III-32 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular inferior normalizada y una matriz diagonal

El proceso de sustitución se obtiene al sustituir la ecuación III-32 en la ecuación III-13 y resulta:

$$[L] [D] [L]^T [X] = [b] \quad \text{III-33}$$

La ecuación III-33 (18) se puede escribir como:

$$[L] [Y] = [b] \quad \text{III-34}$$

$$[D] [L]^T [X] = [Y] \quad \text{III-35}$$

La ecuación III-34 es la sustitución hacia adelante y la ecuación III-35 la sustitución hacia atrás.

III.4.4 Método de Crout Modificado.-

Si la ecuación III-27 queda arreglada como:

$$[A] = [L] [D] [D] [U] = [\bar{L}] [D] [U] \quad \text{III-36}$$

donde:

$$[\bar{L}] = [L] [D]^{-1} \quad \text{III-37}$$

Al hacer que la ecuación III-36 satisfaga la condición de simetría III-26 resulta que:

$$[U]^T [D] [\bar{L}]^T = [\bar{L}] [D] [U] \quad \text{III-38}$$

La ecuación (20) establece:

$$[\bar{L}] = [U]^T \quad \text{III-39}$$

Al sustituir la ecuación III-39 en la ecuación III-36 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Crout modificado para matrices, que se indica como:

$$[A] = [U]^T [D] [U] \quad \text{III-40}$$

La ecuación III-40 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz Triangular superior normalizada y una matriz diagonal

Al comparar las ecuaciones III-32 y III-40 que definen los procesos de triangulación para los métodos de Gauss y de Crout modificados para matrices simétricas, se puede concluir que no existe diferencia entre ellos por lo que se le puede llamar método de Gauss-Crout.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de sustitución hacia adelante y hacia atrás, en notación de matriz triangular superior normalizada, se puede escribir como se indica a continuación ya que:

$$[U] = [L]^T$$

$$[U]^T [Y] = [b] \quad \text{III-41}$$

$$[D] [U] [X] = [Y] \quad \text{III-42}$$

III.4.5 Método De Cholesky.

Este método se puede considerar como una variante del método de Gauss-Crout, para el caso en que la matriz $[A]$ sea positiva definida.

Entonces la ecuación III-40 se puede escribir como:

$$[A] = [U]^T [D]^{1/2} [D]^{1/2} [U] = [\bar{U}]^T [\bar{U}] \quad \text{III-43}$$

donde la matriz triangular $[\bar{U}] = [D]^{1/2} [U]$, ya no está normalizada.

Las sustituciones hacia adelante y hacia atrás se obtienen al sustituir la ecuación III-43 en la ecuación III-19 y resultan ser

$$[\bar{U}]^T [Y] = [b] \quad \text{III-44}$$

$$[\bar{U}] [X] = [Y] \quad \text{III-45}$$

CAPITULO
IV

Capítulo IV

Modelado De Resistividades Para Cuerpos Simetricamente Axiales.

IV.0. Introducción.

La interpretación de datos de campo de resistividad descansa en gran parte sobre la capacidad de comparación de datos de campo con modelos teóricos de diversas estructuras. Las soluciones explícitas para el potencial, y por tanto la resistividad aparente teórica, están limitadas a un pequeño rango de estructuras, tales como: Estratos horizontales, diques verticales y contactos inclinados.

Cuando la estructura bajo estudio se aproxima por un cuerpo axialmente simétrico, el rango de utilidad de las soluciones explícitas es también muy limitado.

Ejemplos particulares que se tienen son: El hemisferoide, una semiesfera y la esfera enterrada. También para estos ejemplos, es requerido un poder de computación considerable.

En este capítulo, se plantea un método para determinar la solución numérica para el potencial debido a un par de electrodos de corriente en la presencia de un cuerpo axialmente simétrico con un eje vertical de simetría.

La solución en tal caso puede ser reducida a una serie de Fourier.

La determinación numérica de los coeficientes de Fourier, que es un problema bidimensional se hace usando el método del elemento finito. Este método permite que algunos casos simples de anisotropía sean incluidos en la solución para el potencial.

Se plantea la solución separandola en un potencial primario y uno secundario y se dan algunas consideraciones para encontrar los valores incognitos.

El tratamiento dado aquí es puramente teórico y es posible que exista otra solución numérica, por ejemplo por diferencias finitas.

IV. 1. Planteamiento del Problema.-

Para que el tratamiento sea general, consideremos a la tierra con conductividad que varía con la posición y dirección del flujo de corriente.

Anteriormente (Capítulo I) se vio que el problema básico en prospección geoléctrica en corriente directa es de determinar el potencial que es producido en cualquier punto dentro y encima de un terreno conductor por un punto fuente de corriente.

Usemos por facilidad un sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3).

Tomando la conductividad en cualquier punto como el tensor simétrico σ_{pq} , el campo eléctrico y la densidad de corriente dentro del material conductor se relacionan por la ley de Ohm:

$$J_p = \sigma_{pq} E_q \quad \text{IV-1}$$

donde J_p y E_q son las componentes del vector densidad de corriente y el vector de campo eléctrico en las direcciones p y q , respectivamente. Con los sub-índices se usa el convenio de suma de Einstein para tensores.

El campo eléctrico puede también ser representado por el negativo del gradiente del potencial eléctrico

ϕ :

$$E_q = -\frac{\partial \phi}{\partial x_q} = -\phi_{,q} \quad \text{IV-2}$$

de donde la ecuación IV-1. nos da:

$$J_p = -\sigma_{pq} \phi_{,q} \quad \text{IV-3}$$

Además la divergencia de la densidad de corriente representa el flujo neto de corriente que entra y sale en un pequeño volumen de la tierra es en todas partes cero, excepto en los puntos fuente de corriente.

Con la fuente de corriente I en el origen tendremos:

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial x_p} = I \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \quad \text{IV-4}$$

donde (x_1) , (x_2) , (x_3) son las llamadas funciones delta de Dirac.

Ahora tomando la divergencia de la expresión IV-3, la ecuación para el potencial queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x_p} [\nabla_{pq} \phi x_q] = -I \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \quad \text{IV-5}$$

La ecuación IV-5 al resolverse debe sujetarse a las condiciones de frontera en donde la densidad de corriente normal a la superficie de la tierra es cero y a distancias grandes de la fuente de corriente el potencial tienda a cero.

IV.2. Cuerpos Axialmente Simétricos:

Una situación que a menudo surge en prospección geoelectrica es el caso cuando las regiones anómalas estudiadas pueden ser aproximadas por cuerpos que son simétricos alrededor de un eje vertical.

Casos simples de esta situación son, por ejemplo, cuando el cuerpo puede ser aproximado por un hemisferio, o por una esfera enterrada.

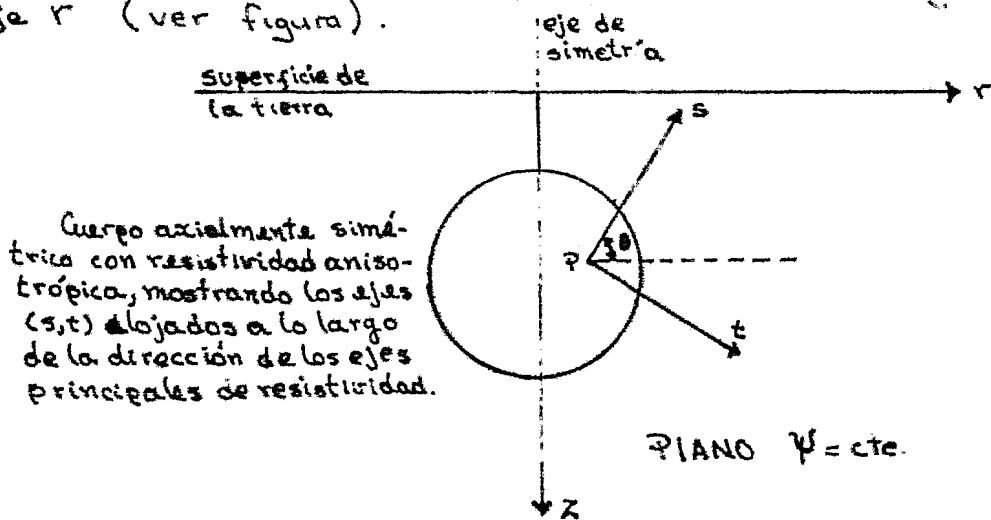
La interpretación recae sobre el cálculo de las resistividades aparentes teóricas para tales cuerpos simétricamente axiales.

Ahora consideremos una clase general de problemas donde el cuerpo está definido por regiones de conductividad uniforme (aunque anisótropo), las fronteras de estas son simétricas alrededor de un eje vertical singular.

Por causa de generalidad, la tierra será supuesta anisotrópica. Uno de los ejes principales de conductividad se debe apoyar en la dirección tangencial.

Consideremos un conjunto de coordenadas cilíndricas, alrededor del eje de rotación del cuerpo bajo estudio (r, ψ, z) . El eje Z está tomado verticalmente hacia abajo con el origen en la superficie de la tierra.

Si dentro de la región hacemos que nuestra matriz de conductividades, solo sea diagonal, tendremos que las conductividades principales dentro de una región particular del cuerpo son: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$. Uno de los ejes principales a lo largo de un conjunto de ejes (s, t) en el plano (r, z) , donde el eje S está a un ángulo θ del eje r (ver figura).



En las coordenadas (s, ψ, t) , la ecuación diferencial II-5 para el potencial puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[r \sigma_{11} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[r \sigma_{33} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right] -$$

$$- \int (s - s_0) \int (t - t_0) \int (\psi - \psi_0) = 0 \quad \text{II-6}$$

donde el punto fuente de corriente está en (s_0, t_0) en estas coordenadas $r = s \cos \psi$ o $r = t \sin \psi$.

El potencial ϕ es una función continua de (s, ψ, t) y también puede ser expandida como una serie de Fourier:

$$\phi = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(s, t) \cos n\psi + b_n(s, t) \sin n\psi] \quad \text{IV-7}$$

donde a_n, b_n son funciones de s y r (o r y z)

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s, \psi, t) \cos n\psi d\psi \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s, \psi, t) \sin n\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad \text{IV-8}$$

Multiplicando la ecuación IV-6 por $\cos n\psi$ y $\sin \psi$ e integrando da la ecuación diferencial para a_n y b_n respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[r \sqrt{\frac{r}{s}} \frac{\partial}{\partial s} (a_n, b_n) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[r \sqrt{\frac{r}{s}} \frac{\partial}{\partial t} (a_n, b_n) \right] - \frac{\eta^2 \sqrt{\frac{r}{s}}}{r} (a_n, b_n) - \frac{I}{\pi} \delta(s - s_0) \delta(t - t_0) (\cos n\psi_0, \sin n\psi_0) = 0 \quad \text{IV-9}$$

Para un solo electrodo de corriente, o un par de electrodos situados sobre la misma línea radial, ψ_0 puede hacerse cero, y las series serán solo series coseno.

En la situación más general el par de electrodos de corriente estará en azimuths arbitrarios con respecto al cuerpo bajo estudio, y la serie seno será incluida también. Las condiciones de frontera serán satisfechas por (a_n, b_n) en la superficie de la tierra, donde el flujo de corriente vertical es cero.

Así, si la normal a la superficie está dado por el vector unitario \hat{n} , entonces.

$$\hat{n} \cdot \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi}{\partial S}, \sigma_{12} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{IV-10}$$

En suma, los coeficientes de Fourier son continuos a través de la frontera de cada región de resistividad diferente y tienden a cero para radios muy grandes.

IV.3. Aplicación del Método del Elemento Finito.

Teniendo en cuenta que solo el método del Elemento Finito utiliza el hecho de que la ecuación diferencial para el potencial eléctrico es exactamente equivalente a la condición para la minimización de una integral de volumen χ . Entonces para nosotros, en trabajos geoelectricos, la integral χ representa la razón de energía de disipación total, que debe ser un mínimo.

Como una alternativa al uso directo de la integral de Energía de disipación, pero de una aproximación más general se utilizará el teorema de Euler del Cálculo variacional desarrollada en el capítulo II de este trabajo.

La función ϕ que toma valores dados a lo largo de alguna porción de la frontera y que hace la integral de volumen.

$$\chi = \int_V f(x_1, x_2, x_3, \phi, \phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{x_3}) dv \quad \text{IV-11}$$

un mínimo, también debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{x_1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{x_2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{x_3}} \right) = 0 \quad \text{IV-12}$$

dentro de la región; sujeto a la condición de frontera

$$\hat{n} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_{x_1}}, \frac{\partial f}{\partial \phi_{x_2}}, \frac{\partial f}{\partial \phi_{x_3}} \right) = 0 \quad \text{IV-13}$$

sobre la porción de la frontera donde ϕ no está definida, \hat{n} es el vector unitario normal a la frontera.

En la ecuación IV-11, f es una función arbitraria, y

$$\phi_{x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad ; \quad i=1,2,3$$

El principio puede ser aplicado a la ecuación diferencial para los coeficientes de Fourier (ecuación IV-9). La aplicación de lo anterior muestra que la función desconocida a_n que hace la integral.

$$\chi = \int_V \left[\frac{1}{2} r^2 \pi \left(\frac{\partial a_n}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \sigma_{zz} \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{n^2 \sqrt{\mu}}{r} a_n^2 + \frac{a_n I}{\pi} \int (s-s_0) \int (t-t_0) \cos n \psi_0 \right] dV, \quad \text{IV-14}$$

un mínimo deberá satisfacer la ecuación diferencial IV-9. Los coeficientes seno de Fourier son determinados por una integral similar donde $\cos n \psi_0$ es reemplazado por $\sin n \psi_0$.

Cuando los ejes principales de conductividad se alejan a lo largo de las direcciones radiales y verticales, y el electrodo de corriente está sobre el eje $\psi = 0$, la integral

$$\chi = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[r \left[\frac{1}{\rho_r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\rho_z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{h^2 \phi^2}{2 \rho_\psi r} + \frac{2I}{\pi} \int (r - r_0) \int (z - z_0) \right] dr dz \quad \text{IV-15}$$

es un mínimo.

Aquí, $\rho_r, \rho_\psi, \rho_z$ son las resistividades en las direcciones r, ψ, z respectivamente.

Para un cuerpo isotrópico, las tres resistividades son iguales. La región de interés, en este caso el plano $(r-z)$, es subdividido en un número grande N de pequeños elementos poligonales, cada cual se asume con propiedades físicas constantes. Cada elemento está definido por un número de puntos ó nodos, y en cada uno de estos nodos las a_n desconocidas se supone tienen un valor a'_n .

La integral χ es primero separada en la suma de las integrales a través de cada elemento.

La integración a través de cada elemento es entonces hecha por interpolación de valores desconocidos dentro del elemento como una función de los valores que ellos toman en los nodos.

Las derivadas $\partial \phi / \partial r, \partial \phi / \partial z$ son evaluadas diferenciando la función interpolada, y así pueden ser expresadas en términos de los valores desconocidos en cada uno de los M nodos:

$$\chi = F [a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_M] \quad \text{IV-16}$$

Hay dos consideraciones hechas para alcanzar esta ecuación de χ :

Primera.- El campo de interés es infinito en extensión, pero es aproximado por un número finito de elementos, de área total finita.

Segunda.- El valor de los desconocidos dentro de cada elemento es aproximado por interpolación.

Como el valor de χ será minimizado, las derivadas parciales con respecto a cada una de las incógnitas deben ser cero, es decir,

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_n} = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots, M \quad \text{IV-17}$$

Esto forma un conjunto de M ecuaciones lineales con las M incógnitas a_n .

Las ecuación IV-17 puede ser escrita en forma matricial como:

$$[T] \{a_n\} = \{s\} \quad \text{IV-18}$$

donde $\{a_n\}$ es el vector de incógnitas, $\{s\}$ aparece de los términos de la fuente en la ecuación III-14 y $[T]$ es la matriz de coeficientes.

La ecuación IV-18 puede ser modificada describiendo el potencial como la suma de un potencial primario ϕ_p , que el potencial producido en un semi-espacio homogéneo y el remanente potencial secundario ϕ_s .

Los coeficientes de Fourier a_n del potencial primario deberán satisfacer la ecuación

$$[T_p] \{a_n\} = \{s\} \quad \text{IV-19}$$

Eliminando $\{S\}$ entre IV-18 y IV-19, la ecuación para los coeficientes de Fourier del potencial pueden ser escritos como:

$$[T] \{a_n - a'_n\} = -[T - T_p] \{a_n\} \quad \text{IV-20}$$

La solución para los coeficientes de Fourier del potencial secundario $\{a_n - a'_n\}$ en cada nodo puede así ser calculado numéricamente resolviendo el conjunto de ecuaciones dadas en la expresión IV-20.

Existe aquí una condición de frontera que es aplicada en el caso de simetría radial, cuando r tienda a cero. Cuando $r=0$, el potencial es independiente de la coordenada ψ y solo el coeficiente de Fourier a_0 no será igual a cero, por tanto la condición adicional.

$$a_n(0, z) = a'_n(0, z) = 0, \quad n = 1, 2 \quad \text{IV-21}$$

Estos coeficientes pueden ser cero durante la determinación de la solución.

La computación numérica de los coeficientes de la ecuación IV-20, puede ser llevada a cabo por el método de Cholesky (ya tratado al final del Capítulo III), ya que la matriz T es particularmente adaptable para los métodos de Cholesky, porque es simétrica y con muchos elementos cero.

Los elementos que no son cero de cualquier región, i están en las columnas, j , para las cuales los correspondientes nodos (n_i, n_j) forman un lado de un elemento.

Una buena elección del número de nodos puede limitar los términos no cero cerca de una banda alrededor de la diagonal.

La propiedad adicional, Dominancia Diagonal, mencionada por Coggon (1971), no está garantizada para cualquier selección de subdivisión de la región dentro de los elementos.

Cuando $n=0$, la dominancia está asegurada si cada elemento es escogido como un triángulo acutángulo.

Para valores mayores de n , la dominancia diagonal es reforzada y la solución es numéricamente más estable.

Conclusiones:

Como se ha podido observar a través de todo el trabajo, el tratamiento ha sido puramente teórico. La solución al problema planteado se ha dado en términos generales, para que al ser estudiada por otra persona se propongan nuevos métodos o formas de resolver el mismo problema.

Se ha hecho hincapié en el sentido de que el Cálculo Variacional es una herramienta matemática que minimiza las funcionales que rigen el comportamiento de los fenómenos físicos. Además con una ampliación pequeña de la teoría variacional, llegamos a los métodos directos del cálculo variacional. A partir de estos métodos en forma natural establecemos el Método de los Elementos Finitos.

Como referencia daré los siguientes pasos para que se pueda aplicar el Método de los Elementos Finitos en cualquier problema de ingeniería:

- a) La región de interés se divide en sub-regiones, denominadas elementos finitos, de formas convenientes (líneas, triángulos, cuadriláteros, hexágonos, etc.)
- b) Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos finitos, denominados nodos, las variables de la ecuación diferencial se aproximan mediante una combinación lineal de funciones de interpolación (que deben ser conocidas), seleccionadas adecuadamente, y de los valores (desconocidos) de las variables, y en algunos casos de sus derivadas.
- c) Mediante el uso de métodos variacionales o de los residuos ponderados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, se transforman en ecuaciones del Elemento Finito que gobiernan, en forma aislada, a todos los elementos finitos.

- d) Los elementos finitos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones algebraicas con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.
- e) Los valores de las variables de las ecuaciones diferenciales quedan definidos al resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

Esta es la forma más general de aplicación del Método Del Elemento Finito, que se ha aplicado a los problemas de Resistividades de Cuerpos Simétricamente Axiales. Pero no solo sirve para este problema y puede ser aplicado en muchos campos de la geofísica.

Finalmente espero que esta tesis sirva como punto de partida para posteriores trabajos donde se involucren las teorías aquí expuestas.

Referencias Bibliográficas:

a): Se refiere al problema inverso y al problema directo, a saber:

Problema directo: A partir del cuerpo en estudio se encuentran los efectos que este produce en la superficie.

Problema inverso: Teniendo los efectos encontrar las características del cuerpo desconocido.

b): Problema inverso.

- Ref. {
- (1) Ver ref. 33 p.p. 24-27.
 - (2) Ver ref. 14 cap. I-II.
 - (3) Ver ref. 25 cap. III
 - (4) Ver ref. 33 cap. III y IV
 - (5) Ver ref. 28 cualquier tratado de Geofisología
 - (6) Ver ref. 25 cap. IV

Bibliografía:

- 1-ANDRELEV, V. B. y Samarski, A.A. - Métodos en diferencias para las Ecuaciones Elípticas.
Editorial MIR-Moscú, 1979.
- 2-ARFKEN, George. - Mathematical Methods for Physicists.
2ª edición, Academic Press International. 1976.
- 3-BATHE, Klaus-Jürgen y Wilson, L. Edward. - Numerical Methods in Finite Element Analysis.
U.S.A., Prentice-Hall, Inc. 1976.
- 4-BIBBY, H. M. - Direct Current Resistivity Modeling for Axially Symmetric Bodies Using The Finite Element Method
Geophysics, Vol 43, N° 3 (April 1978);
pp. 550-562.
- 5-CERVANTES, Beltrán Ramón y Porras, Silva Victor. - Introducción Al Método Del Elemento Finito.
Fac. de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, UNAM. 1979. p.p. 193.
- 6-COGGON, J.H. - Electromagnetic and Electrical Modeling by The Finite Element Method.
Geophysics, Vol 36, N° 1 (February 1971);
P.P. 132-155.
- 7-COURANT, Richard y Robbins Herbert. - ¿Que es la Matemática? Editorial Aguilar, México
5ª edición. 1979, pp. 533.

8. CRAGGS, J.W. - Cálculo de Variaciones. Edit Limusa, México, 1975.
9. DESAI, C.S. y Abel, J.F. - Introduction to The Finite Element Method. Van. Nostrand Reinhold, New York, 1972.
10. ELSGOLTZ, L. - Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial MIR-Mosú, 1979.
11. FENNER, T. Roger. - Finite Element Methods for Engineers. The Macmillan Press L.T.D. Dublin, 1975.
12. GRANT, F.S. y West, G.F. - Interpretation Theory in Applied Geophysics. Mc Graw Hill Book Company, New York, U.S.A, 1965
13. HERRERA, Ismael. - Métodos Variacionales Para Aplicaciones en Ingeniería y Física (Parte 1). Instituto de Ingeniería, UNAM, 1975 p.p. 68
14. IANUBOVSKII, V. Iv. y Liqor, L.L. - Exploración Eléctrica. Traducción Española de la 3ª edición Russa. Edit. Reverte. S.A. España 1980.
15. JANK, T.A. Carl. - Engineering Electromagnetic Fields and Waves. Edit. John Wiley and Sons, 1975.
P.P. 655

16. JORDAN C. Edward y Baiman G. Keith. Electromagnetic Waves and Radiating Systems.
Edt. Prentice-Hall, Inc. U.S.A. 1968
Pp. 823.
17. KOEFOED, Otto. Geosounding Principles Vol. 1, Resistivity Sounding Measurements.
Amsterdam - Oxford - New York. Elsevier
Scientific Publishing, 1979.
18. KRASNOV N. - A. Senov, A. I., Makarenko, G. E. - Calculo Variacional. Edt. MIR - Moscú 1976.
Pp. 182
19. LEBEDEV N. N. - Special Functions and Their Applications.
Edt. Dover New-York, U.S.A. 1972.
20. LEVI, Enzo. Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas.
2ª Ed., Dirección General de Publicaciones UNAM,
México D.F. 1990.
21. MENZEL, H. Donald. Mathematical Physics. Editoral Dover,
New York, USA, 1961
22. MUFTI, R. - Finite-Difference Resistivity Modeling for Arbitrarily Shaped Two-Dimensional Structures. Geophysics Vol. 41 N° 1
(February, 1976) pp. 2-78.
23. ORELLANA, Ernesto. Prospección Geoelectrónica por Método de Corrientes Inducidas. 2ª Ed. Ed. Interscience,
Madrid 1982. pp. 57.

24. ORELLANO, Ernesto. - Prospección Geoelectrica por Campos Variables
1ª Edición. Edit. Paraninfo, Madrid, 1974.
P.P. 570.
25. PASTOR, Rey J., Calleja, Pi P. y Trejo, C.A. - Análisis Matemático
Vol. III 3ª Ed., Editorial
Kapelus, Buenos Aires, 1961. pp. 718.
26. PATRA, H.P. - Geosounding Principles Vol. 2. Time-
Varying Geoelectric Soundings.
Amsterdam - Oxford - New York. Elsevier
Scientific Publishing, 1980.
27. RUKOS, Eduardo. - Continuous Finite Elements.
Instituto de Ingeniería UNAM.
1975. pp. 42.
28. SHERIFF, E. Robert. - Encyclopedia Dictionary of
Exploration Geophysics. 2ª Reim-
presión. Society of Exploration Geo-
physicists. Tulsa, Oklahoma. 1974
29. SOKOLNIKOFF, I.S. y Redheffer, R.M. - Mathematics
of Physics and Modern Engineering
2ª Ed. Mc Graw-Hill Kogakusha, 1958.
30. TELFORD W.M., Geldart; Sheriff y Keys. - Applied
Geophysics. 3ª Reimpresión. Cam-
bridge University Press. Cambridge
1980.
31. TOLSTOV, P. Georgi. - Fourier Series. Part. 1.
New York USA, 1976.

32. VALLIAPAN S. - Finite Element Method Theory and Application. Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado UNAM. 1979. pp. 115.
33. VAN NOSTRAND, R. G. y Cook, K. L. - Interpretation of Resistivity Data, USGS Prof. Paper 449, 1965.
34. WEINBERGER, F. Hans. - Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. 3ª Edición, Edit. Reverte, España, 1979.
35. ZIENKIEWICZ, O. C. - The Finite Element Method. 3ª Edición. Mc Graw - Hill Book Company (UK) Limited 1977.