108/111

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA.

TEMAS FUNDAMENTALES DE INGENIERIA QUIMICA.

ALFREDO REMES CULEBRO.

INGENIERO QUIMICO.

1979.

Jurado asignado originalmente según el tema:

PRESIDENTE: ING. HECTOR SIERRA ELIZONDO.

V O C A L : ING. ROBERTO ENRIQUEZ MENDOZA.

SECRETARIO: ING. LEOPOLDO RODRIGUEZ SANCHEZ.

1 er. SUPLENTE: ING. MAYO MARTINEZ KAHN.

2 do. SUPLENTE: ING. ABELARDO GARCIA LEON.

Sitio donde se desarrolló el tema: FAC. DE QUIMICA y FAC. de FILOSOFIA de la U. N. A. M.

ALFREDO REMES CULEBRO: ______________________

ING. HECTOR SIERRA ELIZONDO: ______________________

A mi padre, el Sr. Ing. Don

Alfredo Remes de Quiroga,

mi maestro en todos los órdenes de la vida y mi mejor amigo.

A mi madre la Sra. Da.

Gloria Estela Culebro de Remes de Quiroga,

por su constante fe en mis caminos y su amorosa entrega.

A mi hermana Magdalena.

A mi Florlirio.

A los maestros que me guiaron.

A los estudiantes y profesionales de la Ingeniería que tengan un ideal de perfección.

I N D I C E :

++++++++++++++++++++++++++++++++++++

I. P R E F A C I O .

" Si de llegarte a los bue-,

libro,fueres con letu ---,
no te dirá el boquirru --,
que no pones bien los de-,
Mas si el pan no se te cue-,
por ir a manos de idio ----,
verás de manos a bo -------,
aún no dar una en el cla --,
si bien se comen las ma ---,
por mostrar que son curio -, (El Quijote,Dedicatorias.-Cervantes)

Con estos versos comienza nuestro gran pensador hispano -- Cervantes de Saavedra.Yo deseo fervientemente que se cumplan al pie de la letra incompleta,para mi humilde trabajo,que muy vano sería decir qué es y qué no es .

Es sin embargo una norma tradicional describir brevemente en el prefacio,dos parámetros de mucha importancia;el primero de ellos es el objetivo y la meta que persigue el trabajo y el segundo es la mención de los tópicos de los cuales consta.

En lo que se refiere al primero de estos parámetros,el objetivo fundamental de esta TESIS es el de presentar un panorama " universal " de lo que constituye el bagaje básico- desde el punto de vista académico --- del Ingeniero Químico, o sea, una síntesis que permita recordar rápidamente los conceptos que constituyen la columna vertebral de la carrera.En este punto,es conveniente anotar que sólo están verdaderamente los conceptos más fundamentales y no pretende cubrir el presente trabajo,alguna fase de la literatura científica.Ahora,dimensionando el objetivo, es factible decir que la meta es hacer un " llamado " a los ingenieros,para que vuelvan los ojos hacia lo que he denominado " Base Metafísica de la Técnica "; al par que proporcionar un memento de los conceptos fundamentales de Matemáticas,Termodinámica y Fenómenos de Transporte.

Mi tesis,o sea, mi posición con respecto a la Ingeniería Química,está sintetizada en el capítulo de " Base Metafísica de -

la Técnica",el cual postulo como uno de los temas básicos para la formación académica de los ingenieros.

A continuación planteo un esquema general del lenguaje científico: las Matemáticas.Y finalmente una breve introducción a las ciencias físicas que nos permiten realizar el manejo de la energía: la Termodinámica y la Fluferología.

Me atrevo a sugerir,en función de que no existe una denominación universal para la ciencia que abarca los fenómenos de transporte y las operaciones unitarias que se generan de tales, el nombre FLUFEROLOGIA (del griego: φέρω llevar, conducir; φλύω flujos; λόγος tratado o estudio),pues constituye realmente el manejo(desde el punto de vista ingenieril),de los flujos de momentum,calor y masa.

Esta es,en síntesis la tesis que sugiero y deseo mantener en este trabajo, y pienso que sólo a través de algún fruto se conoce la obra; a pesar de que no desconozco,aunándome al intelectual francés Antoine de Saint-Exupéry, que " ....el lenguaje es fuente de mal entendimiento .... ".

II. B A S E   M E T A F I S I C A   D E   L A   T E C N I C A.

El objetivo fundamental de este capítulo es proponer -- como uno de los temas básicos para la formación académica de -- los ingenieros, la meditación sobre lo que significa la TECNICA - como tal.

El filósofo español José Ortega y Gasset nos presenta - en su libro " Meditación de la Técnica " un concepto profundo - de lo que significa la técnica, ~~para~~ y llega a encontrarse con - el problema ontológico del hombre.

Tomando en consideración que en su concepto más general, la INGENIERIA es fundirse con las expresiones matemáticas y las ciencias físicas, y llevar ese conocimiento al continuo manejo - de la energía, para encauzarlo al beneficio humano en todas sus - manifestaciones; es necesario tener la convicción de que debe - mos conocer algo acerca del hombre para poder beneficiarlo y - esto me llevó a la idea de que la ingeniería y la cultura son - algo íntimamente ligados, como lo expresa el ingeniero Hardy - Cross en su libro " Los Ingenieros y las Torres de Marfil ", - llegando a decir que: " Si cultura significa realización, --- apreciación y goce de la plenitud de la vida, de todos los fac - tores materiales, mentales, estéticos y espirituales que forman - el mundo de la humanidad, entónces los ingenieros están en una - posición particularmente favorable para lograrla. Si entran de - lleno en la ciencia y en las humanidades involucradas en adap - tar las fuerzas naturales para uso y conveniencia del hombre, - bien, eso es cultura; en ese caso, los ingenieros víven por la - cultura, la crean y la hácen realidad ". + (XVII).

Es necesario hacer notar el rapidísimo avance tecnológico que ha tenido la humanidad en lo que va del siglo XX, mientras que el nivel psíquico-moral imperante, en términos generales en la sociedad, ha tenido un desarrollo muy lento, lo que ha provocado ya muchas expresiones abruptas de la problemática ---

humana, y es conveniente tomar en cuenta documentos como el que presenta Alvin Toffler en su libro "El Schock del Futuro".

Desde hace mucho tiempo tengo el interés particular de buscar las verdaderas esencias, el verdadero significado de las cosas, y ahora, cuando es una tarea inevitable para mi, cuestionar las ciencias físicas y la técnica, tengo la firme convicción de que en el momento en que nos preguntamos por su esencia, estamos haciendo Metafísica.

Metafísica(del griego: μετά después, φύσις naturaleza) Según el significado inmediato del término, es la investigación de lo que está más allá de la experiencia sensible. La Metafísica por tanto, busca el sentido más profundo de la realidad, manifestando su razón suprema.

Vamos a investigar entónces, lo que está atrás de las ciencias físicas y de la técnica, manifestando la razón suprema de cómo ha sido su posibilidad de existencia y de cual es su esencia como realidades.

En términos generales, es factible dividir la Metafísica, para su estudio en:

1. Ontología: estudio de las estructuras formales del Ser.
2. Epistemología: teoría del conocimiento.

La tesis metafísica que más nos interesa para investigar lo que nos hemos propuesto es la mantenida por Ortega y Gasset. Sin embargo es lógico pensar que para llegar a tal tesis, producto del siglo XX, es conveniente analizar algunas de las tesis anteriores, las más fundamentales dentro de la línea que hemos dibujado, cuyo análisis nos permitirá llegar a un criterio más integral que servirá de base para la comprensión del problema fundamental que nos ocupa: la Técnica.

Breve análisis de las tesis fundamentales a considerar:

I. Tesis parmenidea:

De entre la antigua filosofía griega es conveniente hacer una breve reseña de la denominada Escuela de Elea, fundamentalmente por la trascendencia que tiene en el pensamiento filosófico universal, y por la importantísima significación que tuvo en el pensamiento platónico. Sus principales representantes fueron: PARMENIDES (n. 515 a.C.) y ZENON (n. 490 a.C.).

Parménides representa el punto de partida para una nueva manera de filosofar, hasta tal extremo, que la filosofía puede decirse que empieza con él, y el pensamiento metafísico hasta el día de hoy, conserva la directriz que él le imprimió.

Parménides expuso su doctrina en un poema llamado "Sobre la Naturaleza". Después de un proemio que se conoce por entero, el poema se divide en dos secciones, una dedicada a la exposición de la doctrina según la verdad, o "Camino de la Verdad", y la otra que contiene el llamado " Camino de la Apariencia".

El proemio describe el viaje del filósofo sobre un carro arrastrado por fogosos corceles, hacia la región del Día, custodiada por la severa Justicia. El es guiado por las heliades (las hijas del Sol), "que apartan los velos de sus rostros", y al final del camino que ha recorrido, lejos del común camino de los hombres, y bajo el signo de tal comando divino y de la Justicia, llega en presencia de la diosa de la Verdad.

La intención fundamental de Parménides es la descripción del procedimiento de su misma investigación, el cual alejándose del incierto conocimiento sensible, conduce el pensamiento a definir un órden riguroso de verdad inmutable.

" ... Hay una clara alusión al paso de la conciencia mítica a la teorética: las heliades lo han sacado de la obscuridad. La metáfora de los velos significa la verdad, entendida en Grecia como un develar o descubrir (ἀλήθεια) " +(XIII).

La sección correspondiente al "Camino de la Verdad" constituye el núcleo del pensamiento parmenídeo.

Este núcleo consiste en una proposición irrebatible: " El Ser es, y es imposible que no sea", junto a la cual se afirma: "El no-Ser no es y no puede ni siquiera hablarse de él"

Unida a estas dos proposiciones hay una tercera: "Es lo mismo el Ser que el pensar".

De estas proposiciones se derivan una serie de consecuencias. Las más importantes son:

1. Existe solamente un Ser, 2. El Ser es eterno, 3. El Ser es inmóvil, 4. El Ser no tiene principio ni fin.

A los ojos del pensamiento, el Ser es uno e inmóvil, frente a la pluralidad y cambio de las cosas que se dan en la sensación.

El "Camino de la Apariencia" es el que siguen los seres mortales, los cuales viven en el mundo de la ilusión. Dentro de este mundo de la ilusión y de la apariencia se encuentran los fenómenos físicos. No se trata, así propiamente de verdades, pero no se trata tampoco de falsedades completas. De hecho el "Camino de la Apariencia" parece constituir una especie de ruta intermediaria entre el camino del Ser y del no-Ser.

Queda así planteada en términos generales la primera tesis fundamental, Parménides ha descubierto el Ser a través de la inteligencia y se ha escindido el "completo" en dos: el mundo inteligible y el mundo sensible, de lo que cambia y perece.

Zenón de Elea, discípulo de Parménides combatió a los adversarios de la doctrina de su maestro mediante una serie de ingeniosas paradojas ideadas por él mismo.

Zenón combate el movimiento, entendido como el "Camino de la Verdad", pues pertenece sólo a una "realidad" sensible, o sea, al "Camino de la Apariencia", que se confronta con las imágenes de las cosas en el mundo físico, las cuales son sólo "sombras" con respecto a la verdadera realidad, como postula

Platón en su célebre alegoría de la caverna.

Las paradojas de Zenón (Aquiles y la tortuga, el corredor, la flecha en vuelo) son importantemente fecundas, pues el concepto espacio-temporal y del infinito que sugieren, dieron orígen a la creación de la teoría de las series infinitas como lo demuestra T.M. Apóstol +(XV) ,al analizar la paradoja del corredor.

Y en lo que se refiere a sus consecuencias para la ciencia física, Louis de Broglie, ha dicho +(VII): "........La imposibilidad de dar una descripción exacta de la localización espacio-temporal, y del estado dinámico simultáneamente, puede quizá conectarse con una de las dificultades con que se encontraron los antiguos filósofos. Permítasenos tomar una flecha en vuelo, dice Zenón. En un momento dado está inmóvil en una cierta posición. ¿Cómo entónces puede seguir una cierta trayectoria? ¿Cómo - esto es decir- puede el movimiento ser construido fuera de una serie de inmobilidades?. A los ojos de la ciencia moderna, imbuída como estaba, ántes del descubrimiento del quantum con la idea de continuidad, el argumento de la flecha de Zenón fue visto como algo pueril.........' Sin querer entónces, hacer de Zenón un precursor de Heisenberg y sin olvidar la parte jugada en este problema, en el día presente, por el valor finito de la constante de Planck, nosotros podemos aún decir que la imposibilidad que las teorías recientes revelan, de asignar simultánea mente a un cuerpo en movimiento una exacta localización espacio-temporal y también un estado dinámico completamente definido, parece tener algún parentesco con una dificultad filosófica, la cual ha sido durante largo tiempo familiar ...... "-.

II. Tesis platónica:

Constituye el contenido medular de la aportación filosófica de PLATON (427-347 a.C), discípulo de SOCRATES 470-399 aC)

Platón expuso su doctrina en los llamados "Diálogos". Breve exposición de la doctrina de las ideas: Platón explica esta doctrina, y por ende su posición ontológica fundamental en los Diálogos: " Parménides ", " Teetetes ", y " Fedón" principalmente. Para explicar la tesis platónica recurriré a algunos de los fragmentos de la Historia de la Filosofía de Julián Marías +(XIII).

" ....Platón descubre nada menos que la idea. ¿ Qué quiere decir esto ? ----- Platón busca el ser de las cosas. Pero esta búsqueda tropieza con varias dificultades de diversa índole, que lo empujan, de modo coincidente, a una solución radical y de apariencia paradójica. En primer lugar, Platón encuentra que las cosas, propiamente, no son; si yo considero, por ejemplo, una hoja de papel blanco, resulta que en rigor no es blanca; es decir, no es del todo blanca, sino que tiene algo de gris o de amarilla; solo es casi blanca; otro tanto ocurre con su presunta rectangularidad: ni sus lados son total y absolutamente rectos, ni son rectos sus ángulos. Todavía hay más: esta hoja de papel no ha existido siempre, sino solo desde hace cierto tiempo; dentro de algunos años no existirá tampoco. Por tanto, es blanca y no blanca, es rectangular y no rectangular, es y no es; o lo que es lo mismo -no es plena y verdaderamente.

Pero si ahora, en segundo lugar, nos detenemos en el otro aspecto de la cuestión, hallamos que -si bien no es en rigor blanca,- la hoja de papel es casi blanca. ¿Qué quiere decir esto? ----- Al decir de algo que es casi blanco, le negamos la absoluta blancura por comparación con lo que es blanco sin restricción; es decir, para ver que una cosa no es verdaderamente blanca, necesito saber ya lo que es blanco; pero como ninguna cosa visible ni la nieve, ni la nube, ni la espuma - es absolutamente blanca, esto me remite a alguna realidad distinta de toda cosa concreta, que será la total blancura. Dicho en otros términos, el ser casi blanco de muchas cosas requiere la existencia de lo verdaderamente blanco, que no es cosa alguna, sino que está fuera de las cosas. A este ser verdadero, distinto de las cosas, es a lo que Platón llama IDEA."........" El ser verdadero, que la filosofía venía buscando desde Parménides, no está en las cosas, sino fuera de ellas: en las ideas. Estas son, pues, unos entes metafísicos que encierran el verdadero ser de las cosas; son lo que es auténticamente, lo que Platón llama ὄντως ὄν. Las ideas tienen los predicados exigidos tradicionalmente al ente y que las cosas sensibles no pueden poseer: son unas, inmutables, eternas; no tienen mezcla de no ser; no están sujetas al movimiento, ni a la corrupción, SON en absoluto y sin restricciones. El ser de las cosas, ese ser subordinado y deficiente, se funda en el de las ideas de que participan........ .... Vemos pues, la necesidad de la idea: 1o. Para que yo pueda conocer las cosas como lo que son. 2o. Para que las cosas, que son y no son -es decir, no son de verdad--, puedan ser. 3o. Para explicarme cómo es posible que las cosas lléguen a ser y dejen de ser -- en general, se muevan o cambien --, sin que esto contradiga a los predicados tradicionales del ente. 4o. Para hacer compatible la unidad del ente con la multiplicidad de las cosas."

En lo que se refiere a la Teoría del Conocimiento y a la naturaleza de la condición humana, analizaremos brevemente dos alegorías, la "alegoría de los corceles" o " mito del Fedro" (que se encuentra en el diálogo del mismo nombre) y la "alegoría de la caverna "(que se encuentra en el libro VII de la República).

"....El mito del Fedro explica, a la vez, el orígen del hombre, el conocimiento de las ideas y el método intelectual del platonismo. Según el famoso mito que Sócrates cuenta a Fedro, a orillas del Iliso, el alma, en su situación originaria, puede compararse a un carro tirado por dos caballos alados, uno dócily de buen raza,el otro díscolo (los ins intos sensuales y las-- pasiones) dirigido por un auriga (la razón) que se esfuerza por-conducirlo bien. Este carro en una lugar supraceleste, circula - por el mundo de las ideas, que el alma contempla así, pero no sin dificultad. Las dificultades para guiar el tiro de los dos caba-llos hácen que el alma caiga: los caballos pierden las alas, y el alma queda encarnada en un cuerpo. Si el alma ha visto, aunque -- sea muy poco, las ideas, ese cuerpo será humano y no animal; según que las haya contemplado más o menos ~~(ese cuerpo)~~, las almas -- están en una jerarquía de nueve grados, que va del filósofo al-tirano. El orígen del hombre como tal es, pues, una caída de un - alma de procedencia celeste y que ha contemplado las ideas. Pero el hombre encarnado no las recuerda. De sus alas no quedan mas que muñones doloridos, que se exitan cuando el hombre ve las --- cosas, porque estas le hacen recordar las ideas, vistas en la --- existencia anterior. Este es el método del conocimiento. El hom--- bre parte de las cosas, pero no para quedarse con ellas, para en-- contrar ~~en~~ ellas un ser que no tienen, sino para que le provo--- quen el recuerdo o reminiscencia (anámnesis) de las ideas en --- otro tiempo contempladas. Conocer, por tanto, no es ver lo que - está fuera, sino al revés: recordar lo que está dentro de noso-- tros. Las cosas son solo ~~somb~~-un estímulo para apartarse de ellas y elevarse a las ideas.". + (XI) .

La alegoría de la caverna es de tremenda trascendencia - dentro de la filosofía platónica; cuenta Sócrates esta alegoría - a Glaucón, hermano de Platón; expongamos un breve fragmento:

-------- Representate ahora el estado de la naturaleza humana - respecto de la ciencia y de la ignorancia, según el cuadro que de él voy a trazarte. Imagina un antro subterráneo que tiene todo - a lo largo una abertura que deja libre a la luz el paso, y en -- ese antro, unos hombres encadenados desde su infancia, de suerte - que no puedan cambiar de lugar ni volver la cabeza, por causa de las cadenas que les sujetan las piernas y el cuello, pudiendo --- solamente ver los objetos que tengan delante.

A su espalda, a cierta distancia y a cierta altura, hay un ---- fuego cuyo fulgor les alumbra, y entre ese fuego y los cautivos— se halla un camino escarpado. A lo largo de ese camino, imagina - un muro semejante a esas vallas que los charlatanes ponen entre ellos y los espectadores, para ocultar a estos el juego y los --- secretos trucos de las maravillas que les muestran.- Todo eso — me represento ----Figúrate unos hombres que pasan a lo largo de ese muro, porteando objetos de todas clases, figuras de hombres y de animales de madera o de piedra, de suerte que todo ello se — aparezca por encima del muro.--Los que los portean, unos hablan entre sí, otros pasan sin decir nada.---; Extraño cuadro y extraños prisioneros;

- Sin embargo, se nos parecen punto por punto. Y, ante todo, ¿crees- que verán otra cosa, de sí mismos y de los que se hallan a su --- lado, más que las sombras que van a producirse frente a ellos — al fondo de la caverna? ----¿ Qué más pueden ver, puesto que desde su nacimiento se hallan forzados a tener siempre inmóvil la - cabeza ? — ¿ Verán asimismo, otra cosa que las sombras de los — objetos que pasen por detrás de ellos ? — No.— Si pudiesen — conversar entre sí, ¿ no convendrían en dar a las sombras que — ven los nombres de esas mismas cosas? — Indudablemente .------ Y si al fondo de su prisión hubiese un eco que repitiese las - palabras de los que pasan ¿ no se figurarían que oían hablar a las sombras mismas que pasan por delante de sus ojos?—Si. ----- Finalmente ,no creerían que existiese nada real fuera de las - sombras.---- Sin duda. --

Después de esto dice Sócrates a Glaucón, que se imagine - si a uno de estos prisioneros se le desencadena, y se le saca — fuera de la caverna.

Cuando este haya comprendido que lo que él juzgaba por - realidades ,éran solo sombras y regrese a la caverna y lo explique a los que se encuentran ahí, lo tomarán por loco y le darán muerte; y dice finalmente: -------..... pues esta es precisamente, mi querido Glaucón, la imagen de la condición humana...— 1 (II)

Entónces, finalmente es necesario anotar como una conclusión que la aportación principal de la tesis platónica que hemos presentado, es que precisamente, explica, basándose en los postulados parmenídeos y en su doctrina de las ideas, la multiplicidad dentro de la unidad, subordinando el mundo sensible al inteligible, el devenir, al Ser inmutable. Y esto, es lo que, permitirá a Galileo dar su posibilidad de existencia– en su raigambre interna–, a la ciencia física.

III. Con la aportación platónica la resolución de los problemas del mundo sensible, se tenía ya planteado el modelo a seguir, pero faltaba un "genio técnico" que aportara la "otra cara" que iba a permitir llegar a la resolución final del problema de darle su posibilidad de existencia a la ciencia física, este genio fue ARQUIMEDES (287-212 a.C.).

Las investigaciones de Arquímedes en el terreno de las Matemáticas constituyen el precedente más antiguo del Cálculo. Posiblemente la aportación más valiosa de Arquímedes, haya sido la que se refiere al uso de coordenadas para localizar un punto, refiriéndose sin embargo, a ejes intrínsecamente conectados a la curva estudiada.

El orígen del Cálculo integral se remonta al llamado "método de exhaución" que los griegos usaron para calcular áreas de superficies planas y es especialmente en las obras de Arquímedes, en donde se encuentran ejemplos de verdaderas integraciones, como la que realizó para calcular el área de un segmento parabólico. Pero su fama es debida principalmente a sus descubrimientos en el campo de la Física: la ley de la palanca, invención de máquinas simples como el tornillo sin fin, el cual se aplicó a multitud de concepciones técnicas, como por ejemplo el tornillo utilizado en riegos y bombas de desagüe; se le debe también el poliplasto, empleado para mover cuerpos pesados.

El descubrimiento de la primera ley de la ciencia hidrostática por Arquímedes proviene del encargo que le hizo el tirano Hierón II para que determinara si cierta nueva corona estaba hecha de oro puro o bien aleada con un exceso de plata por un astuto orfebre. La respuesta al problema —según cuenta una antigua leyenda— se le ocurrió estando un día en los baños; al observar la cantidad de agua desplazada por su propio cuerpo, cayó en la cuenta de que un sólido sumergido en un líquido pierde de peso una cantidad igual al peso del líquido que desaloja. Salió precipitadamente del baño completamente desnudo, exclamando: ¡Eureka', (en griego: "lo encontré") y mediante el oportuno ensayo demostró que la corona tenía aleación de oro y plata, basado en que la plata tiene más volúmen por peso, que el oro. El principio que sirvió de base a este descubrimiento se conoce hoy por Principio de Arquímedes y ha dado orígen al concepto de densidad en Fisicoquímica.

Arquímedes recibió otro encargo de Hierón para que ideara varios ingenios bélicos con objeto de organizar la defensa contra la posible invasión romana. La eficacia de tales "ingenios" se demostró cuando los romanos atacaron Siracusa. Las embarcaciones fueron aplastadas con enormes piedras, cada una de las cuales pesaba más de un cuarto de tonelada, lanzadas desde catapultas de largo alcance, o quemadas por medio de espejos incendiarios, o sacadas del agua y arrojadas contra las rocas por gruas con garras de hierro.

De estas experiencias fundamentalmente, los romanos, entrenaron a los denominados " ingenium", de donde se deriva la palabra "ingeniero".

Esta labor de Arquímedes es la que más tarde serviría de base fundamental , para que se lograra estructurar, lo que he denominado, la Tesis galileana.

III. Tesis galileana:

GALILEO GALILEI(1564-1642) es el hombre que oscila -- entre los tiempos antiguos y los nuevos, es el filósofo italiano que inicia la tradición física de occidente.

Entre sus descubrimientos en el campo de la física ---- están:el isocronismo del péndulo,la balanza hidrostática,investigaciones sobre el peso específico de los cuerpos sólidos, su - teorema de que todos los cuerpos caen con la misma velocidad, cosa que según la tradición, demostró con varios experimentos, + efectuados desde lo alto de la famosa torre inclinada de Pisa,- el principio del centro de gravedad de los sólidos y el prin--- cipio de inercia, estructurando posteriormente los principios - fundamentales de la dinámica, y de lo que hoy se denomina resistencia de materiales, y otros.

Pero su aportación más grande fue su idea de la física. El núcleo de su idea básica para la comprensión de los fenóme-- nos físicos, lo expresa en las páginas iniciales del "Saggiatore": "La filosofía está escrita en este grandísimo libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos (digo: el universo), --- pero no puede entenderse,si ántes no se procura entender su --- lengua y conocer los caracteres en los cuales está escrito.--- Este libro está escrito en lengua matemática, y sus caracteres - son triángulos,círculos y otras figuras geométricas,sin las cuales es totalmente imposible entender humanamente una palabra ,+ y sin las cuales nos agitamos vanamente en un oscuro laberinto".

La importancia de Galileo consiste en que sin su imágen física, no es comprensible la imágen filosófica de Descartes y por ende del pensamiento moderno.

Cito a continuación algunos párrafos selectos del ----- libro de la "Meditación de la Técnica"deOrtega y Gasset: +(XI)

"....Importa mucho subrayar este hecho de primer órden: que la - maravilla máxima de la mente humana. la ciencia física, nace en la técnica. Galileo jóven no está en la Universidad,sino en los arsenales de Venecia,entre grúas y cabrestantes.Allí se forma — su mente.........El nuevo tecnicismo,en efecto,procede exactamente como va a proceder la nuova scienza.No va sin más de la — imágen del resultado que se quiere obtener a la busca de medios que lo logran.No.Se detiene ante el propósito y opera sobre él. Lo analiza.Es decir,descompone el resultado total--que es el — único primeramente deseado--en los resultados parciales de que - surge,en el proceso de su génesis.Por tanto en sus "causas" o — "fenómenos ingredientes".........Exactamente esto es lo que va a hacer en su ciencia Galileo,que fue a la par,como es sabido,— un gigantesco "inventor".El aristotélico no descomponía el fenómeno natural,sino que a su conjunto le buscaba una causa también conjunta,a la modorra que produce la infusión de amapolas una — virtus dormitiva.-Galileo, cuando ve moverse un cuerpo,hace todo lo contrario:se pregunta de qué movimientos elementales y,por tanto,generales,se compone aquél movimiento concreto.Esto es el nuevo modo de operar con el intelecto:"análisis de la naturaleza". Tal es la unión inicial- y de raíz- entre el nuevo tecnicismo — y la ciencia.Unión,como se ve,nada externa,sino de idéntico --- método intelectual.Esto da a la técnica moderna,independencia y - plena seguridad en sí misma.No es una inspiración como mágica — ni puro azar,sino "método", camino preestablecido,firme,consciente de sus fundamentos.........De aquí la ejemplaridad del pensamiento físico frente a todos los demás usos intelectuales.La -- física,como ha notado Nicolai Hartmann,debe su sin par virtud - a ser,hasta ahora,la única ciencia donde la verdad se establece mediante el acuerdo de dos instancias que no se dejan sobornar - la una por la otra.El puro pensar a priori de la mecánica ---- racional y el puro mirar las cosas con los ojos de la cara: -- análisis y experimento.........En Galileo,fundador de la física, late una contradicción.Por un lado define maravillosamente - la nueva ciencia que entre las manos le nace: "Consiste-dice--- en medir todo lo que se puede medir y en conseguir que pueda -- medirse lo que no se puede medir".........La ciencia física,--

que comienza en el siglo XVI, no se debe a que ciertos hombres, abandonando la especulación de los filósofos, se resolvieran a observar los hechos---como si los antiguos y medievales, que no tuvieron física, no hubiesen observado concienzudamente la naturaleza y no la hubiesen sometido a experiencias. Ni por un momento se presenta Galileo como el hombre del experimento frente a los escolásticos. Todo lo contrario. Contra su ley de inercia son los escolásticos quienes hacen constar la experiencia. Galileo no puede demostrarla por el experimento............

No la observación produjo la física sino la exigencia de la observación exacta. Y exactitud es un vocablo que solo tiene sentido propio, auténtico en matemática. Lo nuevo de la nuova scienza de Galileo fue la introducción formal de la matemática en la observación, la cuantificación radical de los fenómenos por su radical mensuración; por tanto la experiencia matemática.......

Nada hubiera sorprendido tanto a Galileo, Descartes y demás ~~usos~~ instauradores de la nuova scienza como saber que tres siglos más tarde iban a ser considerados como los descubridores y entusiastas del "experimento". Al estatuir Galileo la ley del plano inclinado, fueron los escolásticos quienes se hacían fuertes en el experimento contra aquélla ley. Porque en efecto, los fenómenos contradecían la fórmula de Galileo. Es este un buen ejemplo para entender lo que significa el "análisis de la naturaleza" frente a la simple observación de los fenómenos. Lo que observamos en el plano inclinado es siempre una desviación de la ley de caída, no solo en el sentido de que nuestras medidas dan solo valores aproximados a aquélla, sino que el hecho tal y como se presenta no es una caída. Al interpretarlo como una caída, Galileo comienza por negar el dato sensible, se revuelve contra el fenómeno y opone a él un "hecho imaginario", que es la ley: el puro caer en el puro vacío de un cuerpo sobre otro. Esto le permite descomponer (analizar) el fenómeno, medir la desviación entre este y el comportamiento ideal de dos cuerpos imaginarios. Esta parte del fenómeno, que es desviación de la ley de caída, es, a su vez, interpretada imaginariamente como choque con el viento y roce del cuerpo sobre el plano inclinado, que son otros dos hechos imaginarios, otras dos leyes. Luego puede recomponerse el fenómeno, el hecho sensible como nudo de esas varias leyes, como combinación de varios hechos imaginarios. Lo que interesa a Galileo no es, pues adaptar sus ideas a los fenómenos, sino, al revés, adaptar los fenómenos mediante una interpretación a ciertas ideas rigorosas y a priori, independientes del experimento; en suma, a formas matemáticas. Esta era su innovación; por tanto, todo lo contrario de lo que ~~se~~ vulgarmente se creía hace cincuenta años. No observar, sino construir a priori, matemáticamente, es lo específico del galileísmo........". +(XI)

Entónces como comentario final, es factible decir que el gran descubrimiento de Galileo es el de cómo subordinar el mundo sensible al inteligible, y hacer posible la ciencia física, estö lo realiza al subordinar los fenómenos físicos, a los modelos matemáticos (platónicos).

Galileo, al hacer que la física naciera en la técnica, y al darles a ámbas un mismo método intelectual, realizó el primer intento ya maduro, de dar la base para que fuera posible el futuro ejercicio profesional de la Ingeniería.

IV. Tesis cartesiana.

Dos fueron las magnitudes intelectuales que formaron el telón de fondo filosófico, que decidió la vocación cartesiana: la aparición de la filosofía de Giordano Bruno, a fines del siglo XVI, que nos indicaba por primera vez, el concepto de un Universo infinito, así como la construcción teórica de la antifísica aristotélica, y la idea generadora de la física galileana.

RENE DESCARTES (1596-1650), es el primer hombre moderno, ha dicho Ortega.

Es conveniente citar, las palabras con que el prof. Xirau, comienza su edición catalana del Discurso del Método: " El libro que ponemos en manos del lector representa un momento culminante en la historia del pensamiento humano, en el que las fuerzas esenciales del espíritu y de la cultura realizan un fuerte viraje. En sus páginas están virtualmente contenidas las ideas directrices de la filosofía, de la ciencia, y de la cultura específicamente humana. La turbulencia creadora del Renacimiento se aclara y ordena aquí. El humanismo toma conciencia de sí mismo, se purifica, se define, adquiere consistencia sistemática, y se constituye en el código fundamental de una nueva Edad. ....Si tomamos este libro con plena conciencia de lo que significa, involuntariamente nos tiembla la mano".

Se hará referencia a continuación a los puntos más importantes de la tesis cartesiana y posteriormente se anotarán algunas conclusiones.

Descartes parte de la DUDA, y así después de plantearla en toda su magnitud, dice: + (V) :" Por todo lo dicho, así que la edad me permitió salir de la sujeción de mis preceptores, abandoné por completo el estudio de las letras y, decidido a no buscar otra ciencia que aquella que pudiese encontrar en mí mismo o en el gran libro del mundo, dediqué el resto de mi juventud a viajar........" Y dice posteriormente: ".....respecto a las opiniones a las que hasta entónces había dado crédito, yo no podía hacer nada mejor que emprender de una vez la tarea de retirarles ese crédito, a fin de darlo después a otras mejores, o a las mismas, cuando las hubiese ajustado al nivel de la razón". Y este es el principio del denominado racionalismo cartesiano. "..... Pero, como un hombre que camina solo y a oscuras, resolví avanzar tan lentamente y con tanta circunspección en todas las cosas que, por más que avanzase poco, me guardase al menos de caer. Ni siquiera quise empezar a rechazar bruscamente y por completo ninguna de las opiniones que se habían podido infiltrar en mi creencia sin haber sido introducidas en ella por la razón, sin antes haber empleado el tiempo suficiente para formarme el proyecto de la obra que emprendía y buscar el verdadero método para llegar al conocimiento de todas las cosas de que mi espíritu fuese capaz". Y entónces expone las reglas fundamentales del método: ".....El primero (de los preceptos) era no aceptar nunca como verdadera ninguna cosa que no conociese con evidencia que lo era; es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención, y no comprender en mis juicios nada más que aquéllo que se presentase tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviese ocasión alguna de ponerlo en duda.

El segundo, dividir cada una de las dificultades que examinase, en tantas partes como fuera posible y como requiriese su mejor solución. El tercero, conducir por órden mis pensamientos, comenzando por los objetos más sencillos y más fáciles de conocer, para ascender poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más compuestos, e incluso suponiendo un órden entre los que no se preceden naturalmente.

Y el último, hacer en todo enumeraciones tan completas y revisiones tan generales que adquiriese la seguridad de no omitir nada."

Expone más adelante, la idea central que dió orígen a su mayor aportación matemática, el principio generador de la Geometría Analítica: "..... Pero no por eso concebí el propósito de aprender todas aquéllas ciencias particulares a las que se llama matemáticas; y viendo que, aunque su objeto fuese diferente, no dejan de concordar todas en que no consideran otra cosa que las diversas relaciones o proporciones que se encuentran en ellas,pensé que era preferible que examinase tan solo esas ---- predisposiciones en general,y sin suponerlas más que en las --- materias que sirviesen para hacerme más fácil su conocimiento, - e incluso sin sujetarlas a ellas en manera alguna,de modo que - pudiese aplicarlas después a todas las otras a las que pudieran convenir.Después,al darme cuenta de que,para conocerlas,tendría a veces necesidad de considerar cada una de ellas en particular, y otras veces solamente de retenerlas o de comprender juntamente varias de ellas,pensé que, para considerarlas mejor en particular,había de suponerlas en líneas,porque no encontraba nada - más simple y que pudiese representar más distintamente a mi --- imaginación y a mis sentidos;pero que, para retener o comprender a varias juntas,era preciso que las explicase por algunas - cifras,tan cortas como fuese posible,y que por ese medio,tomaría todo cuanto hay de mejor en el análisis geométrico y en el - álgebra,y corregiría todos los defectos de uno por la otra".

Y posteriormente,lo que me parece, en esencia, parmenideo: "....No sé si debo hablar de las primeras meditaciones --- que hice,porque son tan metafísicas y tan poco comunes que tal - vez no sean del gusto de todo el mundo.Sin embargo,para que se - pueda juzgar si los fundamentos que he tomado son lo bastante - firmes,me veo obligado a hablar,de alguna manera,de aquéllas. Hace mucho tiempo que había observado que,por lo que hace a las costumbres,hace falta a veces seguir opiniones,que sabemos que - son muy inciertas,como si fuesen indudables,del modo que antes - he dicho; pero dado que entónces deseaba ocuparme solamente en - la investigación de la verdad,pensé que en eso había de hacer - todo lo contrario,y rechazar como absolutamente falso todo ---- aquéllo en que pudiese imaginar la menor duda,a fin de ver si - después de eso no quedaría algo en mi creencia que fuese indudable.Así,puesto que los sentidos nos engañan a veces,quise --- suponer que no hay nada que sea tal como nos lo hacen imaginar; y puesto que hay hombres que se equivocan al razonar,incluso --

acerca de las más simples razones de la geometría, y cometen en ellas paralogismos, pensé que yo estaba tan expuesto a equivocarme como cualquier otro, y rechacé como falsas todas las razones que había tenido ántes por demostrativas; y, en fin, considerando que todos los pensamientos que tenemos cuando estamos despiertos pueden venirnos también cuando dormimos, sin que haya entónces en ellos nada verdadero, resolví fingir que todas las cosas que hasta entónces habían entrado en mi espíritu no eran más verdaderas que las ilusiones de mis sueños. Pero inmediatamente advertí que, mientras quería pensar así que todo era falso, era preciso, necesariamente, que yo, que lo pensaba, fuese alguna cosa, y, observando que esta verdad, " yo pienso, (luego) yo existo" era tan firme y segura que las suposiciones más extravagantes de los escépticos no eran capaces de hacerla tambalearse, pensé que podía admitirla sin escrúpulo como el primer principio de la filosofía que buscaba.".

Este es el núcleo central del pensamiento cartesiano. Se planteaba entónces por primera vez un "método" intelectual para la investigación, y esto le daba precisamente su carácter de investigación "científica". Con este método auroral, desarrolló Descartes su física y su filosofía, y constituyó, andando el tiempo, el método de investigación filosófica que ha perdurado hasta la interpretación "orteguiana", y el método de investigación matemática y por ende física, que con sus horizontes, continuamente ensanchados, sigue "siendo", en la investigación científica.

Conviene anotar que, el racionalismo cartesiano se interpretó posteriormente en la filosofía occidental como "idealismo", cuyo continuador más eminente fue el filósofo, matemático y físico alemán Gottfried Leibniz, tanto en el terreno filosófico, con su exposición metafísica del mundo, como con su descubrimiento genial de los principios fundamentales del Cálculo diferencial e integral, que según ha calificado algún crítico es " la más alta concepción del genio humano", y que ha permitido a la ciencia seguir su seguro camino.

Respecto a la física de Leibniz solo diremos que está basada en el concepto de fuerza y que por tanto es fácil comprender la enorme importancia que tiene en el desarrollo histórico de la física.

V. Tesis orteguiana.

Esta tesis en parte ha sido expuesta en la sección correspondiente a la tesis galileana,en donde se han copiado varios párrafos de Ortega y Gasset.En parte también aquí se seguirá tratando la tesis cartesiana.

Hemos llegado entónces a la exposición de la tesis que nos interesa sustancialmente, las del filósofo español JOSE ORTEGA Y GASSET (1883-1955).

Para la exposición de la tesis orteguiana,me ceñiré también como en las anteriores,a reseñar brevemente los aspectos que nos interesan más para el cumplimiento de los objetivos trazados.

Primero se expone el núcleo de sus concepciones metafísicas y después su análisis "casi exhaustivo" de la técnica, para lo cual dejaremos hablar al mismo filósofo: + (X):
" .... Hecha esta advertencia podemos volver a nuestra tesis inicial:la realidad son las cosas y su conjunto o mundo.Son realidad las cosas porque están ahí en sí y por sí,puestas por sí mismas,sosteniéndose así mismas en la existencia.Como ésta es la única forma auténtica de ser que esa tesis afirma,todo en la medida en que es realidad tendrá que ser así.Por ejemplo: el hombre,yo.Mi realidad consiste también en ser una cosa entre las cosas,como la piedra,como la planta.El hombre,pues,vive en esta tesis interpretándose así mismo como cosa del mundo exterior,o lo que es igual,se pone desde luego en las cosas,diríamos,en el paisaje....Veamos ahora si esta tesis es firme.Siendo primera necesita- varias veces lo he dicho-afirmarse a sí misma,no fundar su verdad en la verdad de otra.o lo que es igual,

ser indubitable; y además necesita no complicar ninguna otra -- tan primitiva, tan primera como ella. Dos tesis primeras es una - contradicción. Ahora bien, ¿es indubitable que el mundo de las - cosas está ahí en sí y por sí-por tanto-como única realidad, -- independiente de toda otra? Si yo no viese las cosas, no las -- tocase, no pensase que están ahí ¿estarían ahí en efecto las --- cosas? Si haciendo un experimento mental yo me resto del mundo - ¿queda el mundo, queda la realidad "mundo" ? por lo menos es -- dudoso: la realidad del mundo solo resulta indubitable cuando -- además de él estoy yo viéndolo, tocándolo, y pensando que estpá - ahí. Depende pues la seguridad de su realidad, de mi realidad.--- Esta, la existencia, la realidad, de(~~mi realidad~~) un sujeto que -- iensa la realidad del mundo, es lo que asegura con carácter --- indubitable esa realidad de este. Pero entónces el mundo no es - real por sí y en sí, sino en mí y por mí. Es real en tanto que mi pensamiento lo pone, lo piensa como real. Mas ello revela que la - realídad radical no es la suya sino la mía. La realidad de una - cosa, no puede, en consecuencia, ser radical, esto es, única, puesto que para que sea segura la realidad de algo, es preciso, con --- forzosidad antecedente, la realidad de alguien que lo piense. -- En suma: la tesis que afirma la realidad del mundo supone la tesis que afirma la realidad del pensamiento. Pero esta anula aquélla. - Del mundo no ha quedado como últimamente real más que una cosa: el pensamiento; y hemos pasado a la segunda posición del hombre en la historia, la posición idealista...... el idealista se encuentra con que le han quitado lo seguro, el mundo de debajo de - los pies: se ha quedado solo el sujeto como única realidad. No - hay verdaderamente, más que sus pensamientos. No puede, en conse - cuencia, apoyarse en nada porque no hay nada fuera de él. Tiene - que sostenerse a sí mismo y como el barón de la Castaña, tiene - que salir del pozo tirándose a sí mismo de las orejas. Este hombre tiene, en absoluto, que hacerse el mundo en que va a vivir; - más aún, vivir se convierte para él en construir un mundo puesto que no lo hay; diríamos, tiene que sacarse el mundo de la cabeza, -

en vez de aprender lo que el mundo es adaptándose al que está — ya ahí, como hace el realista. Para este, vivir será conformarse al mundo, por tanto, conformarse con el Mundo. Realismo es conformismo. Mas para el idealista la cuestión estará en crear un mundo — según las ideas, según nuestros pensamientos. No cabe conformarse con lo que hay porque lo que hay no es realidad: es preciso — hacer que lo que hay -las presuntas cosas- se adapten a nuestras ideas que son la auténtica realidad. Ahora bien, este es el espíritu revolucionario. El idealismo es por esencia revolucionario.

......Veamos ahora si esta nueva tesis es suficiente o si, por ventura, complica también otra aún más radical y firme que ella. No parece que sea así. Que exista esa pared que veo cuando no la veo, es dudoso. Pero es indudable que existe, que es real mi verla. Puestas en sí y por sí las cosas son problemáticas. En cambio son firmes puestas como pensamientos míos, por tanto, puestas por el pensamiento. No están ahí, sino que están en mí, en un yo que piensa. El pensamiento sería pues, a materia de que todo está hecho, sería la realidad radical, la única. Y como cualquier otro algo que pudiera haber, para ser habido tiene que ser pensado, queda de antemano incluido en la tesis que se nos presenta como invulnerable, ya que no parece complicar ninguna otra tesis que no vaya desde luego incluida en ella....La tesis idealista ha practicado instantáneamente un escamoteo y una transmutación tan formidables como sorprendentes. Las cosas, todas las cosas -esta mesa, esa pared, la montaña allá lejos, el astro -han quedado mágicamente convertidos en pensamientos.....

Para los efectos de la tesis fundamental hemos entendido por realidad "lo que verdadera e indubitablemente hay". Según la tesis realista lo que verdaderamente hay es cosas, mundo; esto es, lo que existe en sí y por sí, lo independiente de mí. Esto era un error y hemos hecho la corrección idealista: la existencia de algo por completo independiente de mí es esencialmente problemática, cuestionable: no puede, en consecuencia, ser una primera verdad. Solo es indudable que lo que hay lo hay en relación conmigo, dependiendo de mí, que lo hay para mí.

Hasta aquí la tesis idealista parece invulnerable. El ser ——— independiente de mí que el realismo ingenuamente afirma no tiene salvación posible. Solo hay, con verdad indubitable, lo que hay para mí. Pero ahora pregunto sin admitir evasión ni subterfugio: — ¿ qué hay cuando solo hay lo que hay para mí ? En este momento — hay para mí esa pared. El idealismo dice entónces: por lo tanto — no hay una pared sin más, sino que solo hay el "ser para mí de — una pared" y a este " ser para mí algo" llama pensamiento. Hay, — concluye, solo pensamiento, un sujeto que piensa la pared, un sujeto para el cual hay pared. No hay cosas, hay solo la conciencia o pensamiento de las cosas............Por tanto la tesis idealista que afirma la realidad exclusiva del pensamiento complica otra — realidad distinta del pensamiento, que es la convicción desde la cual hago aquélla afirmación y dentro de la cual aquélla afirmación tiene vigencia. Dicho de otra forma: para que la tesis — idealista, como cualquiera otra, sea verdad es menester que se — reconozca vigencia a la convicción en que ejecutamos esa tesis; esto es, que lo que esa convicción cree que hay absolutamente — lo pongamos como absoluta realidad. Pero esto equivale a decir — que sólo hay realidad cuando no existe para nosotros el acto en que la pensamos cuando no es nuestro objeto sino que lo ejecutamos o lo somos.......Lo que evidentemente hay es, pues, la ——— pared ante mi-por tanto, yo y la pared - igualmente reales ——— uno y otra. Y soy ahora el que ve la pared y la pared lo visto — por mí. En consecuencia, para ser yo el que ahora soy necesito — de la pared no menos que ella, para ser lo que es, necesita de mí. La realidad no es la existencia de la pared sola y por sí-como — quería el realismo—, pero tampoco es la de la pared en mí como — pensamiento mío, mi existencia sola y por mí. La realidad es la — coexistencia mía con la cosa. Esto, fíjense bien, no se permite — negar que la pared puede existir además sola y por sí. Se limita a declarar que tal ultraexistencia más allá de su coexistir ——— conmigo es dudosa, problemática. Pero el idealismo afirma que la — pared no es sino un pensamiento mío, que solo la hay en mí, ———

que solo yo existo.Esto es ya añadido hipotético, problemático, arbitrario.La idea misma de pensamiento o de conciencia es una hipótesis,no un concepto formado ateniéndose pulcramente a lo - que hay tal y como lo hay.La verdad es la pura coexistencia de - un yo con las cosas, de unas cosas ante el yo.".

Y esta constituye su propia tesis,que puede resumirse - en la célebre afirmación, que apareció por primera vez en sus - "Meditaciones del Quijote": " yo soy yo y mi circunstanciA ".

Expongo a continuación algunos párrafos del libro: ---- " Meditación de la Técnica", lo cual nos llevará a considerar - plenamente, el problema central que nos ocupa. + (XI)

".Sin la técnica el hombre no existiría ni habría existido --- nunca.Así,ni más ni menos........Supongamos que la afirmación - con que he comenzado no fuera cierta en su extremo sentido, --- supongamos que la técnica no fuese consubstancial al hombre, -- sino un añadido que sobre su existencia elemental y primaria -- ha sobrevenido o dicho, en fin, de otro modo:supongamos que el - hombre haya podido existir sin técnica.Lo que nadie puede dudar es que desde hace mucho tiempo la técnica se ha insertado entre las condiciones ineludibles de la vida humana de suerte tal que el hombre actual no podría,aunque quisiera,vivir sin ella.Es, - pues ,hoy una de las máximas dimensiones de nuestra vida,uno de los mayores ingredientes que integran nuestro destino.Hoy el -- hombre no vive ya en la naturaleza sino que está alojado en la - sobrenaturaleza que ha creado en un nuevo día del Génesis: la - técnica.......En las escuelas especiales,al menos,se enseña a - algunos hombres una técnica especial.Pero ni aún en ellas se ~~ens~~ enseña lo que la técnica representa en la vida humana,su trabazón con otros factores de ella,su génesis,su evolución,sus condiciones,sus posibilidades y sus peligros.......los ingenieros, sumergidos cada cual en su tecnicismo especial,sin la educación panorámica y sintética que solo la Universidad puede dar eran -- incapaces de afrontar ni prever el problema que la técnica ---

plantea hoy a la humanidad.......Es, pues, la técnica, la reacción enérgica contra la naturaleza o circunstancia que lleva a crear entre estas y el hombre una nueva naturaleza puesta sobre aquélla, una sobrenaturaleza. Consiste, pues: la técnica no es lo que el hombre hace para satisfacer sus necesidades. Esta expresión es equívoca y valdría también para el repertorio biológico de los actos animales. La técnica es la reforma de la naturaleza, de esa naturaleza que nos hace necesitados y menesterosos, reforma en sentido tal que las necesidades queden a ser posible anuladas por dejar de ser problema su satisfacción. Si siempre que sentimos frío la naturaleza automáticamente pusiese a nuestra vera fuego, es evidente que no sentiríamos la necesidad de calentarnos, como normalmente no sentimos la necesidad de respirar, sino que simplemente respiramos sin sernos ello problema alguno. Pues eso hace la técnica, precisamente eso: ponernos el calor junto a la sensación de frío y anular prácticamente esta en cuanto necesidad, menesterosidad, negación, problema y angustia.......Actos técnicos-decíamos - no son aquéllos en que el hombre procura satisfacer directamente las necesidades que la circunstancia o naturaleza le hace sentir, sino precisamente aquéllos que llevan a reformar esa circunstancia ~~en lo~~ eliminando en lo posible de ella esas necesidades, suprimiendo o menguando el azar y el esfuerzo que exige satisfacerlas. Mientras el animal, por ser atécnico, tiene que arreglárselas con lo que encuentra dado ahí y fastidiarse o morir cuando no encuentra lo que necesita, el hombre, merced a su don técnico, hace que se encuentre siempre en su derredor lo que ha menester - crea, pues, una circunstancia nueva más favorable, segrega, por decirlo así, una sobrenaturaleza adaptando la naturaleza a sus necesidades. La técnica es lo contrario de la adaptación del sujeto al medio, puesto que es la adaptación del medio al sujeto.......Si nosotros nos comprometiésemos a distinguir cuáles de entre nuestras necesidades son rigurosamente necesarias, ineludibles, y cuáles superfluas, nos veríamos en el mayor aprieto. Pues nos encontraríamos:

1o.Con que ante las necesidades que pensando a priori parecen — más elementales e ineludibles- alimento,calor,por ejemplo- tiene el hombre una elasticidad increíble.No solo por fuerza,sino --- hasta por gusto reduce a límites increíbles la cantidad de alimento y se adiestra a sufrir fríos de una intensidad superlativa 2o. En cambio,le cuesta mucho o,sencillamente,no logra prescindir de ciertas cosas superfluas y cuando le faltan prefiere --- morir.3o.De donde se deduce que el empeño del hombre por vivir, por estar en el mundo,es inseparable de su empeño de estar bien. Más aún:que vida significa para él no simple estar,sino ------ bienestar,y que solo siente como necesidades las condiciones -- objetivas del estar,porque este,a su vez,es supuesto del bien-- estar........Vean,pues,los ingenieros cómo para ser ingeniero - no basta con ser ingeniero.Mientras se están ocupando en su faena particular,la historia les quita el suelo de debajo de los - pies.Es preciso estar alerta y salir del propio oficio:otear -- bien el paisaje de la vida que es siempre total.......¿ No se - cae en la cuenta de lo sorprendente que es que el hombre se --- esfuerce precisamente en ahorrarse esfuerzo? Se dirá que la -- técnica es un esfuerzo menor con que evitamos un esfuerzo mucho mayor y,por tanto,una cosa perfectamente clara y razonable.Muy bien; pero eso no es lo enigmático,sino esto otro;¿ adónde va - a parar ese esfuerzo ahorrado y qué queda vacante ? La cosa -- resalta más si empleamos otros vocablos y decimos: si con el - hacer técnico el hombre queda exento de los quehaceres impuestos por la naturaleza, ¿ qué es lo que va a hacer,qué quehaceres van a ocupar su vida? Porque no hacer nada es vaciar la vida, es no vivir; es incompatible con el hombre.La cuestión,lejos de -- ser fantástica, tiene hoy ya un comienzo de realidad.......... Y he aquí cómo la meditación sobre la técnica nos hace tropezar dentro de ella,como con el hueso en un fruto,con el raro misterio del ser del hombre.Porque es este un ente forzado/si quiere - existir,a existir en la naturaleza,sumergido en ella; es un ---

animal. Zoológicamente, vida significa todo lo que hay que hacer para sostenerse en la naturaleza. Pero el hombre se las arregla para reducir al mínimum esa vida, para no tener que hacer lo que tiene que hacer el animal.. En el hueco que la superación de su vida animal deja, vaca el hombre a una serie de quehaceres no -- biológicos, que no le son impuestos por la naturaleza, que él se inventa a sí mismo. Y precisamente a esa vida inventada, inventada como se inventa una novela o una obra de teatro, es a lo que el hombre llama vida humana, bienestar. La vida humana, pues, ---- trasciende de la realidad natural, no le es dada como le es dado a la piedra caer y al animal el repertorio rígido de sus actos orgánicos -comer, huir, nidificar, etc.--, sino que se la hace él, y este hacérsela comienza por ser la invención de ella. ¿Cómo? La vida humana ¿ sería entónces en su dimensión específica..una obra de imaginación ? ¿Sería el hombre una especie de novelista de sí mismo que forja la figura fantástica de un personaje con su tipo irreal de ocupaciones y que para conseguir realizarlo -- hace todo lo que hace, es decir, es técnico ?..................

....el ser del hombre y el ser de la naturaleza no coinciden -- plenamente. Por lo visto, el ser del hombre tiene la extraña ---- condición de que en parte resulta afín con la naturaleza pero en otra parte no, que es a un tiempo natural y extranatural - una -- especie de centauro ontológico -que media porción de él está -- inmersa, desde luego, en la naturaleza, pero la otra parte trasciende de ella; Dante diría que está en ella como las barcas -- arrimadas a la marina, con media quilla en la playa y la otra -- media en la costa. Lo que tiene de natural se realiza por sí --- mismo: no le es cuestión. Mas por lo mismo, no lo siente como su auténtico ser. En cambio, su porción extranatural no es, desde -- luego, y sin más, realizada, sino que consiste, por lo pronto, -- en una mera pretensión de ser, en un proyecto de vida. Esto es lo que sentimos como nuestro verdadero ser, lo que llamamos nuestra personalidad, nuestro yo............El hecho absoluto, el puro --

fenómeno del universo que es la técnica, solo puede darse en esa extraña, patética, dramática combinación metafísica de que dos entes heterogéneos - el hombre y el mundo - se vean obligados a unificarse, de modo que uno de ellos, el hombre, logre insertar su ser extramundano en el otro, que es precisamente el mundo. Ese problema, casi de ingeniero, es la existencia humana.".

Me sucede en este momento, lo que dice un antiguo refrán que se presta mucho a la risa: " vamos a ver, dijo un ciego; y lo llevaban de la mano".,...

He presentado el análisis, y ahora tengo que presentar en breve síntesis la idea central de todo este problema.

Se ha postulado que la tesis de Ortega, nos proporciona varios conceptos funda-mentales que nos permiten aclarar el significado genuino, en su más honda esencia la labor de un ingeniero, esto nos hace pensar, que en la "particular" labor de cada uno de nosotros, existirá la liga que se presente como el "efecto de unión", que permita palpar el significado genuino de que hemos hablado.

Se ha postulado también que la tesis de Ortega está fundada en las concepciones metafísicas anteriores, de las cuales se han seleccionado, por presentar una co- liga evidente, las de Parménides y Platón, en lo que se refiere a la antigua filosofía griega; Galileo y Descartes en cuanto a los inicios de la "nueva era".

Es posible pensar que todas estas tesis, se refieren al mismo problema, y que sus soluciones han " aclarado " el problema de la existencia humana, en su dimensión interna.

Es sin embargo una tarea inevitable para el hombre, seguir pensando, para que fundados en la cultura y en la ciencia sea factible para nosotros, dibujar la prolongación de tales líneas de solución.

Es necesario que el ingeniero actual, tome conciencia plena de lo que todo esto significa, para que, pueda manejar el " difícil futuro " que le aguarda, y pueda también efectuar su labor " conductora ", en la parte que le corresponda.

Esta es, en síntesis la idea fundamental que deseo sugerir para el tema " Base metafísica de la técnica ", el cual considero de primordial importancia, para la formación académica de un ingeniero, no solo por su trascendencia propia, en lo que se refiere al conocimiento de la técnica y su dimensión con respecto al hombre, sino también porque, para los que todavía cabalga Cervantes de Saavedra, la realización humana llega cuando alcanzamos el ideal.

------------- 00000000 ---------------

III.- G E O M E T R I A   A N A L I T I C A   Y   C A L C U L O D I F E R E N C I A L   E   I N T E G R A L. (RECORDATORIO).

C A P I T U L O S :

1. El Número.Coordenadas Cartesianas.Teoría de Ecuaciones y Matrices.

2. Relaciones y Funciones de una variable. Línea Recta y Cónicas.

3. Límites de Funciones de una variable. Series.

4. Derivadas de Funciones Algebraicas y sus aplicaciones.

5. Funciones Exponenciales,Logarítmicas,Trigonométricas e Hiperbólicas.

6. Procedimientos de Integración.

7. La Integral Definida y sus aplicaciones.

8. Espacios vectoriales.

9. Funciones de dos o más variables. Superficies.

10. Derivación e Integración de Funciones de dos o más variables.

11. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

12. Funciones Vectoriales " clásicas " y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

BOSQUEJO HISTORICO DEL CALCULO.

Las investigaciones del insigne físico griego ARQUIMEDES (287-212)A.C. constituyen el precedente más antiguo del Cálculo. Sus aportaciones principales se han mencionado en el capítulo anterior.

En su orígen y en su desarrollo histórico la Geometría Analítica y el Cálculo diferencial e integral, siguieron un mismo camino. De entre los antiguos griegos, no debemos olvidar la labor del geómetra PAPPUS (fines S. III. D.C.), el cual escribió una obra que resumía todos los conocimientos matemáticos de su tiempo, incluyendo la Mecánica, y aportando también los dos teoremas que llevan su nombre.

Sin embargo, el paso trascendental para el nacimiento del extraordinario método de investigación matemática que nos ocupa, lo dió el filósofo y matemático francés RENE DESCARTES (1596- 1650), quien en su "Géométrie" establece la relación entre el número y el espacio, creando la Geometría Analítica.

Entre los precursores del Cálculo diferencial se encuentran: GALILEO, y los matemáticos franceses FERMAT y PASCAL, ámbos del S. XVII; cuyos trabajos prepararon el camino a la gran concepción del filósofo y matemático alemán GOTTFRIED LEIBNIZ (1646-1716), que expuso sus principios por primera vez en : " Nova methodus pro maximis et minimis ", que publicó en las " Acta Eruditorum ", en 1684.

En el S. XVI, entre los precursores del Cálculo integral se encuentran: JOHANNES KEPLER, astrónomo alemán, el cual con motivo de una gran cosecha de uva en Austria, estudió la Cubicación de toneles, hasta formular una teoría, que a pesar de ser imperfecta, resolvía la cubicación de 92 tipos de sólidos de revolución.

El matemático italiano BONAVENTURA CAVALIERI, discípulo de Galileo, que en su notable " Geometría de los indivisibles ",—

calculó áreas y volúmenes, así como longitud de curvas, recurriendo a sumas. Pero también en este campo faltaban los procedimientos generales de Leibniz. Las notaciones actuales así como el nombre de Ecuaciones Diferenciales son también suyos.

Entre los matemáticos que continuaron la obra iniciada, están los hermanos JACQUES BERNOULLI (1654-1705) y su hermano JUAN BERNOULLI (1667-17[illegible]) cuyas investigaciones matemáticas completaron la base iniciada por Leibniz. GUILLAUME FRANÇOIS DE L'HÔPITAL(16[illegible]-170[illegible]) escribió el primer libro de cálculo que se publicó en 1696; LEONHARD EULER (m.1983) y el matemático e ingeniero francés AGUSTIN LOUIS DE CAUCHY(m.1857), quienes dieron una base más rigurosa al cálculo.

En el terreno de las Ecuaciones diferenciales se [illegible] principalmente los trabajos de: los Bernoulli, LAGRANGE (m.1813), LAPLACE(m.18[illegible]), ABEL(m.1829), FOURIER(m.1830) y GAUSS(m.[illegible]).

Posteriormente se han estructurado todos los temas del Cálculo, siguiéndose efectuando en la actualidad las fructíferas investigaciones matemáticas.

1.- EL NUMERO. COORDENADAS CARTESIANAS.TEORIA DE ECUACIONES Y MATRICES.

La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud,- el volúmen,la superficie,el peso,llevó al hombre a introducir los números — enteros y fraccionarios.

Exísten ciertas magnitudes que al ser medidas no encontramos nin — gún número entero ni fraccionario que las exprese, estas magnitudes se lláman- incommensurables y los números que se originan al medir tales magnitudes, — se lláman irracionales.

Entónces tenemos que:

- NUMEROS REALES
  - POSITIVOS
    - RACIONALES
      - ENTEROS
      - FRACCIONARIOS
    - IRRACIONALES
  - CERO
  - NEGATIVOS
    - RACIONALES
      - ENTEROS
      - FRACCIONARIOS
    - IRRACIONALES

Cualquier conjunto cuyos elementos satisfágan los postulados de — cerradura,conmutación,asociatividad,distributividad,identidad,e inverso, se - denomina CAMPO.

El Campo de los Números Reales ($\mathbb{R}$) puede representarse por la denominada - recta numérica:

$-\infty$ ......-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14........ ∞

Entónces el intervalo $(-\infty,\infty)$, denota el conjunto de todos los Números Reales.

Definimos un Número Complejo como: Un Número Complejo Z es un — par ordenado de números reales (a,b).

Forma Rectangular de un Número Complejo: $Z = a + b\,i$

donde $a,b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ (indicación de la raiz de índice par de un número - negativo) y se le denomina Número Imaginario.

Complejos Conjugados: $a + bi$, $a - bi$.

Módulo de un Complejo: $\left| \sqrt{a^2 + b^2} \right|$ es el módulo del complejo $a + bi$.

Dos complejos conjugados tienen módulos iguales.

Operaciones con números complejos:

Suma: La suma de dos complejos conjugados es un número real:

$$(a+bi) + (a-bi) = a + a + bi - bi = 2a$$

La suma de dos complejos es otro complejo de la misma naturaleza:

$$(a+bi) + (c+di) = a + c + bi + di = (a+c) + (b+d)\,i$$

Sustracción: La diferencia de dos complejos conjugados es un número imaginario:

$$(a+bi) - (a-bi) = a - a + bi + bi = 2bi$$

La diferencia de dos complejos es otro complejo de la misma naturaleza:

$$(a+bi) - (c+di) = a - c + bi - di = (a-c) + (b-d)\,i$$

Multiplicación: El producto de dos complejos conjugados es un número real —— positivo, igual al cuadrado del módulo:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

El producto de dos complejos es otro complejo de la misma naturaleza:

$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

División:

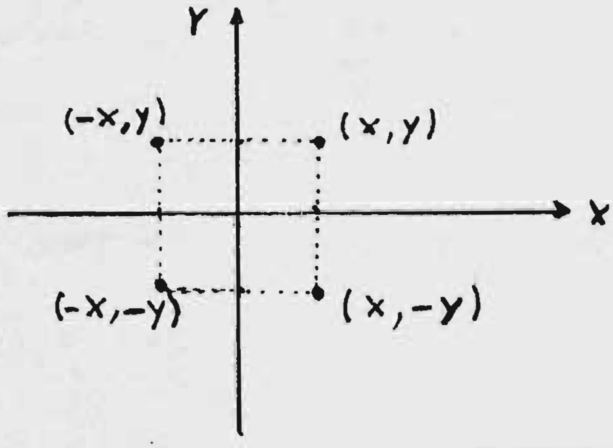
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)\,i}{c^2 + d^2}$$

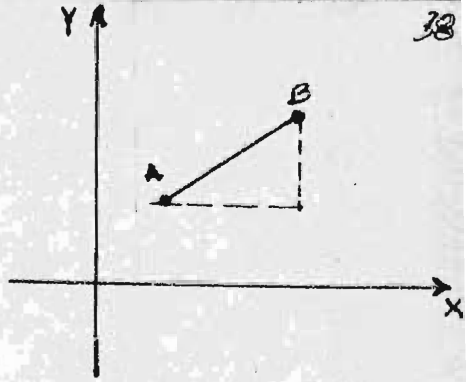
Potencia de un complejo:

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}bi - \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 i + \dots$$

Donde n es un entero poditivo.

EL PLANO CARTESIANO:





DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

$$(1) \qquad AB = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO AL ORIGEN:

$$(2) \qquad OA = \sqrt{X_1^{\,2} + Y_1^{\,2}}$$

Una ECUACION es una igualdad en la que hay una o varias cantidades descono — cidas llamadas incógnitas y que solo se verifica para determinados valores — de las incógnitas.

FORMA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO: $AX \pm B = CX \pm D$, A,B,C,D CTES.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRATICAS: $AX^2 + BX + C = 0$ Ec. Completa.

La Ecuación de segundo grado es completa cuando consta de tres términos; la — Ecuación es incompleta, cuando carece de término independiente o del término — en X. Formas de la Ecuación incompleta:

$$AX^2 + C = 0 \quad , \qquad AX^2 + BX = 0$$

Las Ecuaciones de la forma: $AX^2 + C = 0$ se llaman cuadráticas puras. Soluc.:

$$X^2 = -C/A \quad \therefore, \qquad X = \pm\sqrt{-C/A}$$

Las Ecuaciones de la forma: $AX^2 + BX = 0$ se llaman cuadráticas mixtas. Soluc.:

$X(AX + B) = 0$ Si $X = 0$, tenemos una solución.

Si $AX + B = 0$, se tiene $X = -B/A$ como — segunda solución.

Solución de la Ecuación completa: $AX^2 + BX + C = 0$

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Las raíces pueden ser reales o complejas.

ECUACION DE TERCER GRADO: $X^3 + BX + C = 0$ .Solución:

$$X_1 = \sqrt[3]{-C/2 + \sqrt{C^2/4 + B^3/27}} + \sqrt[3]{-C/2 - \sqrt{C^2/2 + B^3/27}}$$

esta es la fórmula de Tartaglia - Cardano (S. XVI). Para calcular las otras — dos raíces, basta resolver la cuadrática que resulta de dividir la ec. cúbica // entre $(X - X_1)$

Si $C^2/4 + B^3/27 > 0$, la ecuación cúbica tiene una raíz real y dos complejas.

Si $C^2/4 + B^3/27 < 0$, la aplicación do la fórmula Tartaglia - Cardano da, para los radicales de tercer órden, valores complejos conjugados, cuya suma por tanto, es real. Cuando la ec. tiene tres raíces reales, se presenta el llamado "Caso irreductible". Cuando esto sucede, para hallar una de las raíces, búsquense divisores de la forma $X \pm A$ al polinomio que forma el primer miembro de la ecuación.

Si la ecuación propuesta tiene término en X^2, transfórmese en otra que no contenga ese término.

TEOREMA DE LAS RAICES RACIONALES: Si la Ecuación $A_o X^n + \ldots + A_n = 0$ tiene una raíz racional p/q (p, q enteros) entónces p es un divisor exacto del término constante A_n y q es un divisor exacto del coeficiente A_o.

TEOREMA DE LAS RAICES COMPLEJAS: Si una Ecuación con coeficientes reales tiene una raíz $a + bi$, entónces también tiene la raíz $a - bi$.

M A T R I C E S :

Un arreglo rectangular de mn cantidades, colocadas en m hileras y n columnas es llamado una matriz.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si $m = n$ de dice que la matriz es cuadrada y de órden n.

El valor de una matriz cuadrada escrito en la forma:

$$A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

es llamado un DETERMINANTE.

El Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

por constar de dos columnas y de dos renglones se denomina Determinante de segundo órden. $a_1 b_2$ es la diagonal principal.

Determinantes de tercer órden: Solución por MENORES:

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS DETERMINANTES:

A) El valor de un determinante no se altera si se intercambian las hileras y las columnas.

B) Si los elementos de una hilera o una columna de un determinante son ceros, el determinante es igual a cero.

C) Si dos hileras o columnas de un determinante son idénticas, el determinante es igual a cero.

Aplicación de los determinantes a la resolución de Ecuaciones Simultáneas:

REGLA DE CRAMER: Sea $A_1X+B_1Y=m_1$

$A_2X+B_2Y=m_2$ los valores de las variables son:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} m_1 & B_1 \\ m_2 & B2 \end{vmatrix}}{\Delta_s} \qquad Y=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & m_1 \\ A2 & m2 \end{vmatrix}}{\Delta_s}$$

y el determinante del sistema:

$$\Delta_s=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Sea: $A_1X+B_1Y+C_1Z=m_1$

$A_2X+B_2Y+C_2Z=m_2$

$A_3X+B_3Y+C_3Z=m_3$ los valores de las variables son:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} m_1 & B_1 & C_1 \\ m_2 & B_2 & C_2 \\ m3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta_s} \qquad Y=\frac{\begin{vmatrix} m_1 & A_1 & C_1 \\ m_2 & A_2 & C_2 \\ m_3 & A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta_s} \qquad Z=\frac{\begin{vmatrix} m_1 & A_1 & B_1 \\ m_2 & A_2 & B_2 \\ m_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\Delta_s}$$

Si el determinante del sistema $\Delta_s \neq 0$, existe solución única.

Si el determinante del sistema $\Delta_s = 0$, y los otros det. $\Delta \neq 0$, No hay soluc.

Si el determinante del sistema $\Delta_s = 0$, y los otros det, $\Delta = 0$, existen un núm infinito de soluciones.

ALGEBRA DE MATRICES:

A) Adición y Sustracción: Las operaciones de adición y sustracción de dos o más matrices son posibles, si y solo si tienen el mismo número de hileras y columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b & 3+c & 4+d \\ 5+e & 6+f & 7+g & 8+h \\ 9+i & 10+j & 11+k & 12+l \end{pmatrix}$$

B) Multiplicación: El producto está definido cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de hileras de la segunda matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \\ 5a+6d & 5b+6e & 5c+6f \end{pmatrix}$$

C) Multiplicación por un escalar:

$$3 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix}$$

D) Inverse de una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Teorema: Si $ad \neq bc$ entónces A tiene como inversa multiplicativa a la matriz A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/ ad - bc & - b/ ad - bc \\ - c/ ad - bc & a / ad - bc \end{pmatrix}$$

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ es la matriz unitaria.

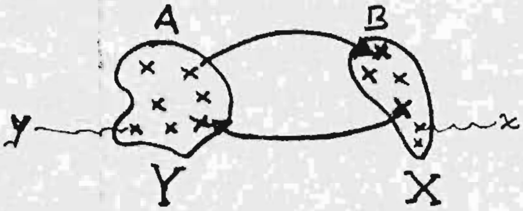
2.- RELACIONES Y FUNCIONES DE UNA VARIABLE. LINEA RECTA Y CONICAS.

Un conjunto R de pares ordenados cuyos componentes sean elemen — tos de un universo U, se llama RELACION en U.

CONCEPTO Y DEFINICION DE FUNCION: $Y = F(X)$ " Y es función de X ".

Dominio: Constituído por los valores de los elementos del conjunto causa.

Rango: Constituído por los valores de los elementos del conjunto efecto.



Puede ocurrir que para un valor de x existan - dos o más valores de y, en cuyo caso NO existe- una función, sino simplemente una Relación.

Si para dos o más valores de x existe un valor de y , SI existe una —— FUNCION.

Si para un valor de x , existe un valor de y , y si para un valor de y — existe un valor de x , entónces tenemos una Función biunívoca (tiene una — correspondencia uno a uno).

Definimos una FUNCION, como un conjunto no vacío de pares ordenados, de los — cuales no hay dos con primera componente igual.

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES:

- FUNCIONES REALES
  - ALGEBRAICAS.
  - TRASCENDENTES
    - EXPONENCIALES
    - LOGARITMICAS
    - TRIGONOMETRICAS
    - HIPERBOLICAS

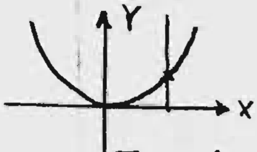
FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: Las funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, e hiperbóli— cas pueden definirse en el Plano Complejo.

FUNCIONES VECTORIALES:

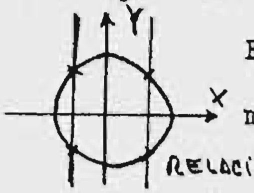
- $F: R \longrightarrow V$
- $F: V \longrightarrow R$
- $F: V \longrightarrow V$

La gráfica de una Función es intersectada cuando más una vez por cualquier --

recta perpendicular al eje sobre el cual se grafica su dominio.

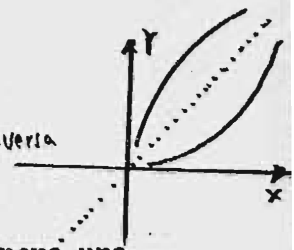


FUNCIÓN.

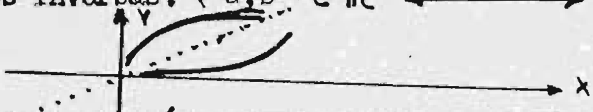


RELACIÓN.

Es posible, restringiendo el rango, transformar una Relación en Función.



Funciones Inversas: $(a,b) \in \mathcal{R} \longleftrightarrow (b,a) \in \mathcal{R}^*$ relac. inversa



Las Funciones Biunívocas nos pueden producir una función inversa, pero una Función que no sea Biunívoca nos produce como inversa, una Relación.

Teorema: Si F es Biunívoca, y F^* es su inversa $\longrightarrow F(F^*) = I$ donde el dominio de I es igual al rango de F.

Ahora $F^*(F) = I$ donde el dominio de I es igual al dominio de F.

Sean: Ln a, e^a. Si $e^{\text{Ln } a} = a$, $\text{Ln } e^b = b$.

Supongamos que $y = F = e^x$

$$X = F^* = \text{Ln } y. \text{ O sea: } F(F^*) = e^{\text{Ln } y} = y$$

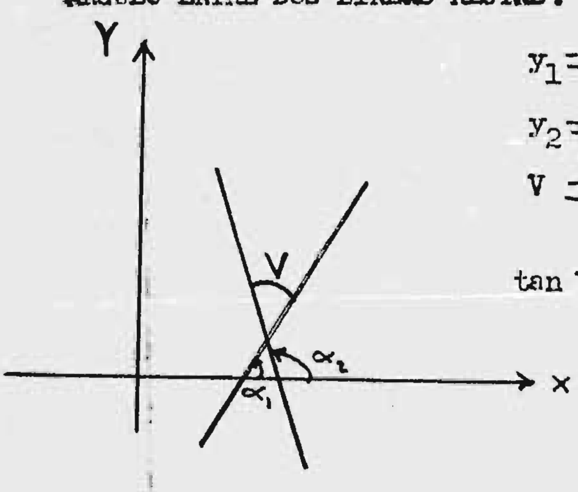
$$F^*(F) = \text{Ln } e^x = x$$

La Función dada por la Ecuación: $F(x) = mx + b$ es la FUNCION GENERAL DE PRIMER GRADO: $F = \{(x,y) \mid y = mx + b\}$ m es la pendiente de la línea recta: $m = \tan\alpha$. b es la ordenada al orígen.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA GENERAL: $AX + BY + C = 0$ (3)

Desde un punto de vista general la gráfica de una Función de Primer Grado, es una Línea Recta.

ANGULO ENTRE DOS LINEAS RECTAS:



$$y_1 = m_1 x + b_1$$

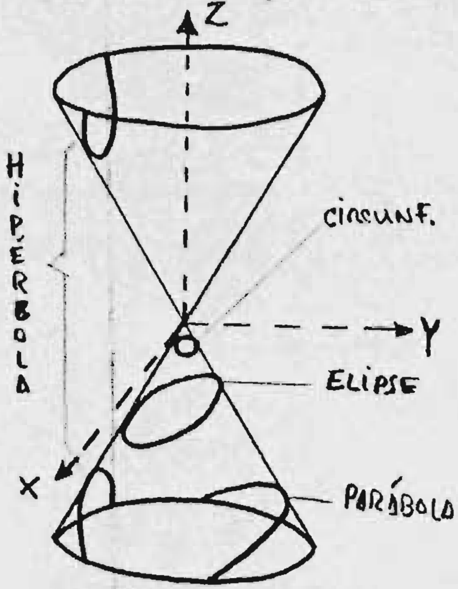
$$y_2 = m_2 x + b_2$$

$$V = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\tan V = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad (4)$$

La Función dada por la Ecuación: $F(x) = ax^2 + bx + c$ es la Función general de SEGUNDO GRADO: $F = \left\{ (x,y) \mid y = ax^2 + bx + c \right\}$

Las curvas obtenidas cortando un Cono, por un plano que no pase por el vértice, se llaman Cónicas.



Si el plano secante:

A) Corta todas las generatrices y es perpendicular al eje del Cono, se obtiene una CIRCUNFERENCIA.

B) Corta todas las generatrices y NO es perpendicular al eje, se obtiene una ELIPSE.

C) Es paralelo a una generatriz, se obtiene una PARABOLA.

D) Es paralelo al eje, se obtiene una HIPERBOLA.

Ambas hojas del Cono están dadas por la ec: $X^2 + Y^2 = A^2 Z^2$ (5)

Sea la Ecuación general de Segundo Grado: $AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$

donde A, B, C, D, E, F son constantes.

Si la Ecuación es de una Circunferencia, o los ejes de simetría de las tres Cónicas restantes son paralelos a los ejes Cartesianos, la ecuación carece del término en XY. En este caso, si:

1.- $A = C$, la Ecuación representa una CIRCUNFERENCIA.

2.- A y C son de igual signo, es la Ecuac. de una ELIPSE.

3.- $A = 0$, o bien $C = 0$, la Ecuac. es la de una PARABOLA.

4.- A y C son de signos contrarios, la Ecuac. es la de una HIPERBOLA.

Resolviendo en Y la Ecuación:

$$Y = -\frac{BX + E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(B^2 - 4AC)X^2 + 2(BE - 2CD)X + E^2 - 4CF}$$

La naturaleza de la curva depende del coeficiente que tiene el término X^2 en el radicando, o sea, depende del valor de $B^2 - 4AC$, magnitud que es llamada DISCRIMINANTE de la Ecuación.

SI: 1.- $B^2 - 4\,AC < 0$, la Cónica es del género ELIPSE.

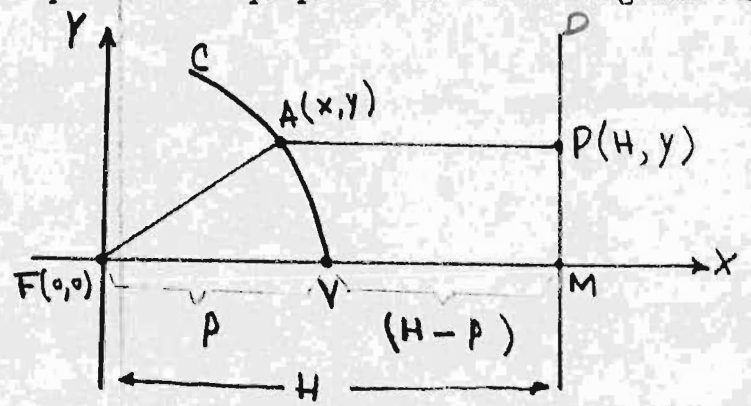
2.- $B^2 - 4\,AC = 0$, la Cónica es del género PARABOLA.

3.- $B^2 - 4\,AC > 0$, la Cónica es del género HIPERBOLA.

DISCR.	GEN. DE LA CURVA.	R A D I C A N D O.	ESPECIE DE LA CURVA.
$D < 0$	ELIPSE	Trin. con raíces reales.	Elipse real.
		Trin. con raíz doble. -	Elipse degenerada.
		Trin. con raíces complejas.	Elipse imaginaria.
$D = 0$	PARABOLA	Monomio o Binom. con un term. en X.	Parábola real.
		Sin térm. en X:	
		Si: $N > 0$	Dos rectas paralelas.
		$N = 0$	Dos rectas coincid.
		$N < 0$	Parábola imaginaria.
$D > 0$	HIPERBOLA	Trin. con raíces reales.	Hipérbola que corta al diámetro.
		Trin, con raíz doble.	Hipérbola que ha degenerado en dos rectas.
		Trin. con raíces complejas.	Hipérbola que no corta al diámetro.

Siendo N el número que llegue a figurar como término único en el radicando. *1.

Sea C una curva que representa una Cónica, en términos generales, que tiene la propiedad de ser de longitud variable, con respecto al tiempo.* 2.



C: Cónica.

F: Foco (o,o)

V: Vértice (p,o)

D: Directriz

FV; p

VM = H - p

VM = H – p

* 1. Cuadro tomado de la Geometría Analítica de Agustín Anfossi. (   ).

* 2. Enfoque sugerido por el Ing. Héctor Sierra, asesor de esta Tesis.

Excentricidad: $e = \dfrac{p}{H - p} = \dfrac{\overline{FV}}{\overline{VM}}$

Propiedad de C: $e = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{AP}}$, $\overline{FA} = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\overline{AP} = H - X$

Igualando ámbas expresiones de la excentricidad llegamos a:

$$H(H - 2p)X^2 + 2p^2HX + (H - p)^2 Y^2 = p^2 H^2 \qquad (6)$$

que es una expresión de la Ecuación general de las Cónicas.

El tipo de Cónica dependerá de la posición de la directriz y por lo tanto del valor de la excentricidad e.

PRIMER CASO GENERAL: ELIPSE Y CIRCUNFERENCIA.

SI $H > 2p$, $e < 1$. Haciendo $H = np$, en donde $n > 2$, y sustituyendo en la ecuación (6), nos queda finalmente:

$$\frac{\left[X + \dfrac{p}{n - 2}\right]^2}{\left[\dfrac{(n - 1)p}{(n - 2)}\right]^2} + \frac{Y^2}{\dfrac{np^2}{(n - 2)}} = 1 \qquad (7)$$

Ecuación que corresponde a una E L I P S E, con las siguientes características:

Eje focal coincidiendo con el eje X

Semiejes: $a = \dfrac{(n - 1)p}{(n - 2)}$; $b = p\sqrt{\dfrac{n}{n - 2}}$; $c = \dfrac{p}{n - 2}$

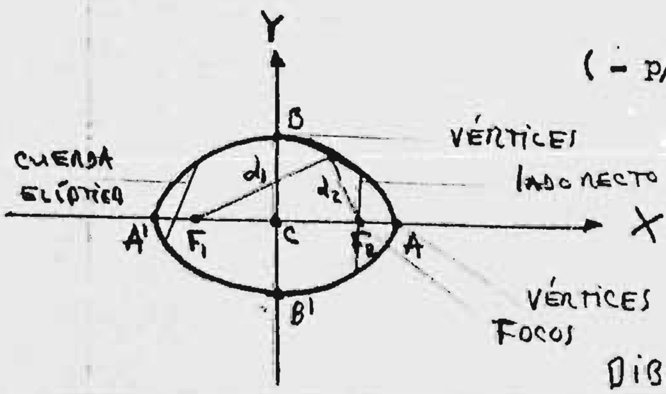
Excentricidad: $e = 1 / n - 1$.

Coordenadas del Centro: $\left(- \dfrac{p}{n - 2} , 0 \right)$

Coordenadas de los focos: $(- 2p/ n - 2 , 0)$ y $(0 , 0)$

Coordenadas de los vértices: $(- np/n - 2 , 0)$ y $(p , 0)$ del Eje Mayor.

$(- p/n - 2 , b)$ y $(- p/n - 2, - b)$ del Eje Menor.

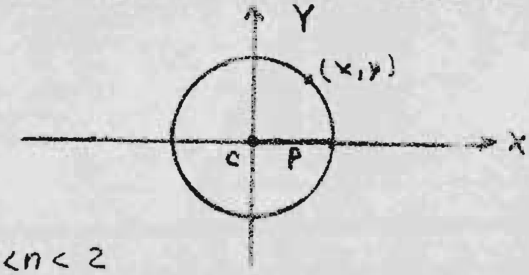


DIBUJO GENERAL DE LA ELIPSE CON

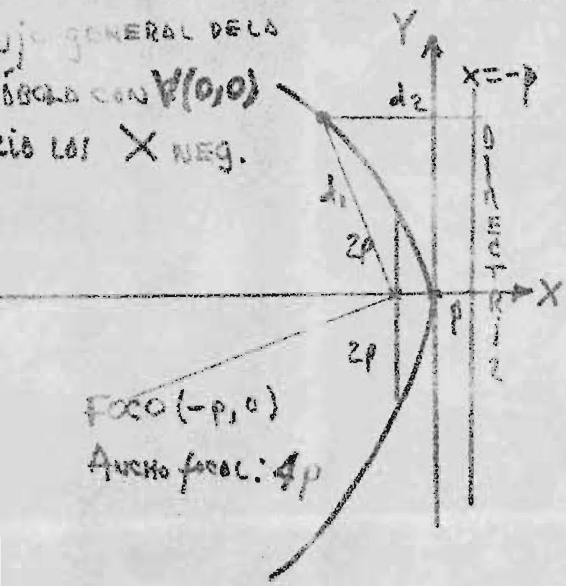
SI $H = \infty$, $e = 0$. Dividiendo la Ec. 1 entre H^2 tenemos una Ecuación en la que - si hacemos tender H a infinito, nos resulta;

$$X^2 + Y = p^2 \qquad (8)$$

Ecuación que corresponde a una C I R C U N F E R E N C I A con centro en el - orígen y radio igual a p.



SEGUNDO CASO GENERAL: P A R A B O L A. $1 < n < 2$



SI $H = 2p$, $e = 1$, Sustituyendo en la Ec (6), tenemos finalmente:

$$Y^2 = -4p(X - p) \qquad (9)$$

Ecuación que corresponde a una P A R A B O L A Cuyo Eje de Simetría coincide con el Eje X, y está dirigida hacia las X negativas.

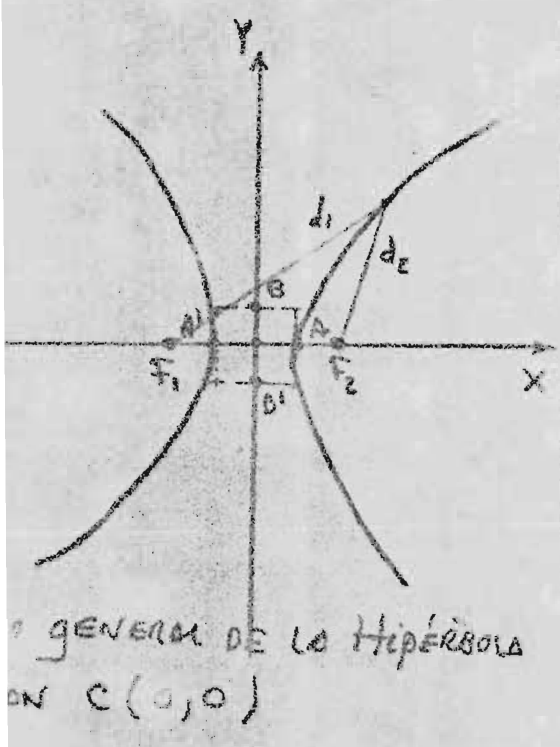
Coordenadas del foco: (0,0)

Coordenadas del vértice: (p,0)

TERCER CASO GENERAL: H I P E R B O L A.

SI $p < H < 2p$ $\quad e > 1$. Haciendo $H = np$ en - donde $1 < n < 2$ y sust. en la Ec (6), queda;

$$\frac{\left[X - \dfrac{p}{(2-n)}\right]^2}{\left[\dfrac{(n-1)p}{(2-n)}\right]^2} - \frac{Y^2}{\dfrac{n p^2}{(2-n)}} = 1 \qquad (10)$$



Ec. que corresponde a una H I P E R B O L A, con las siguientes características;

Eje focal que coincide con el Eje X.

Semiejes: $a = (n-1)p / 2 - n$

$b = p\sqrt{n/2 - n}$

$c = p/(2 - n)$

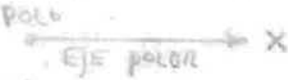
Excentricidad: $e = c/a = 1/n-1$

Coordenadas del centro: ($p/2-n$, 0)

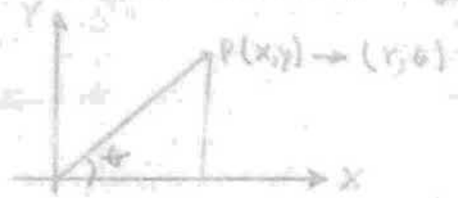
Coordenadas de los focos: (0 , 0) y ($2p / 2-n$, 0)

Coordenadas de los vértices: (p , 0) y ($np/2-n$, 0)

COORDENADAS POLARES:



$0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r \geq 0$



$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \mathrm{ang\,tan}\,\frac{y}{x}$$

1.- Ecuación de la Parábola en Coordenadas Polares:

(11) $\rho = 4\,p\cos\theta / \mathrm{sen}^2\theta$ siendo $Y^2 = 4\,pX$ la Ec. Cartesiana

2.- Ecuación de la Elipse en Coordenadas Polares:

(12) $\rho = \pm\, b / \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}$ siendo la Ec. Cartesiana:

$b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2\,b^2$

3.- Ecuación de la Hipérbola en Coordenadas Polares:

(13) $\rho = \pm\, b / \sqrt{e^2\cos^2\theta - 1}$ siendo la Ec. Cartesiana:

$b^2X^2 - a^2Y^2 = a^2\,b^2$

ALGUNAS ESPIRALES PLANAS:

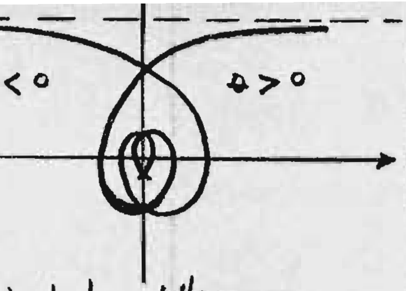
1.- Espiral de Arquímedes: Si graficamos $\rho = c\,\theta$ donde c es una constante arbitraria $c = 1$, θ expresado en radianes:

$\rho = c\,\theta$ (14)

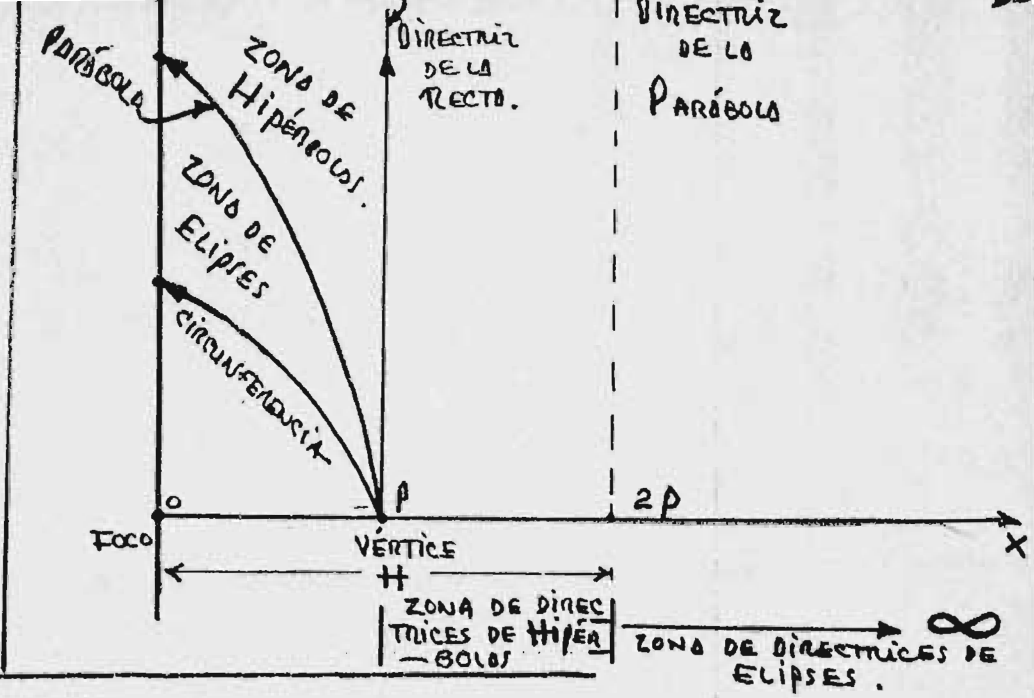
para valores neg. de θ obt. la lín. pu

2.- Espiral Logarítmica: $\log\rho = c\,\theta$ (15)

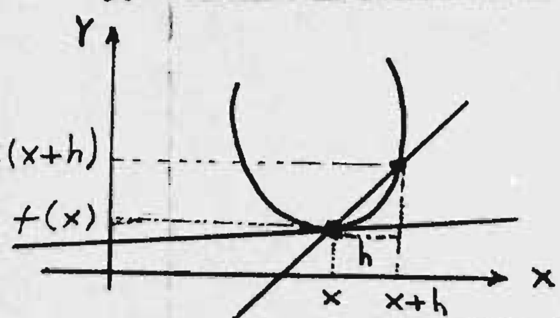
3.- Espiral Hiperbólica: $\rho = c/\theta$ (16)



iral hiperbólica.



3.- LIMITES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE. SERIES.



pendiente : $m = \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$\dfrac{f(X+h) - f(X)}{X+h - X} = M(X)$ que es el valor de la pendiente de la línea secante.

Cuando $h \longrightarrow 0$, $m(\text{sec}) \longrightarrow m(\text{tangente})$, o sea;

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{X+h-X} = M(X) \quad \text{tangente.} \qquad (17)$$

y por definición, la pendiente de la línea tangente en un punto, es la pendiente de la curva en ese punto.

DEFINICION: El límite de F(X) cuando $X \longrightarrow a$ será b, lo notaremos :

$\lim\limits_{X\to a} F(X) = b$. Existirá si dada una $\xi > 0$ tal que $|F(X) - b| < \xi$ es posible encontrar una $\delta > 0$ para todos los valores $x \in X$ que satisfágan $\underbrace{|x - a|}_{h} < \delta$; si b existe, es el límite de F(x) y es único.

TEOREMAS:

1.- $\lim\limits_{x \to a} (mx+b) = ma+b$, si $m,b \in \mathbb{R}$. (18)

2.- $\lim\limits_{x \to a} b = b$ (19)

3.- $\lim\limits_{x \to a} k\,F(x) = k \lim\limits_{x \to a} F(x)$, k es constante. (20)

4.- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a \geq 0$ (21)

5.- $\lim\limits_{x \to a} \left[U(x) + V(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} U(x) + \lim\limits_{x \to a} V(x)$ (22)

6.- $\lim\limits_{x \to a} \left[U(x) \cdot V(x)\right] = \left[\lim\limits_{x \to a} U(x)\right]\left[\lim\limits_{x \to a} V(x)\right]$ (23)

7.- $\lim\limits_{x \to a} U(x)/V(x) \quad \lim\limits_{x \to a} U(x) / \lim\limits_{x \to a} V(x)$, si $\lim\limits_{x \to a} V(x) \neq 0$ (24)

8.- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{U(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} U(x)}$ (25)

Límites Trigonométricos: se tratarán en el capítulo correspondiente a las Funciones trigonométricas.

CONTINUIDAD: La función es continua en a si:

1.- a está en el dominio de F, o sea si F(a) está definida. ($F(x) = F(a)$)

2.- $\lim\limits_{x \to a} F(x)$, existe.

3.- $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$

S E R I E S:

Una Serie es la adición de un número N de elementos, ordenados y sujetos a una regla de variación.

La Serie puede ser finita o infinita.

Por ejemplo: $S_n = 1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64$, la cual se expresa:

$$\sum^{7} 1/2^{n-1}$$

Las progresiones aritméticas son series en las cuales, cada término después del primero, se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante llamada razón.

Las progresiones geométricas son series en las cuales cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante que es la razón.

Una SERIE cuyo elemento N+1 es menor que el elemento N a lo largo de toda la serie, decimos que es una Serie cuyos elementos son CONVERGENTES:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n-1}$$

La serie tiene un límite o valor finito, a pesar de que sea infinita.

Cualquier otro tipo de serie, se dice que es DIVERGENTE.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA:

1.- S_n es un elemento de la serie $S_{n+1} < S_n$

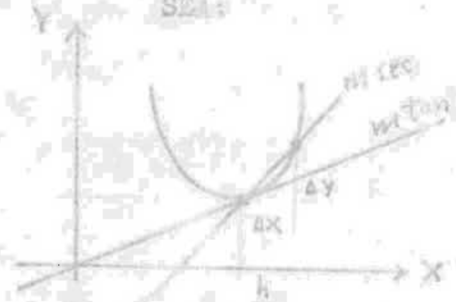
2.- Que exista un solo punto de conglomeración; normalmente este punto de conglomeración es el propio límite de la suma.

3.- Que la serie tenga límite: $\lim_{n \to \infty} S_n = 0$ por tanto, en :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n-1} \quad \text{, el límite: } \lim_{n \to \infty} 1/2^{n-1} = 1/2^{\infty} = 1/\infty = 0$$

4.- DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y SUS APLICACIONES.

SEA:



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} = m(x) = F'(X)$$

Si el límite existe, $F'(X)$ es la DERIVADA de $f(X)$ con respecto a X. Físicamente la Derivada significa la razón de cambio de una variable con respecto a otra; así por ejemplo, la RAPIDEZ es la Derivada del espacio con respecto al tiempo dE/dt.

NOTACIONES PARA LA DERIVADA: $D_x Y = F'(x) = dY/dx$.

$dY/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x$ es la pendiente de la tangente a una curva.

F O R M U L A S   F U N D A M E N T A L E S.

1. $dC/dx = 0$ (26)
2. $dx/dx = 1$ (27)
3. $dx^n/dx = nx^{n-1}$ (28)
4. $d\,cu^n/dx = n\,cu^{n-1}\,du/dx.$ (29)
5. $d\,uv/dx = u\,dv/dx + v\,du/dx.$ (30
6. $\dfrac{d\,u/v}{dx} = \dfrac{v\,du/dx - u\,dv/dx}{v^2}$
7. $d\sqrt{u}/dx = du/dx \,/\, 2\sqrt{u}$ (32

7'. $\dfrac{d\sqrt[m]{u}}{dx} = \dfrac{du/dx}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$

Derivadas de Orden Superior: Segunda Derivada:

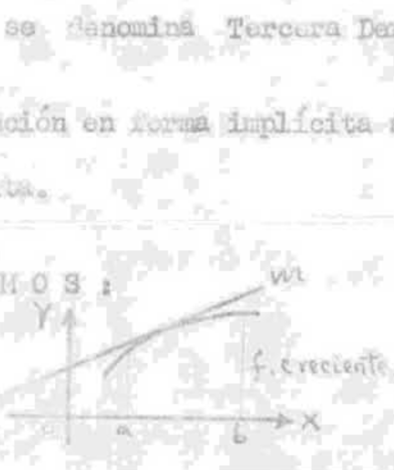
$$D_x^2 F(x) = d^2 f(x)/dx^2 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

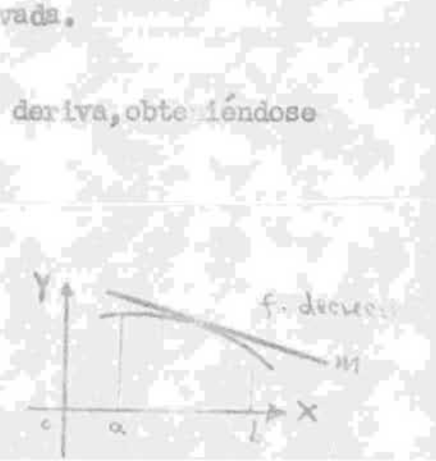
La derivada de $D_x^2 F(x)$ se denomina Tercera Derivada.

Derivación implícita: La función en forma implícita se deriva, obteniéndose la Derivada en forma explícita.

M A X I M O S   Y   M I N I M O S:

Variación de las Funciones:

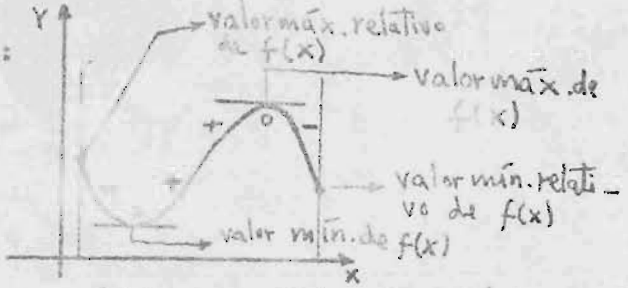


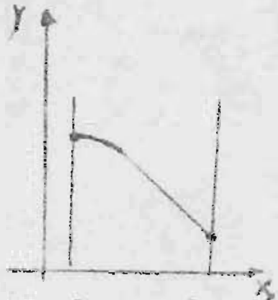


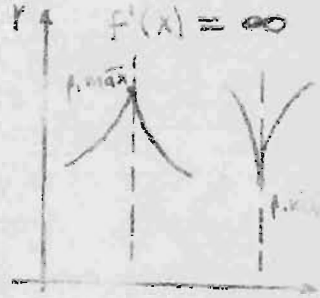
Si $D_x Y > 0$ sobre el intervalo (a,b), entónces $f(x) = Y$ es función creciente sobre (a,b).

Si $D_x Y < 0$ sobre (a,b) entónces $f(x)$ es decreciente sobre (a,b).

Sea:







Método práctico para determinar Máximos y Mínimos de una función:

A. Hallar la pendiente: $m = D_x Y$

B. Igualar la pendiente a cero y obtener sus raíces.

C. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, $f(c)$ es valor MINIMO $[c, f(c)]$ (33)

D. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, $f(c)$ es valor MAXIMO $[c, f(c)]$ (34)

Si $f''(c) = 0$, $x = c$ es un punto de inflexión.

Si $f''(c) = \infty$, o imaginario, entónces no hay punto de inflexión ni Máximo, ni Mínimo.

En lo que se refiere a la CONCAVIDAD:

$f''(c) > 0$ ——→ Concavidad positiva.

$f''(c) < 0$ ——→ Concavidad negativa.

FORMAS INDETERMINADAS: ∞^0, $0/0$, ∞/∞, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0

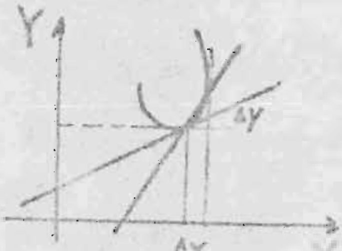
Cuando un límite nos produce una indeterminación, se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a} f'(x) / g'(x) \qquad (35)$$

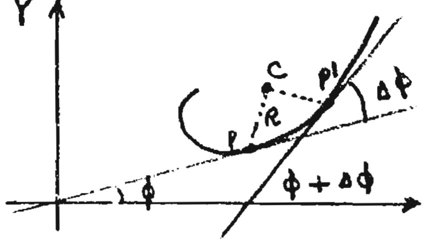
para aplicar la regla tenemos que transformar la indeterminación a las indeterminaciones: $0/0$, o bien, ∞/∞.

LA DIFERENCIAL: $\Delta X \to 0 = dX$

$\Delta Y \to 0 = dY$. $\qquad Y = f(X)$



$dY / dX = f'(X)$ $\therefore$ $dY = f'(X)\, dX$



CURVATURA: La dirección de una curva plana, en uno de sus puntos, es la de la tangente a la curva en ese punto. C. es el centro de una circunferencia.

R. es el radio de curvatura.

La razón de cambio de ϕ con respecto a S existe, y el valor absoluto de esta razón se llama CURVATURA.

ΔS = longitud del arco PP'. $S = \sqrt{1+y'^2}$

Curvatura media: $\Delta\phi/\Delta S$

Curvatura en un punto: $K = y'' / (1+y'^2)^{3/2}$ (36)

SERIES DE MACLAURIN Y DE TAYLOR:

Serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)/1!\,(x) + f''(0)/2!\,(x^2) + f'''(0)/3!\,(x^3) + \dots + \dots f^n(0)/n!\,(x^n) \qquad (37)$$

Serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)/1!\,(x-a) + f''(a)/2!\,(x-a)^2 + f'''(a)/3!\,(x-a)^3 + f^{IV}(a)/4!\,(x-a)^4 + \dots\dots\dots \qquad (38)$$

CINEMATICA: La Cinemática se refiere principalmente a la "descripción" del movimiento de una partícula. El concepto de movimiento es relativo, o sea, depende de la condición del objeto, con respecto a un punto que se use como sistema de referencia.

Para el Movimiento Rectilíneo de una partícula, la velocidad instantánea se define como:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (39)$$

O sea, es la variación del desplazamiento de la partícula con respecto al tiempo. La aceleración instantánea se define como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (40)$$

o sea la variación de la velocidad con respecto al tiempo, que también es - la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

Para el Movimiento Curvilíneo:

Velocidad: $v = \frac{ds}{dt}$ (41)

o sea, la variación del arco recorrido por la partícula con respecto al tiempo.

Aceleración: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$ (42) donde r es el radio.

Para el Movimiento ~~Curvilíneo~~ Circular:

Velocidad: $w = \frac{d\theta}{dt}$ (43)

donde w es la velocidad angular y θ es el ángulorecorrido por la partícula ,a lo largo de la trayectoria circular.

Aceleración: $a = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (44)

5.- FUNCIONES EXPONENCIALES,LOGARITMICAS,TRIGONOMETRICAS E HIPERBOLICAS.

La Función Exponencial se define:

$$\mathrm{Exp}_a = \{(x,y) \mid y = a^x,\ x \in \mathbb{R}\},\quad a \neq 1 \qquad (45)$$

Es la Función Exponencial de base a. v.gr: $y = 4^x$ o sea, base constante y exponente variable. Rango de la Func. Exp. $(0, \infty)$. La Func. es continua sobre los reales.

Llámanse Logaritmos a los términos de una progresión aritmética - que empezando por cero, se corresponden con los de otra geométrica que empieza por uno;estas dos progresiones constituyen un sistema de logaritmos.

Así para los Logaritmos decimales:

$$\left.\begin{array}{l} 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots \\ 1 : 10 : 100 : 1000 \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

son dos progresiones en las que los términos de la primera son los logaritmos y los de la segunda los números.

BASE de un sistema de Logaritmos es el término de la progresión geométrica-que se corresponde con el uno de la progresión aritmética.

El sistema de Logaritmos cuya base es el número 10, se denomina de BRIGGS o DECIMAL. El sistema de logaritmos cuya base es el número e, se denomina sistema de Logaritmos NATURALES O DE NAPIER (NEPERIANOS).

Número e: $e = \lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n = 2.7182818$ (46)

$$\ln N = 2.3 \log_{10} N.$$

Propiedades generales de los logaritmos:

1. La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa.
2. El logaritmo de un número negativo no estáa definido.
3. $b^1 = b$, entónces $\log b = 1$
4. $b^0 = 1$, entónces $\log 1 = 0$
5. Los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos.
6. Los números menores que 1 tienen logaritmos negativos.
7. $\log (A \times B) = \log A + \log B$
8. $\log A/B = \log A - \log B$
9. $\log A^n = n \log A$
10. $\log \sqrt[n]{A} = \log A/n$

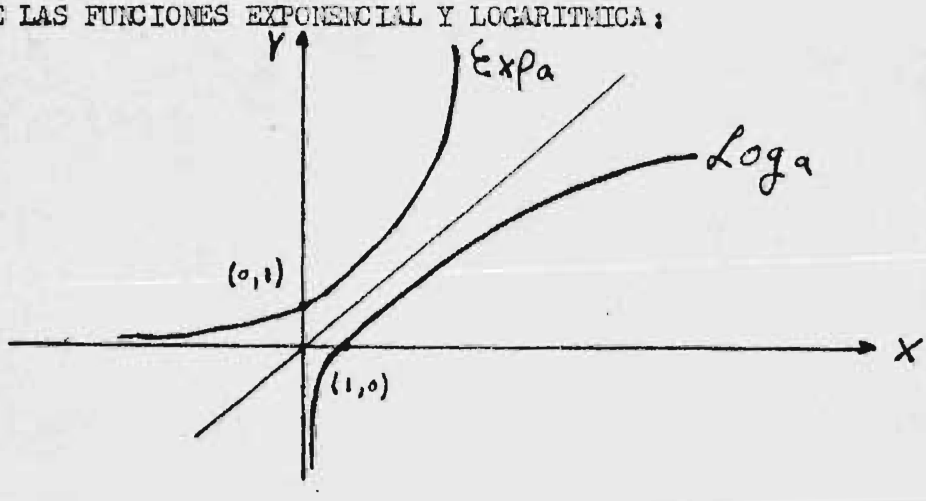
LA FUNCION LOGARITMICA se define como:

$$\mathrm{Log}_a = \left\{ (x,y) \mid \; x = a^y, \quad x \in (0, \infty), \quad y \in \mathbb{R} \right\} \qquad (47)$$

La Función es contimua sobre su dominio $(0, \infty)$

O sea: $y = \log_a X$ por lo tanto $X = a^y$

GRAFICA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA:



D E R I V A D A S .

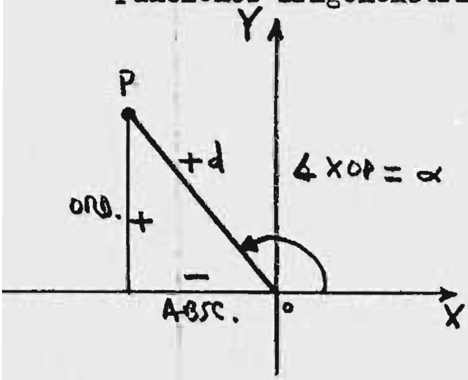
1.- $d\, a^u/dx = a^u \ln a \;\; du/dx$ (48)

2. $d\, e^u/dx = e^u \;\; du/dx$ (49)

3. $d \ln u/ dx = \dfrac{du/dx}{u}$ (50)

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS :

Funciones Trigonométricas de un ángulo α :



$\operatorname{sen}\alpha$ = ordenada/distancia (51)

$\cos\alpha$ = abscisa/distancia (52)

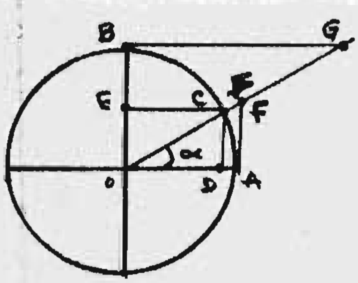
$\tan\alpha$ = ordenada/abscisa (53)

$\cot\alpha$ = abscisa/ordenada (54)

$\sec\alpha$ = distancia/abscisa (55)

$\csc\alpha$ = distancia/ordenada (56)

Ahora supongamos una circunferencia de radio unitario $OC = 1$, entónces las - relaciones anteriores se reducen a los valores siguientes:



$\operatorname{sen}\alpha = CD = OE$

$\cos\alpha = OE = OD$

$\tan\alpha = CD/OD = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha = FA$

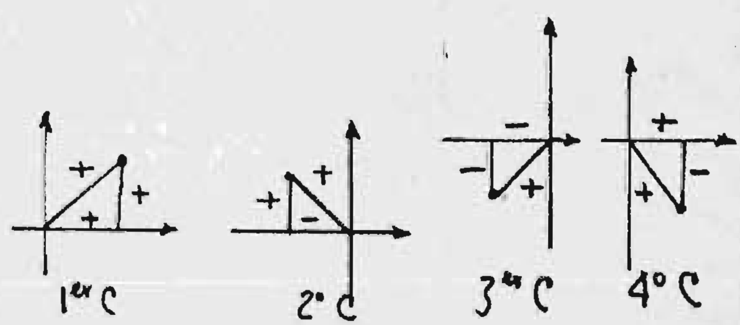
$\cot\alpha = OD/CD = \cos\alpha/\operatorname{sen}\alpha = GB$

$\sec\alpha = OF$ sen verso$\alpha = DA$

$\csc\alpha = OG$ cos verso$\alpha = EB$

Signos de las Funciones en los Cuadrantes:

	1	2	3	4
sen csc	+	+	−	−
cos sec	+	−	−	+
tan cot	+	−	+	−



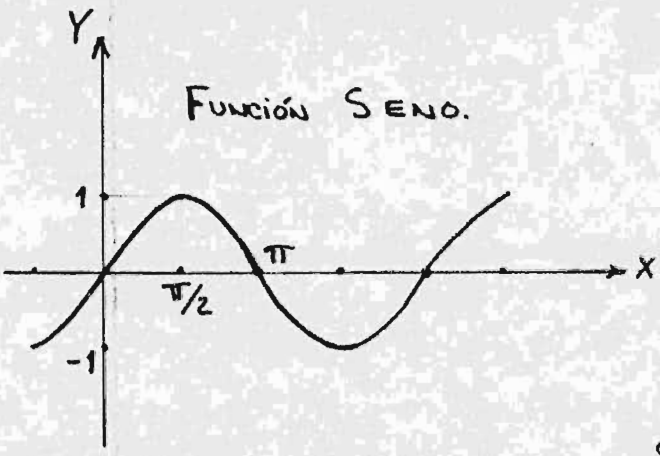
En base a la Teoría de Conjuntos:

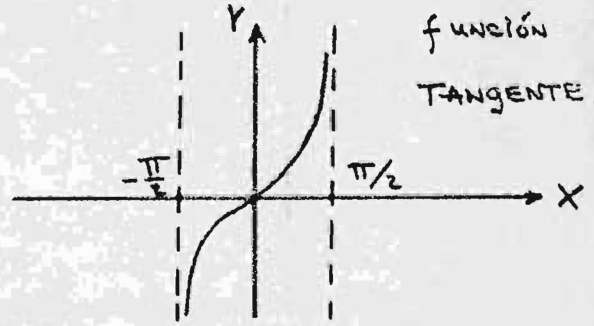
$\operatorname{sen} = \{(x,y) \mid y = \operatorname{sen} x\}$ Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $[-1, 1]$ (57)

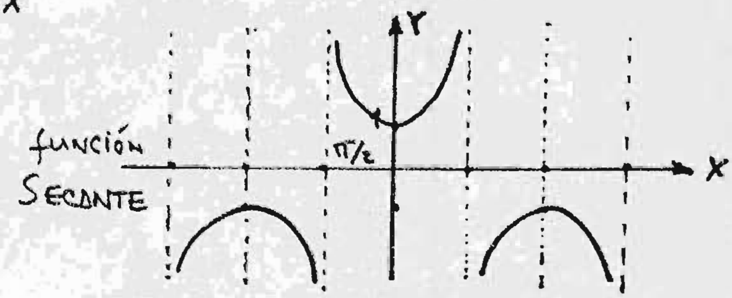
$\cos = \{(x,y) \mid y = \cos x$. Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $[-1,1]$ (57)

$\tan = \{(x,y) \mid y = \tan x\}$. Dominio: $x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + n\pi$. Rango: $\mathbb{R}$ (58)

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS:







IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS:

1. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (59)
2. $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha / 2$ (60)
3. $\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha / 2$ (61)
4. $\sec^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ (62)
5. $\csc^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ (63)

	sen α	cos α	tan α	cot α	sec α	csc α
sen α		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$
cos α	$\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
tan α	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
cot α	$\frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
sec α	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$		$\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
csc α	$\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

Límites Trigonométricos: $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\, x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}x/x = 1$

D E R I V A D A S .

1. $d\, \text{sen}\, u / dx = \cos u \; du/dx$. (64)
2. $d \cos u / dx = -\text{sen}\, u \; du/dx$. (65)

3. $d \tan u/dx = \sec^2 u \ du/dx$ (66)

4. $d \cot u/dx = -\csc^2 u \ du/dx$. (67)

5. $d \sec u/dx = \sec u \ \tan u \ du/dx$ (68)

6. $d \csc u/dx = -\csc u \ \cot u \ du/dx$ (69)

Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas:

1. d arc sen u/dx $\dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$ (70)

2. d arc tan u/dx $\dfrac{du/dx}{1+u^2}$ (71)

3. d arc sec u/dx $\dfrac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$ (72)

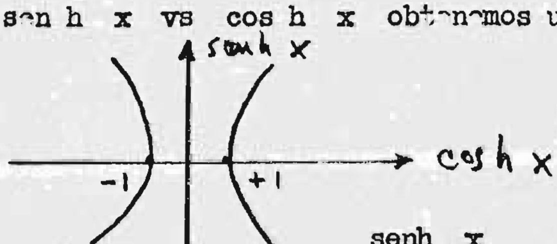
FUNCIONES HIPERBOLICAS:

Seno hiperbólico: $\operatorname{sen h} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (73)

Coseno hiperbólico:

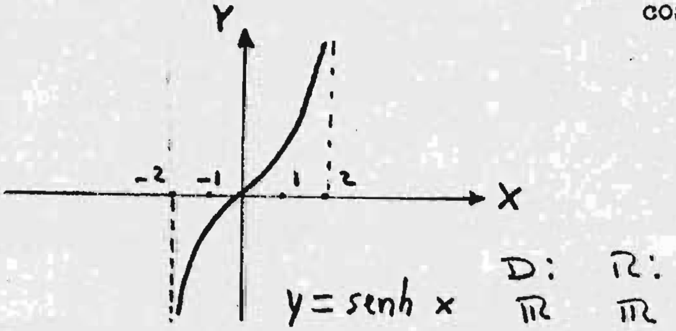
$$\cos h \ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (74)$$

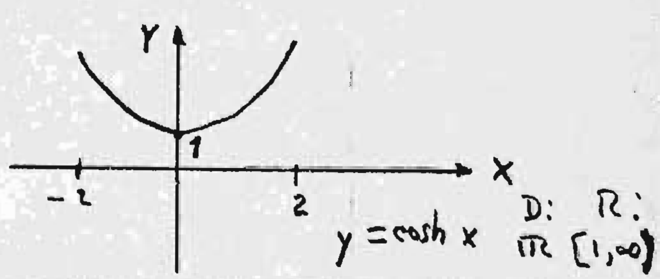
Al graficar sen h x vs cos h x obtenemos una hipérbola equilátera.



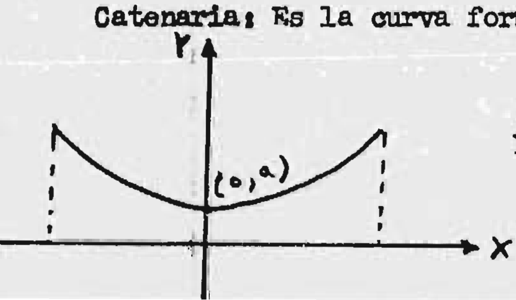
Tangente hiperbólica: $\tan h \ x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (75)

Secante hiperbólica: $\sec h \ x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ (76)





Catenaria: Es la curva formada por un hilo sometido a su propio peso. Su Ec, es:



$$Y = a/2 \ (e^{x/a} + e^{-x/a}) \quad (77)$$

D E R I V A D A S .

1. $d \operatorname{senh} u / dx = \cosh u \; du/dx$ (78)

2. $d \cosh u / dx = \operatorname{senh} u \; du/dx$ (79)

3. $d \tanh u / dx = \operatorname{sech}^2 u \; du/dx$ (80)

4. $d \coth u / dx = - \operatorname{csch}^2 u \; du/dx$ (81)

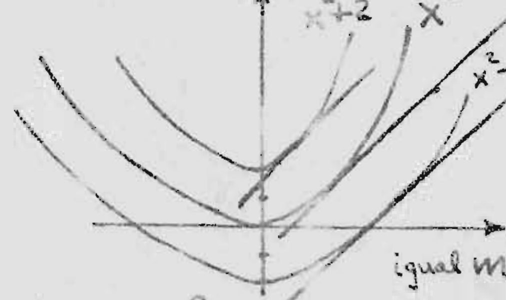
5. $d \operatorname{sech} u / dx = - \operatorname{sech} u \tanh u \; du/dx$ (82)

6. $d \operatorname{csch} u / dx = - \operatorname{csch} u \coth u \; du/dx$ (83)

++++++++++++++++++++++++++++++

6. PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACION.

Sea la siguiente gráfica:



La diferencial $2x\,dx$ no tiene tan sólo a x^2 como una antidiferencial o función primitiva, sino también a x^2+2, x^2+3,.... o sea, un infinito.

La operación mediante la cual se calcula la función primitiva, se llama INTEGRACION. La función primitiva que se obtiene por medio de la integración se llama INTEGRAL, y el operador $\int$ con que se indica la integración es el signo de la integral.

Si no hay extremos o límites que definan la Integral, se tiene una Integral Indefinida. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

F O R M U L A S   F U N D A M E N T A L E S

1. $\int du = u + c$ (84)

2. $\int u^n du = u^{n+1}/n+1 + c$ (85)
   $n \neq -1$

3. $\int du/u = \ln u + c$ (86)

4. $\int a^u\, du = a^u/\ln a + c$ (87)

5. $\int e^u du = e^u + c$ (88)

6. $\int \text{sen } u\, du = -\cos u + c$ (89)

7. $\int \cos u\, du = \text{sen } u + c$ (90)

8. $\int \tan u\, du = \ln \sec u + c$ (91)

9. $\int \cot u\, du = \ln \text{sen } u + c$ (92)

10. $\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u) + c$

11. $\int \csc u\, du = \ln(\csc u - \cot u) + c$

12. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$

13. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$

14. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + c$

15. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + c$

16. $\int du/\sqrt{a^2-u^2} = \text{ang sen } u/a +$
   $(a > 0)$

17. $\int du/a^2+u^2 = 1/a \text{ ang tan } u/a + c$

18. $\int du/u\sqrt{u^2-a^2} = 1/a \cdot$ [redacted] $\cdot \text{ ang sec } u/a +$
   $(a > 0)$

19. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + c$ (102)

20. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + c$ (103)

21. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$ (104)

22. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$ (105)

23. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du =$ (106)

$= -\operatorname{sech} u + c$

24. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du =$ (107)

$= -\operatorname{csch} u + c$

25. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1} u/a + c$

$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$

si $a > 0$ (108)

26. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} u/a + c$

$= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + c$

si $u > a > 0$ (109)

27. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} =$

$= \begin{cases} 1/a \tanh^{-1} u/a + c \text{ si } |u| < a \\ 1/a \coth^{-1} u/a + c \text{ si } |u| > a \end{cases}$

$= 1/2a \ln(|a+u/a-u|) + c$

si $u \neq a$, $a \neq 0$ (110)

28. $\int du/ u^2 - a^2 =$

$= 1/2a \ln |u-a/u+a| + c.$ (111)

I n t e g r a c i o n p o r F r a c c i o n e s P a r c i a l e s

Cuando tenemos un integrando racional:

$P_n(x) / P_m(x)$, si $n \geqslant m$, se efectúa la división algebr.

Sea:

$$\int \frac{P_n(x) \, dx}{(x+a)(x+b)} = \int (A / x+a) \, dx + \int (B / x+b) \, dx \quad (112)$$

en donde dében encontrarse los valores de A y B (constantes).

Si aparece un factor cuadrático en el numerador, entónces habrá para cada uno que aparezca, un término de la forma $Ax + B / ax^2 + bx + c$.

I n t e g r a c i o n d e l a s d i f e r e n c i a l e s b i n o m i a s:

Son de la forma: $\int (a + bx^n)^{p/q} x^m \, dx$ (113)

Si $m+1 / n$ es entero, se hace: $(a + bx)^n = z^q$

Si $m+1/n+p/q$ es entero: $a+bx^n/x^n = Z^q$

y se resuelve de este modo la integral.

Si el integrando contiene sólo la expresión irracional $(a+bx)^{p/q}$ la subst. $a+bx = U^q$ o bien $x = (U^q - a)/b$ racionalizará el integrando.

I n t e g r a c i ó n p o r P a r t e s .

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du + c \qquad (109)$$

I n t e g r a c i ó n p o r S u b s t i t u c i ó n T r i g o n o m é t r i c a.

Cuando figura en el integrando uno de los radicales:

$\sqrt{a^2 - x^2}$ se substituye: $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ (110)

$\sqrt{x^2 - a^2}$ se substituye: $x = a\sec\theta$ (111)

$\sqrt{a^2 + x^2}$ se substituye: $x = a\tan\theta$ (112)

Nota: Aunque en el radicando de una integral no aparezca un término cuadrático, como en los casos anteriores, puede emplearse la substituc. trigonométrica en algunos otros casos, v.gr:

$$\int\sqrt{x+2/x+1}\;dx = \int\sqrt{1/(x+1)+1}\;dx$$

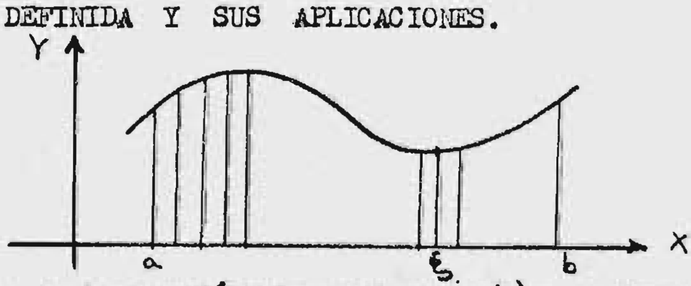
hágase $1/x+1 = \cot^2\phi$ $\qquad x = \tan^2\phi - 1$

$$dx = 2\sec^2\phi\tan\phi\,d\phi$$

****

7.- LA INTEGRAL DEFINIDA Y SUS APLICACIONES.

SEA:



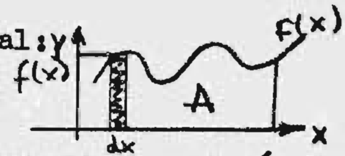
La base de cada uno de los rectángulos vale $(b-a/n)$ y ξ coincide con las — alturas de los rectángulos, por lo tanto:

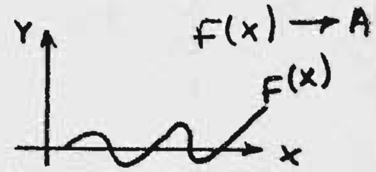
$$\text{AREA BAJO LA CURVA} = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\,(b-a/n) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (113)$$

Teorema Fundamental del Cálculo: " Sea F una Función continua sobre $[a,b]$. Si G es cualquier antidiferencial de F sobre $[a,b]$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \text{ "} \qquad (114)$$

Interpretación del Teorema Fundamental:





La Integral definida nos produce un NUMERO, el cual dá el valor del AREA BAJO LA CURVA, la Integral indefinida nos produce una FUNCION.

El Teorema Fundamental nos dá la conexión entre la Integral definida y la indefinida, o sea, nos liga la integral como resultado de la operación de integración y la Integral, como la solución al problema del área.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA:

1.- Si D es el intervalo $[a,b]$. El conjunto de puntos $P_n = \{x_o, x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ donde $x_o = a$, $x_n = b$, y $x_{\alpha-1} > x_\alpha$ para $\alpha = 1,2,3,\ldots,n$ es una partición desde a hasta b. Si $b < a$ entónces $\int_a^b f(x)\,dx$ queda definida según el Teorema Fundamental a lo largo de toda la partición.

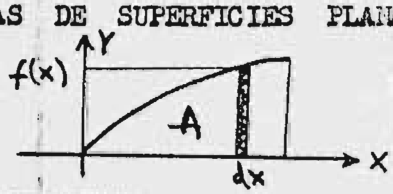
2.- Si f es integrable en $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3.- Si k es constante y f es integrable en $[a,b]$: $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

4.- Si f(x) y g(x) son integrables en $[a,b]$:

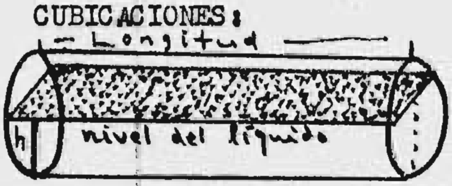
$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

AREAS DE SUPERFICIES PLANAS:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (115)$$

CUBICACIONES:



VOLUMEN = Secc. del área × long.

$$= \int_a^b f(x)\,dx \times L \qquad (116)$$

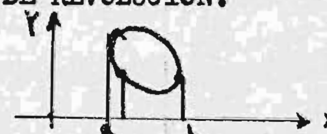
LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\; dx \qquad (117)$$

PRIMER TEOREMA DE PAPPUS: " La superficie engendrada por una curva al girar alrededor de una recta, tiene por valor de su área el producto de la longitud de la curva generadora por la de la circunferencia que describe su centro de gravedad"

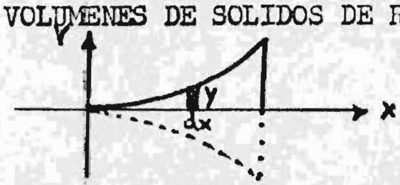
Así el valor del área de la superficie engendrada por un arco de curva al girar alrededor del eje X: AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN:

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx \qquad (118)$$



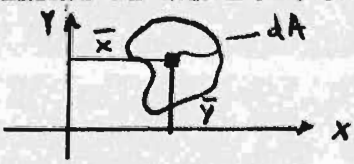
SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS: " El volúmen engendrado por un área plana girando alrededor de un eje situado en su plano, es igual al producto de esta área por la circunferencia descrita por su centro de gravedad".

VOLUMENES DE SOLIDOS DE REVOLUCION:



$$V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx \qquad (119)$$

CENTROS DE GRAVEDAD: Centro de gravedad de una región plana:



M = momento de primer órden = área × $\bar{x}$ o $\bar{y}$

$\bar{x}, \bar{y}$ son las coordenadas del centro de gravedad de la figura:

$$\bar{x} = M_y / A = \frac{\int_a^b x\,dA}{\int_a^b dA} \quad , \quad \bar{y} = M_x / A = \frac{\int_a^b y\,dA}{\int_a^b dA} \qquad (120)$$

Centro de gravedad de un cuerpo, es el punto de aplicación de su peso. En el centro de gravedad se puede suponer concentrado todo el peso del cuerpo.

8. ESPACIOS VECTORIALES:

A) Concepto de Espacio vectorial y de Vector:

Sea V un conjunto y F un campo con dos operaciones: suma y multipl. que cúmplen:

A. $(\{V\},+)$ forma grupo abeliano. *1

B. $r(v_1+v_2) = rv_1 + rv_2 \quad \forall\ r \in F;\ v_1,v_2 \in V$

C. $(r+s)\,v = rv + sv \quad \forall\ s,r \in F;\ v \in V$

D. $(rs)\,v = r(sv) \quad \forall\ r,\ s \in F;\ v \in V$

E. $1 \cdot v = v \ \forall\ 1 \in F;\ v \in V$

F. $0 \cdot v = \bar{0} \quad \forall\ 0 \in F;\ 0, v \in V$

Entónces $(V, F, +, \bullet)$ forman un Espacio vectorial y a los elementos de V se les llama VECTORES.

*Espacio Vectorial de N dimensiones.

*Vector: N-ada ordenada de números reales: $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$

B) Suma de Vectores. Multiplicación de un Vector por un Escalar.:

$$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n) + (b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3,\ldots, a_n+b_n)$$

$$r(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (ra_1, ra_2,\ldots, ra_n)$$

C) Norma de un Vector:

DEFINICION: Una Norma es una función del espacio vectorial de N dimensiones (V_n) cuyo dominio es V_n y cuyo rango son los reales positivos $\cup \{0\}$ y que cumple:

1. $|\vec{a}| \geq 0 \quad \forall\ a \in V_n$
2. $|r\vec{a}| = |r|\,|a|.\ r \in \mathbb{R},\ \vec{a} \in V_n.$
3. $|a+b| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots\ldots + a_n^2}$ esta regla de asociación es una NORMA EUCLIDIANA.

* Un grupo es un conj. g no vacío, con una operac. binaria tal que cúmpla los postulados de cerradura, asociatividad, idéntico e inverso. Si además a operac. b = b operac. a, o sea conmuta, el grupo es abeliano.

D. Vectores unitarios: Un vector unitario es aquél cuya norma es igual a la — unidad.

TEOREMAS: 1. $\vec{a}/|\vec{a}|$ es unitario.

2. $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$ son unitarios.

3. $(a_1,a_2,a_3) = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

E. Dependencia e independencia lineal:

Sea $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ se dice que $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n a_n$ es una combinación - lineal. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \rightarrow n$.

Sea una combinación lineal que cumpla $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$ entónces $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ se le llama un conjunto de vectores linealmente indepen—dientes.

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ forman BASE si:

1. Son linealmente independientes.
2. Generan el espacio vectorial de dimensión N.

   i.e. cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$

TEOREMA: i , j , k ,forman base.

Nota: si la dimensión es igual al número de vectores, fórman base.

F. Paralelismo y Ortogonalidad:

$$\vec{a} // \vec{b} \longleftrightarrow \vec{a} = r\,\vec{b} \quad \text{o} \quad \vec{b} = r\,\vec{a}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \longleftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$$

G. Producto Escalar: El producto Escalar, interior o punto entre dos vectores - del Espacio vectorial de dimensi´on N está dado por:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

TEOREMA DE SCHWARTZ- CAUCHY: $|\vec{a} \bullet \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$

De este Teorema y de la aplicación de la ley del Coseno, tenemos:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \ .$$

H. Componente y Proyección:

Comp. $\vec{b}/\vec{a} = \vec{a} \bullet \vec{b} / |\vec{a}|$ Proy. $\vec{b}/\vec{a}$ Comp $\vec{b}/\vec{a} \overset{\text{por}}{\times} \vec{a}/|\vec{a}|$

I. Producto Vectorial: El producto vectorial o cruz entre dos vectores está - dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Y también puede expresarse como: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ sen θ.

J. CONCEPTO DE TENSOR: Los Escalares queden ser considerados como tensores-- de órden cero y los Vectores, como tensores de primer órden.

Un TENSOR de segundo órden $\bar{\bar{\tau}}$ está especificado por nueve —— componentes:

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

$\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ son los elementos diagonales.

Si $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$, $\tau_{23} = \tau_{32}$ entónces se dice que $\bar{\bar{\tau}}$ es un Tensor simétrico.

No todos los arreglos de nueve componentes forman un tensor de segundo órden, la definición incluye el establecimiento de cómo los componentes del tensor —— se transforman bajo las transformaciones de coordenadas.

Sea δ un tendor unitario:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los componentes de un tensor unitario se simbolizan: δ_{ij} que es la llamada - delta de Kronecker.

Suma d e tensores: $\bar{\bar{\sigma}} + \bar{\bar{\tau}}$. La suma de dos tensores es un tensor cuyas —— componentes son las sumas de los correspondientes componentes de los dos tensores.

Multiplicación de un tensor por un escalar: $s\,\bar{\bar{\tau}}$. Corresponde a la multiplicación de cada componente del tensor por un escalar.

Producto vectorial de un tensor con un vector: $[\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{v}]$. Nos produce un vector..

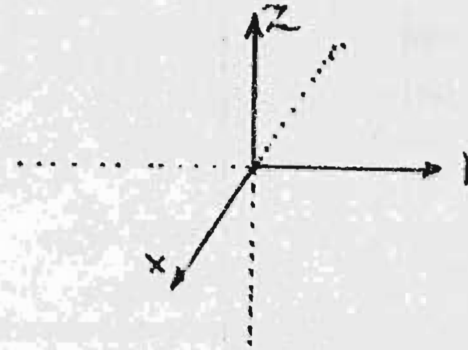
$\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{v} \neq \bar{v} \cdot \bar{\bar{\tau}}$. El vector $[\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{v}]$ difiere de $\bar{v}$ en longitud y dirección; —— lo que sucede es que el tensor $\bar{\bar{\tau}}$ "desvía" o "hace torsión" al vector $\bar{v}$ a un nuevo vector en una dirección diferente.

Producto escalar de dos tensores: $(\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\tau}})$. Nos produce un escalar.

Producto tensorial de dos tensores: $\{\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{\tau}}\}$. Nos produce un tensor.

K. APLICACIONES del Algebra Vectorial a la Geometría:

El ESPACIO EUCLIDIANO DE DIMENSION TRES (E^3) es el Espacio Vectorial V_3 en donde:



a) Los puntos de E^3 son los vectores de V_3

b) La Línea Recta: $L = \{\vec{P}_0 + t\vec{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c) El Plano: $P = \{\vec{P}_0 + u\vec{a} + v\vec{b} \mid u, v \in \mathbb{R}\}$.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

$$\vec{A}, \vec{B} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)} \qquad (121)$$

ANGULO ENTRE DOS LINEAS RECTAS:

$$\cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b} / |\vec{a}||\vec{b}| \qquad (122)$$

ANGULO ENTRE DOS PLANOS: Es el ángulo que forman sus normales.

$$\cos\theta = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 / |\vec{n}_1| |\vec{n}_2| \qquad (123)$$

Nota: $P = 2x - y + z = 12$ a forma vectorial: se búscan 3 puntos que cúmplan la ec., por ej: $P_0(2,4,6)$, P_1 y P_2

$\vec{a} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$ $\quad \vec{b} = \vec{P}_2 - \vec{P}_0$ y $\vec{N}$ (la normal) $N = \vec{a} \times \vec{b}$, en este caso: $(2,-1,1)$

9.- FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES. SUPERFICIES.

$Z = f(x,y)$ Para el estudio de estas funciones podemos apelar a un doble enfoque:

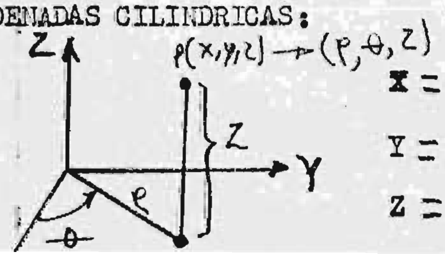
1.- Si en cada punto (x,y,z) de una región del espacio se le puede asociar un número $P(x,y,z)$ hemos definido un campo escalar.

Entónces $Z = f(x,y)$: $\{\text{Conj. de puntos}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

2.- Si en cada punto de una región del espacio se le puede asociar un Vector $\vec{V}(x,y,z)$ hemos definido un campo vectorial, entónces: $Z = f(x,y)$: $\vec{V} \longrightarrow \mathbb{R}$

La Gráfica de una Función $Z = f(x,y)$ es una SUPERFICIE.

COORDENADAS CILINDRICAS: $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

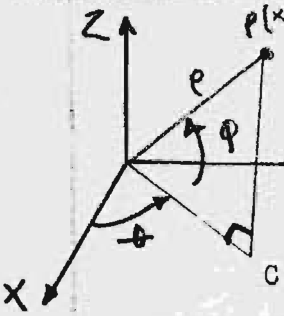


$X = \rho \cos\theta$ $\qquad \rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$Y = \rho \operatorname{sen}\theta$ $\qquad \theta =$ ang tan Y/X, $Z = Z$

$Z = Z$

COORDENADAS ESFERICAS:



$P(x,y,z) \rightarrow (\rho, \theta, \varphi)$

$X = \rho \cos\theta \,\text{sen}\, \varphi$ $\qquad \rho = \sqrt{X^2 - Y^2 + Z^2}$

$Y = \rho \,\text{sen}\, \theta \,\text{sen}\, \varphi$ $\qquad \theta = \text{ang tan } Y/X$

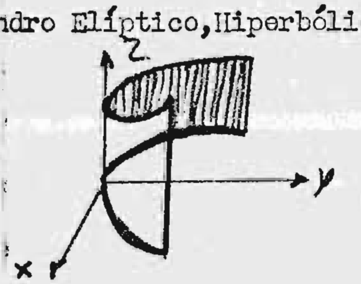
$Z = \rho \cos \varphi$ $\qquad \varphi = \text{ang cos } Z / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

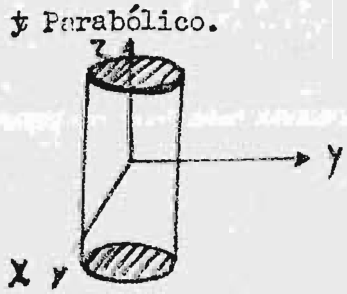
C I L I N D R O S:

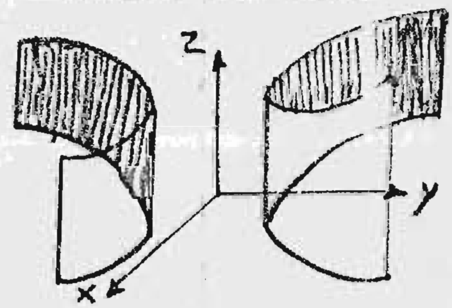
Las figuras tridimensionales que corresponden a las — Cónicas en el plano son las llamadas "superficies cuádricas". Son las gráficas de las ecuaciones de 2o. grado, en x,y,z. Por tanto cualquier sección plana de una superficie cuádrica, es una sección cónica o dos líneas paralelas.

Las cuádricas no degeneradas más simples son aquéllas en las que una de las coordenadas x,y o z no aparece en la ecuación. Estos son los cilindros --- cuya generatriz es paralela al eje cuya coordenada falta.

En el E^3 las ecuaciones $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$, $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$, $Y^2 = 4pX$ representan cilindros cuyas generatrices son paralelas al eje Z y se llaman Cilindro Elíptico, Hiperbólico y Parabólico.







Existen seis tipos esenciales de SUPERFICIES CUADRICAS:

1. ELIPSOIDE. $\qquad X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1$

Secciones: Si

$Z = 0 \longrightarrow$ Elipse en XY

$Y = 0 \longrightarrow$ Elipse en XZ

$X = 0 \longrightarrow$ Elipse en YZ

Si dos números son iguales, es un Elipsoide de revolución.

La Esfera es el caso particular en el que $a^2 = b^2 = c^2$

2. HIPERBOLOIDE ELIPTICO DE UNA HOJA. $\qquad X^2/a^2 + Y^2/b^2 - Z^2/c^2 = 1$

Secciones: Si

$Z = 0 \longrightarrow$ Elipse en XY.

Si $Y = 0$ ⟶ Hipérbola en XZ

$X = 0$ ⟶ Hipérbola en YZ

3. HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS. $X^2/a^2 - Y^2/b^2 - Z^2/c^2 = 1$

Secciones: Si

$Z = 0$ ⟶ Hipérbola en XY

$Y = 0$ ⟶ Hipérbola en XZ

$X = 0$ ⟶ no repr, nada.

Si $Z^2 > c^2$ el plano corta la superficie según una Elipse.

4. CONO ELIPTICO. $X^2/a^2 + Y^2/b^2 - Z^2/c^2 = 0$

Cada plano horizontal $Z \neq 0$ corta al Cono según una Elipse.

5. PARABOLOIDE ELIPTICO. $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = C\,Z$

Secciones: si

$X = 0$ ⟶ Parábola en YZ
$Y = 0$ ⟶ Parábola en XZ
$Z = 0$ ⟶ El punto (0,0,0)

$Z \geq C$ ⟶ Elipse en XY.

6. PARABOLOIDE HIPERBOLICO. $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = C\,Z$

Secciones: si

$X = 0$ ⟶ Parábola en YZ

$Y = 0$ ⟶ Parábola en XZ

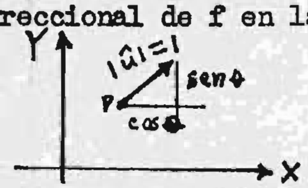
$Z = 0$ ⟶ 2 Rectas(asíntotas)

$Z = C$ ⟶ Hipérbola en XY.

10.- DERIVACION E INTEGRACION DE FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES.

La Derivada Direccional:

Sea $Z = f(x,y)$, si $\hat{u} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$ entonces la Derivada Direccional de f en la dirección de $\hat{u}$, $D_{\hat{u}}f$ está dada por:



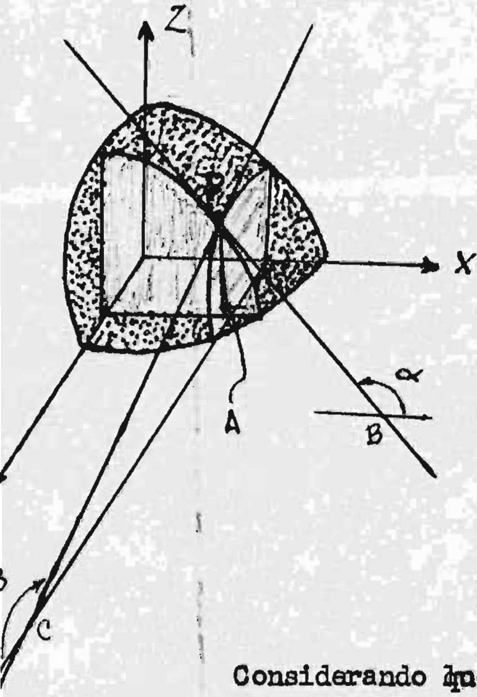
$$D_{\hat{u}}\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cos\theta,\, y+h\operatorname{sen}\theta) - f(x,y)}{h}$$

Si el límite existe, la derivada direccional dá la razón de cambio de los valores de la función f(x,y) con respecto a la distancia en el plano XY, medida en la dirección del vector $\hat{u}$.

La Derivada Parcial:

Cuando se toma el vector $\hat{\imath}$ como el vector director, la Derivada Direccional, recibe el nombre de DERIVADA PARCIAL, con respecto a x.

O sea: $Z = f(x,y)$.



$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,\, y) - f(x,y)}{h}$$

se llama Derivada Parcial de f(x,y) con respecto a x.

Notaciones: $D_x F(x,y)$, $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$

$Z = f(x,y)$ representa la superficie: 1/8 de Elipsoide.

Geométricamente la Derivada Parcial nos representa la pendiente de la línea tangente, según el plano que se considere.

Considerando que a cada superficie existe un PLANO TANGENTE:

$$\text{PLANO TANGENTE: } \bar{T}_2 \times \bar{T}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & Z_y \\ 1 & 0 & Z_x \end{vmatrix} = \hat{\imath}(Z_x - 0) - \hat{\jmath}(0 - Z_y) + k(0 - 1)$$

$$= Z_x\,\hat{\imath} + Z_y\,\hat{\jmath} - \hat{k}$$

DIFERENCIAL TOTAL: $\partial Z/\partial t = (\partial Z/\partial x)(\partial x/\partial t) + (\partial Z/\partial y)(\partial y/\partial t)$

y por lo tanto: $dZ = \partial Z\; dx/\partial x + \partial Z\; dy/\partial y$.

MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES:

Si $Z^2_{xy} - Z_{xx} Z_{yy} > 0$ no hay Máximo ni Mínimo. Para que el punto sea —— Máximo o Mínimo: $\partial Z/\partial x = \partial Z/\partial y = 0$

F(a,b) es un valor máximo de F(x,y) si: $\partial^2 Z/\partial x^2 < 0$

y $(\partial^2 Z/\partial xy)^2 - (\partial^2 Z/\partial x^2)(\partial^2 Z/\partial y^2) < 0$

F(a,b) es un valor mínimo de F(x,y) si: $\partial^2 Z/\partial x^2 > 0$ y

$$(\partial^2 Z/\partial xy)^2 - (\partial^2 Z/\partial x^2)(\partial^2 Z/\partial y^2) < 0$$

LA DOBLE INTEGRAL:

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} Z(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1}^{x_2} Z(x,y)\,dx\right] dy$$

TEOREMA: Sea f una función de dos variables que es continua en una región cerrada R en el plano XY, y $f(x,y) \geqslant 0$ para todo (x,y) en R.

Si V(S) es la medida del volúmen del sólido S que tiene a la región R como base y una altura de medida f(x,y) en el punto (x,y) en R, entónces:

$$V(S) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Area de una Superficie Cualquiera:

$$A = \iint_R \sqrt{(\partial f(x,y)/\partial x)^2 + (\partial f(x,y)/\partial y)^2 + 1}\; dA$$

11.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

INTEGRAL GENERAL:

Se presentan una gran variedad de problemas, en los cuales se desea determinar un elemento variable a partir de su coeficiente de variación. En ejemplos como estos, se trata de determinar una función desconocida, mediante datos relacionados por una ecuación que contiene por lo menos una de las derivadas de la función desconocida.

Estas ecuaciones se llaman ECUACIONES DIFERENCIALES.

ORDEN de una Ecuación diferencial es el de la derivada de mayor órden que aparece en la ecuación.

INTEGRAR una Ecuación diferencial es hallar una ecuación finita que satisfaga de la manera más general a la Ecuación diferencial propuesta.

INTEGRAL GENERAL: Es de la forma: $Y = f\,(X, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$

Y es solución si tiene N constantes arbitrarias y el sistema:

$$\begin{cases} Y_o = f\,(X_o, C_1, \ldots, C_n) \\ Y'_o = f'(X_o, C_1, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_o^{(N-1)} = F^{(N-1)}\,(X_o, C_1, \ldots, C_n) \end{cases}$$

es compatible con las constantes.

Las Ecuaciones diferenciales de primer órden son de la forma: $f(X, Y, Y') = 0$ y la integral general es una expresión: $Y = \psi\,(X, C)$

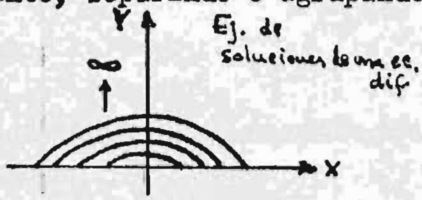
INTEGRALES PARTICULARES: Son las que se obtienen dándole valores particulares a la constante.

INTEGRALES SINGULARES: Son aquéllas que verifican a la Ecuación diferencial y no están comprendidas en la general: Se hállan; si: $f(X, Y, C) = 0$ es la integral general, eliminando C entre ella y la $f'_C\,(X, Y, C) = 0$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN:

A) ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES:

Sea $dY/dX = f(X)$ donde f es continua en uno o más intervalos del eje X; la continuidad de f garantiza que la ecuación tiene soluciones, y resolver la ecuación diferencial es encontrar una primitiva de $f(X)$, por lo tanto, separando o agrupando variables:



$$dY = f(X)\, dX$$ y ahora integrando :

$$\int dY = \int f(X)\,dX \quad \text{entónces:} \quad Y = \int f(X)\,dX + C.$$

B) ECUACIONES EXACTAS Y NO EXACTAS:

Sea: $M(X,Y)\,dX + N(X,Y)\,dY = 0$. Si se verifica que: $\partial M/\partial Y = \partial N/\partial X$ la ecuación es EXACTA y su integral general es $F(X,Y) = C$:

$$\int_{x_0}^{x} M(X,Y_0)\, dX + \int_{y_0}^{y} N(X,Y)\, dY = C$$

en donde (X_0,Y_0) es algún punto en la región.

Cuando $MdX + NdY$ no es exacta, se resuelve multiplicando los coeficientes de la ecuación por el factor integrante ν :

$$\nu = e^{\int f(Y)\,dY} \qquad \text{si} \qquad \frac{(\partial N/\partial X - \partial M/\partial Y)}{M} = f(Y)$$

O también:

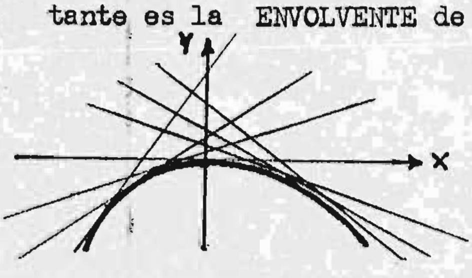
$$\nu = e^{\int f(X)\,dX} \qquad \text{si} \qquad \frac{(\partial M/\partial Y - \partial N/\partial X)}{N} = f(X)$$

en ámbos casos se multiplica por ν y se procede a verificar que $\partial(\nu M)/\partial Y = \partial(\nu N)/\partial X$

C) Sea: $Y = X\, dY/dX + f(dY/dX)$ esta es la ecuación de CLAIRAUT (m. 1765).

Solución general: $Y = CX + f(C)$

O sea, la solución puede obtenerse cambiando dY/dX por C. La solución resultante es la ENVOLVENTE de la familia de líneas $Y = CX + f(C)$



En general la envolvente de una familia de curvas planas $F(X,Y,C) = 0$, se encuentra eliminando C en las ecuaciones: $F(X,Y,C) = 0$ y $\partial F(X,Y,C)/\partial C = 0$.

La envolvente es tangente en cada punto a todos los miembros de la familia de curvas dada por la ecuación.

D) ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN: HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS.

HOMOGENEA: $a_1(X)\, dY/dX + a_0(X)\, Y = 0$ $\qquad P(X) = a_0(X)/\, a_1(X)$

NO HOMOGENEA: $a_1(X)\, dY/dX + a_0(X)Y = h(X)$ $\qquad P(X) = a_0(X)/\, a_1(X)$

$Q(X) = h(X)/\, a_1(X)$

SOLUCION GENERAL:

$$Y = e^{-\int P(X)\,dX}\left[\int Q(X)\, e^{\int P(X)\,dX}\, dX + C\right]$$

ECUACION DE BERNOULLI: $dY/dX + P(X)Y = Q(X)Y^n$

La ecuación se transforma en lineal, dividiéndola entre Y^n y haciendo el cambio de variable: $U = Y^{1-n}$

ECUACION DE RICCATI: $dY/dX + a_2(X)Y^2 + a_1(X)Y + a_0(X) = 0$

La ecuación se transforma en lineal realizando el cambio de variable: $Y = Y_1 + 1/Z$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y DE ORDEN SUPERIOR:

A) CASOS ESPECIALES: Sea: $d^2Y/dX^2 = f(X)$

Solución: $Y = X\int f(X)\,dX - \int X\, f(X)\,dX + C_1 X + C_2$

Sea: $d^2Y/dX^2 = f(Y)$ .Solución:

$$X = \int \frac{dY}{C_1 + 2\int f(Y)\,dY} + C_2$$

Sea: $d^2Y/dX^2 = f(dY/dX)$. Se resuelve, eliminando el parámetro $p = dY/dX$ de:

$X = \int dP/f(P) + C_1$. y $\quad Y = \int P\,dP/\, f(P) + C_2$.

Se presenta también el caso en que $d^2Y/\, dX^2 = f((dY/dX), (X))$

Solución: Eliminar la variable Y con la substitución $p = dY/dX$. La ec. de primer órden que resulta en p y X, puede resolverse.

B) ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES:

Sea: $d^2 Y/dX^2 + a_1 \; dY/dX + a_o Y = 0.$

Para resolverla, es necesario encontrar primero las raíces de la ecuación auxiliar: $M^2 + a_1 M + a_o = 0.$

Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (raíces reales) la solución general es: $Y = C_1 e^{\alpha_1 X} + C_2 e^{\alpha_2 X}$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$ (raíces reales) la solución general es: $Y = e^{\alpha X} (C_1 + C_2 X)$

Si α_1, α_2 son raíces complejas: $Y = e^{aX} (C_1 \cos bX + C_2 \operatorname{sen} bX)$

C) ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS:

Sea: $d^2Y/ dX^2 + a_1(X) \; dY/dX + a_o(X)Y = h(X).$

Para resolverla necesitamos considerar que:

Soluc. general = Soluc. particular + Soluc. de la ec. homogénea.

Método para encontrar una solución particular: Método de variación de parámetros o de LAGRANGE:

$$Y_H = C_1 Y_1(X) + C_2 Y_2(X)$$

$$Y_p = C_1(X) \; Y_1(X) + C_2(X) \; Y_2(X)$$

donde C_1 y C_2 son los parámetros.

Substituyendo Y_p en la ecuación original y resolviendo el sistema tenemos:

$$C_1' = - hY_2/ W(Y_1,Y_2) \qquad\qquad C_2' = hY_1/ W(Y_1,Y_2)$$

Integrando y dando valores iniciales, tenemos C_1 y C_2.

$W = W(Y_1(X), Y_2(X), \ldots\ldots, Y_n(X))$ es el determinante denominado Wronskiano.

Si el $W \neq 0$ las funciones son linealmente independientes; pero si $W = 0$ no nos garantiza que las funciones sean linealmente ~~in~~dependientes, al menos que sean soluciones de una ecuación diferencial.

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

Entónces, la Y_p buscada es:

$$Y_p = K(X,t) = Y_2(X)\left[\int_{x_o}^{x} \frac{Y_1(t)\; h(t) \; dt}{W(Y_1(t), Y_2(t))} + C_2\right] - Y_1(X)\left(\int_{x_o}^{x} \frac{Y_2(t)\; h(t)\; dt}{W(Y_1(t), Y_2(t))} + C_1\right)$$

que es la denominada FUNCION DE GREEN.

ECUACION DE EULER- CAUCHY: $X^n\, d^nY/dX^n + a_{n-1}X^{n-1}\, d^{n-1}Y/dX^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\ldots\ldots + a_1X\ dY/dX + a_oY = 0$$

donde $a_o, a_1, \ldots\ldots, a_n$ son constantes.

Esta ecuación puede transformarse en lineal, haciendo el cambio de variable:

$$U = \ln X$$

12.- FUNCIONES VECTORIALES CLASICAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

Ecuaciones de primer órden: $Z = f(X,Y)$

Si $f(X,Y) = X^2 + Y^2$, $\partial f/\partial X = 2X$, integrando con respecto a X:

$$f = X^2 + \phi(Y), \qquad \phi(Y) \text{ es una función arbitraria.}$$

que es la solución de la ecuación diferencial, o sea, conocemos el PLANO —— TANGENTE y al resolver la ecuación lo que hayamos son las SUPERFICIES.

Método de JACOBI: Sea una ecuación de la forma:

$$F_1\ \partial U/\partial X + F_2\ \partial U/\partial Y + F_3\ \partial U/\partial Z = F_4$$

$F = \phi(X,Y,Z,U)$. Para poder integrarla, se pone el sistema:

$$dX/F_1 = dY/F_2 = dZ/F_3 = dU/F_4$$ que es el de ecuaciones simultáneas del sistema correspondiente:

$$dY/dX = F_2/F_1 = f_1(X,Y,Z,U)$$

$$dZ/dX = F_3/F_1 = f_2(X,Y,Z,U)$$

$$dU/dX = F_4/F_1 = f_3(X,Y,Z,U)$$

luego se hállan Y,Z,U en función de X y sus constantes.

$$C_1 = \alpha(X,Y,Z,U), \quad C_2 = \beta(X,Y,Z,U), \quad C_3 = \gamma(X,Y,Z,U)$$

La integral general es: $\psi(\alpha,\beta,\gamma) = 0$ siendo ψ una función arbitraria.

Ecuaciones de segundo órden:

$u = f(x,y)$

Sea: $\partial^2 U/\partial X\,\partial Y = 0$ $\quad U = \int f_1(Y)\, dY + f_2(Y)$ ypor lo tanto:

$$U = f_3(Y) + f_2(Y) \text{ es una solución de la ecuación.}$$

OPERADOR DIFERENCIAL VECTORIAL NABLA*:

$$\nabla \equiv \partial/\partial X \ \hat{i} + \partial/\partial Y \ \hat{j} + \partial/\partial Z \ \hat{k}$$

En funciones $f: V \longrightarrow R$ el máximo de la derivada direccional es llamado el GRADIENTE de la función. El Gradiente es un vector normal a la superficie : $V(X,Y,Z) = C$. Si ϕ es una función continua y diferenciable:

$$\nabla \phi = \partial\phi/\partial X \ \hat{i} + \partial\phi/\partial Y \ \hat{j} + \partial\phi/\partial Z \ \hat{k}$$

El Gradiente de una función está en la dirección en la cual la función tiene su máxima razón de cambio.

En funciones $f: V \longrightarrow V$ la DIVERGENCIA de cualquier vector, se define como:

$$\nabla \circ \bar{V} = (\partial/\partial X \ \hat{i} + \partial/\partial Y \ \hat{j} + \partial/\partial Z \ \hat{k}) \circ \bar{V}$$

La Divergencia es un escalar.

Flujo de un campo vectorial: $\phi = \int_S \bar{V} \cdot \bar{U}_n \, dS$, donde $\bar{U}_n$ es un vector normal a la superficie S; suele escribirse:

$$\iint_S \bar{V} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{V} \cdot \bar{U}_n \, dS.$$

La integral a lo largo de una superficie cerrada S se representa por: $\oiint_S$

Partiendo del Teorema de GAUSS:

$$\int_V \nabla \cdot \bar{A} \, dV = \oiint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

y aplicando la forma integral del operador nabla:

$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint dS \circ}{\Delta V}$$ donde $\circ$ significa operación.

llegamos a:

$$\text{div. } \bar{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \bar{A} \circ \bar{n} \, dS}{\Delta V} = \nabla \cdot \bar{A}$$

Físicamente, representa el flujo del vector $\bar{A}$ a través de la superficie ΔS por unidad de volumen.

En funciones $f: V \longrightarrow V$ el ROTACIONAL se define como:

* NABLA: antiguo instrumento musical de esta forma ∇

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

El Rotacional es un vector.

Ahora, partiendo del Teorema del Rotacional de STOKES:

$$\oint_c \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot dS,$$ llegamos a:

$$(\text{rot}\ \bar{A}) \cdot \bar{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_c \bar{A} \cdot d\bar{r}}{\Delta S}$$

Por lo tanto, la componente del Rotacional según la normal se puede interpretar físicamente, como el límite de la circulación de $\bar{A}$ por unidad de superficie.

Usando la forma integral del operador nabla, llegamos a:

$$\text{rot}\ \bar{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \bar{n} \times \bar{A}\ dS}{\Delta V} = \nabla \times \bar{A}$$

El fenómeno de PROPAGACION, así como las vibraciones, están caracterizadas por ecuaciones de tipo HIPERBOLICO, las cuales son esencialmente diferentes en sus propiedades de aquélla otra clase de ecuaciones, las cuales describen EQUILIBRIO (ELIPTICAS), o difusión y transferencia de calor (PARABOLICAS)

TIPO PARABOLICO: Sea por ejemplo, la ecuación fundamental de transferencia de calor, que es la ecuación de FOURIER:

$$\partial T/\partial \theta = \nabla^2 T$$ donde T es temperatura, θ tiempo.

TIPO ELIPTICO: sea por ejemplo la ecuación de LAPLACE:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

TIPO HIPERBOLICO: La ecuación de los fenómenos ondulatorios:

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 = c^2 \ (\nabla^2 \phi)$$ donde t es el tiempo.

INTRODUCCION A LOS CAPITULOS DE TERMODINAMICA Y FLUFEROLOGIA.

En el tiempo de la Revolución francesa,debido al bloqueo inglés, quedó suspendida toda importación a través de los mares, y por tanto Francia no podía adquirir materias primas del exterior,entre ellas,cenizas de plantas barrilleras,para la fabricación de carbonato de calcio(sosa),entónces el Comité de Salud Pública propuso un premio para quien hallara un método de obtención de sosa,a partir de la sal común; este fue obtenido por NICOLAS LEBLANC en el año 1794.

Cuando el bloqueo terminó, se volvió sin embargo,a preparar la sosa como ántes.Leblanc murió en 1806,en un hospital para pobres de París y su método fue utilizado en 1814 por la industria privada en Inglaterra.

La obtención industrial de sosa en el siglo pasado constituye el capítulo más importante del desarrollo de la gran industria química;esto radica en el hecho de que para la preparación de sosa son necesarias grandes cantidades de ácido sulfúrico,lo que condujo al desarrollo de esta industria.La existencia de ácido sulfúrico barato hizo a su vez posible el desarrollo de la industria orgánica de los colorantes y otras ramas industriales. + (51)

Esta historia tiene un significado especial,en lo que se refiere al nacimiento de la Ingeniería Química.Surgió entónces la necesidad de entrenar profesionalmente a individuos que dirigieran los procesos químicos y diseñaran el equipo necesario para llevarlos a cabo.El siglo XIX fue de transición y a principios del siglo XX se definió el concepto de operación unitaria y se inició la Ingeniería Química como profesión.

He planteado en mis capítulos anteriores,la necesidad de comprender lo que significa la Técnica y también he expuesto los principios básicos del lenguaje científico,las Matemáticas.Ahora trataré los principios fundamentales desde el punto de vista académico,de las ciencias físicas que nos permiten llevar a efecto el manejo de la energía: Termodinámica y Fluferología.

La exposición de estos principios presupone la comprensión de las ideas fundamentales de un curso de física general. La ciencia física se ha re-estructurado totalmente en los últimos años, como expresan M. Alonso y E. Finn en las páginas iniciales de su tratado de física general: * ( )

"...La palabra física viene del término griego que significa naturaleza, y por ello la física debía ser una ciencia dedicada al estudio de todos los fenómenos naturales. En verdad, hasta principios del siglo XIX se entendía la física en este amplio sentido, y se denominó ' filosofía natural'. Sin embargo, durante el siglo XIX y hasta muy recientemente, la física estuvo restringida al estudio de un grupo más limitado de fenómenos, designados por el nombre de fenómenos físicos y definidos sin precisión como procesos en los cuales la naturaleza de las substancias participantes no cambia. Esta definición poco precisa de la física ha sido gradualmente descartada, retornándose al concepto más amplio y más fundamental de antes.
Por ello, podemos decir que la FISICA ES UNA CIENCIA CUYO OBJETIVO ES ESTUDIAR LOS COMPONENTES DE LA MATERIA Y SUS INTERACCIONES MUTUAS. En función de estas interacciones el científico explica las propiedades de la materia en conjunto, así como los otros fenómenos que observamos en la naturaleza.".

La Termodinámica y la Fluferología se presentarán en esta tesis tomando en consideración sus cimientos en cuanto ramas de la ciencia física y las aplicaciones ingenieriles que de ellas emanan y que por ende, las convierte en las "ciencias clave" desde el punto de vista académico, del ejercico profesional de la Ingeniería Química.

Mediante la aplicación de sus principios, podemos dirigir los procesos químicos y diseñar el equipo que nos permite encauzar la energía al beneficio humano, en todas sus manifestaciones.

A continuación presento una breve nota que indica el desarrollo histórico de la Termodinámica y la Fluferología.

En primer término es necesario mencionar los trabajos del físico y matemá - tico suizo DANIEL BERNOULLI, el teorema que lleva su nombre es fundamental - en la teoría del flujo de fluidos, fue enunciado en su tratado sobre —— hidrodinámica, el primero sobre la materia, en el año 1738. Este teorema —— constituye el primer balance de energía que se planteó, el cual lleva implícitamente relacionado el principio de la conservación de la energía.

En el campo de la Termodinámica, las primeras observaciones, en lo que se refiere a la relación que existe entre el calor y otras formas de - energía fueron llevadas a cabo por el Conde RUMFORD en el año 1798.

Los experimentos cuantitativos sobre el equivalente mecánico del — calor, efectuados por JOULE entre los años 1840 - 50 representaron la base - científica para el reconocimiento del principio de la Conservación de la - Energía, o Primera Ley de la Termodinámica.

El ingeniero francés CARNOT, emprendió la tarea de investigar acerca de la cantidad máxima de trabajo que puede obtenerse a partir de una — cantidad dada de calor en una máquina térmica y expuso sus conclusiones en: "Reflexiones sobre la potencia motriz del calor y sobre las máquinas —— apropiadas para desarrollar esa potencia", publicado en 1824. Este trabajo - tuvo importantísimas consecuencias, pues fue la base para el reconocimiento de la Segunda Ley de la Termodinámica postulada por CLAUSIUS en Alemania, - el cual introdujo también la función ENTROPIA, y postulada por Lord KELVIN EN Escocia. La Tercera Ley de la Termodinámica fue postulada por NERNST.

En Termodinámica del Equilibrio de fases fueron muy valiosos los - trabajos de GIBBS, HELMHOLTZ y CLAPEYRON. Muchos otros investigadores han - hecho importantes aplicaciones de los principios termodinámicos, entre los - cuales se encuentra MOLLIER, con la construcción de sus utilísimas cartas a principios de este siglo.

El campo de la Termodinámica "Cuántica" fue iniciado por PLANCK en el año 1900 y ampliado fundamentalmente por MAXWELL y BOLTZMANN.

En el campo de la Fluferología, en lo que se refiere a la Transferencia de Momentum, están los trabajos fundamentales de POISEUILLE y REYNOLDS, y más recientemente los de PRANDTL.

En Transferencia de Calor es necesario mencionar los trabajos de FOURIER, que forman la base de todo el desarrollo posterior, y algunos de GRAETZ, y más recientemente los de GRASHOFF y NUSSELT.

En Transferencia de Masa se tienen, principalmente los trabajos de FICK, SCHMIDT y SHERWOOD, y algunas investigaciones de HOBLER, así como los métodos desarrollados por MC. CABE y PONCHON, que dieron un fuerte impulso al diseño de torres de destilación.

Por lo que respecta a la "integración" de estas materias es preciso mencionar a A.D. LITTLE que definió el concepto de operación unitaria (1915), muy desarrollado por MC. CABE y colaboradores; posteriormente el concepto de fenómeno de transporte fue ampliamente desarrollado por BYRON-BIRD y colaboradores.

IV. T E R M O D I N A M I C A C L A S I C A Y D E L E Q U I L I - B R I O D E F A S E S .

C A P I T U L O S :

****

I. CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

Un SISTEMA físico es una porción del Universo, que se ha aislado para estudiarla, y está caracterizado por un determinado número de variables, v.gr: Presión (P), Temperatura (T), Masa (M), Volúmen (V), Densidad (M/V), y el comportamiento del sistema se rige por las leyes de la conservación de la materia y la energía(primera ley de la Termodinámica), las leyes del equilibrio, derivadas de la segunda Ley de la Termodinámica y las leyes derivadas de los fenómenos de transporte.

VARIABLES EXTENSIVAS: Dependen de la cantidad de materia presente del sistema, v.gr: Volúmen (V), Número de moles (n), Entropia (S).

VARIABLES INTENSIVAS: No dependen de la cantidad de materia presente del sistema, v.gr: Presión (P), Temperatura (T), Potencial químico (μ).

CONCEPTO DE FASE: Una fase es una parte homogénea del sistema, diferenciada físicamente y mecánicamente separable.

Se puede considerar un sistema como homogéneo, cuando es uniforme en todo su volúmen, de forma que sus propiedades sean las mismas en todas partes o al menos varíen de forma continua de un punto a otro.

Una SOLUCION es una fase única de composición variable.

Una DISPERSION COLOIDAL es una suspensión de partículas finamente divididas, en un medio contimuo.L

Las partículas son llamadas la fase dispersa o el coloide y al medio se le llama medio dispersor.

Tipos de dispersión coloidal:

Medio dispersor	Fase dispersa		
	Gas	Líquido	Sólido
Gas	-	niebla	humo
Líquido	espuma	emulsión	suspensión

* En este punto es útil recordar las leyes de los gases ideales y de las soluciones ideales.

EL CONCEPTO DE LA ENERGIA: En física general, el trabajo se define como el producto del desplazamiento por la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.El trabajo efectuado sobre una partícula es igual al cambio producido en su energía cinética.

Así también el cambio de la energía propia de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas.

O sea, se asocia ,al concepto de energía de un sistema, el trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas.

Sin embargo,para profundizar un poco más en el concepto, recurriré a las palabras de Teilhard de Chardin * (8):

"........La Energía,es decir,la tercera de las caras de la Materia.(las otras dos son según T d.Ch: Pluralidad y Unidad).

Con esta palabra,que traduce el sentido psicológico del esfuerzo,la física ha introducido la expresión precisa de una capacidad de acción,o más exactamente aún,de interacción.La Energía es la medida de lo que pasa de un átomo a otro en el curso de sus transformaciones.Así pues,poder de interrelación,aunque también,dado que el átomo parece enriquecerse o agotarse durante este intercambio, valor de constitución.". Energía (gr.- ἐν, en poder de ἔργον, trabajo)

Diversas formas de Energía:

Energía Cinética: Energía que posee un cuerpo en virtud de su movimiento.

Energía potencial: Energía que posee un cuerpo en virtud de su posición en un campo de fuerzas.

Energía térmica: Energía que posee un cuerpo en virtud de su temperatura.

Energía que posee una substancia en virtud de su constitución: Un compuesto tiene energía " química", el núcleo atómico tiene energía "nuclear".

Energía que posee un cuerpo en virtud de su masa:la equivalencia relativista masa-energía.

Un generador "produce" energía eléctrica.

En motor "produce" energía mecánica.

En fin, pueden mencionarse muchos ejemplos: energía magnética, energía de superficie, energía geotérmica, energía solar.

EL OBJETO DE LA TERMODINAMICA ES EL ESTUDIO DEL FLUJO DE ENERGIA EN UN SISTEMA.

Las leyes de la Termodinámica rigen la transformación de una clase de energía en otra.

En Termodinámica el TRABAJO se define como una cantidad que fluye a través de la frontera de un sistema durante un cambio en su estado y es completamente convertible en la elevación de un peso en los alrededores.*(1)

El CALOR se define como una cantidad que fluye a través de la frontera de un sistema durante un cambio en estado en virtud de una diferencia de temperaturas entre el sistema y sus alrededores, y fluye desde un punto de más alta, a un punto de más baja temperatura.

CALOR SENSIBLE: Calor que se transfiere de un cuerpo a otro, sin cambio de fase.

CALOR LATENTE: Calor que se transfiere en los cambios de fase(no cambia la temperatura del sistema).

Cuando el estado de un sistema sufre una continua serie de cambios, se dice que el sistema ha realizado un PROCESO.

Nomenclatura de los Procesos en función de la forma de energía transferida:

FORMA:
- CALOR ⟶ Calentamiento, Enfriamiento.
- TRABAJO ⟶ Compresión, Expansión.

Para que un Proceso se efectúe es necesario tener en consideración, lo que puede denominarse ECUACION FUNDAMENTAL DE LOS PROCESOS QUE OCURREN EN LA NATURALEZA: *

$$\text{Proceso} \propto \frac{\text{Potencial directriz}}{\text{Resistencia}} \qquad (1)$$

* Como le denomina el Ing. Roberto Enríquez, Asesor de esta Tesis.

Entónces para que un Proceso se lleve a cabo es necesario:

1.- Contar con un Potencial directriz: Gradiente de Presiones o de Temperaturas entre el sistema y los alrededores.

2.- Que no ex'istan resistencias al paso de energía:

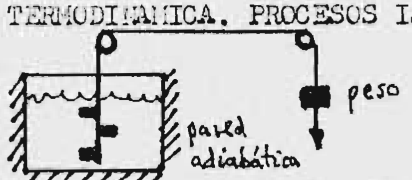
En forma de calor: pared adiabática.

trabajo: pared rígida e inmóvil.

Pared que permite la transferencia de energía en forma de calor: Diatérmica. En forma de trabajo: rígida, pero móvil o flexible.

II.- PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA. PROCESOS ISOTERMICOS.

Sea:



este es un dibujo del dispositivo que llevó a Joule a definir el equivalente mecánico del calor.

EQUIVALENTE MECANICO DEL CALOR: La cantidad de energía mecánica que debe consumirse para producir una unidad de energía térmica.

1 cal $=$ 4.18 J   donde cal: calorías.

1 J $=$ 0.24 cal.   J: Joules.

1 BTU $=$ 778 lb-pie.

La Energía interna es la suma de las energías traslacionales, vibracionales, rotacionales, energía debida al movimiento de los electrones y energía por campos.

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA ESTABLECE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA:

$$(2) \qquad dE = đQ - đW$$

donde $đ$ simboliza una diferencial inexacta. De esta ecuación, integrando, tenemos:

$$\Delta E = Q - W \qquad (3)$$

O sea, el incremento de energía interna del sistema es igual al calor menos el trabajo.

Para un Proceso específico el ΔE depende sólo de los estados inicial y final. La energía es una propiedad extensiva del sistema.

Si un sistema está sujeto a una transformación cíclica, el trabajo producido en los alrededores es igual al calor apartado de los alrededores:

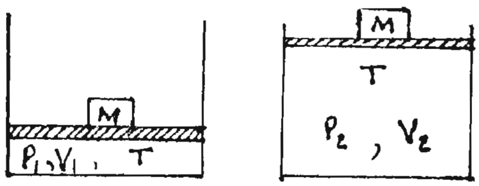
$$\oint đW = \oint đQ$$ y por lo tanto:

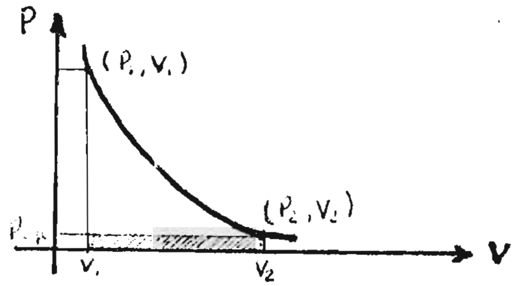
$$\oint dE = 0 \qquad (4)$$

PROCESOS ISOTERMICOS:

Son los que se efectúan a Temperatura constante.

Sea: TRABAJO DE EXPANSION Y DE COMPRESION:





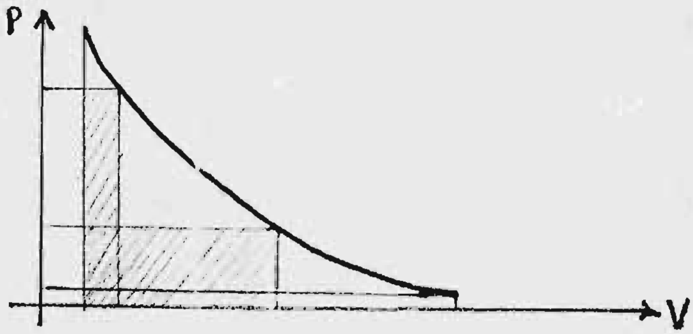
A Temperatura constante: $W = P_{op}\Delta V$ donde P_{op} es la presión de oposición y V es el volúmen

El Trabajo está representado por el área ~~sombreada~~ achurada en el diagrama P vs V. El Trabajo es función de la trayectoria.

En EXPANSION: ΔV es positivo, W es negativo.

En COMPRESION: ΔV es negativo, W es negativo.

Sin embargo la ecuación $W = P_{op}\Delta V$ es válida sólo si P_{op} es constante a través del proceso.



$$W = W \text{ 1er. período} + W \text{ 2o. período.}$$

En una expansión con múltiples etapas:

$$dW = P_{op}\ dV \qquad (5)$$

Ahora, integrando entre límites tenemos:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P_{op}\ dV \qquad (6)$$

Sea: $E = f(T)$, $\quad \Delta E = 0 \quad$ por lo tanto:

$$Q = W = \int_{V_1}^{V_2} P_{op}\ dV \qquad (7)$$

De la ley general de los gases ideales: $PV = nRT$ donde n es el número de moles y R es la constante general de los gases dada en las siguientes unidades:

8.317×10^7	erg/ g °K	62.361	mmHg- l /g °K
1.9872	cal / g °K	0.084	Kg/cm^2-l / g °K
8.3144	joule /g °K	998.90	mmHg- pie^3 / lb ° K
0.0820	atm- l /g °K	1.314	atm-pie^3 / lb °K

Tenemos ahora, utilizando la presión del gas: El Trabajo máximo o mínimo:

$$W_m = \int_{V_1}^{V_2} nRT/V \quad dV = nRT \ \ln\ v_2/v_1 \qquad (8)$$

III.- PROCESOS ISOCORICOS E ISOBARICOS. FUNCION ENTALPIA .

PROCESOS ISOCORICOS: son los que se llevan a cabo a volúmen constante

$dV = 0$ por lo tanto $W = 0$ y entónces:

$$dE = dQ_V \qquad (9)$$

CAPACIDAD CALORIFICA A VOLUMEN CONSTANTE:

$$C_V \equiv dQ_V / dT = (\partial E / \partial T)_V \qquad (10)$$

$dE = C_V\ dT$ y por lo tanto:

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} C_V\ dT \qquad (11)$$

y mult. por núm, de moles:

$$\Delta E = Q_v = m\, C_v\, \Delta T \qquad (12)$$

PROCESOS ISOBARICOS: son los que se efectúan a Presión constante.

$$\Delta E = Q_p - P\, \Delta V \qquad (13)$$

ENTALPIA: Es una propiedad extensiva, y se define como:

$$H \equiv E + P\, V \qquad (14)$$

La entalpía es función punto, o sea, que no depende de la trayectoria.

$$d\,H = d\,E + P\,d\,V + V\,d\,P$$

$$\int_{H_1}^{H_2} d\,H = \int_{E_1}^{E_2} d\,E + \int_{V_1}^{V_2} P\,d\,V + \int_{P_1}^{P_2} V\ d\,P$$

$$\Delta H = Q + \int_{P_1}^{P_2} V\ d\,P \qquad (15)$$

Si P es constante, $dP = 0$ y entónces:

$$\Delta H = Q_p \qquad (16)$$

Para calcular el ΔH en un Proceso con cambio de fase se debe conocer el calor latente λ:

$$Q_p = \Delta H = m \cdot \lambda \ . \qquad (17)$$

Capacidad Calorífica a P constante:

$$C_p \equiv d\,Q_p / d\,T = (\partial H / \partial T)_p \qquad (18)$$

$$\Delta H = Q_p = \int_{T_1}^{T_2} C_p\ dT = m\ C_p\, \Delta T \qquad (19)$$

(por No.moles)

Cuando la expresión para C_p es de la forma: $C_p = a + b\,T + c\,T^2$

$$\Delta H = n \int_{T_1}^{T_2} (a + bT + cT^2) \; dT \qquad (20)$$

Para producir un incremento en la temperatura de 1 grado, es necesario —— apartar más calor en el proceso isobárico que en el isocórico:

$$\gamma \equiv \overline{C}_p / C_v \qquad (21)$$

$$\overline{C}_p - \overline{C}_v = R \qquad (22)$$

(molares)

La Capacidad calorífica se expresa en unidades de cal/g °C , o BTU/ lb. °F.
El Calor latente se expresa en unidades de cal/g, o BTU/lb.
La Entalpía se expresa en unidades de cal/g, o BTU/ lb.

IV.- PROCESOS ADIABATICOS.

Un Proceso Adiabático es aquél en el que no hay absorción ni desprendimiento de calor por parte del sistema.

Como $Q = 0$ tenemos:

$$dE = - đW \qquad (23)$$

Trayectoria de un Proceso Adiabático:

$$dE = - đW$$

$$n\,C_v\,dT = - P\,dV$$

De $PV = nRT$:

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT$$

$$dT = P\,dV + V\,dP \;/\; nR$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación ( ), tenemos:

$$n\,C_v / nR \;(PdV + VdP) = - PdV$$

Ahora, partiendo por un lado de :

$$P\,dV + V\,dP = - R/C_v \quad P\,dV$$

y de:

$$R/C_v = C_p - C_v \,/\, C_v = \gamma - 1$$

tenemos:

$$P\,dV + V\,dP = - P\,(\gamma - 1)\,dV$$

$$d\,P/P = - \gamma\,dV \qquad \text{y por lo tanto:}$$

$$- \gamma \int dV/V = \int dP/P$$

$$\ln P = - \gamma \ln V + c', \qquad \text{sea} \quad c = e^{c'} \quad \text{por tanto:}$$

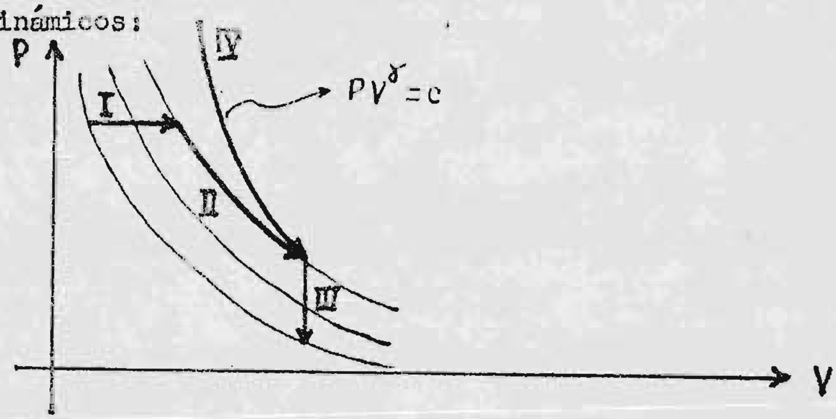
$$c' = \ln c, \qquad \ln P = \ln c/\,V^{\gamma} \qquad \text{y por lo tanto;}$$

$$P\,V^{\gamma} = c \qquad (24)$$

Y de aquí, diferenciando e integrando, tenemos , que el trabajo para un —— Proceso Adiabático es:

$$W = \frac{n\,R\,(\,T_2 - T_1\,)}{1 - \gamma} \qquad (25)$$

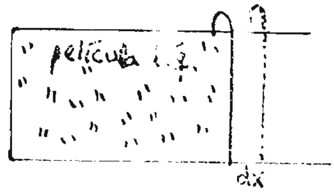
Entónces en resúmen, tenemos, desde el punto de vista cartesiano, para los —— Procesos Termodinámicos:



I. Isobárico, II. Isotérmico, III, Isocórico, IV. Adiabático.

NOTA: TENSION SUPERFICIAL:

Sea:



Si el área de la película la incrementamos dA, la energía de la película incrementa por $\gamma\, dA$ donde γ es la energía de superficie por cm^2.

El incremento de energía implica que al movimiento del alambre se opone una fuerza $f\, dx$. De aquí:

La fuerza $f\, dx = \gamma\, dA$ de donde:

$$\gamma = f/ 2L \qquad (26)$$ es la tensión superficial.

V.- EL CICLO DE CARNOT. EFICIENCIA DE LAS MAQUINAS TERMICAS.

Reservorio * de calor es cualquier masa que puede transferir o recibir energía en forma de calor, en relación a otros sistemas.

Una MAQUINA TERMICA opera entre dos reservorios, de los cuales toma el calor, y produce trabajo en los alrededores.

El PRINCIPIO DE CARNOT establece que la eficiencia máxima posible de una máquina térmica, que opera entre dos niveles de temperatura, es función únicamente de estas dos temperaturas y no depende del mecanismo o del fluido que se emplee.

El Principio de Carnot se establece matemáticamente como:

$$\eta = W / Q_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \qquad (27)$$

Q_1 es la cantidad de calor tomada por la máquina térmica (reversible) del reservorio de calor a temperatura constante a t_1.

Q_2 es el calor transmitido al reservorio que tiene la temperatura t_2

Como: $$(Q_1 - Q_2) / Q_1 = 1 - (Q_2/Q_1)$$ podemos escribir:

* Reservorio: se trata de un neologismo, necesario aquí para expresar este concepto, puesto que no se trata de un receptáculo o sea una" cavidad para recibir" ni mucho menos de un recipiente, sino de " algo", que efectivamente " reserva".

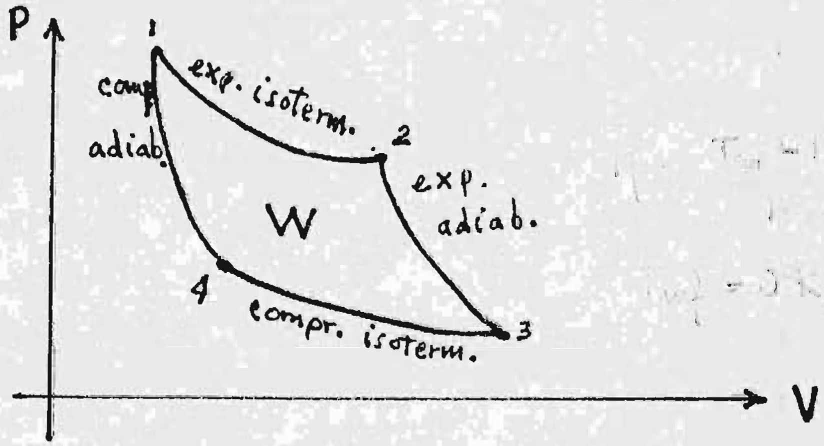
$$Q_1/Q_2 = f(t_1, t_2) \qquad (28)$$

Antes de continuar, es necesario dar algunos ejemplos prácticos de Máquinas Térmicas: Un Compresor, en donde los reservorios de calor son las masas de fluido que maneja, y existe después de la compresión un trabajo $P\Delta V$. Un Cambiador de Calor, en donde el reservorio de donde toma el calor es precisamente el fluido caliente que entra al cambiador y el reservorio al cual es transmitido el calor es el fluido frío; aquí no existe un trabajo $P\Delta V$, pero es indudable que se desarrolla un trabajo también de naturaleza termodinámica, si recordamos que el trabajo se define como una cantidad que fluye a través de la frontera de un sistema durante un cambio en estado y es completamente convertible en la elevación de un peso en los alrededores.

Un Evaporador, en donde los reservorios de calor son las masas de fluido que maneja y existe después de la evaporación, un trabajo $P\Delta V$.

El Ciclo más simple de una máquina térmica es aquél en el que todo el calor es tomado de un reservorio a temperatura constante T_1 y es transmitido a un reservorio mantenido a temperatura constante más baja T_2.

EL CICLO DE CARNOT consta de cuatro etapas, y el trabajo desarrollado por una máquina térmica es el área limitada por las curvas:



Sea un cilindro provisto de un pistón sin peso ni fricción (condiciones que hacen el caso ideal) que contiene una determinada cantidad de fluido.

Inicialmente tiene una presión, volúmen y temperatura, Lo dejamos expandir isotérmica y reversiblemente,manteniendo constante la temperatura,hasta un determinado volúmen y presión.El fluido absorbe cierta cantidad de calor,que incrementa su energía interna y también realiza un trabajo.Ahora, provoquemos una expansión adiabática y reversible; entónces el calor es igual a cero y el trabajo realizado debe ser a expensas del cambio de energía y por lo tanto, la temperatura desciende.

En la tercera etapa,el fluido se comprime isotérmica y reversiblemente durante la compresión se realiza un trabajo sobre el sistema y se desprende cierta cantidad de calor a los alrededores.Finalmente en la cuarta etapa el fluido se comprime adiabática y reversiblemente.

Considerando N moles de gas ideal, tenemos:

ETAPA 1.- Expansión isotérmica reversible:

$$\Delta E_1 = 0 \qquad W_1 = Q_1 = nRT \ln V_2/V_1$$

ETAPA 2.- Expansión adiabática reversible:

$$Q_2 = 0 \qquad \Delta E_2 = - W_2 = -n \int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT$$

ETAPA 3.- Compresión isotérmica reversible:

$$\Delta E_3 = 0 \qquad W_3 = - Q_3 = nRT' \ln V_2'/V_1'$$

ETAPA 4.- Compresión adiabática reversible:

$$Q_4 = 0 \qquad \Delta E_4 = - W_4 = - n \int_{T_1'}^{T_2'} C_v \, dT$$

Para un ciclo completo $\Delta E = 0$ de aquí que el trabajo máximo realizado:

$$W = Q_1 - Q_2$$

Además: $$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \qquad (29)$$

$$W = nRT \ln V_2/V_1 + n \int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT + nRT' \ln V_2'/V_1' + n \int_{T_1'}^{T_2'} C_v \, dT$$

$$= nRT \ln V_2/V_1 + nRT' \ln V_2'/V_1'$$

Y por lo tanto podemos expresar:

$$W = Q_1 - Q_2 = nRT \ln V_2/V_1 + nRT' \ln V_2'/V_1' \qquad (30)$$

VI.- FUNCION ENTROPIA.SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA.

El ingeniero,está principalmente interesado en la transformación de calor en trabajo utilizable, y puede ser conveniente por esta razón,ver primero la ENTROPIA como una medida de la porción de calor transferida que no es aprovechable, o sea que no se convierte en trabajo,en un determinado ciclo.

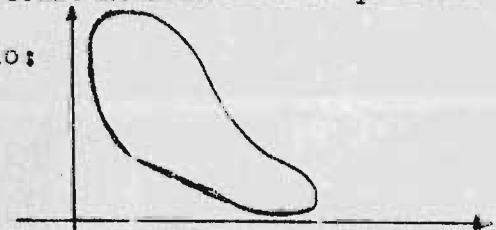
Del Principio de Carnot y de la definición de Temperatura absoluta de Kelvin: $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ (31) y $Q_1/T_1 - Q_2/T_2 = 0$

Observando que el calor tomado de la fuente,es,Q_1 es positivo y el calor transmitido Q_2 es negativo:

$$\sum Q/T = 0 \qquad (32)$$

Estas relaciones son solo para ciclos de Carnot muy simples,en los cuales todo el calor es tomado dentro de una máquina a una determinada temperatura y todo el calor es transmitido a otro reservorio,a una temperatura más baja.- Ambas temperaturas constantes durante el proceso.

Sea el Ciclo:



Ahora,este ciclo podemos romperlo en cuatro pequeños ciclos de Carnot:

*

El área de los cuatro ciclos simples será una medida aproximada del área del ciclo original.

Para todos los ciclos: $\sum Q/T = 0$

Y de aquí,tomando en consideración,incrementos diferenciales de calor:

$$\oint dQ/T = 0$$

*Estos diagramas se tomaron del libro de TERMODINAMICA de B.F. DODGE (34).

De aquí partió Clausius para definir la ENTROPIA, por la ecuación diferencial:

$$dS = dQ_{rev} / T \qquad (33)$$

Para un proceso finito, tenemos integrando la ecuación:

$$\Delta S = \int_1^2 dQ_{rev} / T \qquad (34)$$

Entónces la ENTROPIA (del gr./'Εν, en poder de, o lo que; Τρόπος, giro, o cambio. — o sea: "lo que cambia") es una medida del incremento del calor no aprovechable que se produce en un ciclo.

En forma pintoresca se ha definido como " el fantasma de una magnitud que ha dejado de existir".

En este punto es conveniente incursionar algo en el campo de la Termodinámica " Cuántica ", la cual, estudia los fenómenos termodinámicos desde un punto de vista molecular. La hipótesis de Planck, que dió inicio a esta rama de la Termodinámica establece que: "los cuerpos negros no radían energía en forma contimua, sino discontinuamente en 'paquetes' llamados 'quantos', según la relación: $E = h\nu$."

Donde: E es la energía medida en quantos

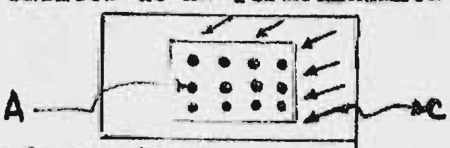
$h = 6.6256 \; 10^{-27}$ ergs/seg es la constante de Planck.

ν es la frecuencia de vibración molecular.

La hipótesis de Einstein establece como consecuencia que: "la energía radiante de un cuerpo debe ser absorbida o emitida en quantos cuya magnitud depende de la frecuencia, o en múltiplos de la misma".

Los Postulados básicos de la Termodinámica Cuántica pueden exponerse como sigue:

~~Primer~~ Sea:



A número total de aceptores

C número total de quantos

Primer Postulado: Tomando en consideración un sistema que posea un número total de aceptores, y teniendo en cuenta un número total de quantos, a todos los posibles arreglos de los quantos en los aceptores, se les dá "a priori", la misma probabilidad de ocurrencia.

Segundo Postulado: Cualquier variable que se tome, de un sistema, y se obtenga su promedio, se considera representativa de todo el sistema.

Boltzman definió la ENTROPIA tomando en consideración estos postulados: La Entropia de un sistema puede definirse en términos del número de arreglos posibles de las partículas, que componen el sistema, lo cual está en concordancia con el estado del sistema.

En un conjunto determinado, los sistemas estpan disvribuidos en diferentes estados cuánticos, v.gr: sistemas: bolas, estados cuánticos: cajas. Cada vía posible de arreglo de los sistemas en los estados cuánticos, se llama un ASPECTO del conjunto.
El número de Aspectos se denota por Ω. y k es la cte. de Boltzmann. $k = R/N_o$ donde N_o es el número de Avogadro: $N_o = 6.02 \times 10^{23}$.
Entónces tenemos:

$$S = k \ln \Omega . \qquad (3.\cdot)$$

En función de esto es conveniente referirse a la Entropia, como una medida del " desorden " de un sistema.

Esto significa que la energía en forma útil como la eléctrica, mecánica o química está organizada y dirigida y puede usarse para realizar un trabajo. Como el calor es la forma de energía debida a la excitación de los átomos o moléculas en un cuerpo, y es de carácter caótico, entónces por este motivo, cuando la energía organizada, se convierte en calor, incrementa el "desórden" de un sistema y por tanto, la Entropia que es una medida de este "desórden", debe aumentar.

La SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA nos indica que la Entropia del Universo tiende a un máximo, y por ende, que la dirección de los procesos naturales es siempre una.
O sea, la Entropia total del Universo va siempre en aumento, y es ella de hecho, la que señala el curso del tiempo, esencialmente irreversible; por esto podríamos considerar a la Entropia, como la " Cara física" del tiempo.

Para calcular el cambio de Entropia en un Proceso isotérmico :

$$\Delta S = Q_{rev}/T \qquad (36) \quad *$$

Cambio de Entropia en un Proceso Isobárico o Isocórico:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} C_{p\ o\ v}\ dT/T \qquad (37)$$

Cambio de Entropia en un cambio de fase:

$$\Delta S_{(vap)} = \Delta \bar{H}(vap)/T_{eq} \qquad (38)$$

Finalmente anoto el postulado que se conoce como TERCERA LEY DE LA TERMODINAMICA, el cual es una consecuencia directa del tratamiento que da a los procesos, la Termodinámica Cuántica: La Entropia de una substancia pura perfectamente cristalina, es cero, en el cero absoluto de temperaturas.

* La Entropia se expresa en cal g/g mol °C o unidad entrópica u.e.

VII.- COMPRESION Y EXPANSION DE FLUIDOS.

Una máquina que incrementa la Presión de un gas, se denomina COMPRESOR. Es necesario conocer algunos parámetros en lo que se refiere a la operación de los compresores, como por ejemplo: ¿ Qué cantidad de calor debe removerse en la compresión ? ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir un gas de una presión a otra ? ¿ Tipo de ciclo de compresión ? ¿Cuándo es ventajoso comprimir un gas en más de una etapa ?

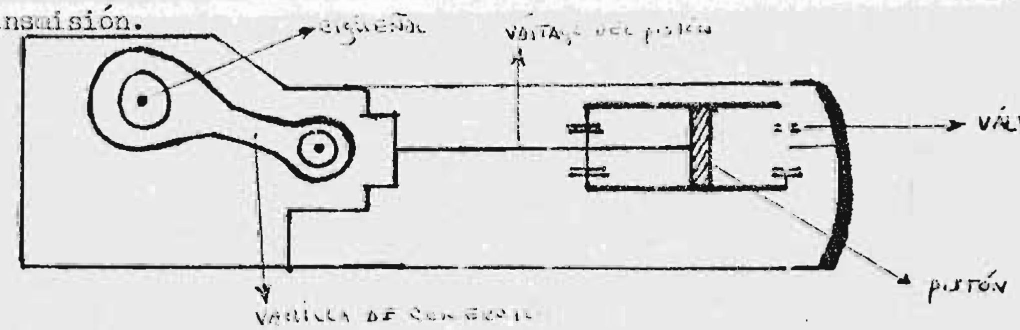
Clasificación general de los compresores:

1. De desplazamiento positivo: reciprocantes y rotatorios.
2. Centrífugos.

Los siguientes desarrollos se referirán en general a los compresores reciprocantes.

Un compresor reciprocante puede suministrar gas desde una presión de unas cuantas libras hasta aproximadamente 35,000 lb/plg² (psi).

Consta generalmente de un pistón, cilindro con válvulas de escape y un cigüeñal con transmisión.

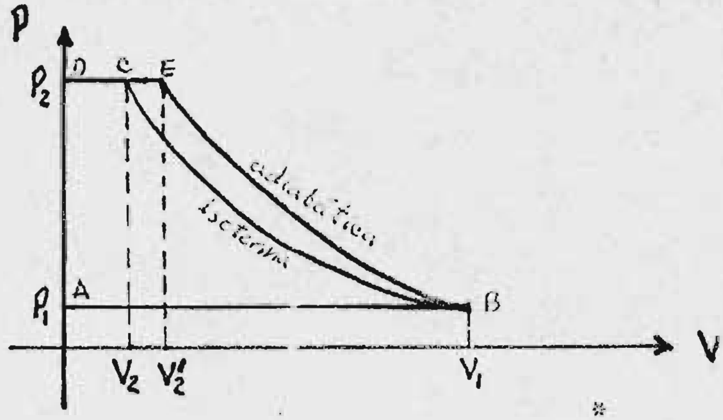


Los compresores se operan en una o en varias etapas, en cuyo caso es práctica general, enfriar el gas entre cada una de ellas.

La eficiencia en la mayor parte de los casos está entre el 65 - 80 %.

COMPRESION EN UNA SOLA ETAPA:

Ciclo ideal: Ocurre en el cilindro de un compresor reciprocante. Sea:



El trabajo total para el ciclo es:

$$W_{ciclo} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \qquad (39)$$

Ahora: $W_{AB} = P_1V_1$ $\quad W_{BC} = \int_{V_1}^{V_2} P dV$ $\quad W_{CD} = - P_2V_2$ $\quad W_{DA} = 0$

Entónces el trabajo para el ciclo es:

$$W_{ciclo} = P_1V_1 - P_2V_2 + \int_{V_1}^{V_2} P\, dV \qquad (40)$$

Como: $\int_{V_1}^{V_2} P\, dV + P_1V_1 - P_2V_2 = - \int_{P_1}^{P_2} V\, dP$

El trabajo para el ciclo es finalmente:

$$W_{Ciclo} = - \int_{P_1}^{P_2} V\, dP \qquad (41)$$

El área de la superficie ABCD o ABED nos dí el trabajo realizado.

CASO ISOTERMICO: Suponiendo que se trabaja con un gas ideal, tenemos:

$$W_{ciclo} = - RT \ln P_2/P_1 = - 2.3\, RT \log P_2/P_1 \qquad (42)$$

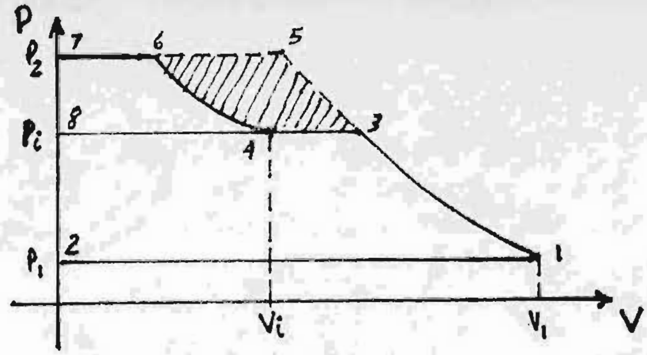
CASO ADIABATICO: Para un gas ideal, y γ constante, tenemos:

$$W_{ciclo} = P_1V_1 \gamma/\gamma - 1 \left[1 - \left(P_2/P_1\right)^{\gamma - 1/\gamma} \right]$$

$$= NRT_1 \gamma/\gamma - 1 \left[1 - \left(P_2/P_1\right)^{\gamma - 1/\gamma} \right] \qquad (43)$$

COMPRESION EN VARIAS ETAPAS:

Sea:



Ciclo para una compresión ideal en dos etapas. *

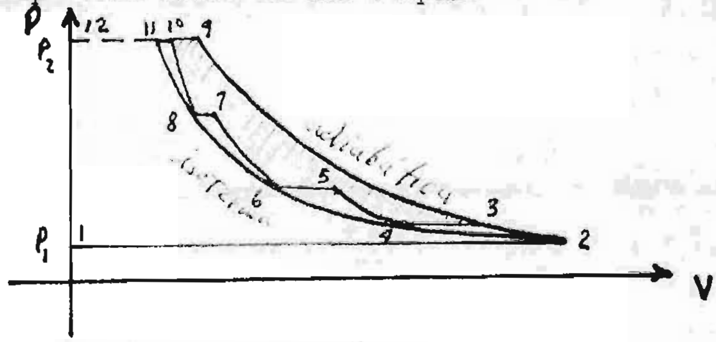


Diagrama que ilustra el Trabajo máximo en una compresión por etapas. *
2-3-4-5-6-7-8-10 repr. una compr. adiabática en 4 etapas. Con enfriador entre c/u etapas.
EL ÁREA SOMBREADA REPRESENTA EL TRABAJO EFECTUADO POR EL USO DE ETAPAS.

Tomando en consideración: $W = W_{1er.ciclo} + W_{2o.ciclo}$, así como el intercambio de calor, tenemos para una compresión en dos etapas; para un gas ideal, γ constante, y compresión adiabática reversible:

$$W = P_1V_1\gamma/\gamma-1 \left[2 - (P_i/P_1)^{\gamma-1/\gamma} - (P_2/P_i)^{\gamma-1/\gamma} \right] \qquad (44)$$

Y para N etapas: (45)

$$W = P_1V_1\gamma/\gamma-1 \left\{ N - (P_{i1}/P_1)^{\gamma-1/\gamma} - (P_{i2}/P_{i1})^{\gamma-1/\gamma} - \ldots\ldots - \left[P_2/P_{1(N-1)}\right]^{\gamma-1/\gamma} \right\}$$

donde P_{i1}, P_{i2}, ..., $P_{i(N-1)}$ son las presiones de descarga de lasetapas 1,2,.. ...., N - 1 .

La condición para trabajo mínimo es que la denominada RELACION DE COMPRESION:

$$r^n = P_2 / P_1 \qquad (46)$$

debe ser la misma para todas las etapas.

De la relación anterior: $r = (P_2/P_1)^{1/n}$ Substituyendo este resultado en la ec.(·)

$$W_{(n\ etapas)} = n\ P_1V_1\gamma/\gamma-1 \left[1 - (P_2/P_1)^{\gamma-1/n\gamma} \right] \qquad (47)$$

El número de etapas que es recomendable usar en un caso determinado por

* Estos diagramas han sido tomados del libro de Termodinámica de B.F. Dodge (34)

parámetros económicos, como el bajo costo de potencia, mejor eficiencia e incremento del costo del equipo.

VIII.- RELACIONES DE EQUILIBRIO. PROPIEDADES COLIGATIVAS.

$U = f(S, V, N_1, N_2, \ldots\ldots)$ donde U es la energía interna del sistema es la RELACION FUNDAMENTAL. Es una relación entre variables extensivas.

Diferenciando esta relación tenemos:

$$dU = \left(\partial U/\partial S\right)_{V,N_i} dS + \left(\partial U/\partial V\right)_{S,N_i} dV + \left(\partial U/\partial N_1\right)_{S,V,N_j} dN_1 \qquad (48)$$

$$T \equiv \left(\partial U/\partial S\right)_{V,N_i} \qquad (49)$$

$$-P \equiv \left(\partial U/\partial V\right)_{S,N_i} \qquad (50)$$

$$\mu \equiv \left(\partial U/\partial N_i\right)_{N_j,S,V} \qquad (51)$$

Estas expresiones definen Temperatura, Presión y POTENCIAL QUIMICO μ.

De lo anterio, tenemos que la ECUACION FUNDAMENTAL DE LA TERMODINAMICA es:

$$dU = T\,dS - P\,dV + \sum_i \mu_i\,dN_i \qquad (52)$$

A partir de la Ecuación fundamental:

$$\int_0^U dU = T\int_0^S dS - P\int_0^V dV + \mu_i\int_0^{N_i} dN_i$$

Y llegamos a: EC. DE EULER:

$$U = TS - PV + \mu_i N_i \qquad (53)$$

De donde, diferenciando y sustrayendo esta ecuación a la ec. original, llegamos a:

$$S\,dT - V\,dP + \sum_i N_i\,d\mu_i = 0 \qquad (54)$$

es una relación entre variables intensivas. Es denominada EC. DE GIBBS- DUHEM.

La Energía Libre de Helmholtz se define como;

$$A \equiv U - TS \qquad (55)$$

Y significa físicamente el trabajo máximo de un sistema.

La Energ'ia Libre de Gibbs se define como:

$$G \equiv U - TS + PV \qquad (56)$$

Y significa físicamente el trabajo útil de un sistema.

Si ΔG es negativo la transformación(cualquiera que esta sea) ocurre espontáneamente.

ΔG es igual a cero, el sistema está en equilibrio con respecto a la transformación.

ΔG es positivo, la transformación no es espontánea.

Es factible definir el potencial químico en términos de la energía libre de Gibbs:

$$\mu \equiv \left(\partial G / \partial N_i \right)_{T,P,N_j} \qquad (57)$$

El potencial químico es una propiedad intensiva, es un potencial de la transferencia de masa en un sistema determinado.

Para el equilibrio: $\mu_\alpha = \mu_\beta$ $\qquad \alpha, \beta$, fases.

La Energía Libre de una Mezcla es;

$$dG = -S\,dT + V\,dP + \sum_i \mu_i \, dN_i \qquad (58)$$

A T y P constantes, e integrando entre los límites 0 y G, tenemos:

$$G = \sum_i \mu_i N_i \qquad (59)$$

Y para un sólo componente:

$$\mu = G/N \qquad (60)$$

Volúmen Molar Parcial:

$$\bar{V}_i = \left(\partial \mu / \partial P \right)_{T,Ni} \qquad (61)$$

Para una Mezcla de Gases Ideales:

$$\overline{V}_1 = V/N \qquad (62)$$

PROPIEDADES COLIGATIVAS. (lat: Co - ligare)

Varias propiedades de soluciones que contienen solutos no volátiles, tienen su orígen en que el potencial químico μ del solvente es menor que el potencial químico μ del solvente puro.

Las propiedades coligativas dependen únicamente del número de partículas en solución y no de la naturaleza de las mismas.

Son propiedades de soluciones diluídas.

1. Descenso de la Presión de vapor del solvente:

La solución de un soluto en un solvente hace descender la Presión de vapor del solvente respecto a la del solvente puro:

$$\Delta P = P^o - P = P^o N_2 \qquad (63)$$

donde: ΔP es la disminución de la presión de vapor del solvente.

P^o es la presión de vapor del solvente puro.

P es la presión de vapor parcial del solvente.

N_2 es la fracción mol del soluto.

$$\Delta P = P^o \left[m_2/M_2 \; / \; (m_1/M_1 + m_2/M_2) \right] \qquad (64)$$

donde: m_1 es el peso del solvente

M_1 es el peso molecular del solvente

m_2 es el peso del soluto

M_2 es el peso molecular del soluto.

2. Aumento del Punto de Ebullición:

Las soluciones que contienen solutos no volátiles hierven a temperaturas más elevadas que las del solvente puro:

$$\Delta T_b = \Big[\underbrace{(RT_b^2 M_1 \; / \Delta H_v \times 1000)}_{k_b} \Big] m. \qquad (65)$$

donde: ΔT_b es el aumento del punto de ebullición de una solución.

k_b es la constante ebulloscópica del solvente.

H_v Calor de Vaporización del solvente.

m Molalidad: $1000 \; n_2 / m_1$

$$M_2 = (m_2 \times k_b \times 1000) \; / \; (m_1 \times \Delta T_b) \qquad (66)$$

donde: M_2 es el peso molecular del soluto

m_2 es la masa de soluto

m_1 es la masa de solvente.

3.Abatimiento del Punto Crioscópico:

Al enfriar una solución diluída, se alcanza una temperatura en la cual el solvente sólido comienza a separarse. Esta temperatura es el punto de congelación de la solución. Las soluciones se congelan a temperaturas menores que el solvente puro.

$$\Delta T_f = \overbrace{\left[\left(RT_f^2 M_1 / \Delta H_f \quad 1000\right)\right]}^{k_f} m \qquad (67)$$

donde: T_f es la temperatura de congelación

m Molalidad, k_f es la constante crioscópica

ΔH_f es el calor de fusión.

4. Presión Osmótica:

(La Presión Osmótica es la presión que es necesario aplicar sobre una)

" La Presión Osmótica es el exceso de Presión que prevendría el flujo de solvente puro hacia la solución cuando entre ámbos se halla una membrana semipermeable" * (38)

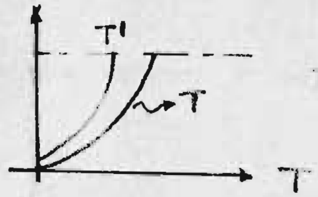
NOTA SOBRE SOLUBILIDAD:

Consideremos el equilibrio entre un soluto en soluci´on y un soluto - sólido puro.

La condición de equilibrio es: μ_{soluto} (T,P, Xsoluto) $= \mu_{sólido}$ (T P)
$_2$

Xsoluto es la fracción mol del soluto en la solución, y entónces la solubilidad del soluto ha sido expresada como una fracción mol.

Si la solución es ideal:



$$\ln X_{soluto} = - \Delta H_f / R (1/T - 1/T_0) \qquad (68)$$

La LEY DE HENRY relaciona la presión parcial del soluto en la fase - vapor a la fracción mol del soluto en la ~~fase~~ solución:

$$P_j = k_j X_j \qquad (68')$$

Desde otro punto de vista, la ley de Henry ($X_j = 1/k_j \cdot P_j$) nos dice que - la solubilidad X_j de un constituyente volátil es proporcional a la Presión parcial de este constituyente en la fase gaseosa en equilibrio con el líquido.

IX. EQUILIBRIO DE FASES EN SISTEMAS SIMPLES.

REGLA DE LAS FASES DE GIBBS:

$$L = C - F + 2 \qquad (69)$$

donde: L es el número de grados de libertad: variables intensivas que pueden variar independientemente.

C es el número de componentes: el número mínimo de especies químicas necesarias para preparar todas las fases que participan en el equilibrio.

F es el número de fases .

2 se refiere generalmente a las variables P y T.

ECUACIONES DE CLAUSIUS-CLAPEYRON:

$$dP / dT = \Delta H / T \Delta V \qquad (70)$$

Esta ecuación se aplica a todo tipo de cambios entre fases. Refiriéndola a cualesquiera de los diagramas de fases, dP/dT a una temperatura dada es la pendiente de la curva que representa dos fases en equilibrio.

En las reacciones de fase de sublimación y evaporación, el cambio de volúmen es tan elevado que se puede considerar igual al volúmen de vapor formado .

Suponiendo que el vapor se comporta como gas ideal, V es aproximadamente igual a RT/P (por mol).*

(suponiendo que el vapor se comporta como gas ideal)

Suponiendo Δ H constante dentro de un ámbito de temperaturas tenemos:

$$d \ln P / dT = \Delta H / RT^2 \qquad (71)$$ integrando:

$$\int_{P_1}^{P_2} d \ln P = \int_{T_1}^{T_2} \Delta H / RT^2 \; dT$$ por tanto, tenemos:

$$\ln P_2/P_1 = - \Delta H/R \; (1/T_2 - 1/T_1) \qquad (72)$$

La Ecuación de Clausius-Clapeyron puede utilizarse también en forma gráfica:

$$\ln P = - \Delta H/R \cdot 1/T + C$$ o sea:

$$Y = m \cdot x + b$$

*o sea, al volúmen de vapor formado.

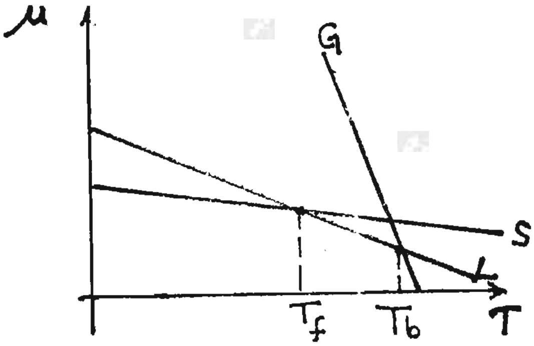
Para un sistema en equilibrio el potencial químico de cada constitu — yente debe ser el mismo en cualquier parte del sistema, y $\mu_\alpha = \mu_\beta$.

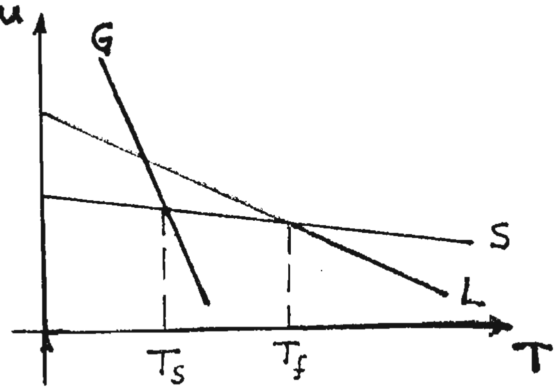
Para un sistema de un componente $\mu = G/N$ y $d\mu = -SdT + VdP$ y:

$$\bar{S} = -(\partial \mu / \partial T)_P \qquad (73)$$

$$\bar{V} = (\partial \mu / \partial P)_T \qquad (74)$$

Las derivadas, son las pendientes de las curvas μ vs T y μ vs P respectivamente.





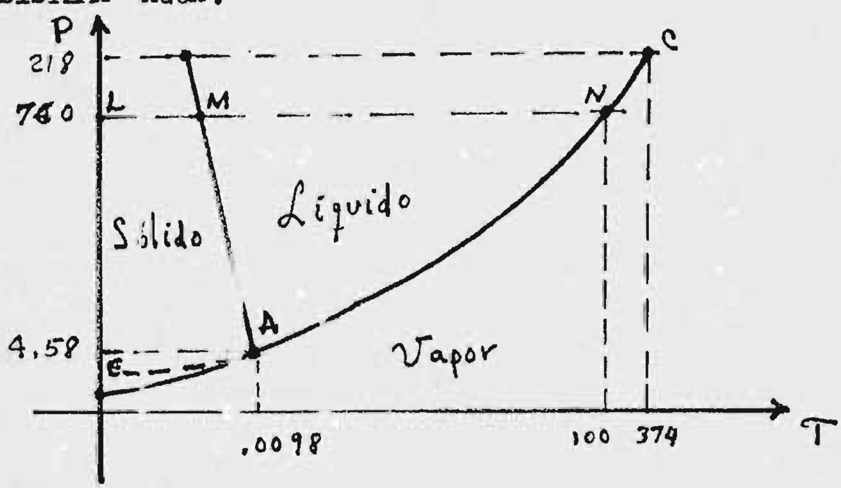
*

T_f es la temperatura de fusión

T_b es la temperatura de ebullición

T_s es la temperatura de sublimación.

EL SISTEMA AGUA:



* Estos dos diagramas han sido tomados del libro de Fisicoquímica de G.W Castellan

La extensión de la curva CA hasta E representa el equilibrio metaestable entre el agua sobreenfriada y su vapor.

En el punto A, sólido, líquido y vapor se encuentran en equilibrio. En el punto triple A, L el núm. de grados de libertad es igual a cero.

Considérese una porción de hielo en las condiciones del punto L. Si se calienta el hielo isobáricamente hasta M, el volúmen del sistema decrece en un determinado porcentaje y la presión se sigue manteniendo mecánicamente. Calentando más todavía, el sistema recorre MN hasta que en N hace su aparición la fase vapor, o sea, el líquido hierve. La presión en el sistema, se debe ahora al vapor producido.

Si la operación descrita, se hubiera realizado a una presión inferior a 4.58 mm. la fase L no aparecería, dándose una transición de sólido a vapor, o sea, una sublimación.

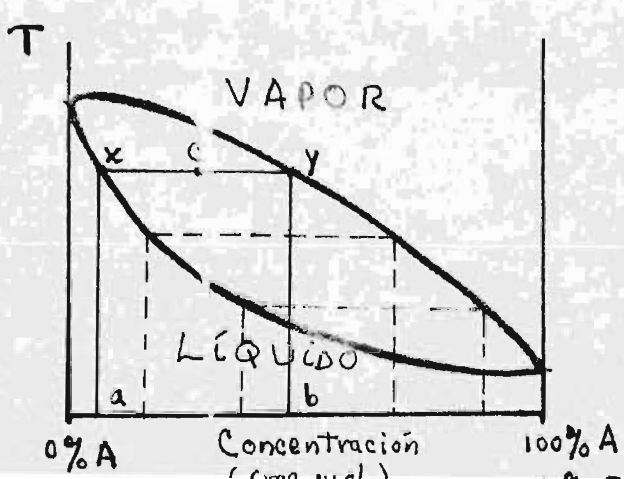
/////////////////// //////////////

X.- EQUILIBRIO LIQUIDO* LIQUIDO Y LIQUIDO * VAPOR.

1. LIQUIDOS MISCIBLES:

Estos líquidos pueden ser separados por Destilación fraccionada. La DESTILACION es un procedimiento fisicoquímico cuya función es separar, por vaporización, una mezcla líquida de substancias miscibles y volátiles, en sus componentes individuales.

Sea el siguiente diagrama de Temperaturas vs Concentraciones:



El componente A es el más volátil.

Una mezcla líquida de concentración $\underline{a}$ se calienta lentamente, y comienza a hervir a la temperatura T_1 (punto x).

El punto y, representa vapor que justamente comienza a condensarse a la temperatura T_1. La concentración de la primera burbuja de vapor está representada por el punto b.

Curva Superior: CURVA DE PUNTOS DE ROCIO.

Curva Inferior: CURVA DE PUNTOS DE BURBUJA.

En el punto c existe fase líquida y fase vapor.

El cálculo de las curvas es a partir de la llamada LEY DE RAOULT:

$$p_a = P_a \cdot x_a \qquad (75)$$ o bien:

$$y_a = p_a / P = (P_a \cdot x_a) / P \qquad (76)$$

donde: x_a es la fracción mol del componente a en el líquido.

y_a es la fracción mol del componente a en el vapor.

p_a es la presión parcial del componente a en el vapor.

P_a es la presión de vapor del componente a , a la temp. dada.

P es la presión total.

Estas ecuaciones indican que el vapor desprendido de una mezcla de líquido, será una mezcla de los mismos componentes que tiene el líquido.

La ley de Raoult es exacta solamente para predecir los equilibrios vapor-líquido de una solución ideal en equilibrio con una mezcla ideal de gases.

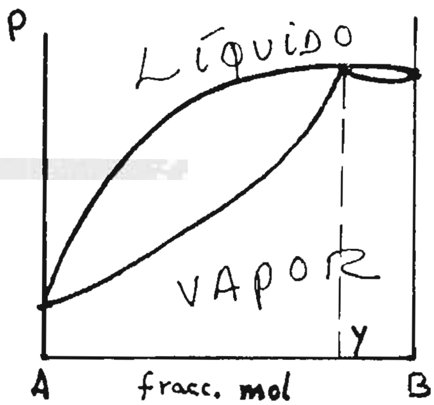
Las soluciones que presentan desviaciones despreciables del caso ideal, incluyendo componentes que tengan estructura y propiedades físicas similares, como por ejemplo sistema Benceno - Tolueno, Metanol - Etanol, pueden tratarse con la ley de Raoult.

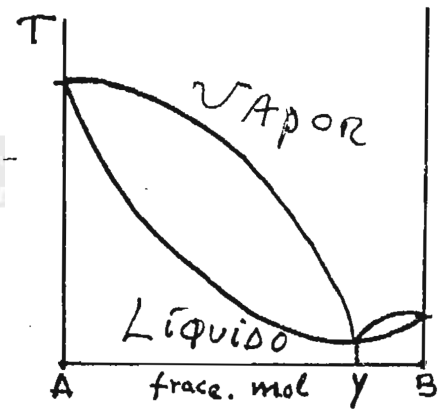
La ley de Raoult enseña que las composiciones en una mezcla en equilibrio dependen de la presión total del sistema y de las presiones de vapor de los componentes.

2. AZEOTROPOS:

Las mezclas líquidas que tienen puntos de ebullición máximo o mínimo, se llaman AZEOTROPOS.

Sea el siguiente diagrama:





El residuo de la destilación es siempre el azeótropo y, que es una mezcla de ebullición invariable.

Para el cálculo de azeótropos es necesario recurrir a ecuaciones con coeficientes de actividad γ :

$$\gamma_1 = P\, y_1 / P_1^{o}\, x_1 \qquad (77)$$

donde P es la presión total

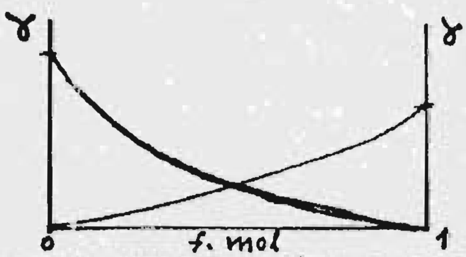
P_1^{o} es la presión de vapor del componente puro.

x_1 es la fracción mol en el líquido.

y_1 es la fracción mol en el vapor.

En el punto azeotrópico, únicamente: $\gamma_1 = P/P_1^{o} \qquad (78)$

Sea:



La ecuación fundamental que relaciona los coeficientes de actividad con la composición es la ecuación de Gibbs— Duhem:

$$x_1 \left(\partial \log \gamma_1 / \partial x_1 \right)_{T,P} + x_2 \left(\partial \log \gamma_2 / \partial x_2 \right)_{T,P} = 0 \qquad (79)$$

Ecuación que nos habla de las pendientes de las curvas en la figura —

anterior. Es conveniente usar las formas integradas de la ecuación:

ECUACIONES DE MARGULES:

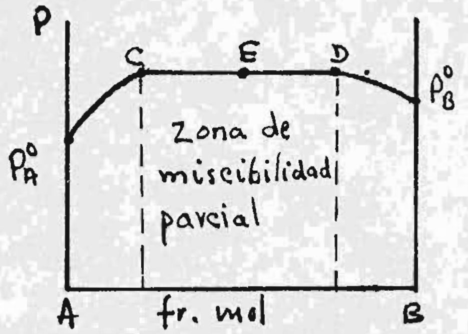
$$\log \gamma_1 = x_2^2 \left[\left(A + 2x_1 (B - A) \right) \right] \qquad (80)$$

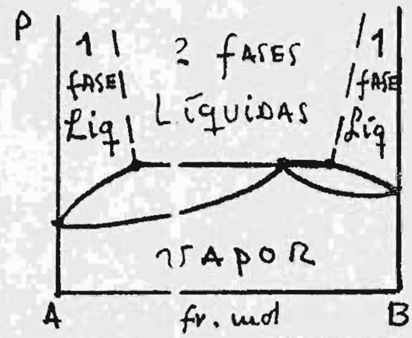
$$\log \gamma_2 = x_1^2 \left[\left(B + 2x_2 (A - B) \right) \right] \qquad (81)$$

Las constantes A y B son los valores limitantes de $\log \gamma$ cuando la composición del componente considerado, tiende a cero.

3. LIQUIDOS PARCIALMENTE MISCIBLES:

Sean los siguientes diagramas de P vs C:



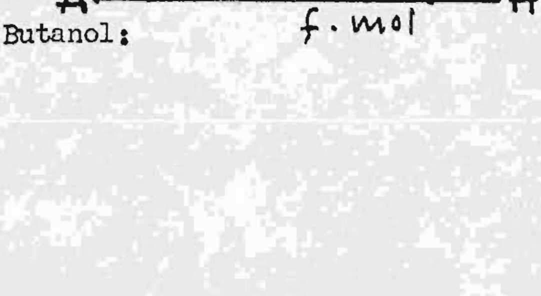


Las curvas se calculan mediante ecuaciones que tóman en consideración los γ.

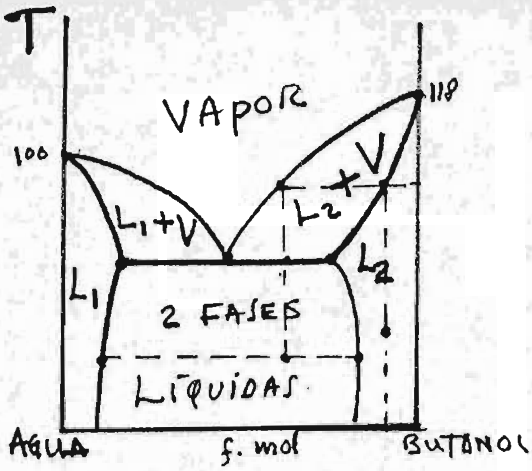
Las mezclas de composiciones comprendidas entre C y D destilarán a temperatura constante mientras se encuentren presentes dos fases líquidas.

Si la mezcla original tiene una composición E, destilará como sisse tratase de un líquido puro.

Ejemplos de sistemas parcialmente miscibles lo son, el sistema Anilina-Hexano:



Y el sistema Agua - Butanol:



4. LIQUIDOS INMISCIBLES:

V.gr: Agua- Mercurio. Si se calienta la mezcla hasta que la presión total sea igual a la presión externa, por ejemplo la atmosférica, se efectúa la destilación. La temperatura será inferior a las de ebullición de ámbos componentes, ya que tanto p_a como p_b serán inferiores a la presión externa.

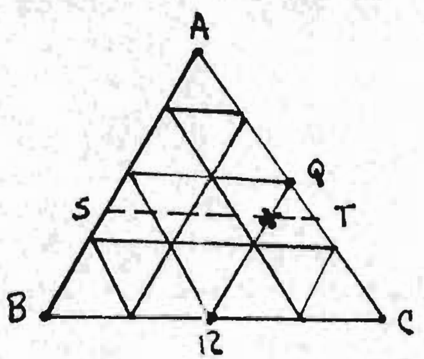
La destilación seguirá verificándose a temperatura constante mientras existan las dos fases líquidas.

Cuando uno de los líquidos es el agua, esta operación recibe el nombre de DESTILACION CON ARRASTRE DE VAPOR.

SISTEMAS DE TRES COMPONENTES:

En estos sistemas, existe un máximo de cuatro grados de libertad. En los sistemas de una fase se tendrán cuatro variables independientes: P, T, y concentraciones de dos componentes.

Representación de una composición: v.gr: 50 % de C y 30 % de A.



1. Buscar los puntos que sobre los ejes que confluyen en C representan 50% C y unir los puntos.
2. Buscar sobre los ejes que confluyen en A, los puntos que representan 30% de A y unírlos.
3. Finalmente, el punto de intersección representa la composición deseada.

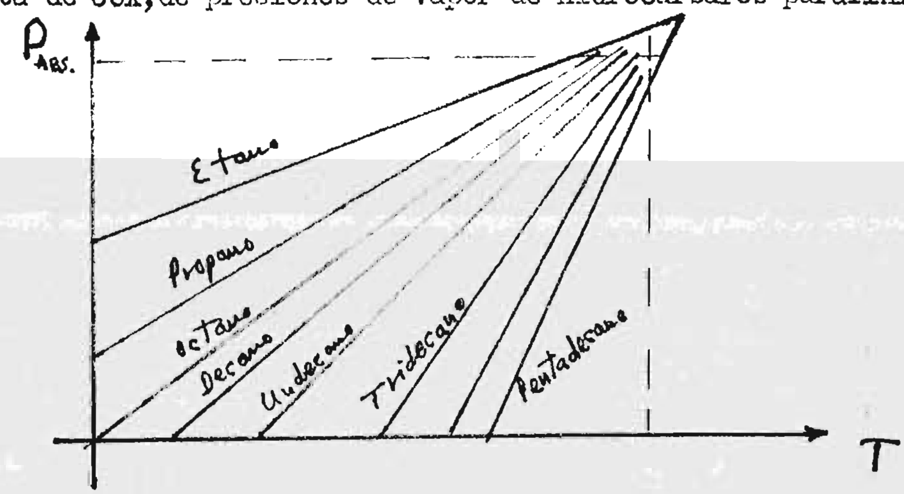
XI.- DIAGRAMAS TERMODINAMICOS Y TABLAS DE PROPIEDADES.

Exísten en la literatura ingenieril varios tipos de diagramas termodinámicos y tablas de propiedades. En este capítulo me propongo considerar algunos de los tipos más fundamentales y mencionar algunas referencias para encontrarlos.

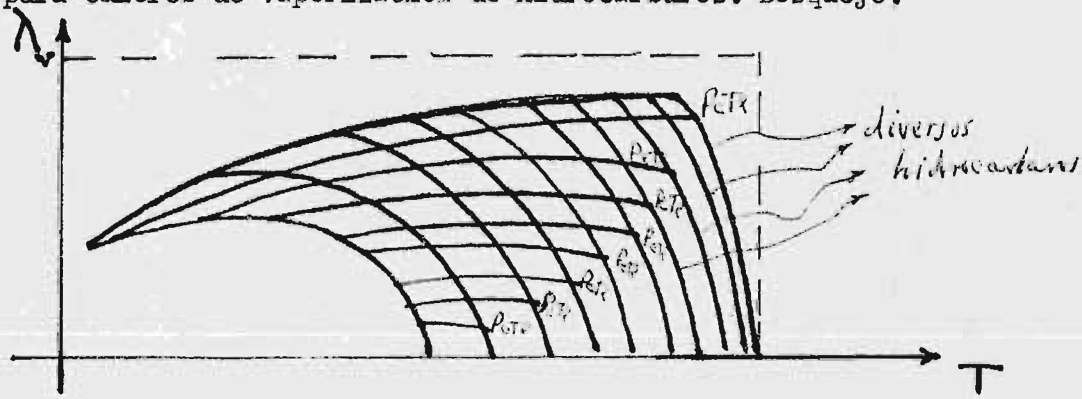
Con respecto a los diagramas termodinámicos, los tipos más comunmente empleados son: diagramas de P vs T, Calor específico o calor latente vs. T. T vs S, H vs S, T vs H, P vs H, H vs C, y muchos otros.

Los diagramas H vs S, T vs H, y P vs H, en particular el primero, son denominados DIAGRAMAS MOLLIER.

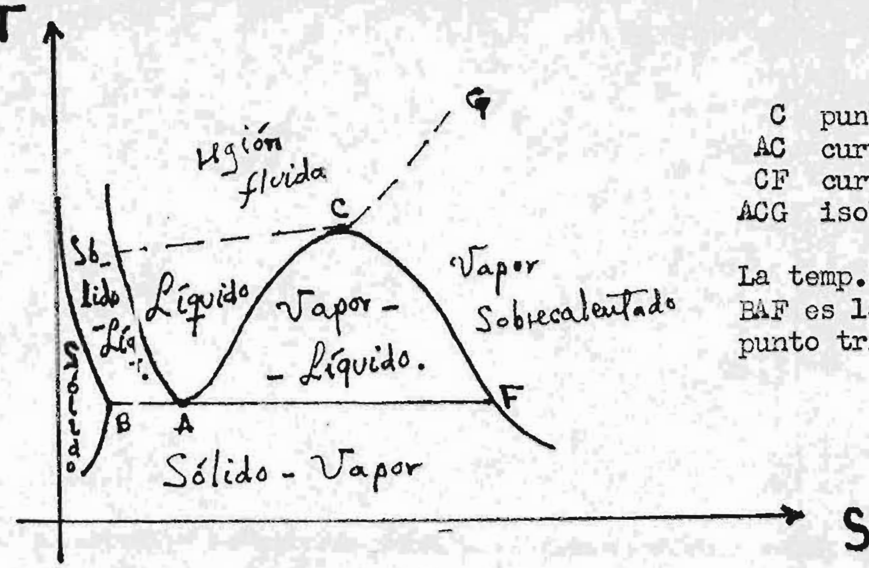
Como un ejemplo ilustrativo de un diagrama P vs T, tenemos la denominada Carta de COX, de presiones de vapor de hidrocarburos parafínicos: Bosquejo:



Como ejemplo de diagramas de Calor latente vs. T, tenemos la siguiente carta para calores de vaporización de hidrocarburos: Bosquejo:



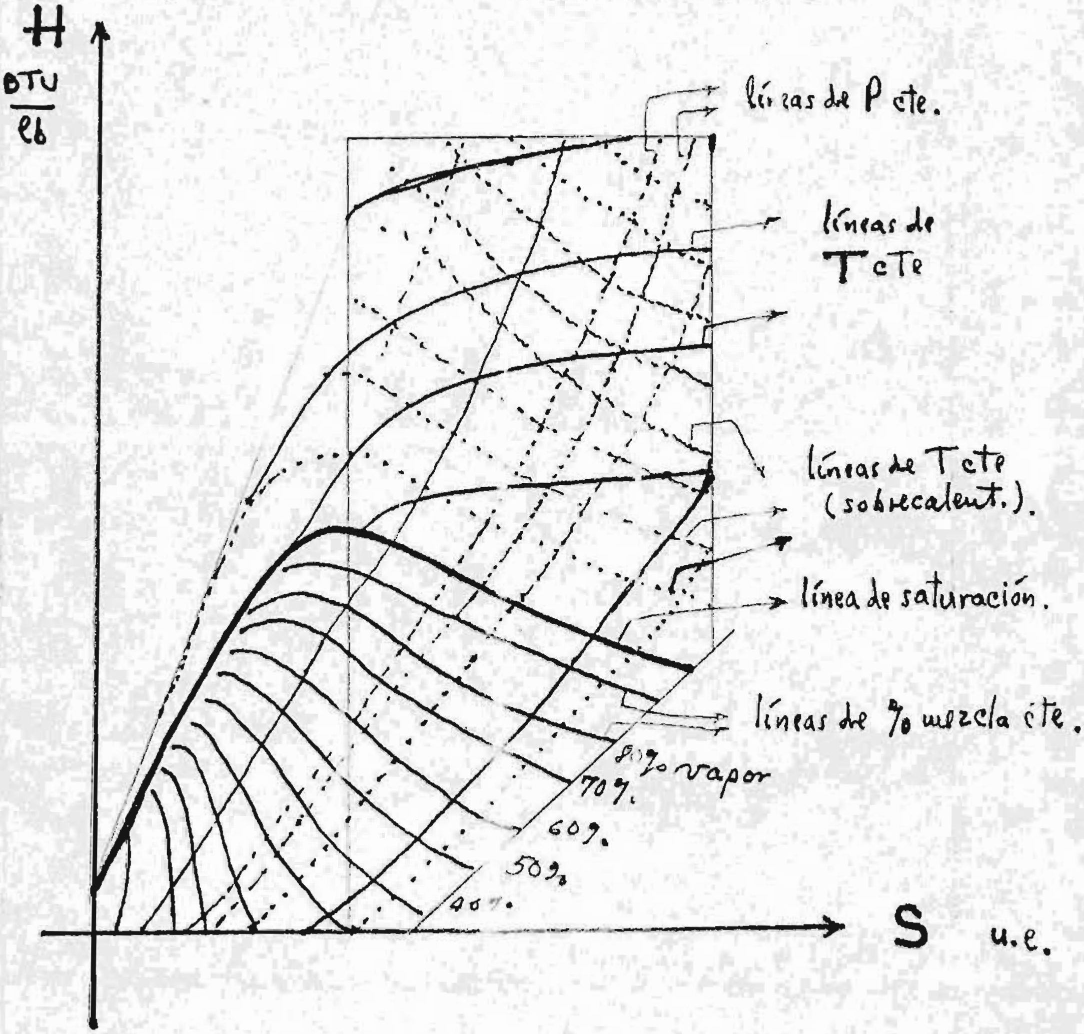
Diagramas de Temperatura vs Entropía, bosquejo: para agua



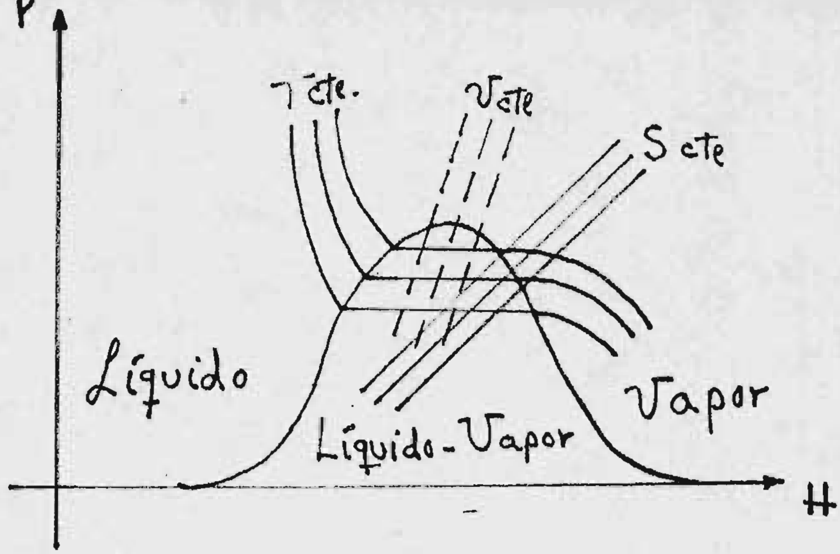
C punto crítico
AC curva de líq.sat.
CF curva de vapor sat
ACG isobara crítica

La temp.corresp. a BAF es la temp.del punto triple.

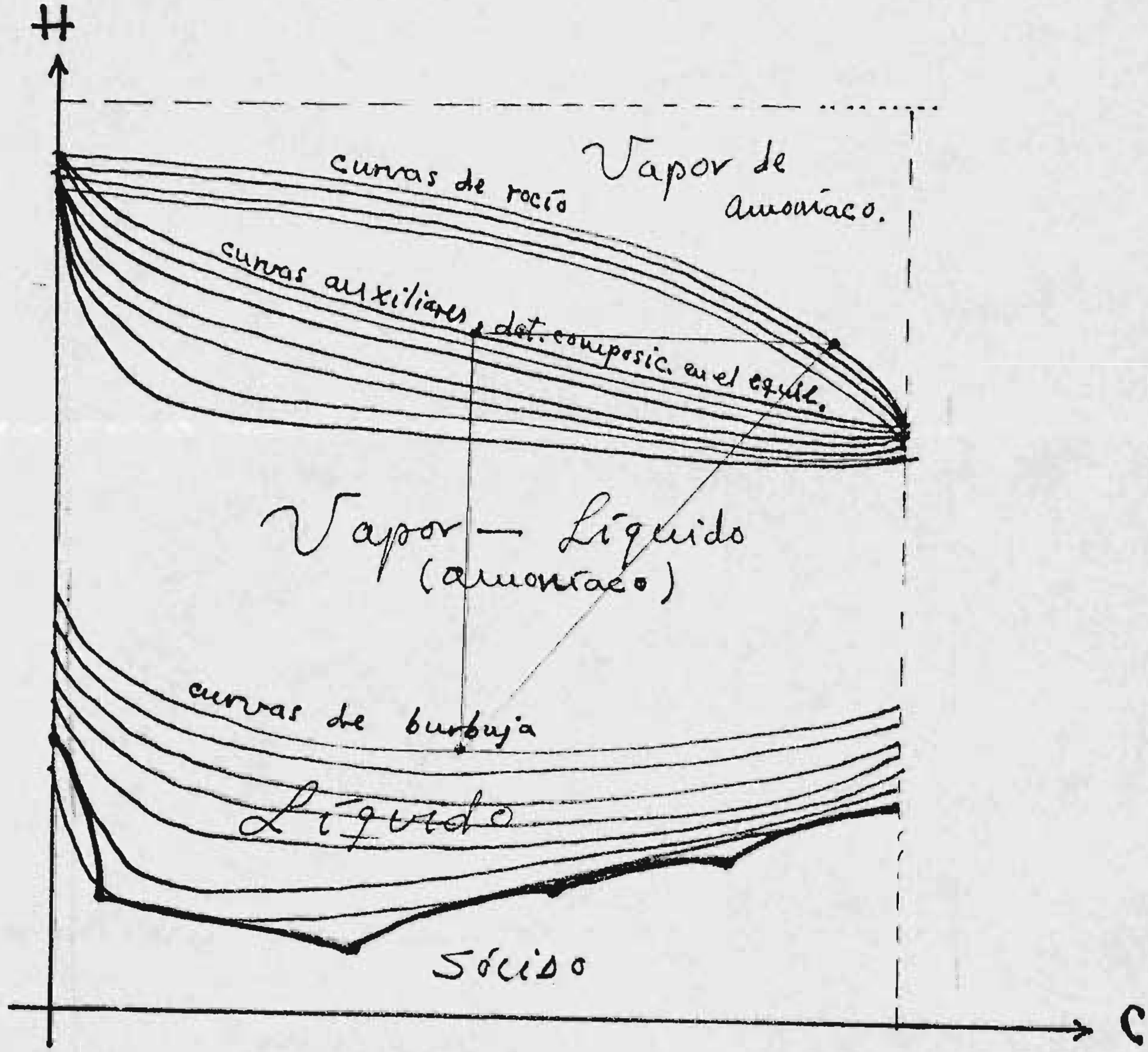
Diagramas Entalpía vs Entropía (MOLLIER),bosquejo para vapor:



Diagramas de Presión vs Entalpía, bosquejo: para hidrocarburos en general



Diagramas Entalpía vs Concentración,bosquejo para amoníaco :



En lo que se refiere a tablas de propiedades,tenemos:Presión de vapor de substancias puras,Densidades,Solubilidades,Calores de formación,Calores de solu — ción,Nomogramas y tablas de Calores específicos y de Calores latentes,Tablas - de propiedades: Presión absoluta, Temperatura,Entalpía, Entropía,para aire — saturado,vapor y otros fluidos; datos de equilibrio vapor-líquido para mezclas binarias, y otras tablas.

Como una referencia general, que no pretende cubrir desde luego lo que se encuentra en la literatura ingenieril con respecto a estos temas ,es conveniente anotar el " Chemical Engineers Handbook " editado por John H. Perry en lo que se refiere a propiedades generales, y en especialpara las propiedades-termodinámicas del vapor,tenemos " Thermodynamic Properties of Steam " de — J.H. Keenan y F.G. Keyes,publicadas por John Wiley and sons, N. York.

//////////////////////////////

XII.- D E S T I L A C I O N;

En algunas ocasiones, se resuelven en ingeniería los problemas, en base a ecuaciones empíricas, como un ejemplo de ello, sea:

Calcular la cantidad de calor que se requiere manejar en una Destilería por vapor, en función de una determinada cantidad de un aceite esencial:

La ecuación empírica para este problema es:

$$(dP/dT)(\,1.985\,T^2 / P\,) = Q$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer órden, o sea:

$$(dY/dX)\,(\,cX^2/Y\,) = Q$$ cuya solución general es:

$$Y = e^{-\int P(X)\,dX}\left[\int Q(X)\; e^{\int P(X)\,dX}\; dX + c\right]$$

Y que en nuestro caso particular, se llega a :

$$P = P_o\, e^{Q/1.985T}$$ de donde: $Q = (\,\ln P - \ln P_o\,)\,1.985\,T$

En este punto del desarrollo de esta Tesis, es conveniente tratar la Destilación como una Operación Unitaria.

Se considera como una OPERACION UNITARIA, la que comprende en una sóla unidad, los elementos necesarios para realizar un cambio de naturaleza física en la materia, con objeto de obtener una transformación previamente definida. Las operaciones unitarias, se analizarán en base a los fenómenos de transporte; se han considerado como operaciones unitarias, el flujo de fluido y el flujo de calor, pero el concepto se aplica más frecuentemente a las operaciones que involucran transferencia de masa, como lo son, la Destilación, Absorción gaseosa, Extracción líquido - líquido, Humidificación, Secado, Evaporación; aplicándose el concepto, también en términos generales, a las operaciones de Filtración, Molienda, y muchas otras.

La DESTILACION es una operación unitaria cuya función es separar, por vapori - zación, una mezcla líquida de substancias miscibles(en general) y volátiles, en sus componentes individuales; lógicamente, existe en esta operación una transfe- rencia de calor y masa.

DESTILACION SIMPLE (o diferencial):

En este caso el material a destilar se carga a un alambique, se - inicia la ebullición y se condensan los vapores; obteniéndose la composición - deseada para el destilado.

Balance de Materiales:

$$Y (- dL) = - d (LX) = - L\, dX - X\, dL$$

donde: L moles de líquido en el "hervidor"

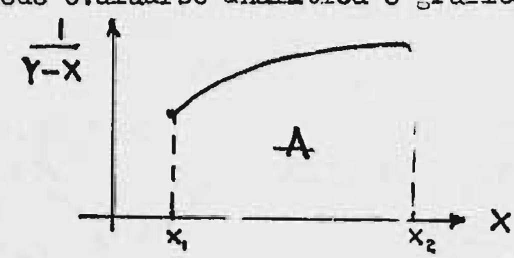
X fracción mol del componente más volátil en el líquido.

Y fracción mol del componente más volátil en el vapor.

Entónces, integrando, tenemos la siguiente expresión:

$$\ln L_1/L_2 = \int_{X_2}^{X_1} dX / Y - X \qquad (82)$$

La integral puede evaluarse analítica o gráficamente, en cuyo caso:



en donde A, o sea el área bajo la curva es: $A = \int_{X_2}^{X_1} dX/Y - X$

TORRES DE PLATOS:

Un PASO o ETAPA se define como una unidad de equipo, en la cual dos fases diferentes se pónen en contacto íntimo, y se procede a separarlas — mecánicamente. Durante el cantacto se difunden varios componentes de la mezcla, redistribuyéndose entre las fases. Las dos fases se han aproximado al equilibrio y por lo tanto, tienen composiciones diferentes a las de las fases iniciales. En un PASO DE EQUILIBRIO, las dos fases se encuentran bien mezcladas durante - un tiempo suficiente que permita establecer el equilibrio termodinámico entre-las fases que se procesan en el paso.

Un paso real no lleva a cabo un cambio tan grande en la composición, como un paso en equilibrio.

Eficiencia del Paso: $$\eta = \frac{\Delta \text{ composición de un paso real}}{\Delta \text{ composición de un paso en equilibrio}} \qquad (83)$$

En las operaciones de contacto discontinuo* a las etapas se les llama PLATOS.

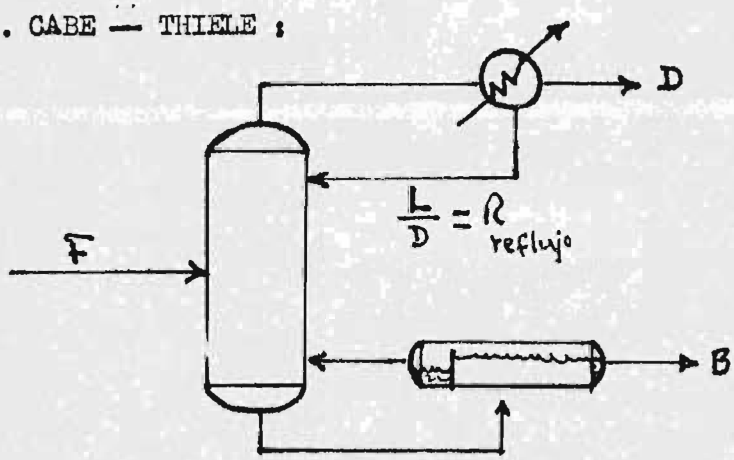
La Destilación de una mezcla líquida, se lleva generalmente a cabo, en Torres de Platos, los cuales pueden ser PERFORADOS o con CAPUCHAS DE BURBUJEO. El Número de Platos reales se define como:

$$\text{NUM. PLATOS REALES} = \frac{\text{NUMERO DE PLATOS IDEALES}}{\text{EFICIENCIA DE C/U DE LOS PLATOS}} \qquad (84)$$

Para efectuar el cálculo del número de platos ideales se utilizan en general dos métodos: Método de Mc.Cabe - Thiele y Método de Ponchon - Savarit.

METODO DE MC. CABE — THIELE :

Sea:



1.- Balance de Materiales: $F = B + D$ (85)

Plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y resolverlo. Obtenemos así las concentraciones X_F, X_B y X_D.

2.- Trazar la Curva de Operación y fijar X_F, X_B y X_D.

3.- Trazar la Curva de Enriquecimiento:

$$b = X_D / R+1 \qquad (86)$$

4.- Trazar la Curva de Alimentación:

* En las operaciones de contacto discontinuo el equipo se diseña para proporcionar contactos discontinuos de las fases en una serie de pasos.

$$m = -\ (1 - f)\ /\ f \qquad (87)$$

donde f:

$$f = -\ \frac{C_{pL}\ (\ T\text{burbuja} - T\text{aliment.}\ )}{\lambda} \qquad (88)$$

$$f = 1 + \frac{C_{pv}\ (\ T\ \text{alim.} - T\ \text{rocío}\ )}{\lambda} \qquad (89)$$

donde: C_{pL} calor específico de la mezcla líquida:

$$C_{pL} = C_{PA}\ \text{fr.mol A} + C_{pB}\ \text{fr. mol B} \qquad (90)$$

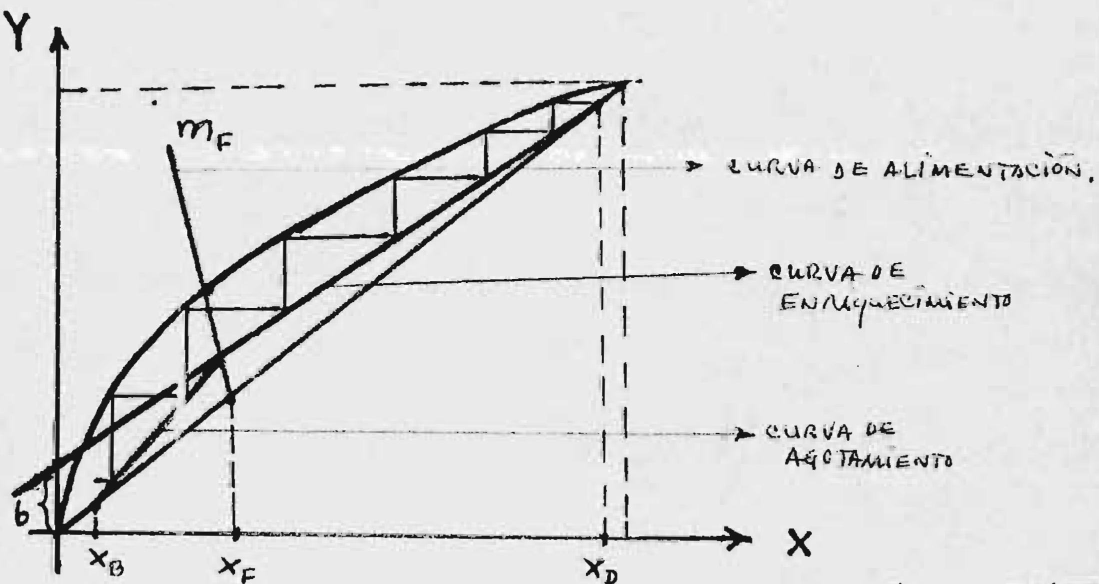
λ calor latente de evaporación de la mezcla líquida:

$$\lambda = \lambda_A\ \text{fr,mol A} + \lambda_B\ \text{fr.mol B} \qquad (91)$$

5.- Trazar la Curva de Agotamiento.

6.- Determinat el Número de Platos Ideales.

7.- Determinar el Número de Platos Reales.



EN ESTE CASO EL NÚMERO DE PLATOS IDEALES : SEIS (6)

Servicio del Rehervidor:

$$\dot{m}_s = \bar{V}\lambda/\lambda_s \qquad (92)$$

donde: $\dot{m}_s$ consumo de vapor (lb/hr)

$\bar{V}$ vapor del rehervidor (lb mol / hr)

λ calor latente molar de mezcla (BTU/lb mol)

λ_s calor latente de vaporización (BTU / lb)

Servicio del Condensador:

$$\dot{m}_c = V \lambda / T_2 - T_1 \qquad (93)$$

donde: $\dot{m}_c$ consumo de agua (lb/hr)

$T_2 - T_1$ diferencia de temperaturas del agua de enfriamiento.

V flujo de vapor en la columna (lb mol/hr).

METODO DE PONCHON — SAVARIT:

Se utiliza este método cuando el intercambio de calor ΔQ es muy importante en el sistema. Este método se basa en los balances de calor.

1.- Balance de Materiales. Se obtiene B,D y F. (94)

2.- Balances de Energía:

$$H'_D = H_D + Qcond./ D \qquad (95)$$

$$H'_B = H_B - Q\ reher/ B \qquad (96)$$

3.- Utilizando un diagrama de Entalpía vs Concentración. Identificar la Curva de puntos de rocío y la curva de puntos de burbuja.

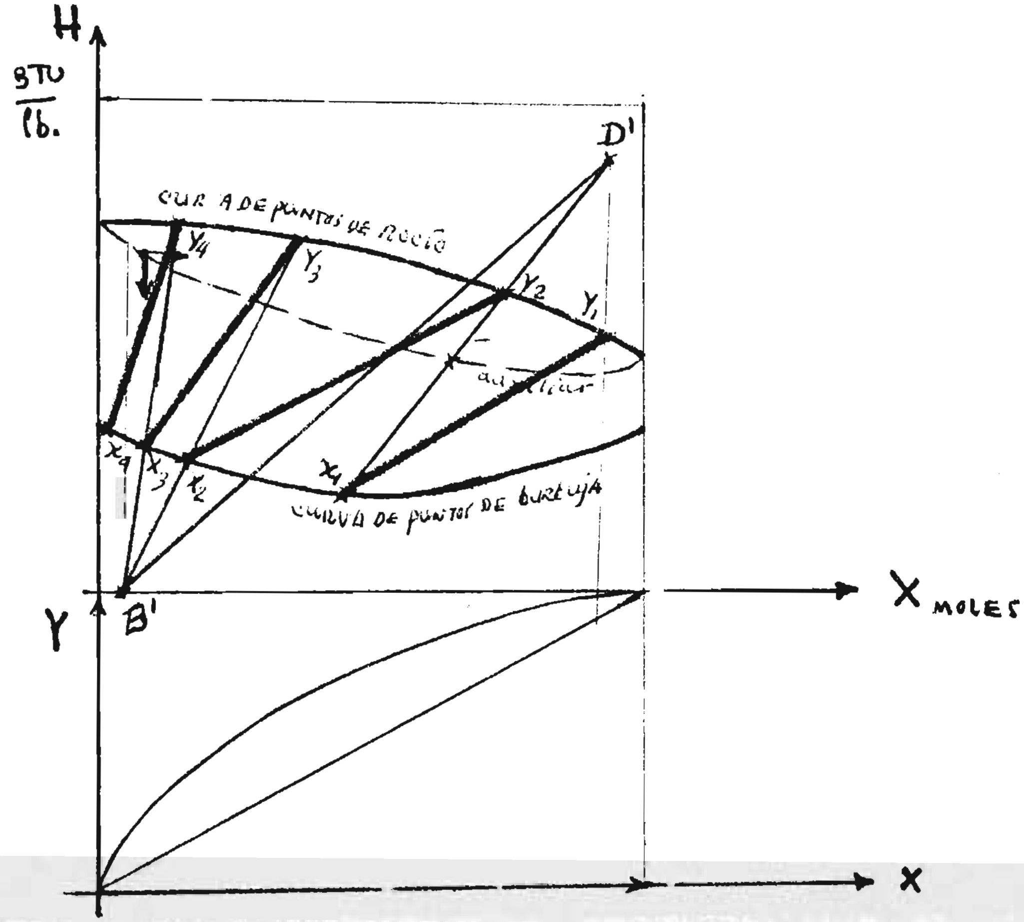
Con H'_D y H'_B obtenemos los puntos D' y B'.La(~~intersección~~)

4.- En base al diagrama Y vs X, obtenemos sobre la curva de puntos de rocío los puntos x_1, x_2, x_3; sobre la curva de puntos de burbuja obtenemos los puntos y_1, y_2, y_3.

5.- Obtenemos el Número de Platos Ideales.

Que en el ejemplo ilustrativo es de CUATRO(~~al igual que en el caso anterior~~)

DIAGRAMA:


H
BTU/lb.
D'
CURVA DE PUNTOS DE ROCIO
Y_4
Y_3
Y_2
Y_1
X_4
X_3
X_2
X_1
CURVA DE PUNTOS DE BURBUJA
B'
X MOLES
Y
X

V. F L U F E R O L O G I A.

I. CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

II. TRANSFERENCIA DE MOMENTUM: REGIMEN LAMINAR Y TURBULENTO.

III. BALANCES DE MATERIALES Y ENERGIA EN FLUJO DE FLUIDOS.

IV. TRANSFERENCIA DE CALOR: CONDUCCION Y CONVECCION (1a. parte).

V. TRANSFERENCIA DE CALOR: CONVECCION (2a. parte).

VI. TRANSFERENCIA DE MASA: DIFUSION (1a. parte).

VII. TRANSFERENCIA DE MASA: CONVECCION (2a. parte)

VIII. DISEÑO DE INTERCAMBIADORES DE MASA (Introducción).

+++++++++++++++++++++ ++++++++++++++

I.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

Existe un grupo particular de procesos, llamados procesos de transporte, en los cuales alguna cantidad física tal como el momentum, la masa o la energía, es transportada de una región a otra de un sistema.

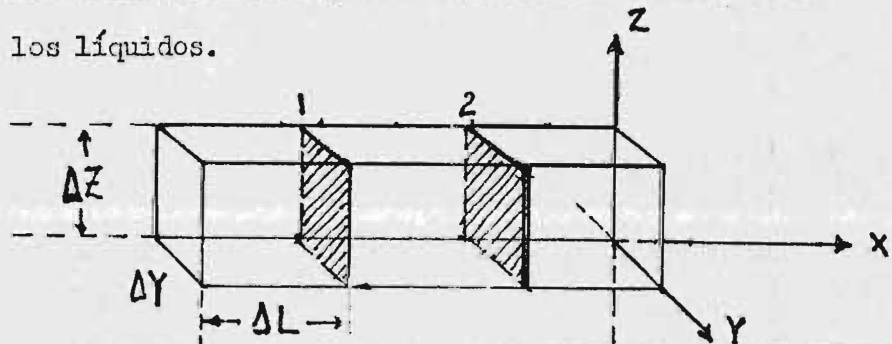
La Ecuación fundamental de los procesos de transporte es:

$$\text{Velocidad de Transferencia} = \text{Gradiente de Propiedad} / \text{Resistencia.} \qquad (1)$$

que es esencialmente la misma ecuación que se planteó en el primer capítulo de Termodinámica.

Los procesos de transporte han sido analizados en base al llamado Gas-Modelo, que es un gas con todas las condiciones de la idealidad, y las conclusiones que se obtienen de este análisis pueden extenderse teóricamente a los gases reales y a los líquidos.

SEA:



En cada instante, 1/6 de las moléculas se están moviendo en cada dirección.

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + d\Gamma/dx \underbrace{(-L)}_{\text{DIST. DEL PLANO 2 al 1}} \qquad (2)$$

donde Γ es la concentración de la propiedad que se va a transferir en el elemento de volúmen

Cantidad de propiedad de transporte: $\Gamma V : \Gamma_1 \Delta Y \Delta Z L$

A la relación que existe entre la cantidad que se va a transferir por unidad de área, por unidad de tiempo es lo que se conoce como FLUJO (Ψ).

Prosiguiendo el análisis tenemos que el flujo de 1 a 2 es:

$$\Psi_{1\to 2} = 1/6\ \Gamma_1 \Delta Y \Delta Z L / \theta \Delta Y \Delta Z = \Gamma_1 L/\theta \qquad (3)$$

donde: L es la trayectoria libre media.

θ es el tiempo.

$\bar{c}$ es la velocidad promedio de cada una de las moléculas.

Un Proceso Contimuo a régimen permanente se define como aquél en el que no hay acumulación, o sea: el flujo neto es:

$$\Psi_{1\to 2} + \Psi_{2\to 1} = 0 \qquad (4)$$

Substituyendo $L = \bar{c}\,\theta$, tenemos:

$$\Psi_{neto} = - 1/6\, L\, \bar{c}\;\; d\Gamma/ dx \qquad (5)$$

que es la Ecuación general para el Transporte Molecular.

Existen dos tipos fundamentales de Mecanismos de Transporte:

I. Transporte Molecular

II. Transporte Turbulento

En Transferencia de:	M e c a n i s m o s . Molecular.	Turbulento.
MOMENTUM	REGIMEN LAMINAR	REGIMEN TURBULENTO
CALOR	CONDUCCION	CONVECCION
MASA	DIFUSION	CONVECCION

En este punto es conveniente definir el concepto de MOMENTUM (M):

El Momentum de un cuerpo se define como el producto de su masa por su velocidad, o sea:

$$\bar{M} = m\,\bar{v} \qquad (6)$$

siendo la masa un escalar y la velocidad un vector, el Momentum es una magnitud vectorial. Está dado en unidades de Kg m / s

La FUERZA se define como la variación del momentum con respecto al tiempo, o sea:

$$\bar{F} = d\bar{M}/dt \qquad (7)$$

la fuerza es una magnitud vectorial y está dada en unidades de Kg m o Kg fza.

El ESFUERZO se define :

$$\overline{E} = \overline{F}/A \qquad (8)$$

el Esfuerzo es una magnitud vectorial y está dado en Kg fza / m^2.

Y finalmente, el Esfuerzo cortante se define:

$$\overline{E}_c = \overline{F}tangencial / A . \qquad (9)$$

La Ecuación fundamentalpara el transporte de momentum molecular es:

$$\Psi momentum = \overline{E}_c \; g_c = - \mu \; d\,\overline{v} / dx \qquad (10)$$

donde: g_c es un factor de conversión adimensional igual a 32.2 pie lb / lb_f seg^2

o bien 981 g cm / g_f seg^2

μ es la viscosidad

La VISCOSIDAD es una propiedad de transporte y se define dimensionalmente:

$$[\mu] = M / L\,t \qquad (11)$$

su unidad fundamental de medida es el POISE g / cm seg

La Viscosidad cinemática es: $\nu = \mu / \rho$ su unidad es el Stoke. cm^2/seg.

La Ecuación fundamental para la transferencia de ~~masa~~ CALOR (molecular) es:

$$\Psi calor = - k \; dT/dx \quad (12)$$

donde: k es la Conductividad térmica

La CONDUCTIVIDAD TERMICA es una propiedad de transporte y se define dimensionalmente como: $[k] = E / L\,T\,t$ (13)

y se expresa por consiguiente en: BT /hr pie ^oF.

La Ecuación fundamental para la Transferencia de Masa (molecular):

$$\Psi masa = - D \; dC_a/dx \quad (14)$$

donde: Ψ: N_a/A o sea, la velocidad de transferencia de masa / área de transf .

D es la Difusividad.

La DIFUSIVIDAD es una propiedad de transporte y se def.en términos dimensionales:

$$[D] = M / L\,t \qquad (15)$$

El coeficiente dinámico de Difusividad se dá en Kg/m seg o lb/pie seg

El coeficiente cinemático de Difusividad se dá en cm^2/seg

Si apelamos a un lenguaje vectorial, tenemos, que la Ecuación fundamental para el Transporte Molecular es:

$$\Psi = -\phi \nabla \Gamma \qquad (16)$$

ECUACIONES FUNDAMENTALES:

Transferencia de Momentum: Régimen Laminar: Atendiendo la Ecuación fundamental de la Fluferología (1), en este caso existe como potencial directriz un Gradiente de Momentum y como resistencia, el inverso de la Viscosidad ($1/\mu$).

$$\Psi_{mom.} = -\mu \nabla M \qquad (17)$$

que es la LEY DE POISEUILLE.

Transferencia de Calor: Conducción: En este caso existe un Gradiente de Temperaturas y la resistencia está representada por el inverso de la Conductividad térmica:

$$\Psi_{calor} = -k \nabla T \qquad (18)$$

que es la LEY DE FOURIER.

Transferencia de Masa: Difusión: En este caso existe un Gradiente de Concentraciones y la resistencia es el inverso de la Difusividad:

$$\Psi_{masa} = -D \nabla C \qquad (19)$$

que es la LEY DE FICK.

Finalmente para terminar este capítulo preliminar, es necesario anotar que existen dos formas por las cuales puede transferirse una propiedad:

I. Transferencia sencilla: $d(\Psi A)/dx = 0$ (20)

II. Transferencia con Generación Interna:

$$d(\Psi A) = G\, dV \qquad (21)$$

donde: G es la generación interna que se produce.

Esta clase de transferencia resulta, cuando una cantidad de la propiedad que se transfiere se genera en el elemento de volúmen bajo consideración. La masa, el calor o el momentum generados, dentro del elem. de volúmen, deben lógicamente haber estado presentes en una forma de energía diferente, ántes de que ocurriera la transformación.

II.- TRANSFERENCIA DE MOMENTUM: REGIMEN LAMINAR Y TURBULENTO.

Cuando un fluido fluye por un ducto de pequeña sección y a una velocidad relativamente baja se dá un REGIMEN LAMINAR, pero a altas velocidades — aparece el REGIMEN TURBULENTO, que está caracterizado por una masa de remolinos que coexisten en la corriente que fluye.

El parámetro fundamental para la medición de los rangos en los que — ocurre flujo laminar o turbulento es el denominado NUMERO DE REYNOLDS:

$$Re \equiv (D\, v\, \rho) / \mu \qquad (22)$$

donde: D es el diámetro del ducto de que se trate. (m)

v es la velocidad del fluido.

ρ es la densidad del fluido.

Y es desde luego, adimensional.

Los rangos indicadores son los siguientes:

$Re \leqslant 2100 \longrightarrow$ R'egimen laminar.

$Re > 10000 \longrightarrow$ Régimen turbulento.

REGIMEN LAMINAR: TRANSFERENCIA SENCILLA:

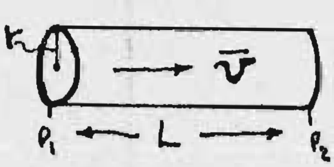
$$(E_c\, g_c\, A) = - \mu . A\, dv/dx \qquad (23)$$

que es la Ecuación (10), y ahora, integrando, tenemos:

$$\int_{V_1}^{V_2} \mu\, d\, v = - E_c\, g_c\, A \int_{x_1}^{x_2} dx/A \qquad (24)$$

TRANSFERENCIA CON GENERACION INTERNA: Como ejemplo notemos, que en cada capa - de fluido se está transmitiendo el momentum que se está desplazando hacia las paredes del ducto, en donde se convierte (genera) en calor por la fricción.

A partir de $d (\Psi A) = G\, dV$ tenemos:



$A = 2\pi r L$ (superficie hacia la cual se está transf. el momentum)

$V = SL = \pi L\, r^2$

$dV = 2\pi r L\, dr$ y entónces;

$$d\left(-\mu\, dv/dr \cdot 2\pi r L \right) = \underbrace{-\Delta P\, g_c/\Delta Y}_{G} \cdot 2\pi r L\, dr$$

$$d\left(-\mu\, dv/dr \cdot 2\pi r L \right) = -\Delta P\, g_c/\Delta Y \cdot 2\pi L\; r^2/2$$ y de aquí:

$$-\mu\, dv/dr = -\Delta P/2 \cdot g_c r/\Delta Y \qquad (25)$$

O sea, el Gradiente de velocidades varía linealmente con respecto al radio. El Esfuerzo cortante varía también linealmente con respecto al radio. No hay Esfuerzo cortante en el centro del ducto y es un máximo en la pared de la tubería.

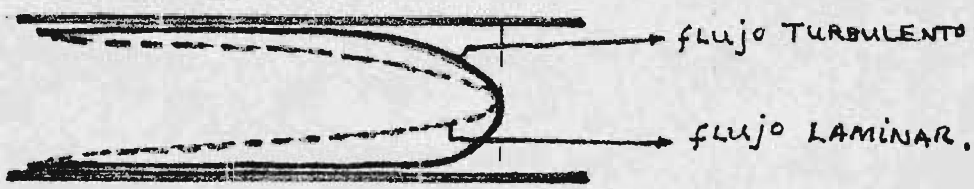
$$(E_c\, g_c)/(E_c\, g_c)_1 = r/r_1$$

Integrando la ecuación (25), tenemos:

$$\int dv = \Delta P\, g_c / 2\Delta Y \mu \,.\int r\, dr$$ y por tantp :

$$\bar{v} = (\Delta P\, g_c\, r^2)/\, 4\Delta Y \mu. + \text{Cte.} \qquad (26)$$

O sea, la velocidad con respecto al radio tiene una forma de distribución PARABOLICA:



Definición de GASTO VOLUMETRICO:

$$Q = \int_0^{S_1} v\, ds = \bar{v}\, s \qquad (27)$$

donde: Q es el gasto, en m^3/ seg.

$\bar{v}$ es la velocidad media

s es la sección del ducto.

Ahora tenemos: $s = \pi r^2$, $ds = 2\pi r\, dr$, substituyendo en Q :

$$\bar{v}\,(\pi r^2) = \int_0^{r_1} 2\pi v r\, dr,$$ y de aquí, llegamos a la ECUACION DE HAGEN - POISEUILLE:

$$-\Delta P = (\, 32\, \bar{v}\, L\, \mu)\, /\, g_c\, D^2 \qquad (28)$$

que se cumple para Régimen laminar.

III.- BALANCES DE MATERIALES Y ENERGIA EN FLUJO DE FLUIDOS.

Hemos visto que la ecuación fundamental para la Transferencia de Momentum (Molecular, Estado estable) es la ec. 17. :

$$\Psi_{mom.} = -\mu \nabla \bar{M}$$

BALANCE DE MATERIALES: Ecuación de Continuidad, para fluidos compresibles (densidad variable) e incompresibles (densidad constante) :

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \qquad (29)$$

O sea, el Balance de Materiales realizado sobre una determinada porción de fluido es la suma de la variación de la densidad con respecto al tiempo y de la divergencia del vector ($\rho \bar{v}$), o sea, el flujo del vector (ρv) a través de la superficie ΔS, por unidad de volumen.

Del Cálculo sabemos, que el rotacional de un campo vectorial confiere a este, propiedades de una rotación. Si el campo corresponde al de velocidades de un fluido en movimiento, por ejemplo una rueda de paletas, que se sitúe en diversos puntos del mismo, tiende a girar en las regiones en las que el rotacional del campo A sea diferente de cero:

$$\nabla \times \bar{A} \neq 0 \qquad (30)$$

y es la definición de un campo rotacional o de vórtices.

Mientras que si el rotacional es igual a cero, no har rotación:

$$\nabla \times \bar{A} = 0 \qquad (31)$$

y el campo A se denomina irrotacional.

Los procesos de transporte en los cuales la concentración de la propiedad transferible en un punto, varía con el tiempo, se les denomina Procesos de ESTADO INESTABLE, y su ecuación general es:

$$\partial \Gamma / \partial t = \delta \nabla^2 \Gamma \qquad (32)$$

donde: $\nabla \cdot (\nabla \Gamma) = \nabla^2 \Gamma$ es el LAPLACIANO de Γ.

La Ecuación para Transferencia de Momentum es:

$$\partial \bar{M} / \partial \theta = \mu \nabla^2 \bar{M} \qquad (33)$$

BALANCE DE ENERGIA: Ecuación de BERNOULLI para fluidos compresibles e incompresibles:

$$\Delta (\bar{v}^2/2\alpha g_c) + \Delta Z \,(g/g_c) + \int \bar{V}\, dP + \sum F = -W_f \qquad (34)$$

E.Cinética	E.Potenc.	Trabajo Termod.	Fricciones	Trabajo que está orig. el sistema.

donde: α es un factor para tomar en consideración el efecto de la distribución de velocidades en el canal de flujo sobre la energía cinética promedio. En flujo turbulento $\alpha \cong 1$.

O sea, la Ecuación de Bernoulli nos expresa el Balance de Energía entre dos puntos determinados de un sistema de flujo de fluidos.

FLUIDOS INCOMPRESIBLES:

Ecuación de Continuidad:

$$\dot{m} = \rho\, v\, s = \text{constante.} \qquad (35)$$

donde: $\dot{m}$ es la variación del flujo en masa por unidad de tiempo (gasto en masa)

Masa Velocidad: Se define como:

$$G \equiv \dot{m}/s = \bar{v}\,\rho\,. \qquad (36)$$

y se expresa en Kg/m^2 seg.

Ecuación de Bernoulli para un sistema que maneja líquidos:

$$Z_1(g/g_c) + P_1 V_1 + \bar{v}_1^2/2\alpha g_c - W_f = Z_2(g/g_c) + P_2 V_2 + \bar{v}_2^2/2\alpha g_c + \sum F \qquad (37)$$

Ecuación de Bernoulli en cabezas: cada uno de los términos se expresa en unidades de longitud, en función de que la CABEZA DE UNA BOMBA representa físicamente la altura a la que la bomba puede mandar el fluido, en dirección vertical.

$$P_a/\rho + Z_a + v_a^2/2\alpha g_c - C = P_b/\rho + Z_b + v_b^2/2\alpha g_c + \sum F \qquad (38)$$

en donde C es la cabeza de la bomba:

$$-C = \underbrace{\Delta P/\rho + \Delta Z}_{\text{cabeza estática.}} + \underbrace{\Delta v^2/2\alpha g_c + \sum F}_{\text{cabeza dinámica.}} \qquad (38')$$

La cabeza de la bomba puede identificarse con ηW_b, expresado en m. donde:

η es la eficiencia de la bomba y $\bar{W}_b$ es el trabajo de la bomba.

O sea, es la energía mecánica liberada al fluido, por la bomba: ηW_b.

POTENCIA DE LA BOMBA: Se tratará en el siguiente capítulo.

La ecuación por la que pueden calcularse las fricciones, en régimen — turbulento, recibe el nombre de Ecuación de FANNING:

$$\sum F = (2f\, v^2 L) / (g_c D) \qquad (39)$$

donde: f es el factor de fricción.

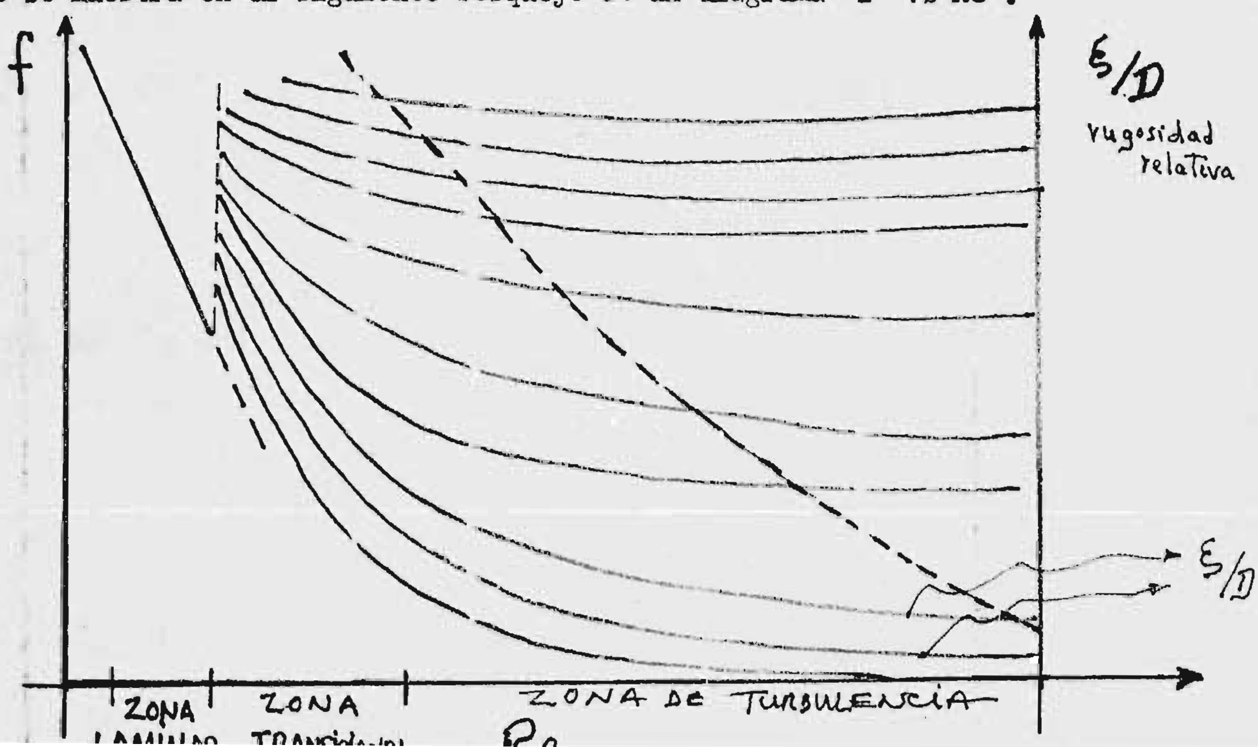
v la velocidad del fluido.

L la longitud que recorre el fluido.

D el diámetro del ducto.

El factor de fricción f es función del número de Reynolds y del parámetro ξ/D., como se muestra en el siguiente bosquejo de un diagrama f vs Re :

ξ es rugosidad



ALGUNOS PARAMETROS DE DISEÑO:

1.- Diámetro equivalente: $D_e = 4\,R_h$ (40)

2.- Radio Hidráulico: Rh = Area de flujo/ Perímetro mojado. (41)

3.- Longitud equivalente: $L_e = L$ recta $+ L$ accesorios. (42)

4.- Espesor de tubería: $e = (P\,D)/2\,E + c$ (43)

donde: e es el espesor de tubería

P es la presión de diseño

D es el diámetro externo de la tubería.

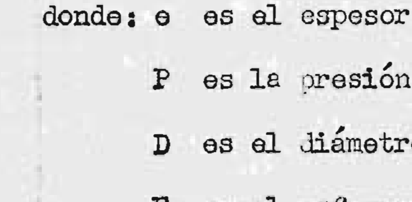
E es el esfuerzo máximo permiscible.

c es un márgen adicional que se adiciona, por concepto de corrosión al sistema.

5.- Cédula: Cédula $= (P/E)\ 1000.$ (44)

PERDIDAS POR FRICCION EN UNA EXPANSION SUBITA DE SECCION TRANSVERSAL:

Las fricciones debidas a expansión súbita son proporcionales a la cabeza de velocidades del fluido.



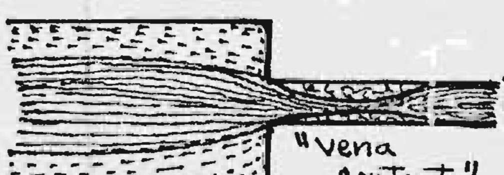
$$\sum F = k_e\ v_a^2/2\alpha g_c \qquad (45)$$

k_e es un factor de proporcionalidad, llamado Coeficiente de pérdidas por expansión:

$$k_e = (1 - s_a/s_b)^2 \qquad (46)$$

donde: s_a y s_b son las áreas de sección transversal respectivas, que se muestran en el dibujo.

PERDIDAS POR FRICCION EN UNA CONTRACCION SUBITA DE SECCION TRANSVERSAL:



$$\sum F = k_c\ v_b^2/2\alpha g_c \qquad (47)$$

$$k_c = 0.4\,(1 - s_b/s_a) \qquad (48)$$

Y finalmente: $\sum F = \left[v^2/2\alpha g_c \left(4\,f\,\text{Lrecta}/D \right) + \left(\sum k \text{ de todos los accesorios} \right) \right]$ (49)

FLUIDOS COMPRESIBLES:

Definición del Número de MACH:

$$\text{Mach} \equiv v \text{ fluido}/\ v \text{ sonido en dicho fluido.} \qquad (50)$$

Si: Mach > 0.7 $\longrightarrow$ flujo a altas velocidades.

Mach < 0.7 $\longrightarrow$ flujo a bajas velocidades.

Mach $= 1$ $\longrightarrow$ flujo sónico: el fluido se está moviendo a la velocidad del sonido.

La velocidad del sonido, se expresa como:

$$v_{\text{sonido}} = \sqrt{\gamma\, g_c R\, T} \qquad (51)$$

donde $\gamma = C_p/C_v$.

La velocidad del sonido depende de la naturaleza del gas.

ECUACION DE CONTINUIDAD: Si escribimos la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles(~~y lueg~~) en forma logarítmica y luego la diferenciamos, tenemos:

$$d\rho/\rho + ds/s + dv/v = 0 \qquad (52)$$

BALANCE DE ENERGIA: Para flujo de fluidos compresibles la solución del balance de energía deberá tomar en consideración la variación del volúmen específico con respecto a los cambios de presión. En lugar de la forma diferencial del balance de energía, debemos usar su forma integral:

$$\int_{V_1}^{V_2} \bar{v}\, d\bar{v}/\alpha\, g_c + \int_{Z_1}^{Z_2} g/g_c\, dZ + \int_{P_1}^{P_2} V\, dP + \sum F = -W_f \qquad (53)$$

Y el término que expresa las fricciones será:

$$\sum F = \int_{L_1}^{L_2} f\bar{v}^2/2g_c D \quad d(\sum L) \qquad (54)$$

Sin embargo, como no existe expresión analítica para $f\bar{v}^2$ como función de L tenemos que encontrar una expresión que pueda aplicarse con más facilidad.

Si suponemos Estado Estable, la masa velocidad será constante, para un—

ducto de sección transversal uniforme:

$$G = \bar{v}\rho = \bar{v}/V \qquad (55)$$

donde: G es la masa velocidad (Kg/m^2 seg)

$\bar{v}$ es la velocidad lineal promedio (m/seg)

ρ es la densidad del fluido (Kg/m^3)

V es el volúmen específico (m^3/kg)

De esta ecuación, tenemos: $\bar{v} = G\,V$

$$d\bar{v} = G\,dV$$

Ahora, substituyendo $\bar{v}$ en la ecuación (53), tenemos finalmente:

$$\int_1^2 (G^2 V dV)/g_c \alpha + \int_1^2 g/g_c \; dZ + \int_1^2 V\,dP + \int_1^2 (fG^2V^2)/2g_c D \; dL = -W_f \qquad (56)$$

En este punto es conveniente anotar que los fundamentos de Transferencia de Momentum que se han expuesto, dében aplicarse al análisis de operación y diseño de BOMBAS y SEPARADORES DE FASE, así como al diseño de TUBERIAS y ACCESORIOS de las mismas.

IV. TRANSFERENCIA DE CALOR.-CONDUCCION Y CONVECCION (1a. parte)

CONDUCCION: Desde un punto de vista sencillo podemos enunciar la Ley de FOURIER como:

$$(57) \qquad q/A = -k \; dT/dx$$

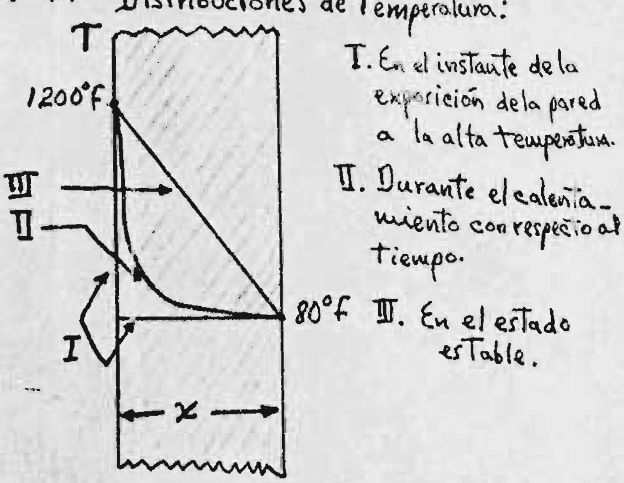
donde q es el calor transferido

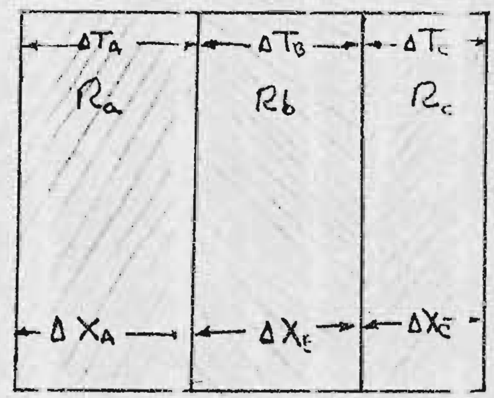
A es el área de transferencia de calor

k es la conductividad térmica.

dT/dx es el gradiente de temperaturas.

Sea: ++ Distribuciones de Temperatura:



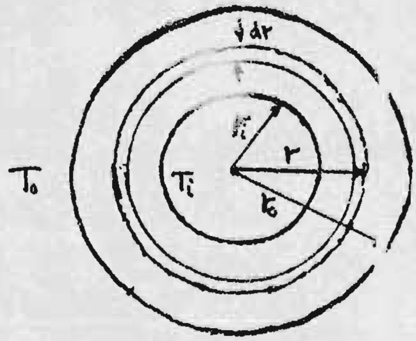


Resistencias térmicas en Serie

Resistencias en Serie:

$$(58) \qquad q = \Delta T/R = \frac{\Delta T}{\underbrace{\Delta X_a/k_a A}_{R_a} + \underbrace{\Delta X_b/k_b A}_{R_b} + \underbrace{\Delta X_c/k_c A}_{R_c}}$$

Flujo de Calor a través de un Cilindro: Sea ++



++ Estos dibujos han sido tomados del libro de Operaciones Unitarias de Mc. Cabe y Smith. + (41)

Aplicando la Ley de Fourier, e integrando:

$$(59) \qquad q = \frac{k(2\pi L)\,(T_i - T_o)}{\ln\,(r_o/r_i)}$$

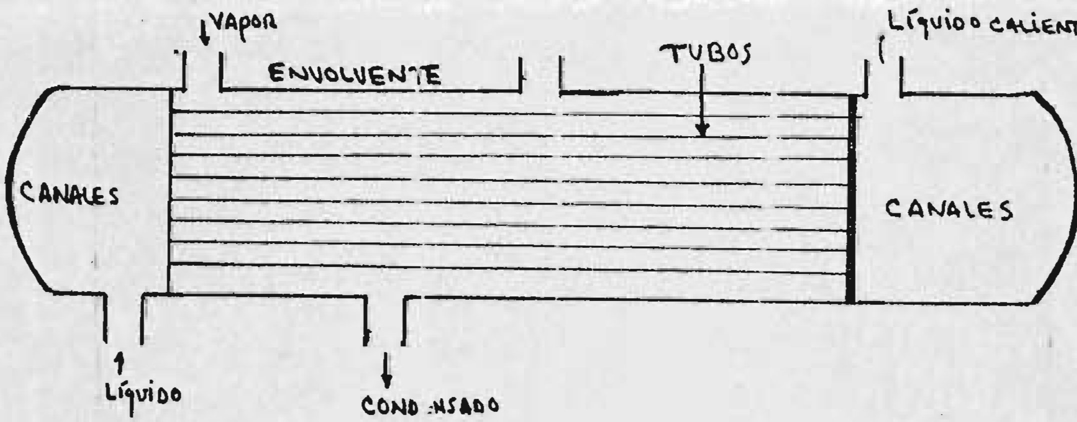
donde L es la longitud del cilindro.

Radio medio logaritmico:

$$(60) \qquad \bar{r}_1 = \frac{r_o - r_i}{2.3 \log\,(r_o/r_i)}$$

En el flujo de calor, de un fluido a otro fluido más frío a través de una pared sólida, tenemos; que el calor transferido puede ser SENSIBLE o LATENTE en cuyo caso puede tratarse de una condensación o de líquidos en ebullición.

Sea: Un diagrama simple que representa un cambiador de calor:



CONDENSADOR TUBULAR DE UN SOLO PASO.

BALANCES DE ENERGIA: Para una corriente caliente o fría a través de un cambiador de calor:

$$(61) \qquad q = \dot{m}\,(H_b - H_a)$$

donde $\dot{m}$ es el flujo en masa (kg/hr , lb/hr)

q es el flujo de calor dentro de la corriente(BTU/hr)

H_a, H_b son las entalpias de las corrientes de entrada y de-salida,respectivamente, BTU/lb.

Balance Total:

$$(62)\quad q = \dot{m}Cp_c\,(T_{ca} - T_{cb}) = \dot{m}\,Cp_f(T_{fb} - T_{fa})$$

Para las corrientes caliente y fría, respectivamente.

Cp es el calor específico (BTU/lb, °F)

El Balance total para un Condensador, es:

$$(63)\quad q = \dot{m}_c \lambda = \dot{m}_f\,Cp_f\,(T_{fb} - T_{fa})$$

donde: $\dot{m}_c$ velocidad de condensación del vapor (lb/hr)

λ calor latente (BTU/lb)

COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR:

En términos generales, la ecuación de definición del coeficiente de transferencia de calor, total, puede escribirse como:

$$(64)\quad dq / dA = U\,\Delta T$$

donde U es el coeficiente de transferencia de calor, total.

Para aplicar la ecuación a un área entera de un cambiador de calor, debemos integrarla, para lo cual se impondran las siguientes restricciones:

a) U se considera constante

b) Cp_c, Cp_f se consideran constantes

c) La transferencia de calor con el ambiente es despreciable

d) Flujo estable.

Es conveniente anotar aquí, que U varía con la temperatura de los fluidos, pero su variación es gradual, por tanto cuando los rangos de temperatura son moderados, la consideración de que el ~~coef~~ coeficiente de transferencia de calor sea constante es aceptable.

menos

$$(65) \qquad q_T = U A_T \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)} = U A_T \Delta \bar{T}_{log}$$

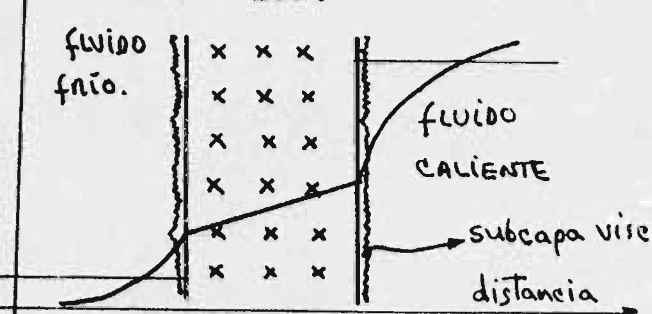
donde q_T ES el calor total transferido en el cambiador

A_T es el área total de la superficie de transferencia de calor.

$$\Delta \bar{T} = \Delta T_2 - \Delta T_1 \; / \ln(\; T_2 / \; T_1 \;)$$

COEFICIENTES INDIVIDUALES: Gradientes de temperatura en convección forzada:

Sea:



El coeficiente de transferencia de calor, individual o de superficie está dado por:

$$(66) \qquad h = (dq/dA) \; / \; \bar{T} - T_p$$

donde dq/dA es el flujo de calor

$\bar{T}$ es la temperatura promedio del fluido

T_p es la temperatura en la pared.

COEFICIENTES TOTALES: U_o (tomando el área externa como área base)

$$(67) \qquad U_o = \left(D_o/D_i hd_i + D_o/D_i h_i + x_p D_o / k_m D_{log} + 1/h_o + \underbrace{1/h_{d_o}}_{1/h_{do}} \right)^{-1}$$

donde D_o es el diámetro ~~interno~~ externo

D_i es el diámetro interno

x_p es el espesor de pared

k_m es la conductividad térmica media

hi,ho son los coeficientes indiv. /// hdi,hdo son los factores de

V. TRANSFERENCIA DE CALOR./ CONVECCION (2a. parte).

CONVECCION. SIN CAMBIO DE FASE.

Un gradiente de temperaturas origina un gradiente de densidades, lo que origina la transferencia de calor por convección.

A) En FLUIDOS A REGIMEN LAMINAR.

Las relaciones fundamentales son:

$$(68) \quad Nu = 2\,(Gz)^{1/3} \cdot \varphi \cdot \psi$$

donde: Nu es el número de Nusselt: $(69) \quad Nu \equiv (h_i\,D) / k$

donde: h_i es el coeficiente de transferencia de calor
D es el diámetro del ducto
k es la conductividad térmica.

Gz es el número de Graetz: $(70) \quad Gz \equiv (\dot{m}\,Cp) / k\,L$

donde: $\dot{m}$ es el flujo en masa
Cp es la capacidad calorífica a P cte.
K es la conductividad térmica
L es la longitud del ducto

φ es el factor de corrección por viscosidad:

$$(71) \quad \varphi = (\mu/\mu_p)^{0.25}$$

μ_p viscos. a la T de la pared.

ψ es el factor de corrección por concepto del efecto de la convección natural:

$$(72) \quad \psi = \frac{2.25(1 + 0.01\ Gr^{1/3})}{\log\ Re}$$

donde Gr es el número de Grashoff:

$$(73) \quad Gr \equiv (D^3\,\rho^2\,G\,\beta\,\Delta T_i)/\mu^2$$

donde: G es la aceleración de la gravedad: 9.81 m/s^2
32.2 pies/s^2

β. Coeficiente de expansión térmica(pies^3/lb ^oF)

y las demás letras simbolizan la nomenclatura usual.

$$(\quad) \ \beta = (\partial V/\partial T)_P / V$$

donde: V es el volúmen específico del fluido (pie^3/ litro)

Para líquidos, β. puede considerarse constante para un determinado rango de temperaturas:

$$\beta = (\Delta V / \Delta T) / V_m$$

En términos de densidad: (74) $\beta = (\rho_1 - \rho_2) / \bar{\rho}_a (T_2 - T_1)$

donde ρ_1 es la densidad del fluido a la temperatura T_1.

B) EN FLUIDOS A REGIMEN TURBULENTO.

Las relaciones fundamentales-son :

$$(75) \quad Nu = 0.027 \, (Re)^{0.8} \, (Pr)^{0.33}$$

donde: Pr es el número de Prandtl:

$$(76) \quad Pr \equiv (Cp \, \mu) / k$$

Para líquidos viscosos la ecuación requiere un factor de corrección:

$$\varphi = \left(\frac{\mu}{\mu_p} \right)^{0.14}$$

Para el Régimem Transicional:

$$(77) \quad Nu = 0.116 (Re^{0.66} - 125) \, Pr^{1/3} \cdot \varphi \left[1 + (D/L)^{0.66} \right]$$

En el caso de la Convección Natural, tenemos:

$$(78) \quad Nu = \alpha \, (Gr \cdot Pr)^{0.25}$$

α es una cte.

CONVECCION. CON CAMBIO DE FASE;

A) CONDENSACION: Tipos de Condensación:

1. Tipo película
2. Tipo gota

1. Tipo película: Ocurre sobre tubos de metales comunes, si el vapor y el tubo están limpios, en presencia o ausencia de aire; sobre superficies rugosas o lisas.
2. Tipo gota: Ocurre cuando la superficie está contaminada. Es más fácil mantenerla sobre una superficie lisa, que sobre una super-

ficie rugosa.

Sólo una capa de contaminación se requiere para causar — condensación tipo gota.

Este tipo de condensación es deseable pues permite la obtención de un coeficiente de transferencia más alto, que en el caso de la condensación tipo película.

Sin embargo, la condensación tipo gota es muy difícil de mantener, y la resistencia de la capa de vapor condensado en la condición de película es muy pequeña, comparada con la resistencia del tubo — condensador, y por lo tanto se prefiere la condensación tipo película.

ECUACIONES DE NUSSELT:

1. Las ecuaciones están basadas en la suposición de que el vapor y el líquido, en la frontera de la película, están en equilibrio termodinámico, de tal manera que sólo la capa de condensado ofrece resistencia al flujo de calor.
2. El condensado fluye por gravedad, a régimen laminar.
3. La velocidad del líquido en contacto con la pared es cero.
4. La temperatura del vapor que se está condensando, y la Temperatura del medio, son constantes.
5. No se considera subenfriamiento alguno.

Coeficiente de Transferencia de Calor para un vapor que se condensa en el exterior de un tubo vertical:

$$(79) \qquad h_o = 0.943 \left(\frac{k_f^3 \, \rho_f \, \lambda \, g}{\mu_f \, L \, \Delta T_o} \right)^{0.25}$$

donde: f significa que las propiedades se han evaluado a la temperatura de referencia, la cual se define como:

$$(80) \qquad T_f = T_c - 3/4 (T_c - T_p)$$

donde: T_c es la temperatura de condensación del vapor

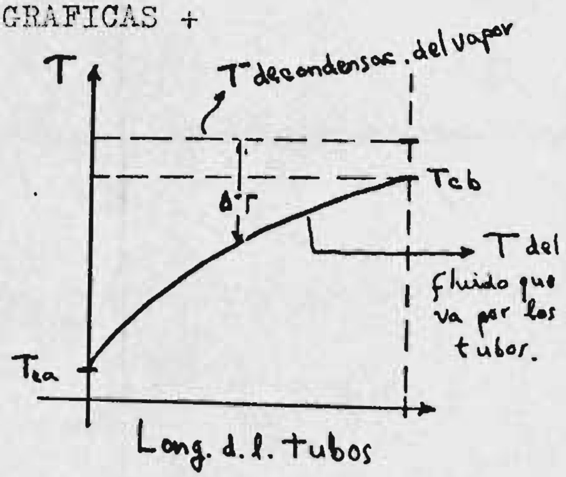
T_p es la temperatura de la pared ext. del tubo.

Para Tubos horizontales, tenemos:

$$(81) \quad h_o = 0.725 \left(\frac{k_f^3 \; \rho_f^2 \; g \; \lambda}{\mu_f \; D_o \; \Delta T_o \; N^{2/3}} \right)^{0.25}$$

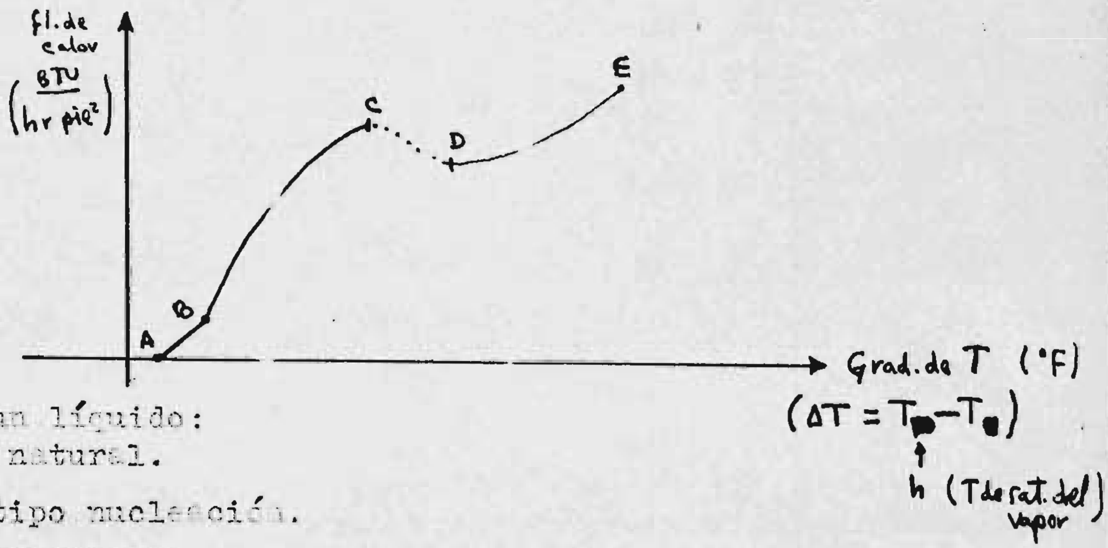
donde: N es el núm. de tubos del cambiador de calor y es: $N^{2/3}$

GRAFICAS +



B) LIQUIDOS EN EBULLICION: +

SEA: Gráfica Flujo de Calor vs Gradiente de Temperaturas :



Ebullición de un líquido:

AB: Convección natural.

BC: Ebullición tipo nucleación.

El punto C representa el punto máximo; la caída de temperaturas correspondiente al punto C se llama ΔT crítica.

\+ Estas Gráficas han sido tomadas del libro de Operaciones Unitarias de Mc. Cabe y Smith.

Los aparatos de transferencia de calor, dében ser diseñados y operados de tal manera, que la ΔT en la película de líquido en ebullición sea más pequeña que la ΔT crítica, lo cual favorece el coeficiente de transferencia.

El factor importante en el control de la velocidad de separación de burbuja, es la tensión interfacial entre el líquido y la superficie de calentamiento.

La alta velocidad de la transferencia de calor en la ebullición por nucleación es fundamentalmente el resultado de la turbulencia generada en el líquido, por la acción dinámica de las burbujas.

CD: Región de transición. Al punto D se le denomina punto de Leidenfrost.

Muchas burbujas tienden a coalescer sobre la superficie de calentamiento para formar una capa aislante, en la cual el calor se transfiere por conducción (baja el flujo de calor).

DE: A muy altas caídas de temperatura el calor se transfiere por Radiación. La velocidad de transferencia de calor es baja debido a las grandes caídas de temperatura.

Un VAPORIZADOR es un cambiador de calor diseñado especialmente para suministrar calor latente de vaporización a un fluido. Si el vapor ~~de agua~~ formado es vapor de agua, el cambiador se llama generalmente EVAPORADOR.

Los fundamentos de Transferencia de Calor dében en este punto aplicarse al diseño de CAMBIADORES DE CALOR Y EVAPORADORES.

NOTA: CALCULO DE PROPIEDADES DE TRANSPORTE:

Para gases reales: Basados en la Teoría de Lennard-Jones:

Para la viscosidad de un gas puro:

$$(82)\qquad \mu = 2.6693 \times 10^{-21} \cdot \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_1} \qquad (\text{ g/cm.seg})$$

donde: M es el peso molecular (g/gmol)

T es la temperatura absoluta

σ es el diámetro de colisión (cm)

Ω_1 es la integral de colisiones $\Omega_1 = f(T^+)$

T^* es la temperatura reducida $= kT/\varepsilon$.

ε/k es el parámetro del potencial (^oK).

El potencial de Lennard-Jones es una expresión de la interacción -- y de la energía potencial que puede ser usado para predecir las--- propiedades de transporte de ciertos gases con buena exactitud:

Para gases no polares:

$$(83)\qquad \phi(r) = 4\,\epsilon \left[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6 \right]$$

donde: $\phi(r)$ es la energía potencial intermolecular

ϵ es la energía máxima de atracción de dos moléculas.

σ es la distancia de proximación más cercana de dos moléculas que chócan con una determinada energía ~~ci~~ cinética inicial igual a cero.

r es la distancia entre las moléculas.

Para la conductividad térmica de un gas monoatómico puro:

$$(84)\qquad k = 1.989\times 10^{-20} \; \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_1} \qquad (\text{cal/seg cm } ^oC)$$

Y también, en función de la viscosidad:

$$(85)\qquad k = 15/4\,(R/M)\mu .$$

Para moléculas poliatómicas:

$$(86)\qquad k = 15/4\,(R/M)(\,4/15 \cdot Cv/R + 3/5\,)\mu .$$

Para el cálculo del coeficiente de difusividad, tenemos: Para --- mezclas binarias: D en cm^2/seg.

$$(87) \qquad D_{ab} = 2.628 \times 10^{-19} \sqrt{\frac{(1/2)T^3 \, (1/M_a + 1/M_b)}{P \quad \sigma^2_{ab} \quad \Omega_2}}$$

donde: M_a es el peso molecular de la especie a.

M_b es el peso molecular de la especie b.

P es la presión total(atm)

σ_{ab}, Ω_2, T_{ab}^+ son las constantes de Lennard-Jones.

$\sigma_{ab} = 1/2 \, (\sigma_a + \sigma_b)$

$$\epsilon_{ab}/k = \sqrt{\epsilon_a/k \times \epsilon_b/k} \quad ,, \quad T^+_{ab} = kT/\epsilon_{ab}$$

El modelo de Lennard-Jones, no se cumple para moléculas polares, - para radicales libres o para moléculas largas.Para estos se aplica la ecuación de Gilliland :

$$(88) \qquad D = \frac{0.0043 \cdot \sqrt{T^3 \, (1/M_a + 1/M_b)}}{P \, (V_a^{1/3} + V_b^{1/3})^2}$$

donde: V es el volúmen molar.

Propiedades de transporte en los líquidos:

$$(89) \qquad D = A \, e^{-B/kT} \cdot T$$

donde: A es una función de la densidad del fluido específica para el transporte de masa.

B es una función de la energía relacionada al calor latente de vaporización.

C es una función de la densidad del fluido específica para el transporte de momentum.

$$(90) \qquad \mu = c \, e^{B/RT}$$

Combinando la dos anteriores:

$$(91) \qquad F = T/D\mu. = 1/AC$$

VI. TRANSFERENCIA DE MASA: DIFUSION. (1a. parte)

Hemos planteado que la ecuación fundamental del proceso de Difusión es:

$$\psi = - D \nabla C$$

Relaciones para Estado Estable: Transferencia Sencilla:

$$(92) \qquad Na/A = - D \quad dC/dx$$

que es la expresión de la ley de Fick .

Na es la velocidad de transferencia de masa.

A es el área de transferencia .

Ca es la concentración del componente A.

Contradifusión equimolar: el componente a se difunde a través del componente b, el cual se está difundiendo a la misma proporción molar que a pero en dirección opuesta. v.gr: en la destilación.

$$(93) \qquad Nb = - Na$$

Difusión a través de un gas estacionario: tiene lugar cuando una frontera del sistema es permeable sólo a un componente. v.gr: en absorción gaseosa, extracción líquido-líq.

En este tipo de Difusión es determinante la solubilidad.

$$(94) \qquad (Na/A)_t = - D \frac{C_t (Ca_2 - Ca_1)}{Cb_m (x_2 - x_1)}$$

donde: Ct es la concentración total.

Cbm es la concentración media log. de b.

Los desarrollos de diseño de equipo se referirán principalmente a: DESTILACION y ABSORCION GASEOSA.

ABSORCION GASEOSA: Es una operación unitaria en la cual se recupera un gas, de una mezcla gaseosa, por medio de un solvente líquido.

La operación incluye la transferencia de un componente soluble de una fase gaseosa a un absorbente líquido relativamente no volátil.

ECUACION para Transferencia con Generación Interna:

v.gr: cuando la transferencia de masa involucra reacción química, como sucede en el caso de un reactor de lecho catalítico:

$$(95) \qquad d^2C_a / dx^2 - (k / D) Ca = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de 2o. órden. Solución:

$$(96) \qquad Ca = \frac{Ca_2 \ \text{senh}\left(\sqrt{k/D}\ x\right) + Ca_1 \ \text{senh}\left[\sqrt{k/D}\,(x_2 - x_1)\right]}{\text{senh}\left(\sqrt{k/D}\ x\right)}$$

donde k es la cte. de velocidad de la reacción .

Ecuación que puede utilizarse para calcular la composición Ca en cualquier punto x, entre dos planos.

Ecuaciones para el Estado Inestable:

La concentración de la propiedad transferible en un punto, varía con el tiempo.

Para Transferencia Sencilla, tenemos :

$$(97) \quad \partial Ca / \partial \theta = D \nabla^2 Ca$$

Para geometría esférica, tenemos la siguiente solución:

$$(98) \quad Na = (Ca_o - Ca_i)\, d/6 \left(1 - 6/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)\, e^{-4\pi^2 n^2 D\theta / d^2} \right)$$

Ahora, tomando sólo el primer término de la serie convergente:

$$(99) \quad Na \cong (Ca_o - Ca_i)\, d/6 \left(1 - 6/\pi^2 \cdot e^{-4\pi^2 D\theta / d^2} \right.$$

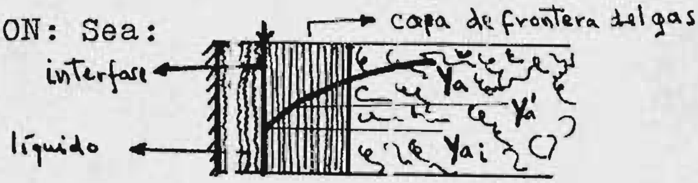
Na en kg mol / m^2

Para Transferencia con generación interna:

$$(100) \quad \partial Ca / \partial \theta = D \nabla^2 Ca + \underset{\sim}{\mathcal{L}}' .$$

VII. TRANSFERENCIA DE MASA: CONVECCION(2a. parte) ++.

CONVECCION: Sea:



TRANSF. DE MASA EN LA FASE GAS.

La Convección en transferencia de masa, consiste en el transporte de algún componente, de una región de más alta concentración, a una de menor concentración, por medio de remolinos.

Debe ponerse particular atención a la convección de masa a o desde una superficie que separa dos fases. Tal superficie puede ser por ejemplo la de un líquido, capaz de absorber algún componente del gas fluyendo sobre ella.

La transferencia de masa, de una fase a la interfase o viceversa está dada por:

$$(98) \qquad Ga = \beta_a A \Delta\Pi_a$$

donde: Ga es el flujo en masa de un fluido (kg/hr)

β_a coeficiente de transferencia de masa ($kg/m^2 . hr$)

A es el área de transferencia (m^2)

$\Delta\Pi_a$ es el módulo directriz.

El coeficiente de transferencia de masa β_a, dá la cantidad de la masa de un componente A transferida en la unidad de tiempo a una interfase de área unitaria, desde el volúmen de una de las fases, en un módulo directriz $\Delta\Pi = 1$.

Casos importantes en transferencia de masa:

++. El enfoque de este capítulo, así como el planteamiento de sus ecuaciones ha sido sugerido fundamentalmente por el libro: Transferencia de Masa y Absorbedores de T. Hobler (95) +.

I. Transferencia de masa en flujo forzado:

A. Turbulento (fase gas): en tuberías y en camas empacadas.

B. Laminar (fase gas).

II. Transferencia de masa en flujo no forzado:

A. Flujo de un líquido fluyendo por gravedad: en una pared, en — un empaque.

B. Flujo libre.

C. Un gas burbujeando a través de un líquido.

I. TRANSFERENCIA DE MASA EN FLUJO FORZADO:

A. TURBULENTO (fase gas). En un ducto. En una cama empacada.

Ecuación general:

$$(99) \quad She = c \quad Re^{a} \, Sc^{b}$$

donde: She es el número de SHERWOOD: $She \equiv \beta_a \, d / \delta_a \equiv kc \, d / Da$

donde: kc es el coeficiente de transf. de masa para contra — difusión equimolar.

δ_a es el coeficiente de difusividad dinámico (kg/m.hr)

d es el diámetro

Re es el número de Reynolds: $Re \equiv g \, d / \mu = v \, \rho \, d / \mu = v \, d / \nu$.

donde: g es la masa velocidad de un fluido kg/m^2hr

v es la velocidad lineal del fluido m/hr

ν es la viscosidad cinemática $m^2/seg.$ (μ, viscosidad)

Sc es el número de SCHMIDT: $Sc \equiv \mu / \rho \, Da = \nu / Da$

a, b, c son constantes

Para el caso más usual:

$$(100) \quad k_c \, d / D = 0.023 \quad Re^{0.83} \quad Sc^{0.33}$$

Los datos para esta relación se obtuvieron en una columna de pared húmeda. La ecuación se aplica cuando el fluido desciende a régimen — laminar y el gas asciende a régimen turbulento por la columna de — pared húmeda.

Para el caso de difusión del componente $\underline{a}$ a través de un componente estacionario $\underline{b}$ es:

$$(101) \qquad (k_c\, d / D)\,(C_{b\,m.log} / C_t) = 0.023\ Re^{0.83}\ Sc^{0.33}$$

Las ecuaciones anteriores (100) y (101) son confiables para:

$2000 \leq Re \leq 3500 \qquad 0.6 \leq Sc \leq 1000$

Para el caso de una cama empacada:

$$d_e = 4\epsilon/a, \quad g_e = G/S_{eq}, \quad S_{eq} = V_f/H$$

donde: d_e es diámetro equivalente

ϵ es porciento de vacíos

a es superficie específica (área)

g es masa vel. equivalente

G es masa velocidad

S_{eq} es superficie equivalente

V_f es volúmen libre entre empaque

H es altura de la cama.

De significación práctica es la ecuación de Morris y Jackson:

$$(102) \qquad \beta_a = R_g\, \beta_{ar} \qquad (\ kg/m^2\ hr\ )$$

donde: β_{ar} es el coeficiente que se dá para algunas condiciones - físicas y para el flujo de gas a través de un tubo húmedo. con diámetro de 1 plg.

R_g es el factor de película gaseosa de empaque. Se utiliza cuando se emplea empaque en lugar de tubos. (los valores de Rg dében consultarse en la literatura)

B. TRANSFERENCIA DE MASA EN FLUJO FORZADO(fase gas). REGIMEN LAMINAR:

Ecuación general:

$$(103) \quad She = c\ Re^{a}\ Sc^{b}\ (\ d/h\ )^{c}$$

donde h es la altura.

Tenemos:

$$(104) \quad She = 0.5\ Re\ Sc\ (\ d/h)$$

Rango de validez: $(Re\ Sc\ d/h) \leq 4.5$

Tenemos:

$$(105) \quad She = 1.62\ Re^{1/3}\ Sc^{1/3}\ (\ d/h\ )^{1/3}$$

Rango de validez: $(Re\ Sc\ d/h) > 13.$

II. FLUJO NO FORZADO:

A. FLUJO DE UN LIQUIDO FLUYENDO POR GRAVEDAD:

Ecuación general:

$$(106) \quad She = c\ Re^{a}\ Sc^{b}\ (\vartheta/h)^{d}$$

O bien:

$$(107) \quad \beta_a \vartheta/\delta_a = c\ (\ 4\Gamma/\mu\ )^{a} (\ m\ \mu/\delta_a\ )^{b}\ (\ \vartheta/h)^{d}$$

donde: $\vartheta = \mu^2/g\ \rho^2$

donde [redacted] g es la aceleración estandar de la gravedad.

Γ es el flujo en masa por perímetro mojado. kg/m hr.

m = Ma/M (pesos moleculares)

h es la altura.

Según el caso, dében consultarse las diversas tablas que existen en la literatura.

B. FLUJO LIBRE: Ecuación general:

$$(108) \quad She = c\ Gr'^{a}\ Sc^{b}$$

$She = \beta_a h/\delta_a$ donde h es la altura de la pared vertical, el diámetro ~~horizonta~~ del tubo horizontal o el diámetro de la esfera.

El número de Grashoff $Gr' = (\alpha \, \Delta y_a)(h/\vartheta)^3 = (V'g)(h/\vartheta)^3$

donde: $\alpha = (Mb - Ma) / M$, $\vartheta = \left(\frac{\mu^2}{\rho^2 g} \right)^{1/3}$, $V' = \alpha \Delta y_a$

$$Sc = m\mu / \delta_a$$

g es la aceleración estandar de la gravedad.

Se debe consultar para cada caso especial, en la literatura respectiva.

C. Un gas burbujeando a través de un líquido: Se tratará en el siguiente capítulo.

++++++++++++++++++++++++++++++++++++

VIII. DISEÑO DE INTERCAMBIADORES DE MASA(Introducción).

Muchas operaciones en la industria de los procesos químicos implican la transferencia de masa de una fase a otra.

Existen operaciones de contacto continuo y discontinuo. En las operaciones de contacto continuo, el equipo debe proporcionar un contacto continuo de las dos fases, y es necesario considerar la velocidad de transferencia y el tiempo de contacto de las fases. En las operaciones de contacto discontinuo el equipo se diseña para proporcionar contactos discontinuos de las fases en una serie de pasos.

Las operaciones de transferencia de masa, se pueden llevar a cabo en TORRES EMPACADAS ó en TORRES DE PLATOS.

TORRES DE PLATOS:

Pueden ser Platos PERFORADOS o Platos con CAPUCHAS DE BURBUJEO.

Hemos definido ya el concepto de paso o etapa, así como también los parámetros de eficiencia del paso y número de platos.

Comenzaremos ahora por definir, el concepto de EFICIENCIA DE PUNTO O LOCAL:

$$E = (Z_{ai} - Z_{ae}) / (Z_{ai} - Z_a^+) \tag{109}$$

donde: Z_{ai} es la concentración inicial del gas que entra al plato.

Z_{ae} es la concentración de salida del gas

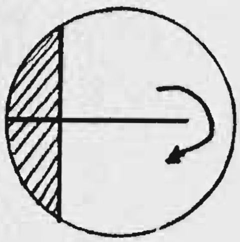
Z_a^+ es la concentración en el equilibrio.

Eficiencia de MURPHREE: Se basa en las condiciones de mezclado del plato:

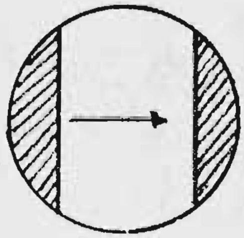
$$E_M = \frac{(Z_{ai})\text{media} - (Z_{ae})\text{media}}{(Z_{ai})_m - Z_a^+} \tag{110}$$

TIPOS DE PLATOS: +

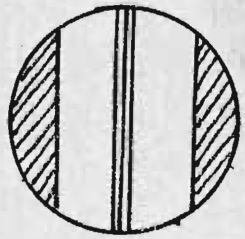
I. Plato con flujo reversa:



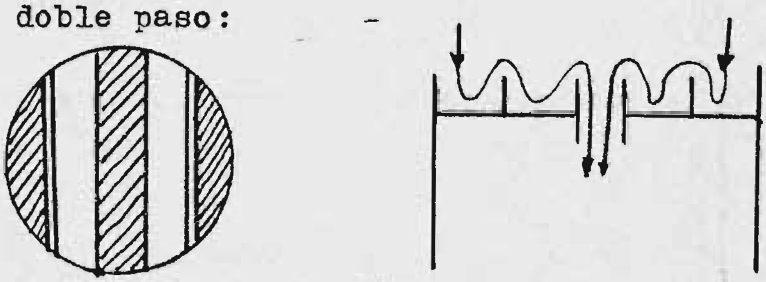
II. Flujo cruzado:



III. Doble paso:



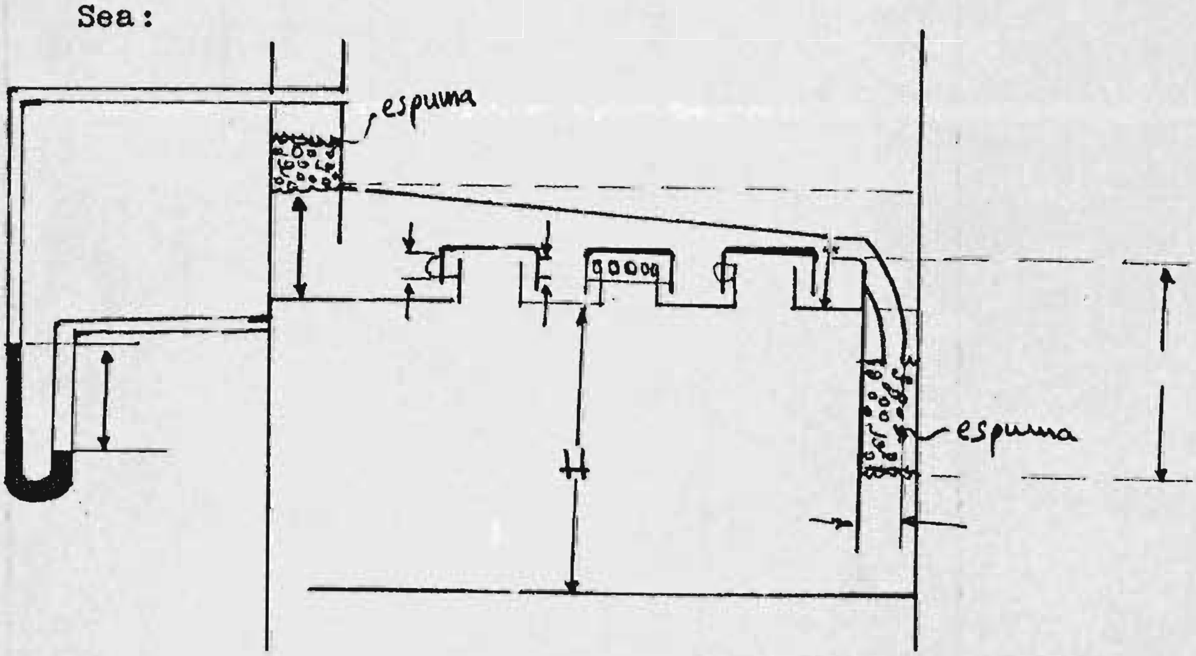
IV. Cascada doble paso:



En el diseño de torres de platos perforados es muy importante el cálculo de las perforaciones.

Se presenta a continuación un esquema de diseño para una torre de platos con capuchas de burbujeo: +

Sea:



+ Basado fundamentalmente (planteamiento y nomenclatura) en : Mass Transfer and Absorbers de T. Hobler. (45)+

1.Velocidad del gas: (111) $W_{go} = cte.\sqrt{\rho_l - \rho_g / \rho_g}$ — ρ_g — ρ_l

2.Diámetro de la columna: (112) $\pi D^2/4 = V_g/W_{go}$

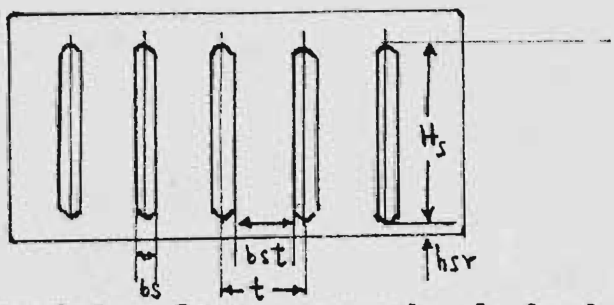
donde: V_g es el flujo de gas.

3.Dimensionamiento de capuchas:

La selección del diámetro de la capucha está en virtud del diámetro de la torre.

Detalle de las dimensiones de una capucha de burbujeo:

Sea:



Las dimensiones esenciales de una capucha de burbujeo son:

a) Diámetro exterior de la capucha.

b) Perímetro de la capucha.

c) Número de ranuras.

d) Ancho de ranuras(bs).

e) Espaciamiento entre ranuras.(bst

f) Distancia del diámetro de la ranura a la base de la capucha(~~hrs~~ hsr)

g) Distancia entre centros de ranuras.

h) Espesor de capucha (s).

i) Altura de la ranura (Hs).

j) Area de ranura por capucha(Sc).

4.Dimensionamiento del Plato:

a)Espaciamiento entre platos(H)

b)Detalles de la bajante

c)Detalles del vertedero

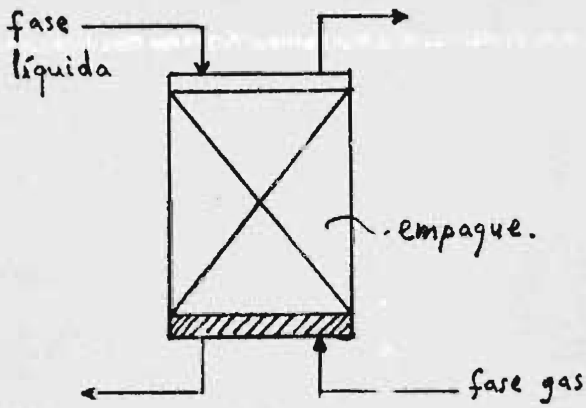
d)Gradiente líquido sobre el plato.Estabilidad del plato(Δ)

e)Otros detalles.

TORRES EMPACADAS:+

Esquema de diseño: Una vez que se conoce el sistema químico con el que se va a trabajar, y muy particularmente sus caracterís-ticas fisicoquímicas, dében analizarse los siguientes aspectos - fundamentales(entre otros) :

1. Material de construcción de la torre, y Aspectos mecánicos.
   -(Sistema de distribución del líquiddo).
   Generalmente el soporte mecánico de la torre concierne a otra especialidad de Ingeniería.
2. Condiciones del Sistema:
   a) Isotérmico o Adiabático.
   b) Presión de trabajo.
   c) % de recuperación.
d) d) Gastos: Gl, Gv.
   e) Densidades: ρ_l , ρ_v .
   f) Otras especificaciones.
3. Empaque: Sea;



Pueden utilizarse muchos tipos de materiales para empaque , desde piedras, botellas rotas, hasta formas geométricas complejas.

El material de empaque debe tener:

a) Gran superficie humedecida por unidad de volúmen de espacio — empácado, para que presente un área interfacial extensa, para el - contacto de las fases.
b) Gran volúmen vacío, que permitirá fluir cantidades razonables -

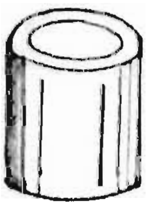
+El tratamiento para torres empacadas, así como la nomenclatura, — está basado en libro de Operaciones Unitarias de Foust y colabs(42) de las fases sin que existan fuertes caídas de presión.

c) Economía.-

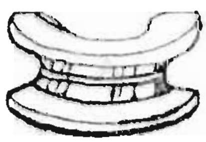
Las principales características de los empaques son:

1. % de vacíos (ϵ).
2. Superficie específica (a_v).
3. Piezas por pie^3. y 4. Peso.

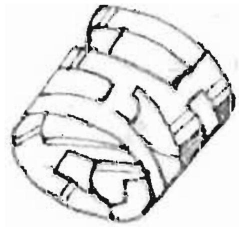
TIPOS DE EMPAQUE:



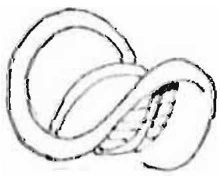
Anillo Raschig.



Silla Intalox.

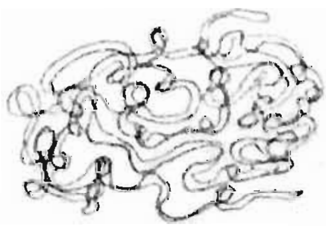


Anillo Pall.

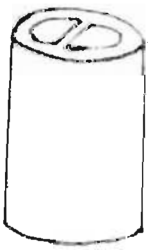


Silla de montar Berl.

Anillo con helicoidal.



Espirales " telleretes ".



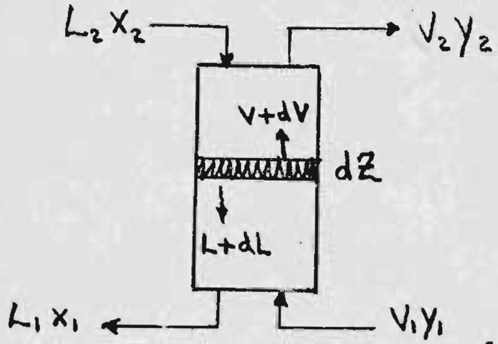
Anillo Lessing.

Los de mayor eficiencia son el anillo con helicoidal, espirales "telleretes" y las sillas de montar Berl, las cuales presentan una MAXIMA superficie de contacto de las fases. Esta superficie de contacto máxima se debe a que la geometría del diseño corresponde a un paraboloide hiperbólico.

4. Balances de Materiales y Energía:

Consideremos una columna empacada utilizada para una operación de transferencia de masa como una Destilación o una Absorción gaseosa.

Sea:



Balance de Materiales para una sección diferencial de la torre:

$$(113)\quad d(Vy) = d(Lx)$$

por integración entre el fondo de la torre y cualquier punto dentro de ella:

$$(114)\quad Vy - V_1y_1 = Lx - L_1x_1$$

que es la ecuación de la línea de operación.

Balance General:

$$(115)\quad L_2x_2 = L_1x_1 - V_1y_1 + V_2y_2$$

L_1, L_2, V_1, V_2 son los gastos de las fases.
x_1, y_1, x_2, y_2 son las fracciones mol.

5. **Curva de Equilibrio. Curva de Operación:**

La curva de Equilibrio es experimental; puede calcularse - por la ley de Raoult:

$$p_a = P_a\, x_a \quad \text{o bien} \quad y_a = p_a/P = P_a/p \quad (x_a)$$

Para calcular la curva de operación:

$$(116)\quad L\ \text{mín.} = G_1\ (\ Y_1 - Y_2\ /\ X^+ - X_2\ )$$

$Y_1 = y_1/1-y_1$, X^+ de equilibrio son relaciones mol.

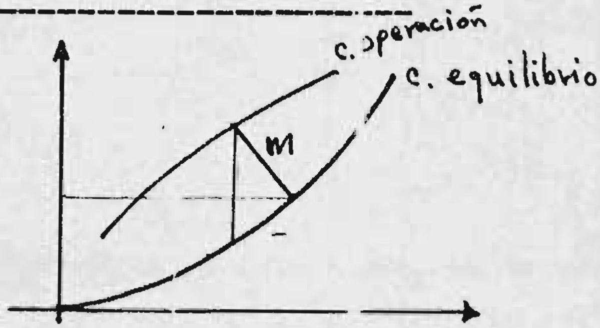
L operación = Lmín. por 50% en exceso del Lmín.

Ecuación de la curva de operación:

$$(117)\quad V'(\ y_1/1-y_1\ ) + L'(\ x/1-x) = V'(y/1-y) + L'(\ x_1/1-x_1\ )$$

donde: $V' = V_1 \ (1 - y_1)$

$L' = L_2 \ (1 - x_1)$



En el caso de que el proceso sea adiabático debe realizarse un balance de energía (para la corriente de G que entra y para la que sale), en función de los calores diferenciales de solución, calores latentes y calores sensibles.

$$\Delta H_{liq} = H_{corr 1} - H_{corr. 2}$$

Sea : Δ, la temperatura a la cual debe trazarse la curva de operación.

$$\Delta = \Delta H_{liq} / \underset{agua}{18} \, L_{min}$$

Para la curva de equilibrio:

$$m = y^{+}/x = \gamma_1 P_1/P$$

donde m es la pendiente de la curva.

γ es el coeficiente de actividad.

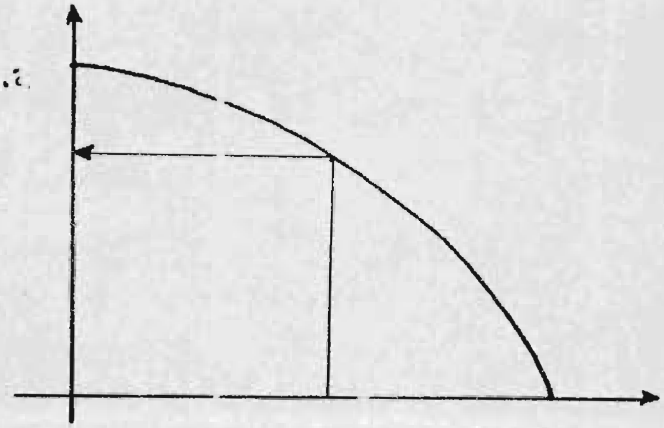
6. Diámetro de la Torre:

Cálculo de la velocidad de inundación:

$G_l/G_v\ (\rho_v/\rho_L)^{1/2}$ nos dá un determinado valor $-\ \Psi$ con el cual podemos obtener el valor de:

$$\frac{G_v^2\ a_v\ (\mu_L')^{0.2}}{g_c'\ \varepsilon^3\ \rho_v\ \rho_L} = \varphi$$

por la gráfica:



donde: G_l es la ~~ma~~ velocidad de la masa del líquido lb/hr pie^2

G_v es la velocidad de la masa del vapor.

μ_L' es la viscosidad de L (cp)

g_c' es igual a 4.17×10^8 pie lb / lbf hr^2

ρ_v, ρ_L son las densidades de la fase líquida y la fase vapor.

a_v es la superficie específica.

$\in$ es el % de vacíos .

$$G_v = \sqrt{(\ \varphi \times g_c' \times \varepsilon^3 \times \rho_v \times \rho_L\ )\ /\ a_v \times \mu_L'^{0.2}} = \varphi'$$

La torre se diseñará para una velocidad del gas 50 % de la inundación: $Gv = \varphi' \times 0.5$

Sección transversal de la torre: $S = V/Gv$ (118) V es gasto de vapor.
y del área del círculo: $S = \pi D^2/4$ tenemos:

$$(119) \qquad D = \sqrt{4\,S/\pi}$$

++++++++++++++++++++++++++++++++++

7.CALCULO DEL NUMERO DE UNIDADES DE TRANSFERENCIA.

Si el proceso es de Contradifusión equimolar:

$$(120) \quad \int_0^z dZ = V/k'_y a\,S \int_{y_1}^{y_2} dy/(y_i - y) = V/K'_y a\,S \int_{y_1}^{y_2} dy/(y^+ - y)$$

$$(121) \quad \int_0^z dZ = L/k'_x a\,S \int_{x_1}^{x_2} dx/(x - x_i) = L/K'_y a\,S \int_{x_1}^{x_2} dx/(x - x^+)$$

donde: V es el gasto molar del flujo de la fase vapor (lbmol/hr)
- L es el gasto molar del flujo de la fase líquida (lbmol/hr)
- y es el componente más volátil en la fase vapor,frac. molar.
- x es para la fase líquida, frac. molar.
- a es el área interfacial por volúmen unitario de empaque (pie^2/pie^3)
- S es la sección transversal de la torre vacía (pie^2)
- k'_y es el coeficiente de transferencia de masa.
- K'_y es el coeficiente de transferencia de masa global
- y_i es la fracc. mol en la interfase.
- y+ es la fracción mol del componente más volátil,en el equil.

En ámbas ecuaciones el término integral es igual al cambio total en la composición para la fase particular, dividido entre la fuerza directriz disponible.

Esto es una medida de la dificultad para la separación, y por integración obtenemos una cantidad que se ha definido como el NUMERO DE UNIDADES DE TRANSFERENCIA (N).

La cantidad fuera de la integral es la llamada ALTURA DE UNA UNIDAD DE TRANSFERENCIA,

Entónces la altura de la torre se determina multiplicando el número de unidadest de transferencia por la altura de una unidad de transferencia:

$$Z = H_G\, N_G = H_{OG}\, N_{OG} = H_L N_L = H_{OL}\, N_{OL} \qquad (122)$$

Cuando el valor de la integral es la unidad, el significado de la unidad de transferencia es evidente; ya que ~~la es~~ es la cantidad de contacto necesaria para llevar a cabo un enriquecimiento de una fase igual al gradiente en la misma fase.

Entónces para contradifusión equimolar:

Número de Unidades de Transferencia.		Altura de la Unidad de Transferencia .	
N_G	$\int_{y_1}^{y_2} dy/y_i - y$	H_G	$V / k'_y\, a\, S$
N_{OG}	$\int_{y_1}^{y_2} dy/y^+ - y$	H_{OG}	$V / K'_y\, a\, S$
N_L	$\int_{x_1}^{x_2} dx/x - x_i$	H_L	$L / k'_x\, a\, S$
N_{OL}	$\int_{x_1}^{x_2} dx/x - x^+$	H_{OL}	$L / K'_x\, a\, S$

Si el proceso es de difusión a través de un componente estacionario:

$$(123)\qquad \int^{Z} dZ = \left[V / k_y \; a \; S \; (1-y)_{m.log\; prom.} \right] \int_{y_1}^{y_i} \frac{(1-y)_{m.log} \; dy}{(1-y)\,(y_i - y)}$$

y:

$$\int_0^{Z} dZ = \left[V/K_y \; a \; S(1-y)_{m.log\; prom.} \right] \int_{y_1}^{y_2} \frac{(1-y)_{m.log} \; dy}{(1-y)(y^+ - y)}$$

Para la fase líquida:

$$(124)\qquad \int_0^{Z} dZ = \left[L / k_x \; a \; S(1-x)_{m.log\; prom.} \right] \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1-x)_{m.log} \; dx}{(1-x)\,(x - x_i)}$$

y:

$$\int_0^{Z} dZ = \left[L / K_x \; a \; S(1-x)_{m.log} \right] \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1-x)_{m.log} \; dx}{(1-x)\,(x - x^+)}$$

$$N_{OG} = \int_{y_1}^{y_2} dy / y^+ - y \qquad y \qquad N_{OG} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(1-y)_{m.log} \; dy}{(1-y)\,(y^+ - y)}$$

Pueden calcularse gráficamente:

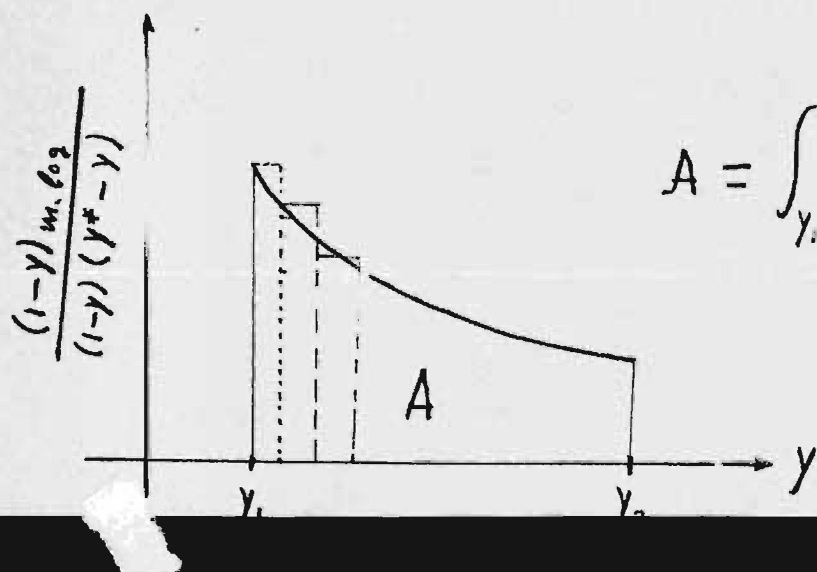
Se gráfica $1/ y^+ - y$ vs. y o bien:

$$(1-y)_{m.log} / (1-y)\,(y^+-y) \quad \text{vs.} \quad y$$

El área bajo la curva es el valor de la integral.

y	$1-y$	y^+	$1-y^+$	$y^+ - y$	$(1-y)_{m.log}$	$\frac{(1-y)_{m.log}}{(1-y)(y^+-y)}$
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

que se obtiene de las curvas de equilibrio y operación.



$$A = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(1-y)_{m.log} \; dy}{(1-y)\,(y^* - y)}$$

8. Altura de la Columna:

$$(1.5) \qquad Z = H_{OG}N_{OG} = H_{OL}N_{OL} = H_G N_G = H_L N_L \qquad (122')$$

La altura de la columna nos permitirá realizar otros cálculos de tipo mecánico.

++++++++++++++++++ +++++++++++++++

Los fundamentos de Fluferología expuestos deben aplicarse al análisis y diseño de reactores químicos, principalmente, ya que este es un campo especialmente propio del Ingeniero Químico, pudiéndose extender también su aplicación, al diseño de reactores nucleares; así como también, al amplio e interesante campo de la Ingeniería de Proyectos.

+++++++++++++++++++ ++++++++++++++

VI. B I B L I O G R A F I A.

A. BASE METAFISICA DE LA TECNICA.

1. El Poema de Parménides.- Trad. del griego, prólogo y notas por J.A. Miguez. 1975. 2a.Ed.- Editorial Aguilar, Buenos Aires, Argentina. (Biblioteca de Iniciac. Filosófica)

2. Los Diálogos de Platón.- Estudio preliminar de Francisco Larroyo, 1976. 16ava. Ed.- Editorial Porrúa S.A. México, D.F.--- También se consultaron los diálogos que presenta la Biblioteca de Inic.-Fil. Editorial Aguilar, Buenos Aires-Argentina.

3. El Quijote de Miguel de Cervantes Saavedra.- Texto y notas de M. de Riquer, 1967. 5a. Ed. --------- Editorial Juventud, colecc. Z. Barcelona, España.

4. La Cena de las Cenizas de Giordano Bruno.- Introd. y trad. de E. Schettino, 1972. 1a. Ed.---------- Colecc. opúsculos. Fac. de Filosofía y Letras de la UNAM, Méx, D.F.

5. El Discurso del Método de René Descartes.-Ed. comentada por JC. García Borrón, 1974. 3a. Ed. ---- Editorial Bruguera, S.A., Barcelona, España.

6. Monadología de Gottfried Leibniz.- Trad. Pról, y notas de M. Fuentes Benot, 1975. 6a. Ed.---Colecc. Inic. Filosófica. Editorial Aguilar, Buenos Aires, Argentina.

7. Matter and Light de Louis de Broglie.- Trad. del francés ------ 1939. 1a. Ed.--- WW. Norton and Company, Inc. U.S.A.

8.El Fenómeno Humano de Pierre Teilhard de Chardin.- Trad. del - francés, pról, y notas de M.Crusafont Pairó. 6a.Ed. 1974. Taurus - Ediciones,S.A.,Madrid,España.

9.Meditaciones del Quijote de José Ortega y Gasset.-Publ. por - José Ortega Spottorno, 1976 .3a.Ed. Colección Austral. Espasa Calpe, - S.A. Madrid,España.

10.Unas Lecciones de Metafísica de José Ortega y Gasset.- Publ. - por Rosa Spottorno Vda. de Ortega y Gasset. 1970. 3a. Ed.- Alianza - Editorial,S.A. Madrid,España.

11.Meditación de la Técnica de José Ortega y Gasset.- Publ. por Herederos de J. Ortega y Gasset 1977. 7a. Ed.- Ediciones de la - Revista de Occidente,S.A. ------- Madrid,España.

12.El Principito de Antoine de Saint-Exupéry.-1977. 49.ava. publ. Fernández Editores,S.A.México,D.F. Trad. del francés por M. Alva B.-

13.Historia de la Filosofia de Julián Marías, 28ava. Ed.- ---- Revista de Occidente,S.A. ------- Madrid,España.

14.Diccionario de Filosofia de José Ferrater Mora, 1958.----- 4 Ed.- Editorial Sudamericana -- Buenos Aires,Argentina.

15.Enciclopedia Filosofica 1957.Centro di studi filosofici - di Gallarte. 4a. Ed. Casa Editrice G.C. Sansoni.- Firenze,Italia. (Coordinado por un Comité Directivo y por una serie de especialistas. Tomos I,II,III, y IV.

16.Gran Enciclopedia del Mundo.- Bajo los auspicios de D. Ramón Menéndez Pidal.-Durvan,S.A. de Ediciones.-Editorial Marín,S.A. - 14ava. Ed. 1961. Bilbao,España. (princ. Tomo 7)

17.Diccionario de la Lengua Castellana.- Roque Barcia, 16ava. Ed. Hernando y Ca. 1902. Madrid,España.

18.Curso de Raíces Griegas.-de Jesús Díaz de León.-Ed. de la Antigua Librería Robredo de José Porrúa. e hijos. México,D.F. 1941.

19.Los Ingenieros y las Torres de Marfil de Hardy Cross.-------- Ed. y ordenado por Robert Goodpasture. Trad. al esp. por Fernando Fossas R. 1971. Libros Mc. Graw - Hill de México,S.A de C.V. Méx,D.F.

B.GEOMETRIA ANALITICA Y CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL .

20.Geometría Analítica.---------Agustín Anfossi.1968.6a.Ed.Editorial Progreso,S.A.México,D.F.

21.Cálculo diferencial e integral.-Agustín Abfossi.1966. 4a. Ed.(4a) Editorial Progreso,S.A.Méx, D.F.

22.Calculus,vols.I y II.--------Tom. M. Apostol. 1972. 2a. Ed.--- Editorial Reverté,S.A.Barcelona - España.------------------------------ Ed. Inglesa: Blaisdell Publishing Company,Waltham,Massachusetts. --- 1967. USA.

23.University Mathematics,vols I y II.- J. Britton,R.Ben Kriegh, L.W. Rutland.1965. W.H.Freeman and Cny., USA.

24.Cálculo diferencial e integral.-W.A. Granville. 1963. UTEHA.-

México,D.F. Reimpresión 1972.----Ed. Inglesa: Gin and Cny,Boston,USA.

25.Elementary Differential Equations de-D.L.Kreider,R.G.Kuller, - D.R. Ostberg.1968.1a.Ed. -- Addison-Wesley Publ.Cny. --- Massachusetts,USA.

26.El Cálculo con Geometría Analítica.- L. Leithold.1973. 2a. - Ed.- Editorial Harla,S.A. de C.V. Méx. D.F.------------ Ed. Inglesa:Harper and Row - Publishers,Inc. 2nd. Ed. 1972.

27.Análisis Vectorial y Tensorial.---H. Lass. 1970.Compañía Editorial Continental,S.A. 2a. - Impresión en español. Méx,D.F. Ed. Inglesa:Mc.Graw Hill Book Cny.,Inc. --------

28.Cálculo diferencial e integral .---H.E. Taylor y T.L. Wade. --- 1971. 8ava. reimpresión. - Ed. Limusa Wiley,S.A.Méx,D.F. Ed.Inglesa:University Calculus 1962. J. Wiley and sons,Inc.

29.Applied Mathematics in Chemical Engineering.- H.S. Mickley, - T.K. Sherwood,Ch.E. Reed.--- 1957.Mc.Graw-Hill Cny. Inc. 2nd. Ed. USA. ---

30.Memento de Matemáticas.-----------Lino Alvarez Valdés.- 1946.-- 5a. Ed.-Editorial Dossat,S.A. Madrid,España.

C. TERMODINAMICA Y FLUFEROLOGIA.

30. Física, vols. I, II y III.--- M. Alonso y E.J. Finn.---Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1970. Versión española de la obra titulada Fundamental University Phisics. Publicada orig. en inglés en 1967. por Addison-Wesley Publ. Cny. Inc. Reading Massachusets, USA.

31. Physical Chemistry .-------- G.W. Castellan.----1971. 1st. Ed.- Addison-Wesley Publishing Company Inc. Reading, Mass., USA.

32. Fundamentos de Fisicoquímica.- S.H. Maron y C.F. Prutton. 1972. 3a. reimpresión, Editorial Limusa--Wiley, S.A. México, D.F.----------- Ed. Inglesa: Mc. Millan Company, 1965 U. S. A.

33. Physical Chemistry.--------- G.M. Barrow.--International Student Ed. Mc. Graw Hill Book Cny, Inc. - 1972. N.Y. USA.

34. Chemical Engineering Thermodynamics.-B.F. Dodge. 1944. International Student Ed. Mc. Graw Hill - Book Company, Inc. N.Y. USA.

35. Thermodynamics.--------------G.N. Lewis and M. Randall. Revised by K.S. Pitzer and L. Brewer.---- 1961. 2nd. Ed. Mc Graw Hill Book Company. N.Y. USA.

36. Thermodynamics.---------------H.B. Callen. 1960. Wiley International Ed.- J. Wiley and sons, Inc. N.Y. USA.

37. The Phase Rule and its Applications.- A. Findlay. Revised by A.N. Campbell and N.O. Smith. -- 9a. Ed. Dover Publications Inc. - 1951. N. Y. USA.

38. The Principles of Chemical Equilibrium with applications in - Chemistry and Chemical Engineering.- K. Denbigh. 1966. --- - 2a. Ed. Cambridge University - Press. Great Britain.

39. Understanding Physical Chemistry.- A.W. Adamson. 1969. ----- 2nd. Ed.- W.A. Benjamin, Inc, - N.Y. 1969.

40. Collection of Problems in Physical Chemistry.- J. Bares, C. Cerny, V. Fried, J. Pick. 1961. Translated by H. Watney. Pergamon Press. LTD. - Oxford, England.-Reprinted 1964 - in Poland.

41. Unit Operations of Chemical Engineering.-- W. L. Mc Cabe and - J.C. Smith. 1967. Mc. Graw Hill - Book Company. 2nd. Ed. N.Y. USA.

42. Principles of Unit Operations.-- A. S. Foust et al. 1960. --- J. Wiley and sons, Inc. 2nd. printing. N.Y. USA.

43. Transport Phenomena.----------R. Byron Bird, W.E. Stewart, E.N. - Lightfoot. 1960. J. Wiley and sons, Inc. 1st. Ed. N.Y. USA.

44. Process Heat Transfer--------D.Q. Kern. 1950.-Mc GrawHill Book Company, Inc.-International Student Ed.- N.Y. USA.

45. Mass Transfer and Absorbers.-T. Hobler. 1966. Pergamon Press - LTD, Hedington Hill Hall, ----- Oxford, England. 1st. english Ed. Translated from polish by Dr. J - Bandrowski, of the: Iyfuzyjny - ruch masy i absorbery, published - by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne in Warsaw.-1962.

46.Chemical Engineering Kinetics.- J.M.Smith. 1970.Mc Graw Hill-Book Company, 2nd. Ed. --- London,England.

47.Chemical and Catalytic Reaction Engineering.- J.J. Carberry - 1976. Mc Graw Hill Book Cny,- 1st. Ed. N.Y. USA.

48.Plant Design and Economics for Chemical Engineers.- M.S. Peters and K.D. Timmerhaus. 1968.--- Mc Graw Hill Book Cny. 2nd. Ed. London,England.-

49.Ingeniería de Proyectos para Plantas de Proceso.- H.F. Rase y M.H. Barrow. 1976. 3a. impresión. Compañía Edit. Continental,S.A. México,D.F.
Ed. Inglesa: Project Engineering of Process Plants.- J.Wiley and sons,Inc.- .

50.Chemical Engineers'Handbook.-----J.H. Perry (editor). Mc Graw-Hill 4th. Ed. 1963. N.Y. USA.

51.Tratado de Química Inorgánica.--E.H.RIESENFELD.1944.-2a.Ed.--- Manuel Marín,Editor.Barcelona-España.- Trad. del alemán.-----

++++++++++++++++++++++++++++++++