

Jij. 7



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

**Limite Clásico del Efecto Bremsstrahlung
con Emisión de Dos Fotones**

T E S I S

**QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN
PROFESIONAL**

P R E S E N T A:

Jorge Alejandro Bernal Arroyo

México, D. F.

Enero de 1987



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	PAGINA
<u>SECCION I</u>	
INTRODUCCION.....	1
<u>SECCION II</u>	
AMPLITUD DE PROBABILIDAD DEL EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE DOS FOTONES.....	8
<u>SECCION III</u>	
ANÁLISIS DE LA CONTRIBUCION EN POTENCIAS DE κ DE LAS LINEAS DE ELECTRON Y DE FOTON A LA AMPLITUD DE PROBABILIDAD.....	13
i) LINEAS DE ELECTRON.....	13
ii) LINEAS DE FOTON.....	18
iii) ESPACIO FASE.....	20
<u>SECCION IV</u>	
LIMITE $\kappa \rightarrow 0$ PARA EL CASO DEL EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE UNO Y DOS FOTONES.....	23
i) DISPERSION DE RUTHERFORD.....	23
ii) EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE UN FOTON.....	24
iii) EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE DOS FOTONES.....	27
<u>CONCLUSIONES</u>	33
<u>APENDICES</u>	
A. CALCULO DE LA AMPLITUD DE PROBABILIDAD DEL EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE DOS FOTONES.....	34
B. CALCULO DE $ M_{if} ^2$	38
C RELACION ENTRE INTENSIDAD DE HAZ Y NUMERO DE FOTONES.....	43
D. LEY DE PROBABILIDADES DE POISSON PARA FOTONES SUAVES.....	44
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	46

SECCION I

INTRODUCCION

Se conoce como física clásica a la que se desarrolló hasta antes de la aparición de las teorías cuántica y relativista; éstas son generalizaciones de aquélla, y por tanto se debe esperar que en ciertos límites se reduzcan al llamado caso clásico. En general cuando una teoría particular se puede deducir de una teoría más general, usando cierta aproximación, es posible utilizar este criterio para dar un argumento de verosimilitud para dicha teoría general. Esta es una de las razones de la importancia de hallar límites clásicos a las teorías cuántica y relativista.

En términos generales, cuando se habla del límite clásico de la mecánica relativista se hace referencia explícita al límite de la velocidad de la luz tendiendo al infinito, al hacer éste límite es posible recuperar la descripción de la mecánica newtoniana del fenómeno analizado*. Para el caso de la mecánica cuántica se invoca al principio de correspondencia (LIBOFF, 1984) para indicar que es posible recuperar los resultados clásicos a partir de dicha teoría; éste principio fué establecido -- por Niels Bohr en 1918, y en su forma original afirma que la descripción clásica del fenómeno considerado se obtiene de la cuántica al tomar el límite del número cuántico principal tendiendo al infinito. Es claro que el principio de correspondencia tal y como se ha descrito aquí no puede ser aplicado a cualquier fenómeno, porque para usarlo se requiere que la energía del sistema este cuantizada. Esta no es la única forma del principio de correspondencia; aún antes del trabajo de Bohr, Max Planck seña

* Esto no implica que la mecánica relativista sea conceptualmente idéntica a la mecánica clásica en el límite $c \rightarrow \infty$. Existen resultados de la mecánica relativista que no tienen paralelo en la mecánica clásica, por este motivo su límite clásico no esta bien definido. Por ejemplo, la energía propia de una partícula $m_0 c^2$ tiene valor cero en la mecánica newtoniana, y no valor infinito como sugeriría el límite $c \rightarrow \infty$.

lo que el límite de la constante \hbar , que ahora lleva su nombre, al tender a cero reduce la ley de la radiación de cuerpo negro, encontrada por él, a la ley de Rayleigh-Jeans, que corresponde al resultado clásico. Usando esta misma forma del principio de correspondencia, Wentzel, Kramers y -- Brillouin mostraron en 1926 que la ecuación de Schroedinger tiene como -- límite clásico la ecuación de Hamilton-Jacobi.

El principio de correspondencia se ha caracterizado por la falta de unidad en los criterios para obtener límites clásicos a partir de los resultados cuánticos. De aquí que la forma en que se encuentra el límite -- clásico de ciertos fenómenos en mecánica cuántica no-relativista depende del tipo de descripción que se esta utilizando. De esta manera en la descripción de Schroedinger se usa el teorema de Ehrenfest (MERZBACHER, 1980), en la descripción de Heisenberg se hacen corresponder los conmutadores -- entre operadores con el paréntesis de Poisson de sus observables clási--cas asociadas (MERZBACHER, 1980), y en la descripción de Feynman se aplica el método de la fase estacionaria para propagadores (SCHULMAN, 1980).

Otro problema que se presenta es el de la equivalencia entre las -- distintas formas de tomar el límite clásico. Se ha mostrado (LIBOFF, 1984) que los límites $\hbar \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$, donde n es el número cuántico principal -- asociado al espectro de energía, no son equivalentes. La diferencia entre ellos surge al considerar sistemas cuánticos periódicos; el límite $\hbar \rightarrow 0$ permite obtener el espectro clásico de energías a partir de la predicción cuántica, mientras que en el límite $n \rightarrow \infty$ sólo en ciertos casos se cumple esta característica. En general de éste último límite se obtiene la distribución de frecuencias clásicas $\gamma(E)$ en función de la energía, lo que constituye una forma más débil del límite clásico.

El problema en la electrodinámica cuántica es que el límite clásico no ha sido establecido claramente (BARUT, 1980). Sin embargo, Moniz y -- Sharp (MONIZ, SHARP, 1977) han realizado un avance para la comprensión de

este problema al resolver el caso del límite clásico para un fenómeno -- particular. Estos autores se propusieron comprender los problemas que aparecen en la ecuación de Abraham-Lorentz para la aceleración de cargas puntuales, considerando la reacción de radiación, en presencia de una -- fuerza externa:

$$m_e \ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{F}(t) - (\mathcal{S}_m) \ddot{\mathbf{R}}(t) + \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{\mathbf{R}}(t)$$

donde \mathcal{S}_m es la autoenergía electrostática dividida entre la velocidad -- de la luz al cuadrado. Los problemas que tiene esta ecuación son:

- i) Preaceleración de las cargas.
- ii) Soluciones divergentes.
- iii) La autoenergía del electrón es infinita.

En vista de estas dificultades que aparecen en la propia teoría clásica del electrón puntual, diversos autores* encontraron la expresión correspondiente a la ecuación de Abraham-Lorentz pero en el caso de cargas extensas. La ecuación clásica así encontrada no adolece de los problemas -- citados, en particular arroja que la autoenergía del sistema es finita. Al hacer tender a cero el radio de la distribución de carga, se encuen-- tra de nueva cuenta la ecuación para cargas puntuales de Abraham-Lorentz.

Moniz y Sharp consideraron el mismo problema del electrón con distri-- bución de carga en presencia de una fuerza externa, pero utilizando el -

* SOMERFELD. "Proceedings of the third international mathaematics congress" Heidelberg 1904, p.27.; L.PAGE. Phys. Rev. 11, 376 (1918), etc.

formalismo de la mecánica cuántica no-relativista (descripción de Heisenberg). El resultado fué una ecuación esencialmente idéntica a la clásica para cargas extensas, con la diferencia de que el papel del radio del electrón lo representaba la longitud de onda de Compton. Así, al tomar el límite de la longitud de onda de Compton tendiendo a cero y considerar cargas puntuales se vuelve al caso de la ecuación de Abraham-Lorentz; -- por otra parte, tomando el límite de carga puntual manteniendo fija la longitud de onda de Compton se obtiene una nueva ecuación para cargas -- puntuales, la cual no presenta los problemas de la ecuación de Abraham-Lorentz y predice que la autoenergía del electrón es igual a cero. Esta ecuación es a juicio de M.S. la descripción clásica correcta de las cargas puntuales en presencia de una fuerza externa. Un trabajo detallado -- sobre este problema fué realizado por E. Roa y J.L. Jiménez (ROA, 1985), -- quienes analizan el comportamiento de una ecuación cuántica integrodiferencial que describe el comportamiento de la autofuerza para una partícula con estructura interna.

El presente trabajo tiene por objetivo el encontrar el límite clásico de un proceso particular: El efecto bremsstrahlung (radiación de frenado) con emisión de dos fotones. Este caso se toma como ejemplo de la aplicación de un conjunto de reglas que se proponen para calcular límites clásicos para procesos radiativos. El tratamiento utilizado está dentro del marco de la mecánica cuántica relativista, utilizándose las reglas -- de Feynman para calcular las amplitudes de probabilidad. Para encontrar el límite clásico se hace un recuento de las contribuciones de potencias de \hbar de las distintas partes de los diagramas de Feynman, además de considerar las aportadas en el espacio fase; una vez hecho esto, se considera el límite $\hbar \rightarrow 0$, bajo condiciones que se precisarán más adelante, y -- se propone dicho resultado como el clásico. Es de observarse que utili--

zando este procedimiento para el efecto bremsstrahlung con emisión de un fotón se recupera el resultado clásico, y cuando se aplica a la dispersión de Rutherford se comprueba que se trata de un proceso con naturaleza clásica. En base a estos resultados se propone una manera general de encontrar el límite clásico de un proceso radiativo cualquiera en la electrodinámica cuántica.

El límite $\hbar \rightarrow 0$ es una de las muchas posibilidades para obtener un límite clásico en un proceso cuántico; ya que se han mencionado varias formas alternativas que tienen validez en casos especiales. Un ejemplo más específico es el caso de la ecuación cuántica de autofuerza para partículas con estructura hallada por M.S.; aquí, como ya se ha mencionado, se encuentra que la ecuación clásica de Abraham-Lorentz se obtiene al hacer la longitud de onda de Compton tender a cero $\lambda_c = \hbar/(mc)$ y considerando el límite de cargas puntuales, pero en la expresión de la longitud de onda de Compton es claro que $\lambda_c \rightarrow 0$ puede ser tomado de acuerdo a las siguientes posibilidades:

i) Se toma $\hbar \rightarrow 0$ dejando fijas a la masa del electrón y a la velocidad de la luz.

ii) Se dejan fijas \hbar y c , y se toma el límite de la masa del electrón tendiendo al infinito.

iii) Se dejan fijas \hbar y m , y se toma el límite de la velocidad de la luz tendiendo al infinito.

No se han considerado las posibilidades de variar dos parámetros o los tres simultáneamente. De esta discusión se manifiesta la arbitrariedad de tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$, y enseña que al tomar el límite sobre alguno de los parámetros que intervienen en la descripción del fenómeno, es necesario precisar el comportamiento del resto de ellos.

Para el caso de la discusión contenida en este trabajo, los parámetros que entran en juego son \hbar , m , e y c , además de parámetros derivados como λ y λ_c , los cuales se relacionan con los primeros de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\lambda = \frac{e^2}{4\pi k c \epsilon_0} \dots\dots\dots (1)$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m c} \dots\dots\dots (2)$$

Para hallar el límite $\hbar \rightarrow 0$ se supondrá que los valores de e , m y c están fijos, y de esta manera se ve de la ecuación (1) que $\lambda \rightarrow \infty$ y de la ecuación (2) se tiene $\lambda_c \rightarrow 0$. Esto significa que λ no es un parámetro apropiado para hacer un desarrollo perturbativo en el límite considerado; sin embargo, sí es posible usar el parámetro \hbar , el cual es finito en el límite $\hbar \rightarrow 0$. (Esto aclara la elección hecha en la ecuación (34)).

En este punto es pertinente aclarar el enfoque que se da al considerar el límite clásico de un proceso como el examinado en este trabajo. En principio, se debe hacer hincapié que la manera de derivar el límite clásico a partir del resultado cuántico no es única, pero esta característica no es privativa del proceso aquí analizado, sino que es parte de la diversidad que les propia al principio de correspondencia. La legitimidad del límite clásico adoptado está en su acierto para predecir los límites clásicos buscados, ya que no existe un criterio a priori para la elección de una aproximación adecuada a un proceso particular.

A continuación se hará un resumen del plan general del trabajo. En la sección II se calcula la amplitud de probabilidad del efecto bremsstrahlung con emisión de dos fotones; haciendo énfasis en las ideas generales del procedimiento de cálculo, más que en el cálculo mismo.

La sección III constituye la parte central de este trabajo. En ella se analizan las contribuciones de potencias de h a los diagramas de Feynman, debidas a las líneas de electrón y de fotón. También se discute la aportación de factores de h provenientes de la selección del espacio fase correspondiente al proceso estudiado.

En la sección IV se aplican los resultados obtenidos en la sección III para encontrar los límites de $\hbar \rightarrow 0$ de tres procesos específicos: Dispersión de Rutherford, y efecto bremsstrahlung con emisión de uno y dos fotones. Como conclusión general de los resultados obtenidos al tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$ en los procesos mencionados se tienen: i) La dispersión de Rutherford es un resultado clásico; ii) bajo las condiciones de m y e fijos, el límite $\hbar \rightarrow 0$ para el efecto bremsstrahlung con emisión de un fotón arroja el resultado predicho por la teoría electromagnética de Maxwell; iii) tomando el límite del inciso ii) para el efecto bremsstrahlung con emisión de dos fotones se obtiene que los fotones emitidos son mucho más suaves, -- esto quiere decir que sus energías son mucho menores que la energía del electrón en reposo. La sección eficaz diferencial obtenida se expresa como la suma de dos términos; el primero de ellos es el mismo que se obtiene para el límite $\hbar \rightarrow 0$ en el efecto bremsstrahlung con emisión de un fotón, el segundo es el producto de dos factores idénticos al primer sumando, pero que corresponden a cada uno de los fotones emitidos. Este segundo término en la sección eficaz diferencial es proporcional a e^4 , lo que significa que la teoría electromagnética de Maxwell ya no lo predice, puesto que esta teoría sólo predice la emisión de un haz de ondas electromagnéticas de intensidad proporcional a e^2 .

En los apéndices se desarrollan cálculos, cuyos resultados están citados en el cuerpo del texto, que no son esenciales para la comprensión de las ideas esenciales.

SECCION II

AMPLITUD DE PROBABILIDAD DEL EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE DOS FOTONES*

Desde el punto de vista de la electrodinámica clásica, el efecto bremsstrahlung consiste en la emisión de radiación electromagnética como resultado de la aceleración de una partícula cargada, este fenómeno se presenta cuando un electrón es dispersado por una partícula mas pesada (por ejemplo, un núcleo atómico). Para éste último caso, la ecuación predicha por la física clásica (JACKSON, 1980) para la intensidad del haz de luz por unidad de frecuencia y unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16 \pi^2 \epsilon_0 c} \left| \vec{\epsilon}^* \cdot \left(\frac{\vec{\beta}'}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} - \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \right) \right|^2 \quad (3)$$

donde ($\vec{\epsilon}^*$) es el vector de polarización del fotón, (\vec{v}) es la velocidad del electrón entrante y (\vec{v}') la del electrón saliente (Esta ecuación es una aproximación para el caso de tener fotones suaves, esto es, para aquéllos cuya energía es mucho menor a la energía en reposo del electrón). Al considerar la sección diferencial tanto del electrón dispersado como del fotón emitido se debe escribir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right) \quad (4)$$

donde ($\frac{d\sigma}{d\Omega_f}$) representa la sección eficaz diferencial de la dispersión de Rutherford.

* La notación utilizada aquí es la misma que la usada en: BJORKEN y DRELL, "Relativistic Quantum Mechanics". Mc Graw-Hill 1964.

En la mecánica cuántica relativista se utiliza la técnica de los diagramas de Feynman (FEYNMAN, 1948) para calcular las amplitudes de probabilidad de este tipo de procesos. Para el caso particular del efecto bremsstrahlung con emisión de un fotón los diagramas correspondientes son:

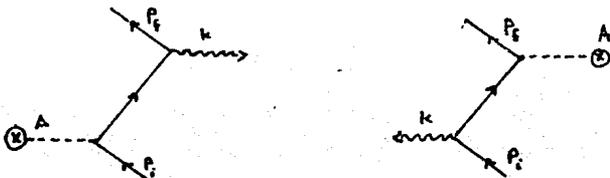


FIGURA 1

donde el potencial dispersor es el de Coulomb. Utilizando las reglas de Feynman es posible calcular la amplitud de probabilidad, dando como resultado:

$$M = \bar{u}(p_f) \left\{ \left(\frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} - \frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right) \not{A} + \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{A}}{2 p_f \cdot k} - \frac{\not{A} \not{k} \not{\epsilon}}{2 p_i \cdot k} \right\} u(p_i) \dots (5)$$

donde (ϵ) es el cuadrivector de polarización del fotón, (k) es el momento del fotón y (A) es el potencial dispersivo (coulombiano).

A partir de la ecuación (6) se calcula la sección eficaz diferencial para fotones suaves ($k \ll m$), la cual es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_e}{d\Omega} \frac{e^2}{2k} \left(\frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} - \frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right)^2 \frac{k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3} \dots (6)$$

donde $\left(\frac{d\sigma_e}{d\Omega} \right)$ representa la sección eficaz de la dispersión elástica (en este

*En esta parte del trabajo todavía se usan unidades naturales, esto es, aquí se considera que $(\hbar = 1)$ y $(c = 1)$.

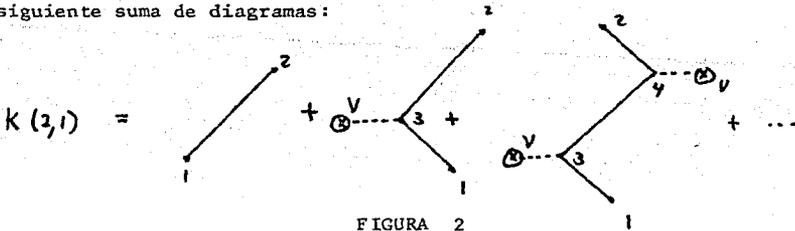
caso la sección eficaz de dispersión de Mott), y ($d\sigma_c$) es:

$$d\sigma_c = \int \frac{z^2 e^4}{16\pi^2} S(E_f + k_i - E_i) |\bar{u}(E_f, \mu_f)|^2 \frac{P_i E_f dE_f d\Omega_f}{E_i (E_i - k) |\bar{u}|^4} \dots \quad (7)$$

Por otra parte, de acuerdo con la teoría de perturbaciones, la amplitud de probabilidad exacta $K(2,1)$ de un proceso de dispersión por un potencial - está dada por:

$$K(2,1) = k_0(2,1) + (-i) \int k_0(2,3) V(3) k_0(3,1) d^4x_3 + (-i)^2 \iint k_0(2,3) V(3) k_0(3,4) V(4) k_0(4,1) d^4x_3 d^4x_4 + \dots$$

(FEYNMAN, 1965). En este desarrollo el primer término representa la propagación libre de la partícula desde el punto (1) hasta el (2), el segundo representa el movimiento libre de la partícula desde (1) hasta (3), y aquí es dispersada por un potencial $V(3)$ para después continuar con su movimiento libremente hasta (2), y de forma similar se interpretan el resto de los términos. De esta manera, el desarrollo también se puede entender como la siguiente suma de diagramas:



Para el caso especial del efecto bremsstrahlung, el desarrollo en términos -

de diagramas es como sigue:

$$|M(2,1)|^2 = \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \left(\text{Diagram 3} + \dots \right)^2 + \dots \right) \quad (8)$$

FIGURA 3

donde el primer término entre paréntesis es la contribución con emisión de un fotón, el segundo abarca los diagramas que tienen dos fotones, y así sucesivamente. La amplitud de probabilidad correspondiente a el efecto bremsstrahlung con emisión de dos fotones se detalla en el apéndice A, para el caso de fotones suaves se tiene el resultado:

$$M_{k_1, k_2} = N \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p_i}{k_1 \cdot p_f} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_i}{k_2 \cdot p_f} \right) \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p_i}{k_1 \cdot p_f} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_i}{k_2 \cdot p_f} \right) \mu(\rho_i) \gamma^\mu \mu(\rho_f) \quad (9)$$

donde $N = \frac{(e^2)^2}{\sqrt{2E_i 2E_f 2(k_1)_z 2(k_2)_z} V^2}$, siendo $(k_1)_z$ y $(k_2)_z$ las energías de los fotones emitidos, (V) el volumen de normalización y, (E_i) y (E_f) son las energías inicial y final del electrón respectivamente.

Al momento de pasar a calcular la probabilidad por unidad de tiempo del proceso es necesario calcular $\langle |M_{i_f}|^2 \rangle$ y sumar sobre las polarizaciones inicial y final del electrón, así para el caso del efecto bremsstrahlung con un fotón la expresión completa (sin ninguna clase de aproximaciones) contiene treinta y dos términos (MORENO, 1984). En el presente trabajo no se intentará deducir la expresión de $\langle |M_{i_f}|^2 \rangle$ en forma completa, puesto que este resultado no es esencial en la deducción que se hará; sin embargo, en el apén

dice B se esboza un nuevo procedimiento para hacer esta clase de cálculos - en forma simplificada. (MORENO y SALAS, en preparación) y este trabajo se deriva de (MORENO, 1984) y (CAFFO y REMIDDI, 1982).

Se debe recalcar que cuando se tiene el cuadrado de la amplitud para el desarrollo esbozado en la ecuación (8), se suman separadamente los cuadrados de las amplitudes de cada conjunto de términos encerrados entre paréntesis, esto se debe al hecho de que cada caso se representan procesos -- distinguibles, y por tanto resultaría incorrecto superponer las amplitudes.

SECCION III

ANALISIS DE LA CONTRIBUCION EN POTENCIAS DE \hbar DE LAS LINEAS DE ELECTRON Y DE FOTON A LA AMPLITUD DE PROBABILIDAD.

La finalidad de la presente sección es hallar las contribuciones en potencias de \hbar de cada una de las partes de los diagramas de Feynman, que se utilizan en el cálculo de la amplitud de probabilidad del proceso; esto significa hacer un cambio de unidades naturales por unidades M.K.S. -- Al hacer esta deducción se toma como ejemplo el proceso bremsstrahlung -- con emisión de dos fotones, pero al procedimiento se le atribuye un carácter de aplicación general para procesos radiativos. Como resultado del análisis se obtienen dos teoremas que sugieren la asignación de potencias h a las líneas de electrón y de fotón. Dichos teoremas establecen reglas inducidas de casos concretos que en forma alguna son unívocas, esto significa que las potencias de \hbar halladas para las líneas de electrón y de fotón pueden alterarse al considerar, por ejemplo, una normalización diferente para los espinores de Dirac. Sin embargo, sea cual fuere la elección de potencias de h para los diagramas de Feynman, esta elección debe garantizar una correcta combinación con los factores de \hbar provenientes del espacio fase y de la regla de oro de Fermi, para que el límite $\hbar \rightarrow 0$ sea adecuado a los resultados clásicos.

i) LINEAS DE ELECTRON

Dado un diagrama del proceso es fácil distinguir las líneas de electrón como aquellas que son continuas. El comportamiento de los electrones en la mecánica cuántica relativista esta descrito por la ecuación de Dirac, la cual en unidades es:

$$(i\gamma - m)\psi(x) = 0 \text{ ----- (10)}$$

Es posible cambiar las unidades de esta ecuación a unidades físicas, - esto es unidades M.K.S., haciendo la sustitución:

$$m \longrightarrow \frac{m c}{k} \text{ ----- (11)}$$

La sustitución dada en la ecuación (11) será de mucha utilidad - para averiguar las modificaciones que trae consigo este cambio de unidades en las funciones de onda del electrón entrante y saliente, así como del propagador electrónico.

Para empezar, considérense las relaciones de normalización para espinores de Dirac:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^{\nu} u^{\nu} &= 2E S^{\nu s} \\ \bar{u}^{\nu} u^{\nu} &= 2m S^{\nu s} \end{aligned} \right\} \text{----- (12)}$$

Usando (11) en la segunda de estas ecuaciones, y ajustando las unidades de la primera para que coincidan con la segunda, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^{\nu} u^{\nu} &= \frac{2E}{k c} S^{\nu s} \\ \bar{u}^{\nu} u^{\nu} &= \frac{2m c}{k} S^{\nu s} \end{aligned} \right\} \text{----- (13)}$$

La primera de estas ecuaciones se usa a continuación para calcular la - constantes de normalización de un electrón libre contenido en una caja - de volumen V:

$$\psi = \sqrt{\frac{k c}{2E V}} u e^{-i \frac{p x}{\hbar}} \text{----- (14)}$$

y es fácil ver que se satisface la normalización:

$$\int \psi^{\nu \dagger} \psi^{\nu} dV = 1 \text{----- (15)}$$

En segundo lugar, se va a investigar lo que ocurre con el propagador de Feynman del electrón*. La ecuación de Green del propagador en unidades naturales es:

$$(i\partial - m) S_F(x-x') = i \delta^4(x-x') \text{-----} (16)$$

efectuando la sustitución (11) se encuentra que:

$$(ik\partial - mc) S_F(x-x') = ik \delta^4(x-x') \text{-----} (17)$$

*Un sencillo análisis dimensional del propagador hará clara la validez de la ecuación (17). El propagador se puede escribir en términos de las funciones de onda (BJORKEN Y DRELL, 1964) de acuerdo con la ecuación:

$$S_F(x) = \sum_i \bar{\psi}_i(x) \psi_i(x)$$

De la ecuación (15) se tiene que las unidades de las funciones de onda son:

$$[\psi] = \frac{1}{L^{3/2}}$$

entonces las unidades del propagador son:

$$[S_F] = \frac{1}{L^4}$$

Dada la ecuación de Green (16) y considerando que el operador del miembro derecho tiene unidades de momento es posible averiguar las unidades de la constante k_0 , la cual se incluye para investigar cuales son las unidades del factor de proporcionalidad:

$$(i\partial - m) S_F(x) = ik_0 \delta^4(x)$$

En esta ecuación sólo hace falta determinar las unidades de $\delta^4(x)$, si se considera la ecuación:

$$\int \delta^4(x) d^4x = 1$$

se encuentra que las unidades de la delta de Dirac en cuatro dimensiones deben ser:

$$[\delta^4(x)] = \frac{1}{L^4}$$

Por lo tanto, las unidades de k_0 son:

$$[k_0] = k$$

Por otra parte, la delta de Dirac y el propagador en el espacio de momentos se pueden escribir de la siguiente manera:

$$S_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} S_F(p) e^{-i \frac{p(x-x')}{k}} \dots \dots \dots (18)$$

$$S^*(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} e^{-i \frac{p(x-x')}{k}} \dots \dots \dots (19)$$

sustituyendo (18) y (19) en (17):

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} (p - mc) S_F(p) e^{-i \frac{p(x-x')}{k}} = ik \int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} e^{-i \frac{p(x-x')}{k}}$$

donde $\not{p} = i \not{\partial}$ esta expresado en el espacio de momentos. Entonces:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} \{ (p - mc) S_F(p) - ik \} e^{-i \frac{p(x-x')}{k}} = 0$$

y se concluye que:

$$(p - mc) S_F(p) = ik \dots \dots \dots (20)$$

De aquí que el propagador libre del electrón en el espacio de momentos - se escriba como aparece a continuación:

$$S_F(p) = \frac{ik}{p - mc} \dots \dots \dots (21)$$

En el caso de que el electrón se encuentre interaccionando con un - campo electromagnético, el propagador exacto S_F^V está dado en el espacio de momentos por:

$$S_F^V(p) = S_F(p) - S_F(p) \frac{e}{\hbar c} A(p) S_F^V(p) \text{-----} (22)$$

la ecuación de Green correspondiente a esta solución es:

$$(\not{p} - mc) S_F^V(p) = (\not{p} - mc) S_F(p) - (\not{p} - mc) S_F(p) \frac{e}{\hbar c} A(p) S_F^V(p)$$

y usando (10):

$$\left[\left(\not{p} - \frac{e}{c} A(p) - mc \right) \right] S_F^V(p) = i\hbar \text{-----} (23)$$

que es la ecuación (20) haciendo la sustitución mínima $p \rightarrow p - \frac{eA}{c}$.

De las consideraciones hechas hasta este momento, es posible llegar a una regla respecto de la contribución de potencias de \hbar a la amplitud de probabilidad debidas a las líneas electrónicas en los diagrams de Feynman. Considérese uno de los diagrams del proceso bremsstrahlung con emisión de dos fotones, mostrado en la figura 4.

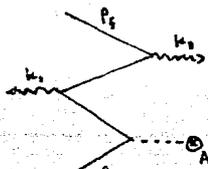
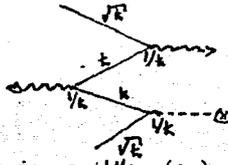


FIGURA 4

Se asigna una contribución de $\sqrt{\hbar}$ a las líneas del electrón entrante y saliente (ver ecuación (14)); debido al resultado del propagador libre

en espacio de momentos (ecuación (21)) se asocia una \hbar a las líneas -- del propagador, y, de acuerdo a la ecuación (22), se debe considerar un factor $1/\hbar$ por cada vértice del diagrama. El resultado final es:



Ver ecuaciones (14), (21) y (22)

FIGURA 5

al hacer el producto de todas estas contribuciones de potencias de \hbar el resultado es \hbar^0 , por tanto:

TEOREMA I

Las líneas electrónicas no contribuyen con potencias de \hbar al hacer el -- cálculo de la amplitud de probabilidad del proceso.

Es importantes subrayar que este resultado es generalizable para cualquier orden de perturbación del proceso.

ii) LINEAS DE FOTON

Los fotones reales emitidos durante el proceso bremsstrahlung -- se les da, por conveniencia, un tratamiento semiclásico. Se dice que es se miclásico porque se calcula la energía electromagnética total contenida -- en un volumen V , y esta cantidad se iguala a la energía correspondiente a un fotón.

Escribiendo la ecuación de onda para el caso de fotones reales, se tiene:

$$\square^2 A^\mu(x; k) = 0 \text{ ----- (24)}$$

la solución a esta ecuación es:

$$A^\mu(x; k) = \sqrt{\frac{k c^2}{2V\omega\epsilon_0}} e^{-ikx} \epsilon^\mu \dots (25) \text{ absorción}$$

$$A^\mu(x; k) = \sqrt{\frac{k c^2}{2V\omega\epsilon_0}} e^{ikx} \epsilon^\mu \dots (26) \text{ emisión}$$

donde ϵ^μ es el cuádrivector de polarización, y la constantes de normalización se elige de acuerdo al criterio expuesto al principio de esta subsección (DE LA PEÑA, 1979).

Para el caso de fotones virtuales, la ecuación de Maxwell adquiere la forma:

$$\square^2 A^\mu(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} J^\mu(x) \text{ ----- (27)}$$

donde $J(x)$ es una cuádracorriente electromagnética. Las transformadas de Fourier de A^μ y J^μ se pueden escribir como siguen:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} A^\mu(p) e^{-i \frac{p x}{\hbar}} \text{ ----- (28)}$$

$$J^\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi k)^4} J^\mu(p) e^{-i \frac{p x}{\hbar}} \text{ ----- (29)}$$

sustituyendo en la ecuación (27) se sigue que:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi k)^4} \left[A^\mu(p) \square^2 e^{-i \frac{p x}{k}} + \frac{1}{\epsilon_0} J^\mu(p) e^{-i \frac{p x}{k}} \right] = 0$$

de donde:

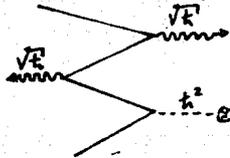
$$A^\mu(p) = \frac{k^2}{\epsilon_0 p^2} J^\mu(p) , \quad p^2 \neq 0 \quad \text{-----} (30)$$

siendo $p^2 = p^\mu p_\mu$, cuando ocurre que $p^2=0$ se requiere imponer condiciones de frontera. Por tanto, establecemos:

TEOREMA II

La transformada de Fourier del campo electromagnético contribuye con un factor de \hbar^2 a la amplitud de probabilidad, mientras que los fotones reales lo hacen en un factor $\sqrt{\hbar}$.

Esquemáticamente:



Ver ecuaciones (26) y (30)

FIGURA 6.

iii) ESPACIO FASE

En teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, la aproxima

mación a primer orden de la probabilidad por unidad de tiempo de transición de un estado a otro viene dada por la regla de oro de Fermi (DE LA PEÑA, 1979):

$$dW = \frac{2\pi}{k} |M_{if}|^2 d\mathcal{P} \text{ ----- (31)}$$

donde $|M_{if}|^2$ representa el cuadrado del elemento de matriz de dispersión y $d\mathcal{P}$ simboliza la densidad de estados finales (por unidad de energía o de frecuencia). Es precisamente $d\mathcal{P}$ la cantidad que contiene la definición de espacio fase. En el presente problema los estados finales del proceso con el electrón y los fotones emitidos, para describir d regularmente, se usa:

$$d\mathcal{P} = \frac{V d^3p}{E_f (2\pi k)^3} \frac{V d^3k}{\omega (2\pi)^3} \frac{V d^3k'}{\omega' (2\pi)^3} \text{ ----- (32)}$$

donde el primer factor del espacio fase representa el número de electrones por unidad de energía; el segundo y tercer factores describen el número de fotones por unidad de frecuencia. De este espacio fase es evidente la diferencia entre los factores del electrón y los de fotón; esto se debe a que se utilizan unidades físicas, y en dichas unidades el momento del fotón está dado por $\hbar k$, lo que permite la cancelación del divisor \hbar^3 . Las cantidades E_f y ω que aparecen en el espacio fase están tomadas de las ecuaciones (14) y (26), y corresponden a factores de la constante de normalización de los electrones y fotones respectivamente. Esto significa que estos factores se considerarán como parte de las constantes de normalización y el espacio fase que se usará es el que sigue:

$$d\mathcal{P} = \frac{V d^3p}{(2\pi k)^3} \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \frac{V d^3k'}{(2\pi)^3} \text{ ----- (33)}$$

Como en este trabajo se busca hallar el límite clásico de la sección diferencial eficaz, es necesario considerar un espacio fase donde sea posible determinar intensidad del haz de luz en lugar de tomar en cuenta el número de fotones; entonces de acuerdo con los resultados deducidos en el apéndice (C) y en particular en la ecuación (C-4) se puede escribir un nuevo espacio fase:

$$d\rho = \frac{v d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(k\omega) v d^3k}{m_0 c^2 (2\pi)^3} \frac{(k'\omega') v d^3k'}{m_0 c^2 (2\pi)^3} \dots \dots (34)$$

El factor $m_0 c^2$, que es la energía en reposo del electrón, se agrega para dejar adimensional el espacio fase.

La sección eficaz diferencial se define de la ecuación (31) en la siguiente forma:

$$d\sigma = \frac{dW}{j_{inc}} \dots \dots \dots (35)$$

donde j_{inc} es la corriente de partículas incidentes. En el presente caso como $j_{inc} = v_i/V$, donde v_i es la velocidad inicial del electrón y V el volumen de normalización, entonces combinando las ecuaciones (31), (34) y (35) se tiene:

$$d\sigma = \frac{V}{v_i} \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \frac{v d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v(k\omega) d^3k}{m_0 c^2 (2\pi)^3} \frac{v(k'\omega') d^3k'}{m_0 c^2 (2\pi)^3} \dots \dots (36)$$

que es el espacio fase utilizado en este trabajo.

SECCION IV

LIMITE $\kappa \rightarrow 0$ PARA EL CASO DEL EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON UNO Y DOS FOTONES

En esta sección se aplicará el límite $\kappa \rightarrow 0$ a tres casos especiales: Dispersión de Rutherford, y efecto bremsstrahlung con emisión de uno o dos fotones. El límite se aplica de acuerdo a las condiciones descritas en la sección I.

i) DISPERSION DE RUTHERFORD

El diagrama de Feynman correspondiente a la dispersión de Rutherford por un campo exterior en el primer orden de perturbación, se representa en el figura 7.

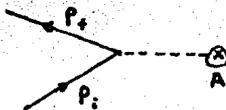


FIGURA 7

A este diagrama se le asociarán las potencias de κ con las que contribuye cada línea. De acuerdo con los teoremas I y II, se sabe que las líneas electrónicas no aportan factores κ a la amplitud de probabilidad, mientras que el fotón virtual lo hace con κ^2 , entonces el diagrama que representa la amplitud de probabilidad contiene un factor global κ^2 . Usando el espacio fase correspondiente a este proceso, la sección eficaz diferencial se escribe como sigue:

$$d\sigma_c = \frac{2\pi}{v_i} \frac{c^2 e^2}{2\epsilon_1 2\epsilon_2} \left| \bar{u}(p_f) \frac{\not{\epsilon}}{c} u(p_i) \right|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \dots \quad (37)$$

se observa que las potencias de \hbar se cancelan* y al tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$ la expresión queda inalterada; por tanto, la dispersión de Rutherford es un proceso clásico**.

ii) EFFECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE UN FOTON

En este caso los diagramas de Feynman son:

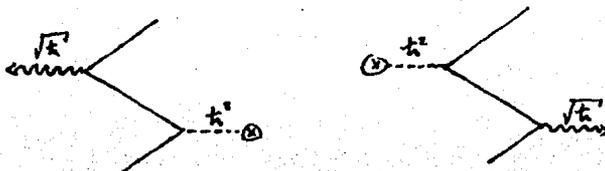


FIGURA 8

En donde se han considerado las contribuciones de factores de \hbar de cada línea (Teoremas I y II). Escribiendo la sección eficaz correspondiente

*La normalización de espinores de Dirac elegida en este trabajo (ecuación 13), indicaría la presencia de factores de \hbar en la cantidad $\int u(p_f) \bar{u}(p_i)$, puesto que $\bar{u} \sim 1/\hbar$. En realidad sucede que la transformada de Fourier de $A(x)$ es:

$$A(p) = 2\pi k c \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) \int d^4x \frac{e^{-i p \cdot x}}{m c^2} \bar{e}^{-i(\epsilon_f - \epsilon_i) \cdot x}$$

En el caso especial del potencial coulombiano:

$$A(p) = 2\pi k c \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) \left[\frac{Ze}{\epsilon_0} \frac{k^2}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_i|^2} |\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i)| \right]$$

Esto significa que la transformada de Fourier del campo electromagnético contiene un factor \hbar^3 ; que junto con el factor procedente de la normalización de los espinores dan un total de \hbar^2 . Y esta es la potencia de \hbar^2 asociada al fotón virtual.

**Esta expresión es la sección eficaz de Mott, siendo la dispersión de Rutherford sólo un caso especial de ella. La deducción completa de esta ecuación aparece por ejemplo en: GUPTA, 1977; BJORKEN y DRELL, 1964; LEITE, 1977, etc.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{E^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta/2)}{(p \sin \theta/2)^4}$$

a este proceso se tiene:

$$d\sigma = \frac{V}{v_i} \frac{2\pi}{k} |M_{if}|^2 \frac{V d^3p}{(2\pi k)^3} \frac{V(\omega) d^3k}{mc^2 (2\pi)^3} \quad (38)$$

con la amplitud de probabilidad dada por la ecuación (5). Haciendo las sustituciones $\epsilon \rightarrow \sqrt{\hbar} \epsilon$ y $k \rightarrow \hbar k$ (la primera sustitución esta justificada por la ecuación (26) y la segunda por el paso de unidades naturales a unidades físicas) en la amplitud de probabilidad se tiene:

$$M^{(k)^*} = \frac{1}{\sqrt{k}} \bar{u}(p_f) \left\{ \left(\frac{\epsilon \cdot p_f}{K \cdot p_f} - \frac{\epsilon \cdot p_i}{K \cdot p_i} \right) \not{\epsilon} + \not{k} \left(\frac{\not{\epsilon} \not{K}}{2 p_f \cdot k} - \frac{\not{K} \not{\epsilon}}{2 p_i \cdot k} \right) \right\} u(p_i) \quad (39)$$

obsérvese que como en el caso de la dispersión de Rutherford, el factor K^2 asociado al fotón virtual se cancela con el factor de \hbar procedente de la regla de oro de Fermi y con el factor \hbar^3 asignado al espacio fase del electrón. Sustituyendo (39) en (38) se tiene:

$$d\sigma = \frac{V}{v_i} 2\pi |M_{if}|^2 \frac{V d^3p}{(2\pi)^3 mc^2 (2\pi)^3} \frac{V \omega d^3k}{(2\pi)^3 mc^2 (2\pi)^3}$$

donde $M_{if}^{(k)} = \bar{u}(p_f) \left\{ \left(\frac{\epsilon \cdot p_f}{K \cdot p_f} - \frac{\epsilon \cdot p_i}{K \cdot p_i} \right) \not{\epsilon} + \not{k} \left(\frac{\not{\epsilon} \not{K}}{2 p_f \cdot k} - \frac{\not{K} \not{\epsilon}}{2 p_i \cdot k} \right) \right\} u(p_i)$, tomando el límite $\hbar \rightarrow 0$ se obtiene el resultado clásico para el efecto bremsstrahlung con un fotón (ecuación 4) coincidiendo con el resultado para un fotón suave:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{v_i} \frac{e^4}{16 \cdot 16 \epsilon_0} \frac{1}{16 \epsilon_0} \left| \frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} - \frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right|^2 |\bar{u}(p_f) \not{\epsilon} u(p_i)|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{mc^2 (2\pi)^3} \quad (40)$$

Usando el resultado de la ecuación (37), esto se puede reescribir en la siguiente forma:

* Salvo el factor mc^2

** La notación $M^{(k)}$ se usa para distinguir a la amplitud de probabilidad antes de tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$

$$d\sigma = d\sigma_c \frac{e^2}{2\epsilon_0} \left| \frac{\epsilon \cdot p_+}{k \cdot p_+} - \frac{\epsilon \cdot p_-}{k \cdot p_-} \right|^2 \frac{d^3k}{m_e c^2 (2\pi)^3} \quad (41)$$

y dada la ecuación (c-3):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e d\Omega_\gamma} = \frac{d\sigma_c}{d\Omega_e} \frac{dI'}{d\Omega_\gamma}, \quad I' = \frac{I}{m_e c^2} \quad (42)$$

que expresa que la sección diferencial total del proceso es el producto de la sección eficaz elástica y la sección del haz de ondas electromagnéticas.

Cuando se efectúa la suma sobre polarizaciones del fotón saliente, la ecuación (41) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_c \sum_{pol} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0} \right) \left| \frac{\epsilon \cdot p_+}{k \cdot p_+} - \frac{\epsilon \cdot p_-}{k \cdot p_-} \right|^2 \frac{d^3k}{m_e c^2 (2\pi)^3} \\ &= d\sigma_c \left(-\frac{e^2}{2\epsilon_0} \right) \left(\frac{p_+}{k \cdot p_+} - \frac{p_-}{k \cdot p_-} \right)^2 \frac{d^3k}{m_e c^2 (2\pi)^3} \quad (43) \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el resultado que sigue (BJORKEN y DRELL, 1964):

$$\sum_{pol} (\epsilon_\mu a^\mu)(\epsilon_\nu b^\nu) = -a \cdot b$$

donde a y b representan dos corrientes conservadas. Integrando la ecuación (43) con respecto al ángulo sólido (GUPTA, 1977) se obtiene:

$$- \int d^3k \left(\frac{p_+}{k \cdot p_+} - \frac{p_-}{k \cdot p_-} \right)^2 = \frac{8\pi}{c} \left(1 - \frac{v^2}{m_e^2 c^4} - 1 \right) d\omega \quad (44)$$

expresión que es válida en el caso de que $-q^2 \gg m^2 c^2$, donde $q = p_f - p_i$ y m es la masa en reposo del electrón. Sustituyendo (44) en (43) se encuentra que:

$$d\sigma = d\sigma_c \left(\frac{e^2}{2\hbar^2 m c^2 \epsilon_0} \right) \left(\ln \frac{-q^2}{m^2 c^2} - 1 \right) d\omega \quad (45)$$

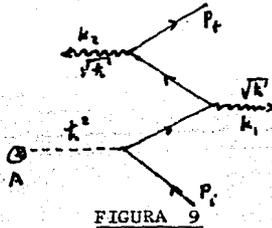
Vemos que la intensidad del haz de luz es:

$$\frac{dI}{m_0 c^2} = \frac{e^2}{2\pi^2 c^3 m_0} \left(\ln \frac{-q^2}{m^2 c^2} - 1 \right) d\omega \quad (46)$$

En realidad lo que aquí está escrito es la intensidad entre $m c^2$, lo que permite tener una cantidad adimensional. Este hecho es importante para el posterior desarrollo perturbativo.

iii) EFEECTO BREMSSTRAHLUNG CON EMISION DE DOS FOTONES

Para este proceso sólo se considerará un diagrama de Feynman, puesto que el resultado obtenido del resto de ellos es semejante. Sea el diagrama:



La amplitud de probabilidad asociada es (Apéndice A):

$$M_{(A)} = \frac{N}{2(p_f \cdot k_0) 2(p_f \cdot k_2 + p_f \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2)} \bar{u}(p_f) \left\{ \not{\epsilon}_2 (\not{p}_f + \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}_1 (\not{p}_f + \not{k}_2 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon} \right\} u(p_f)$$

donde $N = \frac{(-ie)^3}{\sqrt{2E_f} \sqrt{2E_i} \sqrt{2(K_0)_1} \sqrt{2(K_0)_2} \sqrt{V}}$ y (k_0) simboliza la energía del fotón. Como en el caso anterior ya no se considera el factor k^2 asociado al fotón virtual, y sólo se hacen las sustituciones: $\epsilon \rightarrow \sqrt{k} \epsilon$ y $k \rightarrow k k$; entonces la amplitud queda:

$$M_{(A)}^{(k)} = \frac{N}{2(p_f \cdot k_0) 2(p_f \cdot k_2 + p_f \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2)} \bar{u}(p_f) \left\{ \sqrt{k} \not{\epsilon}_2 (\not{p}_f + k \not{k}_2 + mc) \sqrt{k} \not{\epsilon}_1 (\not{p}_f + k \not{k}_1 + k \not{k}_2 + mc) \not{\epsilon} \right\} u(p_f)$$

de aquí se tiene:

$$M_{(A)}^{(k)} = \frac{N}{k [2(p_f \cdot k_0) 2(p_f \cdot k_2 + p_f \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2)]} \bar{u}(p_f) \left\{ \not{\epsilon}_2 (\not{p}_f + k \not{k}_2 + mc) \not{\epsilon}_1 (\not{p}_f + k \not{k}_1 + k \not{k}_2 + mc) \right\} u(p_f) \quad (47)$$

Este factor $1/k$ se puede obtener de cada uno de los diagramas; entonces factorizándolos y sustituyendo este resultado en la ecuación (34) se tiene:

$$d\sigma = \frac{V}{v_i} 2\pi \frac{1}{k^2} |M_{(A)}^{(k)}|^2 \frac{V d^3 p}{(2\pi k)^3} \frac{V k \omega d^3 k}{mc^2 (2\pi)^3} \frac{V k \omega' d^3 k'}{mc^2 (2\pi)^3}$$

donde los únicos factores de k que permanecen se encuentran en la amplitud de probabilidad, la cual es una suma de cantidades como la dada en la ecuación (47). Haciendo $k \rightarrow 0$ se obtiene que la ecuación (47) se convierte en:

$$\lim_{k \rightarrow 0} M_{(a)}^{(k)} = \frac{N}{2(p_1 \cdot k_1) 2 p_2 \cdot (k_1 + k_2)} \bar{u}(p_1) \left\{ \not{e}_2 (\not{p}_1 + mc) \not{e}_1 (\not{p}_1 + mc) \right\} u(p_1)$$

que coincide con la aproximación de fotones suaves obtenida en el apéndice A. Usando el resultado que en dicho apéndice aparece para la amplitud de probabilidad total, se obtiene que:

$$\lim_{k \rightarrow 0} M^{(k)} = N \left(\frac{\epsilon_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_2}{k_2 \cdot p_1} \right) \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_2} \right) \bar{u}(p_1) u(p_1) \dots (48)$$

y la sección eficaz total del proceso se escribe como:

$$d\sigma = d\sigma_c \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0} \left| \frac{\epsilon_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_2}{k_2 \cdot p_1} \right|^2 \right) \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0} \left| \frac{\epsilon_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_2} \right|^2 \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}$$

Recordando que se deben sumar las probabilidades de emisión de un fotón - y de dos fotones para este proceso:

$$d\sigma = d\sigma_c \frac{e^2}{2\epsilon_0} \left| \frac{\epsilon_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_2}{k_2 \cdot p_1} \right|^2 \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{e^2}{2\epsilon_0} \left| \frac{\epsilon_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_2} \right|^2 \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \dots (49)$$

donde se ha considerado el factor 2 por la indistinguibilidad de los fotones (BERESTETSKII, LIFSHITZ y PITAEVSKII, 1982). Este es el límite clásico que se propone para el efecto bremsstrahlung con emisión de dos fotones. - Sumando sobre las polarizaciones e integrando con respecto al ángulo sólido (como en el caso de un fotón) se puede ver que:

$$d\sigma = d\sigma_c \left[\gamma d\omega + \frac{1}{2!} \gamma^2 d\omega d\omega' \right] \dots (50)$$

$$\gamma = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2 c^2 \epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{E}{m^2 c^2} \right) - 1 \right]$$

donde se han integrado las frecuencias ω y ω' . En el caso de la emisión de un número infinito de haces secundarios, es posible dar una generalización de la ecuación (50). Si se cumple que $\gamma\omega < 1, \gamma\omega' < 1, \dots$, entonces se tiene que los términos del desarrollo siguiente:

$$d\sigma = d\sigma_c \left[\gamma\omega + \frac{1}{2!} \gamma^2 \omega \omega' + \frac{1}{3!} \gamma^3 \omega \omega' \omega'' + \dots \right] \text{----- (51)}$$

son cada vez mas pequeños. Suponiendo que las frecuencias de los fotones no sean muy distintas y observando que en la ecuación (51) la contribución lineal predomina, dada la pequeñez de los términos posteriores, es posible aproximar la ecuación (51) como sigue:

$$d\sigma \approx d\sigma_c (e^{\gamma\omega} - 1) \text{----- (52)}$$

Esta ecuación expresa la sección diferencial del efecto bremsstrahlung -- con la emisión de hasta una infinidad de fotones suaves, cuya frecuencia esta próxima a ω . Usando el resultado de la ecuación (52), es posible mostrar que los fotones suaves son emitidos de acuerdo con la ley de probabilidades de Poisson. (Ver apéndice D)

De la ecuación (52) se observa que la intensidad del haz de fotones emitidos es proporcional al factor $e^{\gamma\omega} - 1$. La constante de proporcionalidad se propone como mc^2 para obligar que el término lineal coincida con la predicción maxwelliana, entonces es posible escribir:

$$I = mc^2 (e^{\gamma\omega} - 1) \text{----- (53)}$$

Y el término lineal de este desarrollo es:

$$I \approx mc^2 \gamma\omega \text{----- (54)}$$

Debe recordarse que $\gamma \sim e^2$, esto implica que en la ecuación (53) no sólo existe la contribución maxwelliana del término con el factor e^2 (ecuación 54), sino que están presentes términos con potencias e^{2n} . Esto significa que el resultado (53) no puede ser derivado directamente de las ecuaciones de la teoría de Maxwell.

En conclusión, la ecuación (53) puede ser interpretada como un resultado clásico en el sentido de que carece de factores de \hbar . Sin embargo, la teoría de Maxwell del campo electromagnético sólo predice la aproximación lineal de dicha intensidad de haz de ondas electromagnéticas, por tanto debe considerarse la posibilidad de una teoría más general para el campo electromagnético.

Para finalizar esta sección, supóngase que se utiliza el espacio fase de la ecuación (33) para determinar la sección eficaz del efecto bremsstrahlung con emisión de un fotón suave, el resultado que se obtiene es -- bien conocido (BJORKEN Y DRELL, 1964):

$$d\sigma = d\sigma_c \left(-\frac{e^2}{2k\epsilon_0} \right) \left(\frac{p_i}{k \cdot p_i} - \frac{p_f}{k \cdot p_f} \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega} \dots (55)$$

donde ya se ha sumado sobre las polarizaciones del fotón. Usando el resultado de Gupta al integrar sobre frecuencias y ángulo sólido (GUPTA, 1977) se deduce que:

$$d\sigma = d\sigma_c \left(-\frac{2\pi e^2}{2k\epsilon_0 c (2\pi)^3} \right) \left(\ln \frac{\omega^2}{k^2 c^2} - 1 \right) \ln \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} \dots (56)$$

y como $d = \frac{e^2}{4\pi\hbar\epsilon_0 c}$ en el sistema de unidades físicas se concluye que:

$$d\sigma = d\sigma_c \left(\frac{2d}{\hbar} \right) \left(\ln \frac{\omega^2}{k^2 c^2} - 1 \right) \ln \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} \dots (57)$$

que es válida sólo en el caso de que $-q^2 \gg m^2 c^2$. Esta sección diferencial se obtuvo bajo la hipótesis de que los fotones son suaves, esta aproximación es distinta a la de tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$. Esto se debe a que en el primer caso no sólo se presupone que los fotones son suaves, sino que también se sabe que la constante de estructura fina es finita; mientras que en el segundo caso se observa que una vez que se ha tomado el límite se encuentra que los fotones emitidos son suaves, y en esta aproximación la constante de estructura fina no es finita. Otra diferencia fundamental es que la ecuación (57) presenta la divergencia al infrarrojo, que consiste que en el límite $\omega_{\text{min}} \rightarrow 0$ la sección diferencial es divergente (BLOCH y NORDSIECK, 1937); y por otra parte, en la ecuación (52) no aparece este problema.

CONCLUSIONES

I. Dados los resultados de la electrodinámica cuántica en procesos radiativos, el límite $\hbar \rightarrow 0$ lleva a predicciones que se proponen como resultados clásicos. Este límite se debe efectuar en las condiciones señaladas en este trabajo, éstas son: Que las cantidades e , m y c permanezcan fijas, y que el espacio fase sea seleccionado convenientemente al caso. Los procesos tratados en el desarrollo del texto son: La dispersión de Rutherford y el efecto bremsstrahlung (e.b.) con emisión de un fotón. En el primer caso se demuestra que se trata de un proceso clásico; el segundo tiene como límite clásico el mismo resultado que se obtiene al tomar $\hbar \rightarrow 0$.

El aspecto crucial en el tratamiento del e.b. con emisión de un fotón esta en la elección del espacio fase. El espacio fase que se usa regularmente (ecuación 33) hace recuento del número de fotones; este hecho hace difícil considerar el límite clásico, puesto que el concepto de fotón no es clásico. La elección de un espacio fase que considera intensidad del haz de luz, hace posible que el límite $\hbar \rightarrow 0$ no sea divergente y que se recupere el resultado clásico. Además, al usar el espacio fase usual, el resultado que se obtiene presenta el problema de la divergencia al infrarrojo, problema que no aparece al usar la nueva definición de espacio fase.

II. Cuando se toma el límite $\hbar \rightarrow 0$ para el e.b. con emisión de dos fotones, se encuentra que los fotones son suaves. Este resultado se puede generalizar para el caso del e.b. con emisión de un número arbitrario de fotones. Cuando los fotones emitidos tienen una frecuencia cercana entre sí, el comportamiento de la emisión de hasta una infinidad de ellos es proporcional al factor $(e^{\nu} - 1)$. La aproximación lineal de este resultado conduce a la expresión clásica de la intensidad del haz emitido, el resto de los términos no son predichos por la teoría de Maxwell. Esto permite pensar que la teoría de Maxwell es el caso particular de una teoría mas general.

APENDICE A

CALCULO DE LA AMPLITUD DE PROBABILIDAD DEL EFECTO BREMSSTRAHLUNG CON DOS FOTONES.

Como ya se ha mencionado en la sección I, la amplitud de probabilidad del efecto bremsstrahlung con dos fotones se calcula considerando seis diagramas de Feynman:

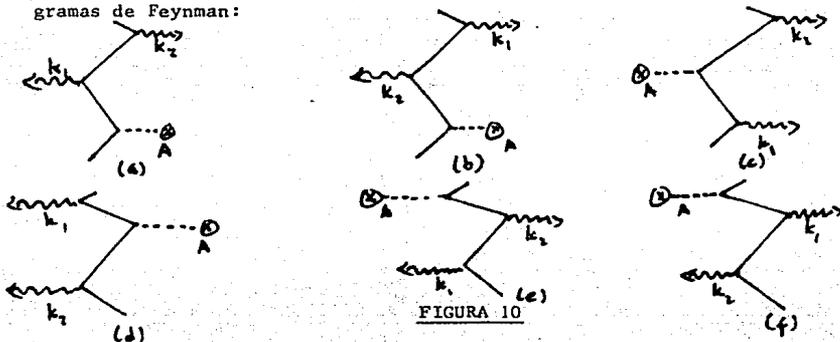


FIGURA 10

se puede observar que el diagrama (b) sólo difiere del (a) en el cambio de índices del fotón, lo mismo se puede decir de (d) con respecto a (c), y de (f) con respecto a (e). En lo que sigue, se evaluará explícitamente la amplitud de probabilidad correspondiente al diagrama (a).

De acuerdo a las reglas de Feynman, la amplitud de probabilidad del diagrama (a) se escribe como sigue:

$$M_{(a)} = \frac{(-i)^2 e^2}{\sqrt{2E_1 2E_2 2|k_1| 2|k_2|} V} \bar{u}(p_2) \left\{ \not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_2 - m} \not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_2 + \not{k}_1 + m} \right\} u(p_1) - (A \rightarrow B)$$

llamando $(N = \frac{(-ie)^2}{\sqrt{2E_1V} \sqrt{2E_2V} \sqrt{2(k_1)_xV} \sqrt{2(k_2)_xV}})$ donde $(k_1)_x$ y $(k_2)_x$ simbolizan las energías de los fotones (1) y (2) respectivamente. Racionalizando la ecuación (A-1) se obtiene:

$$M_4 = \frac{N}{2(p_1 \cdot k_2) 2(p_2 \cdot k_1 + p_2 \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2)} \bar{u}(p_1) \left\{ \not{\epsilon}_2 (\not{p}_1 + \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}_1 (\not{p}_1 + \not{k}_2 + \not{k}_1 + m) \right\} u(p_2) \quad \text{---(A-2)}$$

El siguiente paso consiste en simplificar esta expresión. Para conseguirlo se utilizan la ecuación de Dirac y su adjunta:

$$(\not{p} - m) u = 0 \quad \text{---(A-3)}$$

$$\bar{u} (\not{p} - m) = 0 \quad \text{---(A-4)}$$

entonces aplicando (A-3) y (A-4) se sigue que:

$$M_{(A)} = \frac{N}{\text{DENOMINADOR}} \bar{u}(p_1) \left\{ (2\epsilon_2 \cdot p_1 - \not{p}_1 \not{\epsilon}_2 + \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}_1 (\not{p}_1 + \not{k}_2 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_2 \right\} u(p_2)$$

$$= \frac{N}{D_A} \left\{ \bar{u}(p_1) \left[(-\not{p}_1 \not{\epsilon}_2 + m) \not{\epsilon}_1 (\not{p}_1 + \not{k}_2 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_2 \right] u(p_2) + \bar{u}(p_1) \left[(2\epsilon_2 \cdot p_1 + \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}_1 + (\not{p}_1 + \not{k}_2 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_2 \right] u(p_2) \right\} \quad \text{---(A-5)}$$

Debido a la ecuación de Dirac (A-4), el primer término entre corchetes de la ecuación (A-5) se cancela. Utilizando en forma reiterada este procedimiento, se obtiene:

$$M_{(a)} = \frac{H}{D_a} \bar{u}(p_1) \left[4(\epsilon_1 \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_1) + 4(\epsilon_1 \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot k_2) + 2(\epsilon_1 \cdot p_1) \epsilon_1^\mu k_{1\mu} + 2(\epsilon_1 \cdot p_1) \epsilon_1^\mu k_{2\mu} - 2(p_1 \cdot k_2) \epsilon_1^\mu \epsilon_{1\mu} + 2(k_2 \cdot \epsilon_1) \epsilon_1^\mu k_{1\mu} + \epsilon_1^\mu k_{2\mu} \epsilon_{1\mu} \right] u(p_2) \quad \text{---(A-6)}$$

Es claro que la amplitud de probabilidad del diagrama (b) se puede obtener de (A-6) con sólo intercambiar los índices (1) y (2). Siguiendo un procedimiento idéntico al anterior, pero usando también la ecuación (A-3), se encuentran las amplitudes de probabilidad de los diagramas (c) y (e):

$$M_{(c)} = \frac{H}{D_c} \bar{u}(p_2) \left\{ 4(\epsilon_2 \cdot p_2)(\epsilon_2 \cdot p_2) - 2(\epsilon_2 \cdot p_2) \epsilon_2^\mu k_{1\mu} + 2(p_2 \cdot \epsilon_1) \epsilon_2^\mu k_{2\mu} - \epsilon_2^\mu k_{1\mu} \epsilon_{1\mu} \epsilon_2^\nu \right\} u(p_1) \quad \text{---(A-7)}$$

donde ($D_c = -4(p_2 \cdot k_2)(p_2 \cdot k_1)$). Y finalmente, se escribe ($M_{(e)}$) como sigue:

$$M_{(e)} = \frac{H}{D_e} \bar{u}(p_1) \left\{ 4(p_2 \cdot \epsilon_1)(p_2 \cdot \epsilon_1) - 4(p_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_2) - 2(p_2 \cdot \epsilon_1) k_{1\mu} \epsilon_2^\mu - 2(\epsilon_2 \cdot k_1) \epsilon_1^\mu \epsilon_{1\mu} + 2(k_2 \cdot \epsilon_1) k_{1\mu} \epsilon_2^\mu + k_{2\mu} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \right\} u(p_2) \quad \text{---(A-8)}$$

La amplitud de probabilidad total para el efecto bremsstrahlung con emisión de dos fotones será:

$$M = M_{(a)} + M_{(b)} + M_{(c)} + M_{(d)} + M_{(e)} + M_{(f)} \quad \text{---(A-9)}$$

En particular, para fotones suaves ($k_1 \ll m$) y ($k_2 \ll m$), en unidades naturales, la amplitud de probabilidad se reduce a:

$$M = N \left(\frac{\epsilon_2 \cdot p_f}{k_2 \cdot p_f} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_i}{k_2 \cdot p_i} \right) \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p_f}{k_1 \cdot p_f} - \frac{\epsilon_1 \cdot p_i}{k_1 \cdot p_i} \right) \bar{\mu}(p_f) \bar{\mu}(p_i) \dots (A-10)$$

De acuerdo a este resultado, los fotones suaves se comportan como entidades probabilísticamente independientes, y por tanto, es posible calcular con facilidad esta cantidad para un número arbitrario de dichos fotones suaves. De esta forma, la amplitud de probabilidad de emisión de (n) fotones suaves es:

$$M = \prod_{j=1}^n N \left(\frac{\epsilon_j \cdot p_f}{k_j \cdot p_f} - \frac{\epsilon_j \cdot p_i}{k_j \cdot p_i} \right) \bar{\mu}(p_f) \bar{\mu}(p_i) \dots (A-11)$$

APENDICE B

CALCULO DE $|M_{fi}|^2$

Se define ($\langle u_i | \gamma^\mu \Gamma | u_i \rangle \equiv m_{fi}$) que es un elemento de la matriz de dispersión, aquí se considera por comodidad el bra como ($\langle u_i | \gamma^0$). De acuerdo a la relación de completéz de la base de espinores de Dirac se tiene:

$$\begin{aligned}
 m_{fi} &= \frac{1}{2m} \sum_s \langle u_i | \gamma^0 | u_s \rangle \langle u_s | \gamma^\mu \Gamma | u_i \rangle = \frac{1}{2m} \sum_s \langle u_i | \gamma^0 \Gamma | u_s \rangle \langle u_s | \gamma^0 | u_i \rangle \\
 &= \mathcal{T}_r (\Gamma M_{fi}) \quad \text{----- (B-1)}
 \end{aligned}$$

donde $M_{fi} = |u_i\rangle \langle u_f | \gamma^0$

De la ecuación (B-1) se obtiene:

$$m_{fi} = \frac{1}{\langle u_i | \gamma^0 | u_f \rangle} \langle u_i | \gamma^0 | u_f \rangle \mathcal{T}_r (\Gamma |u_i\rangle \langle u_f | \gamma^0)$$

donde se ha multiplicado y dividido por el mismo escalar, y de aquí se sigue que:

$$\begin{aligned}
 m_{fi} &= \frac{1}{\langle u_i | \gamma^0 | u_f \rangle} \mathcal{T}_r (\Gamma |u_i\rangle \langle u_i | \gamma^0 | u_f \rangle \langle u_f | \gamma^0) \\
 &= \frac{1}{\langle u_i | \gamma^0 | u_f \rangle} \mathcal{T}_r (\Gamma P_i P_f) \quad \text{----- (B-2)}
 \end{aligned}$$

donde $(P_i \equiv |u_i\rangle\langle u_i| \gamma^0)$ y $(P_f \equiv |u_f\rangle\langle u_f| \gamma^0)$ son los proyectores hacia el estado (i) y al estado (f) respectivamente.

Si en la ecuación (B-2) se hace $(\Gamma = I)$ se obtiene lo que sigue:

$$\langle u_f | \gamma^0 | u_i \rangle = \frac{1}{\langle u_i | \gamma^0 | u_i \rangle} \tilde{\gamma}_r (P_i P_f)$$

esto implica que:

$$\langle u_f | \gamma^0 | u_i \rangle \langle u_i | \gamma^0 | u_i \rangle^* = \tilde{\gamma}_r (P_i P_f)$$

o lo que es lo mismo:

$$|\langle u_f | \gamma^0 | u_i \rangle|^2 = \tilde{\gamma}_r (P_i P_f)$$

$$\langle u_f | \gamma^0 | u_i \rangle = e^{i\varphi} \sqrt{\tilde{\gamma}_r (P_i P_f)} \text{ ----- (B-3)}$$

donde (φ) es una fase arbitraria sin ningún sentido físico. Sustituyendo (B-3) en (B-1) se deduce que:

$$m_{fi} = \frac{1}{e^{i\varphi} \sqrt{\tilde{\gamma}_r (P_i P_f)}} \tilde{\gamma}_r (\Gamma P_i P_f) \text{ ---- (B-4)}$$

los proyectores se pueden escribir de acuerdo a:

$$P_j = \frac{P_i + m}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \gamma_j}{2}$$

$$P_i = \frac{P_i + m}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \gamma_i}{2}$$

donde (A_j) y (A_i) son las polarizaciones del electrón en su estado final e inicial respectivamente.

El siguiente paso consiste en escribir la expresión que genéricamente se le ha llamado (Γ) en términos de la base covariante de las matrices de Dirac (MORENO, 1984). Dicha base es $(\{I, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\})$ y de acuerdo a ella, se puede desarrollar una matriz (Γ) arbitraria como:

$$\Gamma = (S + i P \gamma^5 - \frac{i}{2} T_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}) + (V_\mu \gamma^\mu + i A_\mu \gamma^5 \gamma^\mu) \text{ ---- (B-5)}$$

los términos contenidos en el primer paréntesis corresponden a los productos pares de matrices de Dirac (o en forma equivalente conmutan con (γ^5)), y el segundo conjunto de términos es impar, ya que corresponden a los productos impares de matrices de Dirac (o en forma equivalente anticonmutan con (γ^5)). Además, también se debe expresar el producto de los proyectores de acuerdo con la base covariante, supóngase que en este caso el desarrollo que da en la forma siguiente:

$$P_i P_f = S' + i P' \gamma^5 + V'_\mu \gamma^\mu + i A'_\mu \gamma^5 \gamma^\mu - \frac{i}{2} T'_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \text{ ---- (B-6)}$$

Usando la ecuación $(|M_{fi}|^2 = 4(SS' - PP' + VV' + \bar{A} \cdot \bar{A}' - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}))$ (MORENO, 1984) en donde se sustituye la ecuación (B-2) se sigue:

$$|m_{fi}|^2 = \frac{1}{\gamma_r(P_i P_f)} 4(SS' - PP' + VV' + \bar{A} \cdot \bar{A}' - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}) \text{--- (B-7)}$$

donde $(\gamma_r(P_i P_f) = \gamma_r(s') = 4s')$, dado que la traza de todos los elementos de la base es nula, a excepción de la matriz unidad. Y, entonces se puede escribir:

$$|m_{fi}|^2 = \frac{1}{s'} (SS' - PP' + VV' + \bar{A} \cdot \bar{A}' - \frac{1}{2} T'^{\mu\nu} T_{\mu\nu}') \text{--- (B-8)}$$

Para el caso particular del efecto bremsstrahlung (en cualquier orden de perturbación), la matriz (Γ) está expresada como un producto impar* de matrices de Dirac, por lo que es posible escribirla en la forma general:

$$\Gamma = V_{\mu} \gamma^{\mu} + i A_{\mu} \gamma^5 \gamma^{\mu}$$

donde $(\{\gamma^{\mu}, \gamma^5 \gamma^{\mu}\})$ son los elementos impares de la base covariante de las matrices de Dirac. Usando las ecuaciones (B-4) y (B-8) se tiene:

* En el apéndice A se comprueba este hecho para el caso de la ecuación (A-4), la cual describe la amplitud de probabilidad que corresponde al diagrama (a), en este caso los términos que aparecen son: $\not{x}, \not{x}_1 \not{x}_2, \not{x}_2 \not{x}_1 \not{x}, \not{x}_2 \not{x}_2 \not{x}, \not{x}_2 \not{x}_1 \not{x}_2, \not{x}_2 \not{x}_2 \not{x}_1 \not{x}_1 \not{x}$

**La notación empleada en este caso es: $VV' = V^{\mu} V'_{\mu}$, $A \cdot A' = A^{\mu} A'_{\mu}$

$$|\bar{m}_{\mu\nu}|^2 = \frac{1}{S^2} (\bar{V}_{\mu} V'^{\mu} + \bar{A} \cdot \bar{A}') \quad \text{-----} \quad (B-9)$$

donde $(S = \frac{1}{4} \gamma_{\nu} \gamma^{\nu})$, $V^{\mu} = \frac{1}{4} \gamma_{\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu})$, $V'^{\mu} = \frac{1}{4} \gamma_{\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu})$, $A^{\mu} = \frac{1}{4} \gamma_{\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu})$ y $A'^{\mu} = \frac{1}{4} \gamma_{\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu})$

Con esto es posible hacer un tratamiento simplificado del cuadrado de la amplitud promediado sobre los espines del electrón. La referencia principal de este trabajo es: (MORENO y SALAS, en preparación).

APENDICE C

El siguiente desarrollo esta basado en la sección 15.1 del libro de -
electrodinámica clásica de J.D. Jackson (1980), se usa la misma notación -
que en dicho libro.

La intensidad de un haz de ondas electromagnéticas se puede escribir
como sigue:

$$d^3I = \frac{d^3I}{d^3k} d^3k = \frac{d^3I}{k^2 dk d\Omega} d^3k = \frac{c^3}{\omega^3} \left(\frac{d^3I}{d\omega d\Omega} \right) d^3k \quad (C-1)$$

De la ecuación (C-1) es posible deducir que:

$$\frac{d^3I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^3}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left| \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_+}{k \cdot \mathbf{P}_+} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_-}{k \cdot \mathbf{P}_-} \right|^2 \quad (C-2)$$

donde se han utilizado los cuadrivectores $(\mathbf{E} = (0, \vec{E}))$, $(\mathbf{P} = (m\gamma, \gamma\vec{v}))$ y $(\mathbf{k} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}))$. Sustituyendo la ecuación (C-2) en la (C-1) se tiene:

$$d^3I = \frac{e^2}{2\epsilon_0} \left| \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_+}{k \cdot \mathbf{P}_+} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_-}{k \cdot \mathbf{P}_-} \right|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (C-3)$$

Por otra parte, la relación entre el número de fotones (dN) y la in
tensidad del haz de ondas electromagnéticas (dI) se puede obtener de la
siguiente manera:

$$dI = \hbar\omega dN \quad (C-4)$$

APENDICE D

En lo que sigue se probará que los fotones suaves son emitidos de acuerdo a la ley de probabilidades de Poisson.

Considérese la probabilidad obtenida de los diagramas de Feynman siguientes:

$$|M_f|^2 = \left| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdots \oplus \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdots \oplus \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdots \oplus \right|^2 + \dots$$

Estos diagramas corresponden a la dispersión de Rutherford en unión a los del efecto bremsstrahlung con emisión de hasta un número infinito de fotones. En el límite $\lambda \rightarrow 0$, en las condiciones especificadas en este trabajo, los fotones emitidos son suaves. De acuerdo con el resultado de la ecuación (52), en este caso es posible escribir la sección diferencial total como sigue:

$$d\sigma \approx d\sigma_c e^{\gamma\omega} \quad \text{----- (D-1)}$$

De esta ecuación se obtiene que la probabilidad de emisión de (n) fotones suaves es:

$$P(n) = \frac{(\gamma\omega)^n}{n!} \quad \text{----- (D-2)}$$

Si se desea normalizar la probabilidad dada en la ecuación (D-2) para que la probabilidad de emisión de hasta una infinidad de fotones sea igual a la unidad, entonces se debe la probabilidad $P(n)$ como $P'(n) = e^{-\gamma\omega} P(n)$, y por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma\omega} \frac{(\gamma\omega)^n}{n!} = 1$$

Entonces se encuentra que la ley de probabilidades satisfecha por los fo tones suaves es:

$$p'(n) = e^{-\gamma\omega} \frac{(\gamma\omega)^n}{n!} \text{ ----- (0-3)}$$

Que es la ley de probabilidades de Poisson.

BIBLIOGRAFIA

- V.B. BERESTETSKII, E.M. LIFSHITZ y L.P. PITAEVSKII. "QUANTUM ELECTRODYNAMICS". PERGAMON PRESS 1982.
- J.D. BJORKEN y S.D. DRELL. "RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS". Mc GRAW-HILL, 1965.
- F. BLOCH y A. NORDSIECK. Phys. Rev. 52 (54), 1937.
- M. CAFFO y E. REMIDDI. Helv. Phys. Acta 55 (339), 1982.
- L. DE LA PEÑA. "INTRODUCCIÓN A LA MECANICA CUANTICA". C.E.C.S.A. 1979.
- R.P. FEYNMAN. Rev. Mod. Phys. 20 (367), 1948.
- R.P. FEYNMAN. "QUANTUM MECHANICS AND PATH INTEGRALS". Mc GRAW-HILL 1965.
- S.N. GUPTA. "QUANTUM ELECTRODYNAMICS". GORDON & BREACH 1977.
- J.D. JACKSON. "ELECTRODINAMICA CLASICA" ALHAMBRA 1975.
- J. LEITE LOPES. "INTRODUCCION A LA ELECTRODINAMICA CUANTICA". TRILLAS 1977.
- R.L. LIBOFF. Phys. Today. feb. 1984.
- E. MERZBACHER. "QUANTUM MECHANIS". WILEY 1970.

E.J. MONIZ y D.H. SHARP. Phys. Rev. D 15 (2850), 1977.

M. MORENO. J. Math. Phys. 26 (4), 1984.

M. MORENO y P. SALAS. En preparación. 1986.

L. PAGE. Phys. Rev. 11 (376), 1918.

E. ROA. "ECUACION DE MOVIMIENTO PARA PARTICULAS CARGADAS CON ESTRUCTURA EN SU VERSION CUANTICA". TESIS DE LICENCIATURA. U.N.A.M. 1985.

F. RORHLICH en "FOUNDATIONS OF RADIATION THEORY AND QUANTUM ELECTRODYNAMICS". Editado por A.D. BARUT. PLENUM PRESS 1980.

SCHULMAN. "TECHNICS AND APLICATIONS OF PATH INTEGRALS" WILEY 1980.

SOMERFELD. PROCEEDINGS OF THE THIRD INTERNATIONAL MATHEMATICS CONGRESS. HEIDELBERG 1904, p. 27.