

165  
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ingeniería



GRAFICACION CON COMPUTADORA DE  
RESULTADOS DE MODELOS  
HIDRODINAMICOS DE  
LAGUNAS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A :  
FRANCISCO JAVIER TORRES VERDIN



México, D. F.

1987



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

GRAFICACION CON COMPUTADORA DE RESULTADOS DE MODELOS HIDRODINAMICOS DE LAGUNAS

| CONTENIDO  | PAG |
|--|-----|
| 1. INTRODUCCION  | 1   |
| 2. BREVE DESCRIPCION DEL MODELO MATEMATICO   | 4   |
| 2.1 Introducci3n   | 4   |
| 2.2 Ecuaciones fundamentales   | 5   |
| 2.2.1 Conservaci3n de masa   | 5   |
| 2.2.2 Ecuaci3n de cantidad de movimiento   | 7   |
| 2.3 Requerimientos de datos f3sicos; datos iniciales y condiciones de frontera           | 10  |
| 2.4 Formaci3n del sistema de ecuaciones  | 11  |
| 2.5 Elaboraci3n de mallas y presentaci3n de resultados                                   | 12  |
| 3. GRAFICACION DE NIVELES  | 16  |
| 3.1 Introducci3n   | 16  |
| 3.2 Caracteristicas de la malla de datos   | 17  |
| 3.3 Obtenci3n de la configuraci3n de las curvas de nivel para cada tri3ngulo de la malla | 21  |
| 3.4 Inicio y terminaci3n del proceso para la generaci3n de las curvas de nivel           | 25  |
| 3.4.1 Rastreo de curvas de nivel externas  | 26  |
| 3.4.2 Formaci3n del arreglo de nodos frontera $F_1$                                      | 30  |
| 3.4.3 Rastreo de curvas de nivel internas  | 38  |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 3.5   | Ajuste o suavización de las curvas de nivel         | 41 |
| 3.6   | Obtención de la envolvente de la malla              | 53 |
| 4.    | GRAFICACION DE CAMPOS DE VELOCIDADES                | 63 |
| 4.1   | Introducción  | 63 |
| 4.2   | Características de la malla de datos                | 64 |
| 4.3   | Obtención de la representación del vector velocidad | 66 |
| 5.    | APLICACIONES  |    |
| 5.1   | Planteamiento del problema                          | 70 |
| 5.2   | Resultados  | 75 |
| 5.2.1 | Variación de niveles en el tiempo                   | 75 |
| 5.2.2 | Campos de velocidades                               | 76 |
| 5.2.3 | Niveles en la laguna                                | 79 |
| 6.    | CONCLUSIONES  | 83 |



## 1. INTRODUCCION

En México existe una gran disponibilidad de cuerpos lagunares con una amplia potencialidad para diversos usos, principalmente alimenticia y recreativa. El uso óptimo de los recursos que una laguna puede proporcionar está relacionado con la correcta determinación del comportamiento de ésta; el estudio de dicho comportamiento presupone la identificación y cuantificación de los flujos que se presentan en una laguna cuando está sujeta a condiciones específicas de funcionamiento. Estos flujos dependen de los gastos que entran o salen de este cuerpo de agua y que tienen su origen en agentes naturales como ríos, mareas, infiltraciones, precipitaciones, etc. o bien en la acción del hombre.

En el presente trabajo se describe la forma como se estudia el comportamiento de una laguna mediante la simulación por

computadora con un modelo hidrodinámico. Este modelo se aplica en forma discreta para elementos rectangulares en la laguna, de tal manera que la aplicación de las ecuaciones de la hidrodinámica en cada uno de estos elementos permite conocer la variación bidimensional de la velocidad y de los niveles del agua en la laguna, como consecuencia de la presencia de flujos en ésta.

Representar gráficamente por computadora los resultados que proporcionan los modelos hidrodinámicos de lagunas, es decir, las velocidades y los niveles del agua, constituye el objetivo de la presente tesis. La principal motivación para obtener la representación gráfica de estos resultados, fue la de que, con ayuda de la graficación cualquier problema que requiera del conocimiento del comportamiento del agua en una laguna puede ser analizado con mayor objetividad. De la misma forma como una imagen dice más que mil palabras, una gráfica puede resumir el contenido de varias hojas de computadora repleta de datos numéricos; asimismo, el empleo de una gráfica facilita y agiliza la toma de decisiones.

En el capítulo 2 de este trabajo, se describe brevemente el modelo matemático empleado para el cálculo de la hidrodinámica de lagunas, así como la forma como se aplican las ecuaciones fundamentales en forma discreta de la hidráulica para cada uno de los elementos rectangulares en los que se divide la laguna.

En el capítulo 3 se explica el algoritmo mediante el cual se obtiene la descripción gráfica de los niveles del agua en una laguna; dicha descripción se basa en la obtención de las curvas de nivel o isolíneas al tenerse como datos los valores de los niveles para cada uno de los elementos rectangulares de la laguna.

En el capítulo 4 se trata lo concerniente a la representación gráfica de los campos de velocidad en una laguna, y que consiste en la graficación del vector velocidad asociado a cada elemento rectangular.

En el capítulo 5 se presenta como ejemplo de aplicación una laguna cuya hidrodinámica es calculada empleando el modelo matemático descrito en el capítulo 2; se muestran varias gráficas obtenidas mediante los algoritmos que se describen en los capítulos 3 y 4 mismas en las que se observan la magnitud y dirección de los flujos en la laguna, así como la variación de los niveles en ésta.

## 2. BREVE DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 Introducción

En este capítulo se describe un modelo matemático para simular flujo bidimensional en lagunas. Las ecuaciones que gobiernan al flujo se resuelven con un esquema de diferencias finitas implícito. La laguna se divide en elementos de forma rectangular y pueden incluirse las fronteras naturales como fronteras internas del modelo. A pesar de las simplificaciones introducidas en la descripción del fenómeno físico, el modelo da resultados suficientemente precisos como para utilizarlo en proyectos de obras de protección y control, evaluación económica de alternativas, etc.

Por ser implícito el modelo que aquí se describe, no existe limitación en el incremento de tiempo al resolver las ecua-

ciones fundamentales en una malla de elementos rectangulares en planta.

## 2.2 Ecuaciones fundamentales

### 2.2.1 Conservación de masa

En la fig 2.1 se ilustra la definición del volumen de control para aplicar la ecuación de conservación de masa líquida, misma que expresa que el cambio de almacenamiento en el volumen de control es debido a los flujos netos que entran al volumen de control

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum Q = 0$$

donde

V volumen de agua almacenada, en m<sup>3</sup>

Q gasto, en m<sup>3</sup>/s

Considerando que el área en planta del volumen de control es constante, la ecuación anterior se aproxima como

$$A_i \frac{(H_i^{k+1} - H_i^k)}{\Delta t} = - \left( \sum_{j=1}^n B_{i,j} Y_{i,j} V_{i,j}^{k+1} - \sum Q_{E_{i,j}} \right) \quad (2.1)$$

donde

A<sub>i</sub> área en planta del elemento i, en m<sup>2</sup>

H<sub>i</sub> cota o elevación del agua al centro del elemento i,  
en m

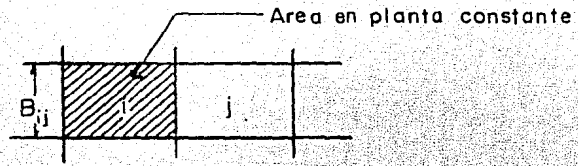


Fig. 2.1 Volumen de control para consevación de masa

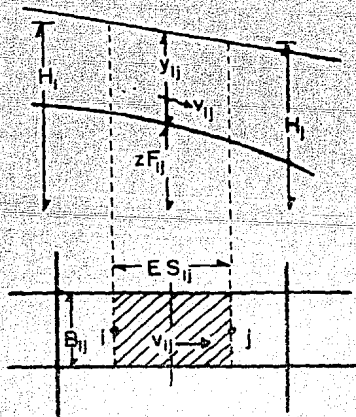


Fig. 2.2 Volumen de control para cantidad de movimiento.

- n número de volúmenes de control adyacentes al volumen i con los cuales hay flujo con velocidad  $V_{i,j}$
- $V_{i,j}$  velocidad en la frontera entre los elementos i y j, positiva cuando sale del volumen de control, en m/s
- k superíndice que indica el instante  $k\Delta t$
- $\Sigma QE_{i,j}$  suma de otros gastos que entren al elemento i (como los que vienen de un río, por ejemplo), en  $m^3/s$
- $B_{i,j}$  ancho de la frontera entre los elementos i y j, en m

$$y_{i,j} = (H_i + H_j)/2 - ZF_{i,j} \quad (2.2)$$

- $y_{i,j}$  tirante medio de flujo entre los elementos, en m
- $ZF_{i,j}$  cota en la unión entre el elemento i y el j, en m

### 2.2.2 Ecuación de cantidad de movimiento

El tipo de flujo que se presenta en la laguna es el dominado por la fricción y se calcula con la ecuación de cantidad de movimiento. Los volúmenes de control para aplicar esta ecuación se consideran rectangulares en planta; su longitud es igual a la distancia entre los centros de los elementos y su ancho es el de la frontera entre los mismos elementos, fig 2.2. Aquí la ecuación de cantidad de movimiento, considerando que la aceleración convectiva es pequeña comparada con los otros términos, se escribe como

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + gS_f = 0 \quad (2.3)$$

donde

$$H = y + z$$

$g$  aceleración debida a la gravedad, en  $m/s^2$

$S_f$  pendiente de fricción, adimensional

La ec 2.3 se aproxima con el siguiente esquema de diferencias finitas (Cruickshank y Zumaya, 1974, Berezowsky, 1982)

$$\frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^k}{\Delta t} + \psi g \frac{H_j^{k+1} - H_i^{k+1}}{ES_{i,j}} + (1-\psi)g \frac{H_j^k - H_i^k}{ES_{i,j}} + g \frac{V_{i,j}^{k+1} \sqrt{V_{i,j}^{k+1}{}^2 + V_{y,i,j}^{k+1}{}^2}}{C_{i,j}^2 Y_{i,j}^k} = 0$$

donde

$\psi$  factor de peso,  $0.5 < \psi \leq 1.0$

$ES_{i,j}$  distancia de centro a centro de los elementos  $i$  y  $j$ , en  $m$

$C_{i,j}$  coeficiente de Chezy entre los elementos  $i$  y  $j$ , en  $m^{1/2}/s$

$V_{x,i,j}$  velocidad en la dirección del eje  $X$  para la liga entre los elementos  $i$  y  $j$  en el instante  $k\Delta t$

$V_{y,i,j}$  velocidad en la dirección del eje  $Y$  para la liga entre los elementos  $i$  y  $j$  en el instante  $k\Delta t$

La obtención de ambas velocidades se ilustra en la fig 2.3.

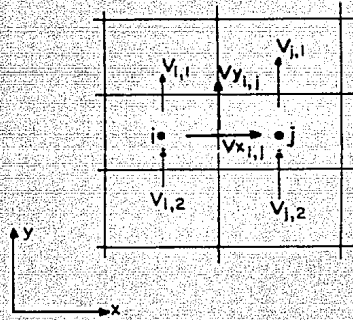
Factorizando  $V_{i,j}^{k+1}$  y ordenando

$$V_{i,j}^{k+1} = -\psi S_{i,j} (H_j^{k+1} - H_i^{k+1}) - (1-\psi) S_{i,j} (H_j^k - H_i^k) + \frac{V_{i,j}^k}{1+R_{i,j}} \quad (2.4)$$



Si la liga entre  $i$  y  $j$  es paralela al eje  $x$

$$v_{x_{i,j}} = v_{i,j} ; \quad v_{y_{i,j}} = (v_{i,1} + v_{i,2} + v_{j,1} + v_{j,2}) / 4$$



Si la liga entre  $i$  y  $j$  es paralela al eje  $y$

$$v_{x_{i,j}} = (v_{i,1} + v_{i,2} + v_{j,1} + v_{j,2}) / 4 ; \quad v_{y_{i,j}} = v_{i,j}$$

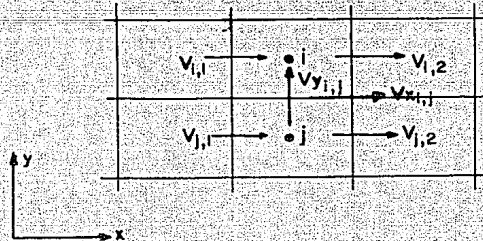


Fig. 2.3

donde

$$S_{i,j} = \frac{g\Delta t}{ES_{i,j}(1+R_{i,j})} ; R_{i,j} = \frac{g\Delta t \sqrt{Vx_{i,j}^2 + Vy_{i,j}^2}}{C_{i,j}^2 y_{i,j}^k} \quad (2.5)$$

Nótese que en la ec 2.4, la velocidad queda en función de las elevaciones del agua en los elementos adyacentes para el tiempo  $(k+1)\Delta t$  que son desconocidas.

### 2.3 Requerimientos de datos físicos; datos iniciales y condiciones de frontera

Del desarrollo anterior puede inferirse la información requerida para usar el modelo matemático: para cada elemento, el área en planta y profundidad media; con los elementos con los que tiene flujo, se requiere distancia de centro a centro,  $ES$ , ancho de flujo, cota en la frontera entre los elementos, y coeficiente de fricción (Chezy).

Como datos iniciales se requerirá disponer de niveles de agua en cada elemento así como flujos entre ellos. Sin embargo, es difícil conseguir esta información. Por tanto, puede asumirse como condición inicial una para la cual el nivel en cada uno de los elementos es constante. Esto implica que los flujos iniciales son nulos. Los elementos de elevación conocida, como pueden ser elementos en el mar, se consideran como fronteras y no entran en el cálculo.

La condición de frontera o caudal conocido en el tiempo también resulta simple de manejar. El gasto conocido se introduce en la ec 2.1 en el término de la suma QE.

#### 2.4 Formación del sistema de ecuaciones

Como puede verse en las ecs 2.1 y 2.4, se han expresado las variables al final del intervalo formando lo que se conoce como un esquema implícito. Para reducir el número de incógnitas se hacen las siguientes manipulaciones algebraicas, Berezhowsky (1982). Al sustituir la ec 2.4 en la 2.1, y si se considera que el elemento  $i$  liga con  $n$  elementos, de los cuales  $f$  pueden ser de frontera de nivel conocido, HF, resulta

$$H_i^{k+1} \left( \frac{A_i}{\Delta t} + \psi \sum_1^{n-f} s_{i,j} \right) - \psi \sum_1^{n-f} s_{i,j} H_j^{k+1} = \frac{A_i}{\Delta t} H_i^k + \sum QE_{i,j} + \sum_1^n Q_{i,j}^k / (1+R_{i,j}) + \sum_1^f s_{i,j} HF_j^{k+1} + (1-\psi) \sum_1^n s_{i,j} (H_j^k - H_i^k) \quad (2.6)$$

donde

$$s_{i,j} = B_{i,j} y_{i,j}^k; \quad Q_{i,j}^k = B_{i,j} y_{i,j}^k v_{i,j}^k \quad (2.7)$$

En la ec 2.6 se han eliminado las velocidades al final del intervalo, quedando únicamente como incógnitas las cotas del agua del elemento  $i$  y de los  $n-f$  elementos adyacentes con los que se tiene flujo por fricción.

Al establecer una ecuación como la 2.6 para cada nudo  $i$  resulta un sistema con  $II$  ecuaciones e  $II$  incógnitas (nivel del agua), siendo  $II$  el número de elementos de la laguna. En este sistema en cada renglón se tienen  $n-f+1$  incógnitas. Aún así, la matriz del sistema tiene muchos ceros. Si al definir la malla se tiene cuidado de que la liga entre elementos adyacentes se haga en forma ordenada puede lograrse que  $n$  sea mínimo. Se tiene la ventaja adicional de que la matriz de coeficientes es simétrica por lo que puede construirse fácilmente. Se ha elaborado un algoritmo basado en el método de eliminación de Gauss para resolver en forma eficiente el sistema de ecuaciones resultante, y que además no almacena valores nulos en la matriz de coeficientes. Una vez resuelto dicho sistema, esto es, calculadas todas las  $H_i^{k+1}$ , se calculan los flujos al final del intervalo con la ec 2.4.

Si un elemento no tiene flujos, los términos en la suma de la ec 2.6 se anulan quedando sólo el coeficiente correspondiente a la diagonal principal.

## 2.5 Elaboración de mallas y presentación de resultados

La malla es utilizada para describir las ligas existentes entre cada uno de los elementos rectangulares en los que se divide la laguna. Cada uno de estos elementos es representado en la malla como un nodo situado al centro de cada elemento, y el número de elementos debe ser elegido de tal manera que

describan adecuadamente los flujos, las fronteras y el contorno de la laguna, estando restringido el número de elementos por el tiempo de cómputo. En la fig 2.4 se ilustra un ejemplo de la forma como se representa una laguna por medio de elementos rectangulares.

La malla es introducida al programa que resuelve los modelos hidrodinámicos, mediante el empleo de una matriz de datos, en la que se almacenan los números con los que se designan a cada uno de los elementos que componen la laguna. De esta forma, la matriz, por ser un arreglo bidimensional de datos representa la posición de cada elemento de la laguna en el plano X,Y.

Por lo que respecta a la presentación de resultados, ésta se ilustra en la hoja de datos 2.1 y corresponde a la laguna de la fig 2.4. Los asteriscos en dicha hoja sirven para definir el contorno de la laguna.

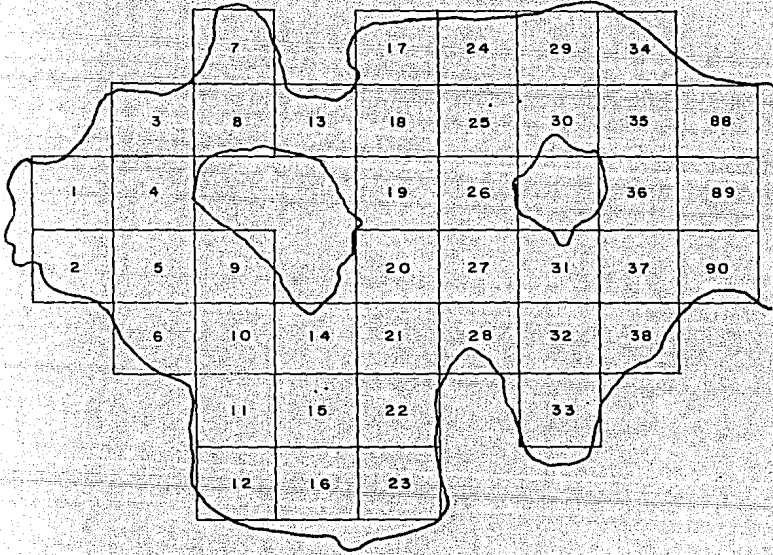


Fig. 2.4

## Geometria de la malla Escala= 1.00

|     |     |     |     |    |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| xxx | xxx | 7   | xxx | 17 | 24  | 29  | 34  | xxx |
| xxx | 3   | 8   | 13  | 18 | 25  | 30  | 35  | 8C  |
| 1   | 4   | xxx | xxx | 19 | 26  | xxx | 36  | 09  |
| 2   | 5   | 9   | xxx | 30 | 27  | 31  | 37  | 90  |
| xxx | 6   | 10  | 14  | 21 | 28  | 32  | 38  | xxx |
| xxx | xxx | 11  | 15  | 22 | xxx | 33  | xxx | xxx |
| xxx | xxx | 12  | 16  | 23 | xxx | xxx | xxx | xxx |

## Cotas al centro del eleva Escala= 10.00

|            |       |            |          |                |                |                |          |        |
|------------|-------|------------|----------|----------------|----------------|----------------|----------|--------|
| xxxxxxxxxx | -12.0 | xxxxxx     | -14.0    | -21.0          | -23.0          | -21.0          | xxxxxxxx |        |
| xxxxxx     | -35.0 | -22.0      | -22.0    | -28.0          | -36.0          | -23.0          | -36.0    | -38.0  |
| -13.0      | -25.0 | xxxxxxxxxx | -34.0    | -33.0          | xxxxxx         | -41.0          | -45.0    |        |
| -17.0      | -32.0 | -37.0      | xxxxxxxx | -21.0          | -23.0          | -36.0          | -29.0    | -38.0  |
| xxxxxx     | -31.0 | -41.0      | -22.0    | -43.0          | -32.0          | -23.0          | -11.0    | xxxxxx |
| xxxxxxxxxx | -29.0 | -56.0      | -35.0    | xxxxxx         | -8.0           | xxxxxxxxxxxxxx |          |        |
| xxxxxxxxxx | -19.0 | -7.0       | -9.0     | xxxxxxxxxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxx |                |          |        |

## Elevaciones del agua Escala= 10.00

|                |   |                |   |                |                |        |        |        |
|----------------|---|----------------|---|----------------|----------------|--------|--------|--------|
| xxxxxxxxxx     | 0 | xxxxxx         | 1 | 2              | 2              | 3      | xxxxxx |        |
| xxxxxx         | 0 | 0              | 1 | 1              | 2              | 3      | 5      | 4      |
| 0              | 0 | xxxxxxxxxxxxxx | 1 | xxxxxx         | 5              | 4      |        |        |
| 0              | 0 | 0              | 1 | 2              | 3              | 4      | 4      |        |
| xxxxxx         | 0 | 0              | 0 | 1              | 1              | 2      | 3      | xxxxxx |
| xxxxxxxxxxxxxx | 0 | 0              | 1 | xxxxxx         | 1              | xxxxxx | xxxxxx |        |
| xxxxxxxxxxxxxx | 0 | 0              | 0 | xxxxxxxxxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxx |        |        |        |

## Velocidades en X Escala= 10.00

|                |   |                |    |                |                |                |        |        |
|----------------|---|----------------|----|----------------|----------------|----------------|--------|--------|
| xxxxxxxxxx     | 0 | xxxxxx         | -1 | -2             | -3             | 0              | xxxxxx |        |
| xxxxxx         | 0 | -1             | -1 | -2             | -4             | -6             | -8     | 0      |
| 0              | 0 | xxxxxxxxxxxxxx | -1 | 0              | xxxxxx         | -6             | 0      |        |
| 0              | 0 | 0              | -2 | -3             | -6             | -9             | 0      |        |
| xxxxxx         | 0 | -1             | -1 | -2             | -2             | -3             | 0      | xxxxxx |
| xxxxxxxxxxxxxx | 0 | 0              | 0  | xxxxxx         | 0              | xxxxxxxxxxxxxx |        |        |
| xxxxxxxxxxxxxx | 0 | 0              | 0  | xxxxxxxxxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxx |                |        |        |

## Velocidades en Y Escala= 10.00

|                |   |                |    |                |                |                |        |        |
|----------------|---|----------------|----|----------------|----------------|----------------|--------|--------|
| xxxxxxxxxx     | 0 | xxxxxx         | 0  | 0              | 0              | 0              | xxxxxx |        |
| xxxxxx         | 0 | 0              | 0  | 0              | 0              | 1              | 4      | 0      |
| 0              | 0 | xxxxxxxxxxxxxx | 0  | -1             | xxxxxx         | 2              | 0      |        |
| 0              | 0 | 0              | 0  | 1              | 0              | -3             | 0      |        |
| xxxxxx         | 0 | 0              | 0  | -1             | -1             | -2             | -1     | xxxxxx |
| xxxxxxxxxxxxxx | 0 | 0              | -1 | xxxxxx         | -2             | xxxxxxxxxxxxxx |        |        |
| xxxxxxxxxxxxxx | 0 | 0              | 0  | xxxxxxxxxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxx |                |        |        |

### 3. GRAFICACION DE NIVELES

#### 3.1 Introducción

La graficación de niveles implica la realización de un programa de computadora que obtenga las curvas de nivel tanto hidráulico como batimétrico de un cuerpo de agua, como por ejemplo, una laguna.

Se denomina curva de nivel o isolínea a aquella curva que uniendo puntos de igual nivel o de cualquier otro parámetro, permite conocer la configuración de una superficie tridimensional en un plano.

La función específica del programa, es la generación de archivos de datos, en los cuales son almacenadas las coordenadas X y Y de la curva de nivel que se pretende generar. Es-



te par de coordenadas son obtenidas por interpolación lineal dentro de la malla de resultados obtenidos del programa de modelos hidrodinámicos de lagunas.

A continuación se hace un análisis detallado de la metodología para la obtención de las isolíneas.

### 3.2 Características de la malla de datos

Los datos de entrada se introducen al programa en una matriz de datos de acuerdo a las siguientes especificaciones.

Cada punto o nodo de la malla es un elemento de la matriz, y tiene asociado un valor del nivel o del parámetro del que se pretende obtener sus isolíneas, además de coordenadas X y Y. Estas coordenadas son básicas para determinar la posición de cada elemento de la matriz. Dicha posición se establece mediante el empleo de dos subíndices enteros positivos, denominados  $i$  y  $j$ . El subíndice  $i$  indica el renglón de la matriz al que pertenece cada elemento, en tanto que el subíndice  $j$  indica la columna de la matriz en la que se encuentra el elemento.

El valor mínimo del subíndice  $i$  corresponde al renglón superior de la matriz y en este caso vale uno, mientras que el máximo valor de este subíndice que es denominado con la letra  $n$  corresponde al renglón situado hasta abajo de la matriz, lo

que significa que el número total de renglones de la matriz es  $n$ . A su vez, la columna para la que el subíndice  $j$  vale uno, es la columna situada a la extrema izquierda y al número total de columnas de la matriz se le denota con la letra  $m$ , misma que es el número de la columna situada a la extrema derecha de la matriz. Se considera que todos los puntos o nodos de la malla asociados a un mismo subíndice  $j$  tienen la misma coordenada  $X$  y que todos los puntos asociados a un mismo subíndice  $i$  tienen la misma coordenada  $Y$ . Esto significa, en otras palabras, que si se entrelazaran por medio de líneas rectas todos los nodos con un mismo valor de  $j$  y los que tienen un mismo valor de  $i$ , se formarían rectángulos, cuyos vértices serán los nodos de la malla. A este tipo de malla se le denomina aquí malla regular.

Cada uno de los elementos de la matriz que se acaba de describir es un nodo de la malla, y se establece la siguiente nomenclatura para identificar a cada uno de éstos en la malla:

$$k = (i - 1) m + j \quad (3.1)$$

donde  $k$  es lo que se denomina como número de nodo, y  $m$  como ya se vio, es el total de columnas de la matriz que representa a la malla. De acuerdo a la fórmula 3.1, si se tiene un nodo  $k$ , el nodo que esté situado a su izquierda inmediata será el nodo  $k-1$  en tanto que el nodo situado a su derecha inmediata será el nodo  $k+1$ . De la misma forma, el nodo que se

encuentre inmediatamente arriba del nodo  $k$  será el nodo  $k-m$  y el localizado inmediatamente abajo del mismo nodo  $k$  será el  $k+m$ . Se establece que el mayor número de enlaces que cada nodo de la malla forma con sus nodos adyacentes es de seis. Dichos enlaces se muestran en la fig 3.1, misma en la que se observa que existen dos nodos, los  $k-m+1$  y  $k+m-1$ , cuyos enlaces con el nodo  $k$ , se denominan como enlaces diagonales. En tanto que los nodos  $k-m$  y  $k+m$  forman cada uno un enlace vertical con el nodo  $k$ , que a su vez forma enlaces horizontales con los nodos  $k-1$  y  $k+1$ .

De esta forma, con los enlaces así establecidos se da lugar a la aparición de triángulos en la malla, que serán la base para la generación de las isolíneas o curvas de nivel.

En el programa se contempla la posibilidad de que uno o más de los elementos de la matriz de datos se declaren como inexistentes, lo que significa que a dichos elementos no se les asigne valor de nivel ni de coordenadas  $X, Y$ , y que por lo tanto no son tomados en cuenta para realizar las curvas de nivel. Este tipo de elementos de la matriz representan lo que se denomina aquí como nodos nulos. Todo nodo que no haya sido identificado como nodo nulo en la malla, deberá estar entrelazado con al menos dos nodos no nulos, de tal manera que los enlaces que se establezcan sean lados de al menos uno de los triángulos formados en la malla. En la fig 3.2 se muestra una malla que tiene las características hasta aquí descri

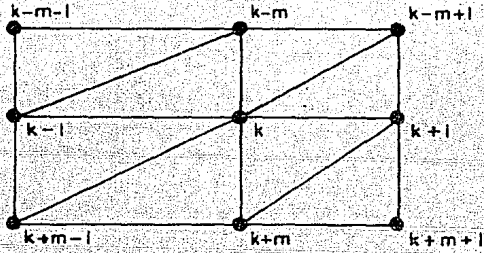


Fig. 3.1

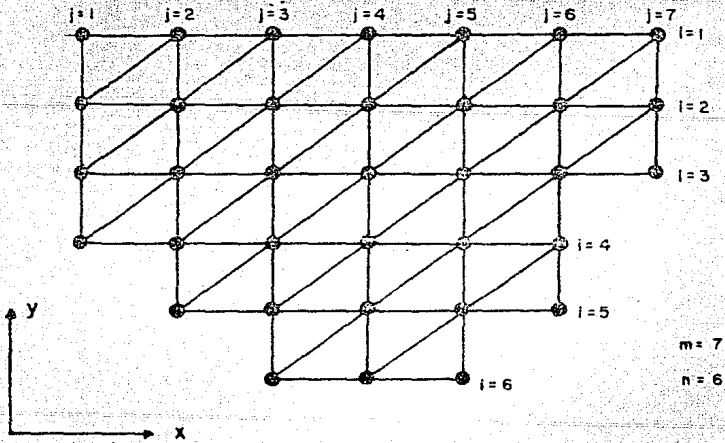


Fig. 3.2

tas.

### 3.3 Obtención de la configuración de las curvas de nivel para cada triángulo de la malla

Sea cualquiera de los triángulos que se forman en una malla. Se denomina cada uno de sus vértices con las letras P, S y T, que significan respectivamente primer, segundo y tercer vértice tal y como se indica en la fig 3.3. De acuerdo a lo que se explicó en el inciso anterior, a todo nodo de la malla corresponde un número entero como denominación (ver fig 3.1), se denominará con la letra H al valor del nivel asociado a cada nodo. Supóngase que se desea obtener la configuración de una curva de nivel CN y que ésta pasa a través del triángulo de la fig 3.3. Se establece que uno de los lados que intersecta la curva de nivel es el SP; al suceder esto el valor del nivel H en el nodo P debe ser menor o igual al de la curva de nivel CN. Se debe cumplir además, que el valor de la curva de nivel a generar sea menor al valor del nivel en el vértice señalado con la letra S, de acuerdo a lo indicado en la relación 3.2

$$H_p \leq CN < H_S \quad (3.2)$$

Una vez satisfecha la condición anterior, se procede a calcular las coordenadas X y Y en el plano, del punto del segmento SP donde la curva de nivel intersecta dicho segmento con las

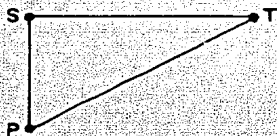


Fig. 3.3

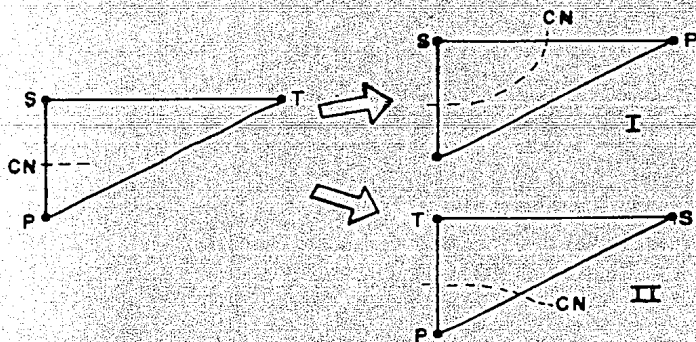


Fig. 3.4

siguientes fórmulas de interpolación lineal:

$$X_{CN} = \left( \frac{X_P - X_S}{H_P - H_S} \right) (H_P - CN) + X_P \quad (3.3)$$

$$Y_{CN} = \left( \frac{Y_P - Y_S}{H_P - H_S} \right) (H_P - C_N) + Y_P \quad (3.4)$$

Donde  $X_{CN}$  y  $Y_{CN}$  son almacenadas en el archivo de datos que al ser graficado proporciona la configuración de la curva de nivel.

El siguiente paso es averiguar cuál de los dos lados restantes del triángulo PST intersecta la curva de nivel, desechándose de antemano la posibilidad de que intersecte ambos lados o que no intersecte ninguno. Existen dos opciones:

I. Que el valor del nivel en el vértice denominado con la letra T sea menor o igual a la curva de nivel propuesta, en cuyo caso, ésta intersectará el lado ST del triángulo.

II. Que el nivel en el vértice T sea mayor a la curva de nivel buscada, lo que significará que dicha curva intersectará el lado PT.

Independientemente de la opción que se presente, se modifica la nomenclatura original del triángulo, tal y como se describe a continuación.

Si se presenta la opción I, el vértice originalmente designado con la letra P es ahora el T, en tanto que el vértice que se identifica con la letra T pasa a ser el nuevo vértice P, conservando el vértice S la misma letra.

Si la opción que se presenta es la II, se intercambian las letras entre los vértices originalmente denominados como S y T, es decir, que el vértice S pasa a ser el T y el T pasa a ser el S, en tanto que el vértice P conserva esa letra. En la fig 3.4 se muestra la forma como se modifica la nomenclatura del triángulo original para ambas opciones.

Los cambios en la nomenclatura implican que en el lado del triángulo que se designe como el nuevo segmento SP se cumple la relación 3.2. Una vez efectuado el cambio, se calculan las coordenadas del punto localizado sobre el segmento SP donde intersecta la curva de nivel, usando las fórmulas 3.3 y 3.4. Este lado es a su vez, el lado de otro triángulo, adyacente al anterior y del que se desconoce su tercer vértice.

Observando la fig 3.1 se puede deducir que si se conocen los números de los nodos a los que se les asignó las letras P, S y T del triángulo que ya cruzó la curva de nivel, es posible determinar el número del nodo que será el tercer vértice del triángulo adyacente al anterior. Y como éste ya fue intersectado en uno de sus lados por la curva de nivel, se realiza el proceso ya descrito de cambiar la nomenclatura, con el fin



de obtener las coordenadas del punto sobre el perímetro del triángulo donde intersecta la curva de nivel. Este proceso se inicia y se termina de acuerdo a como se explica en el siguiente inciso.

### 3.4 Inicio y terminación del proceso para la generación de las curvas de nivel

De acuerdo a la forma como son comenzadas a generar, se distinguen dos tipos de isolíneas o curvas de nivel:

- Curvas de nivel externas. Se originan en algún segmento de la frontera o borde de la malla y necesariamente terminan en algún otro segmento de la misma frontera.
- Curvas de nivel internas. Son las que se cierran dentro de la malla.

La forma como se inicia el proceso de generación de las curvas de nivel es diferente para cada uno de los dos tipos de curva que se distinguieron, y en ambos casos se implementa lo que se denominará como rastreo de curvas. Por rastreo de curvas se entiende al proceso de identificación de los segmentos o enlaces de la malla que intersecta la curva de nivel que se busca, para posteriormente determinar los tres nodos que formarán el triángulo con el que se iniciará el proceso descrito en el inciso anterior.

### 3.4.1 Rastreo de curvas de nivel externas

Todos los nodos de la malla que tienen menos de los seis enlaces posibles que se muestran en la fig 3.1 se denominan nodos externos o nodos frontera y son los que, como su nombre lo indica forman la frontera de la malla.

Por frontera de la malla se define a la sucesión de enlaces horizontales y verticales que forman los nodos externos entre sí. Dentro del programa se identifican todos los nodos externos de la malla y los enlaces que forman dichos nodos con otros nodos frontera mediante el establecimiento de un arreglo unidimensional de datos.

A este arreglo de datos se le denomina en el programa como arreglo  $F_i$  y en cada uno de los elementos de este arreglo, es almacenado el número con el que se denomina dentro de la malla cada uno de los nodos externos o sea de los nodos que forman la frontera de la malla.

La característica principal de este arreglo, es la de que, el orden en que son almacenados los números de los nodos, es tal que, un nodo que se designe como el elemento  $F_i$ , tendrá un enlace en la malla con el nodo cuyo número sea almacenado como el elemento  $F_{i+1}$  del arreglo, y a su vez este nodo está enlazado con el nodo frontera cuyo número se asigne al elemento  $F_{i+2}$ . En resumen, el arreglo  $F_i$  se usa para simular la

frontera de la malla y la forma como se crea, se describe en el subinciso 3.4.2.

De acuerdo a lo anterior, recordando que cada elemento del arreglo  $F_i$  representa un número de nodo, y que a cada nodo está asignado un valor de nivel  $H_k$  donde  $k$  es el número de un nodo cualquiera de la malla, la relación 3.2 se plantea de la siguiente forma para cada enlace o segmento de la frontera de la malla, con el fin de determinar si alguno de los enlaces de ésta es el origen de una curva de nivel CN buscada:

$$H_{F_i} < CN < H_{F_{i+1}} \quad (3.5)$$

donde

$H_{F_i}$  valor del nivel asignado a un nodo de la frontera de la malla

$H_{F_{i+1}}$  valor del nivel en el nodo que se enlaza con el nodo cuyo número es el  $F_i$

Si la relación 3.5 se cumple en alguno de los segmentos de la frontera de la malla, recordando del inciso anterior la forma como se identifican a los vértices de los triángulos formados en la malla, entonces se realizan las siguientes asignaciones:

$$P = F_i \quad \text{y} \quad S = F_{i+1}$$

que al ser sustituidos en la relación 3.5 dan lugar a la rela

ción 3.2, lo que significa que la primera no es más que una representación particular de la segunda. Con esto, ya se tienen dos de los vértices del triángulo con el que se iniciará el proceso para generar las curvas de nivel, por lo que restaría únicamente conocer el número del tercer vértice del triángulo que tiene por lado al segmento o enlace formado por los nodos  $F_i$  y  $F_{i+1}$ . Recordando que dicho par de nodos son nodos externos, el enlace que forman es lado de uno sólo de los triángulos de la malla, lo cual se traduce en que únicamente existe un nodo dentro de la malla que puede ser escogido como tercer vértice del que se define como triángulo inicial. Sabiendo la relación que existe entre el número de cada uno de los dos nodos que son vértices del lado conocido del triángulo inicial, se puede determinar el número de nodo que será el tercer vértice de dicho triángulo. Recordando que  $m$  es el número de columnas de la malla y que es la diferencia entre el número de dos nodos que se enlazan verticalmente, se tiene que:

Para todos los enlaces verticales de la frontera

$$\text{Si } S = P + m \text{ entonces } T = P + m - 1$$

$$\text{Si } S = P - m \text{ entonces } T = P - m + 1$$

En tanto que para todos los enlaces horizontales de la frontera

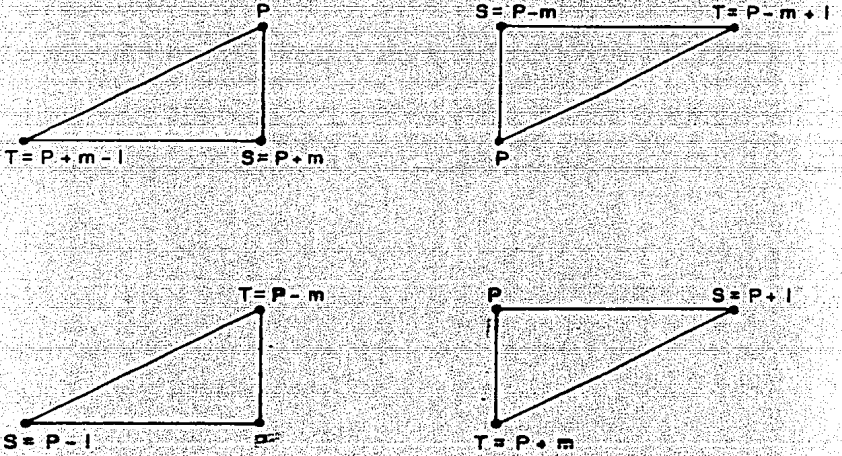


Fig. 3.5

Si  $S = P + 1$  entonces  $T = P + m$

Si  $S = P - 1$  entonces  $T = P - m$

Estas cuatro posibilidades de triángulos que se pueden formar al iniciar la generación de una curva de nivel externa, son mostradas en la fig 3.5. Ya que se ha definido el triángulo inicial, se sigue el proceso descrito en el inciso 3.3 hasta que las letras S y P sean de nuevo asignadas a un par de nodos frontera. Después se rastreará la misma curva en los enlaces restantes de la frontera, hasta recorrerla totalmente. En caso de encontrar otro enlace en la frontera donde se origine la curva de nivel buscada, se sigue el procedimiento para identificar los tres vértices del que se definió como triángulo inicial para comenzar así a generar la curva de nivel, de acuerdo a lo explicado en los incisos anteriores.

#### 3.4.2 Formación del arreglo de nodos frontera $F_1$

Los nodos que en el inciso 3.2 se definieron como nodos nulos, se agrupan entre ellos mismos formando lo que se define aquí como discontinuidad de la malla, concepto que se empleará para distinguir dos tipos de frontera en una malla. Complementando lo anterior, se distinguen dos tipos de discontinuidades:

- Discontinuidad Interna. Es aquella que está confinada por nodos no nulos y que viene a ser una especie de hueco dentro de la malla. Este tipo de discontinuidad se muestra en la

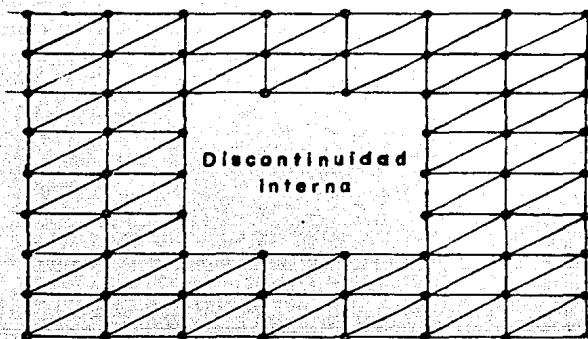


Fig. 3.6



Fig. 3.7

fig 3.6.

- Discontinuidad Externa. Es la discontinuidad que no se encuentra confinada por nodos no nulos. En la fig 3.7 se muestra un ejemplo de esta discontinuidad.

Ambos tipos de discontinuidades pueden ser agrupaciones de uno o más nodos nulos. La función de la frontera de la malla es la de separar las discontinuidades del resto de la malla, por lo que de acuerdo a lo explicado hasta aquí, se distinguen dos tipos de frontera en una malla:

- Frontera Externa. Es la que limita o envuelve a todos los nodos no nulos de la malla, separando a las discontinuidades externas del resto de la malla.

- Frontera Interna. Es la que limita a las discontinuidades internas de la malla, separándolas del resto de la malla.

Toda malla debe contar con una frontera externa, y por lo que respecta a las fronteras internas, habrá tantas como discontinuidades internas existan dentro de la malla. En el arreglo unidimensional  $F_1$ , cuyas características se describieron en el subinciso anterior, se almacenarán los números de los nodos que forman parte de la frontera de la malla, ya sea interna o externa, almacenándose primero los números de los nodos de la frontera externa.

Para el ordenamiento de los nodos de la frontera, se parte del principio de que todo nodo externo se enlaza únicamente



con dos nodos externos, y para cada nodo externo se identifican los números de los nodos externos con los que enlaza. El nodo cuyo número es el primero en almacenarse dentro del arreglo  $F_i$  corresponde al nodo que se denomina como nodo origen de la frontera externa de la malla, y será por lo tanto el elemento  $F_1$  del arreglo. Este nodo se escoge de manera que no exista ningún otro nodo externo con menor número de nodo  $k$  (obtenido de acuerdo a la posición de dicho nodo mediante la fórmula 3.1). Esto significa que una vez elegido el nodo origen de la frontera externa, no existirá ningún nodo no nulo ni a la izquierda ni arriba en la malla de dicho nodo origen. Para el caso de la frontera externa se elige como segundo nodo del arreglo o sea el elemento  $F_2$  al situado a la derecha del nodo origen, es decir, si  $F_1 = k$ , entonces  $F_2 = k + 1$ . A su vez, como el nodo cuyo número ha sido asignado al elemento  $F_2$  tiene sólo dos enlaces con otros tantos nodos externos (de los cuales ya se conoce uno, que es el nodo origen) y puesto que para todo nodo externo se han identificado los números de los nodos externos con los que se enlaza, se podrá conocer el número del nodo que será asignado al elemento  $F_3$  del arreglo. Si existen  $N$  nodos en la frontera externa de la malla, habrá  $N+1$  elementos en el arreglo  $F_i$ , ya que por ser la frontera de la malla una sucesión de enlaces que debe cerrarse, el nodo cuyo número es asignado al elemento  $F_N$  necesitará representar el enlace que tiene con el nodo origen, por lo que el nodo origen que es el elemento  $F_1$  del arreglo también será el elemento  $F_{N+1}$ . El orden en el que

se agrupan los nodos de la frontera externa de la malla es igual al de las manecillas del reloj.

Para la creación de las fronteras internas, cuando existen, el nodo origen de cada una de éstas, será el nodo frontera que no formando parte de la frontera externa o de alguna frontera interna, tenga el menor número de denominación  $k$  en la malla (ver fórmula 3.1). De esta forma, si el elemento del arreglo que fue designado como el nodo origen de una frontera interna es el  $F_{N+2}$ , entonces en contraposición a lo que se hizo para el caso de la frontera externa, el elemento  $F_{N+3}$  del arreglo será el número del nodo situado inmediatamente abajo del nodo origen de la frontera interna, lo que significa que si  $F_{N+2} = k$  entonces  $F_{N+3} = k+m$ . Los nodos de la frontera interna se agrupan en el arreglo  $F_i$  de la misma forma como se hace para la frontera externa, resultando que el sentido de la agrupación es en este caso contrario al de las manecillas del reloj.

En la fig 3.8 se ilustra una malla, donde los nodos denominados como nodos externos o nodos frontera son representados por un semicírculo rodeado por una circunferencia. Se ilustra también en la figura, el número con el que se denomina a cada uno de los nodos de la malla, y para el caso de los nodos externos, se muestra su asignación dentro del arreglo  $F_i$ . Las flechas que aparecen en la mencionada figura indican el orden en el que son almacenados los números de los nodos cu-

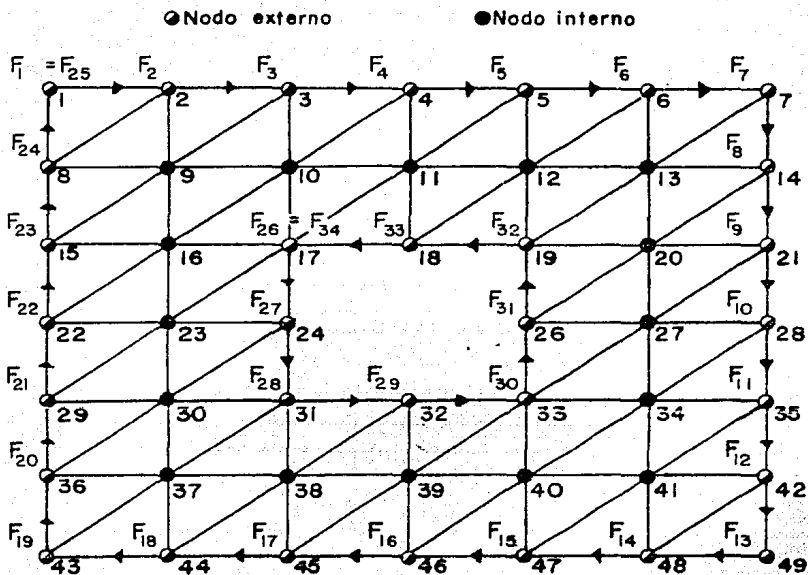


Fig. 3.8

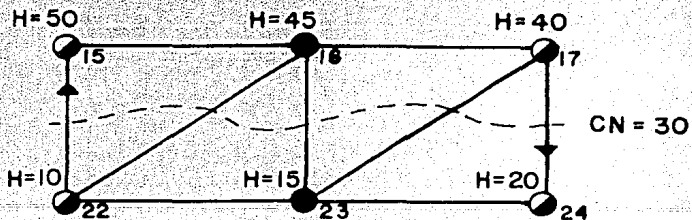


Fig. 3.9

Los enlaces forman la frontera de la malla. Como se puede ver en la fig 3.8, de acuerdo a lo antes mencionado, el sentido de agrupación para los dos tipos de frontera que se distinguieron es diferente, y esto obedece a las dos siguientes razones:

I. El sentido de enlace así implementado permite asegurar que si en algunos de los enlaces de cualquiera de los pares de nodos para ambos tipos de frontera, se cumple la relación 3.5, siempre serán consistentes las fórmulas que se ocuparon para obtener el número del nodo que será el tercer vértice del triángulo inicial dados los números de los nodos que se designaron como S y P (ver fig 3.5). En otras palabras, con esto se evita que se escoja como tercer vértice a uno de los nodos que se declararon como nulos o bien a un nodo cuyo número de denominación sea menor o mayor del rango de números de nodo con los que se está trabajando.

II. La forma como se establecieron los sentidos de agrupación de nodos en el arreglo  $F_1$ , asegura que ninguna curva externa que ya fue generada vuelva a serlo tomando como origen otro segmento de la frontera diferente al que se utilizó para formar el triángulo inicial.

Tómese como referencia el ejemplo mostrado en la fig 3.9 en la cual se ilustra un sector de la malla de la fig 3.8 y supóngase que se desea encontrar la configuración de una curva de nivel tal que  $CN=30.0$ . De la figura se observa que  $H_{22}=10$  y que  $H_{15}=50$  por lo que en la frontera externa, de

acuerdo al sentido en el que fueron agrupados los nodos, la relación 3.5 se plantea de la siguiente manera:

$$\text{¿ } H_{22} \leq CN < H_{15} \text{ ?}$$

que sí se cumple, y se comienza a generar la curva. Por otra parte, si la misma relación se plantea entre los nodos 24 y 17 de la frontera interna en la misma malla, donde  $H_{24}=20$  y  $H_{17}=40$ , se tiene

$$\text{¿ } H_{17} \leq CN < H_{24} \text{ ?}$$

se observa que no se cumple, y que de hecho se presenta la situación totalmente opuesta, lo que significa que el enlace no servirá para generar la curva  $CN=30$ . De haber sido contrario el sentido de agrupación de nodos de la frontera interna al mostrado en la fig 3.10, la curva hubiera sido generada de nuevo.

Como complemento a lo explicado en esta parte, se concluye que en el enlace donde termina de generarse una curva de nivel externa, se presenta la situación totalmente opuesta a aquella para la que se cumpliría la relación 3.5 y que de esta forma se asegura que ninguna curva de nivel externa sea generada dos veces.

### 3.4.3 Rastreo de curvas de nivel internas

Como consecuencia del hecho de que una curva de nivel interna, si ésta existe, debe cerrar dentro de la malla, dicha curva interna nunca intersectará un segmento de la frontera de la malla, y que el menor número de enlaces de la malla que puede intersectar es de seis, De éstos, dos son verticales, dos horizontales y dos diagonales. De esta forma, si se quisiera rastrear una curva de nivel interna CN dentro de la malla, bastaría con examinar sólo uno de los tres tipos de enlaces que existen en la malla. Se eligen arbitrariamente los enlaces horizontales para rastrear a las curvas de nivel internas. De forma similar a como se creó un arreglo de datos para identificar a los enlaces de los nodos de la frontera, para el caso de las curvas internas se define un arreglo denominado  $D_i$  en el que se almacenan los números de todos los nodos de la malla que tienen un nodo a su derecha inmediata con el que se pueden enlazar, descartándose los enlaces de dos nodos externos. El orden en el que se almacenan los números de los nodos de la malla que cumplen con las características arriba descritas, será de izquierda a derecha para cada renglón de la malla, y de arriba hacia abajo de la malla.

Una vez formado el arreglo de nodos, se verifica que el nivel en un nodo cuyo número se asignó al elemento  $D_i$  del arreglo, y el nivel en el nodo a la derecha de éste, es decir, el  $D_{i+1}$  cumplan con la siguiente relación:

$$H_{D_i} \leq CN < H_{D_i+1} \quad (3.6)$$

Y si se comprueba además que el par de nodos de la relación 3.6 no ha sido utilizado para generar otra curva de nivel del mismo valor al de la que se esté rastreando, entonces se definen los vértices del triángulo inicial como:

$$P = D_i \quad \text{y} \quad S = D_i + 1$$

En contraposición a lo que sucede en el caso de las curvas externas, el segmento SP que haya sido elegido para iniciar el proceso de generación de una curva de nivel interna, es el lado común de dos de los triángulos de la malla, por lo que existen dos nodos diferentes que pueden ser escogidos como el tercer vértice del triángulo inicial. Se escoge arbitrariamente como tercer vértice al nodo que esté situado en la misma columna del nodo que se escogió como vértice P y que además se encuentre un renglón abajo de este vértice, esto es  $T = P + m$ . En la fig 3.10 se muestra la forma del triángulo inicial. Al ser identificados los números de los nodos que representan a los tres vértices del triángulo inicial, el proceso de generación de las curvas de nivel se hace como se describe en el inciso 3.3 hasta que los nodos que se designen como vértices P y S del triángulo sean los mismos con los que se inició el proceso, lo que significará que la curva de nivel habrá cerrado, continuándose el proceso de rastreo hasta que se hayan recorrido todos los enlaces horizontales de la

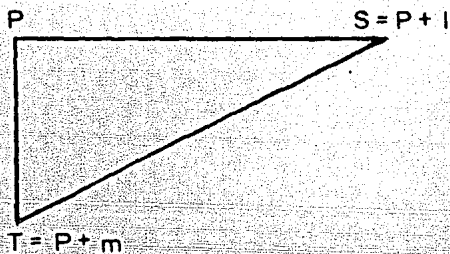


Fig. 3.10

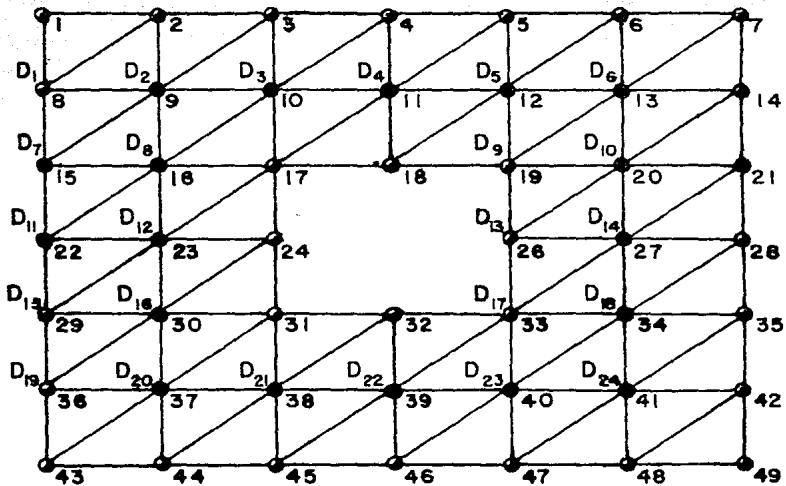


Fig. 3.11



malla.

En la fig 3.11 se identifican los nodos que forman el arreglo  $D_i$  para la malla de la fig 3.8.

### 3.5 Ajuste o suavización de las curvas de nivel

La fig 3.12 muestra la forma como se verían las curvas de nivel para un caso planteado como ejemplo siguiendo el proceso descrito en los incisos anteriores. Se observa que éstas son una sucesión de tramos rectos unidos entre sí. Aunque el aspecto que presentan podría ser suficiente para proporcionar una aceptable configuración de los niveles, se pensó en la posibilidad de que los puntos cuyas coordenadas se obtuvieron pudieran ser entrelazados por curvas en lugar de rectas, y que dichas curvas fueran representadas por una expresión matemática general; para ello se eligió un polinomio de tercer grado. Esta elección fue motivada por el hecho de que el polinomio es una expresión relativamente sencilla de ajustar, además de que por ser de tercer grado, dicho polinomio permite la existencia de un punto de inflexión, y de que se cuenta con la posibilidad de que en dos puntos de dicha curva, el valor de la tangente con respecto a un eje de referencia horizontal sea cero.

La idea es que una vez efectuado el ajuste, la curva de nivel esté formada por una sucesión de diferentes polinomios unidos

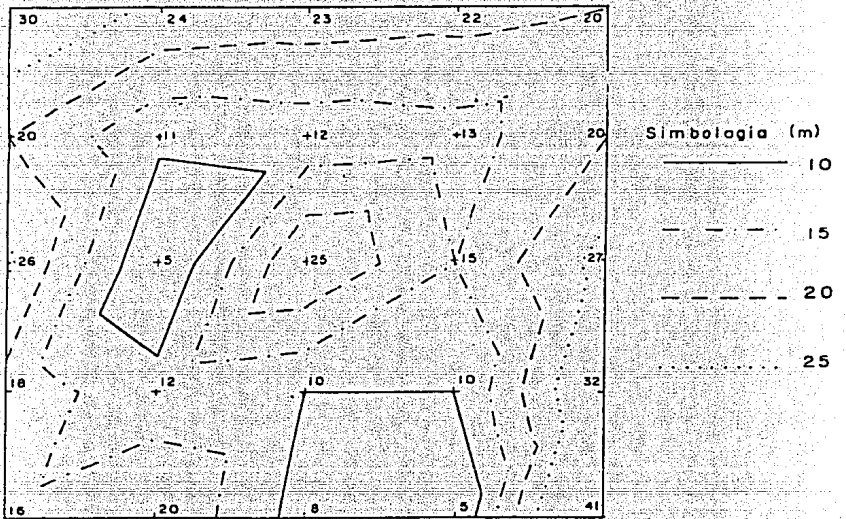


Fig. 3.12

entre sí. Deberá existir continuidad de la recta tangente asociada a la curva de nivel en cada uno de sus puntos, lo que significa que en el punto de la curva de nivel donde se unan dos polinomios diferentes, el valor de la tangente para ambas curvas será el mismo. Para facilitar su obtención, cada uno de los polinomios que se ajusten, se refieren a un par de ejes perpendiculares entre sí que se denominan U y V. Es decir, que para cada par de puntos entre los que se pretenda ajustar un polinomio habrá un sistema de referencia particular.

La dirección del eje U es la del segmento original de cada una de las rectas que se forman al unirse dos puntos cuyas coordenadas fueron obtenidas de acuerdo al proceso descrito en el inciso 3.3. Como se recordará, al calcularse dichas coordenadas, se siguió un orden establecido; es así que el sentido del que se denomina eje U será del punto que se generó primero y que es el origen del sistema U, V al punto que fue generando inmediatamente a continuación, lo cual implica que el ajuste se efectúa en la parte positiva del eje U. Por otro lado, la parte positiva del eje V estará a  $90^\circ$  medidos en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la parte positiva del eje U. Este cambio de referencia que es inherente a cada par de puntos que se pretende ajustar obedece a que sería muy complicado el ajuste de toda la curva de nivel en su conjunto conservado un mismo sistema de referencia debido a que las curvas de nivel suelen adoptar

formas caprichosas y variadas muy difíciles de describir en una sola expresión matemática. Para cumplir los requerimientos de continuidad tanto de la curva como de la tangente asociada, es necesario, al ajustar dos puntos a un polinomio, conocer las coordenadas de otros dos puntos adyacentes a los primeros, de lo que se concluye que son necesarios cuatro puntos para llevar a cabo el procedimiento de ajuste que se detalla a continuación.

Supóngase que se tienen tres segmentos de recta, generados por cuatro puntos de coordenadas  $X, Y$  conocidas, unidos uno tras otro de acuerdo a un orden preestablecido. Cada uno de los cuatro puntos pertenecen a la misma curva de nivel. Considerando el orden en que fueron generados, estos cuatro puntos se denominan con los siguientes índices:  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$  e  $i+2$ , donde el punto  $i-1$  fue el primero en ser generado, y el  $i+2$  fue el cuarto en generarse. Se pretende ajustar un polinomio de tercer grado entre los puntos  $i$  e  $i+1$ .

El primer paso es transformar las coordenadas  $X, Y$  de cada uno de los cuatro puntos, al sistema de referencia  $U, V$  formado como ya se explicó para el par de puntos entre los cuales se desea efectuar el ajuste. En la fig 3.13 se muestran ambos sistemas de referencia. Para estos cuatro puntos, las coordenadas  $U, V$  se obtienen a partir de las coordenadas  $X, Y$  originales mediante la siguiente matriz de transformación:

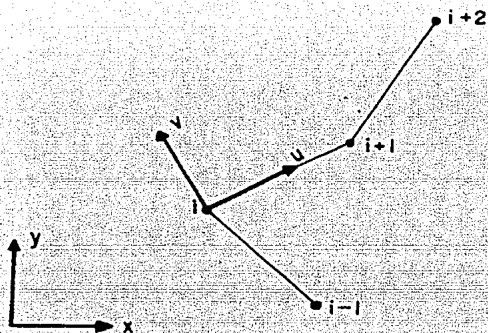


Fig. 3.13

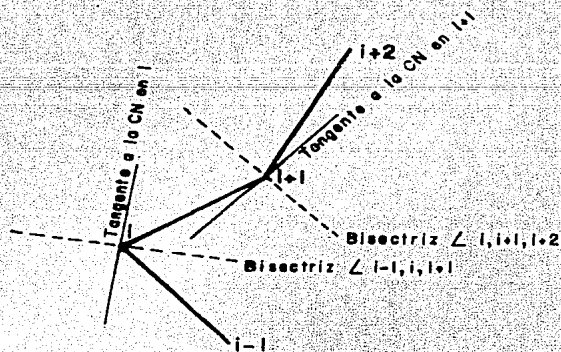


Fig. 3.14

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{bmatrix}$$

Donde  $x_i, y_i$  son las coordenadas X, Y del punto  $i$  que es el origen del sistema U, V es decir, que  $u_i = v_i = 0$ . Y, por otra parte,

$$\phi = \text{ang tan} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (3.7)$$

tal que  $0^\circ < \phi \leq 360^\circ$

Una vez establecido el nuevo sistema de referencia, el polinomio de ajuste será para cada par de puntos  $i$  e  $i+1$  de la forma:

$$v(u) = a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4 \quad (3.8)$$

El efectuar el ajuste implica la obtención del valor de cada uno de los coeficientes  $a_j$  de la ec 3.8, que debido a la condición de continuidad de la curva de nivel deberá incluir a los puntos  $i$  e  $i+1$ , lo que se traduce, debido a la transformación de ejes en:

$$v(u_i) = 0 \quad (3.9)$$

$$v(u_{i+1}) = 0 \quad (3.10)$$

Por otra parte, la condición de continuidad de la recta tangente a la curva de nivel se plantea de la siguiente manera.

En todos los puntos donde se unirán dos polinomios diferentes y que se denominan puntos de unión, la recta tangente a la curva de nivel será la perpendicular a la bisectriz de las dos rectas que se intersectan en ese punto y que son generadas con los dos puntos inmediatos al punto de unión, de la forma como se indica en la fig 3.14. Con base en esto, la recta así elegida formará un mismo ángulo agudo, con respecto a cada uno de los segmentos de la recta cuya intersección es el punto de unión. La tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta elegida como tangente a la curva de nivel en cada uno de los puntos de unión medido con respecto a la parte positiva del eje U en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, será el valor de la derivada del polinomio de ajuste con respecto a la variable U.

Con el objeto de determinar dicho valor para cada uno de los puntos de unión se hace lo siguiente: Tómese como referencia la fig 3.15 donde se representa cada uno de los tramos rectos de la fig 3.13 como vectores, para los que el sentido estará determinado de acuerdo al orden como fueron generados los puntos que definen dichos vectores. Se denomina con la letra  $\beta$  al ángulo que forma el vector  $\overline{i-1, i}$  con respecto al vector  $\overline{i, i+1}$  medido a partir de este último en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. De forma similar, el ángulo  $\gamma$  es el ángulo que se forma entre los vectores  $\overline{i+1, i+2}$  e  $\overline{i, i+1}$  medido en el mismo sentido del ángulo  $\beta$ , a partir del vector  $\overline{i, i+1}$ .

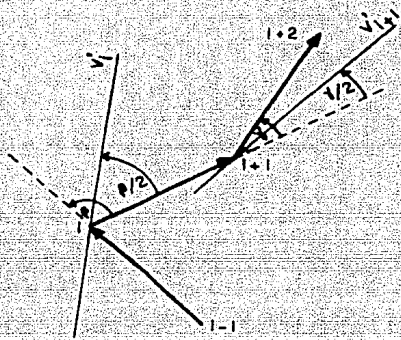


Fig. 3.15

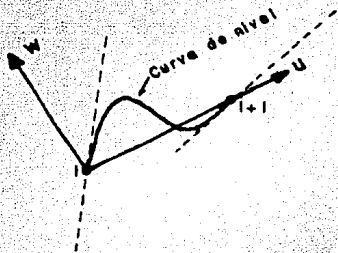


Fig. 3.16



Si se recuerda que el vector  $\overline{i, i+1}$  tiene la misma dirección y el mismo sentido que la parte positiva del eje U, entonces el valor de la derivada del polinomio 3.8 con respecto a U para cada uno de los dos puntos entre los que se realiza el ajuste es:

$$v'(u_i) = \tan(\beta/2) \quad (3.11)$$

$$v'(u_{i+1}) = \tan(\gamma/2) \quad (3.12)$$

De acuerdo con esto, se procede a obtener el valor de los coeficientes del polinomio. Con la ec 3.9 sustituida en la ec 3.8 donde  $u=u_i=0$ , se tiene que:

$$a_4 = 0 \quad (3.13)$$

La derivada del polinomio 3.8 con respecto a u es:

$$v'(u) = 3a_1 u^2 + 2a_2 u + a_3 \quad (3.14)$$

Sabiendo el valor de  $u_i=0$  y usando la ec 3.11 se tiene que:

$$a_3 = \tan(\beta/2) \quad (3.15)$$

Conociendo los valores de los coeficientes  $a_4$  y  $a_3$ , los dos coeficientes restantes se calculan al resolver el sistema de ecuaciones lineales representado por las ecs 3.16 y 3.17 obtenidas de la siguiente manera. Para  $u=u_{i+1}$  y sustituyendo este valor en la ec 3.8 y con la ec 3.10, resulta

$a_1 u_{i+1}^3 + a_2 u_{i+1}^2 + a_3 u_{i+1} = 0$  y puesto que de la ec 3.15 se conoce el valor de  $a_3$ , después de simplificar

$$a_1 u_{i+1}^2 + a_2 u_{i+1} = -\tan(\beta/2) \quad (3.16)$$

por otro lado, de las ecs 3.14 y 3.12 se tiene

$$3a_1 u_{i+1}^2 + 2a_2 u_{i+1} = \tan(\gamma/2) - \tan(\beta/2) \quad (3.17)$$

que al resolverse resulta

$$a_1 = \frac{\tan(\gamma/2) + \tan(\beta/2)}{u_{i+1}^2} \quad (3.18)$$

$$a_2 = \frac{-\tan(\gamma/2) - 2\tan(\beta/2)}{u_{i+1}} \quad (3.19)$$

Se concluye que el polinomio cuyos coeficientes se obtienen como se acaba de detallar, cumple con los requerimientos de continuidad de la curva de nivel y de la tangente asociada a ésta.

Sin embargo, el polinomio así ajustado, puede ocasionar que las curvas de nivel se crucen, convirtiéndose esto en un problema que no se puede evitar de acuerdo a las condiciones como se planteó el ajuste.

Por esta razón se introdujo una modificación al polinomio con el fin de que la distancia máxima que tuviera la curva de nivel, representada por una expresión matemática, con respecto al eje U, fuera acotada de acuerdo a un límite establecido

sin que se pierdan las propiedades de continuidad en los extremos. Después de probar varias opciones, la modificación que aquí se propone al polinomio original de ajuste es la siguiente. Se define una nueva función  $w$  tal que

$$w = \frac{\tanh(\alpha v)}{\alpha} \quad (3.20)$$

Se eligió a la función anterior para modificar al polinomio de ajuste por dos razones; la primera fue el hecho de que si el valor de  $v$ , es decir, del polinomio, tiende al infinito, el valor de  $w$  tenderá a un límite fijo, esto es

$$\lim_{v \rightarrow \infty} w = \frac{1}{\alpha}$$

la segunda razón es que la función 3.20 satisface los requerimientos de continuidad en los puntos  $i$  e  $i+1$ , tal y como se demuestra a continuación. Como se sabe, de las ecs 3.9 y 3.10 el valor de  $v$  en los puntos de unión del polinomio de ajuste es cero, de tal manera que para ambos casos se tiene

$$w = \tanh(0) = 0$$

con lo que se comprueba que  $v$  es igual a  $w$  en los puntos extremos.

En lo concerniente a la derivada

$$\frac{dw}{du} = \frac{dw}{dv} \frac{dv}{du} \quad (3.21)$$

donde  $\frac{dv}{du}$  es la derivada del polinomio original cuya ecuación es la 3.14 y que se ajustó de tal manera que dicha derivada fuera continua para todos los puntos de la curva de nivel, entonces si

$$\frac{dv}{dw} = \frac{1}{\cosh^2(\alpha w)}$$

y se sabe que para  $w=0$ ,  $\cosh^2(0)=1$ , la ec 3.21 resulta

$$\frac{dw}{dv} = \frac{dv}{du} \quad (3.22)$$

que es la derivada del polinomio ajustado originalmente, lo cual asegura que la derivada es continua en los extremos.

Resumiendo, la expresión matemática general que describe el comportamiento de cualquier tramo de la curva de nivel es:

$$W = \frac{\tanh(\alpha(a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u))}{\alpha} \quad (3.23)$$

lo que significa que el eje inicialmente denominado como  $v$  pasa a ser el  $W$ . En tanto que  $\alpha$  es el llamado factor de ajuste, y debe ser elegido de tal manera, que ninguna de las diferentes curvas de nivel cuya configuración se obtenga, se cruce o se superponga.

Como el archivo de datos que contenga la configuración de

las curvas de nivel debe estar referido a un sistema X,Y común a todos los tramos de la curva de nivel, las coordenadas U,W de todos los puntos que se generen para todos los tramos de ajuste, deben ser transformados al sistema X,Y de acuerdo a la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

De esta manera, se generarán tantos nuevos puntos con coordenadas X,Y como sean necesarios entre cada par de puntos  $i$  e  $i+1$  para lograr una aceptable configuración de la curva de nivel.

En la fig 3.16 se muestra un tramo para una curva de nivel ajustada usando la ec 3.23, en tanto que en la fig 3.17 se muestran las curvas de nivel ya suavizadas para la misma malla de la fig 3.12 donde  $\alpha=30$ .

### 3.6 Obtención de la envolvente de la malla

Dentro de la malla de resultados de los modelos hidrodinámicos de lagunas, cada nodo representa un sector rectangular de la superficie de la laguna, dicho nodo está localizado al centro del rectángulo tal y como lo muestra la fig 3.18. En general, puede ser necesario conocer el valor del nivel en cada uno de los cuatro vértices del rectángulo.

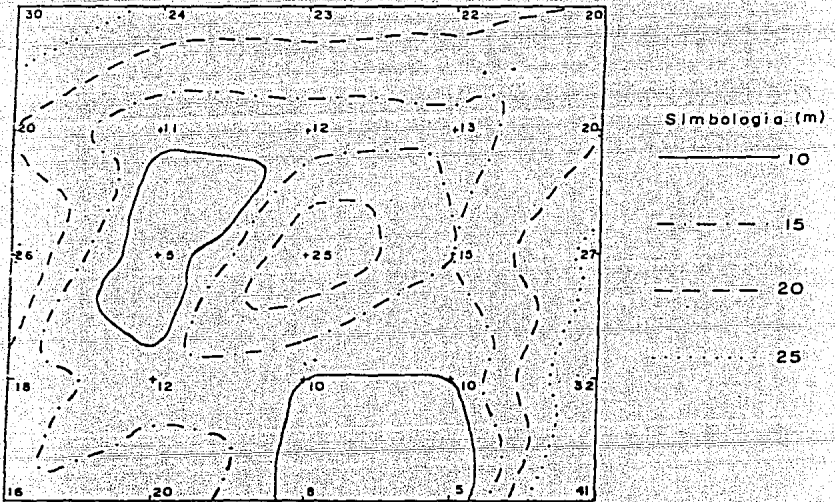


Fig. 3.17

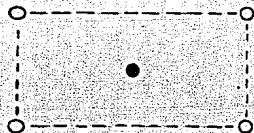


Fig. 3.18

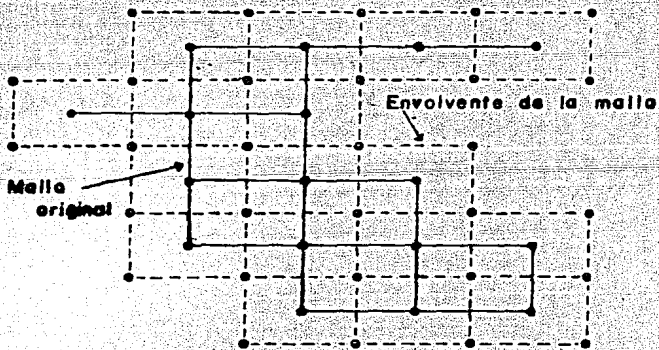


Fig. 3.19

Estos vértices forman otra malla diferente a la original, en la fig 3.19 se muestran ambas mallas, donde los vértices de los rectángulos están presentados por una circunferencia con un punto al centro. En esta figura, la línea punteada representa a los lados de los rectángulos en los que se discretizó la laguna. Las dos mallas de la fig. 3.19 fueron unidas para formar una sola; al hacer esto, y debido a que el programa que se describe en este capítulo trabaja con base a un arreglo matricial de datos, se hizo necesario incluir nodos adicionales a los correspondientes a los vértices de los rectángulos y a los nodos de la malla original. De esta forma, si la malla original tenía  $m$  columnas y  $n$  renglones, la nueva malla tendrá  $2m + 1$  columnas y  $2n + 1$  renglones. Esta nueva malla es mostrada en la fig. 3.20, donde cada uno de los nodos originales, de los cuales se conocen sus coordenadas  $X$ ,  $Y$  y su nivel asociado  $H$ , están representados por un círculo lleno, en tanto que los nuevos nodos se representan por medio de una circunferencia.

Debido a que la nueva malla será la base para generar las curvas de nivel, es necesario obtener las coordenadas y el valor de nivel en cada uno de los nuevos nodos. Esto se realiza teniendo como base los valores conocidos de los nodos originales de acuerdo a lo siguiente

Como se ve en la fig. 3.20 algunos de los nuevos nodos están localizados sobre enlaces de nodos de la malla original, el-



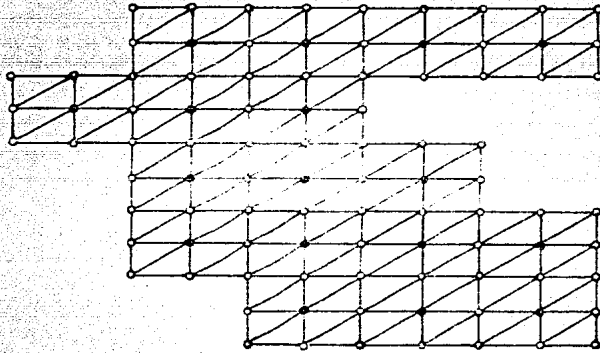


Fig. 3.20

primer paso es calcular las coordenadas X, Y y el nivel H para estos nodos, de acuerdo a las fórmulas que se ilustran a continuación donde

|            |   |
|------------|---|
| $M = 2m+1$ | número de columnas de la nueva malla  |
| $k$        | número del nodo para el que se calculan las coordenadas y el nivel en base a los nodos originales |
| $X_k$      | valor de la coordenada X para el nodo k   |
| $Y_k$      | valor de la coordenada Y para el nodo k   |
| $H_k$      | valor del nivel para el nodo k  |

Enlace horizontal



$$X_k = (X_{k-1} + X_{k+1})/2$$

$$Y_k = Y_{k-1} = Y_{k+1}$$

$$H_k = (H_{k-1} + H_{k+1})/2$$

Enlace vertical

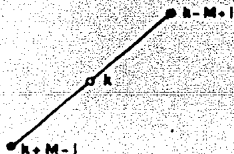


$$X_k = X_{k-M} = X_{k+M}$$

$$Y_k = (Y_{k-M} + Y_{k+M})/2$$

$$H_k = (H_{k+M} + H_{k-M})/2$$

Enlace diagonal

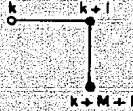


$$X_k = (X_{k+M-1} + X_{k-M+1})/2$$

$$Y_k = (Y_{k+M-1} + Y_{k-M+1})/2$$

$$H_k = (H_{k+M-1} + H_{k-M+1})/2$$

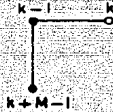
Obtenidos los valores de X, Y y H para los nuevos nodos localizados entre dos nodos de valores conocidos, se obtienen los valores asociados a los nodos restantes de acuerdo a las siguientes fórmulas



$$X_k = X_{k+1} - (Y_{k+1} - Y_{k+M+1})$$

$$Y_k = Y_{k+1}$$

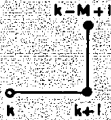
$$H_k = H_{k+1}$$



$$X_k = X_{k-1} + (Y_{k-1} - Y_{k+M-1})$$

$$Y_k = Y_{k-1}$$

$$H_k = H_{k-1}$$



$$X_k = X_{k+1} - (Y_{k-M+1} - Y_{k+1})$$

$$Y_k = Y_{k+1}$$

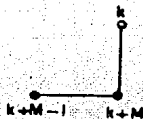
$$H_k = H_{k+1}$$



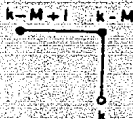
$$X_k = X_{k-1} + (Y_{k-M} - Y_{k-1})$$

$$Y_k = Y_{k-1}$$

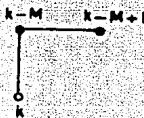
$$H_k = H_{k-1}$$



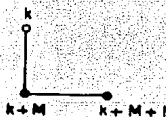
$$\begin{aligned} X_k &= X_{k+M} \\ Y_k &= Y_{k+M} + (X_{k+M} - X_{k+M-1}) \\ H_k &= H_{k+M} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X_k &= X_{k-M} \\ Y_k &= Y_{k-M} - (X_{k-M} - X_{k-M+1}) \\ H_k &= H_{k-M} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X_k &= X_{k-M} \\ Y_k &= Y_{k-M} - (X_{k-M+1} - X_{k-M}) \\ H_k &= H_{k-M} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X_k &= X_{k+M} \\ Y_k &= Y_{k+M} + (X_{k+M+1} - X_{k+M}) \\ H_k &= H_{k+M} \end{aligned}$$



$$X_k = 2X_{k-1} - X_{k-2}$$

$$Y_k = Y_{k-1}$$

$$H_k = 2H_{k-1} - H_{k-2}$$



$$X_k = 2X_{k+1} - X_{k+2}$$

$$Y_k = Y_{k+1}$$

$$H_k = 2H_{k+1} - H_{k+2}$$



$$X_k = X_{k+M}$$

$$Y_k = 2Y_{k+M} - Y_{k+2M}$$

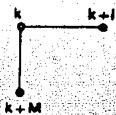
$$H_k = 2H_{k+M} - H_{k+2M}$$



$$X_k = X_{k-M}$$

$$Y_k = 2Y_{k-M} - Y_{k-2M}$$

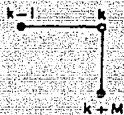
$$H_k = 2H_{k-M} - H_{k-2M}$$



$$X_k = X_{k+M}$$

$$Y_k = Y_{k+1}$$

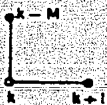
$$H_k = (H_{k+1} + H_{k+M}) / 2$$



$$X_k = X_{k+M}$$

$$Y_k = Y_{k-1}$$

$$H_k = (H_{k+M} + H_{k-1}) / 2$$



$$X_k = X_{k-M}$$

$$Y_k = Y_{k+1}$$

$$H_k = (H_{k-M} + H_{k+1}) / 2$$



$$X_k = X_{k-M}$$

$$Y_k = Y_{k-1}$$

$$H_k = (H_{k-M} + H_{k-1}) / 2$$

#### 4. GRAFICACION DE CAMPOS DE VELOCIDADES

##### 4.1 Introducción

Se denomina campo de velocidades en una laguna, al conjunto de vectores de velocidad asociados a cada uno de los volúmenes de control en los que se divide la laguna y que vistos en planta son de forma rectangular. La función del programa que se describe en este capítulo es la de generar las coordenadas X,Y que representan a los vectores de velocidad en un plano y que son almacenados en un archivo de datos. Al ser graficado este archivo de datos, se muestra la magnitud, dirección y sentido del flujo en una laguna. A continuación se detalla la metodología para obtener la representación del campo de velocidades.

#### 4.2 Características de la malla de datos

La malla de datos tiene las mismas características de la malla que sirve de base para obtener la configuración de los niveles en una laguna, dichas características fueron ya descritas en el capítulo anterior. Sin embargo, para el caso de la graficación de campos de velocidades, a cada elemento rectangular que representa un volumen de control de la laguna están asociados además de las coordenadas  $X, Y$  del centroide de dicho elemento cuatro diferentes valores de velocidad perpendiculares a cada una de las cuatro áreas transversales del volumen de control que vistas en planta son cada uno de los cuatro lados del rectángulo.

Con objeto de identificar cada uno de los cuatro valores de velocidad en un volumen de control,  $k$ , se hace uso de la siguiente nomenclatura.

|           |  |
|-----------|--|
| $V_{k,1}$ | velocidad en el área transversal derecha del volumen de control con la dirección del eje $X$   |
| $V_{k,2}$ | velocidad en el área transversal izquierda del volumen de control con la dirección del eje $X$ |
| $V_{k,3}$ | velocidad en el área transversal superior del volumen de control con la dirección del eje $Y$  |
| $V_{k,4}$ | velocidad en el área transversal inferior del volumen con la dirección del eje $Y$             |



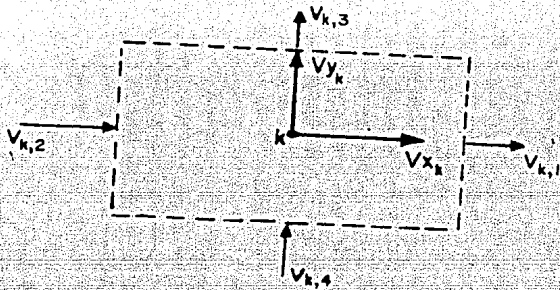


Fig. 4.1

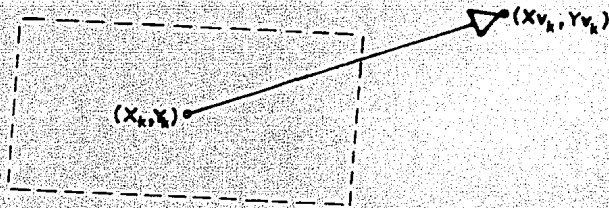


Fig. 4.2

Esta nomenclatura es mostrada en la fig 4.1.

Para el caso de que alguno o algunos de los lados del rectángulo que representa al volumen de control forme parte de una frontera impermeable de la malla, la magnitud de la velocidad perpendicular a dicho lado será igual a cero.

#### 4.3 Obtención de la representación del vector velocidad

Conocidas las magnitudes de las cuatro velocidades asociadas a todos los elementos de la malla, se calculan las velocidades en cada dirección, de la siguiente forma

$$V_{x_k} = (V_{k,1} + V_{k,2})/2 \quad (4.1)$$

$$V_{y_k} = (V_{k,3} + V_{k,4})/2 \quad (4.2)$$

donde

$V_{x_k}$  componente del vector asociado a  $k$  en la dirección  $X$

$V_{y_k}$  componente del vector asociado a  $k$  en la dirección  $Y$

Para las que el sentido se define de acuerdo a la siguiente convención:

si  $V_{x_k} > 0$  entonces el sentido es de izquierda a derecha

si  $V_{x_k} < 0$  entonces el sentido es de derecha a izquierda

si  $V_{y_k} > 0$  entonces el sentido es de abajo hacia arriba

si  $V_{y_k} < 0$  entonces el sentido es de arriba hacia abajo

Se define asimismo

$$V_k = \sqrt{V_{x_k}^2 + V_{y_k}^2} \quad (4.3)$$

$$\phi_k = \text{ang tan } (V_{y_k}/V_{x_k}) \quad (4.4)$$

donde  $V_k$  es la magnitud del vector velocidad en el elemento  $k$  y  $\phi$  indica la dirección y el sentido del vector del mismo elemento y que es medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir de la parte positiva del eje X para un rango entre 0 y 360 grados.

Con el fin de obtener la representación del vector velocidad en el sistema coordenado X,Y, los valores de las componentes de velocidad en ambas direcciones se transforman a coordenadas X,Y mediante las siguientes simplificaciones:

Se acota hasta un cierto límite la magnitud con la que se representa el vector velocidad multiplicando las componentes vectoriales asociadas a cada uno de los elementos de la malla por un factor  $\eta$  obtenido de la siguiente manera

$$\eta = \frac{D_{xy}}{V_{\text{máx}}} \quad (4.5)$$

donde

$V_{\text{máx}}$  mayor magnitud de velocidad que se presenta en la malla

$Dxy = \sqrt{Dx^2 + Dy^2}$  para el que:

$Dx$  longitud promedio de todos los enlaces horizontales que forman los nodos de la malla

$Dy$  longitud promedio de todos los enlaces verticales que forman los nodos de la malla

Lo anterior implica que la mayor magnitud con que se representa cualquiera de los vectores del campo de velocidades no excede el valor de  $Dxy$ . Obtenido el valor de  $\eta$  y conociendo las coordenadas  $X_k$  y  $Y_k$  del centroide del rectángulo  $k$  que son el origen del vector velocidad para ese elemento, se calculan las coordenadas  $Xv_k$  y  $Yv_k$  del extremo del vector de acuerdo a lo siguiente

$$Xv_k = X_k + \eta Vx_k \quad (4.6)$$

$$Yv_k = Y_k + \eta Vy_k \quad (4.7)$$

De tal forma que el vector  $\vec{V}_k$  se representa como

$$\vec{V}_k = \overrightarrow{X_k, Xv_k} + \overrightarrow{Y_k, Yv_k} \quad (4.8)$$

Tanto las coordenadas  $X_k$  y  $Y_k$  como las coordenadas  $Xv_k$  y  $Yv_k$  se almacenan en el archivo de datos y al ser graficadas forman una línea recta. Finalmente, se generan las coordenadas

para formar un pequeño triángulo equilátero del cual uno de sus lados es perpendicular al vector  $\vec{V}_k$  y además el vértice del triángulo opuesto a dicho lado es el punto de coordenadas  $x_{v_k}, y_{v_k}$ . De esta forma, el aspecto del conjunto de línea recta y triángulo es el de una flecha, misma que servirá para indicar el sentido del vector velocidad en el elemento  $k$ . Asimismo, para el campo de velocidad se muestra la equivalencia en m/s de la escala de velocidades con la que se trabajó. En la fig 4.2 se ilustra la forma como se obtiene la representación del vector velocidad para un volumen de control cualquiera en la laguna de acuerdo a lo explicado en este inciso.

## 5. APLICACIONES

### 5.1 Planteamiento del problema

Para ejemplificar la graficación por computadora de resultados de modelos hidrodinámicos de lagunas se trabaja con la laguna ilustrada en la fig 5.1.

La laguna es una laguna costera y cuenta con dos islas internas, en este caso los flujos se presentan como consecuencia del efecto de la marea en la zona donde la laguna comunica con el mar.

Con el objeto de simular el comportamiento con el modelo hidrodinámico, la laguna se divide en cuarenta y cuatro elementos que en este caso son cuadrados y se numeran tal y como lo muestra la fig 5.1.

|   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
|   |   | 7  | 12 | 18 | 25 | 31 | 37 |    |
|   | 3 | 8  | 13 | 19 | 26 | 32 | 38 | 88 |
| 1 | 4 |    | 14 | 20 | 33 | 39 | 89 |    |
| 2 | 5 |    |    | 21 | 27 | 34 | 40 | 90 |
|   | 6 | 9  | 15 | 22 | 28 | 35 | 41 |    |
|   |   | 10 | 16 | 23 | 29 | 36 |    |    |
|   |   | 11 | 17 | 24 | 30 |    |    |    |

Fig. 5.1

Los elementos de la laguna que conectan con el mar y para los que se conoce la variación del nivel en el tiempo son los elementos 88, 89 y 90; dicha variación está representada por los mareogramas que se muestran en la fig 5.2, en esta figura el mareograma del elemento 90 es idéntico al del elemento 88. Se desea conocer el comportamiento del agua en la laguna como consecuencia de la variación del nivel en los elementos que conectan con el mar.

Los datos de la laguna para efectuar la simulación son los siguientes:

|                                       |         |
|---------------------------------------|---------|
| número de elementos                   | 44      |
| número de elementos de nivel conocido | 3       |
| incremento de tiempo                  | 600.0 s |
| tiempo inicial                        | 0:00 h  |
| tiempo final                          | 24:00 h |

Todos los elementos de la laguna son cuadrados con lado igual a 2000 m; el coeficiente de rugosidad de Chezy es de  $30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$  para todos los elementos; la batimetría de la laguna se ilustra en la fig 5.3, misma que fue obtenida por computadora usando el programa para graficar niveles cuyo algoritmo se describe en el capítulo 3. Se considera que al iniciar la simulación, el nivel en todos los elementos de la laguna es igual a cero.



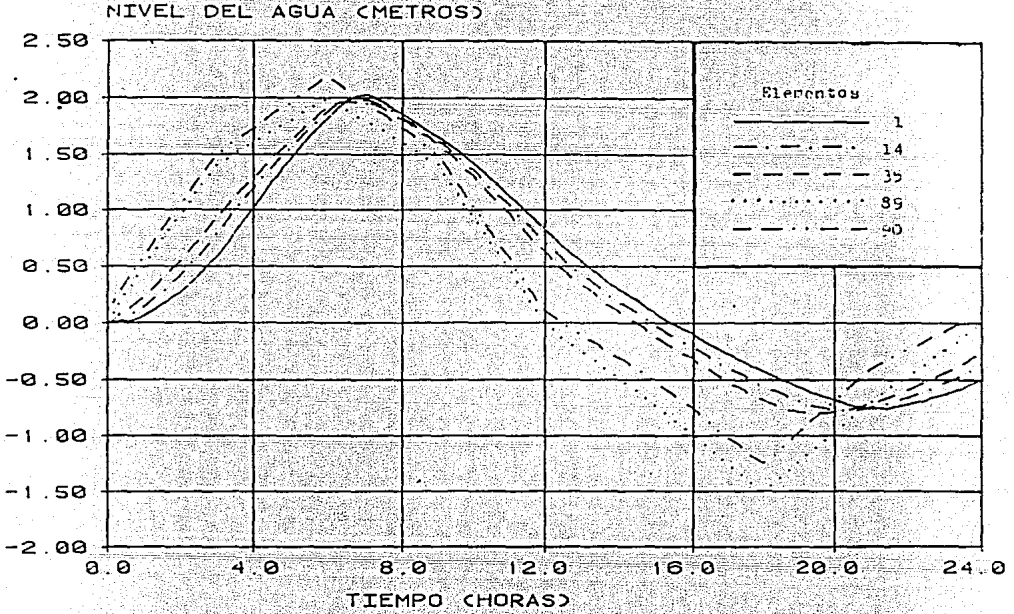


Fig. 5.2

## BATIMETRIA DE LA LAGUNA

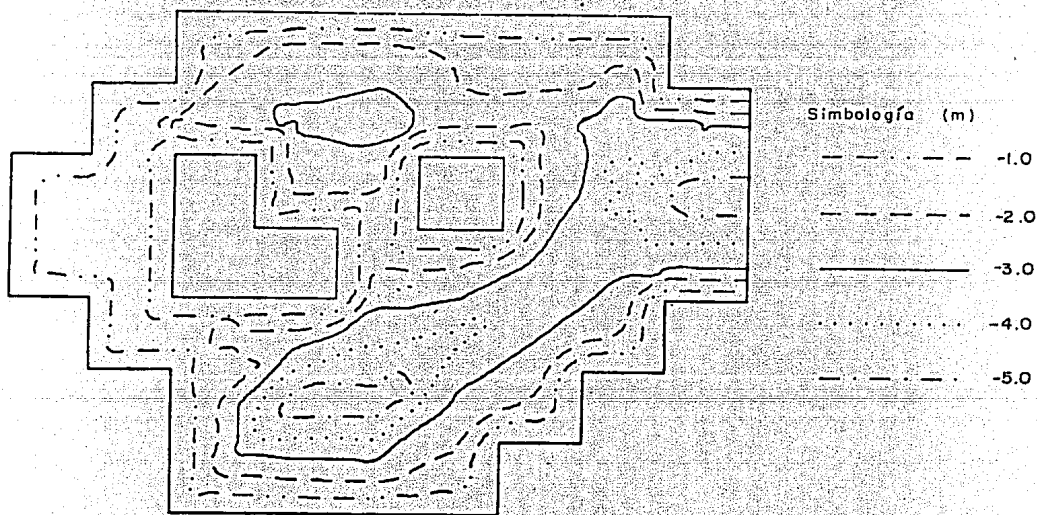


Fig. 5.3

## 5.2 Resultados

Se describen a continuación cada una de las gráficas obtenidas por computadora y que ilustran la variación de niveles y de velocidades en la laguna durante el tiempo de simulación.

### 5.2.1 Variación de niveles en el tiempo

En la fig 5.2 se muestra, además de los mareogramas para los elementos de nivel conocido, la variación del nivel calculada para los elementos 1, 14 y 35. Para esta condición de mareas, la mayor diferencia entre el nivel de dos elementos en la laguna durante el periodo de simulación se presenta entre los elementos 1 y 89 a las 18:00 horas y dicha diferencia es de 1.076 m como se puede comprobar en la fig 5.2. Por otra parte, el mayor desfase entre dos niveles es de casi cuatro horas también entre los elementos 1 y 89; como se observa en la fig 5.2, si a partir de las 18:00 horas el nivel en el elemento 89 comienza a aumentar no es sino hasta casi las 22:00 horas que en el elemento 1 comienza a suceder lo mismo.

Otro aspecto importante que resalta de la fig 5.2 es el de que el desfase entre los puntos máximos de las cinco curvas mostradas es menor al correspondiente al de los puntos mínimos de las mismas curvas, esto significa que la laguna tarda más en vaciarse que en llenarse, esta situación es provocada por las características de la marea, ya que la media

de los mareogramas es mayor a cero.

### 5.2.2 Campos de velocidades

En la fig 5.4 que corresponde a las 2:00 horas de la simulación se observa la dirección del flujo en la laguna al comenzar a aumentar el nivel en todos los elementos como consecuencia de la entrada del agua a través de los elementos que ligan con el mar, se observa que la dirección del flujo es del mar hacia el interior de la laguna. Para este instante la velocidad máxima es de 0.41 m/s y se presenta en el elemento 40.

De la fig 5.2 se deduce que después de las 8:00 horas el nivel en todos los elementos de la laguna después de haber alcanzado un valor máximo (de entre 1.8 y 2.2 m) comienza a descender, lo que es corroborado por el cambio de dirección del flujo que se observa en la fig 5.5 en que el flujo es de la laguna hacia el mar, es decir, que la laguna ha comenzado a disminuir su volumen, esta situación continúa hasta las 18:00 h cuando el nivel en los elementos que conectan con el mar comienza a aumentar. Para las 20:00 h, fig 5.6, la magnitud de la velocidad en casi todos los elementos es muy pequeña, lo que indica que para este instante el sentido del flujo en toda la laguna comienza a cambiar. En la fig 5.7, que corresponde a las 24:00 h, se ve que al aumentar el nivel del agua en todos los elementos, el sentido del flujo en toda

2:00 HORAS

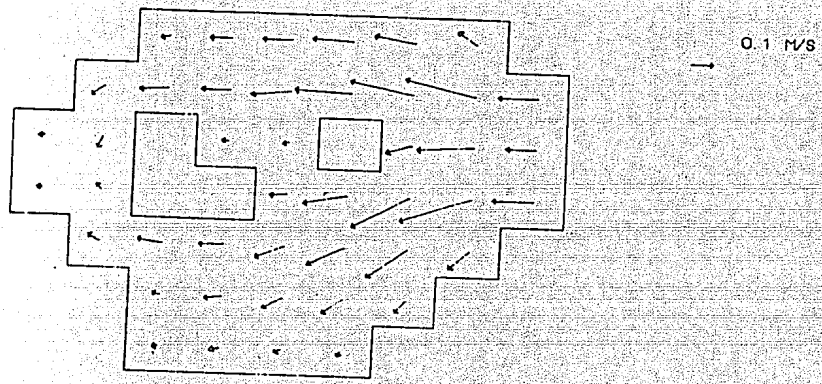


Fig. 5.4

8:00 HORAS

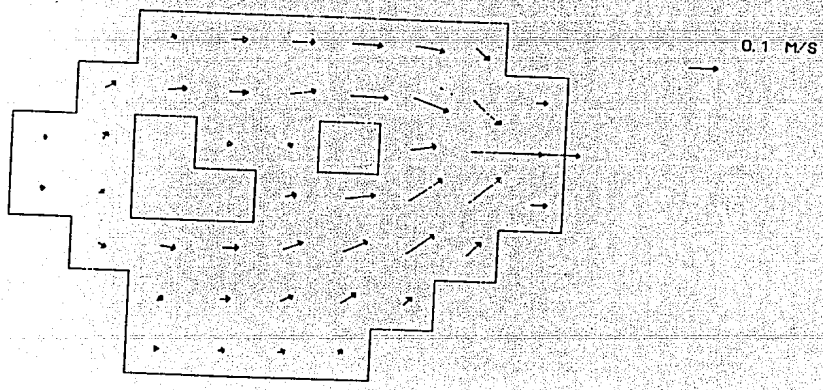


Fig. 5.5

20:00 HORAS

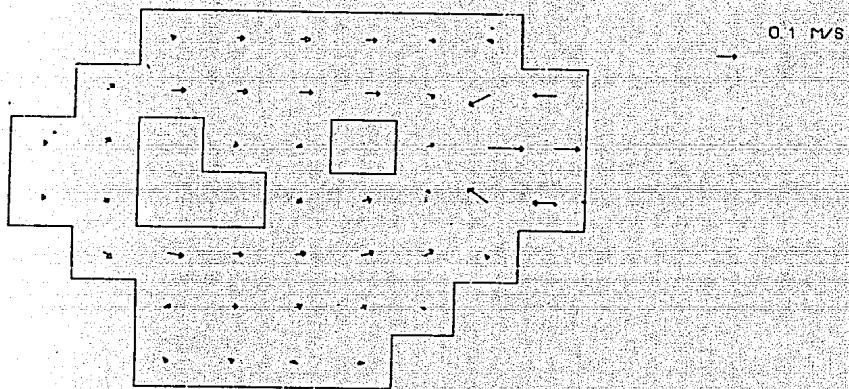


Fig. 5.6

24:00 HORAS

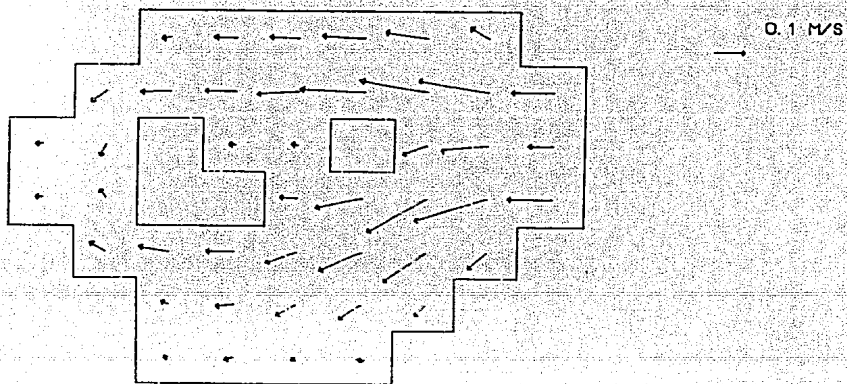


fig. 5.7

la laguna es de nuevo del mar hacia ésta.

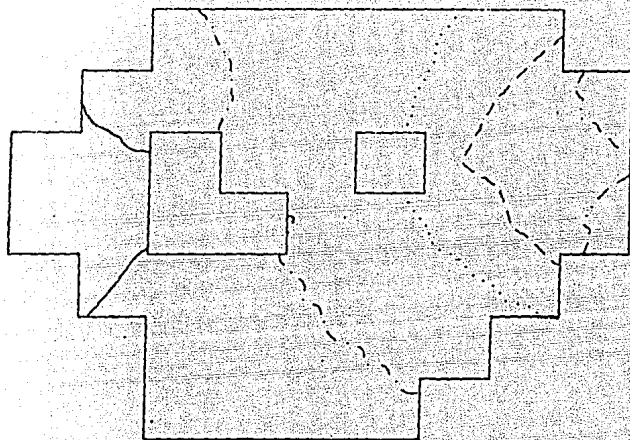
### 5.2.3 Niveles en la laguna

En las figs 5.8 a 5.11 se observa la variación bidimensional de los niveles en la laguna para cuatro diferentes horas.

En la fig 5.8 que corresponde a las 2:00 h se aprecia que existe una diferencia considerable entre los niveles de la laguna, al comenzar a aumentar el volumen del agua. Mientras en los elementos que conectan con el mar el nivel del agua es de alrededor de un metro en los elementos del extremo opuesto el nivel del agua es menor a los treinta centímetros. Para las 12:00 h como se ve en la fig 5.9 al comenzar a vaciarse la laguna, los elementos de mayor nivel son los que se encuentran del lado opuesto a la entrada del mar hacia la laguna. La fig 5.10 representa la configuración de niveles en la laguna a las 18:00 h, tiempo para el cual se presenta la mayor diferencia en los niveles de uno y otro extremo de la laguna. Finalmente, en la fig 5.11 se ilustran los niveles de la laguna al terminar el periodo de la simulación, es decir, a las 24:00 h.

Como se observa en las últimas cuatro figuras, la variación más considerable de niveles en la superficie de la laguna se presenta entre la boca de la laguna y la isla que se encuentra más cerca del mar, en tanto que en el resto de la laguna

2:00 HORAS



Niveles (m.)

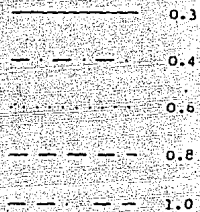
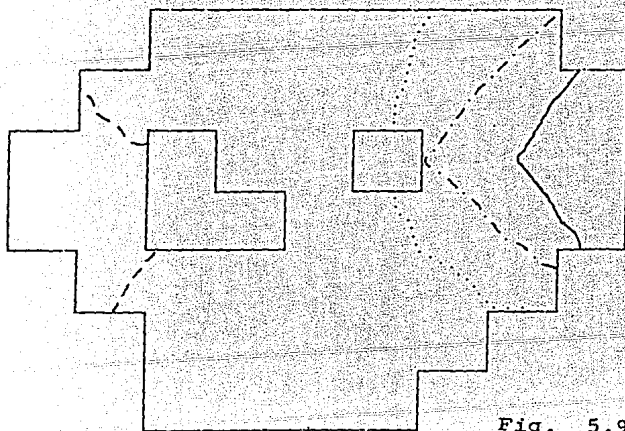


Fig. 5.8

12:00 HORAS



Niveles (m.)

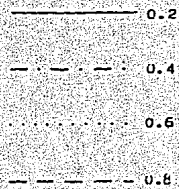


Fig. 5.9



18:00 HORAS

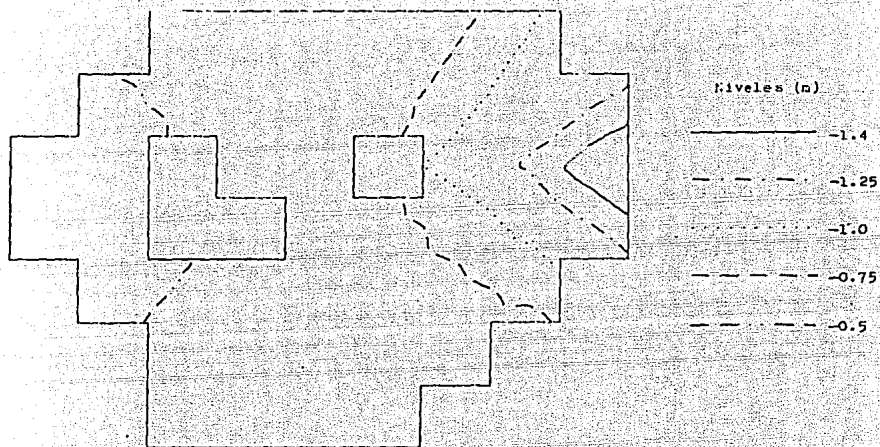


Fig. 5.10

24:00 HORAS

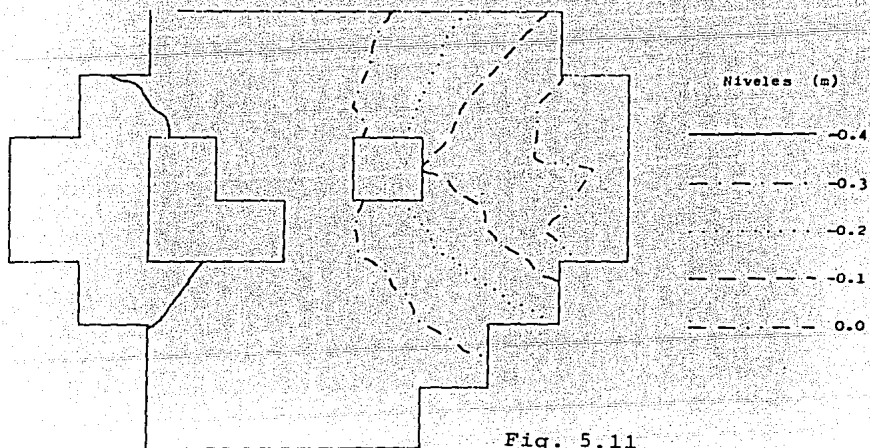


Fig. 5.11

la variación de los niveles es menor; esto se debe principalmente a la presencia de las dos islas.

## 6. CONCLUSIONES

Se considera que los algoritmos descritos en los capítulos 3 y 4, que fueron desarrollados por el autor de la presente tesis, constituyen un complemento muy importante al modelo hidrodinámico de lagunas cuya base matemática se explicó brevemente en el capítulo 2. La forma como se representa gráficamente tanto a los campos de velocidades como a los niveles ayuda a que la comprensión de un problema cuya solución requiera del estudio del comportamiento del agua en una laguna sea mucho más sencilla. Asimismo, las gráficas se convierten en una herramienta invaluable para modificar el planteamiento inicial del problema, ya sea en los datos, la formulación de las condiciones de frontera, el establecimiento de la malla, etc.

La forma como se generan los archivos de graficación de campos

de velocidades y niveles es bastante rápida y eficiente.

Los algoritmos de graficación también pueden ser de utilidad como complemento al cálculo de hidrodinámica de zonas costeras.

Aunque la motivación para realizar el programa que obtiene la configuración de niveles fue la de servir de apoyo al algoritmo que resuelve los modelos hidrodinámicos de lagunas, dicho programa está adaptado para obtener las isolíneas de cualquier conjunto de datos que formen una malla con las características descritas en el capítulo 3; se considera por lo tanto, que el programa que genera archivos de datos para obtener la configuración de los niveles puede ser de utilidad en otras áreas de la Ingeniería Civil y en particular para problemas que se resuelven mediante el empleo del método del elemento finito.

Los programas de generación de curvas de nivel y de campos de velocidades están adaptados para trabajar con el paquete de biblioteca mediante el cual se grafican archivos de datos en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, sin embargo, ambos programas pueden ser adaptados para trabajar con diferentes programas de graficación.

Los programas cuyos algoritmos se describen en esta tesis se encuentran disponibles como paquetes de biblioteca en el Ins-

tituto de Ingeniería de la UNAM.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Cruickshank C y Zumaya E (1974) "Simulación matemática del flujo de avenidas sobre llanuras de inundación", Memorias del IV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Colombia.

Berezowsky M, "Modelo matemático para la simulación del flujo en llanuras de inundación", Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica.

Berezowsky (1982) "Esguerrimiento a superficie libre cap. A. 2.9 del Manual de Diseño de Obras Civiles de C.F.E. México, Sao Paulo, Brasil.