

2ej  
65



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE QUIMICA**

**ESTUDIO DE LOS NUMEROS ADIMENSIONALES  
QUE SE APLICAN EN LA INGENIERIA QUIMICA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO QUIMICO  
P R E S E N T A  
SAMUEL PEREZ BLAS**

**1 9 8 6**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

- I.- INTRODUCCION.
- 2.- METODOS DEL ANALISIS DIMENSIONAL
  - a) Método algebraico.
  - b) Teorema Pi de Buckingham
  - c) Método matricial
  - d) Adimensionalización de ecuaciones de movimiento.
- 3.- NUMEROS ADIMENSIONALES EN :
  - FLUJO DE FLUIDOS.
- 4.- NUMEROS ADIMENSIONALES EN:
  - TRANSFERENCIA DE CALOR.
- 5.- NUMEROS ADIMENSIONALES EN:
  - TRANSFERENCIA DE MASA.
- 6.- NUMEROS ADIMENSIONALES EN:
  - CINETICA QUIMICA.
- 7.- CONCLUSION.
- 8.- BIBLIOGRAFIA.

Estudios realizados sobre los números adimensionales que se aplican a la ingeniería química. En las operaciones unitaria, tales como:

- a) Flujo de fluidos
- b) Transferencias de calor
- c) Transferencias de masa
- d) Cinética química

#### I N T R O D U C C I O N

Los números adimensionales son una valiosa herramienta con la que cuenta la — ingeniería química, para determinar las características, propiedades y descripción de la situación en la que se encuentra el proceso o sistemas en estudio.

Los números adimensionales se derivan de la teoría del análisis dimensional, — donde se arreglan las variables de cierta forma para representar cambios de fenómenos, físicos o químicos y factores que describan el proceso.

El estudio de los números adimensionales que se realiza, suministra el nombre y origen del número adimensional, fórmula, significado, así como campo de la — aplicación.

Los números adimensionales que se aplican en la ingeniería química se emplean para ayudar a determinar las variables de importancia, para el sistema en estudio.

Los números adimensionales son parámetros donde se relacionan las variables — entre sí, de tal forma que sus dimensiones se modifican entre sí.

Debido a la gran cantidad y diversidad de procesos en la ingeniería química — se hace este estudio, para resaltar la importancia de estos parámetros. Mencionando los más importantes en cada operación unitaria, así como presentando en desarrollo analítico, para poder determinar fácilmente estos números adimensionales cuando se tenga necesidad de utilizarlos.

Los números adimensionales se obtienen de la siguiente forma:

- a) Se tiene un sistema o proceso en estudio
- b) Por experimentación se determinan las variables que represente un fenómeno químico o físico.
- c) Se aplica la técnica matemática del análisis dimensional dependiendo del número de variables, posteriormente se analizan.
- d) Se obtienen varios números adimensionales, con variables relacionados entre sí.
- e) Se hacen arreglos entre los números adimensionales, para obtener relaciones fundamentales de la forma:

$$N_{D_1} = f ( N_{D_2} \dots N_{D_3} ) \dots (1)$$

- f) Estos números adimensionales pasan a ser parámetros de medida que describan o representen las características de un proceso.

La cantidad y aplicación de los números adimensionales va extendiéndose a medida que aumenta el conocimiento de la ingeniería química. Para su mejor aplicación hay que clasificarlos de acuerdo a su campo o área donde se utilizan, así como especificando su enfoque práctico. Esto se hace con el objeto de manejar conjuntamente toda las áreas de la ingeniería química, en las que son necesarios los números adimensionales, dando como resultado que su búsqueda no sea tan compleja.

El estudio de los números adimensionales que se va a desarrollar, es independiente, para cada proceso y operación unitaria, con el objeto de estudiar con mayor profundidad y que se le de mayor importancia a las propiedades del sistema en estudio.

Cuando una variable es una propiedad característica del sistema y no puede determinarse directamente por experimentación, se recurre al número adimensional que esta relacionado con la variable del proceso que se requiere evaluar.

El empleo del número adimensional para determinar la variable a conocer, es indirecto, y se aplica mediante el uso de tablas de valores, correlaciones, -

gráficas y extrapolaciones de valores.

El número y aplicación de los números adimensionales va extendiéndose a medida que va aumentando el conocimiento de la ingeniería química. Para su mejor aplicación hay que clasificarlos de acuerdo a su campo o área de aplicación, así como especificando su enfoque práctico. Esto se hace con el objeto de manejar conjuntamente todas las áreas de la — ingeniería química en las que son necesarios los números adimensionales, dando como resultado que la búsqueda y aplicación no sea tan compleja.

El estudio de los números adimensionales que se va a desarrollar es independiente para cada proceso y operación unitaria, con el objeto de estudiar con mayor profundidad y dar más importancia a las propiedades del sistema específico.

Una vez estudiados los números adimensionales, para cada operación unitaria y proceso, se conjuntan globalmente formando un grupo de números adimensionales, que cuando se requiera manejar y aplicar a cualquier problema que — cuando se requiera manejar y aplicar a cualquier problema que se presente sin necesidad de ser especialista en todas las ramas de la ingeniería química.

## ANALISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional es un conjunto de métodos matemáticos, que relaciona a las variables entre sí, para dar como resultado parámetros adimensionales presentes en un sistema.

Este análisis puede proporcionar un medio o camino, para la construcción de ecuaciones físicas a partir del conocimiento de las variables consideradas y sus dimensiones, como todas las variables poseen dimensiones, se establece la utilización de un sistema de unidades o dimensiones.

Este sistema puede ser "fuerza, longitud, tiempo" o "masa, longitud, tiempo" que se relaciona entre sí por medio de la segunda ley de Newton, ( $F=ma$ ).

Los métodos del análisis dimensional son:

- I ) Método algebraico.- para sistemas simples de menos cuatro variables.
- II ) Teorema de II de Buckingham.- Para sistemas de más de cuatro variables.
- III) Métodos matriciales.- Para sistemas de n-esimas variables.
- IV ) Adimensionalización de las ecuaciones de movimiento.- Se aplica este método exclusivamente para fluidos donde su transporte sea ordenado en forma de láminas o capas.

### I.- METODO ALGEBRAICO

Si tenemos que las variables del proceso son: P, Q,  $\gamma$ , E y sus dimensiones en el sistema M.L.T. son:

$$P = \frac{ML^2}{T^3} \quad Q = \frac{L^2}{T} \quad \gamma = \frac{M}{L \cdot T} \quad E = L$$

(5)

La relación de estas cuatro variables se desconoce, pero se sabe que son las únicas variables consideradas en el problema.

La variable de importancia se pone en función de las demás variables que intervengan en el fenómeno:

$$P = (Q, \gamma, E) \dots\dots\dots (1)$$

Basándose en el principio de la homogeneidad dimensional, es evidente que las cantidades consideradas no pueden sumadas o restadas por ser diferentes en sus dimensiones.

Este principio limita la ecuación a una combinación de productos y cocientes de potencias, y raíces de las cantidades consideradas, y que pueden ser expresadas en forma general:

$$P = C Q^a \gamma^b E^c \dots\dots\dots (2)$$

Donde C es la constante sin dimensión, que puede existir en la ecuación, pero no puede obtenerse por medio de métodos adimensionales, pero si puede obtenerse por medio de experimentación. Representando la ecuación dimensionalmente.

$$\frac{ML^2}{T} = C \left[ \frac{E^2}{T} \right]^a \left[ \frac{M}{LT} \right]^b L^c \dots\dots\dots (3)$$

En base a las dimensiones y exponentes utilizadas, se construyen ecuaciones para cada dimensión comparando ambos lados de la ecuación (3) se obtienen:

$$\text{Para } M : 1 = b$$

$$L : 2 = 3a - 2b + c$$

$$T : 3 = -a - 2b$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (2) se tiene  $P = CQE$

La forma de esta ecuación, se ha derivado considerando las dimensiones de las variables que intervienen en el problema.

## II.- Método de Buckinhaus

El procedimiento para obtener números adimensionales a partir del análisis dimensional desarrollado por Buckinhaus es el siguiente:

1.- Seleccionar las variables independientes que intervienen en el proceso, y establecer la siguiente ecuación homogénea:

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0$$

2.- Establecer un sistema de unidades dimensionales, por ejemplo (MLT) (masa longitud, tiempo).

3.- El número total de números adimensionales para cualquier sistema será:

$$\Pi_3 = \text{número de variables} - \text{número de dimensiones} = n-k$$

4.- Seleccionar un grupo de variables ( $\bar{Q}_i$ ) igual al número de dimensiones. El conjunto designado de variables ( $\bar{Q}_i$ ) deberá tener las siguientes características.

- a) Tener todas las dimensiones del sistema.
- b) Dos variables ( $\bar{Q}_i$ ) no tendrán las mismas dimensiones.

Cada número adimensional se obtendrá al plantear una ecuación donde hay combinación entre el grupo de variables ( $\bar{Q}_i$ ) y las variables (Q) restantes del sistema. El resultado de la resolución de la ecuación dimensional con sus variables, será el número adimensional.

6.- Todos los números adimensionales obtenidos, para cualquier sistema, serán independientes entre sí, y se relacionarán de la siguiente manera:

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \dots \Pi_{n-k}) = 0$$

Pueden realizarse combinaciones entre estos números adimensionales, para obtener otros.

Ejemplo.- Considérese el flujo a través de una tubería, donde

se tienen las siguientes variables independientes:

$$[\Delta P, L, D, v, \mu, \rho, k]$$

1) Se establece la ecuación homogénea:

$$f[\Delta P, L, D, v, \mu, \rho, k] = 0$$

2.- Se establece el sistema de unidades MLT. Donde las variables, tienen las siguientes dimensiones.

$$Q_1 = \Delta P = \frac{M}{L^2 T^2}$$

$$Q_2 = L = L$$

$$Q_3 = D = L$$

$$Q_4 = v = \frac{L}{T}$$

$$Q_5 = \mu = \frac{M}{L T}$$

$$Q_6 = \rho = \frac{M}{L^3}$$

$$Q_7 = k = L$$

3.- El número de parámetros dimensionales será:

$$\text{variables} = 7$$

$$n_s = 7 - 3 = 4$$

$$\text{Dimensiones} = 3$$

4.- El grupo de variables seleccionadas son :

$$\bar{Q}_1 = \Delta P, \quad \bar{Q}_3 = D, \quad \bar{Q}_4 = v$$

5.- formación de los números dimensionales:

$$\pi_1 = \Delta P^a D^b v^c L \dots\dots (a)$$

Substituyendo sus dimensiones en la ecuación (a) quedando:

$$\pi_1 = \left[ \frac{M}{L^2 T^2} \right]^a [L]^b \left[ \frac{L}{T} \right]^c L \dots\dots (b)$$

Estableciendo una ecuación, para cada dimensión con los exponentes de las variables :

$$a + b + c = 0 \quad : L \dots\dots (c)$$

$$a = 0 \quad : M \dots\dots (d)$$

$$-2a - c = 0 \quad : T \dots\dots (e)$$

Donde los resultados de las ecuaciones son:

$$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 1$$

Substituyendo los resultados en la ecuación (b) queda :

$$\pi_1 = \frac{L}{D}$$

$$\pi_2 = \Delta P^a D^b \nu^c \mu$$

.....(a)

$$\pi_2 = \left[ \frac{M}{L^2 T} \right]^a [L]^b \left[ \frac{L}{T} \right]^c \frac{M}{L T}$$

..... (b)

$$\begin{aligned} I : & -1 -a + b + c = 0 \\ II : & \quad \quad 1 + a = 0 \\ T : & \quad \quad -1 -2a -c = 0 \end{aligned}$$

El resultado de las ecuaciones son:

$$a = -1 \quad b = -1 \quad c = 1$$

Por lo tanto

$$\pi_2 = \frac{\mu \nu}{\Delta P D}$$

$$\pi_3 = \Delta P^a D^b \nu^c \rho$$

$$\pi_3 = \left[ \frac{M}{L^2 T} \right]^a [L]^b \left[ \frac{L}{T} \right]^c \frac{M}{L^3}$$

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} -3 -a + b + c &= 0 \quad \dots I \\ 1 + a &= 0 \quad \dots II \\ -2a -c &= 0 \quad \dots T \end{aligned}$$

El resultado de las ecuaciones son:

$$a = -1 \quad b = 0 \quad c = -2$$

Por lo tanto  $\pi_3 = \frac{\rho \nu^2}{\Delta P}$

$$\pi_4 = \Delta P^a D^b \nu^c K$$

(a)

$$\pi_4 = \left[ \frac{M}{L^2 T} \right]^a [L]^b \left[ \frac{L}{T} \right]^c L$$

(b)

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 1 -a + b + c &= 0 \\ a &= 0 \\ -2a -c &= 0 \end{aligned}$$

El resultado de las ecuaciones es:

$$a = 0 \quad b = -1 \quad c = 0$$

Por lo tanto:

$$\pi_4 = \frac{K}{D}$$

Los números dimensionales obtenidos son:

$$g \left[ \frac{L}{D}, \frac{\mu v}{\Delta P D}, \frac{\rho v^2}{\Delta P}, \frac{\kappa}{D} \right]$$

Los números adimensionales obtenidos pueden agruparse entre sí, para dar otros parámetros adimensionales.

Los números adimensionales encontrados, representan las características y propiedades de un sistema en estudio.

En general el teorema de Buckingham's se aplica para sistemas complejos de más de cuatro variables.

### III.- Análisis dimensional por el método de matrices.

El análisis dimensional por el método de matrices funciona en general para n número de variables del sistema en estudio, el mecanismo es el siguiente:

Considerando el sistema de un fluido con transferencia de calor en un medio poroso las variables que intervienen en el proceso forman la siguiente ecuación homogénea:

$$f(L, t, \mu, P, \varepsilon, c, D_{AB}, k, km, \beta, C_p, T, v, D, \rho) = 0$$

Expresando las variables con sus dimensiones en el sistema L. t.M.T. las variables quedan de la siguiente forma:

1..L = L, 2..t = t, 3.. $\mu = \frac{M}{L t}$ , 4..P =  $\frac{M}{t^2 L}$ , 5..g =  $\frac{L}{t^2}$   
 6..c =  $\frac{L}{t}$ , 7.. $\sqrt{A_3} = \frac{M}{t^2}$ , 8.. $D_{AB} = \frac{L^2}{t}$ , 9..k =  $L^2$ , 10..km =  $\frac{M L}{T L^3}$   
 11.. $\beta = \frac{1}{T}$ , 12..Cp =  $\frac{L^2}{T}$ , 13..T = T, 14..v =  $\frac{L}{t}$ , 15..D = L,  
 16.. $\rho = \frac{M}{L^3}$

Donde:

L=Longitud, t=tiempo,  $\mu$ =viscosidad, P=presión, g=aceleración, c=velocidad,  $\sqrt{A}$ =Esfuerzo cortante,  $D_{AB}$ =Difusividad, k=cte. de permeabilidad, km=conductividad termica,  $\beta$ =Coef. de expansión, Cp=capacidad calorífica, T=temperatura; v=velocidad.

Con los exponentes de las dimensiones se construye una matriz. Poniendo en los renglones horizontales las variables en análisis y en la columna vertical las dimensiones L M t T.

La distribución de la matriz es la siguiente:

| Coefficientes | k | k <sub>1</sub> | k <sub>2</sub> | k <sub>3</sub> | k <sub>4</sub> | k <sub>5</sub> | k <sub>6</sub> | k <sub>7</sub> | k <sub>8</sub> | k <sub>9</sub> | k <sub>10</sub> | k <sub>11</sub> | k <sub>12</sub> | k <sub>13</sub> | k <sub>14</sub> | k <sub>15</sub> | k <sub>16</sub> |
|---------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Variables     | L | t              | $\mu$          | P              | g              | c              | $\sqrt{A}$     | $D_{AB}$       | km             | $\beta$        | Cp              | T               | v               | D               | $\rho$          |                 |                 |
| M             | 0 | 0              | 1              | 1              | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 1              | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 1               |                 |
| L             | 1 | 0              | -1             | -1             | 1              | 1              | 0              | 2              | 2              | 1              | 0               | 2               | 0               | 1               | 1               | -3              |                 |
| t             | 0 | 1              | -1             | -2             | -2             | -1             | -2             | -1             | 0              | -3             | 0               | -2              | 0               | -1              | 0               | 0               |                 |
| T             | 0 | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | -1             | -1              | -1              | 1               | 0               | 0               | 0               |                 |

En base a esta matriz se hace la determinación del número de productos dimensionales, con la siguiente regla:

Cantidad de producto = Números de variables - Rango de matriz adimensional

$$N = \nu - R$$

Para la evaluación del rango de la matriz, tomamos como referencia, la cantidad de dimensiones que intervienen en el análisis que son cuatro (L M t T). Con relación a esta cantidad se toman las columnas extremos de la derecha que contienen

todas las dimensiones; y formamos el siguiente determinante;

$$D = \begin{vmatrix} k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ T & v & D & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Donde  $D \neq 0$ ; Rango es  $R = 4$

La cantidad total de números adimensionales en este sistema es:

$$N = n - 4 = 16 - 4 = 12$$

La resolución de la matriz es la siguiente:

Se construyen ecuaciones a partir de la matriz con todos los exponentes por cada dimensión, que dando cuatro ecuaciones para M, L, t, T y estos son:

$$\text{Para M: } k_3 + k_4 + k_7 + k_{10} + k_{16} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Para L: } k_1 - k_3 - k_4 + k_5 + k_6 + 2k_8 + 2k_9 + k_{10} + 2k_{12} + k_{14} + k_{15} - 3k_{16} = 0 \dots(2)$$

$$\text{Para t: } k_2 - k_3 - 2k_4 - 2k_5 - k_6 - 2k_7 - k_8 - k_9 + 3k_{10} - 2k_{12} - k_{14} = 0 \dots(3)$$

$$\text{Para T: } -k_{10} - k_{11} - k_{12} + k_{13} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores en términos de los coeficientes;  $k_{13}, k_{14}, k_{15}, k_{16}$  nos da

$$k_{13} = k_{10} + k_{11} + k_{12}$$

$$k_{14} = k_2 - k_3 - 2k_4 - k_6 - 2k_7 - k_8 - 3k_{10} - 2k_{12} - 2k_5$$

$$k_{15} = -k_1 - k_2 - k_3 + k_5 - k_7 - k_9 - 2k_9 - k_{10}$$

$$k_{16} = -k_3 - k_4 - k_7 - k_{10}$$

Donde con estos coeficientes se obtienen las soluciones de la matriz.

Para obtener la solución de valores numéricos de los coeficientes, se diseña una matriz de cantidad o número de productos adimensionales contra coeficientes exponenciales de

las variables (16) tomando las siguientes bases.

a) Se asignan valores para las  $k_1, \dots, k_{12}$  como siguen:

Cuando:

$$k_1 = 1 \quad k_2 = \dots = k_{12} = 0$$

$$k_2 = 1 \quad k_1 = 0 \quad k_3 = \dots = k_{12} = 0$$

$$k_3 = -1 \quad k_1, k_2 = 0 \quad k_4 = \dots = k_{12} = 0 \quad \text{etc.}$$

Esta operación se realizará hasta  $k_{12} = 1 \quad k_1 = \dots = k_{11} = 0$

b) Se sustituyen los valores de los coeficientes en la matriz. Los valores a tomar serán los que se indican en las ecuaciones (5), (6), (7) y (8).

Representamos las soluciones de la matriz como una combinación lineal y estas las presentamos en el siguiente cuadro:

Las soluciones de la matriz son:

| Números        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |          |          |       |       |        |         |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|-------|-------|--------|---------|
| Adimensionales | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ | $k_6$ | $k_7$ | $k_8$ | $k_9$ | $k_{10}$ | $k_{11}$ | $k_{12}$ | $\mu$ | $\nu$ | $\rho$ | $\beta$ |
| 1              | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | 0     | -1     | 0       |
| 2              | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | 1     | -1     | 0       |
| 3              | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | -1    | -1     | -1      |
| 4              | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | -2    | 0      | -1      |
| 5              | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | -2    | 1      | 0       |
| 6              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | -1    | 0      | 0       |
| 7              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | -2    | -1     | -1      |
| 8              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0     | -1    | -1     | 0       |
| 9              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0        | 0        | 0        | 0     | 0     | -2     | 0       |
| 10             | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1        | 0        | 0        | 0     | -3    | -1     | -1      |
| 11             | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 1        | 0        | 1     | 0     | 0      | 0       |
| 12             | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 1        | 1     | -2    | 0      | 0       |

La matriz de soluciones determina la relación entre variables y exponentes por cada número adimensional.

Por cada renglon (1.....12) de la matriz es un número adimensional con sus variables y exponentes, que son los siguientes

$$F \left[ \frac{L}{D}, \frac{t\delta}{D}, \frac{\sqrt{D}\delta}{\mu}, \frac{P}{\rho v^2}, \frac{v^2}{g}, \frac{v}{c}, \frac{\rho v^2 D}{\gamma}, \frac{\mu}{\rho Q}, \frac{D^2}{K}, \frac{\sqrt{D}\delta}{k_m}, \frac{BT}{c_p \mu}, \frac{k_m}{c_p \mu} \right]$$

Nosotros podemos hacer combinaciones entre estos productos dimensionales dando;

Los Números Adimensionales obtenidos son:

$$F \left[ \frac{L}{D}, \frac{t\delta}{D}, \frac{\sqrt{D}\delta}{\mu}, \frac{P}{\rho v^2}, \frac{D^3 \rho g^2 \rho \delta \delta_0}{\mu^2}, \frac{v}{c}, \frac{\rho v^2 D}{\gamma}, \frac{\mu}{\rho Q}, \frac{k_m D}{Q}, \frac{h D}{k_m}, \frac{\rho^3 \rho^2 \beta T}{\mu^2}, \frac{k_m}{c_p \mu} \right]$$

Donde los números adimensionales obtenidos son:

- 1.- Longitud/Diámetro
- 2.- Tiempo adimensional
- 3.- Número de Reynolds
- 4.- Coeficiente de Presión
- 5.- Número de Grashof ( Transferencia de masa)
- 6.- Número de Mach
- 7.- Número de Traude
- 8.- Número de Schmidt
- 9.- Número de Nusselt (transferencia de masa)
- 10.- Número de Nusselt (transferencia de calor)
- 11.- Número de Grashof (transferencia de calor)
- 12.- Número de Prandtl

IV.- Análisis dimensional en las ecuaciones de conservación.

INTRODUCCION.- Las ecuaciones de movimiento o variación describen el cambio de momentum, temperatura, y concentración de una especie A, con respecto al tiempo y posición de un sistema.

A partir de estas ecuaciones de movimiento se puede llegar a funciones adimensionales que caracterizan o describen al sistema en estudio.

1.- Ecuaciones de cambio en flujo de fluidos.

Las ecuaciones que describen el perfil de velocidad de un fluido con respecto a su posición y al tiempo para un fluido viscoso son:

- a) Ecuación de continuidad ( conservación de la materia)
- b) Cantidad de movimiento ( debido al movimiento viscoso)

a) Ecuación de continuidad.- En cualquier sistema que tenga transporte de fluidos, se cumple la conservación de la materia cuya ecuación es:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de materia.} \\ \text{(A)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de entrada} \\ \text{de materia.} \\ \text{(B)} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de salida} \\ \text{de materia} \\ \text{(C)} \end{array} \right] \quad (1)$$

Donde el balance de materia se realiza en un elemento diferencial del sistema, y en ecuación para un elemento fijo en el espacio.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right] \dots \dots (2)$$

Introduciendo el operador  $\nabla$  para simplificar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \dots \dots (3)$$

La ecuación 2 representa la variación neta con que disminuye el flujo de materia por unidad de volumen.

Efectuando las derivadas;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \dots (4)$$

Simplificando

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathcal{V} \dots (5)$$

Donde  $\frac{D}{Dt}$  representa la derivada con respecto al tiempo, siguiendo el movimiento del fluido. Y la ecuación (5) es la ecuación de continuidad.

Para fluidos incomprensibles si  $\rho = \text{cte.}$

$$(\nabla \cdot \mathcal{V}) = 0 \dots (6)$$

b) Ecuaciones de cantidad de movimiento

Para un fluido en movimiento que lleva una velocidad, viscosidad y densidad determina el balance de momentum es el siguiente.

|   |   |   |   |  |   |   |
|---|---|---|---|--|---|---|
| Velocidad de acumulación de cantidad de movimiento. | = | Velocidad de entrada de cantidad de movimiento. | - | Velocidad de salida de cantidad de movimiento. | + | Suma de fuerzas que entran sobre el sistema |
|---|---|---|---|--|---|---|

.....(7)

Las velocidades de flujo de cantidad de movimiento es debido a dos mecanismos:

- a) Convección.-Debido al movimiento global del fluido.
- b) Transporte molecular.-Debido al gradiente de velocidad con influencia de la viscosidad.

La ecuación de cantidad de movimiento describe la variación que tiene lugar en un elemento diferencial que sigue el

movimiento del fluido, siendo la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho g_x \quad \dots (8)$$

Simplificando e introduciendo el operador  $\bar{\nabla}$

$$I \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho v = - \left[ \bar{\nabla} \cdot \rho v v \right] - \left[ \bar{\nabla} \cdot \tau \right] + \bar{\nabla} P + \rho g_x \dots (9)$$

II
III
IV
V

El significado de estos factores son:

- I.- Velocidad de acumulación de cantidad de movimiento.
- II.- Velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección.
- III.- Velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso.
- IV.- Fuerza de trabajo debido a la presión que actúa sobre el fluido.
- V.- Fuerza de gravitación.

Para la aplicación de las ecuaciones de continuidad y movimiento en problema de flujo estacionario viscoso, se simplifican las ecuaciones (3) y (9) considerando o descartando términos que no estén presentes en el sistema en estudio. Para determinar que términos han de descartarse nos valemos de la percepción acerca del comportamiento del sistema: tipo de flujo, presión, densidad, viscosidad, temperatura, velocidad, etc. La ventaja de este procedimiento es que se obtiene automáticamente la ecuación que describe al movimiento en cuestión.

APLICACION DE LAS ECUACIONES DE TRANSFERENCIAS DE MOMENTUM EN EL ANALISIS  
DIMENSIONAL

Para aplicar las ecuaciones de continuidad (3) y momentum (4), en el análisis dimensional y obtener números adimensionales para determinado sistema, se procede de la siguiente forma:

- 1.- Se establece el sistema o proceso a estudiar.
- 2.- Se determinan las variables que representan las propiedades dimensionales y características del sistema.
- 3.- Se definen los parámetros adimensionales, tanto como variables que se establezcan, para adimensionalizar las ecuaciones de movimiento.
- 4.- Se establece la ecuación de movimiento adaptada al sistema problema.
- 5.- Se introduce los parámetros adimensionales por las variables en las ecuaciones de movimiento.
- 6.- Se obtienen ecuaciones adimensionales con los números adimensionales que describen el proceso.

A continuación se presenta el problema de un fluido fluyendo a través de una tubería donde se tienen las siguientes variables.  $V$  ( velocidad ) ( densidad ) ( viscosidad )  $D$  ( diámetro tubo )  $P$  ( presión ).

Se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$1.- \quad v^* = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{\text{vector velocidad}}{\text{velocidad característica del sistema.}}$$

$$2) \quad x^* = \frac{x}{D} \quad 3) \quad y^* = \frac{y}{D} \quad 4) \quad z^* = \frac{z}{D}$$

$$5) \quad t^* = \frac{t v}{D} \quad 6) \quad p^* = \frac{(p - p_0)}{V} \quad 7) \quad \nabla^* = D \nabla$$

Se considera la  $\beta = \text{cte}$ ,  $\mu = \text{cte}$  en las ecuaciones de transporte cuyo resultado final queda:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{--- (6)}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\Delta p + \mu \nabla^2 v + \beta g \quad \text{--- (7)}$$

Expresando estas dos ecuaciones en función de los parámetros adimensionales  $\bar{v} = v^* v$  para todas las variables

$$\left( \frac{1}{D} \nabla^* \cdot v^* v \right) = 0 \quad \text{--- (10)}$$

$$\rho \left( \frac{v}{D} \right) \frac{D}{Dt} (v^* v) = - \left( \frac{1}{D} \nabla^* \cdot p^* \beta v^2 \right) + \mu \frac{1}{D^2} \nabla^{*2} (v^* v) + \beta g \quad \text{--- (11)}$$

Multiplicando la ecuación (10) por  $\frac{D}{V}$  y la ecuación (11)

por  $\frac{D}{\beta v^2}$  se obtiene.

$$\nabla^* \cdot v^* = 0 \quad \text{--- (12)}$$

$$\frac{Dv^*}{Dt} = -\nabla^* p^* + \left[ \frac{\mu}{Dv\beta} \right] \nabla^{*2} v^* + \left[ \frac{gD}{v^2} \right] \frac{\bar{g}}{g} \quad \text{--- (13)}$$

$$\frac{Dv^*}{Dt} = -\nabla^* p^* + \left[ \frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} v^* + \left[ \frac{1}{Fr} \right] \frac{\bar{g}}{g} \quad \text{--- (14)}$$

La ecuación (I4) corresponde a la de momentum en forma adimensional, para el sistema de un fluido fluyendo á través de una tubería. Los números adimensionales obtenidos definen las características del transporte y son los siguientes.

$$Re = \frac{D v \rho}{\mu} = \text{Número de Reynolds}$$

$$Fr = \frac{v^2}{g D} = \text{Número de Froude}$$

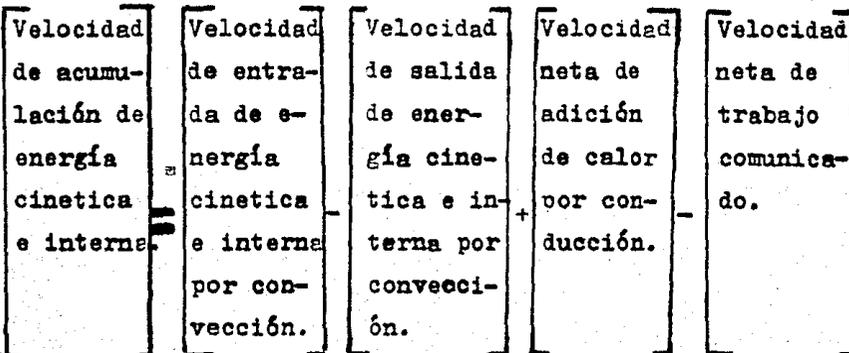
Para cada tipo de sistema se encontrarán diferentes números adimensionales, que representan las características de cada sistema en estudio.

2.-Ecuaciones de cambio en transferencia de calor.

Las ecuaciones de cambio de transferencia de calor se desarrollan a través de un balance de energía aplicado a un fluido que se mueve en un ducto.

Estas ecuaciones de movimiento determinan el perfil de temperatura, densidad de flujo de calor, así como agrupación de variables en números adimensionales que representan la descripción del proceso.

El balance de energía para un fluido fluyendo acompañado de transición de calor en un sistema no isotermico, para un elemento diferencial perpendicular a la dirección del flujo es:



Esta es la ecuación que corresponde a la primera ley de la termodinamica expresada para un sistema no isotermico.

La ecuación general del balance de energía se basa en las ecuaciones de continuidad y movimiento que describen y determinan la trayectoria del fluido.

La expresión general de los diferentes tipos de energía que se presentan en transferencia de calor son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) &= - \left( \nabla \cdot \rho v \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right) - \nabla \cdot q + \rho (v, g) \\
 &\quad - \nabla \cdot p v - \left( \nabla \cdot [G \cdot v] \right)
 \end{aligned}$$

(1)
(2)
(3)
(4)

(5)
(6)

- 1.- Velocidad de ganancia de energía por unidad de volumen.
- 2.- Velocidad de entrada por medio de convección por unidad de volumen.
- 3.- Velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debido a conducción.
- 4.- Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de gravitación.
- 5.- Velocidad de trabajo comunicado al fluido debido a fuerzas de presión.
- 6.- Velocidad de trabajo comunicado al fluido por fuerzas viscosas.

Para la mayor parte de las aplicaciones ingenieriles es conveniente expresar la ecuación de energía en función de temperatura y del calor específico del fluido en lugar de la energía interna.

Escribiendola en estos terminos y teniendo en cuenta que:

$$= f (V, T)$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = - (\nabla \cdot q) - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right) (\nabla \cdot V) + \mu \Phi_v$$

Esta es la ecuación de energía en función de las densidades de flujo y cantidad de movimiento.

Introduciendo las propiedades del transporte ( $\mu, k$ ) en la ecuación de energía nos da que:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right) (\nabla \cdot V) + \mu \Phi_v$$

Donde  $q = -k \frac{dT}{dy}$  = Ec. De la ley de Fourier para conductividad entre sólidos. Establece que la densidad de flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura.

$\Phi_v$  = Energía mecánica disipada por efectos viscosos y llamada función de disipación viscosa.

La ecuación general de energía establece que la temperatura de un elemento móvil varía debido a:

.) Conducción de calor.

..) Efectos de expansión por calentamiento viscoso.

Uso de las ecuaciones de cambio en:

|            |  |
|------------|--|
| Convección | $\left[ \begin{array}{l} \text{Natural} \\ \text{Forzada} \end{array} \right.$ |
| conduccion |  |

1.- Continuidad  $-\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{U})$  si  $\rho = \text{cte.}$   $(\nabla \cdot \mathbf{U})=0$

2.- Movimiento  $\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla P - (\nabla \cdot \mathbf{G}) + \rho \mathbf{g}$  convección forzada

2'.- Movimiento  $\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{G} - \rho \mathbf{g} (T-T')$  convección natural

3.- Energía  $\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - T \left( \frac{\Delta P}{\Delta T} \right) \nabla \cdot \mathbf{U} + \mu \Phi_{\mathbf{U}}$

a) Con ayuda de 1 y 2 se resuelve 3

b) Se comienzan a descartar términos de energía que no se presentan en el sistema.

c) Con la ecuación de continuidad 1 se descartan miembros de la ecuación de movimiento 2 de donde se obtiene el perfil de velocidad

Sustituyendo 2 la distribución de velocidad de la ecuación de movimiento de energía 3 puede resolverse la ecuación de energía 3

Estas ecuaciones de cambio y transporte para sistemas de flujo no isotermicos tiene su aplicación en el intervalo del régimen laminar, y sus soluciones son utilizadas en la práctica, constituyendo un eslabón para resolución de problemas complejos.

Aplicación de la ecuación de transferencia de calor en el análisis dimensional.

Con las ecuaciones de cambio de continuidad, movimiento y energía en función de parámetros adimensionales para un determinado sistema se obtienen números adimensionales que caracterizan al sistema.

Para un sistema en el cual la transferencia de calor ocurre por convección forzada las variables que intervienen son:  $v, P, t, T, D, \mu, \rho$ . Los parámetros adimensionales son:

- 1)  $v^* = \frac{v}{V}$
- 2)  $P^* = \frac{P - P_0}{\rho V^2}$  = Presión adimensional.
- 3)  $t^* = \frac{tV}{D}$
- 4)  $T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$  = Temperatura adimensional
- 5)  $x^*, y^*, z^* = \frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D}$  = Coordenadas adimensionales.

Escribiendo las ecuaciones de cambio, continuidad, momentum y energía para la convección forzada en función de estas variables adimensionales, considerando  $\rho = \text{cte.}$ ,  $\mu = \text{cte.}$

Continuidad  $(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$

Momentum  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla P + \rho \vec{g}$

Energía  $\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi$

Introduciendo los parámetros adimensionales  $\vec{v} = v^* V$  obtenemos ecuaciones de transportes adimensionales quedando de la siguiente forma:

a) Continuidad  $(\nabla^* \cdot \vec{v}^*) = 0$

b) Movimiento  $\rho \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{v}^* - \nabla^* P^* + \frac{1}{Pr} \vec{g}^*$

c) Energía  $\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{RePr} \nabla^{*2} T^* + \frac{Br}{RePr} \Phi^*$

Los números adimensionales determinados para este sistema de convección forzada son:

1.-  $Re = \frac{Dv\rho}{\mu}$  = Número de Reynolds.

2.-  $Fr = \frac{v^2}{gD}$  = Número de Froude.

3.-  $Pr = \frac{Cp\mu}{K}$  = Número de Prandtl.

4.-  $Br = \frac{\mu v^2}{K(T-T_0)}$  = Número de Brinkman.

Dependiendo del sistema que se analiza, se presentarán y correlacionarán los números adimensionales que representan las características del proceso. Se verá con mayor profundidad la correlación de estos parámetros en el tema " Números adimensionales en transferencia de calor".

### 3.- Ecuaciones de cambio en transferencia de masa.

El transporte de materia que ocurre entre especies químicas se debe a una diferencia de potencial entre concentraciones de los componentes del sistema.

Las ecuaciones de movimiento de transporte de materia en general se determinan aplicando un balance de materia a una de las especies químicas que se difunden en el sistema.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{materia A.} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{materia A} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{producción} \\ \text{de materia A.} \end{array} \right] = 0$$

Como resultado del balance de materia a un elemento de volumen fijo en el espacio a través del cual fluye una mezcla binaria A y B se obtiene la ecuación de continuidad siguiente:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left( \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = R_A$$

Donde  $N_A$  = La densidad de flujo de masa de la especie A

$R_A$  = Velocidad de reacción.

La ecuación (2) describe la variación de la concentración A con respecto al tiempo para un punto fijo en el espacio.

Simplificando la ecuación (2) queda:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} (\nabla \cdot N_A) = R_A$$

Donde la ecuación (3) es la ecuación de continuidad para el componente A en una mezcla binaria.

La ecuación general que describe el perfil de concentración de una difusión binaria.

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot c_A v^*) = (\nabla \cdot c_{AB} v_{1a}) + R_A$$

Con el objeto de hacer la ecuación (4) manejable en sistemas de transferencia de materia se hacen algunas consideraciones que simplifican y describen al proceso en estudio.

A) Cuando la densidad ( $\rho$ ) y difusividad ( $D_{AB}$ ) son constantes la ecuación (4) se transforma en:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) = D_{AB} \nabla^2 c_A + R_A$$

Esta ecuación representa el transporte de materia de la especie química y difusión del componente A, para sistemas binarios, donde, se utiliza para soluciones líquidas, diluidas

$c_A$  = Concentración del componente A

$\mathbf{v}$  = Velocidad del medio

$D_{AB}$  = Difusividad que representa el coeficiente de transporte de masa

$R_A$  = Velocidad de reacción

3) Cuando la concentración ( $c$ ) y difusividad ( $D_{AB}$ ) son ctes. la ecuación (4) se transforma en.

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla c_A) = D_{AB} \nabla^2 c_A - \frac{c_A}{c} (R_A + R_B)$$

$\mathbf{v}^*$  = Velocidad media molar.

Esta ecuación es aplicable para gases de baja densidad y temperatura y presión constante.

Aplicación de la ecuación de transferencia de masa en el análisis dimensional.

Introduciendo parámetros adimensionales por cada una de las variables que están presentes en las ecuaciones de continuidad, transporte de masa y momentum, se obtienen ecuaciones de cambio con números adimensionales característicos de cada

sistema.

Consideramos el análisis dimensional de las ecuaciones de variación para una mezcla isotérmica de dos fluidos cuya viscosidad ( $\mu$ ), difusividad ( $D_{AB}$ ), densidad y concentración son ctes. donde las ecuaciones de variación para convección natural y forzada son;

a) Continuidad ( $\nabla \cdot \mathcal{V}$ ) = 0

b) Transporte masa  $\frac{Dx_A}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 x_A$

c) Movimiento  $\rho \frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathcal{V} + \begin{cases} = \nabla P + \rho g & \text{convección libre.} \\ = \rho \{ g (I_A - I_{A_0}) \} & \text{forzada.} \end{cases}$

Para convección forzada intervienen las siguientes variables,  $P, t, x$  (Concentración), siendo sus parámetros adimensionales.

1)  $v^* = \frac{v}{v} = \text{Velocidad adimensional}$

2)  $P^* = \frac{P - P_P}{\rho v^2} = \text{Presión adimensional}$       3)  $t^* = \frac{vt}{D} = \text{Tiempo adimensional}$

4)  $x_A^* = \frac{x_A - x_{A_0}}{x_{A_1} - x_{A_0}} = \text{Concentración adimensional}$

Escribiendo las ecuaciones de variación a, b, c, en función de los parámetros adicionales definidos, para convección forzada que dan.

a) Continuidad ( $\nabla^* \cdot \mathcal{V}^*$ ) = 0

b) Transporte masa  $\frac{Dx_A^*}{Dt^*} = 1 \nabla^{*2} x_A^*$

c) Movimiento 
$$\frac{D\mathcal{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathcal{V}^* + \frac{1}{Fr} \frac{\bar{E}}{g}$$

Estas son las ecuaciones de transporte de masa para convección forzada, obteniéndose los números adimensionales como:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \text{Número de Schmit}$$

Para la transferencia de masa isotérmica en forma de convección libre se obtienen las siguientes ecuaciones de variación introduciendo los parámetros adimensionales anteriores

a) Continuidad  $(\nabla^* \cdot \mathcal{V}^*) = 0$

b) Transporte masa 
$$\frac{Dx_A^*}{Dt^*} = \frac{1}{Sc} \nabla^{*2} x_A^*$$

c) Movimiento 
$$\frac{D\mathcal{V}^*}{Dt^*} = \nabla^{*2} \mathcal{V}^* - x_A^* Gr_{AB} \frac{\bar{E}}{g}$$

Donde los números adimensionales obtenidos para este sistema son:

$$Gr = \frac{\rho \beta g (T_1 - T_0) D^3}{\mu^2}$$

La obtención de los diferentes números adimensionales para cada sistema esta en función de las variables que intervienen en el proceso y del tipo de ecuación de transporte que se interviene con parámetros adimensionales.

Para sistemas más complejos, de tipo turbulento de mas componentes, se recomienda hacer el análisis por sistemas matriciales.

## 1.- NUMEROS ADIMENSIONALES EN FLUJO DE FLUIDOS.

Generalidades de flujo de fluidos.

Definición de fluido.-Los fluidos son sustancias capaces de fluir y adaptarse a la forma del recipiente o envase que lo contengan, donde la geometría del envase es independiente del fluido almacenado.

Cuando los fluidos estan en reposo no pueden soportar fuerzas tangenciales o cortantes, ya que al recibir este efecto el fluido tiende a desplazarse en dirección de estos.

Division de fluidos.-Los fluidos pueden dividirse en líquidos y gases. Las diferencias esenciales entre estos son:

- a) Líquidos son prácticamente incompresibles y los gases son compresibles.
- b) Los líquidos ocupan un volumen definido y tienen superficies planas libres de contacto, (donde la geometría es de acuerdo al recipiente donde se almacene). Mientras que una masa dada de gas se expande hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contenga.

Características de flujo de fluidos.

Régimen estacionario.-Cuando un fluido esta fluyendo en una tubería, se dice que tiene régimen estacionario cuando los campos de densidad, velocidad no son funciones del tiempo.  
por ejemplo:

$$\rho = \rho(x), \quad u = u(x)$$

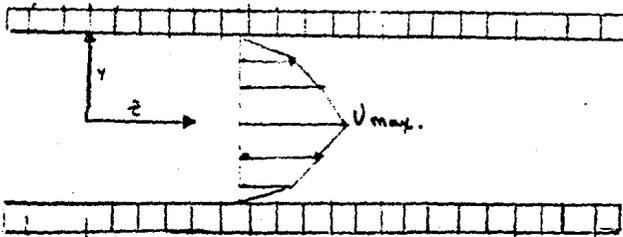
Una corriente de un fluido es estacionaria cuando la masa que va pasando a través de una superficie dada por unidad de tiempo es constante.

Tipos de flujo.

En flujo de fluidos el movimiento del líquido es gobernado por los efectos de la viscosidad.

En régimen estacionario se presentan dos condiciones o regímenes de diferentes características y estos son:

- a) Flujo laminar
- b) Flujo turbulento.
- a) Flujo laminar.- En flujo laminar el perfil de velocidad del fluido en un ducto o tubo es el siguiente.



Donde la ecuación de ese perfil de velocidad del fluido en régimen estacionario es:

$$v_z = \frac{(P_o - P_L)}{4\mu L} R^2 \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \dots (1)$$

La velocidad máxima de flujo paraboloidal es:

$$v_{z\max} = \frac{(P_o - P)}{4\mu L} R^2$$

El flujo laminar ocurre cuando las partículas del fluido se mueven en líneas paralelas a lo largo del eje del tubo.

En flujo laminar el fluido fluye en forma de capas o laminas.

Condiciones del flujo laminar.

- 1.- En flujo laminar el movimiento es por laminas.
- 2.- La densidad es constante.
- 3.- El  $Re < 2100$
- 4.- El movimiento del fluido ocurre en régimen estacionario.

- 5.- El fluido es Newtoniano.
  - 6.- El fluido es un medio continuo.
  - 7.- El deslizamiento del fluido en la pared del tubo es nula.
- El régimen laminar está determinado por el esfuerzo cortante o ley de Newton que es:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy}$$

$\tau$  = Esfuerzo cortante, se define como la fuerza ocasionada por la fricción entre capas por unidad de área de contacto entre las mismas.

Esta ley establece la relación que hay entre la velocidad del fluido con una viscosidad determinada, forman capas a través de una distancia entre las paredes de la tubería. Observando esta relación el fluido se opone al movimiento porque el esfuerzo cortante determina la fluidez del flujo. Los fluidos que cumplen esta ley se les denomina: Fluidos Newtonianos.

#### e) Flujo turbulento.

El flujo turbulento se presentan cuando las partículas del fluido se mueven en forma desordenada, caótica en todas direcciones del tubo siendo imposible conocer su trayectoria, ya que en la turbulencia se presentan torbellinos.

Para conocer y obtener el perfil de velocidad en flujo turbulento hay que considerar la velocidad de tiempo ajustado.

Haciendo una descripción del flujo turbulento, por métodos analíticos, se considera la gráfica de velocidad contra tiempo de la fig. (14).

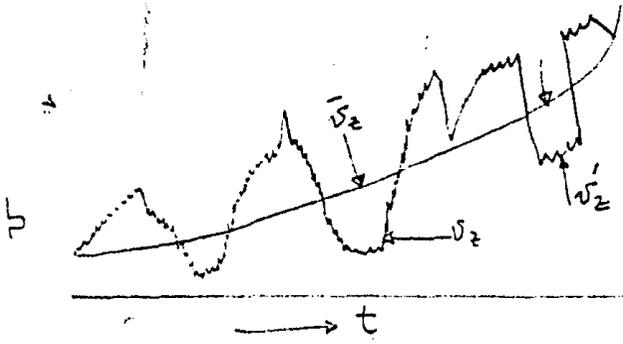
Donde la velocidad instantánea =  $v_2$  = Función que oscila irregularmente.

Velocidad de fluctuación

u oscilación

$$u = v'_z = \# \text{ oscilaciones del fluido.}$$

$$v'_z = \text{Velocidad de tiempo ajustado} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v_z dt$$



$$\bar{v}_z = v_z - v'_z \therefore$$

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

La velocidad de tiempo ajustado puede expresarse como la diferencia entre la velocidad instantanea y velocidad de fluctuación, por lo tanto se puede encontrar la velocidad instantanea como la suma de las velocidades de tiempo ajustado. ( $\bar{v}_z$ ) y ( $v'_z$ ) fluctuación.

El perfil de velocidad de flujo turbulento se puede deducir sustituyendo en las ecuaciones de continuidad y movimiento las ecuaciones;

$v_x$  por  $v_x + v'_x$  y  $P$  por  $P + P'$  quedando las siguientes expresiones.

a) Ecuación de continuidad de tiempo ajustado.

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

b) Ecuación de movimiento de tiempo ajustado.

$$D \frac{D \bar{v}}{D t} = - \nabla \bar{P} - [\nabla \cdot \bar{\tau}^c] - [\nabla \cdot \bar{\tau}^t] + \rho g$$

Donde  $\bar{\tau}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_x}$  = Debido a las velocidades de fluctuaciones = Esfuerzo de Reynolds.

$\tau^{(t)}$  = Esfuerzo cortante normal en la velocidad instantánea.

Para resolver las ecuaciones anteriores y determinar el perfil de velocidad es necesario determinar  $\tau^{-t}$  y sustituirlo en las ecuaciones anteriores,  $\tau^{(t)}$  se determina por tablas (Ref. 1).

La determinación de  $\tau$  se encuentra por medio de diversas relaciones semiempíricas que son las siguientes.

a) Longitud de mezcla de Prandtl.

Supone que los remolinos se mueven en un fluido de igual forma que lo hacen las moléculas en el gas.

$$\tau_{yx}^{(t)} = -\rho l^3 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|$$

$l$  = longitud de mezcla en función de posición.

b) Fórmula empírica de Deissler para la región próxima a la pared.

$$\tau_{xy} = -\rho n^2 v_x y (1 - \exp\{-n^2 v_x y/\nu\}) \frac{dv_x}{dy}$$

$n = 0.124$  para flujo en tubos.

Para un flujo en un tubo cilíndrico el perfil de velocidad es el siguiente.

Se resuelven las ecuaciones (6) y con  $\tau_{xy}^t$  sustituyendo de la ecuación de Prandtl, obtenemos la siguiente distribución logarítmica en el centro del tubo es:

$$v_2 - v_2' = \frac{1}{k} v_* \ln \frac{s}{s_1} \quad s = R - r ; s > s_1$$

Introduciendo en esta ecuación parametros adimensionales en función de las variables del sistema para hacer referencia a las características del tubo cilíndrico.

$$v^+ = \frac{v_2}{v_*} \quad s^+ = \frac{s v_*}{\mu}$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$v^+ - v_1^+ = \frac{1}{k} \ln \frac{s^+}{s_1^+}$$

Deissler encontró a partir de datos experimentales de distribución de velocidad el valor de  $k_1 = 0.36$  y que en zona turbulenta  $s_1^+ = 26$  siendo ( $v_1^+ = 12.85$ ).

Con estos valores recomendados se obtiene:

$$v^+ = \frac{1}{0.36} \ln S^+ + 3.8$$

Se ha encontrado que esta distribución logarítmica describe bastante bien los perfiles de velocidad en régimen turbulento.

## Número de Reynolds

### Introducción.

El número de Reynolds es un parámetro adimensional que se aplica a un flujo de fluidos para determinar las características y transporte del fluido. Los sistemas más comunes donde puede presentarse el número de Reynolds son:

- a) Flujo en tuberías.
- b) Flujo alrededor de objetos.
- c) Agitación de fluidos.

El número de Reynolds tiene su formación a partir del análisis dimensional o de la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento de transporte de fluidos. Pero siempre aparecerá a partir de estos análisis junto con otros parámetros adimensionales como:

- a) Flujo en tuberías

$$f = \phi (Re, L/D)$$

- b) Flujo alrededor de objetos.

$$f = \phi (Re)$$

- c) Agitación de fluidos.

$$P = \phi (Re)$$

Su aparición surgirá donde se presente movimiento de fluidos para diferentes estudios que se traten.

### Significado del Número de Reynolds.

El número de Reynolds es un arreglo adimensional de variables que nos indica el tipo de flujo (laminar, transicional, turbulento), que tiene un fluido en un instante dado, cuando se encuentre en movimiento. Su expresión es:

$$Re = \frac{D V \rho}{\mu}$$

La relación del número de Reynolds tiene la siguiente interpretación:

Transferencia de cantidad de movimiento por mecanismo convectivo ya sea laminar o turbulento.

$$Re = \frac{\text{Transferencia de cantidad de movimiento por transporte molecular o viscoso.}}{\text{Transferencia de cantidad de movimiento por transporte molecular o viscoso.}}$$

Esta expresión nos indica que el número de Reynolds es un parámetro que relaciona al movimiento que lleva al fluido entre el efecto de las fuerzas que se oponen al movimiento del fluido.

Por similitud dinámica surge esta relación:

$$Re = \frac{\text{Fuerza inercial}}{\text{Fuerza viscosa}}$$

Fuerza inercial.- Es aquella fuerza que le sistema en estudio posee y proporciona al fluido para ponerlo en movimiento continuo.

Fuerza viscosa.-Es aquella fuerza de resistencia que el fluido tiene al movimiento.

Rangos de valores del número de Reynolds en tuberías.

Osborne Reynolds propuso a partir de resultados de experimentación criterios para determinar la naturaleza del fluido en tuberías.

Las conclusiones obtenidas por Reynolds fueron encontrar ciertos valores críticos para el número de Reynolds que permite determinar los límites de los diferentes tipos de flujo y estos son:

a) Flujo laminar: A un número de Reynolds menores de 2000 le corresponde flujo laminar, esto es:

$$Re < 2000 \quad \text{Flujo laminar.}$$

b) Flujo transicional o inestable: Para un número de Reynolds entre un valor de 2000-4000 le corresponde una zona de transición que es una zona de turbulencia inestable, esto es:

$$2000 \leq Re < 4000 \quad \text{Se tiene la zona de transición.}$$

c) Flujo turbulento: Para un número de Reynolds mayor o igual a 4000 corresponde un flujo turbulento, que es un movimien-

to del fluido en forma de torbellinos.

$Re \geq 4000$  Flujo turbulento

Diversas expresiones del número de Reynolds.

Estas expresiones se pueden adquirir para determinado problema en la ingeniería química. Las variables dimensionales que intervienen en la relación del número de Reynolds, deben estar en unidades tales que se adimensionalice la relación. A continuación se presentan diversas expresiones que el número de Reynolds puede adquirir.

1.- Si  $D$  = diametro interno de tubería = cm.

$V$  = velocidad del fluido = cm/seg

$\mu$  = viscosidad del fluido =  $\frac{g}{cm\text{-seg}}$

El número de Reynolds para estas variables es:

$$Re = \frac{D V \rho}{\mu}$$

2.- Si  $G$  = masa velocidad de una corriente de fluido que pasa por una sección transversal, perpendicular a la dirección general del flujo a través de una tubería.

$$G = \frac{F}{cm^2\text{-seg}}$$

$D$  = cm

$$\mu = \frac{g}{cm\text{-seg}}$$

El número de Reynolds para esta variable es

$$Re = \frac{D G}{\mu}$$

3.- Si  $S$  = area transversal de tubería =  $cm^2$

$\omega$  = gasto en masa, es la que determina la cantidad de flujo que esta fluyendo = g/seg.

$D$  = cm.

$\mu$  = g/cm-seg

El número de Reynolds equivalente es :

$$Re = \frac{Dw}{S\mu}$$

4.- Q = Gasto volumétrico, indica la cantidad de fluido por unidad de volumen, que va fluyendo en un determinado tiempo.

$$Q = \frac{cm^3}{seg} , \rho = \frac{g}{cm^3} , \mu = \frac{g}{cm-sec}$$

El número de Reynolds equivalente es :

$$Re = \frac{DQP}{S\mu}$$

5.-  $R_H$  = Radio hidráulico se define como :  $4De = R$

$$R_H = \frac{\text{Sección transversal de flujo}}{\text{Perímetro mojado}}$$

El radio hidráulico se aplica cuando la sección de la tubería no es circular.

El número de Reynolds equivalente es :

$$Re = \frac{4R_H G}{\mu} \quad G = \frac{g}{cm^2-sec}$$

Aplicación del número de Reynolds.- El número de Reynolds se aplica en todas las operaciones unitarias y procesos, que tengan fluidos en movimiento, como una medida del fluido en movimiento.

Posteriormente se analizara su aplicación en combinación con otros números adimensionales.

## Factor de fricción en flujo de fluidos para tuberías.

### Introducción

En la ingeniería química se presenta el problema de calcular la caída de presión que sufre un fluido cuando circula a través de tuberías. Es necesario calcular la caída de presión en función del caudal del fluido, geometría y dimensiones del sistema.

Factores que favorecen la caída de presión de un líquido.

1.- En régimen laminar.

- a) Pérdidas de energía mecánicas.
- b) Pérdidas por disipación viscosa.
- c) Pérdidas por fricción en la pared.

2.- En régimen turbulento.

- a) Pérdidas por energía mecánica.
- b) Pérdidas por disipación viscosa.
- c) Pérdidas por fricción en paredes.
- d) Pérdidas debido al movimiento en torbellinos.

La caída de presión se relaciona con un número adimensional llamado factor de fricción "f".

Debido a la complejidad matemática en la aplicación de las ecuaciones de transporte de fluidos y la experimentación resulta tediosa e inoperante para determinar el factor de fricción en función del caudal del fluido en movimiento con régimen turbulento se recurre a métodos adimensionales para encontrar parámetros de modelos semiempíricos que ayuden a determinar el factor de fricción.

### Definición del factor de fricción.

Considerando un flujo estacionario de un fluido de densidad constante circulando por una tubería.

El fluido ejerce sobre la superficie sólida una fuerza (F) donde sus componentes son:

$$F = F_s + F_k \quad \text{----- (1)}$$

$F_s$  = Fuerza que ejerce el fluido en reposo.

$F_k$  = Fuerza adicional relacionada con

el comportamiento cinético.

$F_k$  tiene la misma dirección que la velocidad media del fluido y se representa así:

$$F_k = A K f \text{ ----- (2)}$$

$$A = \text{Area} = 2 \pi R L$$

$$K = \text{Energía cinética por unidad volumen} = 1/2 \rho v^2$$

$$f = \text{Factor de fricción}$$

Sustituyendo los parámetros por sus valores;

$$F_k = (\pi R L) (1/2 v^2) f \text{ ----- (3)}$$

Generalmente la magnitud que se mide no es  $F_k$  sino la caída de presión  $P_o - P_L$  y la diferencia de altura  $h_o - h_L$ .

Aplicando un balance de fuerza al fluido entre la dirección O y L en dirección del flujo se obtiene.

$$F_k = \left[ (P_o - P_L) + \rho g_o (h_o - h_L) \right] \pi R^2 = (\bar{P}_o - \bar{P}_L) R^2 \text{ ----- (4)}$$

Donde  $\bar{P}$  representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación  $\bar{P} = P - \rho gh$

Eliminando  $F_k$  de las ecuaciones (3) y (4) y  $D = 2R$  se obtiene:

$$f = 1/4 \cdot D/L \left[ \frac{\bar{P}_o - \bar{P}_L}{1/2 \rho v^2} \right] \text{ ..... (5)}$$

Esta ecuación muestra explícitamente como se calcula "f" a partir de datos experimentales. Siendo la ecuación (5) la forma como se define el factor de fricción.

Origen del factor de fricción en fluidos circulando en tuberías.

A partir del análisis dimensional se encontrará un modelo de combinación de parámetros que estén en función del factor de fricción para ayudar a su determinación.

Considerando un fluido en movimiento con régimen estacionario, circulando a través de una tubería.

Por experimentación se determinó que las variables que intervienen en la caída de presión, para un sistema líquido-sólido; son los siguientes:

- a) Propiedades del fluido.-  $\mu, \rho, \nu$ .
- b) Geometría del sistema.-  $L, D, \epsilon$ .

c) Cinemática del fluido.. U

Para encontrar una relación entre el factor de fricción y las variables del sistema líquido-sólido se establece la siguiente relación funcional, entre la caída de presión y tales variables.

$$-2\epsilon_c \frac{P}{\rho} = f(L, D, \epsilon, M, \rho, \mu, U) \dots\dots (1)$$

Aplicando el primer principio del análisis dimensional.

$$2\epsilon_c \frac{P}{\rho} = C D^a L^b \epsilon^c M^d \rho^e \mu^n U^r \dots\dots (2)$$

Escribiendo para cada variable su dimensión fundamental.

$$\frac{ML^2}{t^2} = C L^a L^b L^c M^d \left[ \frac{M}{L} \right]^e \left[ \frac{M}{Lt} \right]^n \left[ \frac{L}{t} \right]^r \dots\dots (3)$$

Igualando los exponentes de las dimensiones del lado derecho e izquierdo la ecuación queda:

$$M \quad 1 = d+e+n \quad \dots\dots (4)$$

$$L \quad 2 = a+b+c-3e-n+r \quad \dots\dots (5)$$

$$t \quad -2 = -r-n \quad \dots\dots (6)$$

Por experimentación se sabe que d=1, ya que la energía disipada es directamente proporcional a la masa.

Se trabaja con seis incógnitas y tres ecuaciones, teniendo a tres ecuaciones como independientes, podrán resolverse en términos de tres variables elegidas arbitrariamente tales como; b, c, n, esto conduce a:

$$e = -n ; \quad r = 2 - n ; \quad a = -b - c - n$$

Sustituyendo estos valores de a, e, r, en la ecuación (1) nos queda:

$$2\epsilon_c \frac{P}{\rho} = C D^{-b-c-n} L^b \rho \dots\dots (7)$$

Se agrupan las dimensiones que tengan el mismo exponente y se forman los siguientes grupos dimensionales:

$$2\epsilon_c H_{fs} = C (U^2 \rho) \left( \frac{\mu}{D U \rho} \right)^n \left( \frac{L}{D} \right)^b \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^c \dots\dots (8)$$

Por experimentación se sabe que l=-n, b=1, c=1, C=1. Quedando las expresiones de la siguiente forma:

$$\frac{2\epsilon_c H_{fs}}{mV^2} = \phi \left[ \left( \frac{DV\rho}{\mu} \right), \left( \frac{\epsilon}{D} \right), \left( \frac{L}{D} \right) \right] \dots\dots\dots (9)$$

Rearreglando la ecuación (9) se tiene:

$$\frac{2\epsilon_c H_{fs}}{mV^2} \frac{L}{D} = \phi \left[ \left( \frac{DV\rho}{\mu} \right), \left( \frac{\epsilon}{D} \right) \right] \dots\dots\dots(10)$$

Se tiene de la ecuación (10)

$$f = \frac{2\epsilon_c H_{fs} D}{L} \dots\dots\dots (11)$$

Se obtiene

$$f = \phi \left[ \frac{DV\rho}{\mu}, \left[ \frac{\epsilon}{D} \right] \right] \dots\dots\dots (12)$$

Esta es toda la información que nos proporciona el análisis dimensional, dando una importante orientación y guía para la determinación del factor de fricción.

$$f = \phi \left[ Re, \left[ \frac{\epsilon}{D} \right] \right] \dots\dots\dots (13)$$

La expresión (13) muestra que el factor de fricción está en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa.

Correlacionando estos parámetros adimensionales de la forma planteada en la ecuación (13) se puede obtener los factores de fricción por métodos experimentales o por métodos empíricos.

Determinación del factor de fricción.

En base al modelo de números adimensionales, correlacionados a través del análisis dimensional, ecuación (13).

$$f = f \left( Re, \frac{\epsilon}{D} \right) \dots\dots (13)$$

Se obtiene una guía para encontrar por medio de la experimentación valores numéricos del número de Reynolds,  $\epsilon/D$ , frente al factor de fricción.

Los valores determinados por la experimentación, al graficarse dieron curvas del tipo de la figura (1), para diferentes regímenes de flujo.

Las ecuaciones semiempíricas que satisfacen los puntos de estas curvas, son las siguientes, donde el modelo de la ecuación (13) se sigue manteniendo.

a) Para régimen laminar.

Si  $f = \frac{1}{4} \frac{D}{L} \frac{\bar{P}_0 - \bar{P}_L}{\frac{1}{2} \rho V_f^2} \dots\dots (14)$

Considerando

$$V_f = \frac{\bar{P}_0 - \bar{P}_L}{8 \mu L} R^2 \dots\dots (15)$$

Sustituyendo (15) en (14) se obtiene:

$$f = \frac{16}{Re} \quad \text{Régimen laminar.}$$

b) Para flujo turbulento

Considerando

$$\frac{V_f}{\nu} = (0.817)(8.56) \left[ \frac{Re \nu^2}{\mu} \right]^{1/7}$$

Se obtiene

$$f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}} \quad \text{Régimen turbulento}$$

Re-3000-10,000

c) Para todas las tuberías de varios diámetros y rugosidades el

Hydraulic Institute de los E.E.U.U., consideró la ecuación de Colebrook, como la más aceptable para calcular el factor de fricción y es la siguiente:

$$\frac{1}{f} = -2 \log - \frac{6}{3.7d} + \frac{2.51}{Re}$$

La resolución de esta ecuación matemática dio como resultado las curvas logarítmicas de la figura (1). Donde se representa al factor de fricción contra el número de Reynolds,  $\epsilon/D$ , para diferentes flujos.

#### Aplicación del factor de fricción.

El factor de fricción se aplica en flujo de fluidos para ayudar a determinar la caída de presión de un fluido que circula por una tubería.

El factor de fricción se relaciona con la caída de presión de la siguiente manera:

Las pérdidas de presión se derivan de la ecuación de fuerzas de frotamiento ejercida por el fluido cuando fluye a través de una tubería y se expresa:

$$F = f \frac{\rho A v^2}{2g_c} \dots (1)$$

$$\text{Si } A = \pi D L$$

$$F = f \frac{\pi D L \rho}{2g_c} \dots (2)$$

El trabajo que tiene que realizar para un desplazamiento L es:

$$W = F \int L \dots (3)$$

La cantidad de fluido que entra y sale por unidad de volumen y masa es:

$$V = \frac{\pi D^2 \delta L}{4} \dots (4)$$

$$m = \frac{\rho \pi D \delta L}{4} \dots (5)$$

La energía requerida para vencer el frotamiento por unidad de masa del fluido que entra y sale del tubo será:

$$-\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{W}{m} = F \frac{L \delta}{\rho \pi D^2 \delta L} \dots (6)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la (6) se llega a la ecuación que evalúa la caída de presión ( $H_{fs}$ )

$$H_{fs} = \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{2f' L v^2}{D g_c} \dots (7)$$

Si  $f = 4f'$  . . . . . (8)

Se sustituye la ecuación (8) en (7), se obtiene:

$$H_{fs} = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g_c} \dots (9)$$

En la ecuación (9) se tiene la caída de presión de una tubería como función del factor de fricción, velocidad y geometría del sistema.

Para la obtención de resultados de la ec. (9) es necesario definir las variables dimensionales ( $L, D, v, g_c$ ) en un sistema de unidades consistentes; por ejemplo:

a)  $f$  = Número adimensional sacado de tablas (1)

$L$  = Longitud equivalente = m

$v$  = Velocidad lineal = m/seg.

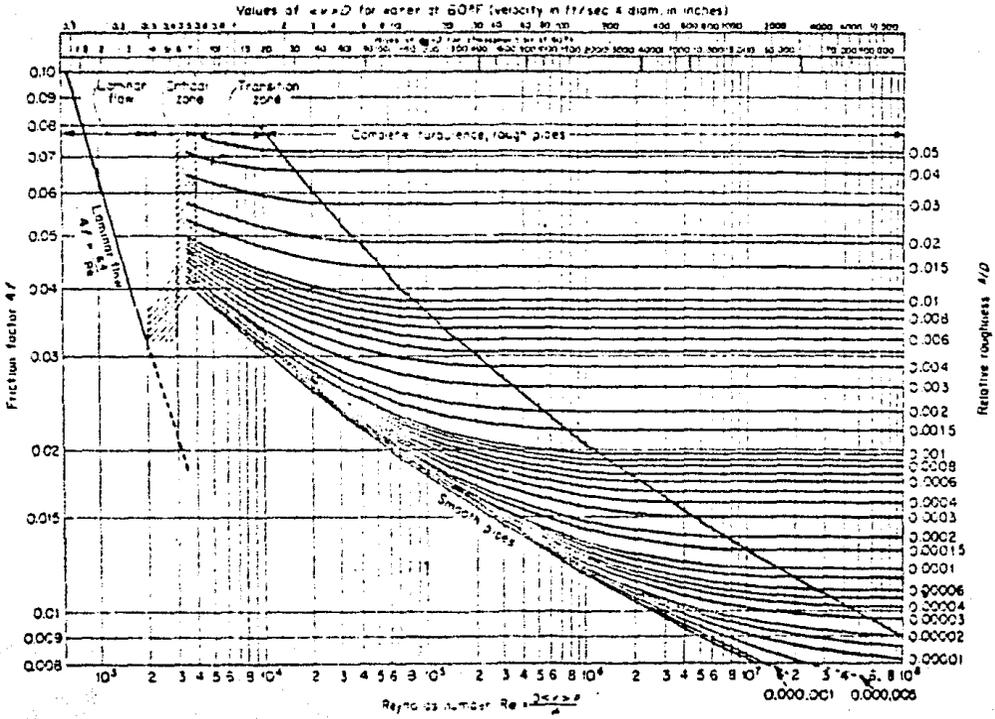
$g_c$  = Factor de conversión =  $9.8 \frac{K_{masa} \cdot m}{K_{fuerza} \cdot seg}$

$D$  = Diametro

La expresión de la caída de presión para estas variables y dimensiones es la siguiente;

$$H_{fs} = \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g_c} \quad \text{siendo} \quad H_{fs} = m \frac{K_{E_f}}{K_{E_m}}$$

Es necesario tener en cuenta que el factor " $f$ " se determina por el número de Reynolds y el factor ( $\epsilon/D$ ) de la tabla (1).



Gráfica del factor de fricción en función de Número de Reynolds y rugosidad relativa.

Número de Drag o factor de fricción alrededor de objetos.

### Introducción.

El número de Drag es un número adimensional que se aplica en flujo de fluidos a través de superficies sólidas.

El número de Drag nos indica la fricción que ocurre cuando el fluido pasa alrededor de objetos.

El sistema puede ser flujo alrededor de objetos sólidos u objetos sólidos moviéndose en el fluido. En ambos sistemas se registra una caída de presión provocado por el rozamiento entre el sólido y el líquido.

Debido a la complejidad matemática en la aplicación de ecuaciones del transporte de fluidos alrededor de sólido y que la experimentación resulta laboriosa, para calcular la caída de presión de fluidos alrededor de objetos. Se recurre a métodos adimensionales para obtener modelos de ecuaciones semiempíricas que ayuden a determinar la caída de presión del fluido alrededor de objetos sólidos o la velocidad de los sólidos en los fluidos.

Definición del número de Drag o factor de fricción alrededor de objetos.

Consideremos un flujo estacionario de un fluido con densidad constante en el sistema siguiente.

El fluido circula alrededor de un objeto sumergido (fig.1) que tiene un eje paralelo a la velocidad de aproximación del fluido ( $V_{\infty}$ ) al sólido.

La influencia de las siguientes fuerzas sobre la partícula pafánica para mantenerla en equilibrio son:

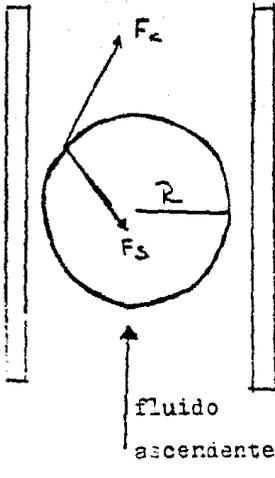


Fig. (1)  
Sistema para describir el flujo de un fluido alrededor de una esfera.

a)  $F =$  Fuerza de gravedad

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g$$

b)  $F_s =$  Fuerza que ejerce el fluido en reposo o de flotación.

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g$$

c)  $F_k =$  Fuerza que resulta del movimiento del fluido o contribución cinética.

Para la caída en estado estacionario de una esfera o cuerpo sólido en el seno de un fluido el  $F_k$  se equilibra de la siguiente manera:

$$F_k = F - F_s$$

Sustituyendo cada fuerza por su expresión

$$F_k = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g \dots \dots (2)$$

La fuerza  $F_k$  expresada pasa por un fluido alrededor de objetos sumergidos, es la siguiente:

$$F_k = AKf \dots \dots (3)$$

$A =$  Área proyectada de la esfera  
 $= \pi R^2$

$K =$  Energía cinética por unidad de volumen.

$$= \frac{1}{2} \rho v^2$$

Sustituyendo cada variable por su equivalente:

$$F_k = (\pi R^2) \left(\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2\right) f \dots (4)$$

Eliminando  $F_k$  entre (2) y (4) se obtiene:

$$f_{\text{Drag}} = \frac{4}{3} \frac{FD}{\rho v_{\infty}^2} \left[ \frac{\rho_{\text{ca}} - \rho}{\rho} \right] \dots (5)$$

Esta expresión se utiliza para calcular "f" a partir de datos experimentales de velocidad límite. El coeficiente de fluido en (5) se denomina: Coeficiente de resistencia o número de Drag.

Origen del número de Drag.

Experimentalmente se encontró que la fuerza ejercida sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida está en función de las siguientes variables:

- a) Densidad ( $\rho$ )
- b) Viscosidad ( $\mu$ )
- c) Velocidad del fluido ( $V$ )
- d) Longitud ( $L$ )
- e) Fuerza ( $F$ ).

Aplicando el análisis dimensional para obtener un modelo de parámetros que representen el sistema.

El método de Buckingham para estas variables es el siguiente:

$$\phi(F, \rho, \mu, L, V) = 0 \dots (1)$$

$$F=k, \quad \rho = \frac{F T^2}{L^4}, \quad \mu = \frac{F T}{L^2}, \quad L=L, \quad V = \frac{L}{T}$$

Donde el sistema tiene los siguientes números ( $\pi_k$ )

$$5 \text{ variables} - 3 \text{ unidades} = 2 \text{ números } \pi'_i$$

Escogiendo  $L, V, \rho$ , como variables repetidas con exponentes desconocidos, tenemos los siguientes números ( $\pi'_j$ )

$$\pi'_1 = L^a v^b \rho^c (F) \dots (2)$$

Sustituyendo en la ecuación (2) las variables por sus dimensiones:

$$\Pi_1 = L^a (L^b T^{-b}) (F^c T^{2c} L^{-4c}) (F) \dots (3)$$

Las ecuaciones para las dimensiones son:

$$F : c + 1 = 0$$

$$L : a + b = 0$$

$$T : -b + 2c = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$c = -1 ; b = -2 ; a = -2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3) el número  $\Pi_1$  obtenido es:

$$\Pi_1 = \left[ \frac{F}{L^2 V^2 \rho} \right] \dots (4)$$

Para  $\Pi_2$

$$\Pi_2 = L^a V^b \rho^c \mu \dots (5)$$

Sustituyendo sus dimensiones por cada variable, tenemos la siguiente expresión:

$$\Pi_2 = L^a (L^b T^{-b}) (F^c T^{2c} L^{-4c}) (F T L^{-2}) \dots (6)$$

Las ecuaciones de los exponentes para cada variable son:

$$F : c + 1 = 0$$

$$L : a + b - 4c - 2 = 0$$

$$T : -b + 2c + 1 = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, las soluciones son:

$$c = -1 ; b = -1 ; a = -1$$

Por lo tanto el es el siguiente

$$\Pi_2 = \left[ \frac{\mu}{L V \rho} \right] \dots (7)$$

El modelo obtenido para el sistema en estudio es el siguiente:

$$f = \left[ \frac{F}{L^2 V^2 \rho} , \frac{L V \rho}{\mu} \right] = 0 \dots (8)$$

Identificando los números adimensionales.

a)  $\Pi_1$

De la ecuación (4)

$$F_k = (\Pi R^2) \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) f$$

$$f = \frac{2Fk}{AV^2\varrho} \quad \text{comparando contra } \Pi_1 = \frac{F}{L^2V^2\varrho}$$

Por lo tanto el número adimensional representa:

$$\Pi_1 = f$$

b)

Las variables agrupadas en  $\Pi_2$  representa el número de Reynolds.

$$\Pi_2 = Re$$

Los números adimensionales obtenidos para el sistema de un fluido alrededor de objetos es:

$$f(f, Re) = 0$$

Por lo tanto el factor de fricción puede correlacionarse como una función exclusiva del número de Reynolds.

$$f = f(Re)$$

El análisis dimensional nos da como resultado una relación de parámetros adimensionales que pueden correlacionarse experimentalmente para la obtención de resultados numéricos.

Se han determinado datos experimentales del coeficiente de Drag contra número de Reynolds para flujo alrededor de objetos como esferas, cilindros, discos, obteniéndose gráficas del tipo de la fig. (2).

#### Determinación de los parámetros de la correlación del número de Drag.

El análisis dimensional nos dio el siguiente resultado para flujo alrededor de objetos.

$$f_D = f(Re)$$

Esta relación fue aplicada en la elaboración de experimentos para la determinación de la pérdida de fricción de un fluido alrededor de objetos.

Las ecuaciones semiempíricas que satisfacen los resultados encontrados por experimentación son las siguientes, para diferentes regímenes de flujo.

a) Para flujo reptante:

$$\text{Si} \quad Fk = \Pi R^2 \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) f \quad \dots \quad (4)$$

La ley de Stokes para el movimiento de partículas en fluidos es:

$$F_k = 3\pi \mu R v_s = 3\pi \mu D \frac{v_s}{2} \dots (2)$$

Igualando (1) y (2) para eliminar  $F_k$  tenemos:

$$6\mu R v_s = \pi R^2 \left(\frac{1}{2} \rho v_s^2\right) f$$

Despejando  $f$  y considerando  $D=2R$  el resultado es:

$$f = \frac{24}{Re} \quad \text{para } Re < 2 \quad \text{flujo reptante}$$

Esta ecuación corresponde a la porción recta de la curva;

Log  $f$  vs. Log  $Re$  fig.(2)

b) Región intermedia

La expresión analítica que cumple para un Reynolds en el rango

$2 < Re < 5 \times 10^2$  es la siguiente.

Considerando para este rango.

$$F_k = 2.31\pi (\nu D)^{1.4} \mu^{0.6} \rho^{0.4}$$

Sustituyendo en (2) el resultado es:

$$C_D = \frac{18.5}{Re^{0.6}} \quad 2 < Re < 500 \quad \text{Región intermedia.}$$

c) Región de ley de Newton, para un Reynolds del rango

$500 < Re < 20000$  tiene la siguiente expresión:

El valor de  $F_k = 0.055(\nu D)^{2.0}$  da como resultado que:

$$C_D = 0.44 \quad 500 < Re < 20000 \quad \text{Ley de Reynolds.}$$

Como se observa en la fig.(2) para un Reynolds, entre este rango, el factor de fricción se conserva constante.

Ecuación general para el número de Drag.

El número de Drag se puede expresar en forma general para diferentes regímenes de flujo.

Considerando la fuerza cinética ( $F_k$ ) como una ecuación general:

$$F_k = \mu_b^n \pi (Dv)^{2-n} \rho^{1-n} \dots (3)$$

Sustituyendo este valor en la ec.(2) se obtiene la ecuación del factor de rozamiento de un flujo alrededor de objetos en forma general.

$$C_n = \frac{b}{Re^n} \quad (6)$$

Las constantes de las ecuaciones (6) y (3) son:

| Intervalo            | b    | n   | Rango         |
|----------------------|------|-----|---------------|
| Ley de Stokes        | 24   | 1   | Re 2          |
| Intervalo intermedio | 18.5 | 0.6 | 2 Re 500      |
| Ley de Newton        | 0.44 | 0   | 500 Re 200000 |

Esta generalización de la ecuación de  $C_D$  vs. Re da como resultado, continuidad en la gráfica de la fig.(2).

Cubriendo esta ecuación empírica todos los puntos de la curva continua. Quedando comprobado la aproximación de las ecuaciones es confiable.

Determinación del coeficiente de Drag para cualquier forma de partícula.

Para cualquier partícula con una figura definida pueda expresarse en términos de esfericidad ( $\psi$ )

$$\psi = \frac{\text{Area de la superficie de una esfera de igual volumen al de la partícula.}}{\text{Area de la superficie de la partícula}} = \frac{D_{med}}{D_s} \times \frac{1}{n}$$

Donde: n = Relación entre las superficies específicas.

Dmed = Tamaño medio de malla de Tamiz.

Ds = Diámetro de la esfera de volumen igual al de su partícula.

$$\psi = \frac{D_{med.}}{D_s n}$$

El valor de  $f_D$  puede encontrarse en función del número de Reynolds para cualquier valor de esfericidad como se muestra en la gráfica (1)

Significado del número de Drag.- El número de Drag es un número edimensional que nos va a indicar la fricción que va a tener un só-

lido cuando va descendiendo en un medio fluido o se encuentra dentro del fluido moviéndose con un régimen específico de flujo.

En el movimiento descendiente del fluido entran en juego dos tipos diferentes de fuerzas cuya relación por similitud dinámica es:

$$\frac{\text{Fuerza gravitacional}}{\text{Fuerza inercial}} = f_D$$

Donde estarán en competencia estas dos fuerzas y la que predomine será la que de el valor a  $f_D$ .

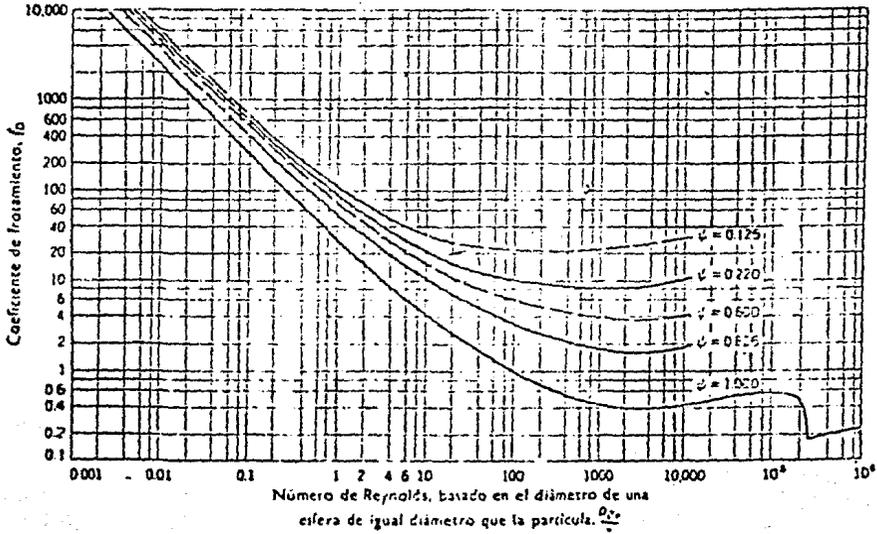


Fig. (b)

Valores del coeficiente de frotamiento (coeficiente de arrastre) En función del número de Reynolds para partículas de diversa esfericidad.

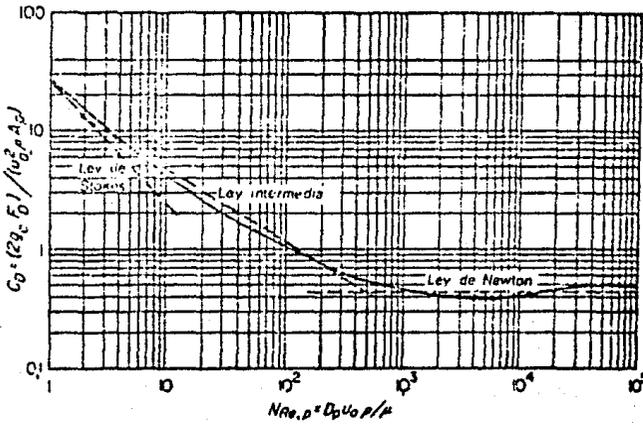


Fig. (2)

Gráfica del factor de fricción alrededor de objetos en función del número de Reynolds.

Factor de compresibilidad.

El factor de compresibilidad es un parametro adimensional que se aplica en la ecuación de estado de gases reales para obtener una expresión que satisfaga el comportamiento de gases sometidos a altas presiones.

Introducción:

En el estudio de gases sometidos a diferentes presiones, volúmenes y temperaturas se consideró que el promedio de las distancias entre moléculas era lo suficiente grande como para despreciar el efecto de las fuerzas intermoleculares. Otra consideración que se hizo fue el despreciar el tamaño de la molécula del gas.

Estas situaciones ideales originaron las siguientes leyes:

a) Ley de Boyle  $PV = f(T)$  . . . . (1)

b) Ley de Charles  $P = cte.$   $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$  . . . . (2)

c) Ley de Edos, correspondientes  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$  . . . . (3)

d) Ley de Dalton

i) Presiones parciales  $P_T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$  . . . (4)

ii) Fracción mol  $y = \frac{P_i}{P_t}$  . . . . (5)

El conjunto de estas leyes dió como resultado la ley del gas ideal que es la siguiente.

$PV = n R T$  . . . . (6)

Esta ecuación normalmente solo funciona para gases que se encuentran sometidos a condiciones de presión y temperaturas ambientales.

Sin embargo cuando hay aumento de presión en los gases, los calculos obtenidos al aplicar la ley de gas perfecto dan diferencias respecto a la experimentación.

Debido a está desviación surge la necesidad de hacer una corrección introduciendo el factor de compresibilidad a la ecuación de gas ideal.

El factor de compresibilidad es uno de los diversos intentos que

se realizaron para obtener la ley de gas real aplicada a gases sujetos a altas presiones y su expresión es:

$$PV = Z_nRT$$

Esta ecuación de estado funciona para gases reales dando resultados confiables en su aplicación cuando intervienen gases y vapores.

Significado del factor de compresibilidad.

El significado que se le da al factor de compresibilidad en fluidos compresibles es el convertidor o transformador, ya que el ser introducido en la ecuación de gas ideal la transforma en una ecuación de gases reales.

Origen del factor de Compresibilidad

Antes de comenzar con el desarrollo que da origen al factor de compresibilidad es necesario hacer las siguientes definiciones:

a) Temperatura reducida =  $T_r = \frac{T_c}{T}$

Donde  $T_c$  = Temperatura crítica del gas.

$T$  = Temperatura ambiente.

b) Presión reducida =  $P_r = \frac{P_c}{P}$

$P_c$  = Presión crítica

$P$  = Presión atmosférica.

c) Volumen reducido =  $V_r = \frac{V_c}{V}$

$V_c$  = Volumen crítico

$V$  = Volumen

Donde ( $P_c, T_c, V_c$ ) son estados críticos del gas y se vuelven iguales en valor en la interfase líquido-vapor donde existe el equilibrio.

Ley de estados correspondientes. -"Establece que los gases que tienen igual presión reducida, temperatura reducida y volumen reducido se encuentran en estados correspondientes".

En base a los conceptos anteriores se procede a realizar el origen del factor de compresibilidad a través del análisis dimensional.

Por experimentación se determinó que el factor de compresibilidad está en función de las siguientes variables independientes:

$$Z = f(P, V, T, P_c, V_c, T_c)$$

Aplicando el teorema Pi tenemos el siguiente desarrollo:

a)  $Q_1 = P = FL^{-2}$

$$Q_2 = V = L^3$$

$$Q_3 = T = FL$$

$$Q_4 = P_c = FL^{-2}$$

$$Q_5 = V_c = L^3$$

$$Q_6 = T_c = FL$$

b) El número de grupos adimensionales es:

$$k = 2 ; n = 6 ; n - k = 6 - 2 = 4$$

c) Considerando dos variables fijas.

$$\bar{Q}_1 = Q_1$$

$$\bar{Q}_3 = Q_3$$

d)  $\pi_1 = P^a T^b V$

$$\pi_2 = P^c T^d P_c$$

$$\pi_3 = P^e T^f V_c$$

$$\pi_4 = P^g T^h T_c$$

e) Para  $\pi_1$

$$F : a + b = 0 \quad a = 1$$

$$L : -2a + b + 3 = 0 \quad b = -1$$

$$\pi_1 = \frac{PV}{Tm} = Z$$

Para  $\pi_2$

$$F : c + d + 1 = 0 \quad c = -1$$

$$L : -2c + d - 2 = 0 \quad d = 0$$

$$\pi_2 = \frac{Pc}{P}$$

Para  $\pi_3$

$$F : e + f = 0 \quad e = 1$$

$$L : -2a + f + 3 \quad f = -1$$

$$\pi_3 = \frac{PVc}{T}$$

Para  $\pi_4$

$$P : g + h + 1 = 0 \quad g = 0 \quad \pi_4 = \frac{T_c}{T}$$

$$L : -2g + h + 1 = 0 \quad h = -1$$

Tenemos la expresión funcional para números=dimensionales o grupos.  
pos.

$$\Phi [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = 0$$

Sustituyendo los grupos en (2)

Rearreglando y reorganizando los grupos para determinar la expresión funcional.

$$\Phi \left( \frac{PV}{T}, \frac{P_c}{P}, \frac{PV_c}{T}, \frac{T_c}{T} \right) = 0$$

$$\pi_1' = \pi_1 = \frac{PV}{T} = Z$$

$$\pi_2' = \frac{1}{\pi_2} = \frac{P}{P_c} = Pr$$

$$\pi_3' = \frac{1}{\pi_4} = \frac{T}{T_c} = Tr$$

$$\pi_4' = \frac{T_c \pi_3}{\pi_4} = \frac{P_c}{P} \frac{PV_c}{T} \frac{T}{T_c} = \frac{P_c V_c}{T_c} = Z$$

Entonces la ecuación funcional resultante es la siguiente:

$$Z = \Phi (Pr, Tr, Zc) \quad (7)$$

El resultado obtenido es toda la información a cerca de la relación del factor de compresibilidad y variables del sistema.

A partir de esta ecuación se realizaron experimentos para la obtención del factor de compresibilidad y en el análisis realizado a las propiedades críticas ( $P_c, V_c, T_c$ ) para la mayoría de los gases reales, indico que las compresibilidades críticas usen dentro de un intervalo bastante restringido que es el siguiente.

$$0.25 \leq Zc \leq 0.3 \quad \text{donde } Zc \text{ se considera constante.}$$

Por lo tanto el factor de compresibilidad para gases reales, está representado como una función universal siendo la siguiente:

$$Zc = \Phi (Pr, Tr) \quad Zc = \text{cte.}$$

En base a este resultado obtenido se realizaron experimentos y se determinaron las curvas de la fig. (1)

Calculo del factor de compresibilidad.

Definición.- La ley de los estados correspondientes es la siguiente:

Se dice que los gases o vapores que estan a igual presión reducida y temperatura reducida estan en estados correspondientes. Dicha ley establece que todos los fluidos en estados correspondientes deberán tener el mismo volumen reducido.

En base al modelo obtenido, del análisis dimensional, para la determinación del factor de compresibilidad como una función de variables reducidas.

$$Z = f (Pr, Tr, Zc) \text{ ---- (7)}$$

Se ha encontrado la relación de estados correspondientes para condiciones reducidas, cumple con los resultados obtenidos de experimentación con una desviación de un  $\pm 0.017$

La ecuación para el cálculo del factor de compresibilidad en base a los estados correspondientes es la siguiente:

$$Z = \frac{PV}{RT} \text{ ---- (8)}$$

Expresando la compresibilidad en función de las variables reducidas y críticas.

Si:

$$T = \frac{Tc}{Tr} ; \quad V = \frac{Vc}{Vr} ; \quad P = \frac{Pc}{Pr}$$

Entonces la ecuación toma la forma

$$Z = \frac{PrVr}{PrTr} \times \frac{PcVc}{Tc} = \frac{PrVr}{Tr} \times \frac{PcVc}{RTc}$$

Donde:

$$Zc = \frac{PcVc}{RTc}$$

Entonces la ecuación queda de la siguiente manera:

$$Z = Zc \frac{PrVr}{Tr} \text{ ---- (9)}$$

En base a la ecuación (9) se pueden realizar calculos confiables

Para la obtención del factor de compresibilidad.

Para diferentes productos se realizaron los cálculos del factor de compresibilidad, bajo diversas condiciones de propiedades reducidas encontrándose gráficas del tipo de la figura (2).

Método de obtención de las propiedades reducidas.

Las propiedades reducidas que se aplican en la ecuación para la obtención del factor de compresibilidad se obtienen semiempíricamente y la obtención es:

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

La relación de presión reducida es:

$$P_r = \frac{P}{P_c} \dots (a)$$

Donde:

P : Presión que se obtiene directamente por medición.

P<sub>c</sub> : Presión crítica que se determina por medio de las expresiones empíricas.

) Método de Riedel's que da la expresión para gases orgánicos y es:

$$P_c = \frac{M}{(\bar{I} + 0.33)^2} \dots (b)$$

M : Peso molecular.

$\bar{I}$  : Constante aditiva que depende de la estructura molecular.

La expresión que estima el número adimensional de la presión reducida es:

La ecuación (a) sustituida por (b) queda:

$$P_r = \frac{P}{P_c} = \frac{P(\bar{I} + 0.33)^2}{M}$$

..) Método de Thodo's incluye constante de Vander Waals y se expresa así:

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \dots (c) \quad a, b = \text{ctas. de Vander Waals}$$

La expresión para el parámetro de Pr queda sustituyendo (c) en (a):

$$Pr = \frac{27b^2P}{a}$$

Temperatura reducida.- La relación de la temperatura reducida es:

$$Tr = \frac{T}{Tc}$$

Donde:

T : Temperatura ordinaria.

Tc : Temperatura crítica que se calcula por medio de ecuaciones empíricas como:

.) Método de Guldberg corregido para la Tc es:

$$Tc = \frac{Tb}{\theta}$$

La expresión para el volumen reducido es:

$$Vr = \frac{V}{Vc} = \frac{T^{0.3V}}{(Pch)^{1.2}}$$

..) Método de Maissners modifica el método de Herzog's eliminando la temperatura crítica y es:

$$Vc = 0.55(1.5Pch + 9 - 4.34R)^{1.155}$$

R = Refracción molar.

Pch = Paradior

La expresión final de la temperatura reducida es:

$$Vr = 0.55(1.5Pch + 9 - 4.34R)$$

... )Método de Thodos calcula el volumen crítico de la siguiente manera:

$$Vc = 3\beta b$$

$\beta$  : Factor de volumen

b : Constante de Vander Waals de tablas.

(b) Se calcula para compuestos orgánicos así:

$$1.- \beta = 0.7849 - 0.01337Nc$$

Nc = Número de átomos de carbono.

2.- Para hidrocarburos alifáticos

$$\beta_c = 0.81 - 0.0138 N_c$$

$N_c$  = No. de átomos de C.

3.- Para alifáticos insaturados.

$$\beta_c = \beta_1 \cdot 0.9931$$

La expresión final de la temperatura reducida queda:

$$T_r = \frac{T \cdot \theta}{T_b}$$

$T_b$  : Temperatura de ebullición.

$\theta$  : Constante de temperatura.

Donde  $\theta$  se calcula por medio de las expresiones Riedel:

$$\theta = 0.574 + \sum \Delta T$$

$$\theta = 0.567 + \sum \Delta T - (\sum \Delta T)^2$$

Donde  $\Delta T$  se es obtenida de la tabla.

..) Método de Thodos; incluye constantes de Vander Waals, para la  $T_c$  la expresión es:

$$T_c = \frac{8a}{27Rb}$$

$a$  y  $b$  : Ctes. de Vander Waals

$R$  : Cte. de los gases.

La temperatura reducida queda:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{T \cdot 27Rb}{8a}$$

Volumen reducido .- Su expresión es:

$$V_r = \frac{V}{V_c}$$

$V$  : Volumen ordinario de gas

$V_c$  : Volumen crítico de gas y se determina por medio de las sig. expresiones empíricas.

.) Método de Heozog's

$$V_c = \frac{(P_{ch})}{T_c}$$

$P_{ch}$  = Parametro de parachar de la tabla.

$T_c$  = Temp. crítica.

$K = 3.34$  para sustancias con grupos funcionales  $-C = 0$

$K = 0.92$  para otros grupos.

### Aplicación del factor de compresibilidad.

De lo anterior se deduce que la aplicación más importante del factor de compresibilidad consiste en el uso de una ecuación de estado tan simple como la del gas ideal para llevar a cabo el cálculo de funciones termodinámicas requeridas según el caso: sean (P, V, T).

.) Determinación de propiedades de gases.

En los procesos que involucran flujo de fluidos comprensibles o almacenamiento de estos es necesario conocer todas sus propiedades para su mejor manipulación y seguridad del equipo.

Cuando en un fluido compresible se conocen solamente dos variables por ejemplo: (T, P) y se desea determinar la tercera (V). Se utiliza la ecuación ( 8 ) y se despeja la variable desconocida (V).

$$V = \frac{Z RT}{P}$$

Se encuentra el valor de "Z" por medio de gráficas con un valor de Tr y Pr.

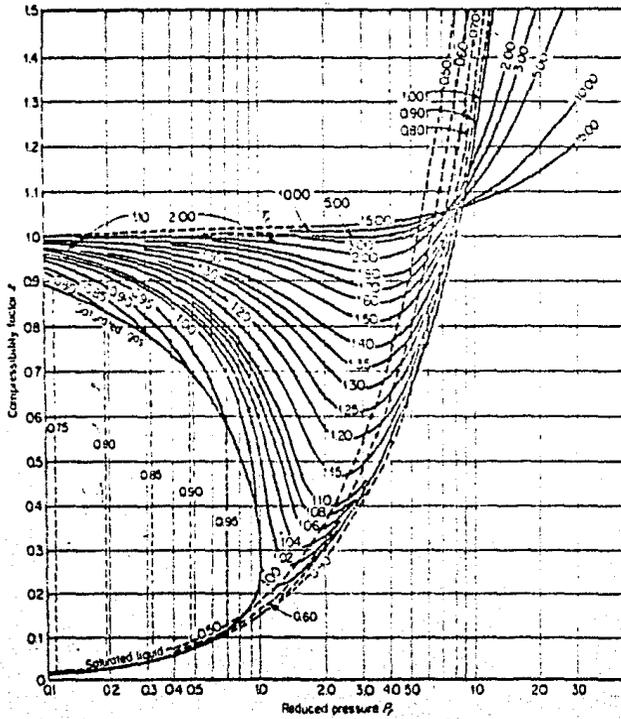
Se sustituye el valor de Z y el de las variables (T y P) en la ecuación ( 8 ) y se calcula el valor de la variable desconocida (V).

El factor de compresibilidad en su aplicación a la ley de gases reales proporciona resultados satisfactorios y confiables para el manejo de gases en la industria en operaciones como:

- a) Almacenamiento.
- b) Transporte.
- c) Transvase.
- d) Operaciones de reacción química.

Gráficas del factor de compresibilidad en función de la

y Tr.



### Número de Mach

El número de Mach es un número adimensional que se aplica en la ingeniería química para la caracterización de regímenes de flujo en fluidos compresibles a altas velocidades.

El número de Mach es un parámetro adimensional que nos indica el tipo de régimen de flujo que ocurre cuando un fluido compresible se transporta a través de una tubería.

Los tipos de regímenes de flujo que ocurren en fluidos compresibles son:

- a) Flujo sónico.
- b) flujo subsónico.
- c) flujo supersónico.

En este estudio del número de Mach presentamos su origen, su significado, y su aplicación, siendo el desarrollo el siguiente:

Origen del número de Mach.- El modelo de variables que dan lugar al número de Mach se obtiene a partir del análisis dimensional. El objetivo es encontrar una expresión del número de Mach para un fluido incompresible en movimiento a altas velocidades para diferentes regímenes de flujo.

Por experimentación se determina que el sistema de un gas transportándose por un ducto a gran velocidad; depende de las siguientes variables:

- a) Velocidad  $(V) = \frac{L}{T}$
- b) densidad  $(\rho) = \frac{M}{L^3}$
- c) longitud  $L=L$
- d) viscosidad  $(\mu) = \frac{M}{LT}$
- e) módulo de elasticidad  $(K) = \frac{M}{LT^2}$

Estableciendo una ecuación homogénea para estas variables tenemos:

$$\phi(V, \rho, L, \mu, K) \text{ --- (1)}$$

El total de  $\Pi'_s = 5$  variables - 3 dimensiones = 2  $\Pi'_s$

Considerando que  $V, \rho, L$  son el núcleo de variables los números obtenidos son:

$$\Pi_1 = V^2 \rho^2 L^2 \mu \text{ --- (2)}$$

Sustituyendo en (2) las variables por sus dimensiones, el resultado es :

$$\pi_1 = [LT^{-1}]^x [M^3]^{y/4} [L]^z ML^{-1}T^{-1} \dots (3)$$

Las ecuaciones formadas para las variables MLT son:

- Para M:  $y + 1 = 0$  ----- (a)
- L:  $x - 3y + z - 1$  ----- (b)
- T:  $-x - 1 = 0$  ----- (c)

Resolviendo el sistema de ecuaciones, las soluciones son:

$$x = -1 \quad y = -1 \quad z = -1$$

Sustituyendo estas soluciones en la ecuación (3) el resultado es:

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\sqrt{Lg}} \dots (4)$$

Para  $\pi_2$  el desarrollo es el siguiente:

$$\pi_2 = v^x \rho^y L^z K \dots (5)$$

Haciendo la sustitución de variables por dimensiones en (5)

$$\pi_2 = [LT^{-1}]^x [ML^{-3}]^y [L]^z ML^{-1}T^{-2} \dots (6)$$

Las ecuaciones formadas para MLT son:

- M:  $y + 1 = 0$  -----(d)
- L:  $x - 3y - z - 1 = 0$  -----(e)
- T:  $-x - 2 = 0$  -----(f)

Donde las soluciones para este sistema de ecuaciones son:

$$x = -2 \quad y = -1 \quad z = 0$$

Sustituyendo estas soluciones en la ecuación (6) el resultado es:

$$\pi_2 = \frac{K}{\rho \sqrt{v}} \dots (7)$$

Los números obtenidos son:

$$\phi \left[ \frac{\mu}{\sqrt{Lg}}, \frac{K}{\rho \sqrt{v}} \right] = 0 \dots (8)$$

Invirtiendo los parámetros y tomando raíz cuadrada de  $\pi_2$  el resultado es:

$$\phi \left[ \frac{\sqrt{Lg}}{\mu}, \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{K\rho}} \right] = 0, [Re, Ma] = 0 \dots (9)$$

En gases a altas velocidades, la viscosidad es mínima y se desprecia el valor de  $\pi_1$  y se elimina quedando el resultado:

$$\phi \left[ \frac{v}{\sqrt{K/\beta}} \right] = 0 \quad \text{--- (10)}$$

A la expresión 10 se le da el nombre de número de Mach, y es una guía para su determinación y aplicación en flujo de fluidos a altas velocidades

Desarrollo del número de Mach.— Tomando como referencia la ecuación (10) es necesario encontrar una expresión del número de Mach mas descriptiva acerca, del fenómeno que se presenta en flujo de fluidos incompresibles. La determinación del número de Mach, es la siguiente:

El módulo de elasticidad (K) está dado por la expresión para un volumen de fluido:

$$K = -\frac{dP}{d\bar{v}} \quad \text{--- (11)} \quad \bar{v} = \text{volumen del elemento del fluido sujeto a cambio de presión}$$

Como  $\frac{d\bar{v}}{\bar{v}} = -\frac{d\beta}{\beta} \quad \text{--- (12)}$

K se puede expresar como:  $K = \beta \frac{dP}{d\beta} \quad \text{--- (13)}$

Consideremos que la velocidad de propagación de una onda, en un ducto, se puede encontrar mediante las siguientes ecuaciones

a) La ecuación de continuidad para un gas es:

$$\rho dv + v d\rho = 0 \quad \text{--- (14)}$$

b) La ecuación de movimiento para un gas es:

$$dP = -\rho v dv \quad \text{--- (15)}$$

La perturbación en un fluido, o cambio en las características de un flujo permanente, ocurre cuando hay caída de presión por aumento en la velocidad del fluido.

Igualando las dos ecuaciones y eliminando dv el resultado es:

$$v^2 = \frac{dP}{d\beta} \quad \text{--- (16)}$$

A esta velocidad en particular que ocurre cuando hay variación de presión, originando ondas de choque, se le conoce como velocidad -

de sonido; su expresión es:

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad \text{--- (17)}$$

sustituyendo la ecuación (17) en (13) el módulo de elasticidad es:

$$K = \beta c^2 \quad \text{--- (18)}$$

Despejando la velocidad del sonido de la ecuación (18)

$$c = \sqrt{\frac{K}{\beta}} \quad \text{--- (19)}$$

Esta ecuación se aplica a gases y a líquidos.

El número de Mach encontrado en la ecuación (10) se modifica introduciendo la velocidad del sonido de la ecuación (19), -- siendo el resultado:

$$M_a = \frac{V}{\sqrt{K/\beta}} = \frac{V}{c} \quad \text{--- (20)}$$

La ecuación (20) nos indica que el número de Mach, es un cociente-- entre la velocidad local y la velocidad de sonido del medio.

El movimiento de una onda sonora es termodinámicamente, es a entropía constante o isentrópico. Para un proceso isentrópico - de un gas perfecto, la relación entre la presión y la densidad es:

$$P = P \rho^{-K} = \text{constante} \quad \text{--- (21)}$$

tomando logaritmos en ambos miembros y diferenciando la ecuación - (21) se tiene:

$$\frac{dP}{d\rho} = K \frac{P}{\rho} = KRT \quad \text{--- (22)}$$

sustituyendo la ecuación (22) en la (17)

$$c = \sqrt{KRT} \quad \text{--- (23)}$$

Sustituyendo (23) en la (20) el resultado es:

$$M_a = \frac{V}{\sqrt{KRT}} \quad \text{--- (24)}$$

Esta expresión nos indica que el número de Mach depende de la velocidad local del fluido y la temperatura del sistema.

Definición del Número de Mach.-- Se tiene en el flujo compresible dos regímenes diferentes, caracterizando por distintos fenómenos de flujo.

Uno de los criterios relativos a dichos regímenes es el

número de Mach, que es la relación entre la velocidad del flujo y la del sonido:

Regímenes de flujo compresible.- Un fluido compresible en régimen estacionario, con una presión y temperatura determinada, se transporta a través de una tubería por medio de las ondas de propagación.

De acuerdo a las condiciones de velocidad con que se propaguen las ondas vamos a tener diversos regímenes de flujo tales como: a) Flujo subsónico, b) flujo sónico y c) Flujo supersónico.

Cada uno de estos regímenes de flujo estará determinado por la velocidad, presión, temperatura, y densidad del fluido compresible así como también el sonido que se transmite cuando está fluyendo.

Limitación de cada régimen por el número de Mach.- Los diferentes regímenes de flujo se van a limitar, y a dar su situación en base al criterio relativo de un valor de número de Mach igual a su unidad.

Para cada régimen van a quedar determinadas sus características y tipo de flujo, siendo sus limitaciones con respecto al número de Mach las siguientes:

- a)  $Ma < 1$  ( $Ma < 1$ ) ocurre flujo subsónico.
- b)  $Ma = 1$  ( $Ma = 1$ ) ocurre flujo sónico.
- c)  $Ma > 1$  ( $Ma > 1$ ) ocurre flujo supersónico.

Esta división de regímenes en base al número de Mach, da como resultado, un profundo y efectivo estudio para cada régimen.

En el diseño de tuberías, toberas, difusores; es necesario que se tenga en cuenta el tipo y características del flujo, ya que se debe saber el fenómeno que ocurre cuando se está transportando un fluido compresible a alta velocidad. El resultado de esta división, es dar una división panorámica acerca del tipo de régimen que se desea, y que sea beneficioso para la tubería que puede ocasionar daños.

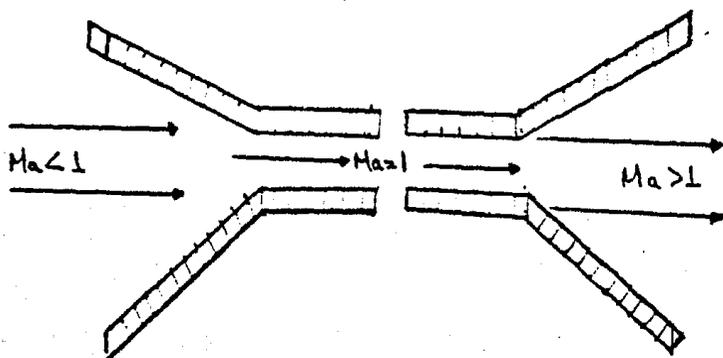
Aplicaciones del Número de Mach.- Tiene aplicación en los -

procesos de flujo de fluidos compresibles siguientes:

a) Expansión isentrópica.- En este proceso, el área de sección transversal de la conducción tiene que variar, y se tratará por lo tanto de un proceso de área variable.

Los equipos que generalmente cambian el área son las toberas y difusores.

Una tobera es un dispositivo por el medio del cual se espera ganar un aumento de velocidad a costo de la presión que consecuentemente disminuye.



En la figura se muestran toberas de tipo convergente I y del tipo divergente II. Estas toberas se pueden tener aisladas o combinadas de acuerdo, a las características y necesidades del régimen de flujo. Para el flujo subsónico ( $Ma < 1$ ) la sección transversal de la tobera va a ir disminuyendo; consecuentemente la presión disminuye, y la velocidad aumenta.

Para un flujo sónico ( $Ma = 1$ ) la velocidad del sonido en el fluido, es igual a la velocidad de la corriente cuando es máxima cantidad de caudal por unidad de superficie.

Para el flujo supersónico ( $Ma > 1$ ) el área transversal disminuye, la presión disminuye al aumentar la velocidad.

Difusor.- Este es un dispositivo en el cual se desea ganar energía o presión a costa de la energía cinética. Esto puede ser efectuado haciendo al difusor divergente en el caso de flujo supersónico.

Se pueden realizar combinaciones de tobera difusor de acuerdo a las necesidades del tipo de flujo, de presión, y de velocidad.

Cálculo de la masa de velocidad. - En el caso de toberas, y difusiones, se hace la restricción de que no hay fricción por ser mínima.

La masa velocidad es:

$$G = \rho v \quad \text{--- (1)}$$

La densidad se obtiene de:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{--- (2)}$$

Despejando:  $\rho$

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{P}{P_0}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{--- (3)}$$

La velocidad es, balance de energía para tobera o difusor

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{dv^2}{2g_c} = 0 \quad \text{--- (4)}$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (4) y poniendo los límites de integración:

$$\frac{P_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P^{1/\gamma}} + \int_0^v d\frac{v^2}{2g_c} = 0$$

Integrando y despejando queda:

$$v^2 = \left[\frac{2g_c P_0}{\gamma - 1}\right] \left[1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \quad \text{--- (6)}$$

$$v = \left[\frac{2g_c P_0}{\gamma - 1}\right]^{1/2} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2} \quad \text{--- (7)}$$

Tenemos que  $G = \rho v$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (7) en (1) se tiene:

$$G = \left[\frac{2g_c \rho_0 P_0}{\gamma - 1}\right]^{1/2} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{--- (8)}$$

Esta masa velocidad va a tener un tipo de flujo característico que deberá estar determinado por un valor del Número de Mach.

Para el caso de equipos de área de sección transversal variable, la expresión es:

$$M_a^2 = \frac{v}{\sqrt{k g_c \bar{V}}} \quad \text{--- (9) si } \bar{V} = \frac{1}{\rho}$$

$$M_a^2 = \frac{v \rho}{\sqrt{k g_c P}} \quad \text{--- (9)}$$

Si las ecuaciones (3) y (7) se sustituyen en (9) se tiene :

$$M_a^2 = \frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{P_0}{P} \right)^{1-\frac{1}{k}} - 1 \right] \left( \frac{P}{P_0} \right)^{1/k}$$

Flujo Isotérmico en fricción.- La temperatura de un fluido compresible que circula a través de una tubería de sección transversal definida, se debe mantener constante mediante la transmisión de calor a través de la pared de conducción.

Para pequeños números de Mach la distribución de presión en el flujo isotérmico es aproximadamente la misma que en el adiabático para las condiciones de entrada.

El proceso isotérmico no puede pasar a través de la condición límite de un  $Ma = 1$  y obteniéndose una velocidad menor que en el proceso adiabático.

Determinación de la masa velocidad

$$G = \rho v = \frac{v}{V} \quad \text{--- (10)}$$

Para condiciones isotérmicas un balance de energía queda:

$$\frac{dv^2}{2} + \frac{f}{D} dl = \left( \frac{2 g_c}{v^2} \right) P dV \quad \text{--- (11)}$$

Se tiene que:

$$P = \frac{P_1 v_1}{v_1} \quad \text{cuando } G = \text{constante } \frac{dV}{V} = \frac{dv}{v}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (11)

ésta queda:

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv^2}{v^2} + \frac{f}{D} \int_0^L dl = 2 g_c \rho_1 \bar{V}_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^3} \quad \text{--- (12)}$$

Integrando y reorganizándolo la ecuación (12) queda:

$$\ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 + \frac{L f}{D} = \frac{g_c \rho_1 v_1}{v_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \right] \quad \text{--- (13)}$$

Si  $G = \text{constante}$   $G_1 = G_2$

$$\frac{v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_2} \quad \text{se tiene } \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{P_2}{P_1} \quad \text{--- (14)}$$

$$M_a^2 = \frac{v}{c} \quad \text{--- (9) si } \bar{v} = \frac{1}{\rho}$$

$$M_a^2 = \frac{k g_c \bar{v}}{k g_c P} \quad \text{--- (9)}$$

Si las ecuaciones (3) y (7) se sustituyen en (9) se tiene :

$$M_a^2 = \frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] \left( \frac{P}{P_0} \right)^{1/\gamma}$$

Flujo Isotérmico en fricción.- La temperatura de un fluido compresible que circula a través de una tubería de sección transversal definida, se debe mantener constante mediante la transmisión de calor a través de la pared de conducción.

Para pequeños números de Mach la distribución de presión - en el flujo isotérmico es aproximadamente la misma que en el adiabático para las condiciones de entrada.

El proceso isotérmico no puede pasar a través de la condición límite de un  $Ma = 1$  y obteniéndose una velocidad menor que en el proceso adiabático.

Determinación de la masa velocidad

$$G = \rho v = \frac{v}{V} \quad \text{--- (10)}$$

Para condiciones isotérmicas un balance de energía queda:

$$\frac{dv^2}{dt} + \frac{f}{D} dl = \left( \frac{2 g_c}{v^2} \right) P d\bar{v} \quad \text{--- (11)}$$

Se tiene que:

$$P = \frac{P_1 v_1}{v_1} \quad \text{cuando } G = \text{constante } \frac{d\bar{v}}{v} = \frac{dv}{v}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (11)

ésta queda:

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv^2}{v^2} + \frac{f}{D} \int_0^L dl = 2 g_c P_1 \bar{v}_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^3} \quad \text{--- (12)}$$

Integrando y reorganizando la ecuación (12) queda:

$$\ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 + \frac{L f}{D} = \frac{2 g_c P_1 \bar{v}_1}{v_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \right] \quad \text{--- (13)}$$

Si  $G = \text{constante } G_1 = G_2$

$$\frac{v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_2} \text{ se tiene } \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \quad \text{--- (14)}$$

Se sustituye (13) en (14)

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{fL}{D} = \frac{g_c P_1}{G^2 V_1} \left[ 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \right] \quad (15)$$

Despejando  $G^2$  se tiene:

$$G^2 = \frac{g_c P_1 D}{f L V_1} \left[ 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \right] - \left[ \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \right]^2 \quad (16)$$

La ecuación anterior es la de flujo másico isotérmico con fricción.

La condición de flujo másico máximo se alcanza cuando --

$$\frac{dG}{dP} = 0 \quad (17)$$

Por lo tanto diferenciando la ecuación (16) el resultado

es:

$$G_c^2 = g_c \left(\frac{P_1}{V_1}\right) \left(\frac{P_c}{P_1}\right)^2 = \frac{P_c g_c}{V_c} \quad (18)$$

Esta es la ecuación de un flujo con una velocidad másica máxima que va fluyendo bajo ciertas condiciones específicas de presión y temperatura. Esta velocidad de flujo másico tiene un régimen característico indicado por el número de Mach que se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{Si } (Ma)^2 = \frac{v^2}{g_c P_c V_c} \quad (19)$$

Para flujo sónico, sustituyendo la ecuación 18 en (19) se obtiene:

$$(Ma)^2 = \frac{G_c^2 \bar{V}_c}{g_c P_c} = 1 \quad (20)$$

Correlacionando las ecuaciones (18) y (20) se deduce que el flujo másico máximo en un tubo o tobera se puede obtener bajo la condición del número de Mach igual a la unidad. Por lo tanto -- cuando se presenta un flujo másico máximo, el fluido se está moviendo bajo un régimen de flujo sónico.

### Número de Knudsen

El número de Knudsen es un parámetro adimensional que se aplica para los casos cuando tenemos un gas de baja densidad, y baja presión, fluyendo a través de un ducto de diámetro pequeño.

En el estudio convencional de corrientes gaseosas, a altas velocidades y presiones ordinarias, el fenómeno de flujo de fluidos, se describe satisfactoriamente en función del número de Reynolds, y de Mach. Sin embargo, cuando nos encontremos con un flujo gaseoso, - en donde la densidad es baja y la presión es pequeña, es necesario - tomar otro parámetro que describa al fenómeno, y este es el número - de Knudsen.

Significado del número de Knudsen.- El número de Knudsen, es un número adimensional que nos indica las características del tipo de flujo que fluye a través de un ducto a presiones y densidades bajas, estando definido por la siguiente relación:

$$K_n = \frac{\text{trayectoria media libre. } (\lambda)}{\text{Dimensión característica del cuerpo (D)}}$$

Donde la trayectoria libre media de una molécula ( $\lambda$ ) es la distancia promedio que viaja tal molécula entre colisiones.

La dimensión (D) característica del ducto es el diámetro.

El número de Knudsen se presenta, y se usa exclusivamente - cuando se tienen flujos de gases a densidades y presiones bajas, o - bien cuando hay altas densidades de gas, pero el diámetro del ducto es pequeño.

Regímenes de flujo a bajas densidades y presiones en gases.

En general son dos regímenes de flujo en los que se pueda - clasificar el movimiento de un gas, fluyendo a través de un ducto a baja presión y densidad siendo las siguientes:

1) Región de flujo continuo.- En este régimen de flujo, — las moléculas gaseosas se mueven de forma ordenada y continua, formando un perfil de velocidad parabólico. Se presenta cuando la trayectoria media libre, es pequeña en comparación con la dimensión característica del cuerpo. Su relación es:

$$\lambda \ll D$$

2) Régimen de flujo discontinuo.- Se presenta cuando las moléculas del gas se mueven en forma de paquetes, y para este tipo de flujo la trayectoria libre media es mayor que el diámetro del ducto

$$\lambda \gg D$$

Origen del número de Knudsen.- El origen del número de Knudsen se obtiene a partir de la teoría cinética de gases, el desarrollo es el siguiente

De la teoría cinética de gases la expresión para la trayectoria libre media es la siguiente:

$$\lambda = \frac{0.707}{4n^2r\eta} \dots\dots (2)$$

r = radio molec. efectivo para colisiones.

n = densidad molecular.

La velocidad del sonido de un gas está relacionada con la velocidad media (v) a través de la relación:

$$a = v_m \sqrt{\frac{\pi r}{8}} \dots\dots (3)$$

La velocidad molecular media se expresa como:

$$v_m = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} \dots\dots (4)$$

La relación del número de Reynolds en la teoría cinética es

$$Re = \frac{2VD}{v_m \lambda} \dots\dots (5)$$

Mediante el uso de la ecuación (3) el número de Mach se ex-

presa como:

$$M = \frac{v}{a} = \frac{v}{v_m} \sqrt{\frac{\rho}{\pi \gamma}}$$

Combinando las ecuaciones (1) (5), y (6) el número de Knudsen puede expresarse como:

$$Kn = \frac{\lambda}{D} = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2}} \frac{Ma}{Re} \dots (7)$$

Esta relación nos permite interpretar un régimen de flujo de baja densidad en términos de los parámetros de flujos convencionales, los números de Mach y de Reynolds.

Con la expresión (7) se calcula el número de Knudsen en función de los números dimensionales de Reynolds y Mach, cuyo manejo y obtención son a nivel macroscópico.

Rangos de los regímenes de flujo.- Para el número de Knudsen se han elaborado directamente e indirectamente rangos de los regímenes de flujo los cuales son:

.) Stalder y colaboradores elaboraron un rango para el número de Knudsen, este es:

- a) Para flujo continuo:  $Kn < 0.001$
- b) Para flujo deslizante:  $0.001 < Kn < 2$
- c) Para flujo molecular libre medio:  $Kn > 2$

..) Tsien elaboró un rango para Knudsen en función del número de Reynolds y de Mach:

- a)  $Kn = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2}} \frac{Ma}{Re}$  para flujo continuo.  $\frac{Ma}{Re} < 0.01$
- b) Para flujo deslizante:  
 $\frac{0.01}{Re} < \frac{Ma}{Re} < 0$

- c) Para flujo molecular promedio:  
 $Kn > 10$

Se puede usar cualesquiera de los dos métodos descritos anteriormente, dependiendo de los parámetros conocidos.

### Aplicación del Número de Kudsen

En el estudio convencional de corrientes gaseosas a altas velocidades y presiones ordinarias el fenómeno de flujo se describe satisfactoriamente en función del número de Mach y Reynolds.

Sin embargo para la transferencia de calor y caída de presión en gases de presiones bajas surge la necesidad de introducir el número de Knudsen, que considera el movimiento molecular.

Caída de Presión en el interior de tubos para gases de baja densidad y presión.

El flujo de gases a bajas presiones esta comprendido normalmente en la región de los números de Reynolds que caracterizan el flujo en régimen laminar.

Sin embargo para números de Knudsen  $\geq 0.001$  la caída de presión en el interior de tubos es menor que la prevista por la ley de Hogen-Poiseuille.

$$-\frac{dP}{dL} = \frac{32 \mu V}{gc D^2} \dots\dots (1)$$

Kund y Wortbug aplican un factor correctivo ( $\bar{B}$ ), para hacerla utilizable, en caso de flujo suelto y de flujo molecular libre

$$-\frac{dP}{dL} = \frac{32 \mu V}{gc D^2} \left[ \frac{1}{\bar{B}} \right]$$

Para una caída de presión dada el caudal resultante es  $\bar{B}$  veces mayor que el valor dado por la ecuación (2).

Maxwell ha deducido una relación teorica para  $\bar{B}$  en función del número de Knudsen

$$\bar{B} = 1 + 8 \left( \frac{2}{\beta} - 1 \right) \times N_{Kn} \dots\dots (3)$$

$\beta$  = Fracción de moléculas que al chocar en la pared se reflejan en forma difusa.

Los resultados de Brown dan  $\beta = 0.84$  para  $N_{Kn}$  de 0.01 a 100 lo que conduce a:

$$\bar{B} = 1.0 + 11 N_{Kn} \dots\dots (4)$$

Los datos experimentales de Broun para aire e hidrogeno en el interior de tubos de cobre en base a la ecuación (4) se construyó la gráfica (1)

En base a este dato de gráficas entre

$$N_{Kn} = f(\delta)$$

Se obtienen las correlaciones de la caída de presión en la ecuación (2).

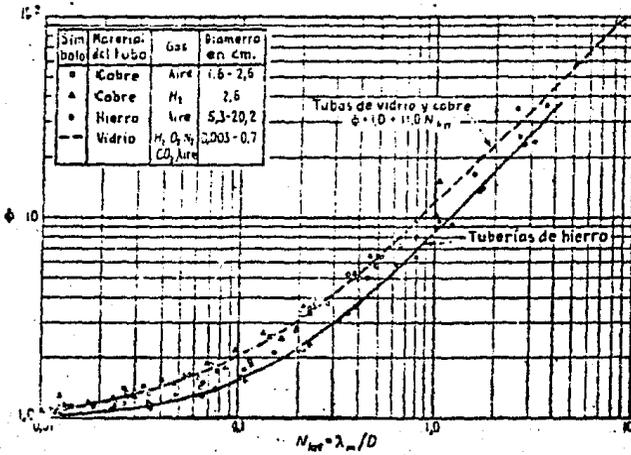


Fig.(1) Factor de corrección de la ley de Hagen-Poiseuille para flujo suelto desprendido.

## Número de Potencia y de Froude

Introducción.- El número de Potencia es un número adimensional, que tiene su aplicación en la operación unitaria llamada agitación.

El número de Potencia nos indica " la potencia necesaria, que se le debe proporcionar a un agitador, para mover una cantidad específica de fluido que se encuentre en un tanque agitado". Este número adimensional se obtiene a partir del análisis dimensional, como una función del número de Froude y de Reynolds.

El número de Froude, es parámetro dimensional importante en flujo de fluidos, y se presentan donde existen superficies libres con fenómenos ondulatorios. Las formaciones de ondas depende especialmente del equilibrio que existe entre las fuerzas de gravedad e inercia.

Los equipos donde se presenta el número de Froude son:

- a) Flujo de fluidos, a través de canales abiertos.
- b) Formación de vortices en tanques agitados.

Debido a la importancia del número de Froude en agitación de tanques, lo analizaremos mas ampliamente en esta sección:

Agitación en tanques.- La agitación consiste en producir movimientos irregulares, turbulentos en un fluido mezclado por medio de dispositivos mecánicos, que actúan sobre el fluido.

Como la agitación de muchos procesos, deben cumplir ciertos requisitos y objetivos para que su eficacia sea elevada, es necesario hacer una clasificación de operaciones, siendo las siguientes:

1.- Transferencia de masa en sistemas heterogéneos, y operaciones tales como:

- a) Reacciones químicas.
- b) Extracción.
- c) Absorción.

d) Adsorción.

2.- Mezclado de líquidos en tanques:

- a) agitación continua.
- b) agitación por lotes.

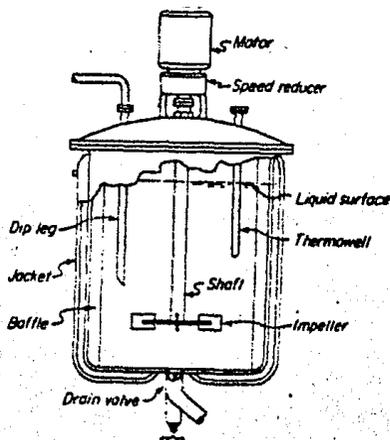
3.- Formación de emulsiones.-

- a) Emulsión de dos líquidos no miscibles.

4.- Transferencia calorífica.

- a) Reacción química.

Aparatos de agitación.- El diseño típico del equipo que se utiliza para mezclar líquidos en tanques agitados se muestra en la figura (a). El fondo es redondo para que permita la mejor trayectoria del fluido.



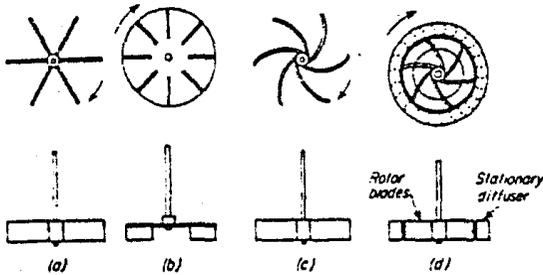
Agitadores.- los agitadores se dividen en dos clases:

- 1) Muy revolucionados.- De hélice, de turbina, cono, disco.
- 2) Rotatóricos.- Poco revolucionados. paletas, ancla.

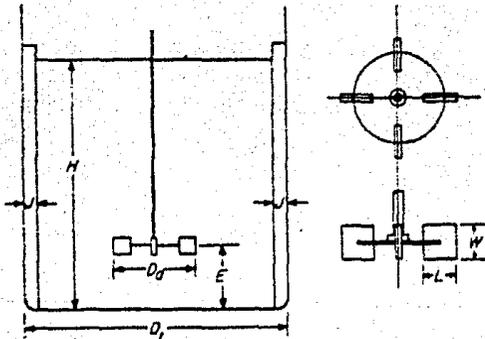
Tipos de flujo en tanque.- Los tipos de flujo que se producen en un tanque dependen del tipo de rodete, tamaño, y proporciones del tanque.

Factores de forma.- Las relaciones que hay entre diversas

partes de los tanques se les llama factores de forma, y son de acuerdo a la geometría y características del tanque, y se muestra en la siguiente figura:



Turbine impellers: (a) Open straight blade. (b) Vaned disk. (c) Vertical curved blade. (d) Shrouded curved blade with diffuser ring.



Measurements of turbine. (Rushon, Coelich, and Everett.<sup>21</sup>)

Origen del número de Potencia como función del número de Froude y número de Reynolds.- Un factor importante en el diseño de un tanque agitado, es la potencia necesaria para mover el rodete.

Esta potencia no puede estimarse teóricamente aún en sistemas agitados sencillos, sino que es preciso determinarlo por el mismo tipo de experimentos cuantitativos basados en el análisis dimensional. La potencia dependerá del tipo de flujo, y de las proporciones geométricas del equipo.

Las variables que entran en el análisis son:

- a) Viscosidad      b) Densidad      c) Velocidad de giro - del rodete
- d) Constante adimensional (gc)      e) aceleración de la gravedad (g)
- f) Diámetro del rodete.

Para un líquido Newtoniano, la potencia para mover el agitador es función de las siguientes variables:

$$P = \psi (n, D_a, \mu, \rho, g_c, \rho) \dots\dots\dots (1)$$

Para encontrar la relación entre estas variables, aplicamos el teorema de Buckingham's.

$$(P, n, D_a, \mu, \rho, g_c) = 0 \dots\dots (2)$$

El número de grupos dimensionales = 7 variables - 4 dimensiones fundamentales = 3 grupos dimensionales.

Tomamos un grupo de variables núcleo, que son de fácil medición:

|                              |                               |                             |
|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1.- $Q_1 = n = \frac{1}{t}$  | $Q_4 = g_c = \frac{LM}{Ft^2}$ | $Q_7 = \mu = \frac{L}{t^2}$ |
| $Q_2 = D_a = L$              | $Q_5 = \rho = \frac{LF}{t^3}$ |                             |
| $Q_3 = \rho = \frac{M}{L^3}$ | $Q_6 = \mu = \frac{M}{LT}$    |                             |

$$2.- \Pi'_5 = 7 - 4 = 3 \Pi'_3$$

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| 3.- $\bar{Q}_1 = Q_1$ | $\bar{Q}_3 = Q_3$ |
| $\bar{Q}_2 = Q_2$     | $\bar{Q}_4 = Q_4$ |

$$4.- \Pi_1 = n^a Da^b \rho^c gc^d \dots\dots (3)$$

$$\Pi_1 = \left[ \frac{1}{t} \right]^a L^b \left[ \frac{M}{L^3} \right]^c \left[ \frac{LM}{Ft^2} \right]^d \left[ \frac{L}{t^2} \right] \dots\dots (4)$$

Para L:  $b - 3c + d + 1 = 0$   
 M:  $c + 1 = 0$   
 t:  $-2 - 2d - 2 = 0$   
 F:  $-d = 0$

El sistema resuelto es  $a = -2$ ;  $b = -1$ ;  $c = 0$ ;  $d = 0$

Sustituyendo estos resultados en los exponentes de la ecuación (4):

$\Pi_1 = \frac{g}{nD}$  como el inverso de éste número, es el número de Froude.

$$\Pi_1' = \frac{1}{\Pi} = \frac{n^2 Da}{gc} \dots\dots (5)$$

$$\Pi_1' = \frac{n^2 Da}{gc} = \text{Número de Froude.}$$

Para encontrar  $\Pi_2$  basta sustituir P por g en la ecuación (3), conservando el mismo núcleo de variables. El resultado es:

$$\Pi_2 = n^a Da^b \rho^c gc^d P \dots\dots (6)$$

$$\Pi_2 = \left( \frac{1}{t} \right)^a L^b \left( \frac{M}{L^3} \right)^c \left( \frac{LM}{Ft^2} \right)^d \left( \frac{LF}{t} \right)$$

Para L:  $b - 3c + d + 1 = 0$   
 t:  $-a - 2d - 1 = 0$   
 M:  $c + d = 0$   
 F:  $-d + 1 = 0$

Las soluciones de éste sistema son:  $a = -3$ ;  $b = -5$ ;  $c = -1$   
 $d = 1$ .

Sustituyendo los resultados (de las ecuaciones encontradas) en la ecuación (6)

ésta queda:

$$\Pi_2 = \frac{\rho c P}{n^3 D^5 \rho} = \text{Número de Potencia. .... (7)}$$

Si vamos a encontrar  $\Pi_3$  sustituimos en la ecuación (4)

$$\Pi_3 = n^a D^b \rho^c \rho c^d \mu \text{ ..... (8)}$$

$$\Pi_3 = \left(\frac{1}{t}\right)^a L^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{LM^d}{Pt^2}\right) \left(\frac{M}{Lt}\right)$$

Para L:  $b-3c+d-1=0$

t:  $-a-2d-1=0$

M:  $c+d+1=0$

P:  $-d=0$

El resultado de éste sistema de ecuaciones es:

$a = -1; b = -2; c = -1; d = 0$

Sustituyendo los exponentes encontrados en la ecuación (8),

el resultado es:

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{n n^2 \rho} \text{ ..... (9)}$$

$$\Pi'_3 = \frac{1}{\Pi_3} = \frac{n D \rho}{\mu} = \text{Número de Reynolds.}$$

Los parámetros dimensionales encontrados son:

$$\Psi \left[ \frac{\rho c P}{n^3 D^5 \rho}, \frac{n^2 D a}{\rho c}, \frac{n D a \rho}{\mu} \right] = 0 \text{ ..... (10)}$$

Por experimentación se sabe que la relación entre estos grupos dimensionales es la siguiente:

$$\left[ \frac{\rho c P}{n^3 D^5} \right] = \left[ \frac{n^2 D a}{\rho c}, \frac{n D^2}{\mu} \right] = \phi$$

La identificación de éstos números dimensionales obtenidos es la siguiente

El primer grupo dimensional  $\left(\frac{\rho c P}{n^3 D^5}\right)$  corresponde al número de potencia, y se representa como NPo. El segundo  $\frac{n^2 D a}{\rho c}$  corres

gravedad involucrada en el número de Froude.

Cuando interviene el número de Froude, su efecto se toma en cuenta en la función exponencial, y la expresión es :

$$\frac{N_{Po}}{N_{Pr}^m} = \psi (Re, S_1, S_2, \dots, S_n) = \beta \dots (13)$$

El exponente  $m$  para un determinado conjunto de factores de forma, está relacionado empíricamente con el número de Reynolds mediante la ecuación siguiente:

$$m = \frac{a - \log Re}{b} \dots (14)$$

Siendo  $a$  y  $b$  las constantes y sus valores para las curvas de las figuras (I) y (II) se dan en la tabla (I).

| Figura | línea | a   | b    |
|--------|-------|-----|------|
| 1      | B     | 1.0 | 40.0 |
| 2      | B     | 1.7 | 18.0 |
|        | C     | 0   | 18.0 |
|        | D     | 2.3 | 18.0 |

+- J. H. Bushton, Ind. Ing. Chem 44: (1952)

Se toma como referencia la ecuación (13) para Reynolds  $> 300$  y se realizaron experimentos y los resultados son las gráficas (I) y (II).

II.- Para el rango  $Re < 300$  el número de Froude se elimina de la ecuación (13) función de potencia, ya que no hay formación de vórtice ni influencia de la gravedad. La ecuación modificada para estas condiciones es:

ponde al número de Reynolds (Re), y el tercero  $\frac{nD^2\rho}{\mu}$  es el número de Froude (Fr). La ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$N_{Po} = \psi (Re, Fr) = \phi \dots (11)$$

Haciendo la consideración, que en la agitación sobre un tanque influyen la geometría del recipiente, tipo de impulsor, tomamos en cuenta los factores de forma que representan relación entre las dimensiones, geometría y forma del sistema tanque agitado. La ecuación (11) puede escribirse como:

$$N_{Po} = (Re, Fr, S_1, S_2, \dots, S_n) = \phi \quad (12)$$

En base a esta correlación obtenida, se encontró que el número de Potencia, está relacionado directamente con el conjunto de números adimensionales (Re, Fr, S<sub>1</sub>... S<sub>n</sub>) que llamamos función potencia ( $\phi$ ).

Tomando como referencia la ecuación (12) se realizaron experimentos de la función potencia para cada sistema de tanque-agitador, los resultados obtenidos son gráficas del tipo (I) y (II).

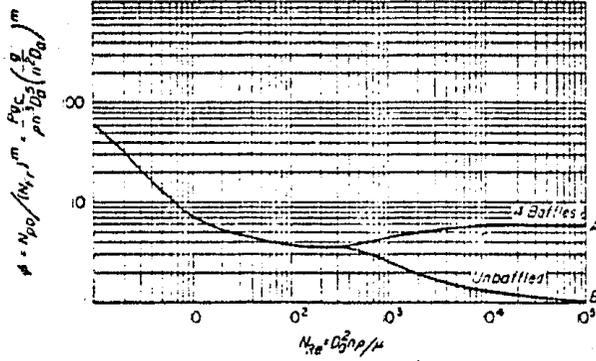
DETERMINACION DEL NUMERO DE POTENCIA.- Debido a que obtención del número de potencia de la ecuación (12) es a partir de la experimentación, es necesario:

$$N_{Po} = (Re, Fr, S_1, S_2, \dots, S_n) = \phi \quad \dots\dots\dots(12)$$

Tomar en consideración el efecto de variación del número de Reynolds y Froude para la agitación en tanques. Considerando el rango de operación de éstos parámetros adimensionales se obtienen las siguientes expresiones.

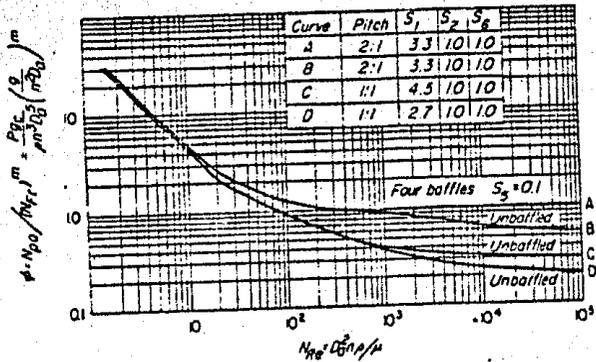
I.- Para un Reynolds  $> 300$ .

En el sistema tanque-agitador el fluido en movimiento, forma un vórtice; por lo tanto hay que considerar el efecto de la --

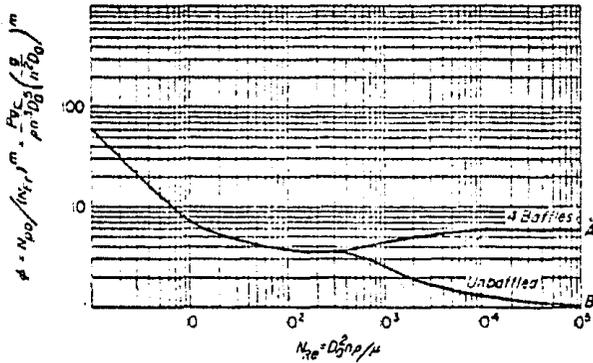


Power function  $\phi$  vs.  $N_{p0}$  for six-blade turbine. (Rushton, Costich, and Everett.<sup>11</sup>)

Fig. - 1

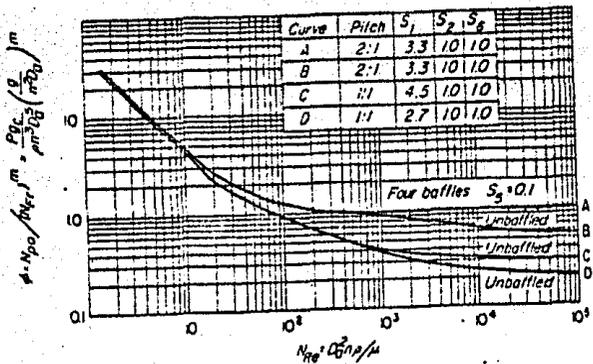


Power function  $\phi$  vs.  $N_{p0}$  for three-bladed propellers. (Rushton, Costich, and Everett.<sup>11</sup>)



Power function  $\phi$  vs.  $N_{Re}$  for six-blade turbine. (Rushton, Costich, and Everett. 11)

Fig. - 1



Power function  $\phi$  vs.  $N_{Re}$  for three-bladed propellers. (Rushton, Costich, and Everett. 11)

Fig. - 2

$$N_{Po} = (Re, S_1, S_2 \dots S_n) = \phi \dots \dots (13)$$

El número de potencia es función exclusiva del número de Reynolds y factores de forma.

III.- Para el rango de  $Re < 10$ , el fluido que circula en el tanque agitado tiene un régimen laminar, por lo tanto la densidad de la de ser un factor importante, y se elimina el número de Reynolds, la expresión queda así:

$$N_{Po} = K_L = \psi (S_1, S_2 \dots S_n) \dots \dots (14)$$

Por lo tanto el número de potencia es función exclusiva de los factores de forma del sistema tanque-agitador.

Aplicación del número de potencia.- El número de potencia se aplica en agitación de fluidos newtonianos para determinar la potencia necesaria que se debe suministrar al líquido, para ponerlo en movimiento constante en un sistema agitador-tanque.

A partir de la ecuación funcional (13) y con apoyo a las gráficas (1) y (2) se puede calcular el consumo de potencia de la siguiente forma:

1) la ecuación funcional es:

$$N_{Po} = (Re, Fr, S_1 \dots S_n) = \phi$$

2.- Representando cada parámetro adimensional por su grupo de variables que lo representan:

$$\frac{P_{ac}}{\rho^3 D^5} = \psi \left[ \left( \frac{nD^2 \rho}{\mu} \right) \left( \frac{n^2 D a}{g} \right) S_1, S_2 \dots S_n \right] = \phi$$

De gráficas puede encontrarse  $\phi$  para un determinado  $Re$ .

La ecuación funcional de potencia se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{P_{ac}}{n^3 D^5} = \phi$$

Por lo tanto la potencia necesaria que se tiene que suminis-

trar al agitador es la siguiente:

$$P = \frac{\rho n^3 D_a^5}{\epsilon_c}$$

En base a esta ecuación se puede determinar la potencia ne cesaria que se le debe proporcionar a un agitador.

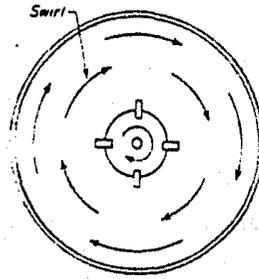
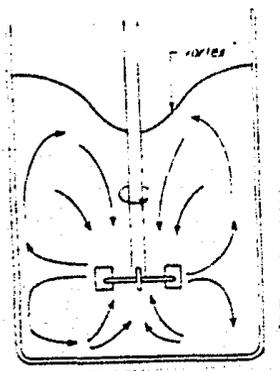
Las unidades de la ecuación son:

$$P = CV = \frac{(\text{m}) (\text{m}^3/\text{s}) (\text{Kg}/\text{m}^3)}{75 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

Concepto del número de Froude.- El número de Froude es un parámetro adimensional importante en flujo de fluidos. Se presenta donde existen superficies libres de fenómenos ondulatorios. Donde las formaciones de ondas dependen especialmente del equilibrio que existe entre las fuerzas gravitacionales y de inercia su relación es

$$N_{Pr} = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de gravedad}} = \frac{v^2}{g D} \dots (8)$$

Para el caso de tener un sistema donde un tanque con su agitador, el número de Froude interviene al presentarse una superficie libre con su vórtice (fig 3) por parte del fluido en movimiento:



Vortex formation and circulation pattern in an agitated tank. (After Lyons, 11)

Donde el número de Froude para la agitación es:

$$N_{Pr} = \frac{n D a}{g} \dots (9)$$

$$\text{donde } v = nD \dots (10)$$

Como existen fuerzas que estan en competencia en el flujo, la que domina tendrá un efecto predominante sobre el fluido.

Cuando el número de Froude es pequeño, la fuerza que domina y tiene mayor importancia es la gravedad.

## Números adimensionales en transferencia de calor.

### Introducción.

La ciencia transferencia de calor busca predecir la velocidad y mecanismo de transmisión de energía calorífica, que ocurre entre cuerpos con una determinada diferencia de temperatura existente entre ellos.

La transferencia de calor necesita complementada con la termodinámica, ya que, son dos ciencias mutuamente afines.

La termodinámica predice los intercambios de energía calorífica que se efectúan en un proceso, pero es incapaz de indicar el mecanismo mediante el cual se realiza la transmisión de calor.

La manera en que se puede transferir el calor de una zona caliente a otra zona fría, se clasifica de acuerdo a los siguientes mecanismos.

a) Conducción.- Es la transmisión de calor de un medio sólido homogéneo, donde existe una diferencia de temperatura de un punto (A) a un punto (B) sin desplazamiento de partículas.

La ley de transferencia de calor para una pared sólida es la siguiente:

$$dQ = k dA - \frac{dt}{dx}$$

Ley de Fourier en estado estable.

b) Convección.- El fenómeno de transferencia de calor, por convección es un proceso de transporte de energía, que se realiza como consecuencia del movimiento y contacto de las siguientes fases.

.) Fluido en movimiento con una diferencia de temperatura entre un punto "A" y otro "B".

..) Sólido en contacto con un fluido existiendo entre ellos un gradiante de temperatura.

...) Dos fluidos de diferente temperatura mezclándose.

Hay dos tipos de convección que son los siguientes.

i) Convección forzada.- Ocurre cuando el movimiento del fluido es provocado por dispositivos mecánicos como:

a.- Alabes o impulsores

b.- Ventiladores.

La ecuación de transferencia de calor para la convección forzada es la siguiente:

$$dQ = h Adt \quad h = \text{Coeficiente de transferencia de calor}$$

ii) Convección natural.- Se presenta cuando el movimiento del fluido se debe únicamente a las diferencias de densidades producidas por el gradiente de temperatura entre un punto (A) y (B).

c) Radiación.- Es la transmisión de calor que tiene lugar por absorción de energía radiante.

Los cuerpos calientes admiten ondas electromagnéticas en todas direcciones y alcanzan a otros.

La ecuación de transferencia de calor por radiación es la siguiente:

$$dQ = \epsilon dAT^4$$

La transmisión de calor de un determinado proceso tiene una combinación de cualquiera de los tres mecanismos expuestos anteriormente.

Número de Nusselt, Grashof y Prandlt.

Los números adimensionales de Nusselt, Grashof y Prandlt, son grupos de variables que están correlacionados mutuamente y tienen su aplicación en la transmisión de calor por conducción y convección libre entre superficies y sólidos.

Con los números de Nusselt, Grashof y Prandlt se puede calcular el coeficiente de transmisión de calor en el mecanismo de convección natural o libre.

La convección libre ocurre cuando el movimiento del fluido es ocasionado por diferencia de densidades, resultante del gradiente de temperaturas de un punto (A) a otro punto (B).

Los números adimensionales de Nusselt, Grashof y Prandlt, se obtuvieron por medio del análisis dimensional y experimentación del problema en estudio. Tomando como base que el sistema se encontraba bajo el mecanismo de convección natural.

A continuación se desarrollará el origen de los números de Nusselt Grashof y Prandlt, posteriormente se presentarán correlaciones obtenidas del análisis dimensional y experimentación que satisfacen diversas condiciones del sistema y finalmente se presentará la aplicación de los números adimensionales en estudio.

Origen de los números de Grashof, Nusselt y Prandlt.

Debido a la complejidad en la experimentación y en el desarrollo de las ecuaciones de movimiento para explicar y calcular el coeficiente de película que se presenta cuando hay transferencia de calor por convección natural entre un fluido y un sólido. Se recurrió a métodos adimensionales que dieron como resultado modelos de variables, que son guía para la experimentación en la determinación de correlaciones empíricas que son base para calcular el coeficiente de película.

El desarrollo del análisis dimensional para la obtención de los números de Nusselt, Grashof y Prandlt es el siguiente:

Tomando como referencia un sistema de una placa metálica caliente vertical donde el aire asciende libremente por el efecto de cambio densidad.

Las características del flujo están determinados por el efecto de flotación de flujo caliente como resultado de la transferencia de energía entre la placa a la temperatura  $T_0$  y el fluido a la temperatura ambiente  $T$ .

Las propiedades del fluido son:

$$\rho, \mu, C_p, K_v, \beta_g \dots (1)$$

La densidad del fluido se expresa de la siguiente forma:

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta \Delta T) \dots (2)$$

Donde

$\beta$  = Coeficiente de dilatación térmica.

$\rho_0$  = Densidad de referencia dentro de la capa límite.

$T$  = Diferencia de temperatura del fluido en la superficie de la placa y la correspondiente lejos de la placa.

Por experimentación se determinó que el coeficiente de película para convección libre, está en función de las siguientes variables:

$$h = CL^a Ts^b \rho^f \mu^i \beta^j C_p^m g^n r^r \dots (3)$$

Escribiendo en la ecuación (4) las unidades fundamentales de cada variable:

$$HT^{-1} t^{-1} L^{-2} = L^a T^b (ML^{-3})^f (Mt^{-1} L^{-1})^i T^{-j} (M^{-1} T^{-1} H)^m (t^{-2} L)^n (Ht^{-1} L^{-1} T^{-1})^r \dots (4)$$

Igualando los exponentes de ambos lados para cada variable es:

$$H : m + r = -1$$

$$t : -i - 2n + r = -1$$

$$L : a - 3f - i + n - r = -2$$

$$M : f + i - m = 0$$

$$T : b - j - m - r = -1$$

La resolución del sistema de ecuaciones se puede expresar, con cinco exponentes en función de otros tres exponentes.

$$a = -1 + 3n$$

$$f = 2n$$

$$r = 1 - n$$

$$b = j$$

$$i = m - 2n$$

Sustituyendo estos valores de exponentes de la ecuación (4) y simplificando, tenemos que el resultado final es:

$$\frac{hL}{k} = C \left( \frac{\beta \rho^2 L^3}{\mu^2} \right)^n (\beta T_s)^j \left( \frac{\mu C_p}{k} \right)^m \dots (5)$$

Juntado y simplificando los términos  $(\beta \rho)$  la expresión queda así:

$$\frac{hL}{k} = C \left( \frac{\beta \rho^2 L^3 T_s}{\mu^2} \right)^n \left( \frac{\mu C_p}{k} \right)^m \dots (6)$$

Identificando los números adimensionales escritos en la expresión anterior tenemos:

$$\frac{hL}{k} = \text{Número de Nusselt} = Nu$$

$$\left( \frac{\beta \rho^2 L^3 T_s}{\mu^2} \right) = \text{Número de Grashof} = Gr$$

$$\frac{\mu C_p}{k} = \text{Número de Prandtl} = Pr$$

La ecuación (6) queda expresada como:

$$Nu = C(Gr^n Pr^m) \dots (7)$$

La ecuación obtenida (7) sirve de orientación para la elaboración de experimentos que dan correlaciones empíricas para diferentes sistemas y regímenes de flujo.

En la ecuación (7) los valores de los exponentes "n", "m" y la constante (C) se encontraron por experimentación para diferentes condiciones del sistema.

Con los resultados obtenidos de los exponentes "n", "m" y la constante (C), se sustituyeron en la ecuación (7) y se obtuvieron las siguientes correlaciones.

1.- Weisse y Sounders, presentaron la siguiente ecuación empírica para placas y cilindros verticales.

a) En régimen turbulento

$$\frac{hcL}{k} = 0.13 \left( \frac{L^2 \rho^2 \beta \Delta T}{\mu^2} \times \frac{C_p \mu}{k} \right)^{1/3}$$

b) En régimen laminar

$$\frac{hL}{k} = 0.59 \left( \frac{L^3 \rho^2 \beta \Delta T}{\mu^2} \times \frac{C_p \mu}{k} \right)^{0.25}$$

2.- Para placas verticales con movimiento ascendente de aire en convección natural las correlaciones obtenidas son:

$$\frac{hL}{k} = 0.68 \left( \frac{Pr}{0.952Pr} \right)^{1/4} (PrGr)^{1/4}$$

$$10^4 < GrPr < 10^9$$

3.- Para tubos horizontales calientes con un  $Gr > 10^4$

$$\frac{hD}{k} = 0.4 \left( \frac{D \rho^2 \beta \Delta T}{\mu^2} \times \frac{C_p \mu}{k} \right)^{0.25}$$

4.- Para una esfera de diametro D sumergida en una gran masa de fluido se propuso la siguiente relación semiempírica:

$$\frac{hD}{k} = 2 + 0.60 \left( \frac{D^3 \rho^2 \beta \Delta T}{\mu^2} \right)^{1/4} \left( \frac{C_p}{k} \right)^{1/3}$$

Dependiendo del sistema que se trate se usan las correlaciones.

Aplicación del número de Nusselt, Grashof y Prandtl.

La aplicación de los números adimensionales de Nusselt, Grashof y Prandtl, se realizan en la transmisión de calor con el mecanismo de convección natural.

El objetivo de usar estos números adimensionales es calcular el coeficiente de transferencia de calor, que a su vez este coeficiente es una variable que interviene en la evaluación de la transferencia de calor que hay en un sistema sólido fluido con el mecanismo de convección libre.

Procedimiento para el calculo del coeficiente de película y transferencia de calor.

1.- Se identifica el sistema bajo el cual se está efectuando transferencia de calor por convección natural.

Ejemplo : Por un tubo horizontal circular, aire caliente, por convección natural.

2.- Se establecen las variables que intervienen en el sistema. En el aire son: ( $\mu, f, C_p, k$ )

3.- Se elige la ecuación semiempírica que satisface las condiciones presentadas en el sistema.

Para el caso del ejemplo, la ecuación que satisface es la siguiente:

$$\frac{h_i D}{k} = 0.4 \left( \frac{D_o \rho_s \beta_s \Delta T}{\mu^2} \times \frac{C_p \mu}{k} \right)^{0.25}$$

Despejando el coeficiente de película el resultado es:

$$h_i = 0.4 \left( \frac{D_o \rho_s \beta_s \Delta T}{\mu^2} \times \frac{C_p \mu}{k} \right)^{0.25} \frac{k}{D_o}$$

Sustituyendo el valor de cada variable en la ecuación anterior se calcula el valor del coeficiente de película.

4.- Se utiliza el valor del coeficiente de película para calcular la cantidad de calor transferida por el sistema de un punto a otro, mediante la ecuación:

$$Q = hc A(T - T_o)$$

Para el ejemplo de tubos la ecuación es:

$$Q = hc(\pi R^2) (T - T_o)$$

El valor de la cantidad de calor transferida por convección natural es útil para el diseño y operación de equipos que transfieren calor.

## Números de Nusselt, Prandlt y Reynolds.

Los números adimensionales de Nusselt, Prandlt y Reynolds son parámetros que tienen su aplicación en la transferencia de calor dentro del mecanismo de convección forzada.

La conjugación de estos tres números adimensionales se aplica para calcular y explicar el coeficiente de película o de transferencia de calor en el sistema de interfase sólido-fluido, con convección forzada.

Los equipos donde se presenta la interfase sólido-fluido son aquellos donde hay enfriamiento o calentamiento de fluidos. Los tipos de equipos donde se presentan estas condiciones son:

- a) Intercambios de calor.
- b) Calderas.
- c) Condensadores y demás equipos que tengan carcasa y tubos como medio de transporte de calor.

Los números de Nusselt, Prandlt y Reynolds se encuentran por medio de la experimentación guiada por el resultado obtenido por el análisis dimensional que se realiza en la superficie interna y externa de una tubería por donde circulan fluidos dejando incrustaciones por su paso.

## Origen de los números de Nusselt, Prandlt y Reynolds.

Debido a que las ecuaciones matemáticas y la experimentación son complejas a desarrollar para explicar y calcular el coeficiente de transmisión de calor de películas internas y externas en tuberías, se recurre al análisis dimensional que da modelos de grupos adimensionales que sirven de orientación a la experimentación para encontrar las correlaciones de variables que dan la solución al problema en estudio.

El origen de la correlación que existe en los números adimensionales, Nusselt, Reynolds y Prandlt se encontró de la siguiente manera:

Tomando como referencia el modelo de un fluido que circula por dentro del tubo, se realiza la transmisión de calor entre un fluido que circula en régimen turbulento por el interior del tubo y otro fluido al exterior del tubo, se realiza por medio de una combinación de mecanismos de conducción y convección forzada.

Las variables que intervienen, son las propiedades de los fluidos ( $\nu, \rho, \mu, C_p$ ), las propiedades del sólido que son: ( $D, K$ ) y los coeficientes de película "h".

Expresándose el coeficiente de transmisión de calor como una función exponencial de las propiedades del fluido y del material.

$$\frac{Q}{A \Delta T} = h = (D, \nu, \rho, \mu, K, C_p)$$

$$h = (D^b \nu^a \rho^m \mu^f K^j C_p^n) \dots \quad (1)$$

Sustituyendo en cada variable sus unidades fundamentales.

$$H \theta^{-1} L^{-2} T^{-1} = L^b (L \theta^{-1}) (M \theta^{-1} L^{-1}) (H \theta^{-1} L^{-1} T^{-1}) (ML^{-3})^m \dots (HM^{-1} T^{-1})^n$$

Igualando la suma de los exponentes cada una de las dimensiones de primero y segundo miembro, se obtiene el sistema de ecuaciones:

Para

$$H : 1 = j + n$$

$$\theta : -1 = -a - f - j - 3m$$

$$L : -2 = a + b - f - j - 3m$$

$$M : 0 = f + m - n$$

$$T : -1 = -j - n$$

Son cinco ecuaciones con seis incógnitas independientes, el sistema se expresa con cuatro incógnitas en función de otras dos.

Se toma "a" y "m" como incógnitas independientes.

$$a = m ; b = m - 1 ; f = n - m ; j = 1 - n$$

Sustituyendo estos valores de las incógnitas en la ecuación (1) queda:

$$\frac{hD}{K} = C \left( \frac{\nu D \rho}{\mu} \right)^m \left( \frac{D}{K} \right)^{1-n}$$

Donde:

$$Nu = C (Re)^n (Pr)^m$$

Son números dimensionales aplicables en convección forzada.

Los valores de los exponentes "n", "m" y la constante "C" se determinarán por experimentación, dependiendo del régimen del flujo y viscosidad del fluido, se encontrarán varios valores de los coeficientes "n", "m" y la constante "C".

Las relaciones anteriores tienen el nombre del investigador que las encontró y a estas se les conoce como:

$$\frac{hD}{k} = \text{Número de Nusselt.}$$

$$\frac{\rho v D}{\mu} = \text{Número de Reynolds.}$$

$$\frac{\mu C_p}{k} = \text{Número de Prandtl}$$

Se hicieron experimentos para determinar los valores de los exponentes "n", "m" y de la constante "C" para cada régimen de flujo, encontrándose los siguientes valores de exponentes y de constantes sustituidos en la correlación presentada anteriormente.

a) Para flujo laminar ( $Re < 2100$ )

Sieder y Tate hicieron una correlación para el calentamiento, como enfriamiento de varios fluidos, principalmente fracciones de petróleo, en tubos horizontales y verticales se incluye en términos de corrección de viscosidad.

$$\frac{h_i D}{k} = \left[ 1.86 \left( \frac{D C_p}{\mu} \right) \left( \frac{C_p \mu}{k} \right) \left( \frac{D}{L} \right) \right] \left[ \frac{\mu}{\mu_w} \right]^{0.14}$$

$$\frac{h_i D}{k} = 1.86 \left[ \frac{4 \omega C}{\pi k L} \right] \left[ \frac{\mu}{\mu_w} \right]^{0.14}$$

b) Para flujo laminar turbulento ( $Re > 20,000$ )

Ditus-Boulter crearón la ecuación que se aplica a fluidos que se calientan en el interior de tubos y es de la forma:

$$Nu = 0.23 Re^{0.8} Pr^{0.33}$$

c) Para fluidos viscosos que se mueven con  $Re < 2000$  se puede emplear una corregida por viscosidad denominada ecuación Sieder y Tate.

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{0.33}$$

d) Para un flujo turbulento en gases.

Cuando la ecuación anterior se aplica al calentamiento o enfriamiento de bases, para los que el número de Prandlt tiene generalmente el valor 0.74 esto nos conduce a:

$$Nu = 0.02 Re^{0.8} Pr^{0.33} \left[ \frac{\mu}{\mu_s} \right]^{0.14}$$

Aplicación del número de Nusselt, Prandlt y Reynolds.

La aplicación de los números de Nusselt, Prandlt y Reynolds se efectúa en transferencia de calor bajo el mecanismo de convección forzada. Para calcular el coeficiente de transferencia de calor, que es una variable que interviene en la evaluación de la transferencia de calor que hay en un medio sólido a un fluido o viceversa en convección forzada.

Procedimiento del cálculo de transferencia de calor en convección forzada.

1.- Se identifica el sistema en el cual se está realizando transferencia de calor bajo el mecanismo de convección forzada.

Ejemplo: Por una pared metálica circula un fluido frío movido por un impulsor. Entre la pared sólida y el fluido se forma una película con un espesor debido a incrustaciones, provocando una resistencia a la transferencia de calor.

2.- Se establecen las variables que intervienen en el sistema, que son:

- a) En el fluido ( $V, \rho, \mu, Cp$ )
- b) En la pared (geometría(D), conductividad(K) ).

3.- Se define el régimen de flujo por medio del número de Reynolds.

Considerando que el fluido tiene el siguiente valor de Reynolds.

$$Re = 25,000 \quad . . . . \text{Flujo turbulento.}$$

4.- En base al número de Reynolds se elige la ecuación empírica que correlaciona a los números de Nusselt, Prandlt y Reynolds. Para el sistema en estudio la correlación que satisface el  $Re = 25,000$

es la siguiente:

$$Nu = 0.026(Re)^{0.8}(Pr)^{0.33} \dots (1)$$

Sustituyendo cada número por sus variables:

$$\frac{hiD}{K} = 0.026 \left(\frac{DG}{\mu_b}\right)^{0.8} \left(\frac{Cp\mu}{K}\right)^{0.33} \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0.14} \dots (2)$$

Despejando "h" el coeficiente de película en la ec. (2) el resultado es:

$$hi = \frac{K}{D} 0.023 \left(\frac{DG}{\mu_b}\right)^{0.8} \left(\frac{Cp\mu}{K}\right)^{0.33} \left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0.14} \dots (3)$$

Se sustituyen los valores de cada variable en la ecuación (3), calculandose un valor del coeficiente de película para un régimen turbulento.

5.- Una vez calculado el coeficiente de película se procede a hacer la evaluación de la cantidad de calor transferida en el sistema mediante la siguiente ecuación.

$$Q = hi A(T_1 - T_2)$$

Donde

Q = Calor transferido.

A = AREA donde se realiza la transferencia de calor.

(T<sub>1</sub> - T<sub>2</sub>) = Gradiente de temperatura del sistema.

La cantidad de calor transferida en convección forzada es un valor útil que se aplica en el diseño y operación de equipos de transferencia de calor.

Número adimensionales en transferencia de masa.

## INTRODUCCION

La transferencia de masa es una rama de la Ingeniería que se dedica al estudio de los procesos que involucran intercambio de masa entre dos ó más componentes.

Las correlaciones de las velocidades de transferencia de masa en una interfase son muy utilizadas para el análisis en general de procesos como, destilación, absorción, reacciones, heterogéneas, secado, extracción líquida.

La expresión para la velocidad de transferencia de masa se representa por la Ec. general.

$$\text{Flux de masa} = \frac{\text{Diferencia de potencial}}{\text{Resistencia}}$$

Tenemos que hay varias formas de transferencia de masa por difusión y estas son:

- 1) Difusión molecular.- Este tipo de transferencia de masa se presenta en fluidos en reposo, y en capas laminares esto es en régimen laminar.

Para una mezcla gaseosa se difunde un comp. A a través de B, la ecuación que representa este fenómeno es:

$$\begin{aligned} N_a &= \text{Vel. de transf. de masa} \\ N_a &= D_{ab} \frac{dC_a}{dz} \quad \text{--- (1)} \\ D_{ab} &= \text{Difusión} \\ D_z &= \text{Longitud} \end{aligned}$$

Integrando

$$N_a = D_{ab} \frac{C_{a1} - C_{a2}}{z} \quad \text{--- (2)}$$

## 2) Difusión en flujo turbulento.

Se presenta cuando hay difusión entre dos ó más componentes, estando separados por una superficie formandose una película de es pesor  $Z_1$ , que varia linealmente con la superficie.

La difusión de flujo turbulento ocurre cuando un fluido fluye en forma de remolinos, a través de una superficie, presentandose -- una película delgada en flujo laminar, inmediatamente adyacente a la superficie, acompañada por una zona de transición en donde el flujo cambia gradualmente a la condición de turbulencia.

Para conocer la velocidad de transferencia de masa podemos aplicar la ecuación ( 1 ), para flujo laminar. Pero en la práctica esta ecuación no puede aplicarse, porque desconocemos el valor de la película en la interfase y el valor de la capa laminar. Recurrimos al artificio de introducir el coeficiente de transferencia de masa, quedando la ecuación que determina la velocidad de transferencia de masa en régimen turbulento.

$$N_a = K_c (C_{a1} - C_a) \quad \text{--- (2)}$$

Donde  $K_c$ , es el coeficiente de transferencia de masa que engloba la resistencia de difusión de la capa laminar, transición, turbulenta, dependiendo de las propiedades de fluido.

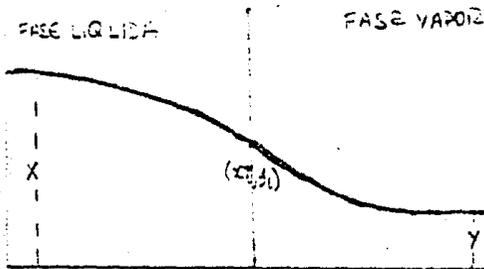
### Equilibrio entre fases:

En la transferencia de masa se realizan contacto de dos fases -- (líquido-vapor) inmiscibles con redistribución de los componentes siguiendo la tendencia al equilibrio pasando por una interfase, donde los componentes se mueven con velocidades globales en las dos fases.

Para cada fase la velocidad de transferencia de masa es individual y para régimen estacionario son iguales.

$$N_a = K_L (X - X_i) = K_y (Y_i - y) \quad \text{--- (3)}$$

El equilibrio entre fases se muestra gráficamente, mostrando el cambio de concentraciones, como diferencia de potencial entre ambas fases, en forma cualitativa.



Siendo la interfase la superficie de contacto de dos fases.

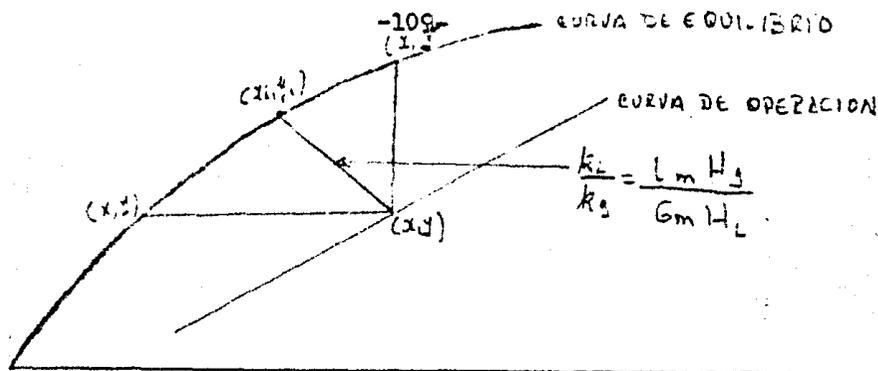
El equilibrio entre fases también puede determinarse analíticamente, y gráficamente, debiéndose cumplir las siguientes condiciones:

- a) Igualdad de presión de las dos fases
- b) Igualdad de temperatura en las dos fases
- c) Igualdad de concentración de componentes.

Trazamos la curva de equilibrio que describe la ecuación

$$Y = F(X) \quad \text{--- (4)}$$

$$Y = mX \quad \text{--- (5)}$$



Si la velocidad de transferencia de masa en cada fase es:

$$N_a = K_y (Y_{ai} - Y_a) = K_x (X - X_i) \quad \text{--- (6)}$$

Rearreglando 
$$\frac{Y_a - Y_{ai}}{X - X_i} = \frac{K_x}{K_y} = \frac{L m H_G}{G m H_L} = m \quad \text{--- (7)}$$

Donde la ecuación (7), es fundamental para determinar las condiciones de equilibrio, ya que con las concentraciones iniciales ( $Y_a, X$ ) y la pendiente  $m$  se pueden determinar las condiciones de interfase ( $X_i$  y  $Y_i$ ).

Relación entre coeficientes globales.

El efecto entero de la transferencia de masa en las dos fases puede determinarse en términos de coeficiente global de transferencia de masa.

Donde el coeficiente global de transferencia de masa se puede obtener de la figura (2), analíticamente donde el resultado es:

$$\frac{1}{K_y^*} = \frac{1}{K_y} + \frac{m}{K_x}$$

$$\frac{1}{K_x^*} = \frac{1}{m K_y} + \frac{1}{K_x}$$

Introduciendo este coeficiente global de transferencia de masa.

$$N_a = K_y^* (Y^* - Y) = K_x^* (X^* - X)$$

Donde la velocidad de transferencia de masa es proporcional - - a la diferencia de concentración general de una fase y la concentración de esa misma fase esta en equilibrio con la concentración general de la otra fase.

Desarrollando una relación global entre fases simples.

$$\frac{1/K_y}{1/K_y^*} = \frac{\text{Resistencia en la fase gas}}{\text{Resistencia total entre ambas fases}}$$

$$\frac{1/K_x}{1/K_y^*} = \frac{\text{Resistencia en fase líquida}}{\text{Resistencia total entre las dos fases}}$$

### Números de Sherwood, Schmidt y Reynolds.

Los números adimensionales de Sherwood, Schmidt y Reynolds, son parámetros que tienen su aplicación en la transferencia de masa entre uno o más componentes.

Por medio de los números adimensionales Sherwood, Schmidt y Reynolds se puede encontrar cuantitativamente el valor del coeficiente de transferencia de masa en la interfase de la transferencia de masa de uno o más componentes.

El coeficiente de transferencia de masa es un parámetro a evaluar en la ecuación que determine la velocidad de transferencia de masa para un sistema donde se difunden uno o más componentes.

Los números adimensionales de Sherwood, Schmidt y Reynolds se correlacionan por medio del análisis dimensional y la experimentación. Dando como resultado correlaciones semiempíricas que son funcionables bajo ciertas condiciones del sistema de transferencia de masa en estudio.

Significado de los números de Sherwood, Schmidt

a) Significado del número de Sherwood.

Se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$Sh = \frac{\text{Masa total transferida}}{\text{Masa transferida por difusión molecular}}$$

El número de Sherwood hace la siguiente evaluación.

Del resultado total de la velocidad de transferencia de masa, cuanto influencia tiene la velocidad a la transferencia de masa por régimen laminar.

b) Número de Schmidt.

El significado del número de Schmidt se obtiene de la siguiente relación:

$$Sc = \frac{\text{Difusión de cantidad de movimiento}}{\text{Difusión masica por turbulencia}}$$

En el número de Schmidt estan en competencia la difusividad en ré

-gimen laminar.

Origen del número de Sherwood, Schmidt y Reynolds.

Considerando que es necesario determinar correlaciones de las velocidades de transferencia de masa en la interfase, los procedimientos experimentales y el desarrollo de las ecuaciones de movimiento son demasiado complejas. Se recurre a otros métodos, como el análisis dimensional que da los modelos de variables que sirven de orientación para la experimentación, dando como resultado una serie de correlaciones empíricas confiables.

La obtención de los números de Sherwood, Schmidt y Reynolds, por el método del análisis dimensional es la siguiente:

Para un sistema donde hay transferencia de masa por difusión, las variables que intervienen son una característica del sistema y forman la siguiente ecuación funcional.

$$f(D, D_{AB}, \mu, \rho, \nu) = 0$$

Donde las dimensiones para estas variables son:

$$D = L = \bar{Q}_1$$

$$D_{AB} = \frac{L^2}{t} = \bar{Q}_2$$

$$\mu = \frac{M}{Lt} = \bar{Q}_2$$

$$\rho = \frac{M}{L^3} = \bar{Q}_3$$

$$\nu = \frac{M}{L^2 t} \times \frac{L^3}{M} = \frac{L}{t}$$

$$\nu = \frac{L}{t}$$

Aplicando el teorema de Buckingham

$D, \mu, \rho, \nu = \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3 =$  Núcleo de variables que contienen todas las dimensiones.

La cantidad a obtener de números adimensionales es:

Número de variables - Número de variables =

$$\Pi_1 = 6 - 3 = 3 \Pi_1'$$

Para encontrar  $\Pi_1$ , el procedimiento es:

$$D^a \mu^b \rho^c K_p = \Pi_1 \dots (1)$$

Sustituyendo sus dimensiones a cada variable:

$$(L^a) \left(\frac{M}{Lt}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{L}{t}\right) = \Pi_1 \dots (2)$$

Las ecuaciones para cada dimensión son:

$$L : a - b - 3c + 1 = 0 \dots (3)$$

$$t : b - 1 = 0 \dots (4)$$

$$M : b + c = 0 \dots (5)$$

Resolviendo (3), (4) y (5) tenemos que:

$$a = 1 ; b = -1 ; c = 1$$

Sustituyendo cada valor de los exponentes obtenidos en la ec. (2) el resultado es:

$$= \frac{D \rho}{\mu} K_p \dots (6)$$

Para encontrar  $\Pi_2$  el procedimiento es:

$$D^a \mu^b \rho^c D_{ab} = \Pi_2 \dots (7)$$

Sustituyendo en cada variable sus dimensiones:

$$(L^a) \left(\frac{M}{Lt}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \frac{L^2}{t} \dots (8)$$

Las ecuaciones para cada dimensión son:

$$L : a - b - 3c + 2 = 0 \dots (9)$$

$$M : b + c = 0 \dots (10)$$

$$t : -b - 1 = 0 \dots (11)$$

Las soluciones para este sistema son:

$$a = 0 ; b = -1 ; c = 1$$

Sustituyendo cada valor de las soluciones en la ecuación (8) el resultado es:

$$\Pi_2 = \frac{\rho}{\mu} D_{ab} \dots (12)$$

Para encontrar  $\Pi_3$  el procedimiento es:

$$D^a \mu^b \rho^c \nu = \Pi_3 \quad \dots \quad (13)$$

Sustituyendo en cada variable sus dimensiones

$$L^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{L}{t}\right) = \Pi_3 \quad \dots \quad (14)$$

Las ecuaciones para cada dimensión son:

$$L: a - b - 3c + 1 = 0 \quad \dots \quad (15)$$

$$M: \quad \quad \quad b + c = 0 \quad \dots \quad (16)$$

$$t: \quad \quad \quad -b - 1 = 0 \quad \dots \quad (17)$$

Las soluciones para este sistema son:

$$a = 1; b = -1; c = 1$$

Sustituyendo cada valor de las soluciones en la ecuación (14) el resultado es:

$$\Pi_3 = \frac{DL}{\mu} \nu \quad \dots \quad (18)$$

Rearreglando y organizando los grupos dimensionales para determinar la expresión funcional.

$$\Pi_1' = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\frac{D\rho}{\mu} K_p}{\frac{\rho D_{AB}}{\mu}} = \frac{K_p D \rho}{D_{AB}} = Sh \quad (19)$$

$$\Pi_2' = \frac{1}{\Pi_2} = \frac{1}{\frac{\rho D_{AB}}{\mu}} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = Sc \quad (20)$$

$$\Pi_3' = \Pi_3 = \frac{D \nu \rho}{\mu} = Re \quad (21)$$

La ecuación funcional para los números dimensionales obtenidos es:

$$f(\Pi_1', \Pi_2', \Pi_3') = 0 \quad \dots \quad (22)$$

Sustituyendo los  $\Pi_3'$  por sus números dimensionales tenemos la siguiente ecuación:

$$f(Sh, Sc, Re) = 0 \quad \dots \quad (23)$$

Donde  $K_p$  se encuentre en  $Sh$ , reorganizando la ecuación (23)

$$Sh = f(Sc, Re)$$

En base a esta ecuación proporcionada por el análisis dimensional

se elaboraron experimentos para diferentes condiciones de transferencia de masa y se obtuvieron una serie de correlaciones empiricas, que son confiables en su aplicacion. Siendo las mas importantes las sig.

1.- Para transferencia de masa por analogia de Reynolds de flujo de fluidos tenemos:

$$\frac{Sh}{ScRe} = \frac{f}{2}$$

$$Sh = \frac{f}{2} ScRe$$

2.- Para flujo laminar tenemos una expresion para un valor de  $Sc < 0.60$  en flujo de fluidos.

$$Sh_x = 0.33Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

$$\frac{KxD}{Dab} = 0.33Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

$$Si: K_s = \frac{K_x}{C}$$

$$\frac{KxD}{CDab} = 0.33Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

3.- En general para un flujo laminar con  $Sc = 1$  se da la siguiente expresion:

$$Sh_L = 0.66 Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

4.- Para flujo turbulento se da la expresion siguiente para valores de:

$$Sc = 1.0$$

$$Sh = 0.0202 Re^{4/5}$$

5.- Cuando existe transferencia de masa por medio de la siguiente expresion, desarrollando por Sherwood y Gilliland.

$$Sh = 0.023 Re^{0.83} Sc^{1/3}$$

$$\frac{KxD}{CDab} = 0.023 Re^{0.83} Sc^{1/3}$$

Cuando tenemos reaccion quimica

$$Sh = \left( 1 + \frac{a CB}{b CA} \right)^{0.664} Sc^{1/3} Re^{1/2}$$

Si la reacción es:



$$\frac{K_D}{C_{D_{AB}}} = \left( 1 + \frac{a}{b} \frac{D_B}{D_A} \right)^{0.864} Sc^{1/3} Re^{1/2}$$

Aplicación de los números dimensionales de Sherwood, Schmidt y Reynolds.

Los números dimensionales de Sherwood, Schmidt y Reynolds se usan para calcular el coeficiente de transferencia de masa, al cual a su vez es una variable en la evaluación de la velocidad de transferencia de masa de uno o más componentes de una región de alta concentración a otra más baja.

Procedimiento para el cálculo del coeficiente de transferencia de masa y velocidad de transferencia de masa.

- 1.- Se identifica el sistema en el cual se está efectuando la transferencia de masa.
- 2.- Se definen sus variables ( $D, D_{ab}, \mu, \rho, \nu$ )
- 3.- Se fijan las condiciones límite del proceso, por ejemplo:
  - a) Régimen de flujo.
  - b) Reacción química.
- 4.- Se elige la correlación aplicable a las condiciones del sistema por ejemplo: (Correlación 5)

$$Sh = 0.023 \left( \frac{Dv}{\mu} \right)^{0.83} \left( \frac{\mu}{\rho D_{ab}} \right)^{1/2}$$

- 5.- Se despeja el coeficiente de transferencia de masa y la expresión queda:

$$K_D = 0.023 \frac{D_{ab}}{D} (Re)^{0.83} (Sc)^{1/2}$$

- 6.- Se sustituyen los valores de las variables del sistema y se obtiene el valor del coeficiente de transferencia de masa.

$$K = \frac{r^2}{t}$$

7.- EL valor del coeficiente de transferencia de masa se aplica para calcular el valor de la velocidad de la transferencia de masa mediante la siguiente ecuación:

$$N_e = k (C_{a0} - C_a)$$

$$N_a = \frac{g_{mol}}{cm^2 seg}$$

La velocidad de transferencia de masa es utilizada para el análisis ingenieril de procesos tales como:

- a) Destilación.
- b) Absorción.
- c) Extracción.
- d) Secado.
- f) Reacciones químicas y demás operaciones unitarias donde hay cambios de concentración.

## COEFICIENTE DE ACTIVIDAD

### Introducción.

El coeficiente de actividad es un número adimensional que se aplica en -- transferencia de masa, especialmente en la mezcla de componentes cuando están destilándose.

Al efectuarse la destilación de uno o más componentes de una mezcla, se -- efectúa un equilibrio líquido - vapor que es necesario conocer a determinadas condiciones cuantitativamente.

El equilibrio líquido - vapor usado en los procesos de destilación, se usa -- como una condición fronteriza para el diseño y operación del equipo.

Para determinar las condiciones reales del equilibrio líquido - vapor, se -- introduce en la fase líquida, el coeficiente de actividad como una medida de la desviación de la idealidad de una solución líquida.

Soluciones Ideales.- Una solución homogénea que contenga (n) componentes líquidos relativos, se ha comprobado experimentalmente que las presiones de vapor de los componentes líquidos son individuales en una solución.

Una forma de representar este fenómeno es a través de la ley de Raoult, que sólo funciona para soluciones ideales a temperatura constante.

$$P_i = X_i P_i^0 \quad (1)$$

La presión parcial de vapor es:

$$P_i = P_t Y_i \quad (2)$$

Donde:  $P_i^0 = f(T) = P_i^0 = A - \frac{B}{C-T}$

$P_i$  = Presión Parcial de componente i  
 $X_i$  = Fracción mol líquida  
 $P_i^0$  = Presión de vapor del componente i  
 $P_t$  = Presión total  
 $Y_i$  = Fracción mol del vapor

### Estudio del Coeficiente de Actividad

La mayoría de las mezclas líquidas forman soluciones no ideales, debiéndose este alejamiento de la idealidad a la diferencia en la estructura molecular de los componentes de una solución, que produce atracción o repulsión entre las moléculas.

Si se atraen moléculas de la misma especie ( A - A ), hay tendencia hacia la evaporación, se dice que la desviación es positiva.

Para esta desviación de la idealidad de una solución ideal se introduce, el coeficiente de actividad en la Ec. de Raoult, para corregir esta desviación en forma cuantitativa, quedando la Ec. de la forma.

$$P_i = \gamma \cdot X_i P_i^0$$

Siendo  $\gamma$ , =  $f$  ( C , T )

Expresando el coeficiente de actividad en función de la fracción mol líquida y de la presión de vapor y parcial.

$$\gamma = \frac{P_i}{X_i P_i^0} = \frac{\text{Presión parcial real del comp. A}_i}{\text{Presión parcial ideal del comp. A}_i}$$

Como se observa el coeficiente de actividad esta en función de la presión parcial real y la presión parcial ideal, siendo su cociente la desviación de la idealidad.

Por lo tanto el coeficiente de actividad es una medida cuantitativa de la desviación de la idealidad de una solución.

Determinación del Coeficiente de Actividad .- La ecuación de Gibbs Duhem, fué derivada de relaciones termodinámicas, fundamentales que relaciona los coeficientes de actividad y la fracción mol.

$$X_1 \left( \frac{d \ln \gamma_1}{d X_1} \right) + X_2 \left( \frac{d \ln \gamma_2}{d X_1} \right)_{T,P} = 0$$

Para mezclas binarias  $dx_1 = -dx_2$

$$X_1 \left( \frac{d \ln \gamma_1}{d X_1} \right)_{T,P} = X_2 \left( \frac{d \ln \gamma_2}{d X_2} \right)_{T,P}$$

Debido a que por medio de esta expresión matemática, no se puede determinar el valor físico del coeficiente de actividad se recurre a ecuaciones empíricas que relacionan diferentes constantes y que son las siguientes:

1) Ecuaciones binarias de Margules

$$\log \gamma_1 = X_2^2 \left[ A_{12} + 2X_1 (A_{2-1} - A_{1-2}) \right]$$

Donde  $A_1 - 2$  y  $A_2 - 1$ , son los valores extremos máximos de las curvas en los coeficientes de actividad.

Aplicación de los Coeficientes de Actividad.

### SOLUCIONES

La aplicación de los coeficientes de actividad es para expresar cuantitativamente la desviación de la idealidad de una solución.

Determinando la presión parcial de una solución no ideal binaria.

$$P_A = \gamma_A^X X_A P_A^{PO} \quad P_B = \gamma_B^X X_B P_B^{PO} \quad aT = \text{cte}$$

Para diferentes mezclas, para cada una de sus composiciones y presiones de vapor se trazan las curvas de la fig. ( 1 ).

Si la desviación ( + )  $\gamma > 1$  tenemos las curvas reales, estan arriba de - las ideales, esto sucede cuando las presiones parciales reales son - mayores que las presiones parciales ideales. Si la desviación ( - ) -  $\gamma < 1$  tenemos que las curvas reales estan debajo de los ideales, y las presiones reales son menores que las presiones ideales.

Predicción de Formación de Azeotropos.

Azeotropo.- Es una mezcla de componentes que tienen puntos de ebullición iguales y no pueden separarse por una destilación simple.

La probabilidad de formación de un Azeotropo, aumenta con la magnitud - de la desviación respecto a la ley de Raoult, y disminuye, cuando mayor es la diferencia entre los puntos de ebullición normales de ambos com - ponentes.

Tenemos que hay dos diferentes tipos de Azeotropos.

- a) Azeotropo mínimo se presenta en la fig. ( 2 ) y da su aparición - - cuando existe un mínimo para la temperatura de ebullición.
- b) Azeotropo máximo se muestra en la fig. ( 3 ) y se presenta cuando hay un máximo en la temperatura de ebullición.

Se han hecho intentos para predecir el fenómeno de mezclas Azeotropicas - en función de la naturaleza de sus componentes.

Una manera de predecir las mezclas Azeotropicas es introduciendo el concepto de coeficiente de actividad. Si aplicamos la Ec. de equilibrio de dos componentes.

$$Y_A P = X_A P_A^0 \quad \text{y} \quad Y_B P = X_B P_B^0$$

Deducimos que para la composición de una Azeotropo tienen la misma concentración las mezclas y la temperatura es constante y por lo tanto los coeficientes de actividad de los componentes estan en relación inversa de sus presiones de vapor de estado puro, a la temperatura de ebullición del Azeotrop.

$$\frac{X_B}{X_A} = \frac{P_A^0}{P_B^0}$$

Las predicciones del Azeotropo son en base a esta ecuación.

- 1) La condición necesaria para la formación de un Azeotropo mínimo es que el coeficiente de actividad del componente menos volátil llegue a ser mayor. Que el cociente de la presión de vapor (Del componente más volátil = menos volátil ).
- 2) La formación de un Azeotropo máximo esta condicionado a que el coeficiente de actividad del componente más volátil llegue a ser mayor que la inversa del cociente.

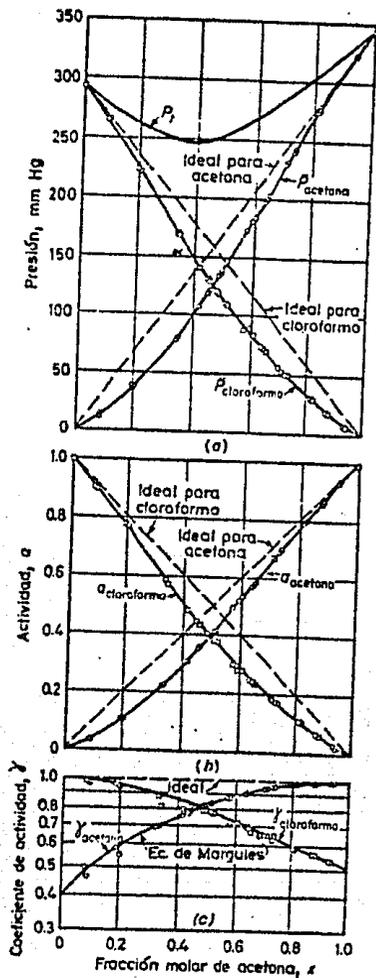
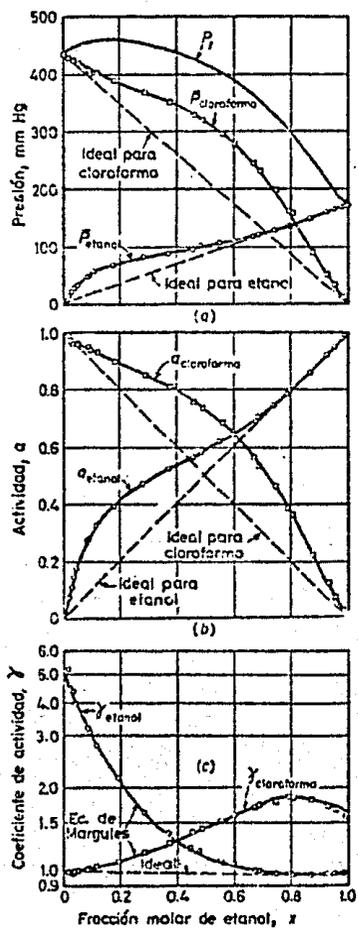


FIGURA ( 1 )

Graficas de composiciones contra presiones de vapor para dos mezclas binarias.

## CINETICA QUIMICA

### Generalidades

La Cinética Química, es el estudio de las velocidades y mecanismos por medio de los cuales una especie Química se transforma en otra y los factores que afectan a estas velocidades.

La velocidad de una reacción es el cambio del número de moles de un componente con respecto al tiempo por unidad de volumen de la mezcla reaccionante.

Siendo la velocidad de reacción una propiedad de cada sistema. - Esta cantidad es negativa cuando el componente (s), es un reactante y positiva cuando se trata de un producto.

La Ecuación que describe la velocidad de reacción.

$R = f$  (Composición, temperatura, presión)

$$R = \frac{1}{V} \frac{dN}{dt} \quad \text{Si } t = \text{cte} \quad N = CV$$

$$R = \frac{dc}{dt} = Kc^a \quad \text{Donde } K = Ae^{-E/RT}$$

$K$  = Constante de velocidad de reacción.

$R$  = Velocidad de reacción       $a$  = Orden de reacción es para clasificar reacciones.

Donde el orden de reacción se obtiene por experimentación y aplicación de métodos matemáticos. Existen dos formas de determinar el orden de una reacción a) Método integral b) Diferencial. - Las ecuaciones de velocidad de reacción para diferentes cantidades de productos y reactivos que intervienen en la reacción con un determinado tipo de reactivo se describe en la table 1.

| Reacción                        | Orden            | Ecuación de velocidad          | Formas integradas  |
|---------------------------------|------------------|--------------------------------|--|
| <b>REACCIONES IRREVERSIBLES</b> |                  |                                |  |
| $A \rightarrow B$               | Cero             | $-\frac{d[A]}{dt} = k_0$       | $[A] = [A]_0 - k_0 t$<br>$t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2k_0}$  |
| $A \rightarrow B$               | Primero          | $-\frac{d[A]}{dt} = k_1[A]$    | $\ln \frac{[A]}{[A]_0} = -k_1 t$<br>$t_{1/2} = \frac{1}{k_1} \ln 2$  |
| $A + A \rightarrow P$           | Segundo, Tipo I  | $-\frac{d[A]}{dt} = k_2[A]^2$  | $\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = k_2 t$<br>$t_{1/2} = \frac{1}{k_2[A]_0}$  |
| $aA + bB \rightarrow P$         | Segundo, Tipo II | $-\frac{d[A]}{dt} = k_2[A][B]$ | $\ln \frac{[A]_0 - [X]}{[B]_0 - b/a[X]} = \ln \frac{[A]}{[B]}$<br>$= \frac{b[A]_0 - a[B]_0}{a} k_2 t + \ln \frac{[A]_0}{[B]_0}$<br>$t_{1/2} = \frac{a}{k_2(b[A]_0 - a[B]_0)} \times \ln \frac{a[B]_0}{2a[B]_0 - b[X]_0}$ |

**REACCIONES REVERSIBLES**

|                                  |   |                                      |  |
|----------------------------------|---|--------------------------------------|--|
| $A \rightleftharpoons B$         | Primero<br>$\rightleftharpoons$ primero | $-\frac{d[A]}{dt} = k_1[A] - k_2[B]$ | $\frac{[A] - [A]_{eq}}{[A]_0 - [A]_{eq}} = e^{-kt}$<br>$k = \frac{k_1(K+1)}{K}$<br>$[A]_{eq} = \frac{[B]_0 + [A]_0}{K+1}$        |
| $A + B \rightleftharpoons C + D$ | Segundo<br>$\rightleftharpoons$ segundo | $-\frac{d[A]}{dt} = k_2[A][B]$       | $q^{2t} = \ln \frac{(2\gamma[X])(\beta - q^{2t}) + 1}{(2\gamma[X])(\beta + q^{2t}) + 1}$<br>$-k_2[C][D] \quad [X] = [A]_0 - [A]$ |

$\alpha, \beta, \gamma$  y  $q$  están definidas por las Ecs. (2-80) a (2-82) y (2-84)

La Cinética Química, aplicada a la Ingeniería se utiliza para diseñar el equipo y la operación para realizar las reacciones Químicas.

Este equipo para realizar reacciones se llama reactor y la velocidad de reacción es independiente del tipo de reactores, siendo de clasificación de reactores la siguiente:

1.- Reactores de acuerdo al método de operación.

- a) Reactor por lotes o intermitente.- Este tipo de reactor -- opera de la siguiente forma. Es un tanque o vasija se le agragan los reactivos y se deja que transcurra la reacción en un intervalo de tiempo. Para después desalojar el producto.
- b) Reactor de flujo continuo.- Es aquel equipo en el cual los reactivos se van agregando continuamente y los productos -- se van desalojando continuamente.

2.- Reactores de acuerdo a su forma (Ideales).

- a) Reactor agitado.- En este tipo de reactor se supone que -- hay agitación constante y uniforme a lo largo de todo el reactor.
- b) Reactor de flujo tapón.- En este tipo de reactor no existe mezclado de la masa reaccionante, consistiendo en elementos de flujo que son independientes entre sí.

3.- Reactores de acuerdo a su fase.

- a) Reactores Homogéneos. Consiste que los productos y reactivos se conservan en una sola fase a lo largo del proceso.
- b) Reactores Heterogéneos. Consiste en que entran en proceso dos o más fases durante y después de la reacción.

Haciendo una combinación de las clasificaciones de los reactores, tenemos que para los reactores Homogéneos los más comunes son, y estos estudios se basan en los puntos extremos de agitación total y no agitación esto es la idealidad.

- a) Reactor continuo de tanque agitado. En este tipo de reactor se supone un mezclado total de todos y cada uno de los reactivos. De donde su ecuación de diseño y operación se obtiene -- del balance de masa y energía.

Siendo la ecuación fundamental.

$$\frac{V}{F} = \frac{X_e - X_f}{R_e}$$

Este tipo de reactor, la concentración y la temperatura son -- los mismos en el interior del reactor y la corriente de salida del reactor.

- b) Reactor de flujo tapón.- Es cuando el grado de mezclado varía con la posición (C,T). Donde las composiciones son que no hay mezclado en la dirección axial (Dirección del flujo), y el mezclado es completamente en la dirección radial.

En base al balance de masa y energía se obtiene el diseño y -- operación de este tipo de reactor y es:

$$\Theta = \frac{V}{F} = \int_{X_1}^{X_2} \frac{DX}{R} \quad \Theta = \text{Tiempo de residencia}$$

Donde R si tiene que poner en función de X para resolver la integral.

El perfil de temperatura se obtiene, a partir del balance de calor.

Al diseñar un reactor y operarlo se deben considerar los siguientes factores.

- a) El tipo
- b) Tamaño necesario
- c) Característica de intercambio de energía con los alrededores.
- d) Condiciones de operación (Temperatura, presión, componentes y velocidad de flujo).

SELECTIVIDAD.

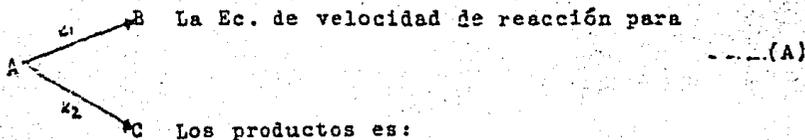
En un sistema complejo de reacciones químicas donde se verifica más de una reacción química, tiene como resultado la formación de varios productos algunos de los cuales son más deseables que otros, desde el punto de vista de necesidades del producto requerido.

Para caracterizar este funcionamiento se utiliza el parámetro adimensional llamado selectividad.

Definición de Selectividad Punto.- Es la relación de velocidades de reacción de los productos que intervienen en la reacción.

Con varios productos existe un valor de selectividad para cada uno de ellos.

De la reacción que se obtienen dos ó más productos para velocidad de reacción, tenemos



$$V = - \frac{dB}{dt} = - \frac{dc}{dt} = - \frac{dA}{dt}$$

$$S_p = \frac{\frac{dB}{dt}}{\frac{dc}{dt}} = \frac{K_1 [A]}{K_2 [A]} = \frac{K_1}{K_2}$$

$$S_p = \frac{K_1}{K_2}$$

Con la restricción de velocidad constante. La cantidad formada de producto es proporcional a su concentración.



Selectividad total es la relación de la cantidad formada de un producto a la cantidad de otro.

De la reacción (A)

La selectividad total es:

$$S_o = \frac{X_B}{X_C}$$

$X_B$  = Reactante A convertido a B.

$X_C$  = Reactante A convertido a C.

La selectividad total de B en relación a la conversión B y C - también se puede escribir como:

$$S_o = \frac{[B]}{[C]}$$

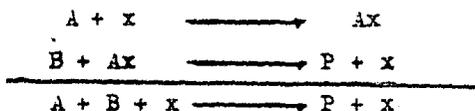
Al haber combinaciones de reacciones simultaneas, paralelas y consecutivas, hay selectividad para cada uno de los productos.

### Números adimensionales en reactores catalíticos heterogéneos.

**Generalidades:** Las reacciones heterogéneas se realizan cuando hay presencia de dos fases entre los componentes de un sistema reactantes en estudio, ejemplo: sólido-fluido.

Las reacciones heterogéneas se clasifican en:

a) Reacciones catalíticas.- Involucran la presencia de un catalizador que aumenta la velocidad de reacción y es regenerado al final del proceso. Ejemplo:



b) Reacciones no catalíticas.- Los reactantes en la reacción se consumen sin ninguna alteración en su proceso.

En los reactores heterogéneos catalíticos se efectúa la reacción química entre la fase del catalizador y la fase del fluido reactante poniéndose en contacto de la manera siguiente:

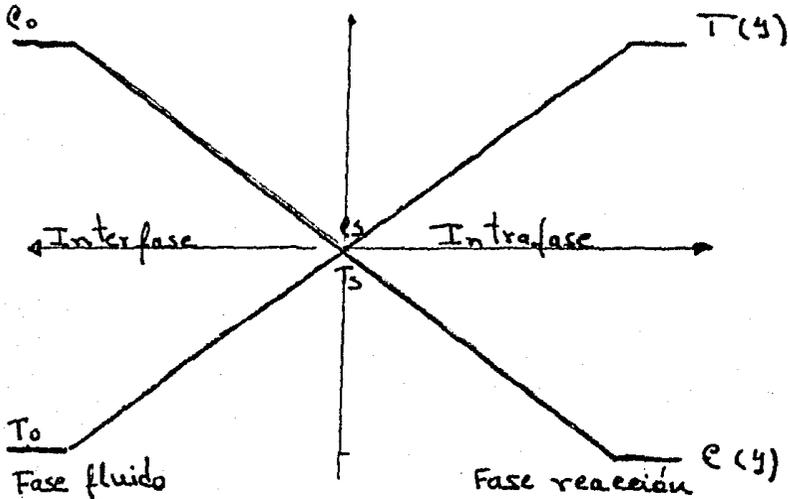
El fluido reactante se transporta hacia el catalizador difundiendo a través de los poros internos del gránulo, acelerando la velocidad de reacción, teniendo como resultado la presencia de dos zonas en el sistema y son las siguientes:

a) Interfase.- Se refiere al transporte que efectúa el fluido a la superficie del catalizador. El transporte del fluido se verifica con una diferencia de potencial de concentración y temperatura.

En la interfase la difusión y/o la convección ocurre en serie con la reacción.

b) Intrafase.- Se refiere a la velocidad de reacción que se realiza en la superficie externa e interna del catalizador. En la zona de intrafase la difusión y/o convección ocurren simultáneamente durante el desarrollo de la reacción.

El perfil de concentraciones y temperatura para un sistema catalítico heterogéneo, que describe la presencia de las zonas de interfase e intrafase es el siguiente:



Considerandose el sistema de un gas difundiendo y reaccionando sobre un catalizador se presentan las siguientes etapas:

a) Interfase.- La zona de interfase considera el transporte del reactante desde el medio gas, hasta la superficie del catalizador y su expresión de velocidad de transporte es la siguiente:

$$R_p = K_g a (C_0 - C_s) \quad \dots \quad (1)$$

Donde:

$K_g$  = Coeficiente de transporte masivo.

$a$  = Area externa de la interfase

$C_0$  = Concentración del fluido en fase gas.

$C_s$  = Concentración del fluido en la superficie del catalizador.

La expresión de la ecuación de transferencia de calor en la zona de interfase es:

$$q = h a (T_0 - T_s)$$

Donde:

$h$  = Coeficiente de transferencia de calor

$T_o$  = Temperatura en el fluido

$T_s$  = Temperatura en la superficie del catalizador.

- b) Intrafase.- La zona de intrafase se refiere a la difusión que realiza el gas dentro de los poros del catalizador verificandose la reacción química.

La expresión de velocidad de reacción es:

$$R = \phi(C_s, T_s) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

La expresión de transferencia de calor en la zona de intrafase es:

$$Q = -\Delta HR(C_s, T_s)$$

Considerando que en ambas zonas de intrafase e interfase existe estado estacionario las expresiones son:

- a) Para velocidad de transporte y reacción química

$$K_ga(C_o - C_s) = R(C_s, T_s)$$

- b) Para la transferencia de calor en estado estacionario la expresión para ambas zonas es:

$$h_a(T_s - T_o) = -\Delta HR(C_s, T_s)$$

Si consideramos una reacción de primer orden

$$R = KC_s^n$$

Para cualquier temperatura tenemos que:

$$K = K_o \exp \left[ -\frac{E}{RT_o} \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \right]$$

Donde  $t = T_s/T_o$

Número de Damköhler.

El número de Damköhler es un parámetro adimensional que relaciona la velocidad de reacción química contra la velocidad de transporte de masa en el proceso de un sistema catalítico heterogéneo donde un gas se transporta y se difunde a través de un catalizador verificandose la reacción química, el proceso se muestra en la figura (1).

La relación que describe el número de Damköhler es la siguiente:

$$Da = \frac{\text{Velocidad de reacción química}}{\text{Velocidad de transporte de masa}}$$
$$Da = \frac{KCo^{n-1}}{Kga} \dots (5)$$

Para un sistema catalítico heterogéneo el  $Da$  nos indica cuál es la influencia de velocidad de reacción con relación a la convección.

Cuando un número de  $Da \rightarrow 0$  La velocidad de reacción química es despreciable y la velocidad de convección es mayor por lo tanto no hay catalísis heterogénea.

Cuando un número de  $Da \rightarrow \infty$  La velocidad de difusión va disminuyendo y la velocidad de reacción química es mayor.

Obtención del número de Damköhler.

Considerando el proceso de la fig.(1) el número de Damköhler se obtiene del calculo de la concentración en la interfase del fluido-sólido ( $C_s$ ) y el desarrollo es el siguiente:

Para una reacción de primer orden

$R = KC_A^i$  la ecuación en estado estacionario de las zonas de interfase e intrafase (1) adquiere la siguiente forma

$$K_g a (C_o - C_s) = KC_s \quad \dots \quad (6)$$

Despejando la 'C<sub>s</sub>' concentración no observable de la ecuación (3) el resultado es:

$$C_s = \frac{C_o}{1 + \frac{K}{K_g} a} = \frac{C_o}{1 + \frac{K}{K_g} a} = \frac{C_o}{1 + Da} \quad \dots \quad (7)$$

Donde

$$Da = \frac{K}{K_g} a$$

Usos del número de Damköhler

a) Cálculo de la velocidad global de reacción en la interfase. Con el número de Damköhler se puede obtener el cálculo de la velocidad de reacción en la interfase expresada en términos de las concentraciones observables (C<sub>o</sub>) y el desarrollo es el siguiente:

$$\text{Si } R = KC_s \text{ es de primer orden } \dots \quad (8)$$

Donde

$$C_s = \frac{KC_o}{1 + Da} \quad \dots \quad (7)$$

Si sustituimos en (7) la ecuación (8) el resultado es:

$$R = \frac{K C_o}{1 + Da} \quad \dots \quad (9)$$

Donde

$$Da = \frac{K}{K_g} a = \frac{K_o \exp \left[ -f \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \right]}{f (Sh)}$$

C<sub>o</sub> = Concentración observable.

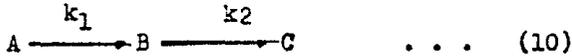
En base a la ecuación (9) se puede calcular la velocidad de reacción en las condiciones de interfase.

b) Cálculo de rendimientos en catalísis heterogénea de la zona de interfase-difusión-reacción.

Definición:

$$\text{Rendimiento} = \frac{Y}{\text{Velocidad del reactante consumido}} = \frac{\text{Velocidad del producto generado}}{\text{Velocidad del reactante consumido}}$$

Considerando una cinética lineal de reacciones consecutivas



B se consume para dar otro producto

Para una catalísis sobre un catalizador poroso bajo un régimen de estado estacionario las ecuaciones de transporte para la reacción consecutiva (10) son:

$$(K_g a)_A = (K_g a)_B = (K_g a)_C \quad \dots \quad (11)$$

Para A

$$K_g a (A_o - A_s) = K_1 A_s \quad \dots \quad (12)$$

Para B

$$K_g a (B_s - B_o) = K_1 A_s - K_2 B_s \quad \dots \quad (13)$$

Para C

$$K_g a (C_s - C_o) = K_2 B_s \quad \dots \quad (14)$$

Determinando los números de Damköhler para cada etapa respectiva encontramos:

$$A_s = \frac{A_o}{1 + Da_1} \quad \dots \quad (15)$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (15) en la ecuación (13) y resolviendo para  $B_s$  el resultado es:

$$B_s = \frac{Da_1 A_o}{(1 + Da_1)(1 + Da_2)} + \frac{B_o}{1 + Da_2} \quad \dots \quad (16)$$

Donde:

$$Da_1 = \frac{K_1}{K_g a} \quad \dots \quad (17)$$

$$Da_2 = \frac{K_2}{K_g a} \quad \dots (18)$$

Si

$$K_o = \frac{K_1}{K_g a} \quad \text{por lo tanto de las ecuaciones (17) y (18)}$$

$$\text{se relacionan en: } K_o = \frac{Da_1}{Da_2} \quad \dots (19)$$

El rendimiento buscado es el resultado de la relación de

$\frac{B}{A} = Y_B$  de las ecuaciones (15) y (16) se obtiene el resultado siguiente:

$$Y_B = \frac{B}{A} = 1 - \frac{Da_1}{K_o(1 + Da_2)} - \frac{1}{K_o} \frac{B_o}{A_o} \frac{1 + Da_1}{1 + Da_2} \quad \dots (20)$$

Se pueden hacer simplificaciones de acuerdo a las condiciones de operación. Considerando que el producto deseado 'B' no presenta en la fase gas el resultado del rendimiento es el siguiente:

$$Y = \frac{B}{A} = \frac{1}{1 + Da_2} ; \text{para } B_o = 0 \quad \dots (21)$$

- c) Otros usos del Damköhler se presenta siempre que un sistema de interfase-intrafase exista y se desea saber sus propiedades y características del sistema fluido gas-catalizador y sólido.

Factor de efectividad en la interfase ( $\bar{n}$ ).

El factor de efectividad en la interfase ( $\bar{n}$ ) es un parámetro adimensional que está sujeto a las siguientes condiciones:

- a) Factor de efectividad en la interfase isotérmico.
- b) Factor de efectividad en la interfase no isotérmico.

Las diferencias y estudio de estos factores de efectividad es el siguiente:

- a) Factor de efectividad en la interfase isotérmica.

El factor de efectividad isotérmico es la relación que existe entre la velocidad global de reacción y la velocidad de reacción en un sistema fluido-catalizador en reacción a temperatura constante, la relación es:

$$\bar{n} = \frac{\text{Velocidad global}}{\text{Velocidad de reacción química interfase}} = \frac{R}{R_0}$$

Para una reacción de cinética lineal de primer orden el factor de efectividad en la interfase bajo condiciones isotérmicas.

De la ecuación (9)

$$R = \frac{KC_0}{1 + D_{a0}}$$

La ecuación de cinética lineal es:

$$R_0 = KC_0 \dots (22)$$

El factor de efectividad en la interfase es:

$$\bar{n} = \frac{KC_0}{1 + D_a} \frac{1}{KC_0} = \frac{1}{1 + D_{a0}} \dots (23)$$

El factor de efectividad  $\bar{n} = \frac{R}{R_0}$  es graficado (fig(2)) como una función de  $D_{a0}$  para diferentes ordenes de reacción.

Para reacción de 1/2 y de segundo orden el factor de efectividad es:

$$1/2 : n = \frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{2 + D_0^2}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(2 + D_0^2)^2}} \right]} \dots (24)$$

$$2 : \bar{n} = \frac{R}{R_0} = \left[ \frac{1}{2D_a} \left( \sqrt{1 + 4D_a} - 1 \right) \right] \dots (25)$$

Para cualquier orden de reacción se debe sustituir su ecuación cinética para la velocidad de reacción.

Factor de efectividad en la interfase en términos observables.

Expresando el factor de efectividad en la interfase en términos de concentraciones (C<sub>0</sub>) iniciales el desarrollo es:

$$\bar{n} = \frac{R}{RC_0} \dots (26)$$

$$R = \bar{n}KC_0 = \bar{K}f(C_0) \dots (27)$$

Considerando

$$\bar{K} = \bar{n} K \text{ nosotros tenemos}$$

$$\frac{\bar{K}}{K_{ga}} = \bar{n} \frac{K}{K_{ga}} = \bar{n}D_a = \frac{R}{K_{ga}C_0} \dots (28)$$

nD<sub>a</sub> es un parametro que es observable y se obtienen valores del factor de efectividad en condiciones isotérmicas. Para diferentes ordenes de reacción se muestra en la figura (3).

b) Factor de efectividad en condiciones no isotérmicas en la interfase.

El factor de efectividad, para condiciones no isotérmicas en una reacción sólido-líquido, es un parámetro adimensional que relaciona las velocidades global y de reacción química a temperatura variable diferente a la normal.

$$\bar{n} = \frac{R}{R_0} \dots (29)$$

Considerando

T<sub>0</sub> ≠ T<sub>s</sub> , C<sub>0</sub> ≠ C<sub>s</sub> y la obtención de este

factor de efectividad en la interfase involucra a varios parámetros adimensionales y el desarrollo es:

$$\bar{n} = \frac{K_s C_s^n}{K_o C_o^n} = \frac{K_s}{K_o} \left[ \frac{C_s}{C_o} \right]^n \quad \dots (30)$$

De la ecuación (6) el perfil de concentraciones es:

$$\frac{C_s}{C_o} = 1 - \frac{R}{K_g a C_o} = 1 - n D_a \quad \dots (31)$$

Si sustituimos el perfil de concentraciones, ecuación (31), en la ecuación del factor de efectividad (30) el resultado es:

$$\bar{n} = \frac{K_s}{K_o} (1 - n D_a)^n \quad \dots (32)$$

Donde:

$$\frac{K_s}{K_o} = \exp \left[ - \frac{E}{R T_o} \left( \frac{T_o}{T_s} - 1 \right) \right] \quad \text{Ecuación de Arrhenius} \quad \dots (3)$$

$$\frac{K_s}{K_o} = \exp \left[ (t - 1) \right]$$

Considerando que la relación  $\frac{K_s}{K_o}$  debe ser evaluada a condiciones no isotérmicas, es necesario introducir los efectos caloríficos y estos son:

La temperatura en la superficie es obtenida por un balance de calor para un estado estacionario la ecuación es:

$$h a (T_s - T_o) = -\Delta H R \quad \dots (33)$$

Dividiendo esta relación entre  $K_g a C_o T_o$  e involucrando los factores de transferencia de masa y calor, por analogía:

$$t = \frac{K_g}{\mu} Sc^{2/3} = \frac{h}{\rho C_p} Pr^{2/3} = J_H \quad \dots (34)$$

Obtenemos la ecuación para la relación de temperaturas  $\frac{T_s}{T_o}$

$$t = 1 + - \frac{\Delta H C_o}{\rho C_p T_o} \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{2/3} \frac{R}{K_g a C_o} \quad \dots (35)$$

Donde

$$\frac{-\Delta H C_0}{C_p T_0 \beta} \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{-2/3} \dots (36)$$

$$\frac{Sc}{Pr} = Le \quad ; \quad \frac{R}{K_g a C_0} = nD_a \dots (37)$$

Sustituyendo el equivalente de las relaciones por sus números adimensionales en la ecuación (35) el resultado es:

$$t = 1 + \bar{\beta} \cdot \bar{n} D_a \dots (38)$$

$$\bar{\beta} = \frac{-\Delta H C_0}{C_p T_0 \beta} \frac{1}{Le^{2/3}} \dots (39)$$

Sustituyendo el valor de (t) en la ecuación (3) se obtiene

$$\frac{K_s}{K_0} = \exp \left[ - \frac{E}{RT} \left( \frac{1}{1 + \bar{\beta} \cdot nD_a} - 1 \right) \right] \dots (40)$$

En esta ecuación se refleja el efecto no isotérmico del sistema sólido-gas. El factor de efectividad en la interfase en las condiciones no isotérmicas se obtiene sustituyendo la ecuación (40) en la ec. (32) y el resultado es:

$$\bar{n} = (1 - \bar{n} D_a)^n \exp \left[ - \left( \frac{1}{1 + \bar{n} D_a} - 1 \right) \right] \dots (41)$$

Este resultado para varios ordenes de reacción y valores de  $\gamma$  se muestran en la figura (4) y (5). Donde se muestra al factor de efectividad externo no isotérmico en función de un parametro observable  $nD_{a0}$ .

Significado del número de Lewis.

$$Pr = \frac{V^i}{K_f} = \frac{\text{difusión momentánea}}{\text{difusión térmica}}; \quad Sc = \frac{V^i}{D_f} = \frac{\text{difusión momentánea}}{\text{difusión masa}}$$

$$Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{\text{Difusividad térmica}}{\text{Difusividad molecular}}$$

El número de Lewis nos indica que cuando un fluido esta fluyendo en condiciones no isotérmicas están en competencia el efecto de transferencia de calor contra la transferencia de masa y este parametro nos da la medida de que transferencia es la que domina en el sistema en estudio.

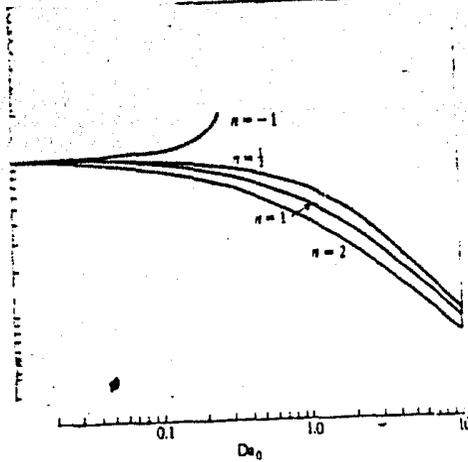


Fig.(2)  
Factor de efectividad externo, para una reacción de  $n$  orden en función del número de Damholer.

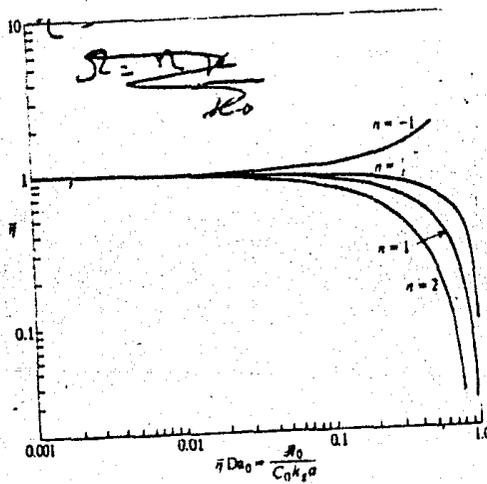
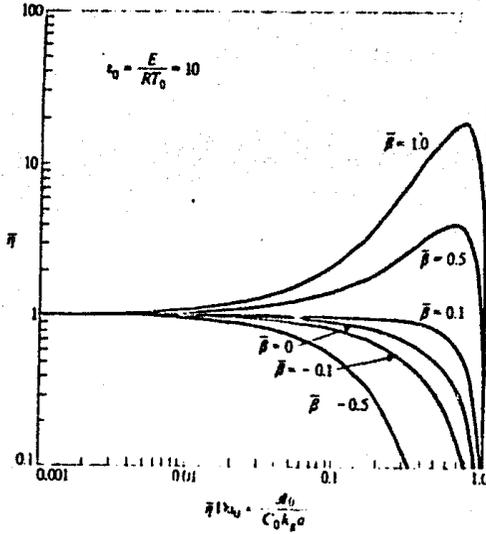


Fig.(3)  
Factor de efectividad externo isotérmico en función de un factor observable  $nDa$



Factor de efectividad no isotérmico contra  $\eta Da_0$  observable (reacción primer orden  $=10$ )

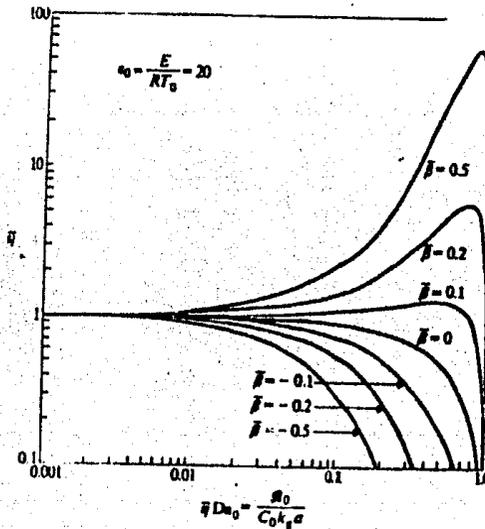


Figura (5)

Factor de efectividad no isotérmico contra  $\eta Da_0$  para una reacción de primer orden y  $=20$

Factor de efectividad en condiciones isotérmicas.

El factor de efectividad en la intrafase es un número adimensional que relaciona las velocidades de reacción siguientes, en un sistema heterogéneo catalítico sólido-fluido.

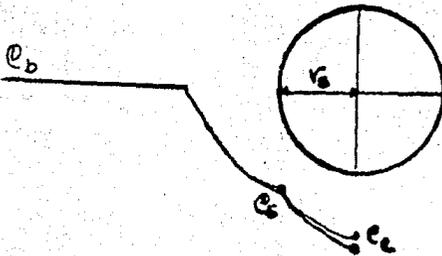
$$\eta = \frac{R_p}{R_s} = \frac{\text{Vel. de reacción para la totalidad del catalizador}}{\text{Vel. de reacción evaluada en condiciones de superficie del catalizador}} \quad \dots (A)$$

Esta relación nos indica el efecto de la porosidad en la velocidad de reacción.

Obtención del factor de efectividad.

Para la intrafase de un sistema catalítico sólido-gas, la difusión ocurre simultáneamente con la reacción química, ocasionando complejidad matemática en la aplicación de las ecuaciones de movimiento, por lo tanto, se recurre a parámetros adimensionales que miden los fenómenos internos del catalizador.

Considerando el proceso de difusión de un reactante (A) gaseoso a través del interior de un catalizador poroso, se muestra la figura (6).





El grupo de variables  $\sqrt{S K/\rho_a}$  representa el número de Thiele y su relación es:

$$\phi^2 = \frac{\text{Velocidad de reacción química}}{\text{Velocidad de difusión en la intrafase}}$$

Debido a que la difusión intragranular y la reacción química el módulo de Thiele mide la competencia entre ambas velocidades.

En estudios de cinética química y catalísis, la velocidad de difusión del reactante hacia el gránulo esférico es la siguiente

$$R_p = \frac{3}{r_s \rho_p} D_e \left( \frac{dC}{dr} \right)_{r=r_s} \dots (50)$$

Sustituyendo la ecuación (49) en (50) y diferenciando en condiciones de  $(r = r_s)$ , la ecuación de velocidad de difusión es:

$$r_p = \frac{3}{r_s \rho_p} D_e C_{As} \left( 1 - \sqrt{\frac{K_1 \rho}{\rho_a}} \text{Rcoth} \sqrt{\frac{K_1 \rho}{\rho_a}} R \right) \dots (51)$$

La ecuación para el calculo de la velocidad de reacción en la superficie del catalizador es la siguiente:

$$R_s = \phi (C_s, T_s) \dots (52)$$

Para una reacción de primer orden en condiciones isotérmicas, la velocidad de reacción en la superficie del catalizador es:

$$R_s = K(C_s)_s \dots (53)$$

Una vez obtenido por separado las velocidades de reacción en la superficie del catalizador (53) y global (51) se sustituyen las ecuaciones obtenidas en la ecuación del factor de efectividad (A) y el resultado es:

$$\eta = \frac{\frac{3}{r_s \rho_p} D_e C_{As} \left( 1 - \sqrt{\frac{K \rho}{\rho_a}} \text{Rcoth} \sqrt{\frac{K \rho}{\rho_a}} R \right)}{K C_{As}} \dots (54)$$

Introduciendo  $\sqrt{\frac{K_1 R_p}{D_e}} = \phi$ . La ecuación del módulo de efectividad es:

$$n = \frac{3}{\phi_s} \left( \frac{1}{\tan \phi_s} - \frac{1}{\phi_s} \right) \dots (55)$$

La ecuación (55) corresponde al módulo de efectividad como una función del módulo de Thiele.

Por medio de la ecuación (55) se realizaron experimentos y los resultados se muestran en la figura (7), donde los resultados dependen del orden de reacción, forma y tamaño del catalizador.

En la figura (7) se muestran valores de  $n$  vs.  $\phi_s$  para diferentes ordenes de reacción y geometrías del catalizador.

Con el factor de efectividad en la intrafase se puede encontrar la velocidad de reacción global, siendo el desarrollo el siguiente:

El factor de efectividad es:

$$n = \frac{R_p}{R_s} \dots (A)$$

La velocidad global de reacción es:

$$R_p = n R_s \dots (56)$$

De las ecuaciones (55) y (53) en (56) el resultado es:

$$R_p = \frac{1}{\phi_s} \left( \frac{1}{\tan \phi_s} - \frac{1}{\phi_s} \right) K_1 C_s \dots (57)$$

Así pues la velocidad de reacción global queda como función exclusiva del módulo de Thiele, para la intrafase en condiciones isotérmicas.

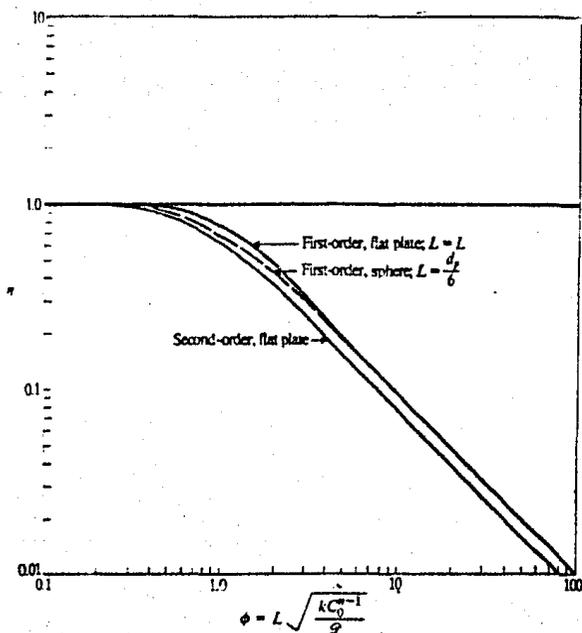


Figura (7)

Factor de efectividad en la intrafase en condiciones isotérmicas en función del módulo de Thiele para diferentes órdenes de reacción y geometría del catalizador.

Factor de efectividad en la intrafase en condiciones no isotérmicas.

El factor de efectividad en la intrafase ( $\bar{n}$ ) bajo condiciones, no isotérmicas se presenta cuando los efectos de gradientes de temperatura intragranulares afectan la velocidad de reacción en el catalizador, cuando un gas se está difundiendo a través de las cavidades del gránulo.

La obtención del factor de efectividad en la intrafase no isotérmica se hace de manera como se realiza para el isotérmino con la diferencia que debe cambiarse un balance de energía con el de masa y el procedimiento es el siguiente:

Considerando la misma reacción de primer orden  $A \rightarrow B$  y aplicando un balance diferencial de masa a la superficie del gránulo es:

$$\frac{dC}{dr} + \frac{2}{r} \frac{dC}{dr} - \frac{K_1}{D_e} p C = 0 \quad \dots \quad (58)$$

En el centro del gránulo  $\frac{dC}{dr} = 0 \quad r = 0 \quad \dots \quad (59)$

Superficie exterior  $C_s = C \quad r = r_s$

Por otro lado el balance de energía para la capa esférica de espesor  $\Delta r$  es:

$$(-4\pi r^2 K_e \frac{dT}{dr})_r - (-4\pi r^2 K_e \frac{dT}{dr})_{r+\Delta r} = 4\pi r^2 \Delta r \int p C \Delta H \quad \dots \quad (60)$$

Tomando el límite como  $\Delta r \rightarrow 0$  (60) se convierte en:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{K_1}{K_e} p C \Delta H = 0 \quad \dots \quad (61)$$

Las condiciones límite son  $\frac{dT}{dr} = 0 \quad , \quad r = 0$

$T = T_s \quad , \quad r = r_s$

La solución de las ecuaciones (59) y (61) proporciona los perfiles de concentración en el interior del gránulo temperatura y concentración.

De la ecuación del factor de efectividad  $\bar{n} = \frac{R_p}{R_s} \quad \dots \quad (A)$

Obtenemos

$$\frac{3 D e}{r_s \rho K_1 C_s} \left( \frac{dC}{dr} \right) = \bar{n} \dots (62)$$

Considerando

$$K = K_0 \exp \left[ -E_0 \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \right] \dots (3)$$

donde

$$t = \frac{T_s}{T_0} \dots (63)$$

La sustitución de las soluciones de las ecuaciones (59) (61) en (3) y (62) da como resultado un factor de efectividad en función de parametros adimensionales y la ecuación funcional es:

$$\bar{n} = f(\phi, \xi, \beta) \dots (63)$$

Donde

$$\phi = \text{modulo de Thiele } \phi = \sqrt{\frac{IK}{D}} \dots (64)$$

$$\xi = \text{Número Arrhenius } = \xi = \frac{E}{RT_s} \dots (65)$$

$$\beta = \text{Temperatura adiabática en interfase } = \frac{-\Delta H_0 C_s}{\lambda T_s} \dots (67)$$

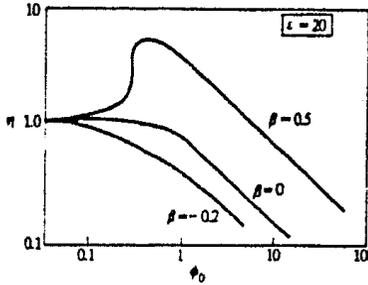
En base a la funcionalidad de la ecuación (63) se obtuvieron las gráficas de la figura (8) donde se muestra un factor de efectividad no isotérmico en la intrafase para varios valores de  $\phi$  y  $\beta$  a  $\xi$  cte. .

De las gráficas de la figura (8) se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- A) Para una reacción exotérmica ( $\beta$  es positiva) la temperatura se eleva hacia el interior del gránulo implica un aumento en la velocidad global de reacción, por lo tanto el factor de efectividad en la intrafase en condiciones no isotérmicas es mayor de la unidad ( $n > 1$ ) a una determinada  $\phi - 0 - 10$ .
- B) Reacción endotérmica la temperatura del gránulo baja, es

negativa y  $n = 1$  para una  $\phi$  entre 0-10

Figura 8



Factor de efectividad en la intrafase en condiciones no isotérmicas en función de un modulo de Thiele para  $\Sigma = 20$  constante.

Factor de efectividad global en la intrafase-interfase en condiciones isotérmicas.

El factor de efectividad global para las zonas de intrafase-interfase integra todos los fenómenos de difusión-reacción que ocurren en la totalidad de un sistema catalítico heterogéneo-gas-sólido a temperatura constante.

$$n_0 = \frac{\text{Velocidad global observada}}{\text{Velocidad de reacción en la superficie del catalizador a } T=\text{cte.}}$$

Esta ecuación define al factor de efectividad global en condiciones isotérmicas como una eficiencia de la reacción ya que están en competencia las velocidades de reacción en la interfase e intrafase.

La obtención del factor de efectividad global para la interfase-intrafase a temperatura constante para una cinética lineal es derivada de la siguiente expresión:

$$K_g(C_0 - C_s) = -\int \frac{dC}{dY} \quad \dots (68)$$

Considerando las condiciones  $C_s = C_0$  y resolviendo la ecuación (68) para la intrafase difusión-reacción y considerando una resistencia de transferencia de masa en la interfase, el resultado del factor de efectividad global para la intrafase-interfase ( $n_0$ ) en condiciones isotérmicas es:

$$n_0 = \frac{\tan h\phi}{\phi + (\phi \tan \phi) / Bi_m} \quad \dots (69)$$

La ecuación (69) da el factor de efectividad global en términos de gradientes externos e internos de concentraciones.

Donde  $Bi_m = \text{Número de Biot} = \frac{K_g L}{D} \quad \dots (70)$

$$Bi_m = \frac{\text{Transferencia de masa en la interfase}}{\text{Transferencia de masa en la intrafase}}$$

El número de Biot es una medida del efecto de las transferencias de masa en la interfase-intrafase, poniendo en competencia cual zona es la que tiene más influencia de difusión.

La velocidad de reacción global observada en ambas zonas es por lo tanto la siguiente:

$$R = n_0 C_0 K_0 = \frac{\tan h\phi (K_0 C_0)}{\phi [1 + (\phi \tan \phi)] / Bi_m} \dots (71)$$

Si multiplicamos  $L^2 / \Delta C_0$

$$\frac{R L^2}{C_0} = \frac{\phi \tanh \phi}{1 + (\phi \tanh \phi / Bi_m)} = n_0 \phi^2 \dots (72)$$

Obtenemos al factor de efectividad global en función de un parámetro observable  $n_0 \phi^2$ .

En la figura (9) se muestran gráficas de  $n_0$  vs.  $n_0 \phi^2$

observándose varias curvas para diferentes números de Biot

para la reacción de primer orden.

La conducta de la velocidad global de reacción para una reacción de primer orden es:

$$\phi > 3 \quad \tan \phi \rightarrow 1 \quad \dots (73)$$

Por lo tanto

$$n_0 = \frac{1}{\phi (1 + \phi / Bi_m)} \dots (74)$$

La velocidad de reacción es:

$$R = \frac{\sqrt{KD C_0}}{L(1 + \phi / Bi_m)} \dots (75)$$

Así pues el factor de efectividad global para la interfase-interfase en condiciones isotérmicas sirve para determinar el cálculo de la velocidad de reacción en condiciones a temperatura constante en un sistema catalítico-gas-sólido.

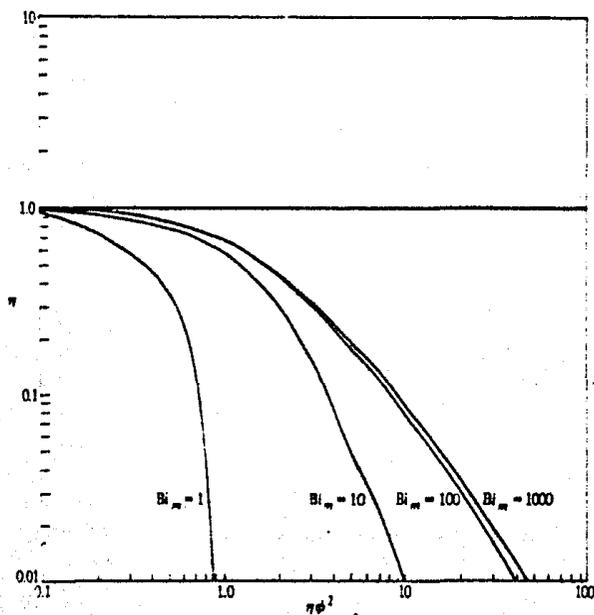


Figura (9)

Factor de efectividad en la intrafase-interfase en condiciones isotérmicas en función del factor observable  $\eta\phi^2 = \frac{RL^2}{\mathcal{D}C_0}$  para varios valores de  $Bi_m$  para una reacción de primer orden.

Factor de efectividad global en la intrafase-interfase en condiciones no isotérmicas.

El factor de efectividad global en la intrafase-interfase en condiciones no isotérmicas es un parámetro que nos sirve para calcular la velocidad de reacción global a cualquier temperatura de un sistema heterogéneo gas-sólido.

El factor de efectividad global no isotérmico adquiere gran complejidad, porque contiene los siguientes factores que intervienen en las zonas de interfase-intrafase.

- a) Resistencia en la transferencia de calor
- b) Resistencias en la transferencia de masa.
- c) Reacción química.

La ecuación de transporte que describe la transferencia de masa es:

$$K_g (C_o - C_s) = - Q \frac{dC_s}{dY} \Big|_{Y=L} \dots (76)$$

Introduciendo parámetros adimensionales de la forma

$$f = \frac{C}{C_o} ; \quad z = \frac{Y}{L} \quad \text{y sustituyendo en (77)}$$

$$K_g(1 - f_s) = - \frac{Q}{L} \frac{df}{dz} \dots (78)$$

Rearreglando (79)

$$\frac{1 - f_s}{df/dz} = \frac{1}{K_g L/D} = \frac{1}{Bi_m} \dots (80)$$

El balance de calor en la intrafase-interfase es el siguiente:

$$h(T_s - T_o) = \frac{dT}{dY} \Big|_{Y=L} \dots (81)$$

Si  $t = \frac{T}{T_o}$  introduciendolo en la ecuación (81)

$$\frac{t - 1}{(dt/dz)_{z=1}} = \frac{1}{hL/\lambda} = \frac{1}{Bi_h} \dots (82)$$

Donde:

$$Bi_h = \frac{\text{Transferencia de calor en la interfase}}{\text{Transferencia de calor en la intrafase}}$$

En el número de  $Bi_h$  para la transferencia de calor, pone en competencia los movimientos de calor en las zonas de interfase e intrafase en un sistema catalítico heterogéneo gas-sólido.

La solución de la ecuación de efectividad que el factor de efectividad global ( $\bar{\eta} = \frac{r_p}{r_s}$ ) se obtiene resolviendo numéricamente las ecuaciones (76), (81) y (71) para obtener una dependencia de parámetros adimensionales que explican la complejidad del sistema donde hay transferencia de masa y calor en las zonas de interfase e intrafase.

En general, el factor de efectividad global en la interfase-intrafase en condiciones no isotérmicas engloba todos los parámetros adimensionales que intervienen en todos los procesos de intrafase-interfase y son los siguientes:

$$n = f(\theta, \xi, \beta, Bi_h, Bi_m) \quad \dots \quad (72)$$

La obtención del factor global de efectividad a cualquier temperatura se hace a través de gráficas del tipo de la figura (10) donde se muestra un factor de efectividad para varios números adimensionales: un conjunto de curvas que describen el tipo de reacción exotérmica o endotérmica en base al siguiente criterio:

1.- Para reacciones exotérmicas

$$\begin{aligned} \theta &< 10 \\ Bi_h &\ll \infty \\ Bi_m &= \infty \quad \longrightarrow \quad \text{incremente de } n_0 > 1 \\ \xi &= \text{cte.} \end{aligned}$$

2.- Cuando la reacción es endotérmica el factor de efectividad disminuye de 1 y

$$Bi_n \ll \infty$$

$$Bi_m \ll n$$

$$\varepsilon = 30$$

$$\phi = 0.1 - 1$$

En conclusión el factor de efectividad es un número adimensional que necesita describir una relación de velocidades de reacción global entre velocidad de reacción en la superficie, donde la que sea mayor será la que determine el valor del factor de efectividad.

El factor de efectividad para etapa (interfase-intrafase) por separado o global a condiciones de temperatura constante o variable siempre va a depender de números adimensionales y en base a la complejidad del problema van a ir surgiendo uno a uno. Como se describió para cada proceso.

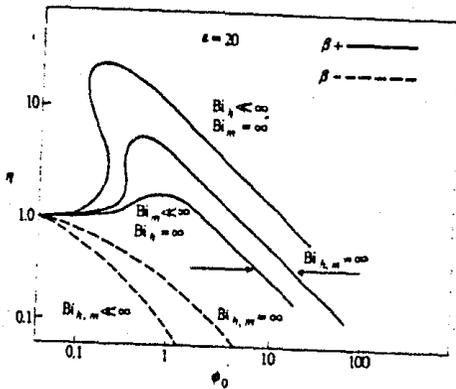


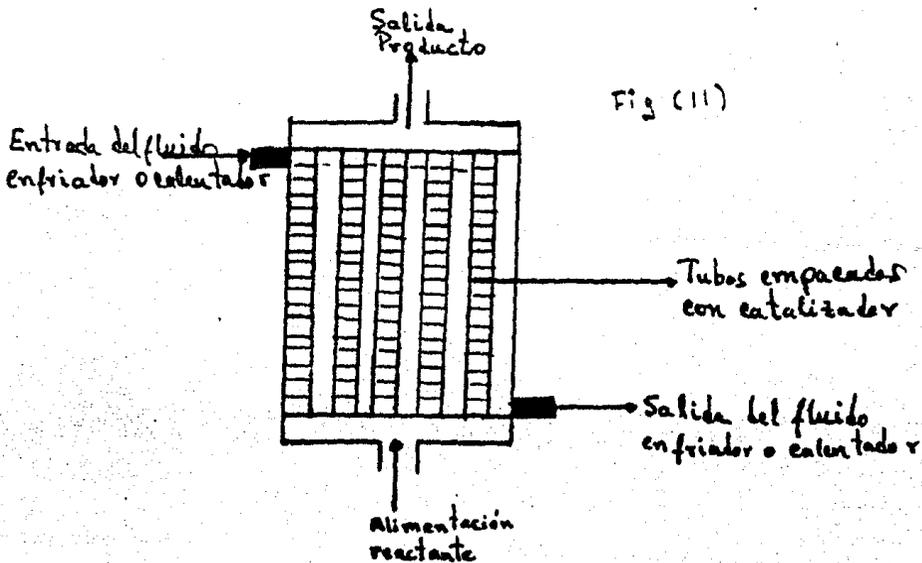
Figura 10

Gráfica del factor de efectividad en la intrafase-interfase en condiciones no isotérmicas en función del módulo de Thiele para diversas conductas de números de  $Bi$  y  $Bi$  a una constante.

### Reactores heterogéneos de lecho fijo.

Los reactores heterogéneos de lecho fijo consideran los procesos de cinética química y transporte que ocurre en la reacción de un sistema catalítico y es sólido y su funcionamiento es el siguiente, en base a la figura (11).

La mezcla reaccionante gaseosa fluye en forma ascendente con movimientos continuos a través de los tubos empacados con un lecho de catalizadores estacionarios. La temperatura del reactor se controla con un fluido que circula por fuera de tubos empacados; se muestra el sistema en la figura (11).



En el reactor de lecho fijo los reactantes entran a una temperatura y composición uniformes y a medida que atraviesan el lecho se verifica la reacción química dando como resultado,

variaciones de temperatura y concentración en dirección radial y axial.

En el diseño del reactor de lecho fijo, para conocer la concentración y la temperatura en cualquier punto del reactor se formularon los siguientes balances de masa y calor.

En la figura (11) se muestra una sección de un reactor catalítico de lecho fijo, por donde fluye la mezcla reaccionante. Considerando la difusión radial, longitudinal y convección longitudinal, el balance de masa es el siguiente:

$$-2\pi R \Delta Z D_r \left[ \frac{\partial C}{\partial R} \right]_R + 2\pi R \Delta r \left[ uC - Da \frac{dC}{dz} \right]_z \dots \text{Entrada} \dots (74)$$

$$-2\pi R \Delta Z D_r \left[ \frac{\partial C}{\partial R} \right]_{R+\Delta R} + 2\pi R \Delta r \left[ uC - Da \frac{dC}{dz} \right]_{z+\Delta z} \dots \text{Salida} \dots (75)$$

$$r_p \rho_b 2\pi R \Delta R \Delta z \dots \text{Reactante convertido} \dots (76)$$

Donde:

$r_p$  = Velocidad total por unidad de masa del catalizador.

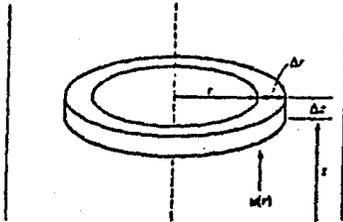
$\rho_b$  = Densidad del catalizador en el lecho.

$u$  = Velocidad superficial en dirección axial.

$Da$  = Difusividad efectiva axial

$D_r$  = " " radial.

Elemento anular de un reactor catalítico de lecho fijo en régimen estacionario.



Balance de masa

Entrada de reactantes al lecho fijo - Salida de productos en lecho fijo = Velocidad de reacción catalítica.

Cambiando estos términos de acuerdo con el balance de masa y dividiendo entre  $2\pi \Delta r \Delta z$  y tomando el límite como  $\Delta r$  y  $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{dC}{dt} - D_{sa} \frac{d^2C}{dr^2} - D_r \left( \frac{d^2C}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dC}{dr} \right) + u \frac{dC}{dz} = R \dots (77)$$

Donde en cada número de Peclet están en competencia los movimientos de convección y dispersión radial y axial y el efecto que domine define la magnitud de cada número de Peclet. Haciendo combinaciones de parametros adimensionales.

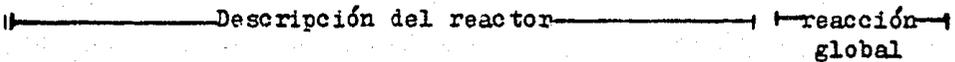
$$Pe_{a\bar{n}} = \frac{dpu}{Da} \frac{Z_0}{\bar{R}_p} = \frac{Z_0 u}{Da} \dots (83)$$

$$Pe_{r\bar{r}} \frac{m}{A} = \frac{dPu}{Dr} \frac{R_0}{dp} \frac{R_0}{Z_0} = \frac{R_0}{Dr} \frac{R_0}{Z_0} \dots (84)$$

Introduciendo en las ecuaciones (79) y (80) las combinaciones de parametros adimensionales obtenidos en (83) (84) el resultado es:

Para transferencia de masa

$$\frac{df}{dz} - \frac{1}{Pe_{a\bar{n}}} \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{A}{Pe_{r\bar{r}m}} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{\partial r} \right) + \frac{df}{dz} = \frac{R_0}{C_0} \dots (85)$$



Para transferencia de calor

$$\frac{dt}{dz} - \frac{1}{Pe_{a\bar{n}}} \frac{d^2 t}{dz^2} - \frac{A}{Pe_{r\bar{r}m}} \left( \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} \right) + \frac{dt}{dz} = \frac{q_0}{\beta C_{pT_0}} \dots (86)$$

Como se observa en el lado izquierdo de las ecuaciones (85) y (86) la conducta del reactor es manejada por los parametros adimensionales como: números de Peclet axial y radial, relación de radios y tiempo adimensional.

Las ecuaciones (85) y (86) se pueden resolver numéricamente por incrementos para obtener los perfiles de concentración y temperaturas en cualquier parte del reactor, asimismo se pueden eliminar los términos constantes que se presenten en el sistema catalítico de lecho fijo.

El lado derecho de las ecuaciones (85) y (86) corresponde a la parte de velocidad de reacción y transferencia de calor.

Siguiendo el mismo procedimiento al anterior el balance de calor es el siguiente:

$$\int C_p \frac{dT}{dt} - C_p K_a \frac{dT}{dz} - \rho C_p K_r \left( \frac{dT}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + \int C_p u \frac{dT}{dz} = q \dots (78)$$

La simplificación de las ecuaciones diferenciales (77) y (78) se logra introduciendo parametros dimensionales del tipo siguiente:

$$n = \frac{\text{longitud del lecho}}{\text{diametro de la partícula}} \quad A = \frac{\text{Longitud lecho}}{\text{diametro partícula}} \quad M = \frac{\text{Radio del lecho}}{\text{diam. part.}}$$

$$n = \frac{Z}{dp} \quad , \quad m = \frac{R_0}{dp} \quad , \quad A = \frac{Z_0}{R_0} \quad , \quad \theta = \frac{Z_0}{u}$$

$$f = \frac{C}{C_0} \quad , \quad t = \frac{T}{T_0} \quad , \quad \bar{r} = \frac{R}{R_0} \quad , \quad z = \frac{Z}{Z_0} \quad , \quad \tau = \frac{t}{\theta} = \frac{\text{tiempo real}}{\text{tiempo constante}}$$

Las ecuaciones de calor y masa adimensionalizadas con ayuda de parametros adimensionales son:

$$\frac{df}{d\tau} - \frac{Da}{Z_0 u} \frac{df}{dz} - \frac{Dr Z_0}{R_0 u R_0} \left( \frac{df}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) + \frac{df}{dz} = \frac{Pe}{C_0} \dots (79)$$

$$\frac{dt}{d\tau} - \frac{Ka dt}{Z_0 u dz} - \frac{Kr Z_0}{R_0 u R_0} \left( \frac{dt}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} \right) + \frac{dt}{dz} = \frac{pe}{\rho C_p T_0} \dots (80)$$

Los números dimensionales resultantes de la adimensionalización de las ecuaciones diferenciales de calor y masa son:

$$Pe_a = \frac{dp u}{Da} = \text{Número Peclet axial} = \frac{\text{Convección axial}}{\text{Dispersión axial}} \dots (81)$$

$$Pe_r = \frac{dp u}{Dr} = \text{Número de Peclet radial} = \frac{\text{Convección axial}}{\text{Radial dispersión}} \dots (82)$$

Para un sistema catalítico heterogéneo la velocidad global de reacción en las zonas de interfase e intrafase en condiciones no isotérmicas:

$$R = \frac{\bar{n}kC}{1 + \bar{n}k/k_g} \dots (87)$$

Donde  $n_0 = f(\phi, \epsilon, B_i, B_i \eta) \dots (88)$

Por lo tanto la velocidad de reacción expresada en términos del lado derecho de la ecuación de continuidad es la siguiente:

$$\frac{R\theta}{C_0} = \frac{\bar{n} f(k, C, T)}{(1 + Da)C_0} \theta \dots (89)$$

Introducimos la ecuación (83) en (89) que da la parte de velocidad de reacción de la ecuación de continuidad expresada en función de los siguientes parametros adimensionales:

$$\frac{R\theta}{C_0} = g(\phi, Da, \beta, \epsilon, B_i \eta, B_i \eta) \dots (90)$$

Así pues con la ayuda de los parametros adimensionales que intervienen en las zonas de intrafase-interfase en un sistema catalítico heterogéneo se puede calcular la velocidad de reacción global para un reactor de lecho fijo.

La ecuación de la velocidad global de reacción (90) puede reducirse de acuerdo con las condiciones que este operando el reactor catalítico de lecho fijo.

Por otro lado, el lado derecho de la ecuación de continuidad de transferencia de calor queda:

$$\frac{q\theta}{C_p T_0} = \frac{R\theta}{C_0} \beta$$

Quedando la generación de calor en función de parametros adimensionales  $\beta$ ,  $\theta_0$  y la velocidad global de reacción que a su vez depende de números adimensionales.

En conclusión el comportamiento de un reactor de lecho fijo a cualquier temperatura, se puede explicar con la intervención de números adimensionales.

CONCLUSION

Con el análisis y estudio desarrollado se llega a la conclusión que en la Ingeniería Química, se pueden aplicar métodos adimensionales, en la determinación de números adimensionales en la resolución de problemas complejos.

En el desarrollo y presentación del temas, los números adimensionales se obtienen de la experimentación y de las variables que representan fenómenos químicos y físicos que intervienen en el proceso ó sistema que se analiza.

Los números adimensionales se clasificaron por operaciones unitarias.

- a) Flujo de fluidos
- b) Transferencia de calor
- c) Transferencia de masa
- d) Cinética Química

Al clasificar los números adimensionales en base a las operaciones unitarias se consigue hacer un análisis descriptivo y profundo del sistema que se presenta.

Al estudiar los números adimensionales se da importancia a factores que componen toda la trayectoria, de su formación, siendo las partes de mayor interés las siguientes:

1...

- a) Origen
- b) Significado
- c) Formula
- d) Aplicación
- f) Características

Este estudio presenta los números dimensionales más aplicables - en la Ingeniería Química y que puede ser aplicado sin tener que - ser un especialista de la materia que se trate.

Hay números dimensionales que no se trataron en este tema, pero - en base al análisis y metodológico desarrollado para su obtención. Se pueden determinar los números dimensionales para cualquier - - proceso en estudio.

Por lo general los números dimensionales para cualquier operación unitaria determinan los parámetros a medir y que controlen el proceso que no se pueden obtener por experimentación directa.

Para situaciones de régimen turbulento en cualquier proceso, la teoría que describe el movimiento no da los parámetros a medir en el proceso. Por eso es necesario adimensionalizar el proceso para obtener los mismos que describan al proceso.

Se espera que este trabajo desarrollado sea útil para quien lo necesite y de el servicio de guía para ubicar el problema del proceso que se este estudiando.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Dimensionless numbers 2, D.F. Boucher and G.G. Alaes.  
Chemical Engineering progress (Vol. 59, No. 8 Agosto de 1963  
pp 75-84).
- 2.- Phenomena transport, Bird, R.B.W Stewart Willey, New York -  
1960.
- 3.- Hydrodynamics, Birkhoff, G., p-p-92-109 and ed, Princeton -  
Univ. Press, Princeton 1960.
- 4.- Chemical Engineering practice, Herbert W. Cremer Bulterworths,  
Scientific, Publications London (1958) p-45-130.
- 5.- Transfer operations, R.A. Greenkorn. Mc Graw-Hill.
- 6.- Flow of fluids through porous materials, E. Resichold, New -  
York 1961, Wiley.
- 7.- Chemical Engineering, J.M. Causlón, Second edition, V-1, 2, 3.  
Pergamion Press.
- 8.- Elements of transport phenomena, Leightón E. Sissom, ph, D.,  
P.E. Mc Graw-Hill.
- 9.- Transport phenomena, W.J. Biek., Wiley.
- 10.-Heat transfer, S.P. Halman, Mc Graw-Hill cap. 3, 6, 7.
- 11.-Heat transfer, Aubrey I. Brown. Mc Graw-Hill, cap. 8, 9, 10.
- 12.-Analysis of that and mass transfer, E.R.G. Echert, Mc Graw-Hill.

- 13.- Heat transfer Alan J. Chapman, third edition.
- 14.- Principles of heat transfer, Frank Kheith, third edition.
- 15.- Heat conduction, John M. Necati, Wiley and Sons, New York.
- 16.- Momentum, heat and mass transfer, 4a. edition, cap. 2, 3, 4, 5,  
Benneti and Myers.
- 17.- Reid and Sherwood, the properties of gases and liquids, second  
edition, pp-4-180
- 18.- Heat transmission William H. Mc. Adams. Cap. 2, 4, 5, 6  
Mc Graw-Hill
- 19.- Chemical Engineering Kinetics, J.M. Smith, second, editon,  
Mc Graw-Hill.
- 20.- Heat, mass, and momentum transfer Warren M. Rohseno. Prini-  
tice Hall-the New Yersey (1961).
- 22.- Diffusional, mass transfer, A.H.P. Skelland, John Willey 1971.
- 23.- Transport processes and unit operations, Chistie J. Geankples.
- 24.- Unit operations of Chemical Engineering, Warren L. Mc Cabe  
V-1, V-2 caps. 3, 8, 14, 24, 30.
- 25.- Chemical and catalytic reaction Engineering, Carberry James J.  
Mc Graw-Hill, cap. 9, 10.
- 26.- Fundamentals of Chemical reaction Engineering Charles D. Hallenc  
cap. 3, 6, 7.  
Practice Hall-Inc.

27.- Principles of unit operations, Alan, S. Foust., cap. 15, 16,  
17 Willey International Editions.

28.- Mass transfer operations, Robert E. Treybal cap. 6, 7, 11, 12  
Mc Graw-Hill.