

2ej
8



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

El Lema de Sperner y el
Teorema del Punto
Fijo de Brouwer

T E S I S

Que para obtener el título de:

MATEMATICO

Presenta:

FRANCISCO JAVIER HERNANDEZ VELASCO

MEXICO, D.F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

I. INTRODUCCION	I-1
Capítulo 1. PRELIMINARES.	
1.1 Definición y Notación	1
1.2 Subdivisión y Etiquetamiento.....	6
1.3 El lema de Sperner.....	11
Capítulo 2. MAPEOS DE VERTICES	
2.1 Mapeos de vértices simpliciales.....	13
2.2 Mapeos de vértices cúbicos.....	30
Capítulo 3. EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER	
3.1 Demostración del teorema.....	34
3.2 Demostración del teorema de Brouwer utilizando el lema de Sperner.	37
3.3 El teorema del punto fijo de Brouwer implica al lema de Sperner.	42
Capítulo 4. EL LEMA DE FAN.	
4.1 El lema de Fan.	46
4.2 El lema de Fan y su relación con el teorema del punto fijo de Brouwer.	57
4.3 Una prueba del teorema fundamental del álgebra mediante el lema de Sperner.	61
BIBLIOGRAFIA	71

INTRODUCCION

En la presente tesis se prueba la equivalencia entre el lema de Sperner (de naturaleza combinatoria) y el teorema del punto fijo de Brouwer (de naturaleza topológica). Se analiza además el lema de Fan y su relación al mismo teorema, probandose en particular, que el lema de Fan lo implica. Finalmente, mediante el lema de Sperner se da una demostración del teorema fundamental del álgebra.

El primer capítulo presenta las definiciones de los principales conceptos que serán utilizados. En particular establece lo que se entenderá por una subdivisión y etiquetamiento, de acuerdo a Sperner, de una poligonal. Así pues, diremos que la subdivisión mostrada en la figura 1.a es de Sperner, mientras que las mostradas en las figuras 1.b y 1.c no lo son.

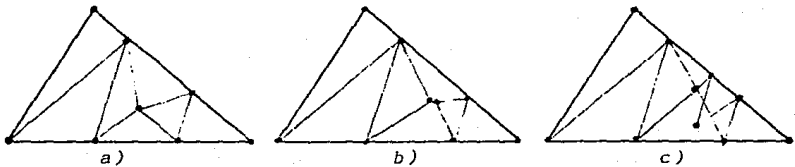


Figura # 1.

Intuitivamente una subdivisión será de Sperner cuando dado dos triángulos distintos de la subdivisión se satisface alguna de las tres condiciones siguientes:

- 1.- Son ajenos
- 2.- Tienen un lado en común.
- 3.- Tienen sólo un vértice común.

Ahora bien, la regla para etiquetar los vértices consiste en: A los vértices del triángulo original se le asignan cualesquiera de las etiquetas 0, 1 y 2. A aquellos vértices de los triángulos de la subdivisión, que caen sobre el lado cuyos vértices fueron etiquetados con 0 y 1, podrán ser etiquetados con 0 o 1, procediéndose en forma análoga en los dos casos restantes. Por último los vértices interiores de la subdivisión se les podrá asignar cualesquiera de las etiquetas 0, 1 o 2. El lema de Sperner asevera que existe al me-

nos un triángulo de la subdivisión con vértices etiquetados con 0,1 y 2.

En el segundo capítulo se recuerda lo que es un n -simplejo y un conjunto primitivo. En la sección 2.1 se prueba que en todo n -simplejo existe un conjunto primitivo en donde todos sus vértices tienen índices diferentes. En la sección 2.2 mapeos de vértices cúbicos, se dan las definiciones que se usaran y el significado de cada uno de ellos a través de ejemplos. Los cubos de n dimensiones se denotaran con A^n y por ζ^n al n -cubo que ha sido dividido en sus caras de todas dimensiones. Un mapeo de vértices cúbicos es una función $\phi: A^n \rightarrow \zeta^m$ que satisface, dado dos vértices adyacentes $u, v \in A^n$, $\phi(u)$ y $\phi(v)$ coinciden o son vértices adyacentes. El resultado central es que si ϕ es un mapeo de vértices cúbico, entonces el número de n -cubos cuyos vértices son llevados bajo ϕ en forma inyectiva a los vértices de una n dimensional F , es congruente modulo 2 al número de $(n-1)$ -cubos cuyos vértices son enviados bajo ϕ en forma inyectiva a los vértices de la cara $(n-1)$ -dimensional que corresponde a F . En particular se prueba que el número de n -cubos completamente etiquetados es congruente modulo 2 al número de $(n-1)$ -cubos cuyos vértices son llevados bajo ϕ a una cara de A^n .

Esto nos lleva a establecer el lema de Fan [3]. Este establece que: En un cuadrado con vértices etiquetados $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ se divide en cuadrados cuyos vértices son etiquetados con las etiquetas antes mencionadas, con las siguientes restricciones, los vértices que caen sobre el segmento cuyos extremos fueron etiquetados con $(0,0)$ y $(1,0)$ serán etiquetados con $(0,0)$ o $(1,0)$, en los tres casos restantes se procede en la misma forma. Los vértices interiores se etiquetaran teniendo en cuenta que los vértices vecinos deben tener etiquetas vecinas o la misma etiqueta (no son etiquetas vecinas $(0,0)$ y $(1,1)$, $(0,1)$ y $(1,0)$). Lo que afirma el lema de Fan es, en la cuadrícula existe un cuadrado cuyos vértices tienen un conjunto completo de etiquetas.

En el capítulo III, se estudia el teorema del punto fijo de Brouwer y su equivalencia con el lema de Sperner. Primero se establece el teorema del punto fijo, el cual, en palabras sencillas afirma; Una función continua de la esfera (de n dimensiones) en si misma tiene al menos un punto fijo. La prueba esta basada en el hecho de que no existe un retracto continuo de la esfera en su frontera, puesto que si se supone la existencia de una función continua de la esfera en si misma sin puntos fijos, se puede generar un retracto continuo de la esfera en su frontera. Posteriormente, en la sección 3.2, se prueba el

teorema de punto fijo usando el lema de Sperner. Para ello se asume la existencia de una función sin puntos fijos del triángulo en el triángulo y se muestra que induce una subdivisión y etiquetamiento, respetando la regla de Sperner, sin un triángulo de la subdivisión completamente etiquetado.

Para finalizar el capítulo se prueba que, el teorema del punto fijo implica el lema de Sperner, y por lo tanto son equivalentes.

En el capítulo IV, se prueba nuevamente el lema de Sperner, pero ahora siguiendo las ideas que nos ayudaran a establecer y demostrar el lema de Fan (el cual ya fue establecido para dimensión 2).

En [3] Kuhn se pregunta si existe una relación del teorema de punto fijo de Brouwer con el lema de Fan. En este capítulo resolvemos la pregunta afirmativamente demostrando que el lema de Fan implica el teorema de punto fijo de Brouwer.

Finalmente en la sección 4.3 se da por medio de una división y etiquetamiento del plano complejo, una prueba del teorema fundamental del álgebra utilizando el lema de Sperner.

Este es en resumen el trabajo que se presenta en esta tesis, esperando les resulte interesante a los lectores en la misma medida en la que nos interesó.

CAPITULO I

PRELIMINARES

- 1.1 DEFINICION Y NOTACION
- 1.2 SUBDIVISION Y ETIQUETAMIENTO
- 1.3 EL LEMA DE SPERNER.

1. PRELIMINARES.

1.1 Definición y Notación.

Sea $X=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ un punto en el espacio vectorial real de dimensión $n+1$, tomemos a $H = \{X \mid \sum x_i = 1\}$ un hiperplano y $S = \{X \mid x_k \leq 1, \forall k\} \cap H$,

$T = \{X \mid x_k \geq 0\} \cap H$ dos subconjuntos de H .

Veremos mediante algunas gráficas los conjuntos H, S y T

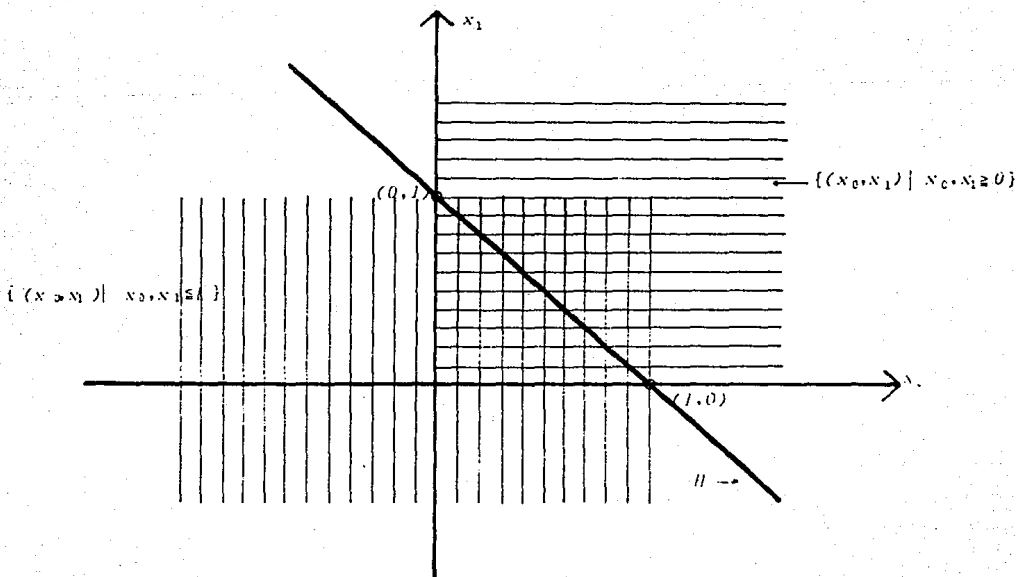
Para $n=1$ tenemos que:

$$H = \{(x_0, x_1) \mid x_0 + x_1 = 1\}$$

Es una recta con pendiente igual a -1 y pasa por el punto $(0,1)$.

$$S = \{(x_0, x_1) \mid x_0, x_1 \leq 1\} \cap H$$

$$T = \{(x_0, x_1) \mid x_0, x_1 \geq 0\} \cap H$$



En este caso (dimensión 2) $S = T = \{X \mid X = t(0,1) + (1-t)(1,0), t \in [0,1]\}$ son un segmento de la recta $x_0 + x_1 = 1$. S tiene como extremos a los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

Para el caso $n=2$, tenemos que $H = \{X \mid x_0 + x_1 + x_2 = 1\}$ es un plano con vector normal $N=(1,1,1)$ y $S = \{X \mid x_0, x_1, x_2 \leq 1\} \cap H$ es un triángulo con puntos extremos $(-1,1,1), (1,-1,1)$ y $(1,1,-1)$.

Por último, $T = \{X \mid x_0, x_1, x_2 \geq 0\} \cap H$ es un triángulo congruente a S (figura #2).

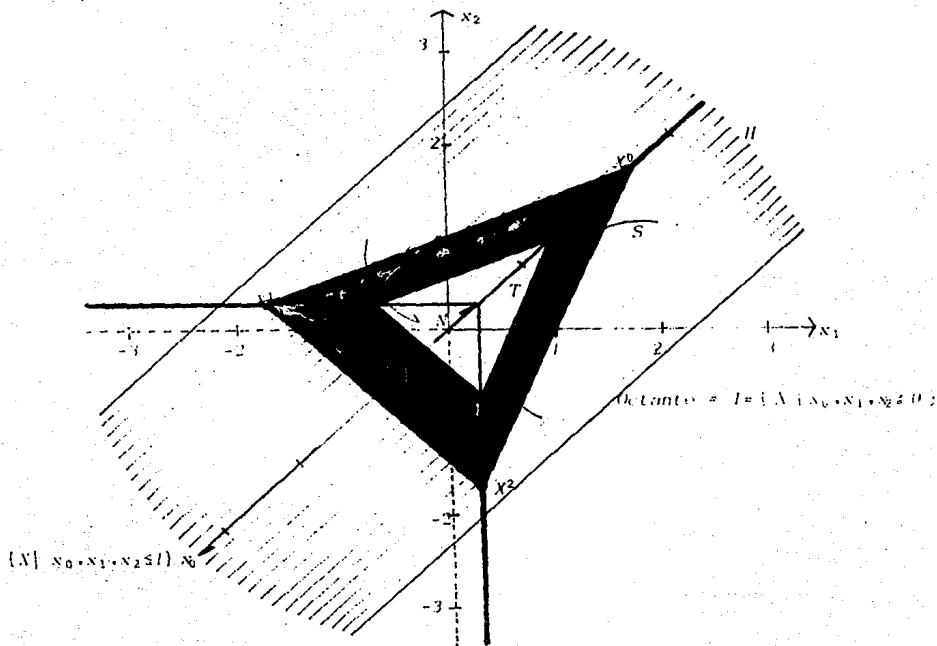


Figura #2

Como hemos visto para el caso $n=1$, los extremos de S son:

$$x^0 = (0,1) \text{ y } x^1 = (1,0).$$

y para el caso $n=2$, los extremos de S son:

$$x^0 = (-1,1,1), \quad x^1 = (1,-1,1) \text{ y } \quad x^2 = (1,1,-1).$$

En general, entendemos por un extremo x de un conjunto A cualesquiera cuando no existen elementos z , y ϵA tales que

$$z = tx + (1-t)y \quad 0 < t < 1$$

Siempre S es un conjunto convexo y sus puntos extremos a los que denotaremos por x^j , están dados por

$$x^j = (x_k^j) = \begin{cases} 1 - n, & \text{si } k=j \\ 1 & , \text{ si } k \neq j \end{cases}$$

Probemos primero que S es convexo. Sean $x, y \in S$ y $\lambda \in (0,1)$

Sea

$$\begin{aligned} z &= \lambda x + (1-\lambda)y \\ &= (\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0, \dots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \end{aligned}$$

tenemos entonces

$$\sum_{i=0}^n \lambda x_i + (1-\lambda)y_i = \lambda \sum_{i=0}^n x_i + (1-\lambda) \sum_{i=0}^n y_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

asi $z \in S$, y por lo tanto S es convexo.

Mostraremos ahora que los x^j son puntos extremos. Formando la expresión

$$x^j = tx + (1-t)y \quad x, y \in S.$$

obtenemos en el caso $j=0$:

$$(1-n, 1, 1, \dots, 1) = (tx_0 + (1-t)y_0, \dots, tx_n + (1-t)y_n)$$

esto es

$$1 - n = tx_0 + (1-t)y_0$$

$$1 = tx_1 + (1-t)y_1$$

$$\vdots$$

$$1 = tx_n + (1-t)y_n$$

Sumando estas ecuaciones, sin considerar la primera, tenemos:

$$n = t(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (1-t)(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

$$\leq tn + (1-t)n = n \quad (\text{por que } x_j \leq 1, y_n \leq 1 \text{ \& } 0 < t < 1)$$

La desigualdad anterior será estricta, y por tanto obtendremos una contradicción, si alguna de las x_i 's o y_i 's es menor que uno.

Concluimos por tanto que x^0 es extremo. Es claro que este mismo argumento se puede usar para cualquier coordenada.

Por último necesitamos demostrar que cualquier extremo es de la forma x^j .

Sea $x \in S$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Si existen x_i, x_j $i \neq j$ y $x_i < 1$, $x_j < 1$. hagamos $\epsilon = \min\{1-x_i, 1-x_j\}$ y definamos $x' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$, $x'' = (x''_0, x''_1, \dots, x''_n)$ de la siguiente manera

$$x'_k = \begin{cases} x_k & , \text{ si } k \neq i, k \neq j \\ x_j + \epsilon & , \text{ si } k = j \\ x_i - \epsilon & , \text{ si } k = i \end{cases}$$

$$x''_k = \begin{cases} x_k & , \text{ si } k \neq i, k \neq j \\ x_j - \epsilon & , \text{ si } k = j \\ x_i + \epsilon & , \text{ si } k = i. \end{cases}$$

Es claro que x' y $x'' \in S$ y además

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$$

de forma que x no es un punto extremo de S .

Así pues si $x \in S$ es un punto extremo, a lo más una de sus componentes es menor que uno. De forma que si

$$x = (1, 1, \dots, x_j, \dots, 1)$$

como

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1, \quad \text{por lo tanto } x_j = 1-n \quad //.$$

Sean x^{n+1}, \dots, x^N puntos arbitrarios de T , un conjunto $(x^j_0, x^j_1, \dots, x^j_n)$ de $P = \{x^0, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^N\}$ lo llamaremos conjunto primitivo si no existe un vector $x^j \in P$ tal que $x^j_k > \min\{x^j_0, \dots, x^j_n\}$.

Daremos un ejemplo para el caso $n = 1$, sean $x^2 = (3/4, 1/4)$, $x^3 = (1/8, 7/8)$ $x^4 = (5/6, 1/6)$, $x^5 = (1/3, 2/3)$ puntos de T , entonces $P = \{x^0, x^1, \dots, x^5\}$, el conjunto $\{(3/4, 1/4), (1/3, 2/3)\}$ forma el conjunto primitivo por que si $x^j \in P$ $j=1, 2, 3, 4, 5$.

$x_1^0 = 1, x_1^1 = 0, x_1^2 = 3/4, x_1^3 = 1/8, x_1^4 = 5/6, x_1^5 = 1/3$

y $(x_1^{j_1}, x_1^{j_2}) = \{3/4, 1/3\}$ se ve que $x_1^j > 1/3$ para $j = 1$, análogamente para el caso x_1^j . Gráficamente estamos tomando los puntos "más lejanos" a los extremos (figura #3)

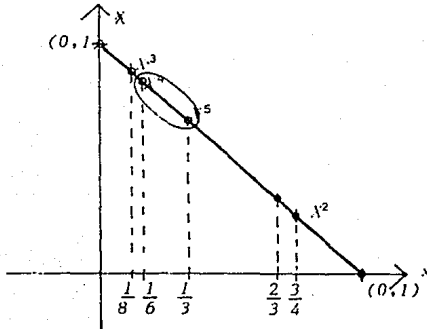


Figura #3

Denotemos por $I = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ al vector cuyas coordenadas son todas enteras y por $i = (i, i, \dots, i)$ al vector cuyas coordenadas son todas iguales. Usaremos la siguiente convención, diremos que $I \leq I'$ si cada coordenada de I es menor o igual a cada componente de I' sin ser todas iguales.

Ejemplo:

Sean $I = (1, 4, 5, 2)$, $I' = (1, 6, 5, 3)$ como $4 < 6$ y $2 < 3$, escribimos $I \leq I'$

Cabe observar que existen vectores que no pueden ser relacionados como $(2, 4)$ y $(3, 1)$.

1.2 . SUBDIVISION Y ETIQUETAMIENTO.

Supongamos que S representa un triángulo y queremos descomponerlo en - en triángulos más pequeños con un orden, para entender este orden empezaremos con una figura muy simple, con la recta. Consideremos un segmento de recta y denotemosla con la letra L . Dividamos este segmento en un número finito N de segmentos cerrados L_1, L_2, \dots, L_N de modo tal que tienen un punto común o -- ninguno como se muestra en la figura #4 (en donde hemos hecho $N = 7$)

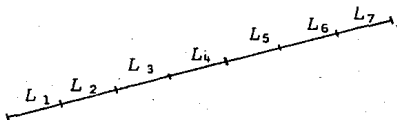


Figura # 4

Etiquetemos a los extremos de L con 0 y 1 respectivamente, y a cada - punto de la división lo etiquetaremos arbitrariamente con 0 y 1 (figura # 5)

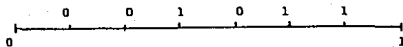


Figura # 5

Entonces existe necesariamente un segmento en la división, uno cuyos - extremos se llaman 0 y el otro 1. En efecto, recorramos L del extremo 0 al 1 punto a punto de la división. Si el primer punto se llama 1 ya tenemos el seg- miento que buscamos. Supongamos que se llama 0. Si el siguiente se llama 1, ya

tenemos el segmento que buscamos. Supongamos nuevamente que se llama 0. Entonces seguimos. Así, como el último se llama 1, necesariamente hemos de encontrar el segmento que buscamos.

Lo que se ha mostrado es el lema de Sperner para la recta y tiene su análogo en el plano (ver sección siguiente).

Consideremos ahora una región del plano delimitada por una línea poligonal cerrada y llamémosla P de un número arbitrario de lados de manera tal que ninguna línea tenga puntos múltiples. Es decir, la región considerada es como la que se indica en la figura # 6, y se excluye una región como la que se muestra en la figura # 7 porque el punto O sería un punto múltiple de la poligonal P (más exactamente, un punto doble, porque P contiene dos veces a O).

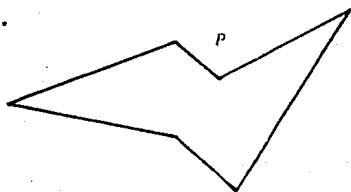


Figura # 6

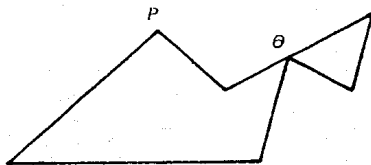


Figura # 7

Una triangulación T de la región R es simplemente una división de R por medio de un número finito de triángulos, de manera tal que cada dos triángulos T_1, T_2 sucede que T_1 y T_2 no tienen ningún punto común, o tienen un punto común solamente, o tienen todo un lado común. No se aceptan triangulaciones como las que se muestran en la figura #8.

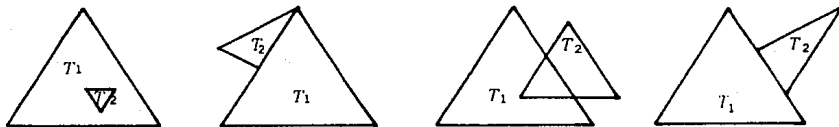


Figura # 8

Un ejemplo se muestra en la figura # 9 donde se ha hecho una triangulación de la región R , y la división R efectuada en la figura # 10 no es una triangulación.

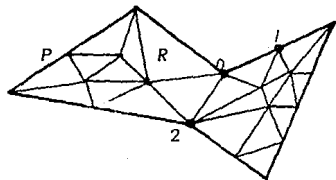


Figura # 9

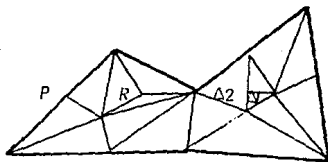


Figura # 10

Observemos en efecto, que los triángulos Δ_1 y Δ_2 de la figura # 10 no satisfacen la regla prescrita para que tal división se pueda llamar una triangulación.

En la región R que venimos considerando, etiquetemos tres vértices de los triángulos de T que estén en P , la poligonal exterior, y etiquetemosla con 0, 1 y 2. En la figura # 9 se han señalado los tres vértices escogidos para R .

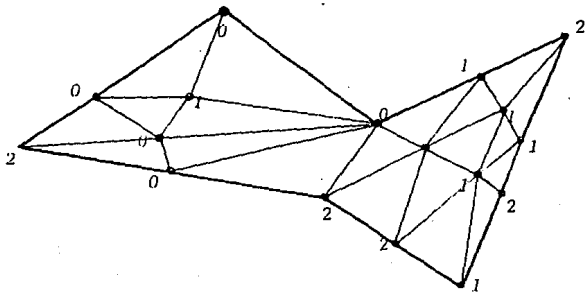


Figura # 11

Posteriormente señalemos también cada vértice de la triangulación con una de las tres etiquetas 0,1,2. Diremos que la triangulación T se ha etiquetado según la regla de Sperner, cuando cada vértice de los triángulos de T ha reci

bido una etiqueta 0, 1 o 2, de manera tal que los vértices de los triángulos de T que están sobre el trozo de la línea poligonal P entre 0 y 1 que no contiene 2 se llamen 0 o 1, entre 1 y 2 se llamen 1 o 2, que entre 2 y 0 se llamen 2 o 0. Los vértices que no están sobre P se pueden llamar 0, 1 o 2 sin restricción alguna. En la figura # 11 se ha dado a la triangulación T etiquetas según la regla de Sperner.

Consideremos el siguiente triángulo y etiquetemoslo con 0, 1 y 2 en sus vértices

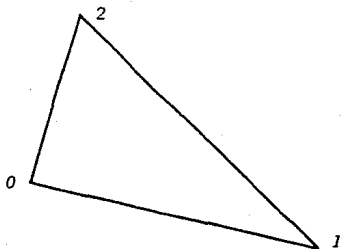


Figura # 12

Después subdividamoslo en triángulos más pequeños, etiquetandolos según la regla de Sperner.

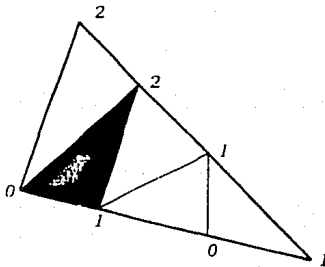


Figura # 13.

Observemos que uno de los triángulos de la subdivisión tiene las etiquetas 0,1 y 2. Esto siempre sucede y a este resultado se le conoce como: El lema de Sperner.

1.3 LEMA DE SPERNER.

Hemos visto en la sección anterior los antecedentes necesarios para establecer el

LEMA DE SPERNER.

Sea R una región limitada por una línea poligonal P sin puntos múltiples. Sea T una subdivisión de R etiquetada según la regla de Sperner. Entonces existe un triángulo de T cuyos tres vértices están etiquetados $0, 1$ y 2 respectivamente.

La demostración la haremos utilizando el principio de inducción sobre el número de triángulos de la subdivisión. La idea consiste en que siempre podemos eliminar un triángulo (excepto claro esta cuando nuestra subdivisión consiste de uno solo) de forma tal que obtenemos una nueva región triangulada según la regla de Sperner.

En el ejemplo que hemos venido desarrollando podríamos, por ejemplo, eliminar uno de los triángulos del extremo izquierdo, obteniendo como se ilustra en la figura # 14 una nueva región, pero con una subdivisión teniendo un triángulo menos, pero que sigue obedeciendo la regla de Sperner

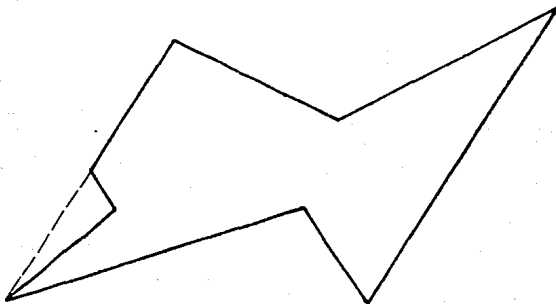


Figura # 14

Procedamos ahora a la demostración:

Llamemos h al número de triángulos de la subdivisión. Observemos que:

- a) La afirmación del lema de Sperner es clara si $h=1$. Ya que la región R es, ella misma, un triángulo que coincide con el único triángulo de T . Los tres vértices de este triángulo se llaman $0, 1$ y 2 respectivamente.
- b) Consideremos a R y P . Sea T una subdivisión con $h+1$ triángulos (Suponemos que la afirmación del lema de Sperner vale con una subdivisión T con h triángulos).

Recorremos el trozo $0, 2$ que no contiene 1 de la línea poligonal P vértice a vértice de la subdivisión, de 0 a 2 . Si el primer vértice se llama 0 , seguimos; si el segundo se llama 0 , seguimos, así hasta encontrar el primer lado $0, 2$ de la subdivisión sobre dicho trozo $0, 2$ de la línea poligonal P . Consideremos entonces al tercer vértice del triángulo correspondiente a dicho lado $0, 2$. Si tiene etiqueta 1 , ya tenemos la afirmación del lema. Si no será 0 o 1 . Observemos que este tercer vértice puede estar dentro de la región R (como en nuestro ejemplo) o bien sobre la poligonal P . (ver la figura # 11). En todo caso, si en T suprimos este triángulo, resulta una nueva región R' con una línea poligonal P' y una subdivisión T' de R' con, a lo sumo, h triángulos, que esta etiquetada, como es fácil de comprobar, según la regla de Sperner. Por tanto, como suponemos cierta la afirmación en este caso, existe un triángulo etiquetado $0, 1$ y 2 en T .

Con esto queda probado por inducción el lema de Sperner ///.

CAPITULO 2

MAPEOS DE VERTICES

2.1 MAPEOS DE VERTICES SIMPLICIALES.

2.2 MAPEOS DE VERTICES CUBICOS.

2.1 MAPEOS DE VERTICES SIMPLICIALES.

Recordemos que un simplejo esta dado por $T = \{ x \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0 \}$ consideremos ahora un conjunto finito T_k de vectores $x^1, \dots, x^n, \dots, x^k$ donde los vectores x^{n+1}, \dots, x^k pertenecen a T , y x^1, x^2, \dots, x^n tienen la forma

$$\begin{aligned}x^1 &= (0, M_1, \dots, M_1) \\x^2 &= (M_2, 0, M_2, \dots, M_2) \\&\vdots \\x^n &= (M_n, \dots, M_n, 0).\end{aligned}$$

con $M_1 > M_2 > \dots > M_n > 1$. Estos vectores claramente no pertenecen a T .

Definición 1:

Diremos que, un conjunto de n vectores $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_n}$ en T_k es un conjunto primitivo si no existen vectores x^j en T_k tales que:

$$\begin{aligned}x_1^j &> \min(x_1^{j_1}, \dots, x_1^{j_n}) \\&\vdots \\x_n^j &> \min(x_n^{j_1}, \dots, x_n^{j_n})\end{aligned}$$

Definición 2:

Sean x^{j_1}, \dots, x^{j_n} un conjunto de n vectores en T_k , definimos a R como el conjunto de vectores x tales que:

$$\begin{aligned}1) \quad x_i &\geq \min(x_i^{j_1}, x_i^{j_2}, \dots, x_i^{j_n}) \\2) \quad \sum x_i &= 1\end{aligned}$$

Ahora bien si R no tiene vectores de T_k en su interior, entonces los vectores x^{j_1}, \dots, x^{j_n} forman un conjunto primitivo y a R lo llamaremos sub simplejo primitivo.

Antes de proseguir ilustraremos en forma geométrica las anteriores definiciones.

Sean $n=2$, $x^3 = (3/4, 1/4)$, $x^4 = (1/8, 7/8)$, $x^5 = (5/6, 1/6)$ y $x^6 = (1/3, 2/3)$ vectores de T (en este ejemplo T es una recta), claramente $T_6 = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ donde $x^1 = (0, M_1)$, $x^2 = (M_2, 0)$, con $M_1 > M_2 > 1$ como se muestra en la figura # 1.

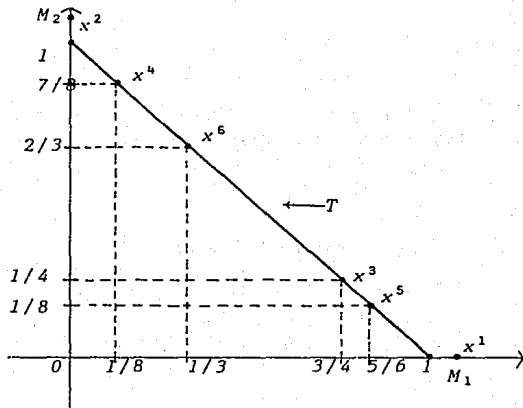


Figura # 1.

Definamos ahora a R , como hemos observado los vectores x^1, x^2 no pueden pertenecer al conjunto $\{x^j, \dots, x^{jn}\}$ pues la condición 2) no se cumpliría en la definición 2. Así pues tomando al conjunto de vectores $\{x^3, x^6\} =$
 $= \{(3/4, 1/4), (1/3, 2/3)\} = R$ vemos que:

$$\begin{aligned} \min(x_1^3, x_1^6) &= \min(3/4, 1/3) = 1/3 \\ \text{y} \\ \min(x_2^3, x_2^6) &= \min(1/4, 2/3) = 1/4 \end{aligned}$$

en T_6 no hay vectores x^j que al mismo tiempo su primera y segunda coordenada sean mayores que $1/3$ y $1/4$ respectivamente. Por lo tanto R resulta ser un conjunto primitivo. Observe como se muestra en la figura # 1, que no hay puntos de T_6 en el segmento x^3x^6

Consideremos ahora el caso $n=3$, y los vectores de T , $x^4 = (1/3, 2/3, 0)$, $x^5 = (1/4, 3/4, 1/4)$, $x^6 = (2/5, 2/5, 1/5)$, $x^7 = (1/8, 6/8, 1/8)$, $x^8 = (1/5, 2/5, 2/5)$, $x^9 = (2/7, 3/7, 2/7)$, T_9 será por lo tanto $T_9 = \{x^1, x^2, \dots, x^9\}$ donde $x^1 = (0, M_1, M_1)$, $x^2 = (M_2, 0, M_2)$, $x^3 = (M_3, M_3, 0)$ con $M_1 > M_2 > M_3 > 1$. T y T_9 se muestran en la figura # 2.

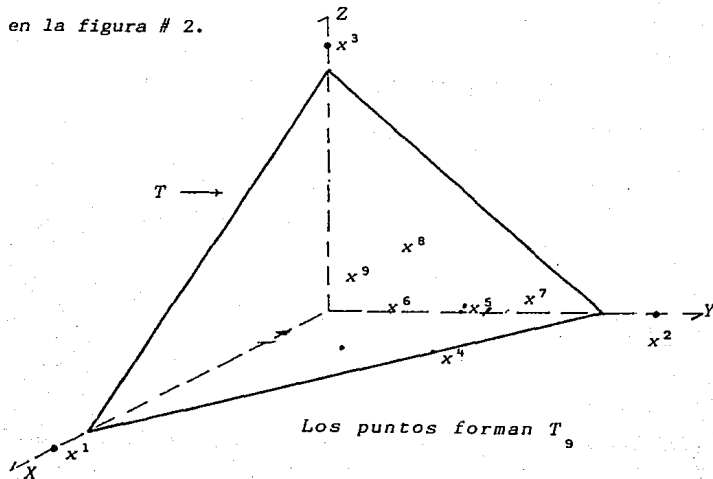


Figura # 2.

Tomemos a $R = \{x^5, x^6, x^9\}$ y observemos que:

$$\min(x_1^5, x_1^6, x_1^9) = \min(1/4, 2/5, 2/7) = 2/7$$

$$\min(x_2^5, x_2^6, x_2^9) = \min(2/4, 2/5, 3/7) = 2/5$$

$$\min(x_3^5, x_3^6, x_3^9) = \min(1/4, 1/5, 2/7) = 1/5.$$

Claramente las coordenadas de x^4, x^7 y x^8 no son mayores a la vez a $(2/7, 2/5, 1/5)$ por lo que R es un conjunto primitivo. Observemos nuevamente que no existen vectores de T_9 en el interior del triángulo formado por los vectores x^5, x^6, x^9 .

En esta sección probaremos que en todo simplejo existe un conjunto primitivo en donde todos sus vértices tienen índices diferentes. Este teorema

necesita de un resultado preliminar, el cual asevera que en todo conjunto - primitivo (excepto un caso) se puede reemplazar un vector arbitrario, en - forma única, de tal manera que el nuevo conjunto siga siendo primitivo.

Haremos una suposición a la que llamaremos la suposición de no degeneración, la cual ocnsiste que dos vectores de T_k no tienen la misma i -ésima coordenada para cualquier i .

Establezcamos pues el siguiente lema.

Lema:

Sean x^{j_1}, \dots, x^{j_n} un conjunto primitivo y sea x^{j_α} un vector específico de ellos, entonces, excepto un caso, existe un único vector x^j de T_k - diferente de x^{j_α} , con la propiedad de que el nuevo conjunto, al ser reemplazado x^{j_α} por x^j sigue siendo un conjunto primitivo.

La excepción ocurre cuando los $n-1$ vectores x^{j_i} , con $i \neq \alpha$, se seleccionan de los primeros n vectores de T_k y sólo en este caso el cambio no es posible.

Prueba:

Se procederá a la demostración por medio de una construcción geométrica. Supongamos que $x_1^{j_i} = \min(x_1^{j_1}, \dots, x_1^{j_n})$, es decir x^{j_i} está sobre la cara del subsimplejo primitivo en el cual la i -ésima coordenada es constante (figura # 3). Supongamos también que x^{j_i} será cambiado.

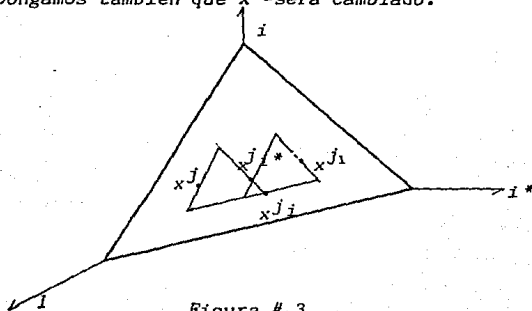


Figura # 3.

Denotaremos por $x_{i^*}^{j_i}$ al vector en el conjunto primitivo con su segunda coordenada menor que la primera, j_{i^*} será mayor que n hasta que el caso de excepción surja. Ahora movamos la cara que contiene a $x_{i^*}^{j_i}$ paralelamente (esto se hace con el fin de encontrar al vector que reemplace a $x_{i^*}^{j_i}$) hasta la intersección con un vector $x^j \in T_k$ con las siguientes propiedades:

- 1) $x_i^j > x_{i^*}^{j_i}$, para $i \neq 1, i^*$
- 2) $x_1^1 > x_{i^*}^{j_i}$

o con la cara del simplejo P donde $x_{i^*} = 0$. La regla se aplica excepto cuando los vectores $x_{i^*}^{j_i}$ con $i \neq 1$ son escogidos todos de los primeros n vectores de T_k , y claramente produce un nuevo conjunto primitivo.

Sólo nos resta establecer la unicidad, para esto hagamos las siguientes observaciones:

- 1) Si $(x^l, x^j, \dots, x^{j_n})$ forman un conjunto primitivo, entonces para $i \neq 1, i^*$, debemos tener $x_{i^*}^{j_i}$ sobre la frontera del nuevo subsimplejo cuya i -ésima coordenada es constante. Ya que si esto no ocurriera para alguna i , entonces $x_{i^*}^{j_i}$ no podría estar en ninguna de las caras frontera del nuevo subsimplejo y esto es imposible, por lo tanto $x_{i^*}^{j_i}$ está sobre la frontera del nuevo subsimplejo.

Como una consecuencia de esta observación tenemos que el nuevo conjunto primitivo satisface

$$x_{i^*}^{j_i} = \min(x_1^l, x_1^j, \dots, x_1^{j_n}) \text{ para } i \neq 1, i^*.$$

Existen dos alternativas que deben ser consideradas para las dos coordenadas restantes. Una x^l está sobre tal cara con primera coordenada constante y $x_{i^*}^{j_i}$ con su i^* -ésima coordenada constante o viceversa.

- 2) Si $(x^l, x^{j_2}, \dots, x^{j_n})$ forma un conjunto primitivo y $x^l \neq x_{i^*}^{j_i}$, entonces x^l debe estar sobre la cara del nuevo subsimplejo primitivo cuya i -ésima coordenada es constante, y $x_{i^*}^{j_i}$ está sobre la cara con primera coordenada constante.

De no ser cierto, el nuevo subsimplejo podría tener a x^{j_i} sobre tal cara, en la cual la i -ésima coordenada es constante para $i=2, \dots, n$. Pero, si $x_1^{j_i} < x_1^l$, entonces el viejo subsimplejo contiene a x^l en su interior, mientras que si $x_1^{j_i} > x_1^l$ el nuevo subsimplejo contiene a x^{j_i} en su interior. De esto tenemos que $x_1^{j_i} = x_1^l$ y ya que no hay dos coordenadas diferentes que tengan la misma primer coordenada debemos tener $l = j_i$, y hemos regresado a donde comenzamos.

Unicidad.

Si $(x^l, x^{j_2}, \dots, x^{j_n})$ forman un conjunto primitivo y $x^l \neq x^{j_i}$, entonces x^l debe ser el vector x^{j_i} descrito anteriormente.

Se ha probado que x^{j_i} está sobre la cara del nuevo subsimplejo con su i -ésima coordenada constante para $i \neq 1, i^*$ y que $x^{j_{i^*}}$ está en la cara con su primera coordenada constante, la unicidad se sigue por la observación 2).

Teorema.

Existe un conjunto primitivo en el cual todos sus vértices tienen todos sus índices diferentes.

Prueba:

Hagamos la convención de que el vector x^{j_i} está asociado con el índice j_i .

Empecemos con un conjunto primitivo cuyos elementos están indexados en forma diferente, con la posible excepción de un par de vectores con el mismo índice (de otra forma ya hubieramos terminado). Consideremos al conjunto de vectores $(x^2, \dots, x^n, x^{n+1})$ con $x^{j_{i^*}}$ tomado después de los primeros n vectores, con el fin de maximizar la primera coordenada, claramente $\min(x_1^{j_{i^*}}, x_1^2, \dots, x_1^n)$ está dada por $x_1^{j_{i^*}}$ para $i = 1$, y es cero para $i > 1$, este conjunto de vectores es primitivo ya que no puede haber un vector en T_k que tenga todas sus coordenadas estrictamente mayor que las de $(x_1^{j_{i^*}}, 0, \dots, 0)$.

Si el vector x^j estuviera asociado con el número 1, terminamos, pero - en caso contrario, procedamos de la siguiente manera. Supongamos que tenemos un conjunto primitivo cuyos índices tienen las siguientes propiedades:

- 1) El índice 1 no está asociado con ningún vector.
- 2) Todos los vectores en el conjunto primitivo son indexados en forma - distinta, excepto un par de vectores, que tienen el mismo índice.

Tomemos uno de los dos vectores con el mismo índice y sustituyámoslo del conjunto primitivo, para obtener otro conjunto primitivo con las mismas - propiedades del anterior, para terminar con un conjunto primitivo en donde - todos sus elementos tienen índices diferentes, esto es posible por el lema.

Es decir en cada paso de nuestro algoritmo, hay dos posibilidades en que tengamos un conjunto primitivo, uno con las mismas propiedades y otro como - lo establece el teorema. Hay solamente un vector que puede ser cambiado del conjunto primitivo original, a saber, el vector x^j (con $2 \leq j \leq n$) con el mismo índice de x^j ///.

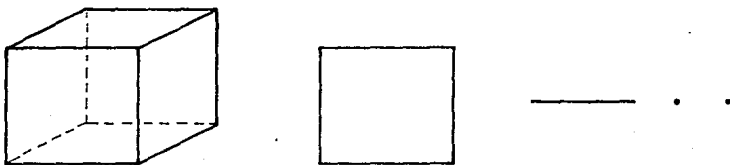
2.2. MAPEOS DE VÉRTICES CUBICOS.

En esta sección definiremos los mapeos sobre los vértices en cubos de dimensión n , posteriormente probaremos que en todo cubo de dimensión n completamente etiquetado con una subdivisión, existe al menos un n cubo dimensional de la subdivisión completamente etiquetado también. Empezaremos con las siguientes definiciones.

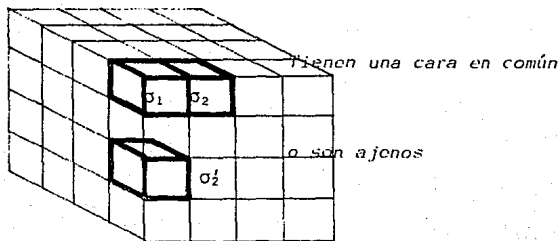
Un complejo cúbico es una colección finita A de cubos de varias dimensiones que satisfacen las siguientes dos relaciones:

- a) Para cualquier σ de la colección A , las caras de σ de todas las dimensiones también son elementos de A .

Esto supone que si tenemos un cubo de dimensión n , el cubo, las caras del cubo, las aristas, los vértices del mismo, también son elementos de A .



- b) La intersección de cualesquiera dos cubos $\sigma_1, \sigma_2 \in A$ es vacío o tienen una cara de σ_1, σ_2 .

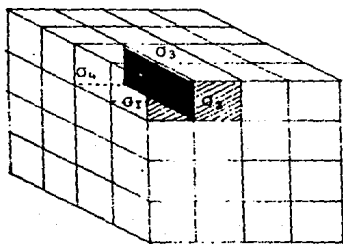


Los 0-cubos de un cubo complejo A son llamados vértices de A . Dos vértices de A son llamados adyacentes, si son los dos vértices de un 1-cubo de A .

Un complejo cúbico A^n es llamado una n -seudovariiedad cúbica, si se cumplen las siguientes dos condiciones.

- c) Cualquier cubo de A^n (de cualquier dimensión) es una cara de al menos un cubo de A^n .

Tomemos un cubo que ha sido dividido, como se muestra en la figura



Si tomamos, por ejemplo, cuatro pequeños cubos, a los que llamaremos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, observemos que cada uno de ellos tiene al menos una cara común, y que cada lado así como cada vértice esta en al menos un n -cubo.

- d) Cualquier $(n-1)$ -cubo de A^n es una cara de a lo más dos n -cubos de A^n .

Si tomamos cualquier σ_i como un n -cubo, los $(n-1)$ -cubos serian las caras y resultaria claro que estas caras estan a lo más es dos n -cubos. Por ejemplo en el caso mostrado en la figura anterior σ_1 y σ_2 tienen una cara (la exterior) que solo pertenece a ellos.

Un $(n-1)$ -cubo σ de una n -seudovariiedad cúbica A^n es llamada una frontera $(n-1)$ -cubo de A^n , si σ es una cara de exactamente un n -cubo de A^n .

En el ejemplo, mostrado, se han subrayado las fronteras de σ_1 y σ_2

Sea C^m el m -cubo unitario en el m -espacio Euclideano E^m . En otras palabras

$$C^m = \{ (x_1, x_1, \dots, x_m) \in E^m \mid 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, m \}$$

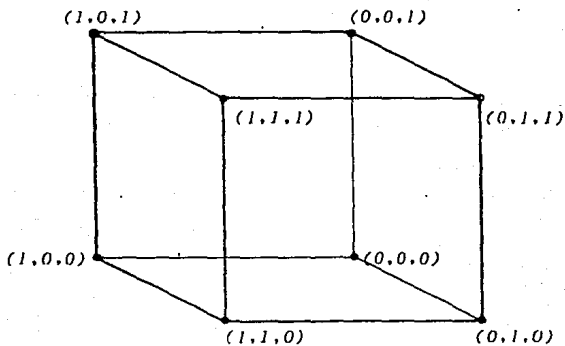
Denotemos por i_1, i_2, \dots, i_k a k distintos enteros entre 1 y m , y $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k$ k números cero o uno. Se usará la notación

$$F \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k \end{pmatrix} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in C^m \mid x_{i_j} = \epsilon_j \text{ para } 1 \leq j \leq k \}$$

Para una cara $(m-k)$ -dimensional de C^m .

Es fácil observar que C^m junto con sus caras de todas dimensiones forman una m -seudovariedad cúbica a la cual denotaremos por ζ^m .

A continuación daremos una ilustración geométrica de F . Tomemos por ejemplo $k=3$ y un cubo con sus vértices etiquetados como se muestra en la siguiente figura.



Si $i_1=1, i_2=2, i_3=3$ y $\epsilon_1=0, \epsilon_2=0, \epsilon_3=1$ entonces

$$F \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in C^3 \mid x_1=0, x_2=0, x_3=1 \} = \{ (0,0,1) \}$$

es un vértice del cubo, en forma análoga

$$F \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{ (1,0,1) \} \text{ etc.}$$

En cambio si tomamos $k=2$ y $\epsilon_1=1, \epsilon_2=0$ tendremos

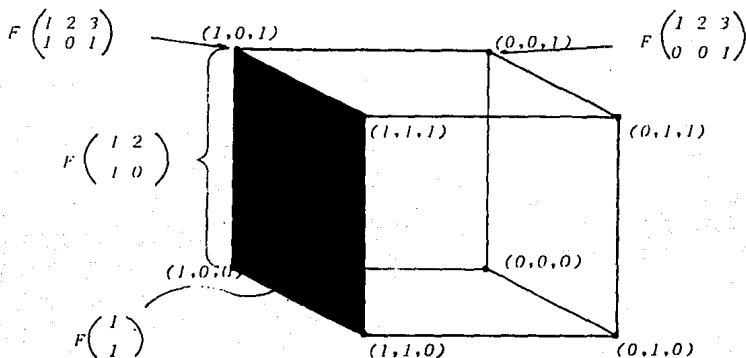
$$F \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{(x_1, x_2, x_3) \in C^3 \mid x_1=1, x_2=0\} = \{(1, 0, x_3)\}$$

que no es otra cosa que la línea que une los vértices con etiquetas $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$.

Finalmente tomando $k=1$ y $\epsilon_1=1$ nos conduce a

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(x_1, x_2, x_3) \in C^3 \mid x_1=1\} = \{(1, x_2, x_3)\}$$

En la figura de abajo se señalan los ejemplos que hemos tomado



Es claro que las diferentes combinaciones de los i 's y los ϵ 's nos proporcionan todas las partes del cubo.

Si $\phi: A^n \rightarrow \zeta^m$ satisface que para cualesquiera dos vértices adyacentes $u, v \in A^n$, $\phi(u)$ y $\phi(v)$ coinciden o son vértices adyacentes de ζ^m .

Entonces ϕ se llama un mapeo de vértices cúbico.

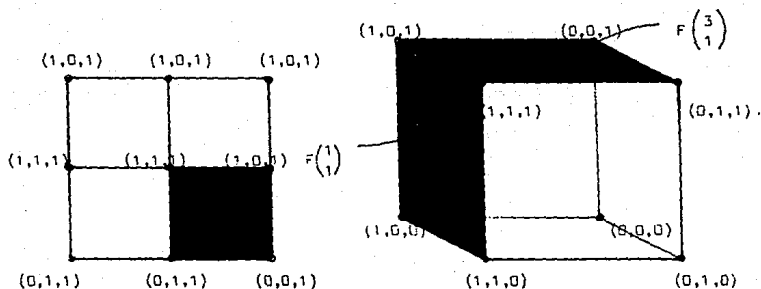
Si $m > n$ y i_1, i_2, \dots, i_{m-n} son $m-n$ índices distintos entre 1 y m , y si

$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n}$ son $m-n$ números ceros o unos, usaremos el simbolo

$\alpha \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_{m-n} \\ \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_{m-n} \end{pmatrix}$ para denotar el número de los n -cubos de A^n cuyos vérti

ces de σ son llevados bajo ϕ en una correspondencia uno a uno sobre los vértices de la cara $F \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_{m-n} \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n} \end{pmatrix}$ de dimensión n de ζ^m .

Daremos una ilustración geométrica acerca de α para $m=3$ y $n=2$.



En este caso $m-n=1$. Si $i_1=1, \epsilon_1=1$ tenemos que $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(1, x_2, x_3)\}$. En la figura anterior aparece esta cara sombreada y sus vértices han sido etiquetados por $(1,0,1), (1,0,0), (1,1,0)$ y $(1,1,1)$. Ahora bien, el número de 2-cubos cuyos vértices tengan las mismas etiquetas (en el cuadrado de la izquierda) es cero, por lo que tenemos

$$\alpha \begin{pmatrix} i_1 \\ \epsilon_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{No. de 2-cubos } \sigma \text{ de } A^n = 0.$$

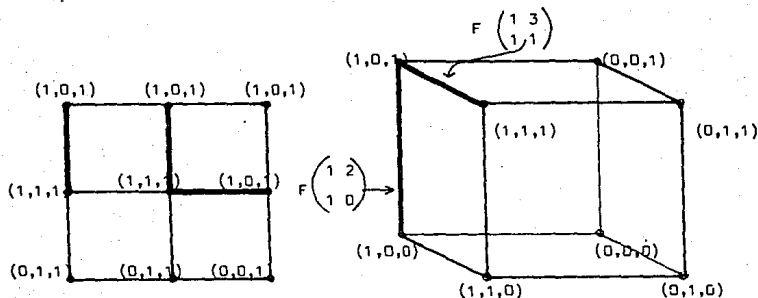
En cambio, si hacemos $i_1=3$ y $\epsilon_1=1$, obtenemos $F \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(x_1, x_2, 1)\}$ que es la cara con vértices etiquetados con $(1,0,1), (1,1,1), (0,1,1)$ y $(0,0,1)$, siendo uno el número de 2-cubos cuyos vértices tienen las mismas etiquetas. Por lo tanto $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$.

Es fácil ver en este ejemplo que $\alpha \begin{pmatrix} i_k \\ \epsilon_k \end{pmatrix} = 0$ si $i_k \neq 3$ y $\epsilon_k \neq 1$.

Si $m=n$, usamos el simbolo $\alpha \binom{*}{*}$ para denotar el número de esos n -cubos de A^n cuyos vértices son llevados en forma inyectiva bajo ϕ , sobre los vértices de C^n . En otras palabras, $\alpha \binom{*}{*}$ son los n -cubos completamente etiquetados.

Si $m \geq n \geq 1$ y $i_1, i_2, \dots, i_{m-n+1}$ son $m-n+1$ índices distintos entre 1 y m , y si $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n+1}$ son $m-n+1$ números cero o uno, denotemos por $\beta \binom{i_1, i_2, \dots, i_{m-n+1}}{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n+1}}$ el número de aquellos $(n-1)$ -cubos frontera de A^n cuyos vértices son llevados bajo ϕ en forma inyectiva sobre los vértices de las $(n-1)$ -caras de $F \binom{i_1, i_2, \dots, i_{m-n+1}}{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n+1}}$ de C^m .

Nuevamente tomemos $m=3$ y $n=2$ ($m > n > 1$), aquí $m-n+1=2$, hagamos $i_1=1, i_2=2, \epsilon_1=1$ y $\epsilon_2=0$, tenemos entonces que $F \binom{1\ 2}{1\ 0} = \{(1,0,x_3)\}$ que es una arista del 3-cubo.



Ahora bien, $\beta \binom{1\ 2}{1\ 0} =$ No. de $(n-1)$ -cubos frontera cuyos vértices son llevados uno a uno a la cara de $F \binom{1\ 2}{1\ 0}$, como se ve en este ejemplo, no hay ninguno y así $\beta \binom{1\ 2}{1\ 0} = 0$.

Pero si tomamos $i_1=0, i_2=3, \epsilon_1=1$ y $\epsilon_2=1$ tenemos que $F \binom{1\ 3}{1\ 1} = \{(1,x_2,1)\}$. En el cuadrado de la izquierda hay 3 segmentos (en la figura se han remar

cado esos segmentos) cuyos vértices son llevados uno a uno a la cara de

$$F \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por lo que tenemos en este caso } \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Teorema:

Sea A^n una pseudovariiedad cúbica, y $\phi: A^n \rightarrow \zeta^m$ un mapeo de vértices cúbico, donde $m \geq n \geq 1$. Para cualquiera $m-n+1$ índices distintos $i_1, i_2, \dots, i_{m-n+1}$ entre 1 y m , y para $\eta=0$ o 1, se cumple lo siguiente

$$(0) \quad \sum \alpha \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_{m-n} \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n} \end{pmatrix} \equiv \sum \beta \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_{m-n}, i_{m-n+1} \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-n}, \eta \end{pmatrix} \pmod{2}$$

En particular, si $m=n$, entonces para cualquier índice i entre 1 y m , y para $\eta=0$ o 1, se cumple

$$\alpha \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \equiv \beta \begin{pmatrix} i \\ \eta \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Observemos primero que el caso $m=n$ del teorema puede ser reducido al caso $m > n$. En efecto, si $\phi: A^n \rightarrow \zeta^n$, entonces consideremos C^n como la cara $x_{n+1} = 0$ de C^{n+1} , ϕ puede ser considerada como un mapeo de vértices cúbicos $\phi': A^n \rightarrow \zeta^{n+1}$. Si denotamos a α', β' los números de ϕ' , entonces $1 \leq i \leq n$ y $\eta=0$ o 1, tenemos

$$\alpha \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{\epsilon=0,1} \alpha' \begin{pmatrix} n+1 \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

$$\beta \begin{pmatrix} i \\ \eta \end{pmatrix} = \beta' \begin{pmatrix} i, n+1 \\ \eta, 0 \end{pmatrix} = \sum_{\epsilon=0,1} \beta' \begin{pmatrix} i, n+1 \\ \eta, \epsilon \end{pmatrix}$$

Así, para probar el teorema, es suficiente considerar el caso $m > n \geq 1$.

Por otro lado es fácil ver que la congruencia (0) es aditiva para pseudovariiedades cúbicas, por lo que el teorema se puede reducir al siguiente lema.

Lema

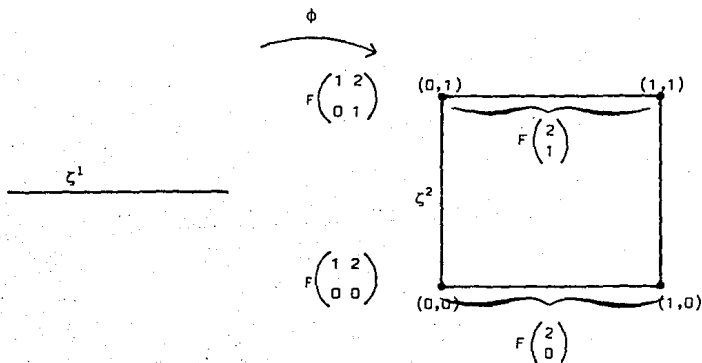
Si $m > n \geq 1$ y si $\phi: \zeta^n \rightarrow \zeta^m$ es un mapeo de vértices cúbicos, entonces

$$(1) \quad \sum \alpha \begin{pmatrix} n+1, n+2, \dots, m \\ \epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+2}, \dots, \epsilon_m \end{pmatrix} \equiv \sum \beta \begin{pmatrix} n, n+1, \dots, m \\ 0, \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_m \end{pmatrix}, \text{ mod } 2$$

Prueba

Para el caso $n=1$ la 1-seudovariiedad cúbica ζ^1 es una línea. Consideremos $m > 1$ e ilustremos los casos $m=2$ y $m=3$

$m=2$

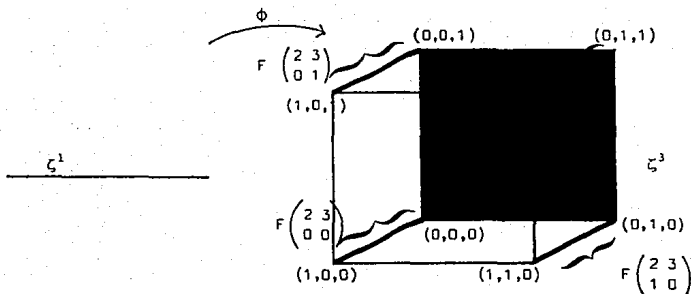


Calculemos el lado izquierdo de (1) al cual denotaremos con I , y para este ejemplo $I = \sum_{\epsilon_2=0,1} \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$. Observemos que $F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \{(x_1, 0)\}$ y $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(x_1, 1)\}$ no son otra cosa que dos líneas, señaladas en la figura anterior. Si ϕ lleva los vértices de ζ^1 a los vértices de $F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $I = 1$, pero si los vértices de ζ^1 fueran digamos $(0,0)$ y $(0,1)$ entonces $I = 0$.

Ahora calculemos el lado derecho de (1) y denotemoslo con la letra D . Tenemos entonces que $D = \sum_{\epsilon_2=0,1} \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$. Ahora bien $F \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0)$ y $F \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1)$ son dos vértices de ζ^2 , siendo uno de la cara $F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y -

otra de la cara $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Resulta entonces claro que si $I = 1$, $D = 1$. Sin embargo en el caso $I = 0$, puede ocurrir que $D = 0$ o bien $D = 2$, (por que $\phi(\zeta^1) = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\phi(\zeta^1) = F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Pasemos al caso $m=3$.



Nuevamente calculemos primero $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$. Se presentan aquí 4 casos:

$F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(x_1, 0, 0)\}$, $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{(x_1, 1, 0)\}$, $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{(x_1, 0, 1)\}$ y $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \{(x_1, 1, 1)\}$, todos ellos 1-cubos de ζ^3 y solamente uno, o ninguno,

puede ser imagen de ζ^1 bajo ϕ y se tiene $I = 1$ o $I = 0$.

Analizamos ahora el lado derecho de (1), calculemos primero las caras

$F \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$ que no son sino los vértices del 2-cubo $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que ha sido sombreado en la figura anterior. Cabe resaltar que el 2-cubo $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sólo tiene un vértice de cada 1-cubo $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$. Resulta claro que si $I = 1$, entonces $D = 1$. En cambio si $I = 0$, ϕ envió a los vértices de ζ^1 en los vértices de cualquiera de los líneas restantes. En el caso que la haya enviado a alguna cara de $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenemos $D = 0$ (la cara de enfrente), pero si la envió a -

alguna línea de la cara $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $D = 2$. Se cumple nuevamente que para $I = 0$ se tiene $D = 0$ o $D = 2$. Y que si $I = 1$, entonces $D = 1$.

En general llamemos u y v a los vértices de ζ^1 y supongamos que ϕ envía a u y v a los vértices del 1-cubo $F \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & m \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$ de ζ^m , lo cual fuerza a que $\phi(u) \neq \phi(v)$. En otras palabras $I = 1$ implica que $\phi(u) \neq \phi(v)$.

Como se vió en los ejemplos anteriores $F \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$ es un 2-cubo que tiene uno y solo un vértice de cada 1-cubo $F \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & m \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$. Lo cual obliga a que sólo un vértice $\phi(u)$ o $\phi(v)$ este en $F \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$ y por lo tanto $D = 1$. Podemos afirmar entonces que $I = 1$ implica que $D = 1$.

Ahora en el caso, $I = 0$ ϕ envió a u y v a los vértices de cualquier 1-cubo $F \begin{pmatrix} 2 & \dots & m \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$ distinto de $F \begin{pmatrix} 2 & \dots & m \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$, por lo que tendremos $D=0$ o bien $D = 2$ (este caso resulta cuando $F \begin{pmatrix} 2 & \dots & m \\ \varepsilon_2, \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix} \subset F \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$).

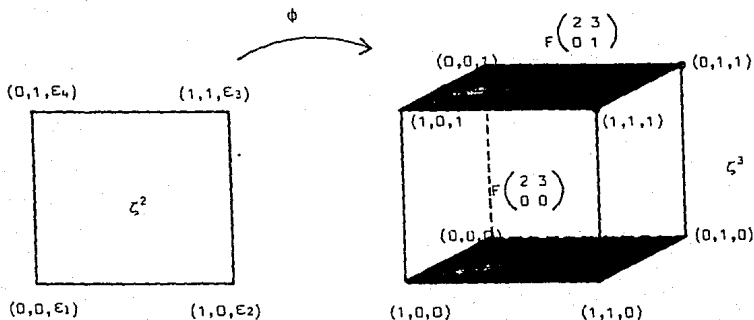
Concluyendo para $n=1$

$$I = 1 \text{ implica } D = 1$$

$$I = 0 \text{ implica } D = 0 \text{ o bien } D = 2$$

Comprobándose en ambos casos que $I \equiv D \pmod{2}$.

Consideremos ahora un mapeo de vértices cúbicos $\phi : \zeta^n \rightarrow \zeta^m$, donde $m > n > 1$. Ejemplificaremos el caso $m=3$ y $n=2$.



Para calcular I observemos que $F \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \{ (x_1, x_2, 1) \}$ y $F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \{ (x_1, x_2, 0) \}$ son 2-cubos paralelos de ζ^3 . Si $I = 1$ tenemos que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ o bien igual a 1. Para fijar ideas, supongamos que son iguales a cero y por tanto estamos en la tapa de abajo. Si $I = 0$ estamos en cualquiera de los cuatro 2-cubos laterales.

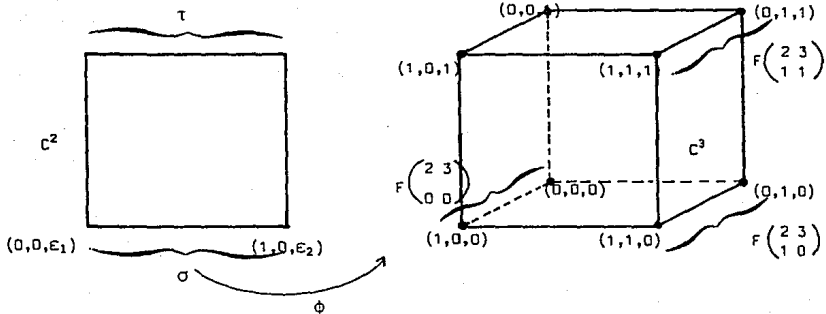
Ahora $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{ (x_1, 0, 1) \}$ y $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ (x_1, 0, 0) \}$ son dos 1-cubos de ζ^3 , con $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $F \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es fácil ver ahora - que $I = 1$ implica $D = 1$. Para el caso $I = 0$ ϕ envía a ζ^2 en cualquier cara lateral y cada una de ellas tiene dos 1-cubos en $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, por tanto tendríamos $D = 2$, o $D = 0$ (por ejemplo si ϕ envía a ζ^2 en $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$), así concluimos

$$I = 1 \text{ implica } D = 1 \quad \therefore I \equiv D \pmod{2}$$

$$I = 0 \text{ implica } D = 2 \text{ o } D = 0 \quad \therefore I \equiv D \pmod{2}.$$

En general si ϕ envía a C^n sobre una cara de dimensión n en C^m entonces - $I = 1$, en caso contrario $I = 0$. Ahora, si en cada $F \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \varepsilon_{n+1} & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$ esta en uno solo de las $F \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \dots & m \\ \varepsilon_{n+1} & \varepsilon_{n+2} & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}$ como hemos visto en nuestro ejemplo. Resulta claro que si $I = 1$ entonces $D = 1$, por lo tanto tendremos $I \equiv D \pmod{2}$.

Para el caso $I = 0$ basta probar que $D \equiv 0 \pmod{2}$. Supongamos que al menos un término de D no es cero (en nuestro ejemplo si la línea con vértices $(0, 0, \varepsilon_1)$, $(1, 0, \varepsilon_2)$ fuera enviado por ϕ a $F \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Supondremos que cierta cara σ $(n-1)$ dimensional de C^n es enviada por ϕ a una cara $F \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \eta_{n+1} & \dots & \eta_m \end{pmatrix}$ de C^m . Denotaremos por τ la cara $(n-1)$ dimensional de C^n paralela a σ (como se muestra en la figura siguiente)



Entonces cualquier cara $(n-1)$ dimensional de C^n distinta de τ no puede ser enviada por ϕ a una cara $(n-1)$ dimensional de C^m de la forma

$F \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix}$, por que una cara de esta forma es ajena de la cara

$F \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \eta_{n+1} & \dots & \eta_m \end{pmatrix}$, también ϕ no puede enviar a τ en una cara de C^m de la

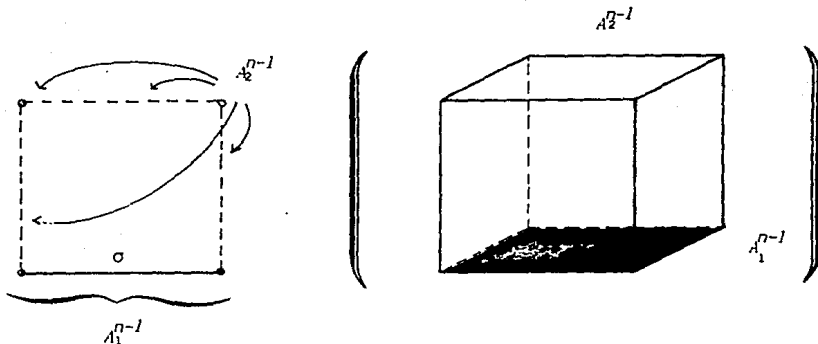
forma $F \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ 1 & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix}$, de otra forma tendríamos $\epsilon_{n+1} = \eta_{n+1}, \epsilon_{n+2} = \eta_{n+2}, \dots,$

$\epsilon_m = \eta_m$ y ϕ enviaría a C^n en $F \begin{pmatrix} n+1 & \dots & m \\ \eta_{n+1} & \dots & \eta_m \end{pmatrix}$, que es nuevamente nuestra

suposición. Por lo tanto

$$(2) \quad \sum_{\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_m \neq 0} \beta \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ 1 & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix} = 0$$

Ahora, sean A_1^{n-1} la $(n-1)$ pseudovariiedad cúbica formada por σ y sus caras (en nuestro ejemplo sería σ y sus dos vértices $(0,0,\epsilon_1)$ y $(1,0,\epsilon_2)$) y A_2^{n-1} la $(n-1)$ pseudovariiedad cúbica formada por todas las caras $(n-1)$ dimensionales de C^n distintas de σ , juntos con sus caras, se ilustra en la siguiente hoja el caso $n=2$.



Hagamos $\phi_1: A_1^{n-1} \rightarrow \zeta^m$ y $\phi_2: A_2^{n-1} \rightarrow \zeta^m$ las restricciones de ϕ sobre A_1^{n-1} y A_2^{n-1} respectivamente. Por nuestra hipótesis de inducción, el lema queda probado para los mapeos cubicos $\zeta^{n-1} \rightarrow \zeta^m$, así el teorema queda probado para ϕ_1 y ϕ_2 . Si denotamos por α_i, β_i los números para ϕ_i ($i = 1, 2$), entonces - para $i = 1, 2$, tenemos

$$\sum \alpha_i \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix} \equiv \sum \beta_i \begin{pmatrix} n-1 & n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Ya que A^{n-1} y A^{n-1} tienen los mismos $(n-2)$ -cubos frontera, así

$$\beta_1 \begin{pmatrix} n-1 & n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix} = \beta_2 \begin{pmatrix} n-1 & n & n+1 & \dots & m \\ 0 & \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$$

pero

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & m \\ \epsilon_n & \epsilon_{n+1} & \dots & \epsilon_m \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$\sum_{\epsilon_n, \dots, \epsilon_m = 0,1} \beta \binom{n \ n+1 \ \dots \ m}{\epsilon_n \ \epsilon_{n+1} \ \dots \ \epsilon_m} \equiv 0, \text{ mod } 2$$

Así

$$\begin{aligned} \sum \beta \binom{n \ n+1 \ \dots \ m}{\epsilon_n \ \epsilon_{n+1} \ \dots \ \epsilon_m} &= \sum \beta \binom{n \ n+1 \ \dots \ m}{0 \ \epsilon_{n+1} \ \dots \ \epsilon_m} + \sum \beta \binom{n \ n+1 \ \dots \ m}{1 \ \epsilon_{n+1} \ \dots \ \epsilon_m} \\ &= \sum \beta \binom{n \ n+1 \ \dots \ m}{0 \ \epsilon_{n+1} \ \dots \ \epsilon_m} \quad \text{por (2)} \end{aligned}$$

y

$$\sum \beta \binom{n \ n+1 \ \dots \ m}{0 \ \epsilon_{n+1} \ \dots \ \epsilon_m} \equiv 0 \text{ mod } 2.$$

con lo cual queda probado el lema III.

CAPITULO 3

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.

- 3.1 DEMOSTRACION DEL TEOREMA
- 3.2 DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE BROUWER
UTILIZANDO EL LEMA DE SPERNER.
- 3.3 EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER
IMPLICA AL LEMA DE SPERNER.

3. EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.

3.1) Demostración del Teorema.

Supongamos que tenemos un líquido en reposo dentro de un vaso, si lo agitamos, de forma que no se perturbe el nivel, y tomamos una fotografía, el teorema del punto fijo de Brouwer asevera que al menos una partícula aparecerá en la misma posición en que estaba originalmente. Ahora bien podemos interpretar el agitar y tomar la fotografía al líquido como una función del volumen - que ocupa el líquido en si misma. Lo que el teorema del punto fijo de Brouwer asevera es que dada una función continua, f , del disco cerrado E^n en si mismo - un punto al menos queda fijo, i.e. existe $x_0 \in E^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.

En este trabajo se demostrará en varias formas este teorema. La primera de ellas se encuentra en muchos libros de texto, involucra algunas propiedades de topología algebraica. Las definiciones y propiedades basicas que se utilizarán se encuentran en el apéndice. Demostrar el teorema requiere de un lema que muestra la no existencia de un retracto. La demostración del teorema se basará posteriormente en mostrar que este hecho implica la existencia de un punto fijo.

Lema:

Sea $E^n = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1 \}$ y $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$
si $f: E^n \rightarrow S^{n-1}$ es tal que $f|_{S^{n-1}} = i$ (idéntidad), entonces f no es continua.

Prueba:

Los respectivos grupos de homología (ver apéndice 1) son

$$H_q(E^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0 \\ 0, & \text{si } q \neq 0 \end{cases} \quad (\mathbb{Z} \text{ grupo ciclico infinito})$$

$$H_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0 \text{ o } q = n-1 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Si f es una función continua de un espacio topológico X en otro Y se tiene que, en cada dimensión, existe un homomorfismo f_* , entre los correspondientes grupos de homología, llamado el homomorfismo inducido por f y que cumple con las dos propiedades siguientes.

(i) Si $f: X \rightarrow X$ es la idéntidad $f_*: H_q(X) \rightarrow H_q(X)$ también es la idéntidad.

(ii) Si f y g son dos funciones continuas tales que $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$

entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Entonces el lema estará probado si hacemos ver que en alguna dimensión no existe el homomorfismo inducido en los correspondientes grupos de homología del siguiente diagrama (g es la inclusión).

$$\begin{array}{ccc}
 & E^n & \\
 g \nearrow & & \searrow f \\
 S^{n-1} & \xrightarrow{i} & S^{n-1}
 \end{array}
 \quad \text{o sea} \quad
 \begin{array}{ccc}
 & H_q(E^n) & \\
 g_* \nearrow & & \searrow f_* \\
 H_q(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_q(S^{n-1})
 \end{array}$$

Para $q = n-1$ tenemos que si f es continua, existe f_* tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
 g_* \nearrow & & \searrow f_* \\
 Z & \xrightarrow{i_*} & Z
 \end{array}$$

lo cual es imposible ya que $i_*(a) = f_*(g_*(a)) = f_*(0) = 0$ para toda a en Z lo cual es una contradicción, por lo tanto f no es continua $\quad \square$.

Teorema:

Si $f: E^n \rightarrow E^n$ es una función continua, entonces existe $x \in E^n$ tal que $f(x) = x$.

Prueba: Supongamos que para toda x en E^n $f(x) \neq x$,

Hagamos $g(x) = x - f(x)$ claramente $g(x)$ nunca es cero, definamos

$$H(x) = x + \alpha(x)g(x), \quad \text{donde} \quad \alpha(x) = \frac{-x \cdot g(x) + [(x \cdot g(x))^2 + (1 - \|x\|^2) \|g(x)\|^2]^{1/2}}{\|g(x)\|^2}$$

Observe que $\alpha(x)$ está bien definida puesto que como $\|x\| \leq 1$

$$[(x \cdot g(x))^2 + (1 - \|x\|^2) \|g(x)\|^2] \geq (x \cdot g(x))^2$$

Ahora bien, si $\|x\| = 1$, tenemos entonces que

$$x \cdot g(x) = 1 - x \cdot f(x) \geq 1 - \|x\| \|f(x)\| \geq 1 - \|f(x)\| \geq 0$$

y por lo tanto $\alpha(x) = [-x \cdot g(x) + \|x \cdot g(x)\|] / \|g(x)\|^2 = 0$

de forma que $H(x) = x$ si $\|x\| = 1$. Además es claro que H es una función continua, por otra parte $\|H(x)\| = 1$. En efecto, ya que

$$\alpha(x) = \frac{\{-x \cdot g(x) + [(x \cdot g(x))^2 + (1 - \|x\|^2) \|g(x)\|^2]^{1/2}\}}{\|g(x)\|^2}$$

$$(\alpha(x) \|g(x)\|^2 + x \cdot g(x))^2 = (x \cdot g(x))^2 + (1 - \|x\|^2) \|g(x)\|^2$$

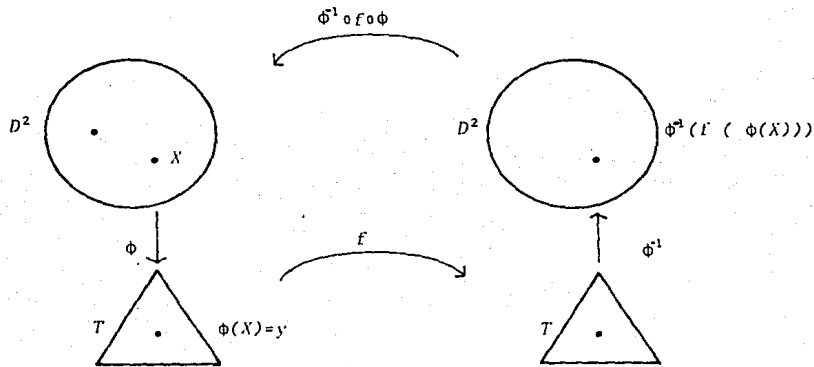
$$\therefore \alpha^2(x) \|g(x)\|^2 + 2\alpha(x) (x \cdot g(x)) + \|x\|^2 = 1$$

$$\therefore \|x + \alpha(x)g(x)\|^2 = 1.$$

En otras palabras $H(x)$ es un retracto continuo de la esfera en su frontera, lo cual es una contradicción, por lo tanto existe $x \in E^n$ tal que $f(x) = x$ ///.

3.2) Demostración del teorema de Brouwer utilizando el Lema de Sperner.

En esta sección se demostrará el teorema de Brouwer en el plano, con la ayuda del lema de Sperner. Antes de ello observemos que demostrar el teorema de Brouwer para funciones continuas que vayan del disco cerrado en el disco cerrado, es equivalente a hacerlo para funciones continuas que vayan del triángulo cerrado en si mismo. Efectivamente si $\phi: D^2 \rightarrow T$ (donde T es el triángulo cerrado) es una biyección continua, entonces si $f: T \rightarrow T$ es una función continua, la función $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ es continua con dominio y contradominio D^2 , es decir, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi: D^2 \rightarrow D^2$ (ver figura siguiente).



y por el Teorema de Brouwer existe $x_0 \in D^2$ tal que $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(x_0) = x_0$. Ahora bien si $y = \phi(x_0)$, $y \in T$ se cumple que $f(y) = f(\phi(x_0)) = \phi \circ \phi^{-1}(f(\phi(x_0))) = \phi((\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_0)) = \phi(x_0) = y$ por lo tanto T tiene un punto fijo. Es claro, además, que el mismo argumento puede utilizarse para

establecer que, si se demuestra el teorema del punto fijo de Brouwer para funciones continuas del triángulo en el triángulo, este será válido para funciones continuas del disco en el disco.

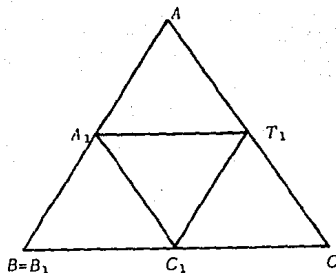
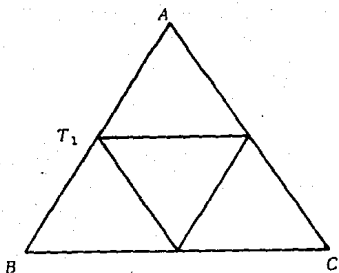
Teorema:

Sea T la región delimitada por un triángulo equilátero cerrado de vértices A, B, C y f una función de T en T , continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe Q de T tal que $f(Q)=Q$.

Prueba:

Supongamos que f no tiene ningún punto fijo, es decir, para todo P de T tenemos $f(P) \neq P$.

Triangulemos el triángulo, como se muestra en la figura y llamemos a esta triangulación T_1



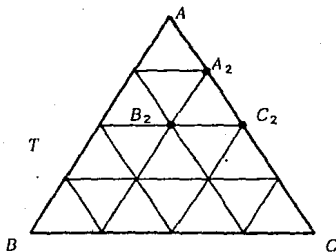
Sea V un vértice de la triangulación. Si la distancia de $f(V)$ a BC es menor que la de V a BC , le damos a V el nombre A . Si la distancia de $f(V)$ a BC es igual o mayor que la de V a BC , entonces examinamos la distancia de $f(V)$ a AC . Si ésta es menor que la de V a AC , entonces damos a V el nombre B .

En otro caso, es decir, si la distancia de $f(V)$ a BC es igual o mayor que la de V a CB y la distancia de $f(V)$ a AC es igual o mayor que la de V a CA , entonces se llamará a este vértice C . Obsérvese que en este caso sucede, que

$$d(f(V), AB) < d(V, AB).$$

Obsérvese también que la denominación de T , sigue la regla de Sperner, para ver esto, si V está en BC , entonces $d(V, BC) = 0$, y si $d(f(V), BC) \geq 0$, lo que implica que V no se llama A , en forma análoga si V está en CA , V no se llama B , y si V está en AB , V no se llama C . Por lo tanto, por el lema de Sperner existe un triángulo de T_1 , con los tres vértices etiquetados A, B, C como se mostró en la figura anterior.

Triangulemos el triángulo ABC de nuevo, como se indica en la figura de abajo y llamemosla. triangulación T_2 .



En forma análoga obtenemos un triángulo $A_2 B_2 C_2$, subdividiendo ABC de nuevo por medio de 2^n líneas paralelas a cada lado, equidistantes entre sí como antes, obtenemos un triángulo $A_n B_n C_n$.

Consideremos la sucesión de puntos $\{A_n\}$. Como es acotada y está en T , existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}$ que converge a un punto Q de T (por ser f continua). Ya que el diámetro de $A_n B_n C_n$ tiende a cero, se verifica también que

$$B_{n_k} \rightarrow Q, C_{n_k} \rightarrow Q, C_{n_k} \rightarrow Q.$$

Obsérvese que

$$d(f(A_n_k), BC) \geq d(A_n_k, BC)$$

$$d(f(B_n_k), AC) \geq d(B_n_k, AC)$$

$$d(f(C_n_k), AB) \geq d(C_n_k, AB)$$

Por otra parte, es claro que si $\{R_k\}$ es una sucesión de puntos que converge a otro punto L y S es una recta fija, entonces tenemos:

$$d(R_k, S) \rightarrow d(L, S)$$

Por lo tanto

$$d(f(Q), BC) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(f(A_n_k), BC) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} d(A_n_k, BC) = d(Q, BC)$$

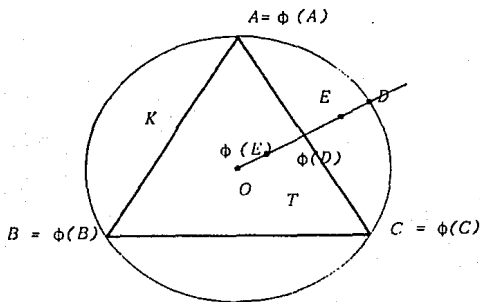
del mismo modo

$$d(f(Q), AB) \geq d(Q, AB)$$

$$d(f(Q), AC) \geq d(Q, AC)$$

Pero esto es imposible a menos que $f(Q) = Q$, que contradice la suposición, y por lo tanto necesariamente para algún punto Q , $f(Q) = Q$. Con esto queda probado el teorema de Brouwer ///

Supongamos ahora que K es un círculo cerrado y T es un triángulo equilátero inscrito en K , sea $\phi: K \rightarrow T$ definida de la siguiente manera (vea la figura que se muestra abajo.).



Para los vértices A, B, C , $\phi(A) = A$, $\phi(B) = B$, $\phi(C) = C$, $\phi(O) = O$. Si un punto D está sobre la circunferencia, $\phi(D)$ será la intersección de OD con el

perímetro del triángulo. Si un punto es interior al círculo, tal como el E, entonces $\phi(E)$ es tal que

$$\frac{OE}{OD} = \frac{O \phi(E)}{O \phi(D)}$$

Es claro que ϕ es biyectiva. En efecto si E y F son dos puntos distintos de K, pero en la misma línea \overline{OD} , tenemos que $OF \neq OE$ y

$$\frac{OE}{OD} \neq \frac{OF}{OD} \quad \text{y} \quad \frac{O \phi(E)}{O \phi(D)} \neq \frac{O \phi(F)}{O \phi(D)} \quad \therefore \quad O \phi(E) \neq O \phi(F)$$

y $\phi(E) \neq \phi(F)$ por lo tanto ϕ es inyectiva.

Si E y F están en líneas distintas pero $OE = OF$, resulta claro que $\phi(E) \neq \phi(F)$ pues ϕ manda a E dentro del triángulo si está afuera o bien lo manda afuera si está adentro.

Por otra parte si E es un punto de T, existe una línea que pasa por O y toca a la circunferencia en D y en $\phi(D)$ al triángulo, hagamos $\phi(E)$ tal que

$$O \phi(E) = \frac{O \phi(D) \cdot OE}{OD} \quad \text{resulta claro que } \phi \text{ es suprayectiva, y por lo tanto } \phi$$

es biyectiva

También ϕ es continua. Así admite una aplicación ϕ^{-1} inversa que es biyectiva y continua ///.

3.3 EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER IMPLICA EL LEMA DE SPERNER.

Esta prueba será hecha por contraposición. Para ello suponemos que existe una subdivisión de T con un etiquetamiento propio, en donde todos los triángulos tienen etiquetas repetidas, es decir, no hay un triángulo completamente etiquetado.

Sea T un triángulo de la subdivisión. Denotaremos por x_i con $i = 0, 1, 2$ a los vértices de este. Definamos ahora una función $F_{0,1}$ de forma tal que si x está en el triángulo $T = \{ x_1 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_1) \mid t, s \in (0, 1) \}$, $F_{0,1}$ proyectará a los puntos del triángulo en las líneas paralelas al segmento x_2x_1 a su punto de intersección con el segmento x_0x_1 (figura # 1)



Figura # 1.

Es claro que los vectores $x_1 - x_0$ y $x_2 - x_1$ son linealmente independientes (de lo contrario x_0, x_1, x_2 serían colineales). Así pues, si $x \in T$ existen t y s únicos en $(0, 1)$ tales que:

$$x = x_1 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_1).$$

Definamos a $F_{0,1}$ de la siguiente manera:

$$F_{0,1} : T \rightarrow \partial T$$

$$F_{0,1}(x_1 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_1)) = x_1 + t(x_1 - x_0)$$

$F_{0,1}$ efectivamente proyecta en la forma deseada pues

$$F_{0,1}(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) = x_1.$$

Observemos además que $F_{0,1}$ deja fijos a los puntos del segmento x_0x_1 .

Efectivamente

$$F_{0,1}(x_1 + t(x_1 - x_0)) = x_1 + t(x_1 - x_0).$$

Una vez definida la función $F_{0,1}$ tomemos un triángulo de la subdivisión y llamémoslo T_1 y sean v_0, v_1, v_2 los vértices del triángulo T con etiquetas 0, 1, 2 respectivamente (figura # 2).

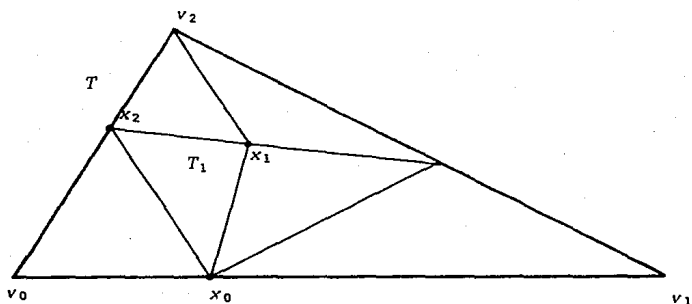


Figura # 2.

Por hipótesis no existe un triángulo en la subdivisión completamente etiquetado, así en el triángulo T_1 al menos dos de sus vértices tienen etiquetas iguales (figura # 3).

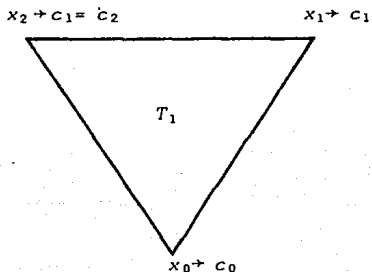


Figura # 3.

Sin pérdida de generalidad supongamos que los vértices x_0, x_1, x_2 del triángulo T_1 tienen etiquetas c_0, c_1, c_2 respectivamente, con $c_1 = c_2$.

Definamos ahora una función, que mande a las aristas de los triángulos de la subdivisión a las aristas del triángulo de etiquetamiento. Esto es,

$$\text{Sea } A_{ij} = \{ x \mid x = x_i + \lambda(x_j - x_i), \lambda \in (0, 1) \}$$

y hagamos

$$\mathcal{G}_{T_1}^x : A_{ij} \rightarrow \partial T$$

con regla de correspondencia

$$\mathcal{G}_{T_1}^x(x_i + \lambda(x_j - x_i)) = v_{c_i} + \lambda(v_{c_j} - v_{c_i}), \lambda \in (0, 1).$$

Por definición $\mathcal{G}_{T_1}^x$ tiene la propiedad de que si x está en un segmento, con vértices con la misma etiqueta, digamos v_c entonces

$$\mathcal{G}_{T_1}^x(x) = v_c.$$

Efectivamente si $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$, entonces $\mathcal{G}_{T_1}^x(x) = v_c + \lambda(v_c - v_c) = v_c$.

Definamos ahora a la función G_{T_1} que mande a los puntos de los triángulos T_1 a la frontera del triángulo de etiquetamiento, de la siguiente forma

$$G_{T_1} : T_1 \rightarrow \partial T$$

con

$$G_{T_1} = \mathcal{G}_{T_1}^x \circ F_{0,1}$$

Por último definamos a $G: T \rightarrow \partial T$ como

$$G(x) = G_{T_1}(x) \text{ si } x \in T_1.$$

Haremos las siguientes observaciones:

- 1) G está bien definida,
- 2) Si G_{T_1} es continua para toda T_i , entonces G es continua

Prueba:

- 1) Como los interiores de los triángulos son ajenos, para $x \in \text{int}(T_1)$, $G(x)$ está bien definida.

Consideremos pues a $x \in \partial T_1$. Si x es un vértice de T_i , entonces tiene una etiqueta c . La definición de la función G es tal que independientemente del triángulo del que es vértice, si x tiene etiqueta c , $G(x) = v_c$. En efecto, si los otros dos vértices del triángulo T_i tienen la misma etiqueta c , $G_{T_i}(x) = v_c$. Ahora bien,

si alguno de los vértices tiene otra etiqueta (recordemos que en el triángulo T_i sólo puede haber a lo más dos etiquetas distintas) observemos que la función $F_{0,1}$ fue definida de tal forma que lleva vértices a vértices y que los índices que se escogieron en la definición de la función G_T fueron tales para que la F dejara al vértice fijo o bien lo llevara a otro con la misma etiqueta. Por último, observemos que G_T lleva a los extremos del segmento a los vértices del triángulo con la etiqueta correspondiente, es decir,

$$G_T(x) = G_T(x + 0(x' - x)) = v_c.$$

Ahora bien, si $x \in \partial T_i$ y no es un vértice entonces es de la forma $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$ con $\lambda \in (0,1)$ y x_0, x_1 vértices de T_i . Como la subdivisión es propia, ningún elemento del segmento $A_{01}(\{x_0, x_1\})$ es vértice de otro triángulo y el segmento $A_{01}(\{x_0, x_1\})$ puede ser a lo más un lado de otro triángulo, al que denotaremos T_j . Así pues tenemos dos posibilidades:

- a) $c_0 = c_1$. Esto es, el punto está en un segmento cuyos vértices tienen etiquetas iguales. Como se observó $G_{T_0}(x) = G_{T_1}(x) = v_{c_0} = v_c$.
- b) $c_0 \neq c_1$. En este caso

$$G_{T_i}(x) = G_{T_i}(x) = v_{c_0} + \lambda v_{c_1} = G_{T_2}(x) = G_{T_2}(x).$$

Así pues la función está bien definida.

- 2) Esto es inmediato puesto que si

$$f: (X, \zeta) \rightarrow (Y, \zeta')$$

y existen $A, B \subset X$ cerrados tales que $A \cup B = X$ y que $f|_A$ es continua y $f|_B$ es continua, entonces f es continua. ///

CAPITULO 4

EL LEMA DE FAN.

- 4.1 EL LEMA DE FAN.
- 4.2 EL LEMA DE FAN Y SU RELACION CON EL
TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.
- 4.3 UNA PRUEBA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL
ALGEBRA MEDIANTE EL LEMA DE SPERNER.

4.1 EL LEMA DE FAN

Existe un resultado análogo al lema de Sperner llamado el lema de Fan. Antes de enunciarlo demostraremos de nuevo el lema de Sperner, utilizando la idea que posteriormente se aplicará en la prueba del lema de Fan.

Etiquetemos primero por 0 y 1 a los puntos extremos de un segmento de recta (ver figura # 1).

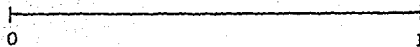


Figura # 1

Marquemos ahora un número arbitrario de puntos sobre el segmento y etiquetemos con cualquier valor 0 o 1 a dichos puntos (figura # 2)

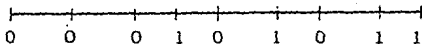


Figura # 2.

El lema de Sperner nos afirma que existe al menos un pequeño segmento cuyos extremos también están etiquetados con 0 o 1 (0 o 1 y 0). Si en el ejemplo anterior separamos los pequeños segmentos (figura #3) observamos que:

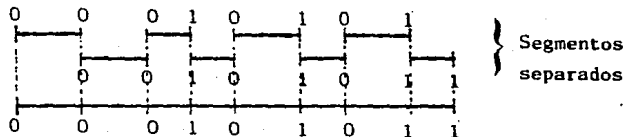


Figura # 3.

Hay dos segmentos con doble cero y por tanto contamos $2(2) = 4$ vértices etiquetados con cero. Hay cinco segmentos con uno de los extremos cero y el otro uno, así que hay 5 etiquetas cero. Así, el número total de etiquetas cero es de $2(2) + 5 = 9$, que es un número impar. En general, supongamos que hay a segmentos con doble cero, tendremos entonces $2a$ vértices con etiqueta cero. Si hay b segmentos con etiqueta cero en un extremo y uno en el otro, contaremos entonces b vértices etiquetados con un cero. Tendremos por tanto $2a + b$ vértices con etiqueta cero.

Ahora bien, todas las etiquetas cero coinciden con dos segmentos de la subdivisión, exceptuando la etiqueta cero correspondiente al extremo de la línea original. Así pues, las etiquetas cero están contadas dos veces como extremo de los segmentos de la subdivisión, y por tanto la cantidad total de etiquetas cero debe ser dos veces el número de puntos etiquetados con cero sobre el interior de la línea más uno. Como este número es impar, $2a + b$ también lo es. Es claro que esto implica que b es impar. Pero como por definición b es el número de segmentos con etiqueta cero en un extremo y uno en el otro, concluimos por tanto que hay siempre un número impar de tales segmentos. En otras palabras, existe al menos un pequeño segmento cuyos extremos también están etiquetados por 0 y 1.

La demostración del lema de Sperner para el caso de dimensión uno nos da la pauta para su demostración en mayores dimensiones. El punto central en

la anterior demostración, fue el hecho de que el número de segmentos con extremos etiquetados cero y uno es impar.

Ya hemos establecido, en la sección 1.2, bajo que condiciones una subdivisión satisface la regla de Sperner en el caso de dimensión $n=2$. A continuación daremos la condición en el caso general.

Diremos que una subdivisión de un n -simplejo S (ver 2.1) satisface la regla de Sperner, si es un conjunto finito $\{S_i\}$ de n -simplejos, cada uno contenido en S y tal que:

- 1) Cada punto de S está contenido en al menos un simplejo de $\{S_i\}$.
- 2) Dos simplejos diferentes S_j, S_k de $\{S_i\}$ no se intersectan en un punto interior de ellos.
- 3) Si p es un vértice de cualquier simplejo S_j de $\{S_i\}$, entonces es un vértice de cada simplejo S_k de $\{S_i\}$ en los cuales incide.

Ahora estamos en condiciones de establecer el lema de Sperner.

lema.

Para cualquier etiquetamiento admisible del conjunto de vértices de cualquier subdivisión satisfaciendo la regla de Sperner, de un n -simplejo, existe al menos un simplejo S_j de la subdivisión, con vértices que tienen un conjunto completo de etiquetas.

Mostraremos primero, sin embargo, una afirmación más fuerte:

El número de simplejos de una subdivisión que satisface la regla de Sperner, con vértices completamente etiquetados, es impar.

Es claro que de aquí se concluye el lema de Sperner. Para fijar ideas, daremos primero la demostración de la afirmación fuerte para el caso $n=2$.

Dibujemos un 2-simplejo cuyos vértices están etiquetados con 0, 1 y 2 (figura # 4).

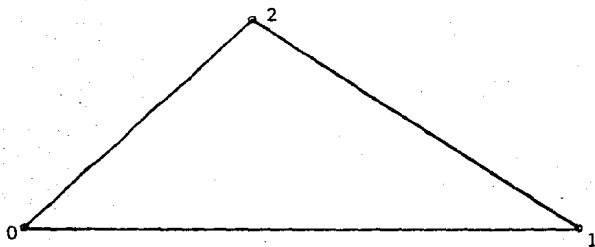


Figura # 4

Ahora, hagamos una subdivisión arbitraria, pero que satisfaga la regla de Sperner (Figura # 5a)

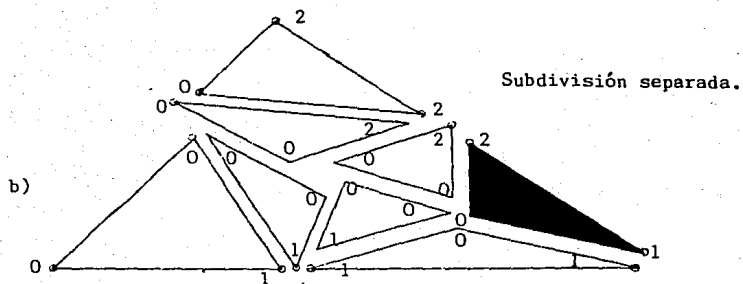
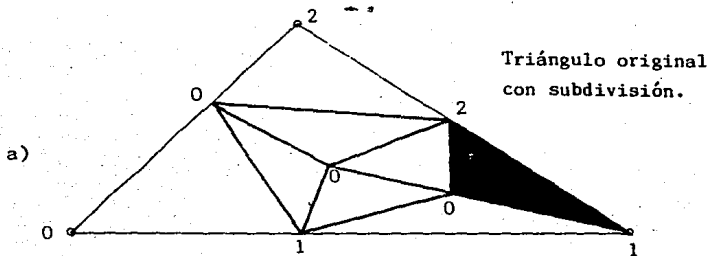


Figura # 5

Denotemos en este caso por a_1 al número de simplejos que tienen dos etiquetas cero y una etiqueta uno, y por a_2 al número de simplejos con dos etiquetas uno y una etiqueta cero. Así pues, $a = a_1 + a_2$ es el número de 2-simplejos que tienen una etiqueta cero y una etiqueta uno y carecen de una etiqueta dos. Definamos por otro lado a b como el número de triángulos que están totalmente etiquetados con 0, 1 y 2. Por lo tanto, hay $2a + b$ lados conteniendo un cero y un uno. Algunos de los lados, los que separan triángulos coincidentes, están contados dos veces. Los otros, caen sobre la frontera grande y por tanto, están contados solo una vez. Ahora bien, como esta etiquetada según la regla de Sperner. Todos los lados que están en la frontera, etiquetados con 0 y 1 en sus extremos, caen sobre el lado del simplejo grande que tiene sus vértices etiquetados con 0 y 1. Ahora bien, el lema de Sperner en una sola dimensión nos indica que el número de estos es forzosamente impar, y por tanto, el número de segmentos de los triángulos de la subdivisión, etiquetados con cero y uno, es impar. Como este número coincide con $2a + b$, concluimos que también b lo es. Así pues, queda probada la afirmación fuerte para el caso $n=2$.

Para la demostración en el caso general, supondremos que la afirmación fuerte vale para un k -simplejo. Demostraremos que bajo esa suposición, tal afirmación también es cierta para un $(k + 1)$ -simplejo. Por lo tanto, por inducción, la afirmación quedará probada para cualquier n -simplejo.

Sea a el número de simplejos de la subdivisión con vértices etiquetados 0, 1, 2 ... k , pero no con la etiqueta $k+1$. Como cualquier $(k+1)$ -simplejo tiene exactamente $k+2$ vértices, cada uno de estos simplejos tiene una etiqueta repetida. Hay, entonces, exactamente dos maneras en cada uno de estos simplejos en que se pueden asociar con un k -simplejo totalmente etiquetado. De aquí que el número de k -caras totalmente etiquetadas en este conjunto de simplejos de la subdivisión es exactamente $2a$. Similarmente, si hay b simplejos de la subdivisión totalmente etiquetados, es decir, teniendo sus vértices las

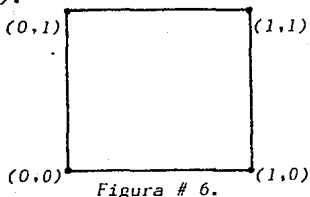
etiquetas $0, 1, 2, \dots, k+1$, entonces cada uno de ellos tiene solo una k -cara - totalmente etiquetada, y el número de tales k -caras en estos simplejos de la subdivisión es b . Por consiguiente, el número total de k -caras de los simplejos de la subdivisión etiquetadas de 0 hasta k es $2a + b$.

Como hemos visto en los dos ejemplos anteriores, algunos de estas caras están dentro del simplejo original y otras sobre la frontera, aquéllos que caen dentro deben coincidir exactamente con dos simplejos de la subdivisión. Aquellos que están sobre la frontera sólo coinciden con un simplejo de la subdivisión. Todos ellos están sobre el k -simplejo asociado naturalmente con el $(k+1)$ -simplejo original totalmente etiquetado (ya que cualquier otra k -cara del $(k+1)$ -simplejo excluye una de esas etiquetas).

La hipótesis de inducción es que la afirmación fuerte es cierta para simplejos de dimensión k ; por lo tanto el número de k -caras de la subdivisión contadas una vez es impar. La cantidad total, como en los ejemplos anteriores, es este número impar más dos veces el número de k -caras contadas dos veces, y este es nuevamente un número impar, y esto implica que b es impar. Como b es el número de simplejos de la subdivisión totalmente etiquetados, queda probada la afirmación fuerte ///.

Ahora, con esta idea daremos la prueba del lema de Fan para el caso de 2 dimensiones. Primero aclararemos la notación que se usará.

Sea $\Gamma_p = \{ I \mid 0 \leq I \leq p \}$ donde p es un entero positivo. Por ejemplo en el caso de dimensión dos $\Gamma_1 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$. A un cuadrado cuyos vértices sean etiquetados con estos vectores, lo llamaremos un cuadrado completamente etiquetado (figura # 6).



Tomemos un cuadrado completamente etiquetado y hagamos una división de -
 el en cuadrados pequeños. Etiquetemos los nuevos vértices de la malla con las
 siguientes restricciones:

- 1) Los vértices que estén sobre la línea cuyos extremos hayan sido -
 etiquetados $(0,0)$ y $(1,0)$ serán etiquetados con $(0,0)$ o $(1,0)$ los -
 que estén sobre la línea con extremos etiquetados $(0,0)$ y $(0,1)$ lo -
 serán únicamente con $(0,0)$ o $(0,1)$, en los demás casos se precede de
 manera análoga.
- 2) Los vértices interiores se etiquetaran con la única condición de
 que los vértices vecinos tienen la misma etiqueta o etiquetas vecinas
 en la figura # 7 se muestra un ejemplo

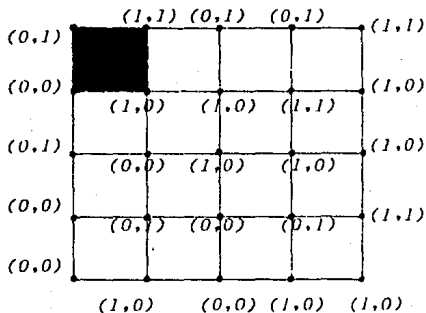


Figura # 7.

Lo que afirma el lema de Fan es que existe un número impar y por lo tanto
 no cero de cuadrados de la división completamente etiquetados. En el ejemplo -
 anterior existe sólo un cuadro, el cual aparece sombreado.

Una vez hechas estas observaciones, estamos en condición de establecer -
 el lema de Fan:

Lema. Sea $\Gamma_p = \{I \mid 0 \leq I \leq p\}$ para p un entero positivo. Sea F una fun--

ción definida de Γ_p en Γ_1 tal que

$$1) \quad 0 \leq I - 2F(I) + 1 \leq p \quad \text{para } I \in \Gamma_p.$$

2) Si I e I' son vértices adyacentes de Γ_p , entonces $F(I)$ y $F(I')$ son vértices adyacentes de Γ_1 o coinciden.

Entonces existe un número impar de pequeños "cubos" de Γ_p que son enviados sobre Γ_1 .

En cualquier dimensión Γ_p consiste de los vértices de una subdivisión del cubo de dimensión n en cubos más pequeños. La función F asigna a cada vértice I de Γ_p una etiqueta $F(I) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ con componentes 0 o 1 puesto que F toma valores en Γ_1 . Ahora bien, la condición 1) sólo establece la restricción en la forma de etiquetar los vértices en las caras. Así, si

$$I = (0, i_2, \dots, i_n), \text{ tenemos } 0 \leq 0 - 2f_1 + 1 \leq p$$

$$\text{de aquí que } 2f_1 \leq 1$$

$$\text{y por lo tanto } f_1 = 0.$$

Se puede proceder de manera análoga para cualquier componente cero, es decir si $i_j = 0$, entonces $f_j = 0$, para $j=1, 2, \dots, n$. Por otra parte, si

$$I = (p, i_2, i_3, \dots, i_n), \text{ entonces}$$

$$0 \leq p - 2f_1 + 1 \leq p$$

$$\text{así } -2f_1 + 1 \leq 0$$

$$\text{de donde } 2f_1 \geq 1$$

$$\text{y por lo tanto } f_1 = 1.$$

De forma análoga si $i_j = p$, entonces $f_j = 1$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Ahora, si $I = (q, i_2, i_3, \dots, i_n)$ con $0 < q < p$, tenemos

$$0 \leq q - 2f_1 + 1 \leq p$$

$$\text{de aquí que } 2f_1 \leq q+1$$

por lo que f_1 puede tomar cualquier valor cero o uno. Ahora bien, observando que $q < p$ entonces $q+1 \leq p$ y como $p - (q+1) \geq 0 \therefore -2f_1 \leq p - (q+1)$, por lo que

fi puede ser cero o uno. Es claro que se puede proceder en forma similar para cualquier componente q con $0 < q < p$.

Demostraremos ahora el lema de Fan para el caso $n=2$, tomemos a Γ_p etiquetada de forma tal que cumpla con las hipótesis del lema de Fan (figura # 7).

Consideremos ahora un pequeño cuadrado de Γ_p . Es obvio que si esta completamente etiquetado sólo hay un segmento, $(0,0)-(1,0)$, en el cuadrado. Por otro lado supongamos que este cuadro no está completamente etiquetado y contiene al menos un segmento de la forma $(0,0)-(1,0)$ (figura # 8).

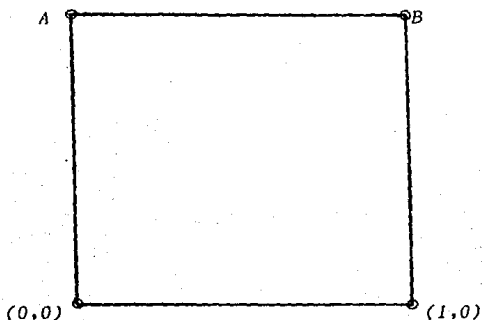


Figura # 8.

Por hipótesis esta etiquetado con las restricciones de Fan, la etiqueta A debe ser vecina de $(0,0)$ o $(0,0)$ mismo. Esto es $A=(0,0)$ o $(0,1)$ o $(1,0)$ pero no puede ser $(1,1)$. Análogamente $B=(1,0)$ o $(1,1)$ o $(0,0)$ pero no $(0,1)$. Por otro lado, las etiquetas A y B deben corresponder a vecinos, de esta forma quedan excluidos los casos $A=(0,1)$ y $B=(1,0)$ así como $A=(0,0)$ y $B=(1,1)$. Esto es, las etiquetas válidas son:

- 1) $A=(0,0)$ y $B=(1,0)$,
- 2) $A=(0,0)$ y $B=(0,0)$,
- 3) $A=(0,1)$ y $B=(1,1)$,

$$4) A = (0,1) \text{ y } B = (0,0),$$

$$5) A = (1,0) \text{ y } B = (1,0).$$

$$6) A = (1,0) \text{ y } B = (1,1),$$

$$7) A = (1,0) \text{ y } B = (0,0).$$

Ahora bien, estamos suponiendo que el cuadrado no está totalmente etiquetado, por lo que el tercer caso no es válido.

Procedamos ahora a contar el número de segmentos de la forma $(0,0)-(1,0)$ que contienen estos cuadros. Es fácil ver que el séptimo caso, el cuadrado contiene cuatro segmentos de esta forma y los casos restantes sólo contienen dos.

Si denotamos por N a la suma sobre todos los pequeños cuadros del número de segmentos $(0,0)-(1,0)$, obtenemos que

$$N = 4C + 2D + E,$$

donde C es el número de cuadros etiquetados de forma equivalente al séptimo caso, D es el número de cuadros etiquetados en forma equivalente a los casos 1, 2, 4, 5 y 6, finalmente E es el número de cuadrados completamente etiquetados.

Por otro lado, observemos que podemos calcular N sumando primero a los segmentos $(0,0)-(1,0)$ que corresponden a un lado interior en Γ_p y posteriormente añadir a los que corresponden a un lado exterior. Esto es

$$N = i + e,$$

donde i es la suma de los segmentos $(0,0)-(1,0)$ correspondientes a lados interiores y e a los correspondientes a exteriores.

Observese que por hipótesis del lema los segmentos $(0,0)-(1,0)$ sólo pueden darse en la cara inferior de Γ_p , y que por tanto, por el lema de Sperner para $n=1$, el número será impar. Por otro lado, es claro que los segmentos interiores serán contados dos veces, y por tanto i será par.

Así pues concluimos que N es impar y por consiguiente también lo será E . Para demostrar el lema de Fan para dimensión n se utiliza el resultado que

demostramos sobre mapas de vértices cúbicos en la sección 2.2. La idea de demostración del lema es exactamente la misma que acabamos de utilizar. En efecto en la sección 2.2 demostramos que

$$\alpha \binom{i}{n} \equiv \beta \binom{i}{n} \pmod{2}$$

En particular en el caso $i=2$, $=0$ la igualdad nos dirá que el número de cubos totalmente etiquetados coincide módulo 2 con el número de caras etiquetadas en la misma forma que la cara $x_n = 0$ de C^n (i.e. el número de caras con etiquetas $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ con $x_i = 0$ o 1).

Ahora bien es claro, que el número de caras interiores se ha contado dos veces y por consiguiente es par. Por otro lado el número de los de la frontera, por inducción, es impar. Así pues β es un número impar y por tanto así lo será α .

4.2 . EL LEMA DE FAN Y SU RELACION CON EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.

En esta sección se demostrará que el lema de Fan implica el teorema del punto fijo de Brouwer.

La demostración la haremos por contraposición. Para ello primeramente hagamos la siguiente observación.

Sea I_1 un cuadrado con centro en el origen y de longitud 1, definamos pa ra $A=(a_1, a_2) \in I_1$, $\|A\| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$. Supongamos que existe una función continua $f: I_1 \rightarrow I_1$ sin puntos fijos, es decir $\forall x \in I_1, f(x) \neq x$. Vemos claramente que la función $g(x) = \|x - f(x)\|$ tiene por dominio a I_1 , como I_1 es compacto g alcanza un mínimo, digamos m . Ahora, tomemos $S > 1/m$ y definamos la siguiente función continua:

$$h(x) = f(x) + S(x - f(x))$$

tomando en cuenta que $\|f(x)\| \leq 1$ y $S\|x - f(x)\| > 1$, resulta que:

$$\|h(x)\| = \|f(x) + S(x - f(x))\| \geq \|f(x)\| - S\|x - f(x)\| > 0$$

Definamos la función $F: I_1 \rightarrow \partial I_1$ por $F(x) = h(x) / \|h(x)\|$. Esta función es continua y además tiene la propiedad de que:

$$F(x) \Big|_{\partial I_1} = I_1$$

Así pues, suponer que existe una función continua $f: I_1 \rightarrow I_1$ sin puntos fijos, nos conduce a la existencia de un retracts, esto es, una función continua $F: I_1 \rightarrow \partial I_1$ tal que $F \Big|_{\partial I_1} = I_1$.

Es claro que este resultado es válido independientemente de las dimensiones del cuadrado y su posición en el plano. Para demostrar el lema supondremos por tanto la existencia de un retracts $F: I \rightarrow \partial I$, donde I es el cuadrado unitario.

Ahora, dividamos a ∂I en cuatro subconjuntos ajenos, los cuales se definen a continuación:

$$B_{(0,0)} = \{(x,y) \mid x=0, 0 \leq y < 1/2\} \cup \{(x,y) \mid y=0, 0 \leq x < 1/2\}$$

$$B_{(1,0)} = \{(x,y) \mid y=0, 1/2 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid x=1, 0 \leq y < 1/2\}$$

$$B_{(1,1)} = \{(x,y) \mid y=1, 1/2 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid x=1, 1/2 \leq y \leq 1\}$$

$$B_{(0,1)} = \{(x,y) \mid x=0, 1/2 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid y=1, 0 \leq x < 1/2\}$$

Por ser F continua en I , resulta ser uniformemente continua, por lo que $\exists \delta > 0$ tal que $|F(X) - F(Y)| < 1/2$ siempre y cuando $|X - Y| < \delta$, con $X, Y \in I$ (aquí $|\cdot|$ es la norma usual).

Hagamos una subdivisión cuadriculada de I de manera que los vértices correspondan a puntos de la forma $(j/n, k/n)$ con j y k números naturales menores o iguales a n y de lados paralelos a los ejes (fig. # 1).

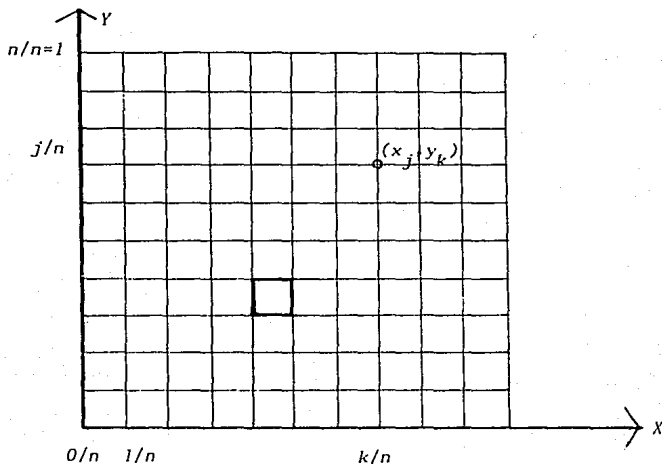


Figura # 1

Escojamos a n de forma que se satisfaga la condición $1/n < \delta/\sqrt{2}$. Etiquetemos a los vértices de esta subdivisión de la siguiente manera:

Si $F(x_j, y_k) \in B_{(0,0)}$, entonces $l(x_j, y_k) = (0,0)$

Si $F(x_j, y_k) \in B_{(1,1)}$, entonces $l(x_j, y_k) = (1,1)$

Si $F(x_j, y_k) \in B_{(1,0)}$, entonces $l(x_j, y_k) = (1,0)$

Si $F(x_j, y_k) \in B_{(0,1)}$, entonces $l(x_j, y_k) = (0,1)$.

Veremos que este etiquetamiento cumple con las condiciones del lema de Fan

- 1) Si un vértice está en el segmento cuyos extremos están etiquetados -- con $(0,0)$ y $(1,0)$, entonces resulta claro que $F|_{\partial I} = l|_{\partial I}$, i.e. todos los puntos son fijos y que $F(0, y_k) \in B_{(0,0)}$ o bien $F(0, y_k) \in B_{(1,0)}$.

En otras palabras, este vértice sólo puede tener la etiqueta $(0,0)$ o $(1,0)$. En los otros tres casos la situación es análoga.

2) Vértices vecinos son etiquetadas con etiquetas vecinas o iguales.

Analicemos las etiquetas que pueden ser asignadas a los vértices de un cuadro de la subdivisión. Empecemos con el vértice inferior izquierdo (figura # 2). Supondremos que este vértice ha sido etiquetado con la etiqueta $(0,0)$, es decir, el vértice (x_j, y_k) tiene su imagen en $B_{(0,0)}$ ($F(x_j, y_k) \in B_{(0,0)}$).

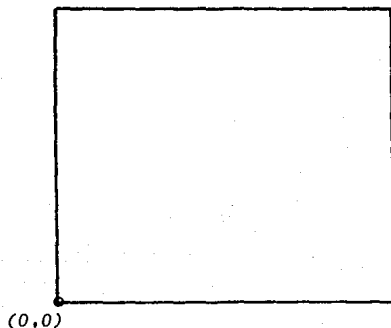


Figura # 2.

El vértice inferior derecho $(x_j + 1/n, y_k)$, dista de (x_j, y_k) por

$$|(x_j, y_k) - (x_j + 1/n, y_k)| = |(1/n, 0)| = 1/n < \delta / \sqrt{2} < \delta,$$

y por la condición de continuidad uniforme

$$|F(x_j, y_k) - F(x_j + 1/n, y_k)| < 1/2$$

por lo que solo puede suceder

a) $F(x_j + 1/n, y_k) \in B_{(0,0)}$

b) $F(x_j + 1/n, y_k) \in B_{(0,1)}$

c) $F(x_j + 1/n, y_k) \in B_{(1,0)}$

y por lo tanto

$$F(x_j + 1/n, y_k) = \begin{cases} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \end{cases} \quad 59$$

Resulta claro que se presenta ésta misma situación para todos los vértices

De esta forma, hemos visto que dicho etiquetamiento cumple con las condiciones del lema de Fan. Ahora bien, esta subdivisión no tiene cuadrados completamente etiquetados, en efecto, tomemos un vértice X con etiqueta (c_j, c_k)

$(c_j = 0, 1, c_k = 0, 1)$, y el vértice Y opuesto por la diagonal, con etiqueta (c'_j, c'_k) $(c'_j = 0, 1, c'_k = 0, 1)$, la distancia entre los vértices es de $\frac{1}{n}\sqrt{2}$, pero hemos tomado la condición $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, por lo que $|X - Y| < \delta$ y por lo tanto

$|F(X) - F(Y)| < 1/2$. Así pues, (c_j, c_k) y (c'_j, c'_k) son vecinas. Claramente las otras dos etiquetas también son vecinas y el cuadro no puede estar totalmente etiquetado. Concluimos por tanto que no se cumple la conclusión del lema de Fan, y por tanto f no puede dejar de tener puntos fijos ///.

Este resultado puede ser generalizado a dimensiones mayores. Claramente la demostración de la primera aseveración, i.e. de que la existencia de una función continua del cubo unitario al cubo unitario, sin puntos fijos, implicará la existencia de un retracto, también es válida para I^n .

Por otro lado, la segunda parte de la demostración podría llevarse a cabo definiendo una adecuada subdivisión de ∂I^n para definir el etiquetamiento. La subdivisión por esquinas es la que nos dará la demostración:

$$B_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1=0, \dots, x_{n-1}=0, 0 \leq x_n < 1/2 \} \cup \dots \cup \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1=1, \dots, x_{n-1}=1, 1/2 \leq x_n < 1 \}.$$

y el etiquetamiento

$$I(X) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \text{ si } F(X) \in B_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)}$$

la demostración se seguira en forma totalmente similar, pidiendo al número de subdivisiones n que satisfaga $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

4.3 UNA PRUEBA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

MEDIANTE EL LEMA DE SPERNER.

En esta sección daremos una demostración del teorema fundamental del álgebra debida a Harold W. Kuhn, nace esta prueba de la idea dada en el lema de Sperner y el teorema del punto fijo de Brouwer, esta basada en un procedimiento de etiquetamiento del plano que resulta natural.

La demostración se divide en cuatro lemas y un teorema, el teorema fundamental del álgebra es una consecuencia inmediata de ellos.

Como sabemos si $f(z)$ es un polinomio de grado n en z sobre los números complejos, entonces:

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \text{ con } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ constantes complejas}$$

Si z_1 es tal que $f(z_1) = 0$, z_1 recibe el nombre de raíz de f . El teorema fundamental del álgebra afirma que para todo polinomio f existe al menos una raíz z_1 .

Ahora bien el polinomio induce un etiquetamiento del plano complejo. Efectivamente si definimos el argumento de $f(z)$ ($\arg f(z)$) para $f(z) \neq 0$ como el único ángulo α tal que $-\pi < \alpha \leq \pi$ y $\cos \alpha = u/\sqrt{u^2+v^2}$, $\sin \alpha = v/\sqrt{u^2+v^2}$, donde $f(z) = u + iv$ con u y v reales, el $\arg f(z)$ determina la etiqueta ($l(z)$) mediante la siguiente regla:

$$l(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi/3 \leq \arg f(z) \leq \pi/3 \text{ ó } f(z) = 0 \\ 1 & \text{si } \pi/3 \leq \arg f(z) \leq \pi \\ 2 & \text{si } -\pi \leq \arg f(z) \leq -\pi/3 \end{cases}$$

Ejemplos

- 1) $f(z) = a + ib$ con a y b constantes positivas

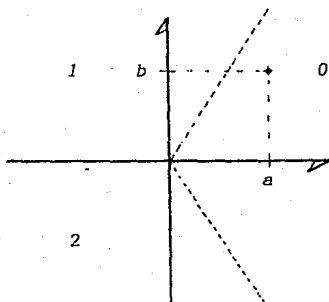
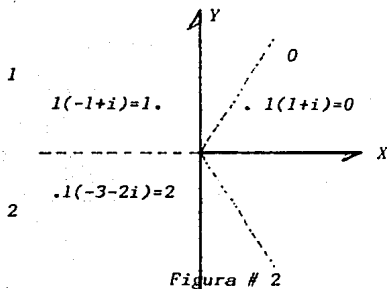


Figura # 1

2) $f(z) = z$ con $z = x + iy$ donde x, y son reales



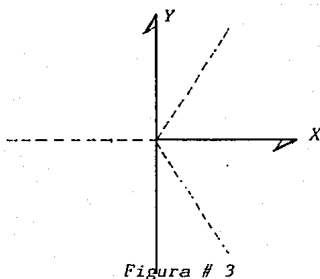
En este ejemplo tenemos que:

si $z = 1 + i$ entonces $l(z) = 0$

$z = -1+i$ entonces $l(z) = 1$

$z = -3 - 2i$ entonces $l(z) = 2$.

3) Sea $f(z) = r^2 e^{2i\theta}$ con $z = r e^{i\theta}$



$\theta = \pi/12$ entonces $l(z) = 0$

Para $r = 1$ y $\theta = \pi/4$ entonces $l(z) = 1$

$\theta = -\pi/4$ entonces $l(z) = 2$.

Una vez vistos nuestros preliminares pasemos a nuestro primer lema.

Lema 1

Si z_0, z_1, z_2 son tales que $l(z_k) = k$ y $|f(z_j) - f(z_k)| \leq \epsilon$
 para $j, k = 0, 1, 2$ entonces $|f(z_k)| \leq 2\epsilon/\sqrt{3}$

Prueba:

En la figura # 4 se dibujan los valores de $f(z)$ en el plano complejo. Las regiones que induce $l(z) = 0, 1, 2$ están etiquetados de acuerdo a la definición. De las hipótesis del lema 1, el conjunto sombreado A muestra todos los $w = f(z)$ con $l(z) = 0$ que están a una distancia ϵ de las regiones 1 y 2. Con ayuda de la figura 4.a y tomando $\text{sen } 60^\circ = \epsilon / |f(z_0)|$ se concluye que $|f(z_0)| \leq \epsilon / \text{sen } 60^\circ = 2\epsilon/\sqrt{3}$.

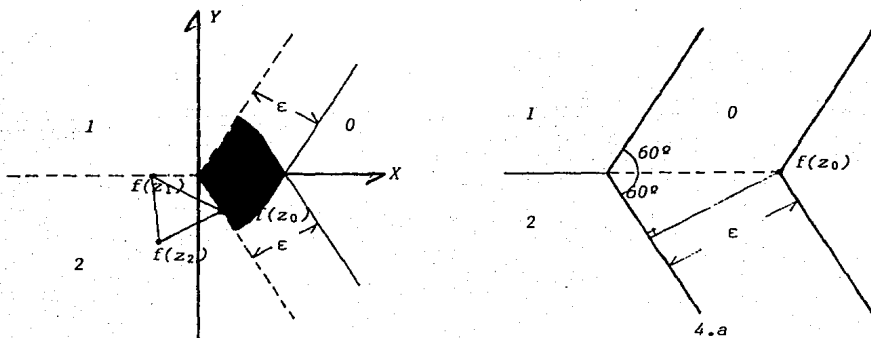


Figura # 4

Los casos restantes se prueban de manera análoga.

Restrinjamonos en nuestra búsqueda de una raíz a un conjunto acotado fijo en el plano complejo, la continuidad uniforme de $f(z)$ asegurará que los triángulos pequeños $\{z_0, z_1, z_2\}$ en este conjunto son mapeados en triángulos pequeños $\{f(z_0), f(z_1), f(z_2)\}$. Si el triángulo pequeño $\{z_0, z_1, z_2\}$ conduce a un conjunto de etiquetas completo 0, 1, 2 a través de $l(z_k)$ entonces el lema 1 nos asegura que $f(z_k)$ es pequeño. Como deseamos encontrar una raíz este resultado nos lleva a buscar, en los triángulos pequeños en el plano complejo, a uno con un conjunto

completo de etiquetas. Para obtener un gran número de triángulos en el plano, consideremos la malla cuadrada con lado $h > 0$ dividida en cada cuadrado a lo largo de la diagonal, como se muestra en la figura # 5.

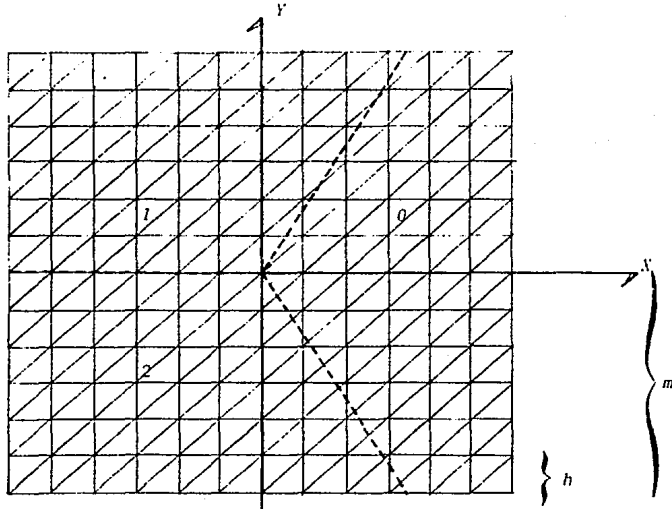


Figura # 5

Consideremos ahora el cuadrado $Q_{m,h}$ centrado en el origen y de lado $r = mh$ esto es $Q_{m,h} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, |x| \leq r, |y| \leq r, \text{ con } r = mh\}$.

La existencia de triángulos pequeños completamente etiquetados es positiva. Efectivamente tenemos:

Teorema 1 :

Existe un r fijo tal que, para toda m bastante grande, cualquier $Q_{m,h}$ contiene un triángulo completamente etiquetado.

Mostraremos el teorema 1 a través de tres lemas. A cada uno de los triángulos Δ del cuadrado triángulado $Q_{m,h}$ orientemoslos con la orientación positiva usual (figura #6). Esto nos induce una orientación de la frontera $\partial Q_{m,h}$ del cuadrado, el cual es subdividido en $8m$ lados (z_0, z_1) de longitud h como se muestra en la figura # 5. Cada lado nos conduce a un par de niveles ordenados (l_0, l_1)

Lema 1.1 Si existe al menos un lado etiquetado $(0,1)$ y no hay lados eti-

quetados $(1,0)$ en $\partial Q_{m,h}$, entonces $Q_{m,h}$ contiene un triángulo completamente etiquetado.

Prueba:

Construyamos una sucesión de triángulos distintos $\Delta_1, \dots, \Delta_S \dots$ dentro de $Q_{m,h}$ de la siguiente manera. El primer triángulo Δ_1 se obtiene tomando el lado etiquetado $(0,1)$ en $\partial Q_{m,h}$ y se completa con el único tercer vértice del triángulo dentro de $Q_{m,h}$. Supongamos que hemos construido s triángulos distintos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_S$ dentro de $Q_{m,h}$ cada uno con un lado etiquetado $(0,1)$ sobre su frontera (orientada). Si el tercer vértice de Δ_S está etiquetado con un 2, entonces Δ_S está completamente etiquetado y la construcción termina. Si no, el tercer nivel duplica exactamente uno de los otros dos niveles (es 0 o es 1). Eliminemos el vértice original que se repite y sea Δ_{S+1} el único triángulo adyacente a Δ_S y que contenga a los dos vértices restantes. Los dos casos se muestran en la figura # 6 y prueban que estos vértices generan un lado etiquetado $(0,1)$ sobre la frontera de Δ_{S+1} .

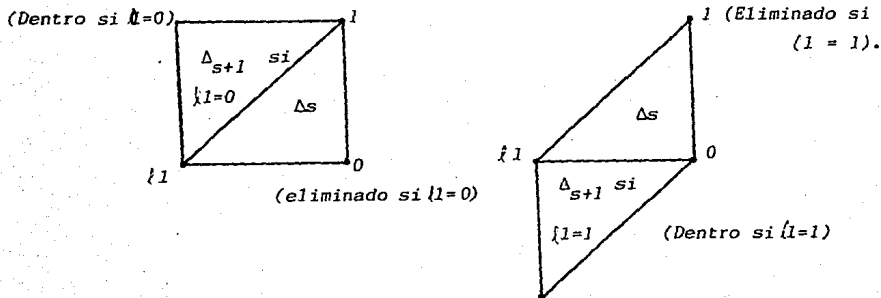


Figura # 6

Debemos verificar que Δ_{S+1} está dentro de $Q_{m,h}$ y es distinto de $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_S$. Como Δ_S está dentro de $Q_{m,h}$ si Δ_{S+1} estuviera fuera, el lado común nos conduciría al par ordenado de niveles $(1,0)$ en la orientación de la frontera de $Q_{m,h}$ contrario a la hipótesis. Si $\Delta_{S+1} \neq \Delta_1$, entonces Δ_S está fuera de $Q_{m,h}$ lo cual no puede ser. Si $\Delta_{S+1} = \Delta_i$ para $2 \leq i \leq S$, entonces $\Delta_S = \Delta_{i-1}$ que no puede ser ya que por

hipótesis los triángulos son distintos. Ahora bien como hay solamente un número - finito de triángulos dentro de $Q_{m,h}$ la construcción debe terminar con un triángulo lo completamente etiquetado.

Lema 1.2

Para r grande, $l(r) = 0$.

Prueba

Sea $f(z) = z^n (1 + g(z))$ donde $g(z) = a_1/z + \dots + a_n/z^n$

Entonces $|g(r)| \leq |a_1|/r + \dots + |a_n|/r^n \leq \text{máx } |a_k| (1/r + \dots + 1/r^n)$

$$\leq \text{máx } |a_k| \left(\frac{1+r+\dots+r^{n-2}}{r^n} r^{n-1} \right)$$

$$= \text{máx } |a_k| \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} \leq \frac{\text{máx } |a_k|}{r-1} \quad \text{para } r > 1.$$

De aquí que, si $r > 2 \text{máx } |a_k|/\sqrt{3} + 1$, entonces $|g(r)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. De forma que, como puede observarse en la figura # 7

$$|\arg f(r)| = |\arg (1 + g(r))| \leq \pi/3$$

lo que implica que $l(r) = 0$ para $r > 2 \text{máx } |a_k|/\sqrt{3} + 1$.

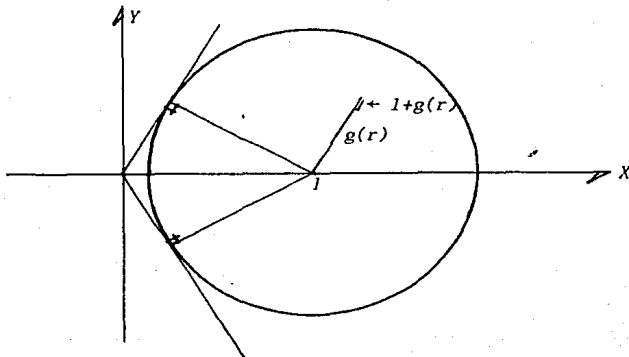


Figura # 7

Lema 1.3 Para r suficientemente grande

$$\frac{\pi}{12m} < \arg \frac{f(z_1)}{f(z_0)} < \frac{2\pi}{3}$$

para toda $(z_0, z_1) \in \partial Q_{m,h}$ y para toda m suficientemente grande.

Prueba:

Si $f(z) = z^n(1 + g(z))$ consideremos al $\arg \frac{z_1^n}{z_0^n}$ y $\arg \frac{(1+g(z_1))}{(1+g(z_0))}$

por separado. Sea $(z_0, z_1) \in \partial Q_{m,h}$ y $\theta = \arg \frac{z_1}{z_0}$, es claro de la figura #8

que $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $\tan \beta = \frac{1}{m}$ y usando la ley de los senos

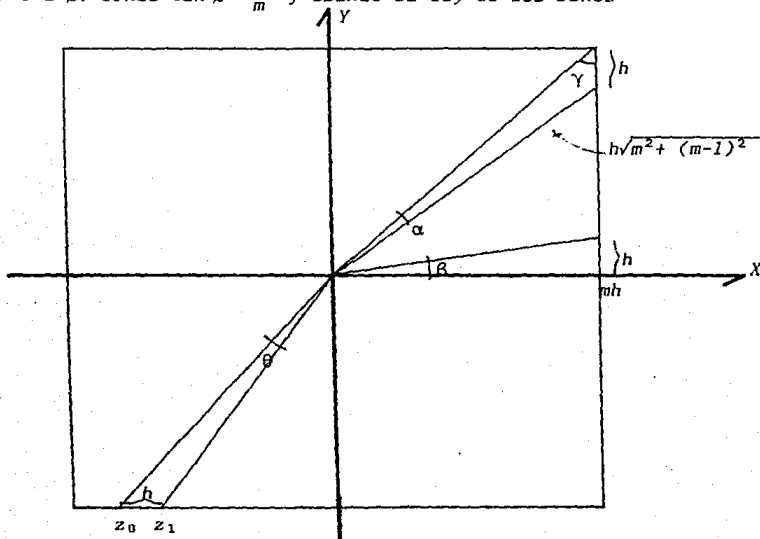


Figura # 8.

$$\frac{\text{sen} \alpha}{h} = \frac{\text{sen} \gamma}{h\sqrt{m^2 + (m-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{h\sqrt{m^2 + (m-1)^2}} \quad \therefore \text{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{m^2 + (m-1)^2}}$$

$$\text{De aqui} \quad \frac{1}{2m} < \alpha \leq \theta \leq \beta < \frac{1}{m} \quad \therefore \quad \frac{\pi}{2m} < \arg \frac{z_1^n}{z_0^n} < \frac{\pi}{m} \quad \text{para } m > \frac{\pi}{\pi} \quad (1)$$

(Note que la condición $m > n/\pi$ es una consecuencia de la elección $-\pi < \arg w \leq \pi$)

Para obtener una cota similar para $(1+g(z_1))/(1+g(z_0))$, primero notemos - que:

$$\frac{1+g(z_1)}{1+g(z_0)} = 1 + \frac{g(z_1) - g(z_0)}{1+g(z_0)} \quad \text{y} \quad |g(z)| \leq \frac{\max |a_k|}{r-1} \quad \text{para } |z| \geq r > 1 \quad (2).$$

$$\text{mientras que } g(z_1) = \frac{a_1}{z_1} + \dots + \frac{a_n}{z_1^n} \quad \text{y} \quad g(z_0) = \frac{a_1}{z_0} + \dots + \frac{a_n}{z_0^n} \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \therefore |g(z_1) - g(z_0)| &= \left| a_1 \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0} \right) + \dots + a_n \left(\frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_0^n} \right) \right| \\ &= \left| \frac{ha_1}{z_1 z_0} + \dots + \frac{ha_n (z_0^{n-1} + z_0^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1})}{z_0^n z_1^n} \right| \\ &\leq \frac{h \max |a_k|}{r^2} + \frac{2h \max |a_k|}{r^3} + \dots + \frac{nh \max |a_k|}{r^{n+1}} \\ &= h \max |a_k| \left[\frac{r^0 + r^1 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}}{r^{n+1}} \right] \\ &= \frac{h \max |a_k|}{r^{n+1}} \left[\frac{r^n - 1}{r - 1} \right] \leq \frac{h \max |a_k|}{(r-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ya que } \frac{r^n - 1}{r^{n+1}} < \frac{1}{r-1} \quad \text{para } r > 2$$

por lo tanto

$$\frac{g(z_1) - g(z_0)}{1+g(z_0)} \leq \frac{h \max |a_k|}{(r-1)^2} \quad \text{para } (z_0, z_1) \in \partial Q_{m,h} \quad (r > 2)$$

Notemos que $r \geq 4$ implica que $1/(r-1)^2 \leq 2/r^2$

y $r \geq 2 \max |a_k| + 1$ implica que $|g(z_0)| \leq 1/2$, por lo que tenemos

$$\left| \frac{g(z_1) - g(z_0)}{1+g(z_0)} \right| \leq \frac{g(z_1) - g(z_0)}{1-|g(z_0)|} \leq \frac{2h \max |a_k|}{(r-1)^2} \leq \frac{4h \max |a_k|}{r^2}$$

$$= \frac{4 (r/m) \max |^a k|}{r^2} = \frac{4 \max |^a k|}{mr} \leq 1 \quad (3)$$

$$((1 - g(z_0))^{-1} \leq 2 \text{ para } |g(z_0)| \leq 1/2).$$

Para $r \geq 4 \max |^a k| + 4$ y $m \geq 1$, refiriendonos a la figura # 9, si $|w| \leq 1$, entonces $-\pi/3 \leq \arg(1+w) \leq \pi/2$ y $\operatorname{sen} \arg(1+w) \leq |w|$.

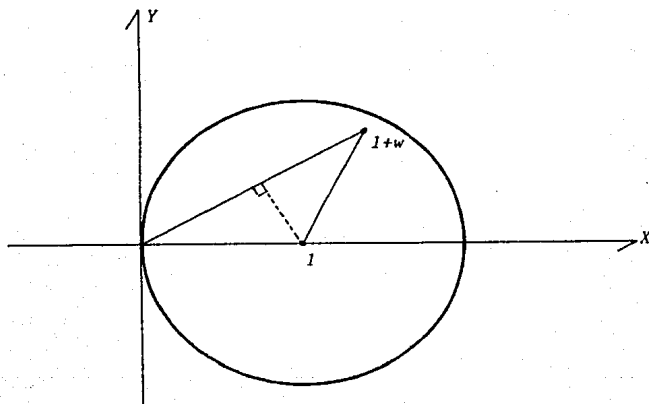


Figura # 9.

Por lo tanto $|w| \leq 1$ implica $|\arg(1+w)| \leq 2|w|$ y, por (2) y (3)

$$(4) \left| \arg \frac{1+g(z_1)}{1+g(z_0)} \right| = \left| \arg \left(1 + \frac{g(z_1) - g(z_0)}{1+g(z_0)} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{g(z_1) - g(z_0)}{1+g(z_0)} \right| \leq \frac{8 \max |^a k|}{mr}$$

Para $r \geq 4 \max |^a k| + 4$ y toda $m \geq 1$.

$$\text{Combinando (1) y (4), tenemos } \frac{f(z_1)}{f(z_0)} = \frac{z_1^n (1+g(z_1))}{z_0^n (1+g(z_0))} \quad \dots$$

$$\therefore \frac{n}{2m} - \frac{8 \max |^a k|}{mr} \leq \arg \frac{f(z_1)}{f(z_0)} = \arg \frac{z_1^n (1+g(z_1))}{z_0^n (1+g(z_0))} \leq \arg \frac{z_1^n}{z_0^n} + \arg \frac{1+g(z_1)}{1+g(z_0)}$$

$$= \frac{n}{m} + \frac{8 \max |^a k|}{mr} = \frac{1}{m} \left(n + \frac{8 \max |^a k|}{r} \right) \therefore$$

$$\therefore \frac{1}{m} \left(\frac{n}{2} - \frac{8 \max |^a k|}{m} \right) \leq \arg \frac{f(z_1)}{f(z_0)} \leq \frac{1}{m} \left(n + \frac{8 \max |^a k|}{r} \right)$$

para toda $(z_0, z_1) \in \partial Q_{m,h}$ siempre que $r \geq 4 \max |^a k| + 4$, $m \geq n/\pi$, y la cota inferior no exceda a π . Si escogemos $m \geq (n+2)/2$, entonces $m > (3/2\pi)(n + 8 \max |^a k| / r)$ y de aquí

$$\arg \frac{f(z_1)}{f(z_0)} < \frac{2}{3}\pi$$

Si hacemos $r \geq 48 \max |^a k| + 4$, entonces $r > 8 \max |^a k| / (n/2 - \pi/12)$ para toda $n \geq 1$, esto implica que

$$\arg \frac{f(z_1)}{f(z_0)} \geq \frac{1}{m} \left(\frac{n}{2} - \frac{8 \max |^a k|}{r} \right) > \frac{\pi}{12m}$$

con lo que queda demostrado el lema.

Solamente nos falta poner las piezas juntas en el orden correcto. Escogamos $r \geq 48 \max |^a k| + 4$ y $m \geq (n+2)/2$. El lema 1.2 afirma que $l(r) = 0$, y el lema 1.3 que atravesamos $8m$ lados sobre la frontera de $Q_{m,h}$ sucesivamente y nunca regresamos en su orden cíclico propio y debemos al menos tener un cambio de nivel de 0 a 1, ya que:

$$\arg \frac{f(z_1)}{f(z_0)} > \frac{\pi}{12m} \quad \text{y} \quad 8m \frac{\pi}{12m} = \frac{2}{3}\pi$$

Esto nos da la hipótesis del teorema 1 y asegura la existencia de un triángulo completamente etiquetado en $Q_{m,h}$ para r fijo y toda m suficientemente grande. Que es exactamente la afirmación del teorema 1.

El teorema fundamental del álgebra se sigue directamente del teorema 1. Para m grande hagamos $\{z_0(m), z_1(m), z_2(m)\}$ un triángulo completamente etiquetado en el cuadrado original, ya que es un conjunto compacto, la sucesión $z_0(m)$ contiene una subsucesión convergente $z_0(m_k)$ con límite z' , y como $mh = r$ fijo, $h \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ y el lema 1 implica:

$$f(z') = \limite_k f(z_0(m_k)) = 0$$

con lo cual queda probado el teorema.

BIBLIOGRAFIA.

1. Fan K.
Combinatorial Propierties of certain Simplicial and cubical vertex maps.
Arch Math, xi, 368-377, July 1960, Detroit.
2. Herbert Scarf.
The approximation of fixed points of a continuous mapping.
Siam J. Appl Math, xiii, 5, 1328-1343, September 1967.
3. Kuhn, H.W.
 - Some Combinatorial lemmas in topology.
IBM J. Res. Develop, 4, 518-524, November 1960.
 - Simplicial Approximation of fixed points.
Naval Research, 61, 1238-1242, October 1968.
 - A new proof of the fundamental theorem of algebra
National Science, X, 35648, 148-158, March 1979.
4. Vick, J.W.
Homology Theory, 1973, Academic Press, New York and London.