

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA



SIMULACION NUMERICA DE YACIMIENTOS
DE COMPOSICION VARIABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A

JOSE ROMAN ISLAS RODRIGUEZ

MEXICO, D. F.

1979

24
10



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

	RESUMEN	Página
I.	INTRODUCCION	1
II.	REVISION BIBLIOGRAFICA	3
III.	METODOS PARA LA PREDICCION DE YACIMIENTOS DE COMPOSICION VARIABLE.	9
IV.	MODELO MATEMATICO	12
V.	MODELO DE DIFERENCIAS FINITAS	32
VI.	DISCUSION Y CONCLUSIONES	45
VII.	NOMENCLATURA	48
VIII.	FIGURAS Y GRAFICAS	51
IX.	APENDICE A	61
X.	APENDICE B	66
XI.	BIBLIOGRAFIA	68

INDICE DE FIGURAS

1	Diagrama de fases de una mezcla de hidrocarburos	51
1'	Elemento de volumen para la obtención de la ecuación de continuidad para flujo radial.	52
2	Representación geométrica del sistema	53
3	Modelo de celda del medio poroso	54
4	Esquema de diferencias finitas usando	55
5	Densidad de líquido <u>vs</u> presión	56
6	Densidad de gas <u>vs</u> presión	56
7	Viscosidad del gas <u>vs</u> presión	57
8	Presión <u>vs</u> tiempo	57
9	Permeabilidad <u>vs</u> saturación	58
10	Extracción de líquido <u>vs</u> tiempo	58
11	Composición de las fases a 200°F para una mezcla de hidrocarburos	59
12	Influencia de la presión sobre la composición de una mezcla a temperatura constante	60

RESUMEN

En este trabajo se obtuvo el modelo matemático que permite describir el movimiento de los fluidos en los yacimientos de composición variable en las cercanías de uno de sus pozos, el modelo fue realizado con el fin de crear un simulador numérico que represente el flujo de fluidos en estos yacimientos, susceptible de ser utilizado en el análisis e interpretación de pruebas de presión.

Para la obtención de este modelo matemático se emplearon los principios físicos que gobiernan el flujo de fluidos en medios porosos en un sistema coordenado (r, z, t) por considerarse el sistema más conveniente en la descripción de este problema.

INTRODUCCION

Con el advenimiento de perforaciones profundas en el Sureste de México, han sido descubiertos nuevos yacimientos de gas y aceite a altas presiones con propiedades en su composición, diferentes de aquellos yacimientos anteriormente encontrados, lo cual ha dado lugar al desarrollo de nuevas técnicas de simulación de yacimientos, que contemplen o simulen su comportamiento al ser sometidos a diferentes programas de explotación.

El fluido de estos yacimientos está compuesto por una mezcla de hidrocarburos, en las cuales se tiene la presencia de aceite volátil y gas condensado, este tipo de fluidos se les ha dado el nombre de fluidos de "composición variable" y los yacimientos donde se encuentran reciben el nombre de "yacimientos de composición variable". La figura 1, muestra un diagrama de fases de presión-temperatura de una mezcla de hidrocarburos.

En estos yacimientos de composición variable existe considerable transferencia de masa entre las fases. Esta transferencia de masa complica el estudio de los ya de por sí sistemas de hidrocarburos complejos, por lo que debe hacerse un balance de masa para cada componente o fracción fluuyente en vez de cada fase. Es común que en los yacimientos existan varios componentes de hidrocarburos, estos componentes varían en concentración en las diferentes fases, y cada fase fluye con gasto diferente.

Dada la frecuencia con que se presentan estos yacimientos petrolíferos en nuestro País, se considera conveniente desarrollar un modelo matemático que describa este proceso, la disponibilidad de un modelo de esta naturaleza, puede facilitar la predicción del comportamiento de estos yacimientos bajo diversos regímenes de producción. En esta forma el modelo viene a ser un instrumento que puede ser empleado para programar el desarrollo de yacimientos.

Los objetivos principales del presente estudio son los de obtener las ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo radial de dos fases (líquido-vapor), en dos dimensiones (r, z), con transferencia de masa entre las fases y a través de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que se obtengan desarrollar un simulador numérico que represente el flujo de fluidos en yacimientos de composición variable, susceptible de ser utilizado en el análisis e interpretación de pruebas de presión.

REVISION BIBLIOGRAFICA

El mecanismo de flujo de dos fases de sistemas de hidrocarburos en medios porosos, con transferencia de masa entre las fases fluyendo, es altamente complejo. Desde los inicios de la explotación petrolera se ha percibido que los procesos de producción de composición variable implicaban flujo con transferencia de hidrocarburos entre las fases.

El primer intento para formular el problema de producción de un yacimiento de estas características, fue el empleo del método de balance de materia, en el se considera el yacimiento como un todo y su comportamiento para un tiempo dado se lleva a cabo utilizando valores promedio de presión, saturación y composición. Esto es lo que se conoce con el nombre de modelo en dimensión cero.

El siguiente paso fue marcado por la consideración de presiones y saturaciones variables en el yacimiento ya no se consideró como un todo o un recipiente con una presión y saturación promedio, sino que tanto la presión como la saturación se consideran como funciones de tiempo y posición en el yacimiento.

En 1934, West, Carvin y Sheldon¹ combinando la Ley de Darcy y la ecuación de continuidad, incluyeron compresibilidad, capilaridad y gravedad. Su modelo matemático consistió en dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden.

Los coeficientes en las ecuaciones únicamente fueron funciones

de presión y saturación aunque las ecuaciones obtenidas incluían capilaridad y gravedad, estos términos resultaron despreciables de resolver cuando las ecuaciones fueron resueltas por técnicas numéricas. El autor substituyó las derivadas por aproximaciones en diferencias finitas. Así, las ecuaciones diferenciales parciales fueron reducidas a un conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales y resueltas por el método de Newton. Se probó el método de solución con sistemas radiales y lineales.

Stono y Garder resolvieron en 1961 las ecuaciones diferenciales parciales que describen el desplazamiento de aceite por gas en una dimensión. La presión capilar y la gravedad se consideraron despreciables, y las propiedades de los fluidos se supusieron que eran función de la presión únicamente. Los autores combinaron las dos ecuaciones diferenciales parciales para eliminar derivadas en el tiempo de la saturación. Así la solución de las dos ecuaciones se dividió en dos etapas:

PRIMERA: Solución de la Ecuación de la Presión

SEGUNDA: Solución de la Ecuación de la Saturación

Los coeficientes, como función de la saturación, fueron evaluados en el extremo superior de todo el intervalo espacial.

Para representar con mayor fidelidad el problema físico en el modelo matemático, se incluyó la transferencia de masa entre las fases fluyentes.

Los primeros intentos para incluir la transferencia de masa entre las fases, se hizo en modelos de dimensión cero.

El procedimiento consistió esencialmente en calcular el balance de materia usando coeficientes de equilibrio (valores K).

Collins(2), en 1961 consideró el problema de flujo con cambio de fase, formuló el proceso de empuje de gas en solución en la forma de tres ecuaciones básicas: Una ecuación diferencial parcial combinando flujo y balance de materia, una ecuación de concentración y una ecuación de saturación. No discutió como se podría resolver este sistema de ecuaciones.

Taylor(3), en 1966, resolvió las ecuaciones de Collins² para yacimientos de aceite volátil, consideró los fluidos del yacimiento como un sistema ternario de hidrocarburos. El modelo empleado desprecia los efectos de gravedad y supone equilibrio entre las fases. El trabajo se limitó al estudio de un sistema lineal. El autor resolvió por medio de diferencias finitas el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que obtuvo, usó un método numérico explícito para las ecuaciones de tipo hiperbólico y un método implícito para la ecuación tipo parabólica, tratando las ecuaciones como si fuesen independientes.

Se fijó una restricción en el paso de tiempo a fin de asegurar la estabilidad en el esquema explícito. Así, Taylor resolvió primero la ecuación para la presión implícitamente y entonces resolvió explícitamente para las saturaciones y composiciones. Se recalcularon los coeficientes y se discutieron los efectos de estos procedimientos.

La variación espacial de la composición de los fluidos en yacimientos de aceite volátil durante la explotación fue estudiada por Mc Farlane(4), en 1966. El consideró condiciones de flujo no estaciona

rias para dos fases fluyendo en yacimientos sometidos a inyección de gas. El autor supuso un medio poroso lineal y despreció efectos de gravedad y presión capilar.

La ecuación usada para la presión fue una ecuación diferencial parabólica no-lineal de segundo orden. El autor substituyó la ecuación diferencial por una ecuación de diferencias finitas, usando un esquema de Crank-Nicolson.

Las ecuaciones para la saturación se resolvieron explícitamente, y los coeficientes se evaluaron con datos del paso del tiempo anterior; el modelo se probó con datos de campo y datos de laboratorio.

Price y Donohue⁽⁷⁾ en 1967, investigaron el proceso de desplazamiento isotérmico con transferencia de masa en la interfase. Los autores usaron las ecuaciones de Collins, considerando un sistema ternario de hidrocarburos.

Se resolvieron las ecuaciones diferenciales parciales numéricamente, usando aproximaciones implícitas de diferencias finitas. Los autores estudiaron la condensación del gas y el empuje del gas disuelto. Las constantes de equilibrio (valores k), se consideraron como función de la composición por medio del uso de una presión de convergencia variable. Los autores reportaron ausencia del cambio de sensibilidad del mecanismo simulado, y concluyeron que todos los efectos habían sido eliminados por la suposición de equilibrio continuo entre las fases.

Culham⁽⁶⁾ en 1968, realizó una simulación experimental y numérica del flujo de dos fases con transferencia de masa entre las fases.

Considero flujo en una y dos dimensiones. Los efectos capilares y de difusión se consideraron despreciables y se supuso la existencia de equilibrio termodinámico para todo tiempo. El sistema resuelto consistió en dos ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales de segundo orden.

El sistema de hidrocarburos se dividió en dos componentes, se consideró que las constantes de equilibrio no dependen de la presión.

Para el modelo unidimensional el autor empleó un esquema de diferencias finitas el que consistió en una modificación del esquema de Crank-Nicolson.

Los coeficientes de las ecuaciones se determinaron por medio de valores promedio de espacio y tiempo. La permeabilidades relativas fueron evaluadas en el extremo superior del intervalo espacial.

En el caso del modelo bidimensional, el autor considera que la permeabilidad absoluta es función de la localización en el yacimiento. El modelo fue desarrollado para un pozo en el centro del yacimiento.

Consideró así el autor que bajo condiciones de equilibrio, los efectos del gasto no deben ser esperados.

Roebuck, Henderson, Douglas y Ford⁽⁷⁾ en 1968 reportaron los resultados de un estudio de simulación composicional de yacimientos. El modelo fue desarrollado por un sistema lineal.

Las presiones fueron obtenidas implícitamente, y las saturaciones explícitamente. El modelo fue probado usando datos experimentales para un sistema binario.

Snyder⁽⁸⁾ en 1969, desarrolló un modelo bidimensional para dos fases parcialmente miscibles. Las presiones y las saturaciones fueron obtenidas implícitamente usando un procedimiento de iteración Newtoniana. Se supuso la existencia de dos componentes en el yacimiento aceite y gas. La solubilidad del gas en el líquido se consideró solamente como función de la presión. Los resultados del modelo fueron comparados con resultados experimentales para un sistema lineal.

MÉTODOS PARA LA PREDICCIÓN DE YACIMIENTOS DE COMPOSICIÓN VARIABLE

La simulación de yacimientos tiene como objetivo el de predecir el comportamiento de un yacimiento de hidrocarburos bajo diversas condiciones de producción.

Anteriormente la simulación trataba a los yacimientos en forma global, con propiedades homogéneas y valores promedio de presión y saturación de todo el yacimiento. Cualquier cambio en el yacimiento se supone que es instantáneo y uniforme, y su comportamiento es determinado por la aplicación de las leyes físicas y principios termodinámicos que gobiernan el flujo en medios porosos.

Actualmente la simulación de yacimientos considera el yacimiento como un conjunto de bloques individuales, cada uno de los cuales puede tener propiedades diferentes. Sin embargo estos bloques no son independientes a causa de la continuidad de flujo entre ellos. El comportamiento de este sistema complejo es determinado por el comportamiento simultáneo de sus partes.

El planteamiento matemático es obtenido a partir de los siguientes principios físicos:

- a) Principio de conservación de masa.
- b) Ley de Darcy.

c) Ecuación de estado.

MÉTODOS PARA LA PREDICCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS.

Los métodos que simulan el comportamiento de yacimientos pueden ser clasificados como:

1.- Método de curvas de declinación.

2.- Métodos volumétricos.

3.- Métodos de balance de materia.

a) Balance global.

b) Balance fraccional (métodos composicionales).

Los métodos más conocidos de predicción del comportamiento de yacimientos son los de balance de materia, cuya utilidad prevalece pese a la existencia de nuevas técnicas de cálculo, ya que estos proporcionan información del yacimiento en forma general, y de gran utilidad en muchas circunstancias.

El uso de la ecuación de balance de materia para realizar estudios de predicción fue, cuando las computadoras no tenían el auge y perfeccionamiento actual.

Turner, Tracy, Muskat y Piraon presentaron variantes del método de balance de materia cuyas diferencias estriban únicamente en cuanto al arreglo algebraico de la ecuación o a la forma de su presentación, con el fin de evitar hasta lo posible lo tedioso y repetitivo de los

cálculos. Estos métodos fijan la *presión para obtener como respuesta en el futuro, la producción de fluidos del yacimiento.

La aplicación del balance fraccional o composicional es más laboriosa que la del global, y está encaminada específicamente para aquellos sistemas donde se tiene transferencia de masa. Este balance ha sido usado también en la explotación por empuje de gas disuelto con buenos resultados.

Con el uso de la computadora digital se ha incrementado en la industria petrolera el uso del balance fraccional para los yacimientos en que la composición de los fluidos varía en forma importante durante su explotación. A estos yacimientos se les ha llamado yacimientos de composición variable.

Los métodos volumétricos suponen que el fluido del yacimiento está formado por dos pseudocomponentes (aceite y gas), y que la relación volumétrica y propiedades físicas de aceite y gas son funciones únicamente de la presión de fase.

El proceso de explotación por empuje de gas disuelto en yacimientos de aceite puede ser estudiado por estos simuladores obteniéndose pe queños errores. Por el contrario, la simulación será totalmente errónea cuando la transferencia de masa entre las fases sea determinante.

*Debe considerarse la presión como el parámetro más delicado a manejar en los cálculos de predicción.

MODELO MATEMATICO

El fenómeno de flujo de fluidos de composición variable de dos fases en dos dimensiones puede describirse por una ecuación diferencial no lineal, la cual se obtendrá en este trabajo.

Considerando un medio poroso en el cual están presentes "N" componentes, y dos fases (líquido-gas), las fracciones Mol de las componentes estará dado por:

$$X_i = \frac{C_{il}}{C_l} = \frac{C_{il}}{C_{1l} + C_{2l} + \dots + C_{nl}} \quad (1)$$

$$Y_i = \frac{C_{iv}}{C_v} = \frac{C_{iv}}{C_{1v} + C_{2v} + \dots + C_{nv}} \quad (2)$$

$$Z_i = \frac{C_i}{C} = \frac{C_i}{C_1 + C_2 + \dots + C_n} \quad (3)$$

* Ver nomenclatura al final.

Donde:

$$C_i = C_{il} S_l + C_{iv} S_v \quad (4)$$

y

$$C = C_l S_l + C_v S_v \quad (5)$$

Usando densidades y pesos moleculares

$$C_l = \rho_l / M_l \quad (6)$$

$$C_v = \rho_v / M_v \quad (7)$$

Se tiene que la suma de las fracciones mole de las componentes debe de ser igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1.0 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_i = 1.0 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N Z_i = 1.0 \quad (10)$$

Las constantes de equilibrio (K) entre las fases líquida y vapor se definen en la forma siguiente:

$$K_i = \frac{Y_i}{X_i} \quad (11)$$

Estableciendo un balance molar se obtiene:

$$X_i = \frac{Z_i}{\frac{n_v(K_i-1)}{n} + 1} \quad (12)$$

$$Y_i = \frac{K_i Z_i}{\frac{n_v(K_i-1)}{n} + 1} \quad (13)$$

Usando las ecuaciones (12) y (13) las ecuaciones (8) y (9) serían:

$$\sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{\frac{n_v(K_i-1)}{n} + 1} = 1.0 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{K_i Z_i}{\frac{n_v(K_i-1)}{n} + 1} = 1.0 \quad (15)$$

VELOCIDAD MASA PROMEDIO DE VARIAS COMPONENTES, EN MEZCLAS DIFUSIVAS, QUE CONTIENEN VARIAS COMPONENTES QUIMICAS QUE SE MUEVEN A DIFERENTES VELOCIDADES.

Para una mezcla en una sola fase (vapor, líquido o sólido), en la que la velocidad de la componente "i" con respecto a un eje fijo está dada por V_i , su velocidad másica promedio local se puede definir en la forma siguiente

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i V_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} \quad (16)$$

Donde:

ρ_i = densidad de la i-esima componente

El flujo molar de la componente "i" relativa a un eje fijo está dada por:

$$N_i = C_i V_i \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17) se aplican a mezclas en una sola fase. Por lo tanto, estas pueden ser usadas para cualquiera de las fases líquida o gas.

A continuación, se hace un balance molar para la componente "i" en un volumen elemental fijo a través del cual está fluyendo un fluido en dos fases (Fig. 1).

En este trabajo se considera flujo únicamente en las direcciones r y Z entonces estableciendo un balance de masa en este elemento se obtiene que:

Masa que entra en el volumen de control en Δt = masa que
entra en r, Δt + masa que entra en Z, Δt + masa inyectada
v.c. Δt

MOLES QUE ENTRAN EN LA UNIDAD
DE VOLUMEN A TRAVÉS DE "r"
POR UNIDAD DE TIEMPO. = $r\Delta\theta\Delta Z \left[(N_{il})_r + (N_{iv})_r \right]_r$

MOLES QUE SALEN EN LA UNIDAD
DE VOLUMEN A TRAVÉS DE "r+ Δr "
POR UNIDAD DE TIEMPO. = $\Delta\theta(r+\Delta r)\Delta Z \left[(N_{il})_{r+\Delta r} + (N_{iv})_{r+\Delta r} \right]_{r+\Delta r}$

FLUJO NETO DE MOLES EN LA DIRECCION DE "r" POR UNIDAD DE TIEMPO.	MOLES QUE ENTRAN A TRAVÉS DE LA CARA DE "r" POR UNIDAD DE TIEMPO	MOLES QUE SALEN A TRAVÉS DE LA CARA DE "r+ Δr " POR UNIDAD DE TIEMPO
--	--	---

Por lo tanto

FLUJO NETO DE MOLES EN LA
DIRECCION DE "r" POR UNIDAD
DE TIEMPO = $\Delta\theta\Delta Z \left\{ r \left[(N_{il})_r + (N_{iv})_r \right]_r - (r+\Delta r) \left[(N_{il})_{r+\Delta r} + (N_{iv})_{r+\Delta r} \right]_{r+\Delta r} \right\}$

En la misma forma para la dirección "Z"

FLUJO NETO DE MOLES EN LA
DIRECCION DE "Z" POR UNIDAD
DE TIEMPO = $r\Delta r\Delta\theta \left\{ \left[(N_{il})_z + (N_{iv})_z \right]_z - \left[(N_{il})_{z+\Delta z} + (N_{iv})_{z+\Delta z} \right]_{z+\Delta z} \right\}$

También

VOLUMEN POROSO DEL
VOLUMEN ELEMENTAL = $\phi r \Delta r \Delta \theta \Delta z$
(FIG. 1')

EL NUMERO TOTAL DE MOLES DE LA i -ESIMA COMPONENTE POR
UNIDAD DE VOLUMEN = $C_i = C_{il} S_l + C_{iv} S_v$

Por lo tanto

El número total de moles del i -ésimo componente en el elemento de volumen de la Fig. (1') es igual a:

= Volumen X Moles/unidad de volumen

$$= \phi r \Delta r \Delta \theta \Delta z (C_{il} S_l + C_{iv} S_v)$$

LA VELOCIDAD DE ACUMULACION
DEL i -ESIMO COMPONENTE EN
EL ELEMENTO DE VOLUMEN (FIG. 1') = $\phi r \Delta r \Delta \theta \frac{\Delta z}{\Delta t} (C_{il} S_l + C_{iv} S_v)$ (18)

Si hay fuentes o sumideros localizados en el elemento de volumen, un término es añadido a la ecuación (18) como sigue:

El gasto volumétrico molar representa una fuente o un sumidero = $\pm Q_i$

El gasto molar se obtiene multiplicando el gasto volumétrico o molar real (moles/tiempo) por el volumen elemental.

Todos los términos en la ecuación (18) tienen unidades de moles/tiempo; entonces el gasto molar por una fuente o sumidero es convertido a las unidades convenientes.

GASTO MOLAR PARA UNA
FUENTE O UN SUMIDERO = $\pm Q_i \Delta r \Delta \theta \Delta z r$

Entonces el balance total de masa en la i -ésima componente da las ecuaciones siguientes: (considerando las tres direcciones r , θ , Z)

$$\begin{aligned} & \Delta\theta\Delta Z \left\{ r \left| (N_{il})_r + (N_{iv})_r \right|_r - (r+\Delta r) \left| (N_{il})_r + (N_{iv})_r \right|_{r+\Delta r} \right\} + \Delta r\Delta Z \left\{ \left| (N_{il})_\theta \right. \right. \\ & \left. \left. + (N_{iv})_\theta \right|_\theta - \left| (N_{il})_\theta + (N_{iv})_\theta \right|_{\theta+\Delta\theta} \right\} + r\Delta r\Delta\theta \left\{ \left| (N_{il})_Z + (N_{iv})_Z \right|_Z - \left| (N_{il})_Z \right. \right. \\ & \left. \left. + (N_{iv})_Z \right|_{Z+\Delta Z} \right\} \pm Q_i r\Delta r\Delta\theta\Delta Z = \phi r\Delta r\Delta\theta\Delta Z \frac{\partial}{\partial t} (C_{il} S_\ell + C_{iv} S_v) \end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación (19) por $r\Delta r\Delta\theta\Delta Z$ y cambiando signo obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \frac{(r+\Delta r) \left| (N_{il})_r + (N_{iv})_r \right|_{r+\Delta r} + r \left| (N_{il})_r + (N_{iv})_r \right|_r}{\Delta r} \\ & - \frac{\left| (N_{il})_\theta + (N_{iv})_\theta \right|_{\theta+\Delta\theta} + \left| (N_{il})_\theta + (N_{iv})_\theta \right|_\theta}{\Delta\theta} \\ & - \frac{r \left| (N_{il})_Z + (N_{iv})_Z \right|_{Z+\Delta Z} + r \left| (N_{il})_Z + (N_{iv})_Z \right|_Z}{\Delta Z} \\ & \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} (C_{il} S_\ell + C_{iv} S_v) \end{aligned} \quad (20)$$

Tomando límites en la ecuación (20) conforme Δr , $\Delta\theta$, ΔZ y Δt tienden a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left| r(N_{il}) + (N_{iv}) \right| + \frac{\partial}{\partial\theta} \left| (N_{il}) + (N_{iv}) \right| + \frac{\partial}{\partial Z} \left[r \left| (N_{il})_Z + (N_{iv})_Z \right| \right] \right\} \pm Q_i \\ & = \phi \frac{\partial}{\partial t} |C_{il} S_\ell + C_{iv} S_v| \end{aligned} \quad (21)$$

Por medio de la definición de divergencias

$$\text{DIV. } \bar{A} = \nabla \cdot A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} |r(A_r)| + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} |A_\theta| + \frac{\partial}{\partial z} |rA_z|$$

La ecuación (21) puede escribirse en forma general para cualquier sistema de ejes coordenados, empleando notación vectorial:

$$-\nabla \cdot (N_{il} + N_{iv}) + Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} |C_{il} S_l + C_{iv} S_v| \quad (22)$$

De la ecuación (17)

$$N_i = C_i V_i$$

$$N_{il} = C_{il} V_{il} \quad (23)$$

$$N_{iv} = C_{iv} V_{iv} \quad (24)$$

Se tiene que:

$$C_{il} = X_i C_l \quad (25)$$

y

$$C_{iv} = Y_i C_v \quad (26)$$

Por lo tanto substituyendo en las ecuaciones (23) y (24) las ecuaciones (25) y (26), se obtiene:

$$N_{il} = X_i C_l V_{il} \quad (27)$$

$$N_{iv} = Y_i C_v V_{iv} \quad (28)$$

Substituyendo las ecuaciones (25), (26), (27) y (28) en la ecuación

(22):

$$- \nabla \cdot (X_i C_L V_{iL} + Y_i C_V V_{iV}) \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} |X_i C_L S_L + Y_i C_V S_V| \quad (29)$$

Esta ecuación (29) se aplica a cada componente i . La suposición hecha es que el movimiento de la i -ésima componente de un poro al siguiente es por movimiento volumétrico más q' por difusión.

Esta suposición de difusión molecular cero implica que la velocidad de cada componente i (V_i) es la misma que la velocidad másica promedio de cada fase. O sea;

$$V_{iL} = V_L \quad (30)$$

$$V_{iV} = V_V \quad (31)$$

Entonces substituyendo las ecuaciones (30) y (31) en la ecuación (29) tenemos que:

$$- \nabla \cdot (X_i C_L V_L + Y_i C_V V_V) \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} |X_i C_L S_L + Y_i C_V S_V| \quad (32)$$

A partir de la ecuación 11 se obtiene:

$$Y_i = X_i K_i \quad (33)$$

Substituyendo la ecuación (33) en la ecuación (32):

$$- \nabla \cdot (X_i C_L V_L + X_i K_i C_V V_V) \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} |X_i C_L S_L + K_i X_i C_V S_V|$$

Factorizando a X_i en esta expresión:

$$- \nabla \cdot |X_i (C_L V_L + K_i C_V V_V)| \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} |X_i (C_L S_L + K_i C_V S_V)| \quad (34)$$

Las velocidades para ambas fases pueden obtenerse por medio de la Ley de Darcy. Entonces despreciando la presión capilar, las velocidades estarán dadas por:

$$v_L = - \frac{k_L}{\mu_L} \nabla(P + \rho_L gZ) \quad (35)$$

$$v_V = - \frac{k_V}{\mu_V} \nabla(P + \rho_V gZ) \quad (36)$$

Substituyendo las ecuaciones (35) y (36) en la ecuación (34) obtenemos que:

$$\begin{aligned} & - \nabla \cdot \left\{ x_i \left[C_L \left(- \frac{k_L}{\mu_L} \nabla(P + \rho_L gZ) \right) + K_i C_V \left(- \frac{k_V}{\mu_V} \nabla(P + \rho_V gZ) \right) \right] \right\} \pm Q_i \\ & = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left[x_i (C_L S_L + K_i C_V S_V) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Donde:

k = coeficiente de permeabilidad

K = constante de equilibrio

ρ_L = densidad de la fase líquida que se define como:

$$\rho = \rho_0 C^{C(P-P_0)}$$

(Para fluidos de compresibilidad constante)

ρ_0, P_0 = de referencia (38)

ρ_V = densidad de la fase vapor que se define como:

$$\rho_V = \frac{M}{RT} \frac{P}{Z(P)} \quad (39)$$

Substituyendo las ecuaciones (6) y (7) en la ecuación (37), se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ X_i \left| \frac{\rho_\ell}{M_\ell} \left(\frac{k_\ell}{\mu_\ell} \nabla(p + \rho_\ell gZ) \right) + K_i \frac{\rho_v}{M_v} \left(\frac{k_v}{\mu_v} \nabla(p + \rho_v gZ) \right) \right| \right\} \pm Q_i \\ = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left| X_i \left(\frac{\rho_\ell S_\ell}{M_\ell} + K_i \frac{\rho_v S_v}{M_v} \right) \right| \end{aligned}$$

Esta última ecuación también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ X_i \left| \frac{\rho_\ell k_\ell}{M_\ell \mu_\ell} \nabla(p + \rho_\ell gZ) + K_i \frac{\rho_v k_v}{M_v \mu_v} \nabla(p + \rho_v gZ) \right| \right\} \pm Q_i \\ = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left| X_i \left(\frac{\rho_\ell S_\ell}{M_\ell} + K_i \frac{\rho_v S_v}{M_v} \right) \right| \quad (40) \end{aligned}$$

Si consideramos flujo radial en Y, Z, la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r X_i \left| \frac{\rho_\ell k_\ell}{M_\ell \mu_\ell} \frac{\partial}{\partial r} (p + \rho_\ell gZ) + K_i \frac{\rho_v k_v}{M_v \mu_v} \frac{\partial}{\partial r} (p + \rho_v gZ) \right| \right\} + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ X_i \left| \frac{\rho_\ell k_\ell}{M_\ell \mu_\ell} \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho_\ell gZ) + K_i \frac{\rho_v k_v}{M_v \mu_v} \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho_v gZ) \right| \right\} \pm Q_i \\ = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left| X_i \left(\frac{\rho_\ell S_\ell}{M_\ell} + K_i \frac{\rho_v S_v}{M_v} \right) \right| \quad (41) \end{aligned}$$

La ecuación (41), es la ecuación diferencial parcial no lineal que relaciona presiones, saturaciones y composición con respecto al tiempo, en un sistema de dos dimensiones considerando flujo de dos fases con transferencia de masa. En el desarrollo de la ecuación (41) se hicieron las siguientes consideraciones:

- 1.- Existe equilibrio termodinámico entre las fases.
- 2.- El flujo es radial (r, z)
- 3.- No existen efectos capilares.
- 4.- Existen efectos de gravedad.
- 5.- No existen efectos de difusión.
- 6.- La porosidad y permeabilidad son uniformes.
- 7.- El flujo es isotérmico.

Para generalizar la solución de este problema es conveniente escribir la ecuación (41) en forma adimensional para lo cual se define:

$$\hat{v}_L = \frac{M_L}{\rho_L} \quad (42)$$

$$\hat{v}_V = \frac{M_V}{\rho_V} \quad (43)$$

Substituyendo las ecuaciones (42) y (43) en la ecuación (40), se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ x_i \left[\frac{k_L}{v_L \mu_L} \nabla(p + \rho_L gZ) + K_i \frac{k_V}{v_V \mu_V} \nabla(p + \rho_V gZ) \right] \right\} \pm Q_i \\ = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left[x_i \left(\frac{S_L}{v_L} + \frac{K_i S_V}{v_V} \right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

Adicionalmente se definen los grupos adimensionales siguientes:

$$P = p/p_0 \quad (45)$$

$$v_L^* = \hat{v}_L/v_0 \quad (46)$$

$$\hat{V}_v^* = \hat{V}_v / \hat{V}_o \quad (47)$$

$$\mu_\ell^* = \mu_\ell / \mu_o \quad (48)$$

$$\mu_v^* = \mu_v / \mu_o \quad (49)$$

$$k_{r\ell} = \frac{k_\ell}{k} \quad (50)$$

$$k_{rv} = \frac{k_v}{k} \quad (51)$$

$$\rho_{r\ell} = \frac{\rho_\ell}{\rho_o} \quad (52)$$

$$\rho_{rv} = \frac{\rho_v}{\rho_o} \quad (53)$$

$$z^* = \frac{z}{z_o} \quad (53')$$

$$s_r = \frac{s}{s_o} \quad (54)$$

La divergencia para coordenadas r, z puede escribirse en la forma siguiente :

$$\nabla \cdot | | = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} |r()| + \frac{\partial}{\partial z} | |$$

Se define:

$$\nabla^* = L\nabla$$

Así mismo:

$$\nabla^* |\nabla^*| = LV |LV| = L^2 \nabla^2 \quad (55)$$

Substituyendo las ecuaciones (45) a (55) en la ecuación (44) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla^*}{L} \cdot \left\{ X_i \left| \frac{k k_{r\ell}}{\hat{v}_\ell^* \hat{v}_o^* \mu_\ell^* \mu_o} \frac{\nabla^*}{L} (P_{p_o} + \rho_{r\ell} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{K_i k_{rv} k}{\hat{v}_v^* \hat{v}_o^* \mu_v^* \mu_o} \frac{\nabla^*}{L} (P_{p_o} + \rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) \right| \right\} \\ & \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left| X_i \left(\frac{S}{\hat{v}_\ell^* \hat{v}_o^*} + \frac{K_i S_v}{\hat{v}_v^* \hat{v}_o^*} \right) \right| \quad (56) \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\mu_o \hat{v}_o^* L^2} \left\{ \nabla^* \cdot X_i \left(\frac{k_{r\ell}}{\hat{v}_\ell^* \mu_\ell^*} \nabla^* (P_{p_o} + \rho_r \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) \right) \right. \\ & \left. + \frac{K_i k_{rv}}{\hat{v}_v^* \mu_v^*} \nabla^* (P_{p_o} + \rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) \right\} \\ & \pm Q_i = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left| X_i \left(\frac{S_\ell}{\hat{v}_\ell^*} + \frac{K_i S_v}{\hat{v}_v^*} \right) \frac{1}{\hat{v}_o^*} \right| \quad (57) \end{aligned}$$

Si esta ecuación es dividida por $\frac{k}{\hat{v}_o^* \mu_o L^2}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} & \nabla^* \cdot X_i \left(\frac{k_{r\ell}}{\hat{v}_\ell^* \mu_\ell^*} \nabla^* (P_{p_o} + \rho_{r\ell} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) + \frac{K_i k_{rv}}{\hat{v}_v^* \mu_v^*} \right. \\ & \left. (P_{p_o} + \rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) \right) \pm \frac{Q_i \hat{v}_o^* L^2 \mu_o}{k} \\ & = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left| X_i \left(\frac{S_\ell}{\hat{v}_\ell^*} + \frac{K_i S_v}{\hat{v}_v^*} \right) \frac{L^2 \mu_o}{k} \right| \quad (58) \end{aligned}$$

Con el objeto de permitir que la permeabilidad sea función de la localización en el yacimiento, se define una permeabilidad absoluta adimensional de la forma siguiente :

$$\bar{k} = \frac{k}{k_{MAX}} \quad (59)$$

Multiplicando la ecuación 58 por \bar{k} se obtiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} & \nabla^* \cdot \left[X_i \left(\frac{\bar{k} k_{r\ell}}{V_\ell^* \mu_\ell^*} \nabla^* (P_{p_0} + \rho_{r\ell} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) + \frac{K_i \bar{k} k_{rv}}{V_v^* \mu_v^*} \nabla^* (P_{p_0} + \rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o) \right) \right] \\ & + Q_i \frac{\hat{V}_o \mu_o L^2}{k_{MAX}} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left[X_i \left(\frac{S_\ell}{V_\ell^*} + K_i \frac{S_v}{V_v^*} \right) \right] \frac{\mu_o L^2}{k_{MAX}} \quad (60) \end{aligned}$$

Si dividimos la expresión anterior por "p_o" con el objeto de definir otros grupos adimensionales se obtiene:

$$\begin{aligned} & \nabla^* \cdot \left[X_i \left(\frac{\bar{k} k_{r\ell}}{V_\ell^* \mu_\ell^*} \nabla^* \left(P + \frac{\rho_{r\ell} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o}{p_o} + \frac{K_i \bar{k} k_{rv}}{V_v^* \mu_v^*} \nabla^* \left(P + \frac{\rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o}{p_o} \right) \right) \right) \right] \\ & + Q_i \frac{\hat{V}_o \mu_o L^2}{k_{MAX} p_o} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left[X_i \left(\frac{S_\ell}{V_\ell^*} + K_i \frac{S_v}{V_v^*} \right) \right] \frac{\mu_o L^2}{k_{MAX} p_o} \quad (61) \end{aligned}$$

Para escribir en forma adimensional la ecuación (61) es necesario el definir dos grupos dimensionales adicionales: tiempo adimensional (62)

$$T = \frac{k_{MAX} p_o}{L^2 \mu_o \phi} \quad (62)$$

y gasto adimensional:

$$Q_i^* = \frac{Q_i \hat{V}_o L^2 \mu_o}{k_{MAX} P_o} \quad (63)$$

Se derivamos la ecuación (62), se obtiene

$$dt = \frac{L^2 \mu_o \phi}{k_{MAX} P_o} dT \quad (64)$$

Substituyendo las ecuaciones (63) y (64) en la ecuación (61) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^* \left\{ X_i \left(\frac{\bar{k} k_{rl}}{V_\ell^* \mu_\ell^*} \nabla^* \left(P + \frac{\rho_{rl} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o}{P_o} + \frac{K_i \bar{k} k_{rv}}{\hat{V}_v^* \mu_v^*} \nabla^* \left(P + \frac{\rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o}{P} \right) \right) \right\} \right. \\ \left. \pm Q_i^* = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ X_i \left(\frac{S_\ell}{V_\ell^*} + K_i \frac{S_v}{V_v^*} \right) \right\} \right. \quad (65) \end{aligned}$$

donde: $i = 1, 2, 3, \dots, N$

La ecuación (65), es la forma adimensional de la ecuación 41.

ECUACIONES DIFERENCIALES BASICAS MODIFICADAS PARA SU SOLUCION NUMERICA.

Considerando las superposiciones básicas⁹ de que el sistema descrito anteriormente está en equilibrio y que la presión y la temperatura son las mismas para ambas fases de hidrocarburos, se puede emplear la regla de fase de Gibbs¹⁰.

En un sistema de dos fases de hidrocarburos compuesto de "N" componentes, los grados totales de libertad, de acuerdo con la regla de fase de Gibbs, son "N" (el número de grados de libertad de un sistema, es el número de varia

bles independientes que se requieren para determinar de una manera única el estado del mismo, en ocasiones se puede hacer uso de un número mayor de variables, pero en este caso no todos ellos serán independientes). Así, es suficiente especificar "N" variables independientes para fijar las propiedades de cada fase. Sin embargo, esto no fija las propiedades del sistema en general.

La especificación de P-1 relaciones independientes, concernientes al sistema en general son necesarias para fijar completamente el sistema. Esto es, la especificación de "C+1" variables independientes, de las cuales al menos P-1 deben referirse al sistema en general, las cuales son necesarias para fijar las propiedades intensivas de cada fase y también aquellas del sistema en general¹⁰.

Por ejemplo, especificando la presión, temperatura, fracciones mole de N-2 componentes en la fase líquida y la saturación líquida servirán para fijar las propiedades de fase así como aquellas del sistema de hidrocarburos en general.

Con este concepto y un método particular de solución en mente, la ecuación (63) será modificada para ponerla en una forma adecuada para una solución numérica. Esta modificación implica expansión del término derivada del tiempo, considerando que las variables dependientes son funciones de la presión y de la composición. Esto conduce a:

Definiendo:

$$A_i = X_i \left(\frac{\bar{k} k_{r\ell}}{V_{\ell} u_{\ell}} \right) \quad (66)$$

$$B_i = \frac{X_i}{\hat{v}_l^*} \quad (67)$$

$$C_i = \frac{Y_i}{\hat{v}_v^*} \quad (68)$$

$$D_i = P + \frac{\rho_r \rho_o g_r g_o Z^* Z_o}{\rho_o} \quad (69)$$

$$E_i = X_i \frac{K_i \bar{k} k_{rv}}{\hat{v}_v^* \mu_v} \quad (70)$$

$$F_i = P + \frac{\rho_{rv} \rho_o g_r g_o Z^* Z_o}{\rho_o} \quad (71)$$

Expandiendo el lado derecho de la ecuación (63) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left| X_i \left(\frac{S_l}{\hat{v}_l^*} + K_i \frac{S}{\hat{v}_v^*} \right) \right| \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left| \frac{S_l X_i}{\hat{v}_l^*} + K_i \frac{S_v X_i}{\hat{v}_v^*} \right|$$

Por medio de la definición de las constantes de equilibrio dada por la ecuación (11), la expresión anterior puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left| \frac{S_l X_i}{\hat{v}_l^*} + \frac{Y_i X_i S_v}{X_i \hat{v}_v^*} \right| \quad (73)$$

Substituyendo las ecuaciones (67) y (68) en la ecuación (73) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left| (S B_i + S_v C_i) \right| \quad (74)$$

Considerando que el medio poroso está solamente saturado por hidrocarburos, se puede escribir la expresión siguiente:

$$S_L + S_V = 1 \quad (75)$$

Substituyendo esta ecuación (75) en la ecuación (74), ya desarrollando las derivadas se obtiene:

$$B_i \frac{\partial S_L}{\partial T} + S_L \frac{\partial B_i}{\partial T} + (1 - S_L) \frac{\partial C_i}{\partial T} + C_i \frac{\partial}{\partial T} (1 - S_L)$$

$$B_i \frac{\partial S_L}{\partial T} + S_L \frac{\partial B_i}{\partial T} + (1 - S_L) \frac{\partial C_i}{\partial T} - C_i \frac{\partial S_L}{\partial T} \quad (76)$$

Se tiene que:

$$B_i = f(P)$$

$$C_i = f(P)$$

Entonces:

$$\frac{\partial B_i}{\partial T} = \frac{\partial B_i}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (77)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial T} = \frac{\partial C_i}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (78)$$

Substituyendo las ecuaciones (77) y (78) en la ecuación (76) se obtiene:

ne:

$$B_i \frac{\partial S_L}{\partial T} + S_L \frac{\partial B_i}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} + (1 - S_L) \frac{\partial C_i}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} - C_i \frac{\partial S_L}{\partial T}$$

Reagrupando términos en esta expresión:

$$B_i \frac{\partial S_L}{\partial T} + \frac{\partial P}{\partial T} \left[S_L \frac{\partial B_i}{\partial P} + (1 - S_L) \frac{\partial C_i}{\partial P} \right] - C_i \frac{\partial S_L}{\partial T} \quad (79)$$

Definiendo " G_i " por medio de la expresión siguiente:

$$G_i = |S_L \frac{\partial B_i}{\partial P} + (1 - S_L) \frac{\partial C_i}{\partial P}| \quad (80)$$

La ecuación (79) puede escribirse:

$$B_i \frac{\partial S_L}{\partial T} + G_i \frac{\partial P}{\partial T} - C_i \frac{\partial S_L}{\partial T}$$

$$(B_i - C_i) \frac{\partial S_L}{\partial T} + G_i \frac{\partial P}{\partial T} \quad (81)$$

Substituyendo las ecuaciones (66), (69), (70), (71) y (81) en la ecuación (65) se obtiene:

$$\nabla^* |A_i \nabla^* (D_i) + E_i \nabla^* (F_i)| \pm Q_i^* = |B_i - C_i| \frac{\partial S_L}{\partial T} + G_i \frac{\partial P}{\partial T} \quad (82)$$

Suprimiendo la notación estrella en la ecuación (79) se obtiene:

$$\nabla \{A_i \nabla (D_i) + E_i \nabla (F_i)\} \pm Q_i = |B_i - C_i| \frac{\partial S_L}{\partial T} + G_i \frac{\partial P}{\partial T} \quad (83)$$

La ecuación (83) es una ecuación adimensional, las coordenadas (r, θ, Z) son también adimensionales.

Para nuestro modelo únicamente usaremos las coordenadas r, Z entonces desarrollando la ecuación (83) para el flujo radial se obtiene lo siguiente:

Si consideramos:

$$S_L = 1 - S_r$$

Entonces:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(A_i \frac{\partial D_i}{\partial r} + E_i \frac{\partial F_i}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[A_i \frac{\partial (D_i)}{\partial z} + E_i \frac{\partial F_i}{\partial z} \right] \pm Q_i$$

$$= (B_i - C_i) \frac{\partial S}{\partial T} + G_i \frac{\partial P}{\partial T} \quad (84)$$

La ecuación (84) es una ecuación diferencial parcial no lineal. Esta ecuación representa el modelo matemático que describe el flujo de una mezcla de hidrocarburos en dos fases, en un sistema (r, Z), considerando transferencia de masa entre las fases. La cual debe de resolverse para cada una de las "i" componentes del sistema de hidrocarburos y es suficiente para determinar la relación entre presión, saturación y composición en este tipo de yacimientos de composición variable.

MODELO DE DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones diferenciales parciales obtenidas anteriormente son imposibles de resolver por métodos analíticos por lo que es necesario usar un método numérico. Se usarán técnicas de aproximación de diferencias finitas para la solución de estas ecuaciones dada su confiabilidad en la solución de problemas de flujo de fluidos y las ecuaciones algebraicas resultantes deberán ser resueltas por técnicas no iterativa implícito-explicito, de esta manera las presiones deben ser calculadas implícitamente.

La distribución de presiones en el nuevo nivel de tiempo es obtenida implícitamente, usando la bien conocida técnica "ADIP" (alternating direction implicit) eliminándose primero la derivada de la saturación respecto al tiempo, con el objeto de eliminar los términos explícitos de la saturación, la cual es considerada a través de los coeficientes (A_n , E_n , G_n) que son funciones de presión y saturación.

Para obtener una mejor solución, el paso de tiempo "t" fue dividido en dos partes iguales, con esto la primera ecuación de presión se obtuvo a las presiones intermedias, a la mitad del paso del tiempo. Posteriormente la ecuación de presión se obtuvo a las presiones finales, al final del paso del tiempo t.

Los coeficientes de las derivadas de espacio y tiempo contenidos en las ecuaciones que representan el modelo han sido definidas anteriormente y son funciones de presión y saturación.

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.

Podemos escribir en coordenadas cilíndricas la ecuación diferencial parcial que describe el flujo radial de dos fases de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left| r \left(A_n \frac{\partial D_n}{\partial r} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right| + \frac{\partial}{\partial z} \left| A_n \frac{\partial D_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial z} \right| \pm Q_n$$

$$= (B_n - C_n) \frac{\partial S}{\partial T} + G_n \frac{\partial P}{\partial T}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

Si dividimos esta última expresión por $(B_n - C_n)$ obtenemos:

$$\frac{1}{(B_n - C_n)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left| r \left(A_n \frac{\partial D_n}{\partial r} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right| + \frac{\partial}{\partial z} \left| A_n \frac{\partial D_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial z} \right| \pm Q_n \right.$$

$$\left. - G_i \frac{\partial P}{\partial T} \right\} - \frac{\partial S}{\partial T} = 0$$

Reescribiendo la ecuación anterior,

$$\frac{1}{(B_n - C_n)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left| r \left(A_n \frac{\partial D_n}{\partial r} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right| + \frac{\partial}{\partial z} \left| A_n \frac{\partial D_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial z} \right| \pm Q_n \right\} =$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{G_i}{(B_n - C_n)} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (84)$$

Expandiendo los productos de derivadas tenemos que:

$$\frac{1}{(B_n - C_n)} \left\{ \left| A_n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_n}{\partial r} \frac{\partial A_n}{\partial r} + E_n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \frac{\partial F_n}{\partial r} \frac{\partial E_n}{\partial r} \right| + \left| A_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial D_n}{\partial z} \frac{\partial A_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right) \right.$$

$$+ \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial E_n}{\partial z} \Big| \Big\} = \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{G_n}{(B_n - C_n)} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (85)$$

La ecuación (85) es resuelta para obtener las nuevas presiones al final de cada paso de tiempo.

Forma en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(B_n - C_n)_{i,j}} \left\{ A_n \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_n}{\partial r} \frac{\partial A_n}{\partial r} + D_n \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial F_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_n}{\partial r} \frac{\partial E_n}{\partial r} \right. \\ & + \left. \left\{ A_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial D_n}{\partial z} \frac{\partial A_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial E_n}{\partial z} \right\} \right\}_{i,j} \\ & = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{i,j} - \frac{(G_n)_{i,j}}{(B_n - C_n)_{i,j}} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{i,j} \end{aligned}$$

Introduciendo los índices:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(B_n)_{i,j} - (C_n)_{i,j}} (A_n)_{i,j} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} + \frac{1}{r_{i,j}} \left| \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial A_n}{\partial r} \right)_{i,j} \right. \\ & + (E_n)_{i,j} \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right|_{i,j} + \frac{1}{r_{i,j}} \left| \left(\frac{\partial F_n}{\partial r} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial E_n}{\partial r} \right)_{i,j} \right| \\ & + (A_n)_{i,j} \left| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D_n}{\partial z} \right) \right|_{i,j} + \left| \left(\frac{\partial D_n}{\partial z} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial A_n}{\partial z} \right)_{i,j} \right| + (E_n)_{i,j} \left| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right) \right|_{i,j} \\ & + \left| \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial E_n}{\partial z} \right)_{i,j} \right| = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{i,j} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{i,j} - \frac{(G_n)_{i,j}}{(B_n)_{i,j} - (C_n)_{i,j}} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{i,j} \end{aligned} \quad (86)$$

Si escribimos esto en diferencias finitas

$$\frac{\partial}{\partial r} \left| \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) \right|_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right)_{i,j}}{\Delta t} \quad (\text{usando diferencias hacia adelante}) \quad (87)$$

Donde:

$$\text{Si } (D_n)_{i,j} = (D_n)_{i+1,j,k} = \frac{\Delta r}{1} \left\{ \frac{D_n}{r} \right\}_{i+1,j} + \dots$$

Entonces despejando

$$\left(\frac{D_n}{r} \right)_{i+1,j} = \frac{(D_n)_{i+1,j} - (D_n)_{i,j}}{\Delta r} \quad (88)$$

Ahora:

$$\text{Si: } (D_n)_{i,j} = (D_n)_{i-1,j} + \frac{\Delta r}{1} \left\{ \frac{D_n}{r} \right\}_{i,j} + \dots$$

Esto implica que:

$$\left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right)_{i,j} = \frac{(D_n)_{i,j} - (D_n)_{i-1,j}}{\Delta r} \quad (89)$$

Substituyendo (88) y (89) en la ecuación (87) se tiene:

$$A_n \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) \right\}_{i,j} = A_n \frac{(D_n)_{i+1,j} - (D_n)_{i,j}}{\Delta r} - A_n \frac{(D_n)_{i,j} - (D_n)_{i-1,j}}{\Delta r}$$

Los coeficientes "An, En" deben ser evaluados en cada uno de los puntos. Por lo tanto An, En serán evaluados en los puntos intermedios $(i + \frac{1}{2}, j)$ cuando usemos $(D_n)_{i+1,j}$, $(F_n)_{i+1,j}$, $(D_n)_{i,j}$ y $(F_n)_{i,j}$ y cuando usemos $(D_n)_{i-1,j}$, $(F_n)_{i-1,j}$, $(D_n)_{i,j}$ y $(F_n)_{i,j}$ entonces los coeficientes serán evaluados en los puntos intermedios $(i - \frac{1}{2}, j)$.

Tomando en cuenta estas consideraciones podemos escribir la ecuación (90) como:

$$A_n \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) \right\}_{i,j} = (A_n)_{i + \frac{1}{2}, j} \frac{(D_n)_{i+1,j} - (D_n)_{i,j}}{\Delta r^2} - (A_n)_{i - \frac{1}{2}, j} \frac{(D_n)_{i,j} - (D_n)_{i-1,j}}{\Delta r} \quad (91)$$

Para la solución de la ecuación diferencial en diferencias finitas haremos uso de las siguientes consideraciones:

a) Todos los coeficientes implicados en la ecuación de diferencias finitas serán evaluados a la mitad de cada paso de tiempo $(k + \frac{1}{2})$, usando una aproximación de diferencias hasta adelante, donde referiremos a "k" como el paso anterior y a (k+1) como el paso siguiente.

b) El paso de tiempo será dividido en dos partes iguales con el objeto de ser desarrollado en dos etapas, a partir de un t_i (inicial) a un t_f (final). Iniciando la primera etapa a partir de t_i a t_1 , donde $t_1 = t_i + \frac{\Delta t}{2}$, y la segunda etapa será a partir de t_1 a t_2 donde $t_2 = t_1 + \frac{\Delta t}{2}$

Definiendo:

$$t_i = k$$

$$k + \frac{\Delta t}{2} = (k+1)^*$$

$$k + \Delta t = (k+1)$$

c) Durante la primera etapa (de k a (k+1)*), todas las derivadas de presión en la dirección de "r" serán tomadas al nuevo tiempo, es decir en (k+1)*, mientras que todas las derivadas de presión en dirección Z serán tomadas al paso anterior, es decir en "k".

d) Durante la segunda etapa (de (k+1)* a (k+1), todas las derivadas de presión en la dirección de "Z" serán tomadas en el nuevo nivel de tiempo para esta etapa, es decir en (k+1), mientras que todas

las derivadas de presión en la dirección r serán evaluadas en el paso anterior de tiempo, es decir en $(k+1)^*$.

La ecuación (86) en diferencias finitas para la primera etapa (donde se considera como nivel anterior de tiempo = k , y nuevo nivel de tiempo = $(k+1)^*$) quedará expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \right) (A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} \\
 & - (A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j}^{(k+1)^*} - (D_n)_{i-1,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} + \left(\frac{1}{r} \right)_{i,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r} \\
 & \frac{(A_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (A_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} + (E_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (F_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} \\
 & - (E_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j}^{(k+1)^*} - (F_n)_{i-1,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} + \left(\frac{1}{r} \right)_{i,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (F_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} \\
 & \frac{(E_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (E_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} + (A_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j+1}^k - (D_n)_{i,j}^k}{\Delta z^2} \\
 & - (A_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j}^k - (D_n)_{i,j-1}^k}{\Delta z^2} + \frac{(D_n)_{i,j+1}^k - (D_n)_{i,j}^k}{\Delta z} \frac{(A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} - (A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta z} \\
 & + (E_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j+1}^k - (F_n)_{i,j}^k}{\Delta z^2} - (E_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j}^k - (F_n)_{i,j-1}^k}{\Delta z^2} \\
 & + \frac{(F_n)_{i,j+1}^k - (F_n)_{i,j}^k}{\Delta z} \frac{(E_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} - (E_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2}}{\Delta z} - \frac{S_{i,j}^{(k+1)^*} - S_{i,j}^k}{\Delta T}
 \end{aligned}$$

$$\frac{(G_n)_{i,j}^{k+1/2}}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} - \frac{P_{i,j}^{(k+1)*} - P_{i,j}^k}{\frac{\Delta T}{2}} \quad (92)$$

Definiendo:

$$I1 = \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \frac{(A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} \quad (93)$$

$$I2 = \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \frac{(E_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} \quad (94)$$

$$I3 = \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \frac{-(A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} - \frac{(A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2}$$

$$+ \frac{(A_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} - \frac{(A_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} \left(\frac{1}{r}\right)_{i,j}^{k+1/2} \quad (95)$$

$$I4 = \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \frac{-(E_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} - \frac{(E_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2}$$

$$- \frac{(E_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{(E_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} \left(\frac{1}{r}\right)_{i,j}^{k+1/2} \quad (96)$$

$$I5 = \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \frac{(A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2}$$

$$\left. \frac{(A_{nr})^{k+1/2}}{\Delta r^2} \Big|_{i+1,j} - \frac{(A_{nr})^{k+1/2}}{\Delta r^2} \Big|_{i,j} \right\} \left(\frac{1}{r} \right)^{k+1/2} \Big|_{i,j} \quad (97)$$

$$= \left\{ \frac{1}{(B_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j} - (C_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j}} \right\} \left\{ \frac{(E_n)^{k+1/2}}{\Delta r^2} \Big|_{i+1/2,j} + \left[\frac{(E_{nr})^{k+1/2}}{\Delta r^2} \Big|_{i+1,j} - \frac{(E_{nr})^{k+1/2}}{\Delta r^2} \Big|_{i,j} \right] \left(\frac{1}{r} \right)^{k+1/2} \Big|_{i,j} \right\} \quad (98)$$

$$= \left\{ \frac{S_{i,j}^{k+1} - S_{i,j}^k}{\Delta T} - \frac{(G_n)^{k+1/2}}{(B_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j} - (C_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j}} \frac{P_{i,j}^{(k+1)*} - P_{i,j}^k}{\frac{\Delta T}{2}} \right\} \left\{ \frac{1}{(B_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j} - (C_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j}} \right\}$$

$$(A_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j+1/2} \frac{(D_n)^k \Big|_{i,j+1} - (D_n)^k \Big|_{i,j}}{\Delta Z^2} - (A_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j-1/2} \frac{(D_n)^k \Big|_{i,j} - (D_n)^k \Big|_{i,j-1}}{\Delta Z^2} + \frac{(D_n)^k \Big|_{i,j+1} - (D_n)^k \Big|_{i,j}}{\Delta Z}$$

$$\frac{(A_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j+1} - (A_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j}}{\Delta Z} + (E_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j+1/2} \frac{(F_n)^k \Big|_{i,j+1} - (F_n)^k \Big|_{i,j}}{\Delta Z^2} - (E_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j+1/2}$$

$$\left\{ \frac{(F_n)^k \Big|_{i,j} - (F_n)^k \Big|_{i,j-1}}{\Delta Z^2} + \frac{(F_n)^k \Big|_{i,j+1} - (F_n)^k \Big|_{i,j}}{\Delta Z} \frac{(E_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j+1} - (E_n)^{k+1/2} \Big|_{i,j}}{\Delta Z} \right\} \quad (99)$$

Substituyendo las ecuaciones de la (93) a la (99) en la ecuación (92)

obtiene:

$$(D_n)^{(k+1)*} \Big|_{i-1,j} + 12 (F_n)^{(k+1)*} \Big|_{i-1,j} + 13 (D_n)^{(k+1)*} \Big|_{i,j} + 14 (F_n)^{(k+1)*} \Big|_{i,j} + 15 (D_n)^{(k+1)*} \Big|_{i+1,j} \\ + 16 (F_n)^{(k+1)*} \Big|_{i+1,j} - 17 \quad (100)$$

Segunda Etapa:

Para esta segunda etapa se toman las siguientes consideraciones:

El nivel anterior de tiempo = $(k+1)^*$

El nuevo nivel de tiempo = $(k+1)$

Usando la ecuación (91) y las expresiones similares para todas las derivadas de la presión, la ecuación (91) en diferencias finitas toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{(A_n)_{i,j}^{n+1/2} (C_n)_{i,j}^{n+1/2}} \left\{ (A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} - (A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j}^{(k+1)^*} - (D_n)_{i-1,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)_{i,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{r} - (A_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} \frac{(A_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (A_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{r} \right.$$

$$\left. (E_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (F_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} - (E_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j}^{(k+1)^*} - (F_n)_{i-1,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r^2} \right.$$

$$\left. \frac{(F_n)_{i+1,j}^{(k+1)^*} - (F_n)_{i,j}^{(k+1)^*}}{\Delta r} \frac{(E_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (E_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} \left(\frac{1}{r}\right)_{i,j}^{k+1/2} + (A_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \right.$$

$$\left. \frac{(A_n)_{i,j+1}^{k+1} - (A_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z^2} - (A_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j}^{k+1} - (D_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z^2} + \frac{(D_n)_{i,j+1}^{k+1} - (D_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z} \right.$$

$$\left. (A_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{(A_n)_{i,j+1}^{k+1/2} - (A_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z} + (F_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j+1}^{k+1} - (F_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z^2} - (E_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(F_n)_{i,j}^{k+1} - (F_n)_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} + \frac{(F_n)_{i,j+1}^{k+1} - (F_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z} \frac{(E_n)_{i,j+1}^{k+1/2} - (E_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z} \\
 & = \frac{(G_n)_{i,j}^{k+1/2}}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \frac{P_{i,j}^{k+1} - P_{i,j}^{(k+1)*}}{\Delta T/2} + \frac{S_{i,j}^{k+1} - S_{i,j}^{(k+1)*}}{\Delta T} \quad (101)
 \end{aligned}$$

Definiendo:

$$I8 = \left\{ \left| \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \right| \left| \frac{(A_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right| \right\} \quad (102)$$

$$I9 = \left\{ \left| \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \right| \left| \frac{(E_n)_{i,j-1}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right| \right\} \quad (103)$$

$$\begin{aligned}
 I10 = & \left\{ \left| \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \right| \left| -\frac{(A_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2}}{\Delta z^2} - \frac{(A_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z^2} + \frac{(A_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(A_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right| \right\} \quad (104)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I11 = & \left\{ \left| \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \right| \left| -\frac{(E_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2}}{\Delta z^2} - \frac{(E_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2}}{\Delta z} - \frac{(E_n)_{i,j+1}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(E_n)_{i,j+1}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right| \right\} \quad (105)
 \end{aligned}$$

$$I12 = \left\{ \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \left| \frac{(A_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2}}{\Delta z^2} + \frac{(A_n)_{i,j+1}^{k+1/2}}{\Delta z^2} - \frac{(A_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right| \right\} \quad (106)$$

$$I13 = \left\{ \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \left| \frac{(E_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2}}{\Delta z^2} + \frac{(E_n)_{i,j+1}^{k+1/2}}{\Delta z^2} - \frac{(E_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z^2} \right| \right\} \quad (107)$$

$$I14 = \frac{(G_n)_{i,j}^{k+1/2} P_{i,j}^{(k+1)*} - P_{i,j}^k}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2} \Delta T/2} - \left| \frac{1}{(B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2}} \right|$$

$$\left| (A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)*} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)*}}{\Delta r^2} - (A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j}^{(k+1)*} - (D_n)_{i-1,j}^{(k+1)*}}{\Delta r^2} \right.$$

$$\left. + \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)*} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)*}}{\Delta r} \left(\frac{1}{r} \right)_{i,j}^{k+1/2} \frac{(A_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (A_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} \right.$$

$$\left. + (E_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i+1,j}^{(k+1)*} - (F_n)_{i,j}^{(k+1)*}}{\Delta r^2} - (E_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j}^{(k+1)*} - (F_n)_{i-1,j}^{(k+1)*}}{\Delta r^2} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{r} \right)_{i,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i+1,j}^{(k+1)*} - (F_n)_{i,j}^{(k+1)*}}{\Delta r} \frac{(E_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (E_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} \right| + \frac{S_{i,j}^{(k+1)*} - S_{i,j}^k}{\Delta T} \quad (108)$$

Substituyendo las ecuaciones de la (102) a (108) en la ecuación (101),

se obtiene:

$$18(D_n)_{i,j-1}^{k+1} + 19(F_n)_{i,j-1}^{k+1} + 110(D_n)_{i,j}^{k+1} + 111(F_n)_{i,j}^{k+1} + 112(D_n)_{i,j+1}^{k+1} + 113(F_n)_{i,j+1}^{k+1} -$$

REPRESENTACION EN DIFERENCIAS FINITAS PARA EL GASTO MOLAR.

De la ecuación (83') se obtiene: withdrawal

$$Q_n = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(A_n \frac{\partial D_n}{\partial r} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[A_n \frac{\partial D_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial z} \right] - G_n \frac{\partial P}{\partial T} - (B_n - C_n) \frac{\partial S}{\partial T} \quad (110)$$

Expandiendo las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(A_n \frac{\partial D_n}{\partial r} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} (A_n r \frac{\partial D_n}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r} (E_n r \frac{\partial F_n}{\partial r})$$

Pero:

$$\frac{\partial}{\partial r} (A_n r \frac{\partial D_n}{\partial r}) = A_n r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) + \frac{\partial D_n}{\partial r} \frac{\partial A_n r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (E_n r \frac{\partial F_n}{\partial r}) = E_n r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F_n}{\partial r} \right) + \frac{\partial F_n}{\partial r} \frac{\partial E_n r}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[A_n \frac{\partial D_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial F_n}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} (A_n \frac{\partial D_n}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_n \frac{\partial F_n}{\partial z}) \quad (111)$$

Donde:

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_n \frac{\partial D_n}{\partial z}) = A_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial D_n}{\partial z} \frac{\partial A_n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (E_n \frac{\partial F_n}{\partial z}) = E_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial E_n}{\partial z}$$

Substituyendo (107) en la ac. (106) se obtiene

$$Q_n = \left[A_n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial D_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_n}{\partial r} \frac{\partial A_n r}{\partial r} + E_n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_n}{\partial r} \frac{\partial E_n r}{\partial r} \right] + \left[A_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial D_n}{\partial z} \frac{\partial A_n}{\partial z} + E_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial E_n}{\partial z} \right] - G_n \frac{\partial P}{\partial T} - (B_n - C_n) \frac{\partial S}{\partial T} \quad (112)$$

La ecuación (112) en diferencias finitas toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 Q_n^* = & (A_n)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{(k+1)} - (D_n)_{i,j}^{(k+1)}}{\Delta r^2} - (A_n)_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j}^{k+1} - (D_n)_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta r^2} \\
 & + \left(\frac{1}{r}\right)_{i,j}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i+1,j}^{k+1} - (D_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta r} \frac{(A_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (A_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} + (E_n)_{i+1/2,j}^{i+1/2} \\
 & \frac{(F_n)_{i+1,j}^{k+1} - (F_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta r^2} - (E_n)_{i=1/2,j}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j}^{k+1} - (F_n)_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta r^2} + \frac{(F_n)_{i+1,j}^{k+1} - (F_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta r} \\
 & \frac{(E_{nr})_{i+1,j}^{k+1/2} - (E_{nr})_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} \left(\frac{1}{r}\right)_{i,j}^{k+1/2} + (A_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{(D_n)_{i,j+1}^{k+1} - (D_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z^2} - (A_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2} \\
 & \frac{(D_n)_{i,j}^{k+1} - (D_n)_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} + \frac{(D_n)_{i,j+1}^{k+1} - (D_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z} \frac{(A_n)_{i,j+1}^{k+1/2} - (A_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z} + (E_n)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \\
 & - (E_n)_{i,j-1/2}^{k+1/2} \frac{(F_n)_{i,j}^{k+1} - (F_n)_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} + \frac{(F_n)_{i,j+1}^{k+1} - (F_n)_{i,j}^{k+1}}{\Delta z} \frac{(E_n)_{i,j+1}^{k+1/2} - (E_n)_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta z} \\
 & - \left| (B_n)_{i,j}^{k+1/2} - (C_n)_{i,j}^{k+1/2} \right| \left| \frac{S_{i,j}^{k+1} - S_{i,j}^k}{\Delta T} \right| - (G_n)_{i,j}^{k+1/2} \frac{P_{i,j}^{k+1} - P_{i,j}^k}{\Delta T} \quad (113)
 \end{aligned}$$

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Los objetivos principales del presente estudio han sido el obtener las ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo radial de dos fases (líquido-vapor) en dos dimensiones (r, z), con transferencia de masa entre las fases, usando un sistema de "N" componentes.

La ecuación diferencial parcial no-lineal puede ser resuelta usando técnicas numéricas, desarrollando así un simulador numérico que describa el proceso de flujo en yacimientos de composición variable.

Se propone una solución numérica para resolver las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que describen el proceso de flujo de la siguiente forma:

a) Planteamiento de las ecuaciones que describen el flujo de fluidos en yacimientos de "i" componentes, con transferencia de masa entre las fases.

b) La solución de las ecuaciones anteriores puede obtenerse mediante su adecuada presentación en función de diferencias finitas, lo cual a su vez nos conduce a un problema algebraico. Una vez resuelto este problema algebraico, estaremos en condiciones de obtener una solución numérica aproximada.

c) Esta solución será más precisa conforme se refine la malla y se consideren pasos en el tiempo más cortos, siempre y cuando estas magnitudes no violen las condiciones de estabilidad propias del esquema empleado al representar las ecuaciones diferenciales finitas.

d). La solución numérica obtenida puede ser empleada para simular el flujo de los fluidos en el yacimiento, basado en la información obtenida a partir de datos de campo y de indicaciones realizadas en el laboratorio. Esto puede permitir el probar la eficacia de las técnicas simplificadas de análisis de presiones para yacimientos de composición variable.

e) Dentro de la información requerida para la simulación (reportada en la literatura de estos yacimientos de composición variable es la siguiente:

1.- Propiedades físicas de los fluidos que fluyen a través del medio poroso durante la explotación del yacimiento. Entre estas propiedades podemos enumerar: Una tabla de viscosidad contra presión para cada uno de los fluidos, una tabla de factor de desviación contra presión para la fase gas, constante de equilibrio para el sistema que estamos considerando, ... etc.)

2.- Propiedades petrofísicas del yacimiento, tales como permeabilidad y porosidad.

3.- Características de producción tales como presión pseudostática; historia de producción del pozo; distribuciones de saturación iniciales para cada una de las fases, así como la distribución inicial de presiones.

El tipo de yacimiento y la extensión por la cual es conocido, determinará la naturaleza del grado de complejidad del modelo numérico.

Es recomendable usar un modelo composicional en yacimientos que contengan fluidos de composición variable y en los cuales tenga lugar

la transferencia de masa entre las fases, para considerar una composición más detallada de las mismas.

El uso de un programa de computadora para predecir el comportamiento del pozo, o para interpretar los resultados de una prueba de presión, dependerá de los datos de campo, algunos de los cuales son difíciles de obtener con toda la precisión deseada.

Datos acerca de las condiciones de producción del pozo y de las características del yacimiento, son de utilidad muy importante para la determinación de las condiciones óptimas de producción del pozo y el yacimiento.

NOMENCLATURA

A	=	Coefficiente de la ecuación real
B_i	=	Coefficiente de la ecuación real
C	=	Concentración molar
C_i	=	Coefficiente de la ecuación real
D_i	=	Coefficiente de la ecuación real
E_i	=	Coefficiente de la ecuación real
F_i	=	Coefficiente de la ecuación real
G_i	=	Coefficiente de la ecuación real
k	=	Permeabilidad
\bar{k}	=	Permeabilidad absoluta adimensional
k_o	=	Permeabilidad efectiva del aceite
k_g	=	Permeabilidad efectiva del gas
k_{ro}	=	Permeabilidad relativa del aceite
k_{rg}	=	Permeabilidad relativa del gas
K_i	=	Constante de equilibrio
L	=	Longitud del yacimiento
M	=	Peso molecular
n	=	Número total de moles
n_v	=	Número de moles de gas
p	=	Presión
P	=	Presión adimensional
Q_i	=	Gasto volumétrico molar
Q_i^*	=	Gasto volumétrico molar
S_o	=	Saturación de aceite

S_e	=	Saturación de líquido
S_v	=	Saturación de vapor
t	=	Tiempo
T	=	Tiempo adimensional
V_i	=	Velocidad de la "i-esima" componente
\hat{V}	=	Volumen molar
V^*	=	Volumen molar
r, z	=	Coordenadas del sistema empleado
X_i	=	Fracción mol en el aceite
Y_i	=	Fracción mol en el gas
z_i	=	Fracción molar total
μ	=	Viscosidad
ρ	=	Densidad
ϕ	=	Porosidad

SUBINDICES O SUPERINDICES

g	=	Gas
gas	=	Fase vapor
l	=	Líquido
$líquido$	=	Aceite
max	=	Máxima
o	=	Aceite
v	=	Vapor
$vapor$	=	gas

Símbolos matemáticos

d	=	Derivada total
∂	=	Derivada parcial
\sum	=	Sumatoria
∇	=	Operador (gradiente o divergencia)
∇^*	=	Operador adimensional

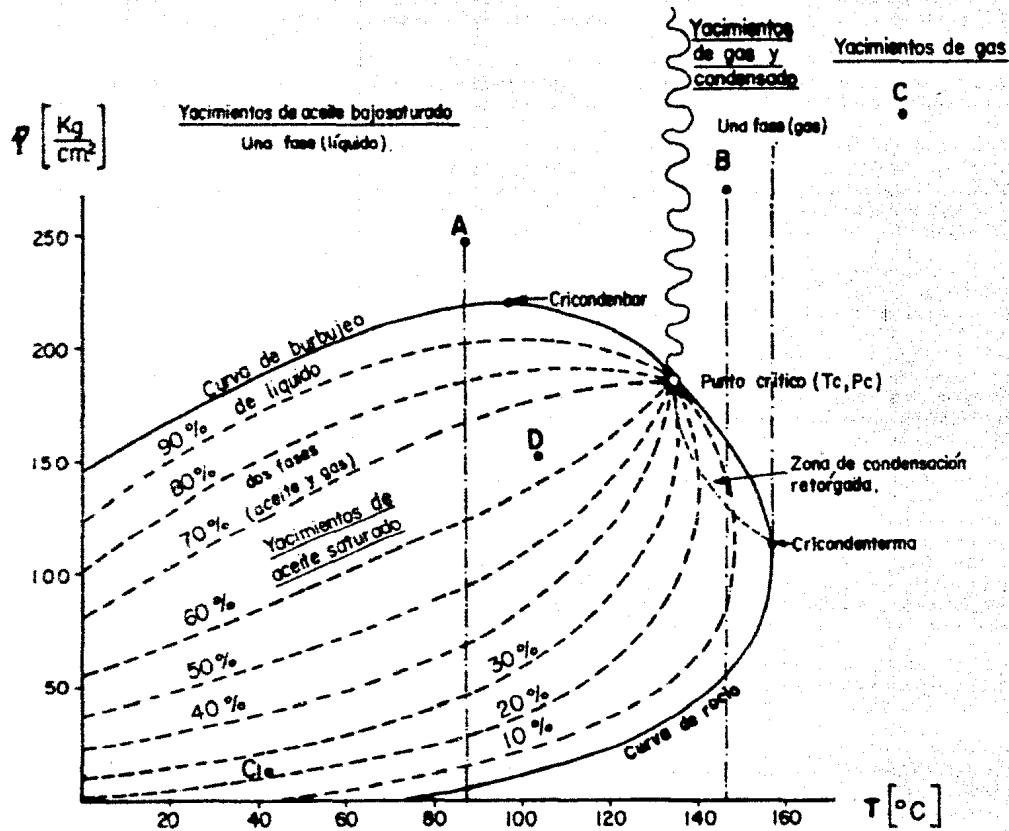
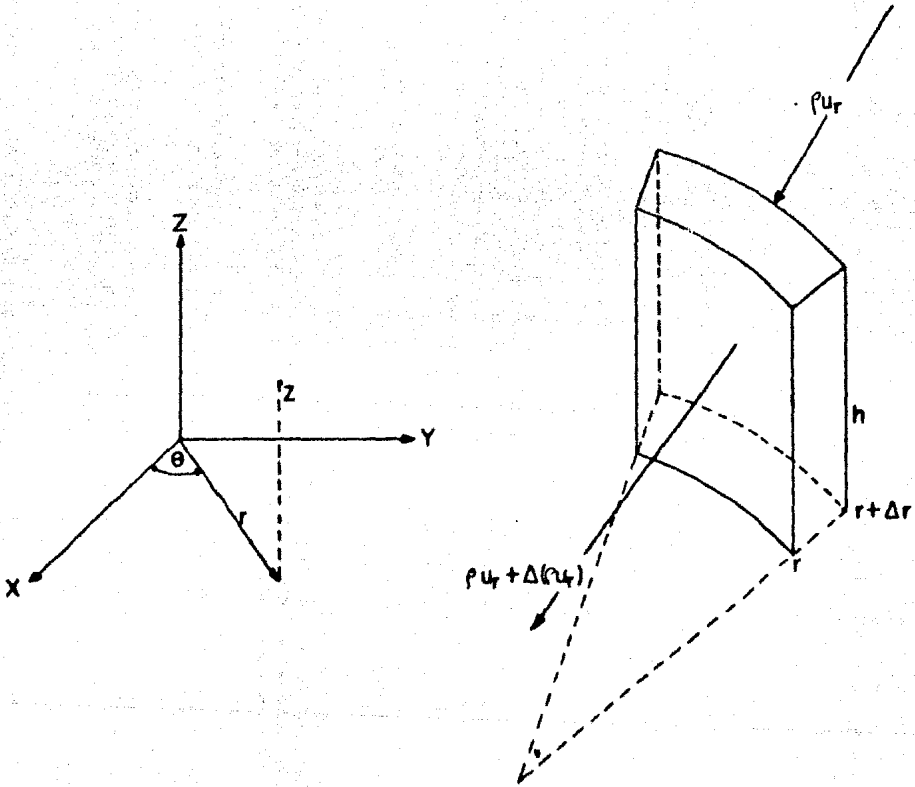


FIG. 1 - Diagrama de fases de una mezcla de hidrocarburos.

ELEMENTO DE VOLUMEN PARA LA OBTENCION DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD, PARA FLUJO RADIAL.



(FIGURA 1')

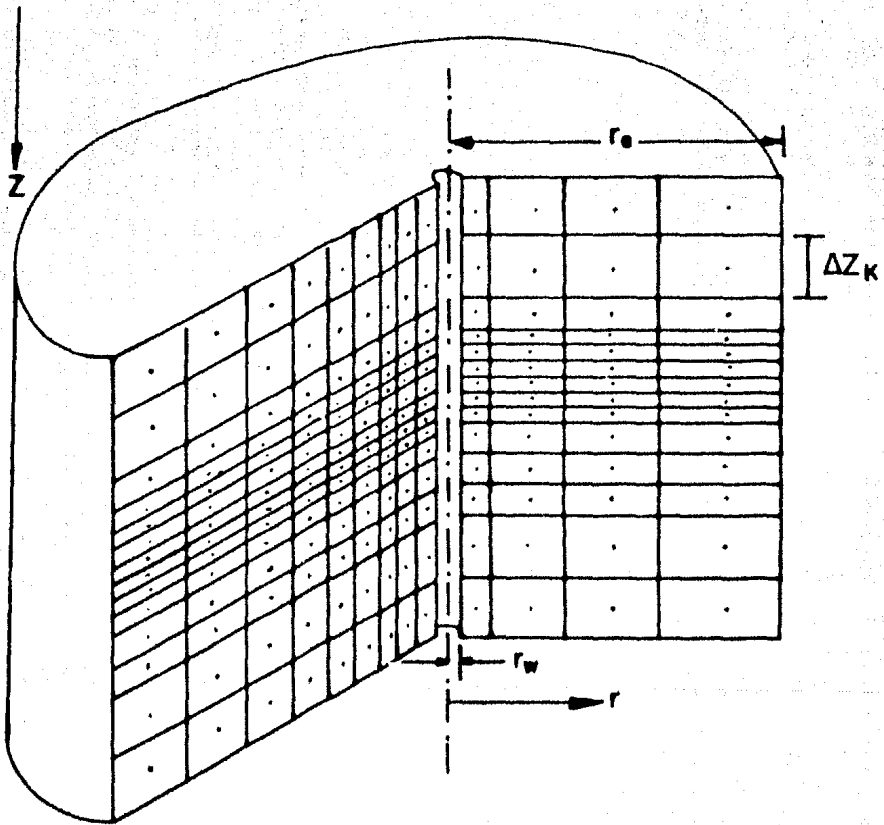


FIG. 2 REPRESENTACION GEOMETRICA DEL SISTEMA.

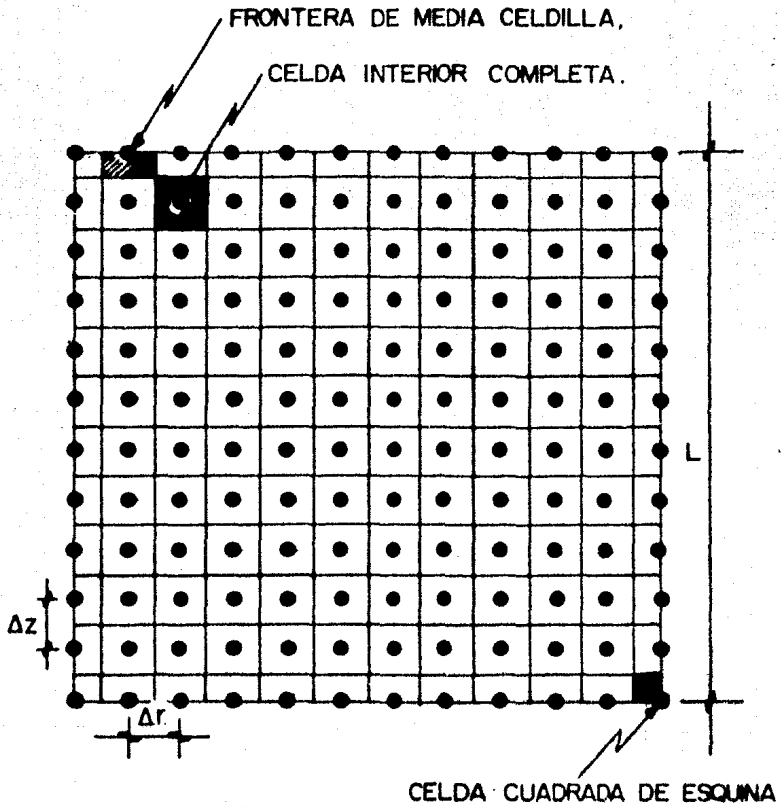


FIG. 3 - MODELO DE CELDA DEL MEDIO
POROSO.

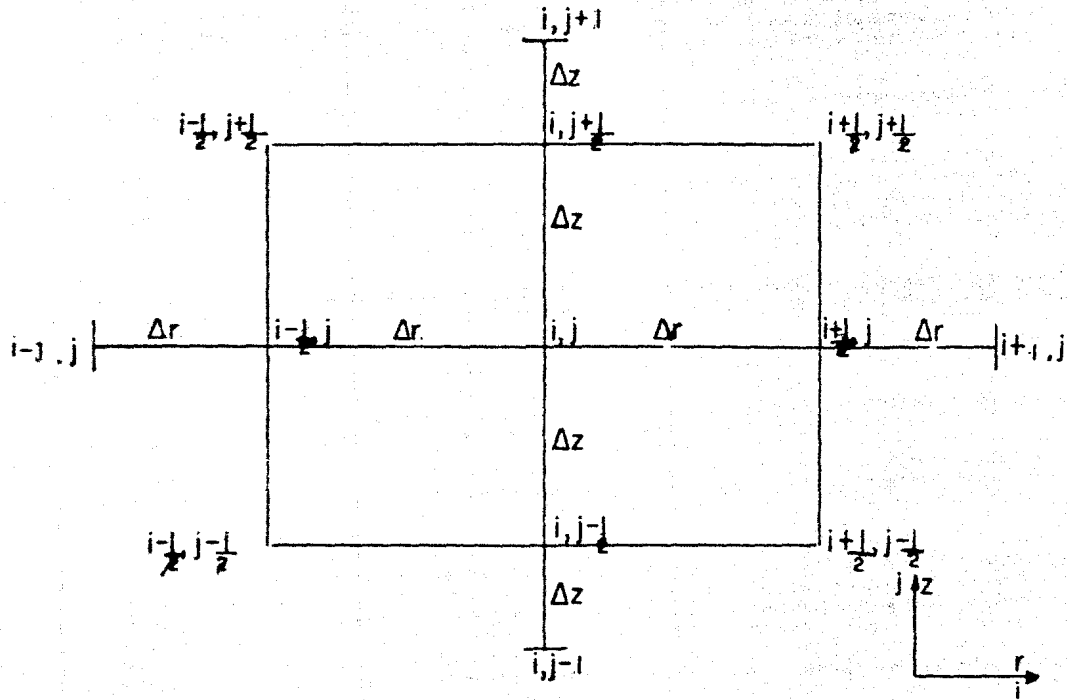


FIG. 4 - ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS USADO.

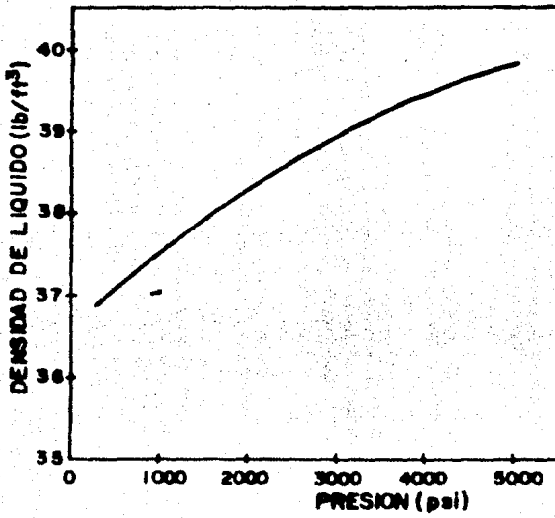


FIG. 5.- DENSIDAD DE HIDROCARBUROS LIQUIDOS
(ACEITE VOLATIL)

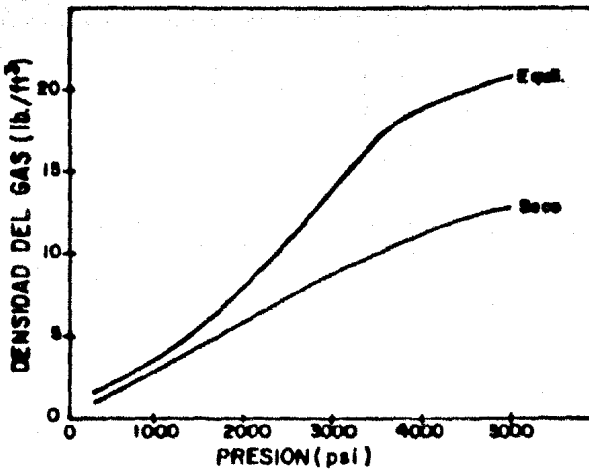


FIG. 6.

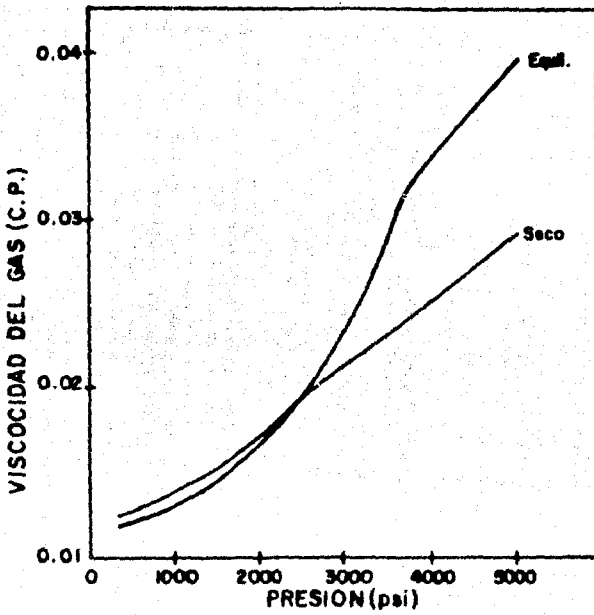


FIG. 7.

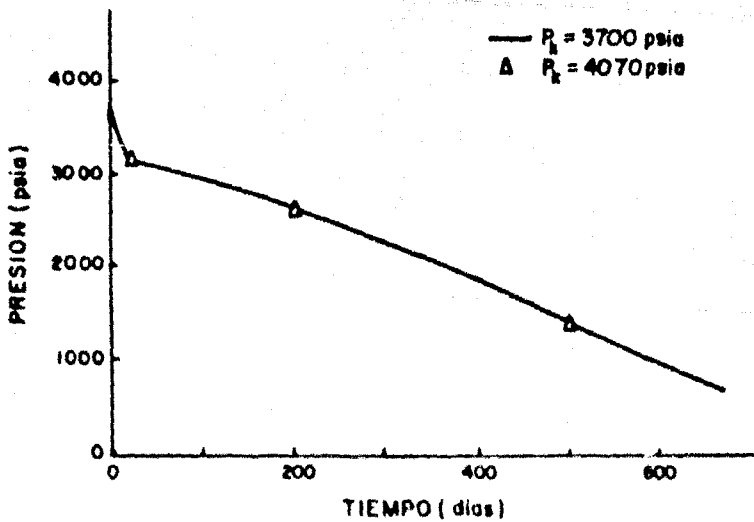


FIG. 8.- PRESION EN EL POZO COMO UNA FUNCION DEL TIEMPO.

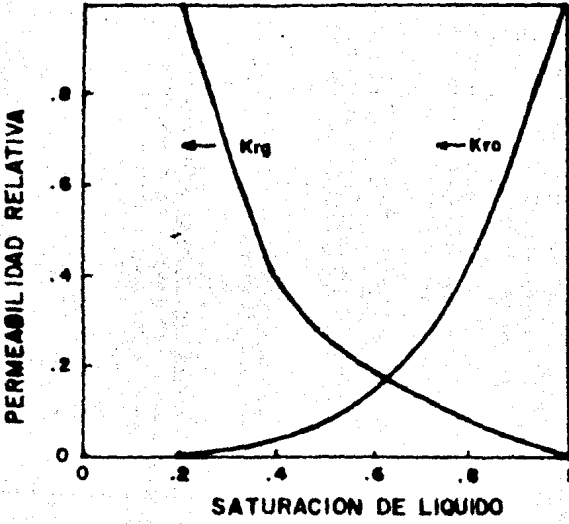


FIG. 9.

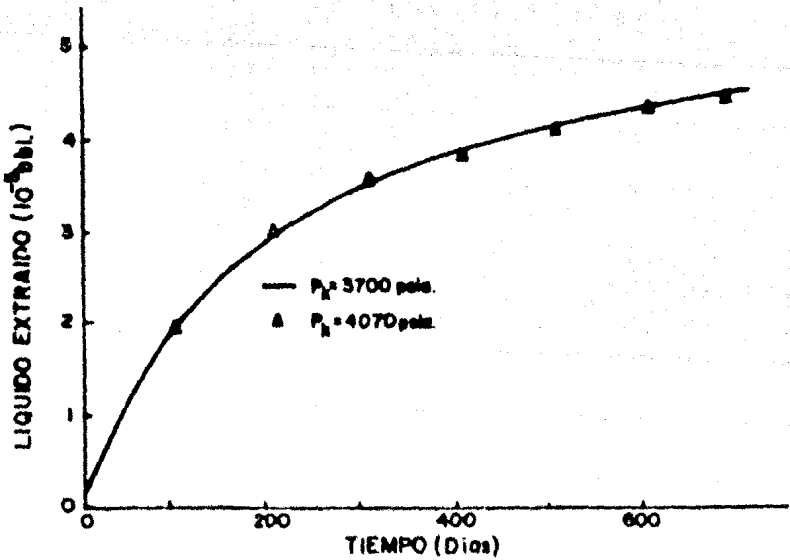


FIG. 10: EXTRACCION DE LIQUIDO CONTRA TIEMPO.

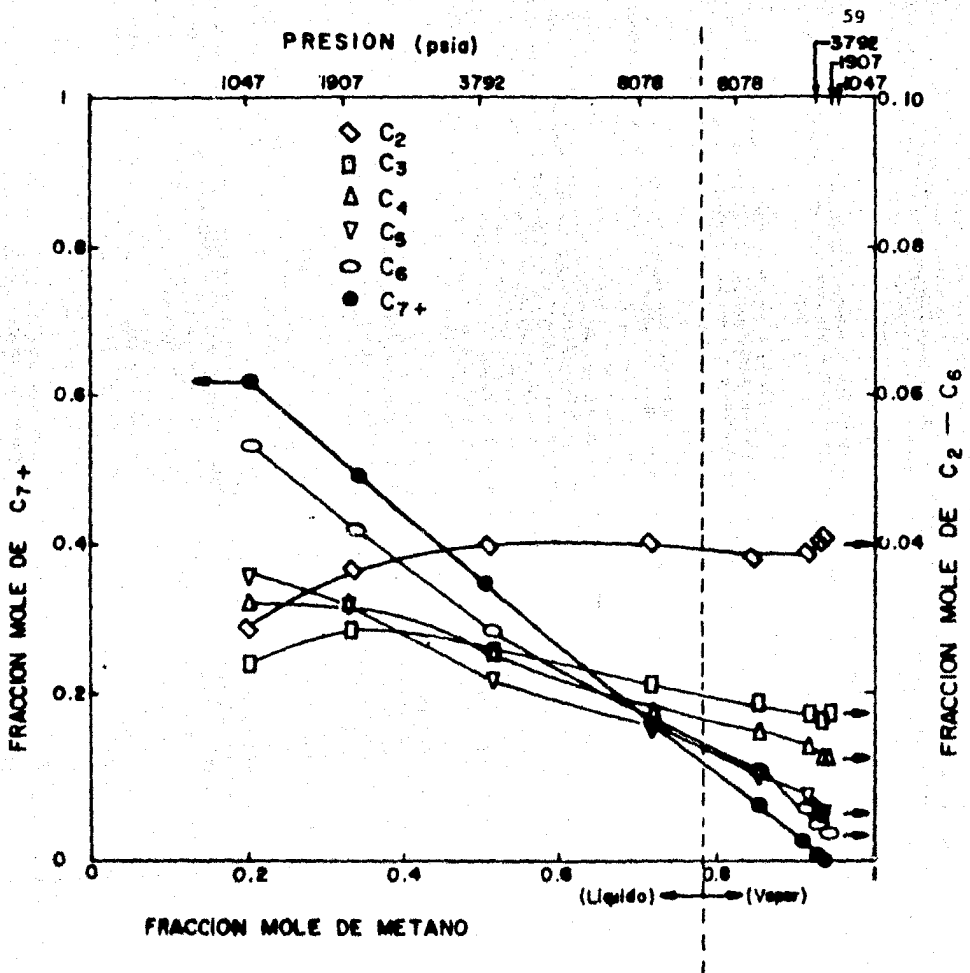


FIG. II.- COMPOSICION DE LAS FASES A 200° F.
PARA UNA MEZCLA DE HIDROCARBUROS.

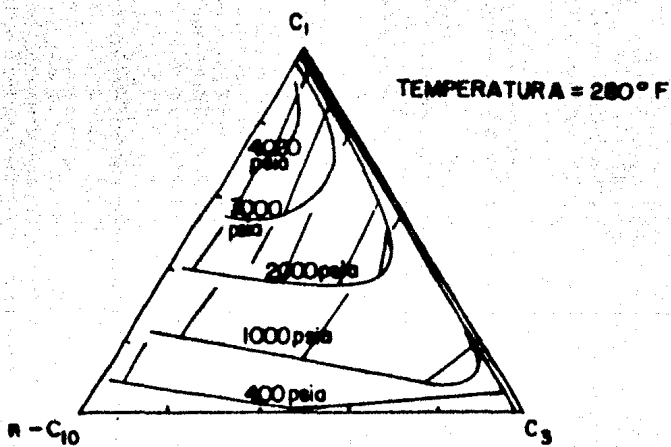


FIG. 12 INFLUENCIA DE LA PRESION SOBRE LA COMPOSICION DE UNA MEZCLA A TEMPERATURA CONSTANTE.

APENDICE A

DEMOSTRACION DE ECUACIONES

$$C = C_e S_e + C_v S_v \quad (5)$$

Partiendo de la definición de concentración (C)

$$C = \frac{\text{NUMERO DE MOLES DE LA MEZCLA}}{\text{UNIDAD DE VOLUMEN DE LA MEZCLA}}$$

$$= \frac{\text{NUMERO DE MOLES DE LIQUIDO} + \text{NUMERO DE MOLES DE VAPOR}}{\text{UNIDAD DE VOLUMEN DE LA MEZCLA}}$$

$$= \frac{\frac{m_e \text{ (EN V)}}{M_e} + \frac{m_v \text{ (EN V)}}{M_v}}{V} ;$$

$$C = \frac{\frac{\rho_e V_e}{M_e} + \frac{\rho_v V_v}{M_v}}{V}$$

$$\text{pero: } \frac{V_e}{V} = S_e$$

$$\frac{V_v}{V} = S_v$$

$$\frac{m_e}{M_e} = C_e$$

$$\frac{m_v}{M_v} = C_v$$

$$\therefore C = C_e S_e + C_v S_v \quad \text{l.q.q.d.}$$

de donde se deduce que los moles de una fase dada por unidad de volumen por unidad de volumen, es el producto de la saturación de la fase "S" y la concentración de

la misma "C". De la misma forma se obtiene el total de moles de la componente "i" por unidad de volumen.

$$C_i = C_{ie} S_e + C_{iv} S_v$$

Demostración de las ecuaciones de balance molar (12) y (13).

Partiendo de la definición de que:

$$n = n_e + n_v$$

y que para una componente (i) tenemos que:

$$Z_i n = X_i n_e + y_i n_v \quad (\text{total de masa})$$

$$\text{como: } y_i = K_i X_i$$

$$Z_i n = X_i n_e + K_i X_i (n - n_e)$$

$$Z_i n = X_i n_e + n K_i X_i - n_e K_i X_i$$

$$Z_i (n) = X_i (n_e + n K_i - n_e K_i)$$

$$Z_i (n) = X_i [n_e + K_i (n - n_e)]$$

Despejando X_i

$$\text{si: } n - n_e = n_v$$

$$X_i = \frac{Z_i (n)}{n_e + K_i (n - n_e)}$$

$$X_i = \frac{Z_i (n)}{n_e + K_i n_v}$$

$$n_e = n - n_v$$

$$X_i = \frac{Z_i(n)}{n - n_v + K_i n_v}$$

$$X_i = \frac{Z_i(n)}{n + n_v(K_i - 1)} \quad (\text{A.1})$$

Dividiendo (A.1) entre "n" obtenemos que:

$$X = \frac{\frac{Z_i}{n_v(K_i - 1)}}{\frac{n}{n} + 1} \quad (\text{A.2})$$

Esta expresión A.2 corresponde a la Ec. 12 del texto de este trabajo.

Esto implica que también se cumple que:

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{Z_i}{n_v(K_i - 1)}}{\frac{n}{n} + 1} = 1 \quad (\text{Ec. 14})$$

El mismo procedimiento anterior puede seguirse para demostrar las ecuaciones 13 y 15 y por supuesto también se cumple la ecuación 2.

Demostración de la ecuación (16)

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} \quad (16)$$

Se parte de la definición de centro de masa (PcM) la cual tiene por objeto concentrar todas las masas (velocidades) y las fuerzas que actúan sobre un sistema en una componente (punto) con el fin de tener una idea de la velocidad promedio con la cual se mueven cada una de las componentes del sistema.

Por definición sabemos que:

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

y

$$\vec{P} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Donde:

\vec{p} = momentum total del centro de masa

Si estos conceptos los aplicamos a nuestro problema, tenemos que:

En un sistema (yacimiento) en el cual fluyen "n" componentes hidrocarburos con una velocidad (v_i) determinada y cada una de estas componentes posee una " ρ_i " entonces si nosotros queremos expresar la velocidad promedio con la que se mueven las componentes tendremos la siguiente expresión:

$$V \sum_{i=1}^n \rho_i = \sum \rho_i v_i \quad (A.3)$$

Donde:

$V\rho_i$ = momentum por unidad de volumen

De la ecuación (A.3) se obtiene:

$$V = \frac{\sum \rho_i v_i}{\sum \rho_i} \quad (A.4)$$

La utilidad de V es la de poder manejar la solución como si se tratase

de un solo componente.

El momentum (A.3) por unidad de volumen en solución es igual a la su
ma de los momentum de las componentes individuales.

APENDICE B

APROXIMACION DE DERIVADAS USANDO SERIES DE TAYLOR

Las series de Taylor son la base principal usada en la aproximación de derivadas por diferencias finitas. Considerese una función $f(x)$. El valor de esta función en " $x+\Delta x$ " se puede expresar en términos de las derivadas y del valor de la función en " x " como sigue:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x + \dots, 0$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i + \dots \quad (\text{B.1})$$

Despejando la primera derivada de esta ecuación tenemos que:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \dots = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{B.2})$$

En donde $O(\Delta x)$ es una notación para indicar que el error es de orden Δx^2 entonces una aproximación a la primera derivada en el punto i es:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (\text{B.3})$$

En esta aproximación se usa una diferencia progresiva

En forma similar a la ecuación (1)

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \dots \quad (\text{B.4})$$

De donde:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i-1} - f_i}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i - \dots = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{B.5})$$

Por lo que otra aproximación de la primera derivada, en donde se utiliza una diferencia regresiva es:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (\text{B.6})$$

Un procedimiento para obtener una aproximación para la segunda derivada es el siguiente:

Sumando las ecuaciones (1) y (4)

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + (\Delta x)^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^4}{12} \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_i + \dots$$

de donde:

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \left. \frac{d^4f}{dx^4} \right|_i - \dots = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

entonces:

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{B.7})$$

BIBLIOGRAFIA

- 1.- West, W.J., Garvin, W.W., and Sheldon, J.W. "Solution of the Equation of Unsteady State Two-Phase Flow in Oil Reservoir", Trans. AIME, 201, 217 (1954)
- 2.- Collins, R.E. Flow of Fluids Through Porous Materials, New York, Reinhold Publishing Corp. (1961).
- 3.- Taylor, J. G. Distribution of Hydrocarbon Fluids and Their Compositions in Volatile Oil Reservoirs During Depletion, Ph. D. Dissertation, Stanford University (June, 1966).
- 4.- McFarlane, R.C. Unsteady-State Distributions of Fluid Compositions in Two-Phase Petroleum Reservoirs Undergoing Gas Injection, Ph. D. Dissertation, Stanford University (April, 1966).
- 5.- Price, H. S. and Domohue, D.A.T. "Isothermal Displacement Processes with Interphase Mass Transfer", Society of Petroleum Engineers Journal, 7 , 105 (June, 1967).
- 6.- Culham, W.E. Experimental and Numerical Simulation of Two Phase Flow with Interphase Mass Transfer In One and Two Dimensions, Ph. D. Dissertation, The Pennsylvania State University. (June, 1968).
- 7.- Roebuck I. F., Jr., Henderson, G.E., Douglas, J., Jr. and Ford, W. T. "The Compositional Reservoir Simulator; Case 1-The Linear Model", Society of Petroleum Engineers Journal, 9, 115 (March, 1969)
- 8.- Snyder, L. J. "Two-Phase Reservoir Flow Calculations", Society of Petroleum Engineers Journal, 9, 170 (June, 1969).

- 9.- Sage, B.H., and Lacey, W.N. "Volumetric and Phase Behavior of Hydrocarbons, Gulf Publishing Company.
- 10.- A Two Dimensional Compositional Numerical Reservoir Simulator was Constructed this Model Could Simulate Laboratory Experimental Data Very Well.
- 11.- Essenfeld, M. "Mathematical Simulation of Solution Gas Drive in a Two-Dimensional System" Pennsylvania University (June 1970).
- 12.- Tsutsumi, G., Dixon, N.T. "Mathematical Simulation of Two-Phase Flow with Interphase Mass Transfer in Petroleum Reservoirs" Society of Petroleum Engineers of AIME (Oct., 1972).
- 13.- A. Spivak, and T.N. Dixon, "Simulation of Gas-Condensate Reservoirs" Society of Petroleum Engineers of AIME. (Jan, 1973).
- 14.- Lynne, T. Fussell, and D.D. Fussell, "An Iterative Sequence for Compositional Reservoir Models Incorporating the Redlich-Kwong Equation of State. AIME (Oct. 1977).
- 15.- U. S. Geological Survey "Reservoir Simulation Manual". Scientific Software Corporation GS Contract No. 14-08-0001-13926 (1975).
- 16.- John M. Campbell "Oil Property Evaluation" by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1965).