UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

ALGUNAS APLICACIONES DEL ALGEBRA LINEAL EN LA FACULTAD DE QUIMICA

TESIS

SUSTENTANTE: SUSANA YALU LETICIA RUBIN RIVERO

CARRERA: INGENIERO QUIMICO METALURGICO

1 9 8 3.

INTRODUCCION

La mayoría de las personas, usamos las matemáticas día con día, como una herramienta que nos es útil para resolver algunos problemas, sin embargo, en general ignoramos la gran cantidad de información que podemos extraer de ella.

El objetivo de esta tesis es hacer ver la importancia que tiene el álgebra lineal en el planteamiento, resolución e interpretación de algunos problemas de aplicación en la enseñanza de la química en esta Facultad de Química.

En la primera parte se da una introducción a la teoría del álgebra lineal, con el fin de tener un lenguaje comun, que se utilizará en el resto de la tesis.

En la segunda parte se estudian los sistemas de ecuaciones y se ven algunas de sus aplicaciones.

Debido a que el balanceo de ecuaciones es uno de los temas temas obligados (básicos) para los químicos independientemente de su especialidad hemos considerado adecuado incluirlo en esta tesis junto con algunos comentarios al respecto. Se incluye asimismo una parte de análisis dimensional y un problema de mezclas. Se hace un ligero tratamiento de éstos problemas tratando de evidenciar las características más relevantes de cada caso. Las conclusiones se encuentran incluidas en cada capítulo.

C A P I T U L O I

ALGEBRA LINEAL.

C A P I T U L O II

SISTEMAS DE ECUACIONES Y APLICACIONES.

TEMA I ESPACIOS VECTORIALES REALES

Grupos

Dentro de la matemática "moderna" destaca como uno de los principales constituyentes (piedras angulares ó cimientos) el concepto de grupo, debido a la gran variedad de éstos que se presentan dentro de los diferentes campos de estudio de tal disciplina, y de sus aplicaciones.

Definición: un grupo $(G,+)$ es un conjunto G (cuyos elementos se llaman los elementos del grupo) junto con una operación binaria $+$, (esto es, una regla de composición que asocia a cada pareja ordenada (a,b) de elementos de G un tercer elemento $a+b$ que pertenece también a G) y que satisface los siguientes axiomas:

1. Ley Asociativa $(a+b) + c = a + (b+c)$

2. Existencia del idéntico. Existe e en G tal que, $e + b = b$.

3. Existencia de un inverso para cada a de G, o sea $\forall a \in G, \; \exists b \in G \ni a+b = e$ y en todos los grupos con los que trabajaremos en esta tesis, se cumple además la

4. Ley Conmutativa $a + b = b + a$ y estas propiedades deben cumplirse para todos los elementos a, b y c de G.

Para distinguir los grupos para los que vale la propiedad 4 de los demás grupos, se usa para los primeros el nombre de grupos <u>abelianos</u> ó <u>conmutativos</u>, y es para éstos, para los que en general se usa $+$ como símbolo de la operación. Por supuesto que en los casos en los que se conoce la operación del grupo, (ej. *1,....,10*) se usa para ésta su símbolo usual.

Algunos ejemplos de grupos:

1) $(\mathbb{Z},+)$ los enteros, con la suma.
2) $(\mathbb{Q},+)$ los racionales, con la suma.
3) $(\mathbb{R},+)$ los reales, con la suma.
4) $(\mathbb{C},+)$ los complejos, con la suma.
5) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ los racionales menos el cero, con la multiplicación.
6) $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ los reales menos el cero, con la multiplicación.
7) $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ los complejos menos el cero, con la multiplicación.

8) $M(m \times n;\mathbb{R}),^{+}$ las matrices reales de $m \times n$, con la suma.

9)* $GL(n;\mathbb{R}),^{\cdot}$ el "grupo lineal" de las matrices invertibles de $n \times n$, (con determinante $\neq 0$) con la multiplicación.

10) $\mathbb{R}[x],+$ los polinomios con una variable, x, con la suma.

11) Si S es un conjunto y $(G,\cdot)$ un grupo, $F = \{f:S \to G\}$ con la operación definida: si $f, g \in F$ $(f+g)(x) =$ $= f(x)\cdot g(x)$.

12)* Si S es un conjunto $A(s) = \{f;S \to S;\ f$ es biyectiva$\}$ con la composición de funciones.

12')* Si S es finito y consta de n elementos, $A(s)$ se denota S_n y se llama "el grupo simétrico de orden n" ó, "el grupo de las permutaciones de n elementos".

13) $(\mathbb{R}^n,+)$ las eneadas con la suma de eneadas, $n \in \mathbb{N}$ (componente por componente).

En vista del interés que tendrán para nosotros estos últimos grupos, los definiremos explícitamente y probaremos las cuatro propiedades antes mencionadas

$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\}$ donde $(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$ $= (y_1,y_2,\ldots,y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i$ para cada $i = 1,\ldots,n$.

Definición: se define la suma de eneadas componente por com

* no son conmutativas.

nente, es decir:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Consecuencias

1) $[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] + (z_1, z_2, \ldots, z_n) =$

$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n) =$

$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n)$

y en vista de que es la suma de nũmeros reales,

$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) =$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) =$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$

2) Sea $e = (0, 0, \ldots, 0)$, obviamente

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0) =$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3) Se define el inverso $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ entonces

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \ldots,$

$x_n - x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$

4) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots,$

$x_n + y_n) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) +$

$+ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Destacaremos como instancias particulares los casos $n = 2$ y $n = 3$, el primero de ellos corresponde a las parejas ordenadas de números reales, y puede interpretarse geométricamente como los puntos del plano. En este caso, la suma de vectores corresponde a la suma de flechas que se usa en física para representar la suma de fuerzas.

El caso $n = 3$, ternas ordenadas de números reales, puede pensarse geométricamente como los puntos del espacio ordinario, y también en este caso la suma coordenada por coordenada se interpreta geométricamente como suma de flechas.

Campos

Otro concepto del álgebra moderna que nos será de utilidad es el de campo, (aunque en nuestro caso sólo nos referiremos al de los números reales) que corresponde a los modelos más completos (en el sentido del álgebra elemental) de los sistemas numéricos.

Definición: un campo es $(K, +, \cdot)$, en donde K es un conjunto (cuyos elementos se llaman los elementos del campo). Y "+" y "·" son dos operaciones binarias tales que,: $(K,+)$ es un grupo abeliano y para · valen:

1) Ley Asociativa $a(bc) = (ab)c$

2) Ley Conmutativa $ab = ba$.

3) Existencia del idéntico $\exists\ 1 \neq 0 \ni 1a = a$.

4) Existencia de inversos para $\forall\ a,\ a \neq 0,\ \exists b \ni ab = 1$

en donde, por supuesto, ab quiere decir $a \cdot b$.

Las dos operaciones anteriores deben estar relacionadas por medio de la: Ley Distributiva $a(b+c) = ab + ac$.

Algunos ejemplos de campos:

1) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ los racionales, con la suma y el producto.

2) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ los reales, con la suma y el producto.

3) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ los complejos, con la suma y el producto.

4) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot) = \{a+b\sqrt{2}; a,b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma y el producto de reales.

5) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ el campo de los enteros módulo p, p un primo, con las operaciones módulo p:

$$a + b = r \quad \text{si} \quad a + b = q_1 p + r \qquad 0 \leq r < p$$

$$ab = S \quad \text{si} \quad ab = q_2 p + S \qquad 0 \leq S < p$$

ejemplo, en $\mathbb{Z}_5 \begin{cases} 3 + 4 = 2 \\ 3 \cdot 3 = 4 \end{cases}$

en $\mathbb{Z}_{11}$ $\{ \ 8 + 9 = 6$

Espacios Vectoriales

El último concepto de la matemática abstracta que mencionaremos aquí, (que es el que nos proporcionará el marco de referencia dentro del cual colocaremos a todos los objetos que estudiaremos en esta tesis), es al de espacio vectorial. Y solo nos referiremos aquí a los espacios vectoriales reales.

Definición: se dice que un grupo abeliano $(V,+)$, (cuyos elementos se llamarán vectores, y que, en general se denotarán como $\bar{x}$, $\bar{y}$, etc.) es un espacio vectorial real si existe una función (que se llama producto de un escalar por un vector), tal que, si denotamos al vector $f((a,\bar{x}))$ como $a\bar{x}$, pasa que:

1) $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$
2) $(a + b)\bar{x} = a\bar{x} + b\bar{x}$
3) $a(b\bar{x}) = (ab)\bar{x}$
4) $1\bar{x} = \bar{x}$

Algunos ejemplos de espacios vectoriales (reales):

1) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ el espacio vectorial de los complejos
2) $\mathbb{R}/\mathbb{R}$ el espacio vectorial de los reales
3) $\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}$ el espacio vectorial de los polinomios reales
4) $M(mxn):\mathbb{R})/\mathbb{R}$ el espacio vectorial de las matrices reales de mxn.

5) Sea $V/\mathbb{R}$ un espacio vectorial real y S un conjunto no vacío, $F_{(S,V)} = \{f : S \to V\}$ en el que se define:

a) si $f, g \in F$, $f + g : S \to V$ es la función definida, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

b) si $f \in F$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : S \to V$ es la función $\alpha f(x) = \alpha(f(x))$ es fácil observar que F es un espacio vectorial real.

6) $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ es el espacio vectorial de las eneadas reales.

Nuevamente consideraremos este último ejemplo y describiremos en detalle sus propiedades.

Como ya se vió para el caso de los grupos, las eneadas reales con la suma coordenada por coordenada, forman grupos abelianos. Definimos ahora el producto de un número real por una eneada, (escalar por vector) como la eneada que resulta de multiplicar cada componente de la eneada original por el escalar dado. Es decir, $a(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (ax_1,ax_2,\ldots,ax_n)$ se tiene entonces que,

1) $a[(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (y_1,y_2,\ldots,y_n)] = a(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) = (a(x_1+y_1),a(x_2+y_2),\ldots,a(x_n+y_n)) = (ax_1+ay_1,ax_2+ay_2,\ldots,ax_n+ay_n) = (ax_1,ax_2,\ldots,ax_n) + (ay_1,ay_2,\ldots,ay_n) = a(x_1,x_2,\ldots,x_n) + a(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.

2) $(a+b)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,(a+b)x_2,\ldots,(a+b)x_n) =$
$= (ax_1+bx_1,ax_2+bx_2,\ldots,ax_n+bx_n) = (ax_1,ax_2,\ldots,ax_n)+$
$+ (bx_1,bx_2,\ldots,bx_n) = a(x_1,x_2,\ldots,x_n) + b(x_1,x_2,\ldots,x_n).$

3) $a(b(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = a(bx_1,bx_2,\ldots,bx_n) = (a(bx_1),a(bx_2),$
$\ldots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,(ab)x_2,\ldots,(ab)x_n) = ab(x_1,x_2,$
$\ldots,x_n).$

4) $1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (1x_1,1x_2,\ldots,1x_n) = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Subespacios

Consideraremos ahora un espacio vectorial real V, y un subconjunto $W \subset V$. Se dice que W es un subespacio de V en el caso de que W sea un espacio vectorial con las operaciones inducidas por las operaciones de V.

Debe observarse que hay subconjuntos de espacios vectoriales que son a su vez espacios vectoriales reales, pero con otras operaciones que no son las del conjunto original. En estos casos el subconjunto no es un subespacio del original. Como un ejemplo de ésto podríamos considerar al conjunto de los números reales con la suma, que como hemos visto en el ejemplo 2, es un espacio vectorial real; y como W, al conjunto de los reales positivos. Supongamos ahora que la operación de suma es la multiplicación ordinaria y, que la multiplicación por un escalar es la exponenciación.

Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ a los elementos de $\mathbb{R}^+$ (reales positivos) los denotaremos $\bar{x}$ para señalarnos como los elementos del espacio vectorial que consideraremos.

Se define la suma en $\mathbb{R}^+, \oplus$, como la multiplicación usual (en $\mathbb{R}$). Es decir,

$$\bar{x} \oplus \bar{y} \equiv \overline{xy}$$

Como el producto de dos reales positivos es a su vez un real positivo, $\oplus$ define una operación en $\mathbb{R}^+$, que es asociativa y conmutativa.

El 1 funciona como el idéntico "aditivo", y para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^+$, definimos su inverso aditivo como x^{-1} (como todo real diferente de cero tiene inverso multiplicativo, y el inverso de un positivo es positivo, resulta que todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^+$ tiene inverso).

La "multiplicación" de un escalar α (un número real) por un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^+$ (un real positivo) se define como la exponenciación. Es decir,

$$\alpha\bar{x} \equiv \bar{x}^{\alpha}$$

Se tiene que

1) $(\alpha+\beta)\bar{x} = \overline{x^{\alpha+\beta}} = \overline{x^{\alpha}}\,\overline{x^{\beta}} = \overline{x^{\alpha}} \oplus \overline{x^{\beta}} = \alpha\bar{x} \oplus \beta\bar{x}$

2) $\alpha(\bar{x} \oplus \bar{y}) = \alpha(\overline{xy}) = \overline{xy^{\alpha}} = \overline{x^{\alpha}y^{\alpha}} = \overline{x^{\alpha}} \oplus \overline{y^{\alpha}} = \alpha\bar{x} \oplus \alpha\bar{y}$

3) $(\alpha\beta)\bar{x} = \overline{x^{\alpha\beta}} = \overline{(x^{\beta})^{\alpha}} = \alpha(\beta\bar{x})$

4) $1\bar{x} = \overline{x^{1}} = \bar{x}$

Se observa pues, que con las operaciones así definidas es un espacio vectorial, sin embargo no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ dado que las operaciones que estamos definiendo en $\mathbb{R}^{+}$ no son las de $\mathbb{R}$.

Para probar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio, hay que comprobar que se satisfacen en él todas las condiciones que caracterizan a un grupo abeliano como espacio vectorial. Es necesario probar que, siendo un subgrupo, y por lo tanto un grupo abeliano, actúa sobre él el campo de los números reales y que tiene las propiedades 1-4 de la definición.

Para asegurar que W es un subespacio vectorial de V, se dan tres condiciones necesarias y suficientes:

TEOREMA: Sea V un espacio vectorial real y $W \subset V$

1) $\bar{0} \in W$ ó 1') $W \neq \emptyset$

2) $\bar{x}$ y $\bar{y} \in W \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in W$ (W es cerrado bajo la suma de elementos de W)

3) $\bar{x} \in W$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\bar{x} \in W$ (si $\bar{x}$ es un vector de W y α un escalar, entonces el vector $\alpha\bar{x}$ pertenece al espacio W).

Entonces W es un subespacio vectorial de V.

Demostración: Debido a la hipótesis 2, la suma de dos elementos de W está en W, y por lo tanto la suma de V "induce" una suma en W, que es asociativa y conmutativa, dado que ya tenía esas propiedades en V.

La existencia del cero en W queda automáticamente garantizada por la hipótesis 1.

La hipótesis 3 garantiza que el campo "actúa" sobre W en el sentido de que el producto de un vector (de W) por un escalar es un vector (de W), y como esta multiplicación ya tenía (en V), todas las propiedades requeridas por la definición, resulta pues que W es un espacio vectorial real y por lo tanto un subespacio de V.

Nótese que en particular, para cada $\bar{x} \in W$, $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$, está en W, (hipótesis 3) y que $\therefore$ cada vector en W tiene inverso, que es la única condición que faltaba comprobar.

Algunos ejemplos de subespacios vectoriales de un espacio vectorial dado:

I) Sea el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada x, $\mathbb{R}[x]$, y W el conjunto de todos los polinomios de grado menor que 3, además del polinomio cero (que no tiene grado).

Cuando se suman dos polinomios de grado menor que 3, la suma está en W ya que el resultado de una suma de polinomios, o es el polinomio cero, ó su grado es menor o igual que el grado del polinomio de mayor grado.

Al multiplicar un polinomio por un escalar, dado que se efectúa multiplicando el escalar por cada componente, el grado no aumenta.

$\therefore$ W forma un subespacio del espacio vectorial de los polinomios reales.

Igualmente se pudo haber escogido el conjunto de los polinomios de grado menor que n, más el cero, para cualquier n natural. (P_n)

II) Sea V el espacio vectorial de las matrices de $m x n$ con coeficientes reales, y W el subconjunto de las matrices $m x n$ con la primera columna de ceros:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in R \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in V \right\}$$

la matriz cero pertenece a W y por lo tanto W no es vacío. Al sumar matrices, se suman componente por componente, de forma que al sumar dos matrices con la primera columna de ceros, se obtiene otra matriz cuya primera columna es de ceros, y por lo tanto W es cerrado bajo la suma de elementos de W.

Como la multiplicación de un escalar por una matriz se realiza multiplicando el escalar por cada componente de la matriz, entonces el resultado de multiplicar una matriz con la primera columna de ceros, por un escalar, es otra matriz cuya primera columna es de ceros.

III) Sea el espacio vectorial V formado por todas las funciones que son continuas en un intervalo cerrado, y W el conjunto de todas las funciones de V que además son derivables. Otro subespacio sería el conjunto de las que son de clase $C^2, C^3, \dots, C^\infty$. Aquí tenemos una colección infinita de subespacios.

IV) Sea V el espacio vectorial R^3. Caracterizaremos a todos sus subespacios.

0) $\mathbb{R}^3$.

1) los subespacios formados por todos los planos que pasan por el origen:

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y W un plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, es decir, que $\exists\ a,b,c, \in \mathbb{R}_+$ $W = \{(x,y,z,) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz = 0\}$ entonces, $\bar{0} = (0,0,0) \in W$ ya que $a0 + b0 + c0 = \bar{0}$ y si (x_1,y_1,z_1) y $(x_2,y_2,z_2) \in W$, ésto es,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$$

Entonces, $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0$ lo que dice que, $(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) \in W$

Si $(x,y,z) \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, como $ax + by + cz = \bar{0}$ pasa que, $\alpha(ax + by + cz) = 0 = a(\alpha x) + b(\alpha y) + c(\alpha z) = 0$ que indica que $(\alpha x,\alpha y,\alpha z) \in W$,

2) los subespacios formados por todas las rectas que pasan por el origen. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y L una recta que pasa por el origen, es decir, $\exists\ \bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$ tal que $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) = t(a_1,a_2,a_3), t \in \mathbb{R}\}$ entonces:

i) $\bar{0} = (0,0,0) \in L$ ya que si $t = 0$, $(0,0,0) = (0a_1,0a_2,0a_3)$.

ii) Supongamos que (x_1,y_1,z_1) y $(x_2,y_2,z_2) \in L$

entonces $(x_1, y_1, z_1) = (ta_1, ta_2, ta_3)$; $(x_2, y_2, z_2) =$
$= (sa_1, sa_2, sa_3)$ $t, s \in \mathbb{R}$ entonces
$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = ((t+s)a_1, (t+s)a_2, (t+s)a_3)$
$= (t+s)\ (a_1, a_2, a_3)$ y $\therefore$ $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in L$

iii) Si $(x, y, z) \in L$, es decir $(x, y, z) = (ta_1, ta_2, ta_3)$ y
$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = ((\alpha t)a_1, (\alpha t)a_2, (\alpha t)a_3)$
$= \alpha t(a_1, a_2, a_3) \in L$.

3) El conjunto que consta sólo del cero.

Observación: todo espacio vectorial V, tiene 2 subespacios triviales,

(1) el que consta sólo del cero, que se denota $\{\bar{0}\}$ y

(2) el espacio total V

a estos casos pertenecen los incisos 0) y 3).

Ahora comprobemos que son todos.

Sea $W \subset V$ un subespacio de V. Si W consta sólo de $\bar{0}$, obviamente $W = \{0\}$ es uno de los subespacios de $\mathbb{R}^3$ ya considerados.

Si $\exists\ \bar{x} \neq \bar{0} \in W$, entonces $\{t\bar{x}\} \subset W$, es decir, la recta generada por $\bar{x}$ y que pasa por $\bar{0}$, está contenida en W. Si esta recta es todo W, es uno de los subespacios ya considerados. Si no es así, y existe $\bar{y} \in W$ que no es múltiplo de $\bar{x}$, entonces, $\forall\ t, s \in \mathbb{R}$, $t\bar{x} + s\bar{y} \in W$, es decir, el plano que pasa por $\bar{U}$ y que está generado por $\bar{y}$ y $\bar{x}$ está contenido en W.

Una vez más, si ese plano es todo W, es de los antes considerados, de no ser así, si $\exists\ \bar{z} \in W$ que no es suma de múltiplos de $\bar{x}$ y de $\bar{y}$, entonces en W deben estar todas las sumas de múltiplos de $\bar{x}$, de $\bar{y}$, y de $\bar{z}$, que no siendo coplanares, generan todo R^3 (ver adelante).

Con todo lo anterior se ve que los únicos subespacios vectoriales del espacio vectorial R^3, son los mencionados anteriormente.

TEMA II COMBINACIONES LINEALES

COMBINACIONES LINEALES.

Consideremos ahora un espacio vectorial V y β un conjunto de vectores de V. $\beta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n\}$.

Se dice que $\bar{x}$ es una combinación lineal de β si $\bar{x}$ se puede escribir como una suma de múltiplos de las $\bar{x}_i$, o sea

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

El vector $\bar{0}$ es combinación lineal de cualquier subconjunto β puesto que, tomando $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ iguales a cero, se ve que:

$$\bar{0} = 0\bar{x}_1 + 0\bar{x}_2 + 0\bar{x}_3 + \ldots + 0\bar{x}_n$$

Una convención importante, es que si β es un conjunto vacío de vectores, $\beta = \emptyset$ se define, la única combinación lineal de β como $\bar{0}$.

Subespacio Generado

Sea $\beta = \{i, j, k\} \subset \mathbb{R}^3$ podemos decir que el vector (a_1, a_2, a_3) es combinación lineal de β. Ya que $a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_1, a_2, a_3)$ y $\therefore$ todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de β.

Consideremos un subconjunto de vectores de V y el conjunto de todas sus combinaciones lineales.

Sea $V/\mathbb{R}$; $\beta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n\} \subset V$

$W = \{\bar{x} \in V;\ \bar{x}$ es combinación lineal de $\beta\}$, ésto es,

$\bar{x} \in W \Rightarrow \exists\, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \dashv \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$.

Se quiere demostrar que W es un subespacio de V.

1) $\bar{0}$ es combinación lineal de β

$\bar{0} = 0\bar{x}_1 + 0\bar{x}_2 + 0\bar{x}_3 + \ldots + 0\bar{x}_n \in W$

2) si $\bar{x} + \bar{y} \in W$, ésto es, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x}_i$; $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} s_i \bar{x}_i$

entonces $\bar{x} + \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^{n} s_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i + s_i)\bar{x}_i \in W$.

La suma de 2 combinaciones lineales de β es una combinación lineal de β.

3) si $\bar{x} \in W$ y, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\bar{x} = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x}_i\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha t_i)\bar{x}_i \in W$.

Cualquier múltiplo de una combinación lineal de β es una combinación lineal de β.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de β (W) forma un subespacio de V, que se conoce como el subespacio generado por β, y se denota $[\beta]$.

En el caso en que el subespacio generado por β sea todo V, se dice que β es un conjunto de generadores de V ó un conjunto generador de V.

En uno de los ejemplos anteriores, el de $\beta = \{i, j, k\}$ β es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$, dado que como ya se vió todo vector de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de éstos.

Para caracterizar a los espacios generados por un conjunto β de vectores, de otra manera, vamos a utilizar el siguiente teorema.

TEOREMA. La Intersección de 2 subespacios de V es un subespacio de V.

Sean W_1, W_2 subespacios de V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

Demostración:

1) $\bar{0} \in W_1$ y, $\bar{0} \in W_2$ ya que los dos son subespacios y $\therefore$ $\bar{0} \in W_1 \cap W_2$

2) si $\bar{x}$ y $\bar{y} \in W_1 \cap W_2$ entonces $\bar{x}$ y $\bar{y} \in W_1$ y, $\bar{x}$ y $\bar{y} \in W_2$ y $\therefore$ $\bar{x} + \bar{y} \in W_i$ $i = 1,2$ entonces $\bar{x} + \bar{y} \in W_1 \cap W_2$.

3) Suponer que $\bar{x} \in W_1 \cap W_2$ y $t \in \mathbb{R}$, por definición de intersección, $\bar{x} \in W_i$, $i = 1,2$

$\therefore t\bar{x} \in W_i, \quad i = 1,2$

$\therefore t\bar{x} \in W_1 \cap W_2$

De forma análoga se prueba que si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios de V, $\cap_{i\in I} W_i$ es un subespacio de V. Lo que se necesita en este caso, es extender los argumentos anteriores de "$i=1,2$" a "$\forall\, i \in I$".

Consideremos V un espacio, y β un conjunto de vectores, y fijémonos en todas las familias de subespacios de V que contienen a β. Esta familia no es vacío porque el espacio total V es un miembro de ella; y como la intersección de los subespacios es un subespacio, entonces la intersección de toda la familia es un subespacio que coincide con el espacio vectorial de todas las combinaciones lineales de β.

Sea $[\beta]$ el subespacio de V generado por β. Entonces, dado que cada vector de β es una combinación lineal de β, $(\bar{x}_i = 0\bar{x}_1 + \ldots + 1\bar{x}_i + \ldots + 0\bar{x}_n)$, $[\beta]$ es un miembro de la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de subespacios de V que contienen a β y $\therefore \cap_{i\in I} W_i \subset [\beta]$.

Por otra parte, como $\beta \subset \cap_{i\in I} W$, todo múltiplo de cada $\bar{x}_i \in \beta$, debe estar en $\cap_{i\in I} W_i$ y por lo tanto toda combinación lineal de β debe ser elemento de $\cap_{i\in I} W_i$. Entonces resulta que $[\beta] \subset \cap_{i\in I} W_i$ y esta contención junto con la anterior da la igualdad $[\beta] = \cap_{i\in I} W_i$.

En resumen, vemos que el espacio generado por β, es por una parte el conjunto de todas las combinaciones lineales de β, y por otra, el menor subespacio de V que contiene a β. Ejemplo 1.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\beta = \{\bar{x}\}$, en donde $\bar{x}$ es un vector cualquiera diferente de cero. El espacio generado por β, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de β, o sea, la recta que pasa por el origen y está generada por el vector $\bar{x}$. Ejemplo 2.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ $\beta = \{\bar{a}, \bar{b}\}$ con $\bar{a}$ y $\bar{b} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no están alineados (uno no es múltiplo del otro). El subespacio generado por β consta del plano que pasa por el origen y que está generado por $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Ejemplo 3.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ $\beta = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ $\bar{i}, \bar{j}$, y $\bar{k}$ no son coplanares. Entonces el espacio generado por β es el conjunto total $\mathbb{R}^3$, y β es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

Consideremos un conjunto β de vectores de un espacio vectorial V, se dirá que β es un conjunto linealmente dependiente, ó que sus vectores son linealmente dependientes, cuando alguno de ellos sea combinación lineal de los demás, esto es, que se pide que exista una colección de $n-1$ números reales,

$$\bar{x}_i = t_1\bar{x} + \ldots\ldots + t_{i-1}\bar{x}_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \ldots\ldots + t_n\bar{x}_n$$

β es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \exists\ \bar{x}_i \in \beta_\ni\ \bar{x}_i \in [\beta_i - \{\bar{x}_i\}]$.

TEOREMA. β es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \exists\{t_1, t_2, t_3, \ldots, \ldots, t_n\} \neq \{0\}_\ni\ 0 = \sum_{i=1}^{n} t_i\bar{x}_i$

Demostración: $\Rightarrow$

La hipótesis es que β es linealmente dependiente y se debe demostrar que 0 es una combinación lineal no trivial de β. Si $\bar{x}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} t_j\bar{x}_j$, entonces $0 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} t_j\bar{x}_j + x_i$

$\Leftarrow$

Sea $0 = \sum_{i=1}^{n} t_i\bar{x}_i$ con algún $t_i \neq 0$, sea éste t_1, entonces $x_1 = \frac{t_2}{t_1}x_2 - \frac{t_3}{t_1}x_3 - \ldots - \frac{t_n}{t_1}x_n$.

En el caso de que β no sea linealmente dependiente, entonces se dice que β es linealmente independiente, ó que sus vectores son linealmente independientes.

Usando la negación lógica se hace notar que un conjunto de vectores es linealmente independiente, sí y sólo sí, cada vez que el cero sea combinación lineal de ellos, los coeficientes son necesariamente ceros.

Es decir β es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \neq \{0\}$, $0 \neq \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x}_i$ ó $0 = \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x}_i$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$

Observaciones:

1) un conjunto $\beta = \{\bar{x}\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (ya que si quitamos a $\bar{x}$ de β, queda $\emptyset$, cuya única combinación lineal es el $\bar{0}$, por definición).

2) un conjunto $\beta = \{\bar{x}, \bar{y}\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\bar{x} = \bar{y}$, ó $\bar{x} = \alpha\bar{y}$. Es decir, $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ y $\bar{y}$ no son colineales. Análogamente $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ no son coplanares.

3) si α es linealmente dependiente y $\alpha \subset \beta$, entonces β es linealmente dependiente (ya que si existe una combinación lineal de α que da el cero con coeficientes no todos cero, esa misma con ceros para cada $\bar{x} \in \beta - \alpha$, da

la que se requiere para la definición de dependencia lineal para β es decir, si: $\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

$\bar{0} = \sum_1^n t_i x_i$ con $\Sigma t_i^2 > 0$ (no toda $t_i = 0$), entonces

$\bar{0} = \sum_1^n t_i x_i + \sum_1^m 0 y_i$ y, obviamente no todos los coeficientes son ceros.

Corolario: si $\bar{0} \in \alpha$, α es linealmente dependiente.

Corolario: si β es linealmente independiente, y $\alpha \subset \beta$ entonces α es linealmente independiente.

Ejemplo 1.

Sea $V = \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(1,1),(1,0)\}$ es linealmente independiente, ya que si $t_1(1,1) + t_2(1,0) = (0,0)$,

$(t_1 + t_2, t_1) = (0,0)$ entonces $t_1 + t_2 = 0$

y $t_1 = 0$ y $\therefore t_1 = t_2 = 0$

Ejemplo 2.

Sea $V = \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(1,0), (2,0)\}$

$2(1,0) - 1(2,0) = (0,0)$ *i.e.* $2(1,0) = (2,0)$

$\therefore$ los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo 3.

Sea $V = \mathbb{R}^3$

$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ **linealmente independiente.**

Demostración: $t_1(1,0,0) + t_2(0,1,0) + t_3(0,0,1) = \bar{0} \Rightarrow$

$(t_1,t_2,t_3) = (0,0,0) \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0$

+

Ejemplo 4.

Sea $V = \mathbb{R}^3$

$\beta = \{(1,1,1),\ (1,1,0),(1,0,0)\}$ linealmente independiente.

Demostración: $t_1(1,1,1) + t_2(1,1,0) + t_3(1,0,0) = \bar{0} \Rightarrow$

$(t_1 + t_2 + t_3, t_1 + t_2, t_1) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ t_1 + t_2 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

$y \therefore t_1 = t_2 = t_3 = 0$

Ejemplo 5.

Sea $V = \mathbb{R}^3$

$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ **es linealmente dependiente.**

Demostración: Si $t_1(1,0,0) + t_2(0,1,0) + t_3(0,0,1) +$
$+ t_4(1,2,3) = \bar{0}\ldots\ldots(1)$

$(t_1 + t_4, t_2 + 2t_4, t_3 + 3t_4) = (0,0,0)$ y

se pueden encontrar valores de t_1, t_2, t_3, t_4

no todos cero tales que satisfagan (1)

$t_1 = -t_4$

$t_2 = -2t_4$

$t_3 = -3t_4$

en particular, si $t_4 = 1$

$t_1 = -1$

$t_2 = -2$

$t_3 = -3 \therefore$ es linealmente dependiente

ó

$(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = (1,2,3)$

Ejemplo 6.

En el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, el conjunto $\beta = \{sen\ x,\ cos\ x\}$ es linealmente independiente.

Demostración: si $t_1\ sen\ x + t_2\ cos\ x = 0$ derivando obtenemos
$t_1\ cos\ x - t_2 sen\ x = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ cos\ x & -\ sen\ x \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{y} \therefore$$

$t_1 = t_2 = 0$ necesariamente. Es decir, $sen\ x$ y $cos\ x$ son linealmente independientes.

Ejemplo 7.

En el mismo espacio vectorial del ejemplo 6, si $\beta = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$, β es linealmente independiente.

Demostración: si $t_1e^x + t_2e^{2x} + t_3e^{3x} = 0$ derivando 2 ve-
$t_1e^x + 2t_2e^{2x} + 3t_3e^{3x} = 0$ ces, se obtiene
$t_1e^x + 4t_2e^{2x} + 9t_3e^{3x} = 0$ y $\therefore$, $\forall$ x,

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

y $\therefore$ $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ necesariamente.

__Criterios para Determinar Independencia Lineal.__

Es importante saber si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o no, y por eso se han desarrollado técnicas para determinarlo.

1) Se considera una combinación lineal de cualquiera de ellos que sea cero. Y si a partir de ésto, se puede concluir que todos los coeficientes son necesariamente ceros, se

habrá probado que el conjunto es linealmente independiente.

2) Método del determinante. Consiste en considerar los determinantes que se pueden extraer de una matriz de $m \times n$. Diremos que un determinante de orden r se puede extraer de una matriz, si tachando un número adecuado de renglones y/o columnas, se obtiene un arreglo cuadrado de $r \times r$, que corresponda al determinante que se quiere considerar.

Ejemplo. si M es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ es un determinante que "se puede extraer" de M, tachando la 1a. y la 4a. columnas. Supongamos que tenemos n vectores del espacio vectorial R^n, ésto es, tenemos n-eneadas de números reales. Si de la matriz que se forma poniendo los vectores, uno debajo del otro, se puede extraer un determinante de $n \times n$ que sea diferente de cero, entonces el conjunto es linealmente independiente. Si todos los determinantes de $n \times n$ que se pueden extraer de la matriz de los coeficientes son cero, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

Este método es el que se usa con más frecuencia para los subconjuntos de vectores en los espacios de dimensión finita.

Sea $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\} \subset R^n$ $\quad \bar{x}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$,

$i = 1, 2, \ldots, m$ y,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

TEOREMA: β es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \forall \Delta$ de $m \times m$ extraído de A, $\Delta = 0$, y, equivalentemente β es linealmente independiente $\Leftrightarrow \exists \Delta$ de $m \times m$ extraído de $A \ni \Delta \neq 0$.

Este criterio puede usarse cuando $m \leq n$. Como se verá después, si $m > n$, entonces la colección de m vectores, siempre resulta linealmente dependiente. (ver corolarios del Teorema del Cambio).

Demostración del Teorema.

(Ind/m) Sea $n \in \mathbb{N}$ fija

Base $m = 1$

Si $\beta = \{\bar{x}\}$, β es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (como se vió en la observación 1) y $\therefore$ todo Δ de 1×1 extraído de M (cada componente de $\bar{x}$) es cero.

Paso inductivo.

Suponemos cierto el teorema para el caso $m = k$. Esto es, un conjunto con k vectores es linealmente independien te $\exists$ un determinante de $k \times k \neq 0$, extraído de la matriz de las componentes, y sea $\beta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k+1}\}$.

Primero supongamos que todo Δ de $(k+1) \times (k+1)$ es cero, y probaremos que en este caso β es linealmente dependiente. Si $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ son l.d. no hay nada que probar (por la observación II) $\therefore$ supondremos que son linealmente independientes y $\therefore$ (hipótesis de inducción) $\exists A \neq 0$ en donde

$$A = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots\cdots & a_{1i_k} \\ & & \vdots & \\ a_{ki_1} & a_{ki_2} & \cdots\cdots & a_{ki_k} \end{vmatrix}$$

$$\forall_j \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1i_1} & \cdot & a_{1i_k} \\ & & \vdots & \\ a_{k+1j} & a_{k+1i_1} & \cdots\cdots & a_{k+1i_k} \end{vmatrix} = 0$$

Ya que si j es algunas de las i_1, $\Delta = 0$ por tener 2 columnas iguales. (ver más adelante).

Y si $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, Δ_j es uno de los determinantes de A de $(k+1) \times (k+1)$, que por hipótesis es cero. Desarrollando según la 1a. columna, se obtiene:

$$0 = a_{1j}\Delta_1 - a_{2j}\Delta_2 + \ldots + (-1)^{k+2} a_{k+1j}\Delta$$

(ojo, $\Delta \neq 0$)

$$a_{k+1j}\Delta = \pm(-a_{1j}\Delta_1 + a_{2j}\Delta_2 - \ldots \pm a_{kj}\Delta_k)$$

definiendo $c_i = \pm\frac{\Delta_i}{\Delta}$, se tiene: $a_{k+1j} = \sum_1^k c_i a_{ij}$

$\therefore \bar{x}_k = \sum_1^k c_i \bar{x}_i$, es decir, β es linealmente dependiente.

2a. parte.

Si β es linealmente dependiente, entonces uno de sus vectores es combinación lineal de los demás, y $\therefore$ en A un renglón es combinación lineal de los otros y $\therefore$ todo determinante de $(k+1) \times (k+1)$ que se extraiga de ella, es cero, ya que Δ debe incluir necesariamente a todos los renglones $(k+1)$.

3) Método del Wronskiano. en el estudio de las ecuaciones diferenciales como las soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas, ó de sistemas lineales homogéneos, forman espacios vectoriales de dimensión finita, es importante saber, cuándo un número adecuado de soluciones es linealmente independiente. Para estos casos, se ha desarrollado una técnica que se conoce con el nombre de método del Wronskiano, y que, consiste en calcular un determinante de funciones que consta de las soluciones y sus derivadas.

Definición: sean y_1 y y_2 dos funciones que tienen primera derivada en un intervalo I. Se define el Wronskiano de ellas

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

que es una función de I en R, ya que $\forall\, x \in I$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ son números y $\therefore$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$ es un número real.

Por ejemplo, si $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} e^0 & e^{2(0)} \\ e^0 & 2e^{2(0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Se extiende la definición de Wronskiano para el caso de 3 ó más funciones, (de la manera natural); Si:
$y_1 = sen\ x$, $y_2 = sen\ 2x$, $y_3 = sen\ 3x$ entonces:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} sen\ x & sen\ 2x & sen\ 3x \\ cos\ x & 2\ cos\ 2x & 3\ cos\ 3x \\ -sen\ x & -4\ sen\ 2x & -9\ sen\ 3x \end{vmatrix}$$ y, entonces

$$W[0] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Se puede demostrar que si para toda $x \in I$ el Wronskiano de n funciones es diferente de cero, entonces las n funciones son linealmente independientes. La condición es necesaria y suficiente.

Para el caso de las ecuaciones diferenciales se puede probar algo más, que el Wronskiano siempre es negativo, siempre es positivo, ó, siempre es cero, y por lo tanto en este caso basta calcular el Wronskiano para un valor adecuado de la variable. Si resulta diferente de cero, entonces W es siempre diferente de cero, y las soluciones que lo componen son linealmente independientes. Se prueba que en general, $W = ke^{f(x)}$, $\therefore$ si $k = 0$, $W = 0\ \forall x$, si $k > 0$, $W(x) > 0$ $\forall x$, etc.

BASE Y DIMENSION

Definición: Sea β un conjunto de vectores de un espacio vectorial V, se dice que β es una base de V si cumple 2 condiciones:

1) β es linealmente independiente.
2) β es un conjunto de generadores de V.

Es decir, β es una base de un espacio vectorial V, sí y solo sí, todo vector de V se puede escribir como com binación lineal de los vectores de β en forma única.

Aceptaremos sin demostrar un hecho fundamental. Todo espacio vectorial tiene al menos una base. El conjunto vacío cuya única combinación lineal es el conjunto cero, se supondrá también linealmente independiente. En este caso, es la única base del espacio vectorial que consta solamente del cero. Si un espacio vectorial tiene una base con un número finito de vectores, se dirá que es un espacio de dimensión finita.

Definición: un espacio vectorial es de dimensión finita, si tiene al menos una base con un número finito de elementos.

Son espacios de dimensión finita además del que consta sólo del cero, todos los espacios de eneadas que hemos estado considerando hasta aquí.

Y se puede probar que son todos, en el sentido de que cada espacio vectorial de dimensión finita n es isomorfo (indistinguible desde el punto de vista del álgebra) a un espacio de eneadas.

Como ejemplos de espacios de dimensión infinita, consideremos el conjunto de los polinomios en una indeterminada X.

El anillo de los polinomios reales en una indeterminada x, $\mathbb{R}[x]$, es el conjunto

$$\mathbb{R}[x] = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : f(n) = 0 \text{ para casi toda } n\}.$$

Entonces el conjunto infinito de polinomios $(1,0,0,\ldots)$, $(0,1,0,\ldots)$, $(0,0,\ldots,1,0,\ldots)$ es linealmente independiente y genera a todo $\mathbb{R}[x]$, que, por lo tanto tiene una base con un número infinito de elementos. Se dice entonces que $\mathbb{R}[x]$ es de dimensión infinita.

$$dim\ \mathbb{R}[x] = \infty \quad (\aleph_0)$$

Sea $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ que, como vimos antes, es un espacio vectorial real. Entonces el conjunto $\beta = \{f_x : [0,1] \to \mathbb{R};\ x \in [0,1]\}$ en donde cada f_x se define

$$f_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

es un conjunto linealmente independiente.

Luego $dim\ V \geq \infty \quad (\aleph_1)$.

Otro espacio importante de dimensión infinita es el espacio de las funciones reales de clase C^n.

Debe quedar claro que las definiciones anteriores funcionan bien a condición de que se cumpla la siguiente afirmación: si β_1 y β_2 son bases de un mismo espacio vectorial, ambas tienen el mismo número de elementos.

Esta afirmación se demuestra fácilmente en el caso de los espacios de dimensión finita, como un corolario del Teorema del Cambio, (ver adelante) y también es cierta en el caso general.

Teorema del Cambio.

El Teorema del Cambio debe su nombre al hecho de que se intercambian unos vectores de un conjunto por otro. Se enuncia a continuación y se deja sin demostración.

TEOREMA DEL CAMBIO: Sean $\alpha = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ linealmente independiente. $\beta = \{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\}$ β un conjunto generador de V $\alpha, \beta \subset V$ entonces $n \leq m$

es decir, "en todo espacio vectorial el número de elementos de los conjuntos linealmente independientes es menor o igual que el número de elementos de los conjuntos de generadores".

Entre las consecuencias de este teorema tenemos:

1) Para todo espacio vectorial V, 2 bases cualesquiera siempre tienen el mismo número de elementos.

   Sean $\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\beta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ dos bases de V. Entonces, puesto que α genera y β es linealmente independiente, $m \leq n$, pero como recíprocamente,

β es generado y α es linealmente independiente, $n \leq m$

$\therefore$ $n = m$.

2) En vista del punto anterior y del "dogma de fe", de que todo espacio vectorial tiene al menos una base, se puede ver que hay para cada espacio vectorial un número muy bien determinado y que en algunos casos lo caracteriza, a saber, el número de vectores que tiene una cualquiera de sus bases. A éste se le llama la Dimensión del Espacio Vectorial.

   Así pues, para cada espacio vectorial V, si n es el número de elementos de cualquiera de sus bases, n se llama la dimensión de V.

3) En un espacio vectorial de dimensión finita n, $n+1$ vectores son siempre linealmente dependientes, y $n-1$ vectores no pueden generar a todo el espacio.

4) Todo conjunto de vectores linealmente independiente puede completarse y formar una base de un espacio vectorial.

Como vimos arriba, se dice que un espacio vectorial es de dimensión n, sí y solo sí, tiene una base con n elementos. En este caso todas las bases tienen exactamente n elementos. Así por ejemplo, el espacio R^3 es un espacio de dimensión 3, porque tiene una base formada por los vectores i, j, y k.

En general los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$, tienen como bases a los conjuntos que se conocen como $\{e_i\}$, y, que se definen como sigue:

Sea $V = \mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$e_2 = (0,1,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0,0,\ldots,1)$$

Resulta inmediato que si $\alpha = \{e_1,\ldots,e_n\}$, entonces α es linealmente independiente y genera V. α se conoce como la "base canónica" de $\mathbb{R}^n$.

Una consecuencia del hecho de que todo conjunto linealmente independiente puede completarse a una base, es que en un espacio vectorial de dimensión n, n vectores linealmente independientes siempre forman una base, y por esta razón, si conocemos de antemano que la dimensión de un espacio vectorial es "n", para determinarlo completamente, nos bastará con encontrar n vectores linealmente independientes. De ahí la importancia de tener métodos para poder averiguar la independencia o dependencia lineal de los vectores. (referencia, ecuaciones diferenciales).

TEMA III PRODUCTO PUNTO. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES.

PRODUCTO PUNTO.

Con objeto de iniciar el estudio de las matrices y las T.L. comenzaremos por definir una operación que se efectúa entre dos vectores, y, cuyo producto es un número real. Es decir, es una función de $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, que se conoce como producto punto ó producto escalar de 2 vectores. Para el caso de los vectores $\mathbb{R}^n$, las eneadas, tenemos que:

$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se define:

si $\bar{x} = (a_1,\ldots\ldots,a_n)$ y, $\bar{y} = (b_1,\ldots\ldots,b_n)$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ejemplo:

Si $n = 3$, $\bar{x} = (1,2,3)$, $\bar{y} = (3,2,1)$ entonces

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 1(3) + 2(2) + 3(1) = 10$$

Resultan inmediatas las propiedades siguientes:

1) $\bar{x} \,.\, \bar{x} \geq 0 \qquad \bar{x} \,.\, \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

2) $\bar{x} \,.\, \bar{y} = \bar{y} \,.\, \bar{x}$

3) $\bar{x} \,.\, (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \,.\, \bar{y} + \bar{x} \,.\, \bar{z}$

4) $\bar{x} \,.\, \alpha\bar{y} = \alpha(\bar{x} \,.\, \bar{y})$

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Las propiedades 3 y 4 se expresan también diciendo que el producto punto es lineal en el segundo factor. Y, en vista de la propiedad 2 que dice que el producto punto conmuta, se resumen las propiedades 2, 3 y ~~4,~~ diciendo que el producto punto es una función bilineal. A la propiedad 1, también se le menciona diciendo que el producto punto está definido en forma positiva.

En álgebra lineal es costumbre abstraer las propiedades de las operaciones, y así en general, toda función de $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que tenga las propiedades de 1 a 4, se llama un producto escalar, (o una forma bilineal definida positivamente).

Definición: en vista de que $\bar{x} \cdot \bar{x}$ siempre es un número real, mayor o igual que cero, y que todos los números reales mayores o iguales que cero tienen una única raíz cuadrada positiva, se suele tomar ésta como la NORMA del vector $\bar{x}$, o sea, "el tamaño de $\bar{x}$" es por definición $(\bar{x}.\bar{x})^{1/2}$

$$\|x\| = (\bar{x}.\bar{x})^{1/2}$$

de la definición se sigue que:

1) $\|\bar{x}\| \geq 0 \qquad \|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

2) $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\,\|\bar{x}\|$

(en particular $\|\bar{x}\| = \|-\bar{x}\|$

ya que

$$\|-\bar{x}\| = \|(-1)\bar{x}\| = |-1|\|\bar{x}\| = \|x\|)$$

3) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \ |\bar{x} \cdot \bar{y}| < \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|$

4) $\|\bar{x} + \bar{y}\| < \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

Toda función de un espacio vectorial V en los números reales que satisfaga las propiedades 1,2 y 4, se conoce como una norma. Los espacios vectoriales de dimensión finita, (eneadas de números reales) son espacios que tienen norma, por lo que se llaman también espacios normados.

En términos de la norma se define la distancia entre 2 vectores de la manera siguiente:

Sea V un espacio vectorial normado, con norma $\| \ \|$.

Definición: si $\bar{x}$ y $\bar{y} \in V$, $d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, y entonces

1) $d(\bar{x},\bar{y}) > 0$, $\quad d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

3) $d(\bar{x},\bar{y}) < d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$

La función que asocia a cada pareja de vectores un número real que satisfaga las condiciones 1,2, y 3 de la función distancia se llama una <u>Métrica</u>. Podemos decir, que los espacios normados, (y en particular las n-adas) son espacios métricos.

Por último, mencionaremos que a partir de la métrica se puede definir el concepto de "conjuntos abiertos". Se puede introducir en el espacio de que se trate, una topología, con lo cual se podrá hablar de continuidad, etc.

Con el producto punto se puede estudiar la geometría de los espacios R^n.

En vista de que

$|\bar{x} . \bar{y}| < |\bar{x}||\bar{y}|$, pasa que

$$-1 < \frac{\bar{x} . \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} < 1$$

y ya que a cada número que está $\in [-1, 1]$ le corresponde un único ángulo cuyo coseno es ese número, se acostumbra definir el ángulo que forma 2 vectores, como el ángulo cuyo coseno es

$$\frac{\bar{x} . \bar{y}}{|\bar{x}| \; |\bar{y}|}$$

en el caso de que tanto $\bar{x}$ como $\bar{y}$ sean diferentes de cero, pues el vector $\bar{0}$ no forma ángulo con ningún otro vector.

De acuerdo con esta definición, dos vectores son ortogonales, sí y solo sí, su producto punto vale cero. Nótese que para esta definición de ortogonalidad, el vector $\bar{0}$ ya puede incluirse. Y, en vista de que $\bar{0} \cdot \bar{z} = \bar{0}, \forall z$ vector,

$\bar{0}$ es ortogonal a cualquier vector, incluído él mismo. (y es el único con tal propiedad, ya que si $\bar{x} \neq \bar{0}$. $\bar{x}.\bar{x} \neq \bar{0}$ y $\therefore \bar{x} \not\perp \bar{x}$.

Matrices

Como es frecuente en el estudio de la matemática, los conceptos nacen de una situación en particular, se desarrollan para llenar las necesidades explícitas de un problema dado, pero después, el concepto desarrollado sigue creciendo por sí mismo, y supera con mucho al problema que le dió origen. Tal es el caso de las matrices.

Primero definiremos para cada $n \in N^*$ $(N^* = \{1,2,\ldots\})$ $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ ej. $I_3 = \{1,2,3\}$ de acuerdo con ésto, si $m, n \in N$.

$$I_m \times I_n = \{(i,j) \ / \ i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n\}$$

Definición: Una matriz M de $m \times n$ con coeficientes reales, es una función $M : I_m \times I_n \to \mathbb{R}$.

Se acostumbra describir explícitamente M, por medio de un arreglo rectangular de m renglones y n columnas de manera que el elemento (real) que M asocia a la pareja (i,j) se escribe en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna.

Ejemplo:

Sean $m = 3$, $n = 4$ y sea la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ \pi & 1/2 & 0.3 & \sqrt{2} \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde $M(2,3) = 0.3$

$M(m \times n : \mathbb{R})$ "el conjunto de las matrices de $m \times n$ con coeficientes reales" es un espacio vectorial real (ej. 5 de espacios vectoriales), y:

1) Si M, N son matrices, $M = N$ si y solo si, tienen igual dominio (mismo número de renglones y de columnas) y en cada "casilla" (lugar) tienen el mismo número ($M = N \Rightarrow$ son idénticas).

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$M = N \Rightarrow \begin{array}{l} a = e \\ b = f \\ c = g \\ d = h \end{array}$$

2) M y N se pueden sumar, si y solo si, tienen igual dominio, y en este caso, se suman componente por componente.

Sean

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad y, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad M + N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, αM es la matriz que resulta de multiplicar cada componente de M por α.

Sea $\alpha = -1$ y,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Una matriz cero es la que tiene 0 en cada componente, y si $M \in M_*$, $-M$ es la que tiene en cada componente al inverso de la correspondiente componente de M.

Sea $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$M + (-M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz cero ó nula de $M(2 \times 4 : \mathbb{R})$

Multiplicación de Matrices

Para poder estudiar las transformaciones lineales (y sus composiciones) de una manera cómoda, introducimos aquí la definición de multiplicación de matrices, que es una operación de $M(p\times m : \mathbb{R}) \times M(m\times n ; \mathbb{R}) \to M(p,n : \mathbb{R})$ definida: Si $A \in M(p\times m : \mathbb{R})$ y $B \in M(m\times n : \mathbb{R})$ entonces $A \times B$ es la matriz de $M(p\times n ; \mathbb{R})$ que tiene en el lugar (i,j) al producto punto del i-ésimo renglón de A por la j-ésima columna de B.

Ejemplo:

$$\text{Sea} \quad A = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \qquad B = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aunque esta definición pueda parecer artificial, se justifica plenamente cuando se consideran las transformaciones lineales, sus composiciones y las matrices asociadas a ellas. **(ver pág. 53).**

Transformaciones lineales

Una parte medular del álgebra lineal es el estudio de las transformaciones entre los espacios vectoriales que preservan su estructura. Tales funciones se conocen como transformaciones lineales. Puede decirse que el álgebra lineal es el estudio de los espacios vectoriales y sus transformaciones (lineales) y, a ellas nos referiremos en los párrafos que siguen.

Definición: Consideremos dos espacios vectoriales $\{V ; +, \cdot\}$ y $\{W ; \oplus, \odot\}$ en donde $+$ y $\oplus$, son las correspondientes sumas de vectores y $\cdot$ y $\odot$ los productos escalares.

Una función $F : V \to W$ es una transformación lineal si:

$F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\bar{x}) \oplus F(\bar{y})$, y

$F(\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha \odot F(\bar{x})$ para $\forall \bar{x}$ y $\bar{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Obsérvese que se ha usado distinto símbolo para la suma y el producto escalar, para enfatizar el hecho de que pueden ser diferentes operaciones en cada espacio.

Algunos ejemplos de Transformaciones Lineales:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) Para } \forall \bar{x} \quad F(\bar{x}) = \bar{0} \quad \text{(la función cero)} \\ \text{2) } \quad \forall \bar{x} \quad G(\bar{x}) = \bar{x} \quad \text{(la función idéntica } (n=m) \\ \text{3) } \pi(\bar{x}) = x_i \text{ en donde } \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\ \quad (\pi \text{ es la } i\text{-ésima proyección}) (m=1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} V=\mathbb{R}^n \\ W=\mathbb{R}^m \end{array}$$

4) Las rotaciones del plano alrededor del origen $(n=m=2)$ $\left.\right\} \begin{matrix} V=\mathbb{R}^n \\ W=\mathbb{R}^m \end{matrix}$

5) Sea $V = \mathbb{R}^+$ en donde la suma es el producto usual y el producto escalar es la exponenciación (ver ejemplo pág. 10) y $W = \mathbb{R}$, con las operaciones usuales. Se define $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como sigue: $F(\bar{x}) = \ln \bar{x}$. Obviamente esta función tiene las propiedades que definen las transformaciones lineales.

$F(a \oplus b) = \ln ab = \ln a + \ln b$

$F(\alpha \odot a) = \ln a^{\alpha} = \alpha \ln a$

Con objeto de usar este ejemplo para una aplicación posterior haremos dos observaciones:

1) en $V = \mathbb{R}^+$ el "cero" es 1 y $F(\bar{0}) = \ln 1 = 0$

2) $\ln e = 1$

Nótese que si en vez de usar el $\ln$, se hubiera definido $F = \log_a$ (para lo cual $a \neq 1$) la función resultaría igualmente lineal.

En este caso: $L(1) = 0$

$L(a) = 1$

<u>Algunas propiedades de las Transformaciones Lineales.</u>

1) Si F es una T.L. $F(\bar{0}) = 0$

2) Las T.L. son continuas.

3) La composición de transformaciones lineales es una T.L. (es decir: si $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son T.L., entonces $S \circ T : V \to Z$ es T.L.)

4) TEOREMA: Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y $\beta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ una base de V. Sean $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$ vectores de un espacio vectorial W. Entonces $\exists!$ T.L. $T : V \to W \ni T(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Es decir, que una transformación lineal queda bien determinada por las imágenes de los elementos de una base del dominio.

Demostración:

Sean V, W espacios vectoriales $/\mathbb{R}$.

$\beta = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ base de V.

$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\} \subset W$ (no necesariamente diferentes).

Se trata de construir una $T : V \to W$, transformación lineal, y que $T(x_i) = u_i$ $i = 1, \ldots, n$. Y después se hará ver que es la única T.L. con esa propiedad.

Observaciones:

1) para cada $\bar{x} \in V$, $\exists! (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ni \bar{x} = a_1\bar{x}_1 + \ldots + a_n\bar{x}_n$

ejemplo: si $\{(1,0)(1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}$, y $\bar{x} = (2,3)$ entonces $(a_1,a_2) = (-1,3)$ ya que $(2,3) = -1(1,0) + 3(1,1)$.

$(a_1,\ldots,a_n)$ se llama "el vector de coordenadas de $\bar{x}$ con respecto a β".

2) Cuando el vector de coordenadas de $\bar{x}$ sea $(a_1,\ldots,a_n)$, escribiremos $\bar{x} \longrightarrow (a_1,\ldots,a_n)$

Entonces si $\bar{x} \longrightarrow (a_1,\ldots,a_n)$ $\quad (\bar{x} = \sum_1^n a_i x_i)$

$\bar{y} \longrightarrow (b_1,\ldots,b_n)$ $\quad (\bar{y} = \sum_1^n b_i x_i)$,

$\bar{x} + \bar{y} \longrightarrow (\ldots,a_i + b_i,\ldots)$ y $\alpha\bar{x} \longrightarrow (\ldots,\ldots,\alpha a_i,\ldots,)$

3) $\forall\ i$, $i = 1,\ldots,n$,

$$\bar{x}_i \longrightarrow (0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ésimo lugar}}}{1},0,\ldots 0)$$

Se define $T : V \to W$, $T(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{u}_i$, en donde $(a_1,\ldots,a_n)$ es el vector de coordenadas de $\bar{x}$.

En vista de 1, T está bien definida, y por 2) es T.L. Además ya que $\bar{x}_i \longrightarrow (0,\ldots,1,\ldots,0)$, $T(\bar{x}_i) = \bar{u}_i$.

II. Sea $S : V \to W$ una T.L. $\ni$ $S(\bar{x}_i) = \bar{u}_i$ $i = 1,\ldots,n$

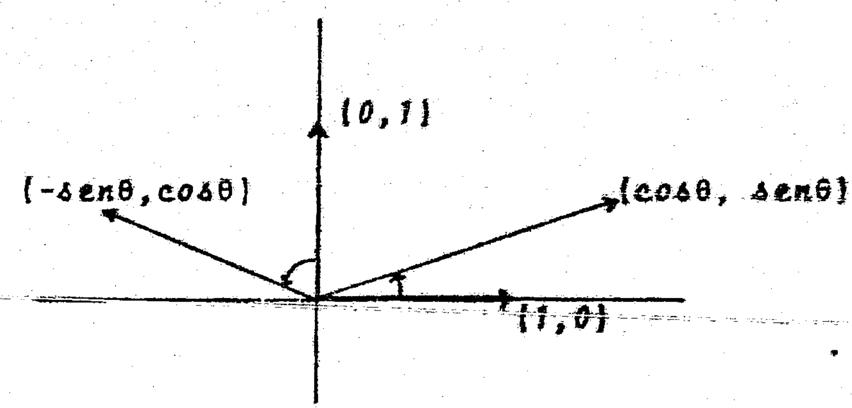
entonces $S(\bar{x}) = S(\Sigma a_i \bar{x}_i) = \Sigma\ a_i S(\bar{x}_i) = \Sigma\ a_i \bar{u}_i = T(\bar{x})$

$\therefore S = T$ e.d. T es única.

Consideremos el ejemplo de las rotaciones R_θ de un ángulo θ alrededor del origen, en el plano.

En este caso, la base canónica del dominio $(\mathbb{R}^2)$ es $\{(1,0), (0,1)\}$ y se tiene que

$$i = (1,0), \qquad R_\theta(i) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$
$$j = (0;1) \qquad R_\theta(j) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$



Aplicando la transformación R_θ a un vector cualquiera, digamos

$$\bar{x} = a_i + b_j, \quad R_\theta(\bar{x}) = aR_\theta(i) + bR_\theta(j) =$$
$$= a(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + b(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) =$$
$$= (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta, a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta).$$

Observemos que la primera componente se obtiene formando el producto interior de $(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ con (a, b), mientras que la segunda se obtiene al multiplicar $(\operatorname{sen}\theta ,$

$\cos\theta)$ con (a, b).

Luego la rotación R_θ coincide con la transformación lineal definida por medio de la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$, según la receta: $R_\theta(\bar{x}) = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en

donde $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Generalizando el resultado que se ve en este ejemplo, si

$$T(e_i) = \bar{b}^{i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n,$$

T está dada por la receta $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ en donde A es la matriz cuyas columnas son los vectores $\bar{b}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Es esta circunstancia la que nos permite identificar las transformaciones lineales con las matrices.

COMPOSICION DE TRANSFORMACIONES LINEALES Y MULTIPLICACION DE MATRICES.

Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son transformaciones lineales dadas por las matrices A y B de órdenes $m \times n$ y $p \times m$ respectivamente.

La composición $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ también es lineal y por lo tanto debe estar dada por una matriz C de pxn. En vista de la identificación de transformaciones lineales con matrices que señalamos en el párrafo anterior, quisiéramos asociar también al producto de transformaciones lineales (su composición), un producto de matrices y con este propósito en mente se busca definir este producto de manera que C resulte ser precisamente el producto AB.

Entonces el elemento c_{ij} de C tiene que ser el producto interior del i-ésimo renglón de A por la j-ésima columna de B. Resumiendo $C = AB$ significa que $c_{ij} = \bar{A}_i\bar{B}^j$.

Nótese que esta definición de producto requiere que la dimensión de los renglones de A (que corresponde al número de columnas que tiene) sea igual a la de las columnas de B (número de renglones de B).

Ejemplo: Sean A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = AB$$

Como la dimensión de A es $3x2$ y la de B $2x4$, A puede multiplicarse por B, (en ese orden AB), y C resulta de dimensión $3x4$. El elemento de la matriz producto que está en el segundo renglón y en la tercera columna,

C_{23}, es $\bar{A}_2 \ \bar{B}^3$, es decir $(3,0)\cdot(-3,3) = -9$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \underline{3} & \underline{0} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 & -2 \\ \underline{3} & \underline{0} & \underline{-9} & \underline{6} \\ 1 & -2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

C A P I T U L O II

SISTEMAS DE ECUACIONES Y APLICACIONES

TEMA I SISTEMAS DE ECUACIONES

Resolvamos el siguiente sistema $x + y = 10$

$$x - y = 2$$

Por una solución del sistema se entiende un par ordenado de números reales (x, y) que satisfaga simultáneamente las 2 ecuaciones.

Definición: 2 sistemas de ecuaciones son equivalentes si cada solución de un sistema es solución del otro sistema y recíprocamente. Pueden encontrarse sistemas equivalentes intercambiando ecuaciones, multiplicando cada ecuación por una constante diferente de cero, ó, añadiendo a cualquier ecuación un múltiplo constante de otra. Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar todas sus soluciones ó describirlas (en el caso de que sean infinitas) de una manera "lo más explícita posible". Lo que en general se hace es reemplazar al sistema dado por otro equivalente, en donde el "conjunto solución" resulte más fácilmente reconocible.

En el ejemplo, tenemos que:

$$\begin{matrix} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x + y = 10 \\ y = 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = 6 \\ y = 4 \end{matrix}$$

Hemos obtenido pues un sistema de ecuaciones equivalente cuya solución es directa e inmediata.

En notación matricial el sistema puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad ó \qquad Ax = Z$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes ó la matriz del sistema,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y, \qquad Z = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tomemos ahora la matriz "aumentada" $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ que supondremos que representa al sistema.

Y escribamos los sistemas anteriores con esta convención. Se tiene pues:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{B.E.}$$

donde B.E. significa "Bien Escalonada". (en forma "normal hermitiana"). Diremos que la idea aquí es, lograr a partir de la matriz "aumentada" original, una matriz escalonada y después una bien escalonada, dado que en estas últimas las soluciones "saltan a la vista".

Definición: Se dice que una matriz es escalonada si el primer elemento no nulo de cada renglón (excepto el primero) es tá en una columna posterior al primer elemento distinto de cero del renglón anterior. En el caso de que algunos renglones estén formados sólo de ceros, tales renglones deben ir hasta abajo. En particular diremos que la matriz cero es escalonada.

Sean A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 9 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ve que A, B son matrices escalonadas y C no lo es.

Una vez habiendo definido lo que se entiende por matriz escalonada, daremos algunas definiciones más, que nos serán de utilidad en lo que sigue.

En todos aquellos renglones diferentes de cero, llamaremos "coeficiente principal" al primer elemento distinto de cero (en el orden natural). Una matriz es escalonada cuando el coeficiente principal de cada renglón (excepto el primero) está a la derecha del coeficiente principal del renglón anterior.

Definición: Cuando una matriz es escalonada, se dice que es B.E. si:

1) los coeficientes principales son 1 y,
2) son ceros todos los demás elementos, en cada columna en donde hay un coeficiente principal.

Cuando una matriz B.E. se piensa como un modelo de un sistema de ecuaciones: llamaremos Incógnitas Fijas a las que corresponden a las columnas de los coeficientes principales, y parámetros al resto de las incógnitas.

Ejemplo: Sea la matriz B.E.

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & t & s & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces x, z y t son las incógnitas fijas; y, s son los parámetros; y la columna $(4,1,1)$ es la columna de términos independientes.

Por definición la matriz cero es B.E.

Para el estudio de los sistemas de ecuaciones no nos interesara la matriz cero, puesto que, si ésta representara un sistema de ecuaciones, sería el sistema:

$$\begin{array}{l} 0x_1 + 0x_2 + \cdots\cdots + 0x_n = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots\cdots + 0x_n = 0 \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots\cdots + 0x_n = 0 \end{array}$$

y tal sistema, tendría como solución a todo $\mathbb{R}^n$.

En el caso de que la columna de términos independientes tuviera un coeficiente principal, el sistema sería inconsistente (de lo que hablaremos más adelante).

Como ejemplos de matrices B.E. tenemos:

$$\begin{array}{ccc} x & y & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

en donde hay 2 incógnitas fijas x, y, y cuya solución es

$$x = 6$$
$$y = 4$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & t & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

en donde hay 2 incógnitas fijas x, y, y un parámetro que es t, y cuyo conjunto solución es:

$$\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 - 2t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aquí, hay 2 incógnitas fijas x, y, y la solución es:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \cap$ $\cap\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0x + 0y = 1\}$ lo cual es vacío.

Se dice por ésto que el sistema es inconsistente, ó, que "no tiene solución".

En los ejemplos anteriores se ve que las soluciones de un sistema de ecuaciones representado por una matriz B.E., son más o menos fáciles de obtener. Por tanto, algo que se puede hacer siempre que se tenga una matriz asociada a un sistema de ecuaciones, es, obtener a partir de ésta una matriz bien escalonada que represente a un sistema equivalente (con el mismo conjunto de soluciones).

Tomemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x + 5y + 6z &= 15 \\ 7x + 8y + 9z &= 24 \\ x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

y tratemos de obtener una matriz bien escalonada, asociada a él eliminando incógnitas con el método de "suma y resta".

E interpretemos lo que se le va haciendo al sistema usando el modelo matricial.

$$\begin{aligned} 1 \ldots\ldots &\; 4x + 5y + 6z = 15 \\ 2 \ldots\ldots &\; 7x + 8y + 9z = 24 \\ 3 \ldots\ldots &\; x + 2y + 3z = 6 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pasemos la 3era. ecuación hasta arriba por "comodidad"

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 4x + 5y + 6z &= 15 \\ 7x + 8y + 9z &= 24 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

Multiplicando la primera ecuación por (-4) y sumándola a la segunda

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ -3y - 6z &= -9 \\ 7x + 8y + 9z &= 24 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

dividiendo la segunda ecuación entre (-3):

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ y + 23 &= 3 \\ 7x + 8y + 9z &= 24 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

multipliquemos la primera ecuación por (-7) y sumémosla a la tercera

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ \quad\; y + 2z = 3 \\ -6y - 12z = -18 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$$

y dividiendo a la tercera ecuación entre (-6) se tiene

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ \quad\; y + 2z = 3 \\ \quad\; y + 2z = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

restemos la segunda de la tercera

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ \quad\; y + 2z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

multipliquemos la segunda ecuación por (-2) y sumémosla a la primera

$$\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + 2z = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *$$

$$\therefore \quad x = z \qquad\qquad x = z$$

$$y = 3 - 2z \qquad\qquad y = 3 - 2z$$

* Para obtener esta matriz B.E. lo que hicimos fué efectuar operaciones llamadas "ELEMENTALES" en las matrices.

Definición: Se llaman operaciones elementales en las matrices a las siguientes: 1) Intercambio de 2 renglones, 2) Multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero, 3) Sumar a un renglón otro renglón.

Podríamos preguntarnos si las operaciones elementales cambian los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones, ó no.

De hecho, lo que hicimos para obtener una matriz bien escalonada, fué efectuar las mismas operaciones que se utilizan en el método de "suma y resta" que se aprende en la matemática elemental, y que se usa dando como cierto que el método es válido en el sentido de no alterar las soluciones del sistema original. Ahora probaremos que esta suposición está justificada.

TEOREMA: Las operaciones "elementales" efectuadas en un sistema de ecuaciones no alteran al conjunto solución.

Demostración: Sea el siguiente sistema

$$I \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \dots\dots\dots A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \dots\dots\dots A_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \dots\dots\dots A_m \end{cases}$$

La matriz asociada es

$$M^* = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n} & k_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n} & k_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

llamaremos A_1 al primer renglón, A_2 al segundo, y así sucesivamente hasta el m-ésimo renglón A_m.

$(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m) \in R^n$ es solución de $I \Leftrightarrow (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \cdot (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = k_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$

e.d. $\bar{c} \in S_1 \Leftrightarrow A_i \cdot \bar{c} = k_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$

$$S_1 = S_{11} \cap S_{12} \cap S_{13} \cap \ldots\ldots\ldots \cap S_{1m}$$

donde S_1 es el conjunto solución y S_{1i} para $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. las soluciones de cada ecuación.

i) Sea II el sistema que se obtiene al cambiar el renglón A_1 por A_2

$$II \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = k_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_m = k_m \end{cases}$$

y sea S_2 su conjunto solución. Demostraremos que $S_1 = S_2$ como $S_2 = S_{11} \cap S_{12} \cap S_{13} \cap \ldots \cap S_{1m} = S_{12} \cap S_{11} \cap S_{13} \cap \ldots \cap S_{1m} = S_1$

$$\therefore \quad S_1 = S_2$$

ii) Sea III el sistema que se obtiene al multiplicar A_1 por α, $\alpha \neq 0$

$$III \begin{cases} \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 + \alpha a_{13}x_3 + \ldots + \alpha a_{1n}x_n = \alpha k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = \alpha k_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = \alpha k_m \end{cases}$$

Sea S_3 su conjunto solución, demostraremos que $S_1 = S_2$

Sea $\bar{c} \in S_1 \therefore \bar{A}_i \cdot \bar{c} = k_i \quad i = 1,2,\ldots,m$

$$S_3 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \begin{array}{c} \alpha\bar{A}_1 \cdot \bar{x} = k_1 \\ \bar{A}_2 \cdot \bar{x} = k_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_m \cdot \bar{x} = k_m \end{array} \}$$

Cada ecuación de III es idéntica a la de I para $i = 2,3,4,\ldots,m$ y la primera de III es $\alpha\bar{A}_1 \cdot \bar{x} = \alpha k_1$

como $\alpha(\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1) = \alpha k_1$

y $\alpha(\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1) = \alpha\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1$, resulta que $\bar{c} \in S_3$

$$\therefore \; S_1 \subset S_3$$

Sea ahora $\bar{c} \in S_3 \therefore \bar{c}$ satisface todas las ecuaciones de I, desde la segunda hasta la *m*-ésima y además $\alpha\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1 = \alpha k_1$

$\alpha\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1 = \alpha(\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1)$ y, dividiendo por α $(\alpha \neq 0)$,

se tiene $\bar{A}_1 \cdot \bar{c}_1 = k_1 \qquad \therefore \; \bar{c} \in S_1$

$$\therefore \; S_1 = S_3$$

iii) Sea IV el sistema que se obtiene a partir de I sumando la primera con la segunda ecuación:

$$IV \begin{cases} (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3 + \ldots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = k_1 + k_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = k_m \end{cases}$$

$$(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) \cdot \bar{X} = k_1 + k_2$$
$$\bar{A}_2 \cdot \bar{X} = k_2$$
$$\vdots$$
$$\bar{A}_m \cdot \bar{X} = k_m$$

Sea S_4 su conjunto solución demostraremos que $S_1 = S_4$

$$\text{Si} \quad \bar{c} \in S_1 \qquad \begin{array}{r} \bar{A}_1 \cdot \bar{c} = k_1 \\ \underline{\bar{A}_2 \cdot \bar{c} = k_2} \\ (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) \cdot \bar{c} = k_1 + k_2 \end{array} \therefore \quad \bar{c} \in S_4$$

y recíprocamente:

$$\text{Si} \quad \bar{c} \in S_4$$

$$\begin{array}{rl} (\bar{A}_1 + A_2) \cdot \bar{c} = \bar{A}_1 \cdot \bar{c} + & \bar{A}_2 \cdot \bar{c} = k_1 + k_2 \\ - & \underline{\bar{A}_2 \cdot \bar{c} = k_2} \\ & \bar{A}_1 \cdot \bar{c} = k_1 \end{array}$$

$$\therefore \ \bar{c} \in S_1$$

$$\therefore \ S_1 = S_4$$

y aceptaremos el siguiente teorema que se puede demostrar por inducción sobre el número de renglones de la matriz, aunque aquí no daremos tal demostración.

TEOREMA: De toda matriz se puede obtener una matriz bien escalonada por medio de operaciones elementales.

Resolvamos, como ejemplo de todo lo anterior los siguientes sistemas de ecuaciones:

Ejemplo 1 $\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -12 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & -13 & 5 \end{pmatrix}$ donde $n=4$ (n, número de incógnitas).

trataremos de obtener una matriz B.E. a partir de ella. Con el fin de mostrar las operaciones que se van realizando, usaremos ⓘ para designar renglón i, y por ① (-2) + ② = ② debe entenderse que se multiplica el renglón ① por -2, y se le suma al renglón ② para obtener el nuevo renglón ②, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -12 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & -13 & 5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} ①(-2)+② = ② \\ ①(-3)+③ = ③ \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 11 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} ②(-2)+③ = ③ \\ ①+② = ① \\ ②(-1) = ② \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ②+③ = ② \\ ③(2)+① = ① \\ \sim \\ ③(-1) = ③ \end{matrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & , & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & , & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & , & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

que ya está B.E.

Finalmente: $x = 1 - 2t$

$y = 2 + t$

$z = 3t$

obsérvese que t es parámetro; el número de renglones diferentes de cero de la matriz es 3, y es igual al número de renglones diferentes de cero de la matriz aumentada.

Ejemplo 2: Sea la matriz M

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta & \end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 0 & 6 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 8 & -6 & 10\end{pmatrix}\end{array} \qquad \text{donde} \quad n = 4$$

Tratemos de encontrar una matriz $B.E.$

$$\frac{1}{2} = 1 \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 8 & -6 & 10\end{pmatrix} \overset{1(-3)+2\,2}{\sim} \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & -3 & \vdots & 4\end{pmatrix}\end{array}$$

de donde $\alpha = 2 - 3\gamma + \delta$

$\beta = 4 + \gamma + 3\delta$

Obsérvese que γ y δ son parámetros; el número de renglones diferentes de cero de la matriz es 2, que, otra vez es igual al número de renglones diferentes de cero de la matriz aumentada

Ejemplo 3: $n = 2$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x & y & \end{array}\\ \begin{pmatrix}5 & 12 & 6\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}\end{array} \overset{\substack{1(-5)+2\,2\\ 1(-3)+3\,3}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix} \overset{3(-1)+2\,2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix} \overset{2(5/2)+3\,3}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \overset{2(-3)+1\,1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \overset{3(-1/2)=3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & \vdots & 4\\ 0 & 1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & \vdots & 1\end{pmatrix}$$

como no tiene ninguna solución se dice que el sistema es inconsistente.

Se ve que el número de renglones diferentes de cero de la matriz es 2 y que el número de renglones diferentes de cero de la matriz aumentada es 3.

OBSERVACIONES: En los ejemplos anteriores (1 y 2) resultó: 1ª que el número de renglones diferentes de cero de la matriz es igual al número de renglones $\neq 0$ de la matriz aumentada, y segundo que el número de parámetros es igual al número de incógnitas, menos el número de renglones $\neq 0$. $n - r$ = número de parámetros. En ambos casos, existen soluciones. Llamemos r al número de renglones diferentes de cero.

Del ejemplo 3 se vió que $r(M) < r(M^*)$ (donde M^* es la matriz aumentada), y que el sistema es inconsistente.

Con objeto de elevar las observaciones anteriores al rango de teoremas haremos las consideraciones que siguen:

Definición: Se dice que el rango de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

es r, si r es la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones:

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n})$$
$$A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$A_m = (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn})$$

donde $r \leq m$ y como $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, la dimensión r del subespacio que generan es menor ó igual que n, esto es, $r \leq m$ y $r \leq n$.

En vista del teorema: el rango de una matriz A es igual a r sí y solo sí existe una submatriz cuadrada de orden r en A cuyo determinante sea distinto de cero y los determinantes de todas las submatrices cuadradas de A de orden mayor que r, son cero, resulta claro que

TEOREMA: Las operaciones elementales en A no alteran su rango.

Demostración: Resulta casi obvio que

$$[\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}] = [\{A_2, A_1, \ldots, A_m\}] = [\{kA_1, A_2, \ldots, A_m\}]$$
$$= [\{A_1 + A_2, A_2, \ldots, A_m\}] \quad k \neq 0$$

y se puede quitar el "casi", notando que cualquier combinación lineal de uno de los conjuntos generadores, se puede obtener (fácilmente) como combinación lineal de cualquiera de los otros.

Corolario: El rango de una matriz es igual al número de renglones distintos de cero de cualquier matriz escalonada obtenida de la primera por medio de transformaciones elementales.

Sea I el sistema de m ecuaciones con n incógnitas el siguiente:

$$I \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = k_m \end{array} \right.$$

al cual le asociamos la matriz $M = (a_{ij})$ y la matriz $M^* = (a_{ij}, k_i)$ a la primera le llamaremos, como antes la matriz del sistema, y a M^* la matriz aumentada

$$M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} & k_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

Cada renglón de la matriz M puede considerarse como un vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ de dimensión n:

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n})$$
$$A_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$A_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots, a_{mn})$$

En forma análoga cada columna de la matriz M^* puede considerarse como un vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ de dimensión m:

$$B_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots\ldots, a_{m1})$$
$$B_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{m2})$$
$$\vdots$$
$$B_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots\ldots, a_{mn})$$

Las soluciones del sistema, es decir, las colecciones de n números, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que satisfagan a todas las ecuaciones del sistema, también pueden ser consideradas como vectores.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Se dirá que un sistema de ecuaciones es consistente si tiene al menos una solución. En caso contrario, es decir, cuando no tenga ninguna solución, se llamará inconsistente.

Si el sistema I es tal que $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0$ entonces se dice que es <u>homogéneo</u>.

Si denotamos con

$$K = (k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots,\ k_m)$$

al vector de $\mathbb{R}^m$ formado con los términos libres, entonces el sistema I, puede escribirse en forma vectorial con una sola ecuación

$$x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3 + \ldots + x_nB_n = K$$

Es claro que el sistema I es consistente $(S_1 \neq \emptyset)$, sí y solamente sí existen n números

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ni$$
$$\alpha_1B_1 + \alpha_2B_2 + \ldots + \alpha_nB_n = K$$

Esto equivale a decir que K pertenece al espacio vectorial generado por $B_1, B_2, \ldots, B_n$ lo cual es lo mismo que decir que los conjuntos de vectores $\{B_1, B_2, \ldots, B_n, K\}$ y $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ generan el mismo subespacio vectorial, obviamente de igual dimensión que él mismo, lo que, a su vez significa que el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz aumentada.

Así pues, usando el método descrito en los párrafos anteriores, resulta fácil conocer cuando un sistema es o no consistente.

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} x + y \qquad\quad - w &= 0 \\ x \qquad + z - w &= -1 \\ -x + y - 2z + w &= 3 \end{aligned}$$

su matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r(M^*) = 3 \\ r(M) \;\; = 2 \\ \end{array}$$

Se ve que $r(M^*) \neq r(M)$ $\therefore$ el sistema es inconsistente.

SISTEMAS HOMOGENEOS:

Consideremos el sistema homogéneo

$$II \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Evidentemente $(0, 0, \dots, 0)$ es una solución de este sistema, o sea, éste siempre es consistente.

Usando la misma notación, escribiremos el sistema II

$x_1B_1 + x_2B_2 + \dots + x_nB_n = 0.$

TEOREMA: El conjunto W de todas las soluciones $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de un sistema homogéneo (II) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

En efecto por la observación anterior, $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in W$ Si $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ son dos soluciones de II, tenemos:

$$s_1 B_1 + s_2 B_2 + \ldots + s_n B_n = 0$$
$$t_1 B_1 + t_2 B_2 + \ldots + t_n B_n = 0$$

de donde $(s_1 + t_1) B_1 + (s_2 + t_2) B_2 + \ldots + (s_n + t_n) B_n = 0$ es decir, $S + T = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n)$ es también una solución. En otras palabras, si S y T pertenecen a W, $S + T$ también pertenece a W. Sea k un escalar cualquiera. Entonces tenemos

$$k(s_1 B_1 + s_2 B_2 + \ldots + s_n B_n) = 0$$

de donde

$$(ks_1) B_1 + (ks_2) B_2 + \ldots + (ks_n) B_n = 0$$

por lo cual $kS = (ks_1, ks_2, \ldots, ks_n)$ es también solución. O sea que W satisface las condiciones 1), 2) y 3) (ver teorema hoja 11 subespacios vectoriales), de la definición de subespacio vectorial.

El siguiente teorema nos servirá para relacionar la dimensión del subespacio W de soluciones con el rango del sistema y con el número de incógnitas. Analizaremos el caso no necesariamente homogéneo, pues este mismo teorema nos servirá para encontrar todas las soluciones de un sistema arbitrario.

TEOREMA*: Sea $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ una base del subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ del sistema,

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_n B_n = K$$

que supondremos que tiene solución. Entonces dados $n-r$ números $s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_n$ existen r números únicos, $s_1, s_2, \ldots, s_r$ tal que,

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r, s_{r+1}, \ldots, s_n\}$$

es una solución del sistema.

Demostración: Formemos el vector

$$C = s_{r+1} B_{r+1} + s_{r+2} B_{r+2} + \ldots + s_n B_n$$

Ya que $\{B_1, \ldots, B_r\}$ generan a V, lo anterior indica que $C \in V$. Como también $K \in V$, pues suponemos que el sistema tiene solución, resulta que $K - C \in V$. Por consiguiente $K - C$ es combinación lineal de $\{B_1, \ldots, B_r\}$, es decir, existen números $s_1, s_2, \ldots, s_r$ tales que

$$K - C = s_1 B_1 + \ldots + s_r B_r,$$

de donde,

$$s_1B_1 + \dots + s_rB_r + s_{r+1}B_{r+1} + \dots + s_nB_n = K.$$

lo cual demuestra que $S = (s_1,\dots,s_r,s_{r+1},\dots,s_n)$ es solución. Probaremos la unicidad de los números $s_1,\dots,s_r$. Si hubiera otros números $s'_1,\dots,s'_r$ tales que

$$S' = (s'_1,\dots,s'_r,s'_{r+1},\dots,s_n)$$

fuera también solución, entonces

$$(s_1 - s'_1)B_1 + (s_2 - s'_2)B_2 + \dots + (s_r - s'_r)B_r = 0$$

lo cual implica que $s_1 - s'_1 = 0,\ s_2 - s'_2 = 0,\dots,s_r - s'_r = 0$ puesto que, $\{B_1,B_2,\dots,B_r\}$ es linealmente independiente por ser base. Luego

$$s_1 = s'_1,\ s_2 = s'_2,\dots,s_r = s'_r$$

Según la unicidad que demostramos bajo las hipótesis anteriores, para que 2 soluciones sean iguales, basta que tengan iguales las últimas $n - r$ coordenadas.

Aplicaremos ahora este resultado a sistemas homogéneos.

TEOREMA: Si V es el subespacio vectorial de R^m generado por las columnas de la matriz de un sistema homogéneo

$$x_1B_1 + x_2B_2 + \dots + x_nB_n = 0$$

y W es el subespacio de R^m formado con todas las solucio

$$dim\ V + dim\ W = n$$

Demostración: Consideremos las $n - r$ soluciones correspondientes a los valores de $s_{r+1}, s_{r+2}, \dots, s_n$ que consten de un 1 y 0 los demás (su existencia queda asegurada por el Teorema*):

$$S_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$$
$$S_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2r}, 0, 1, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$S_{n-r} = (s_{n-r1}, s_{n-r2}, \dots, s_{n-rr}, 0, 0, \dots, 1)$$

Demostraremos que $\{S_1, S_2, \dots, S_{n-r}\}$ es una base de W. En primer lugar, es linealmente independiente, pues uno de los determinantes formados con sus coordenadas es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Veremos que $\{S_1, S_2, \dots, S_{n-r}\}$ genera a W.

Sea $S = (s_1, \dots, s_r, s_{r+1}, \dots, s_n)$ una solución cualquiera. El vector

$$S' = s_{r+1} S_1 + s_{r+2} S_2 + \dots + s_n S_{n-r}$$

(Construído usando las últimas $n - r$ coordenadas de S) pertenece a W, pues $S_1, \ldots, S_{n-r} \in W$. Un cálculo directo prueba que S' es de la forma

$$S' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_r, s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_n)$$

Así pues, S y S' tienen sus últimas $n - r$ coordenadas iguales, por lo que (ver unicidad teorema*) $S = S'$ y $S \in W$, con lo que queda probado el teorema.

Corolario: La dimensión del subespacio W de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es

$$dim\ W = n - r$$

donde n es el número de incógnitas y r el rango.

TEMA II APLICACIONES

BALANCEO DE ECUACIONES

Existe una grave confusión entre muchos alumnos y no pocos profesores de química por el hecho de que algunas reacciones tienen soluciones múltiples. Este hecho fué observado en 1944 por Steinbach que enlistó media docena de lo que él llamó ecuaciones "no estequiométricas" junto con varios juegos de coeficientes que podían usarse para balancearlas. Más tarde, Mc Gavock objetó la etiqueta "no estequiométrica" usada para esas ecuaciones, haciendo ver que representaban combinaciones de reacciones simultáneas que podrían ser escritas como ecuaciones separadas. Sin embargo, pensó que había algunas reacciones que quizá, sí deberían designarse no-estequiométricas, tales como el (cracking) de hidrocarburos, por ejemplo, que da mezclas variables de productos. Por supuesto que tal fenómeno pue de verse como una mezcla de reacciones independientes que se dan en diversas proporciones bajo diferentes condiciones. Es incorrecto etiquetar una reacción como no-estequiométrica, puesto que cada átomo en los reactivos se encuentra entre los productos sin importar cuántas reacciones simultáneas puedan estar ocurriendo.

Y esta confusión surge de la creencia de que existe solamente una relación adecuada de coeficientes para balan cear una reacción química.

Y es por ésto que incluímos entre las aplicaciones de esta tesis, el balanceo algebraico de las ecuaciones y algu nos comentarios al respecto.

Para resolver el problema de balancear correctamente una reacción, cuando se usan métodos químicos, a la química se le proporciona mucha información: estados de oxidación; presiones parciales; temperatura; energía libre; energía de activación; calor de formación; difusión, etc. mientras que en el caso análogo, a la "pobrecita" matemática la única luz que se le brinda es la ley de la conservación de la materia, ésto es, que el número de átomos de cada elemento presente debe conservarse constante entre productos y reactivos. No debe ser extraño, entonces, que los resultados algebraicos puedan parecer menos precisos (en cierto sentido).

Consideremos el siguiente ejemplo. Se desea encontrar los coeficientes que balancean la siguiente ecuación:

Ejemplo 1.

$$KClO_3 + HCl \longrightarrow KCl + H_2O + Cl_2 + ClO_2$$

pongámosle coeficientes arbitrarios a las moléculas

$$\alpha KClO_3 + \beta HCl \longrightarrow \alpha KCl + \beta/2 H_2O + \gamma Cl_2 + \delta ClO_2$$

donde, α, β, γ y δ representan el número de moléculas que intervienen. Usamos coeficientes α y β tanto en productos como en reactivos, debido a que el potasio y el hidrógeno sólo aparecen en una molécula en productos y en una en reactivos.

La ley de la conservación de la materia aplicada a cada elemento nos da la siguiente información:

Balance de $K : \alpha = \alpha$

$Cl : \alpha + \beta = \alpha + 2\gamma + \delta$

$O : 3\alpha = \beta/2 + 2\delta$

$H : \beta = \beta$

del sistema anterior obtenemos la siguiente matriz.

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha & \beta & \gamma & \delta
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -5/6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}
$$

de donde

$$\alpha = 1/3\gamma + 5/6\delta$$

$$\beta = 2\gamma + \delta$$

$$\gamma = \gamma$$

$$\delta = \delta$$

$$(1) \ldots\ldots \tilde{x} = \gamma/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 0^{*} \end{pmatrix} + \delta/6 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}^{+}$$

* El cero indica que aquellos reactivos o productos con tal coeficiente simplemente no intervienen en la reacción

Dando valores arbitrarios a los parámetros γ y δ podemos obtener soluciones particulares del problema original. Esto es, a cada par de valores que asignemos a γ y δ corresponde una reacción bien balanceada que resuelve nuestro problema. Y algo más, todo juego de coeficientes que sea solución del problema original puede obtenerse de la manera antes descrita. En este sentido se dice que la expresión (1) es la solución general del problema.

Una observación que es importante mencionar es: la forma en que queda expresada la solución general nos permite afirmar que la ecuación original puede interpretarse como si estuviera compuesta de 2 reacciones (A y B) independientes y balanceadas y que al mezclarse en forma adecuada producen todas las soluciones particulares.

En efecto, sea $\gamma = 3$, $\delta = 0$, entonces

$$A : KClO_3 + 6HCl \longrightarrow KCl + 3H_2O + 3Cl_2$$

y si $\gamma = 0$; $\delta = 6$ se obtiene

$$B : 5KClO_3 + 6HCl \longrightarrow 5KCl + 3H_2O + 6ClO_2$$

Algunos ejemplos de soluciones particulares podrían ser

$$(2A + B) \quad 7KClO_3 + 18HCl \longrightarrow 7KCl + 9H_2O + 6Cl_2 + 6ClO_2$$
$$(A + 2B) \quad 11KClO_3 + 18HCl \longrightarrow 11KCl + 9H_2O + 3Cl_2 + 12ClO_2$$
$$\frac{1}{3}(A+B) \quad 2KClO_3 + 4HCl \longrightarrow 2KCl + 2H_2O + Cl_2 + 2ClO_2$$

Todas involucran los mismos reactivos y productos y todas están balanceadas, pero cada reacción es diferente y las 3 son igualmente válidas (desde el punto de vista del balance de materiales que es lo único que se está conside rando aquí).

Otra forma de expresar la solución general es:

$$(a+5b)KClO_3 + 6(a+b)HCl \longrightarrow (a+5b)KCl + 3(a+b)H_2O + 3aCl_2 + 6bClO_2$$

con a, b no negativos.

La nobleza de la matemática es tal, que a pesar de los escasos datos que se le dan de apoyo, nos proporciona información dentro de la cual, algunas veces nos envía señales de alarma para hacernos volver la mirada sobre alguna particularidad del camino que hemos recorrido. Una llamada que nos hace el álgebra, en el tema que estamos tratando, es la que aparece cuando en la solución general se presentan términos con signo negativo, debe interpretarse como si dijera que alguna ó algunas moléculas que aparecen en los reactivos, no son reactivos sino productos ó viceversa. Ilustraremos esta situación con el ejemplo 2.

Ejemplo 2:

Sea la siguiente reacción

$$\alpha HNO_3 \longrightarrow \beta NO_2 + \gamma NO + \frac{\alpha}{2}H_2O$$

$H : \alpha = \alpha$

$N : \alpha = \beta + \gamma$

$O : 3\alpha = 2\beta + \gamma + \frac{\alpha}{2}$

$\quad 5\alpha = 4\beta + 2\gamma$

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma \in R^{+}$$

Sea ahora $\gamma = 1$:

$$¿H_2O + 3NO_2 \longrightarrow 2HNO_3 + NO? \ldots\ldots\ldots (A)$$

Resultado que dice simplemente que el NO no estaba del lado correcto. De la ecuación original vemos que el N^{5+} se reduce a N^{4+} y N^{2+}, lo cual es imposible, puesto que siempre el proceso de reducción del número de oxidación va acompañado de un proceso de aumento del número de oxidación en otra de las especies del sistema. Esto es, siempre que hay una reducción hay oxidación y viceversa. Vemos pues, que el criterio químico nos dice igualmente que la reacción está mal. Para asentar la ecuación de cualquier reacción es necesario conocer los reactantes y los productos de la misma. Esto requiere información de tipo experimental ó una gran experiencia.

Como otro ejemplo podríamos usar la combustión del carbono:

$$C + O_2 \longrightarrow CO + CO_2$$

$$\alpha C + \beta O_2 \longrightarrow \gamma CO + \delta CO_2$$

$C : \alpha = \gamma + \delta$

$O : 2\beta = \gamma + 2\delta$

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$$

Sean $\gamma = 2; \delta = 0;$ obtenemos:

$$A : 2C + O_2 \longrightarrow 2CO$$

y sean ahora $\gamma = 0; \delta = 1$ obtenemos:

$$B : C + O_2 \longrightarrow CO_2$$

Y otra vez podemos obtener tantas ecuaciones "particulares" como queramos simplemente combinando estas 2 anteriores. Sean por ejemplo.

$$3C + 2O_2 \longrightarrow 2CO + CO_2$$
$$9C + 5O_2 \longrightarrow 8CO + CO_2$$
$$8C + 5O_2 \longrightarrow 6CO \quad 2CO_2$$

Un cuarto ejemplo interesante sería:

Ejemplo 4 $\quad NH_4^+ + NO_2^- + H^+ \longrightarrow N_2O + NO + H_2O$

Que no solamente es una reacción con estequiometría "confusa" como algunos la llaman (puesto que N exhibe 4 estados de oxidación diferentes) sino que también es una reacción con conjuntos múltiples de coeficientes (soluciones con más de un grado de libertad).

$$\alpha NH_4^+ + \beta NO_2^- + \gamma H^+ \longrightarrow \delta N_2O + \in NO + \theta H_2O$$

$N: \quad \alpha + \beta = 2\delta + \in$

$H: \quad 4\alpha + \gamma = 2\theta$

$O: \quad 2\beta = \delta + \in + \theta$

balance de cargas $\quad \alpha - \beta + \gamma = 0$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \in & \theta \end{array} & \begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \in & \theta \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\bar{x} = \frac{\in}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\delta}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \in, \delta \in \mathbb{R}^+$$

Nuevamente, $\in = 6;\ \delta = 0$: obtenemos A:

$$NH_4^{\ +} + 5NO_2^{\ -} + 4H^+ \longrightarrow 6NO + 4H_2O$$

Si $\in = 0;\ \delta = 3$ obtenemos B:

$$2NH_4^{\ +} + 4NO_2^{\ -} + 2H^+ \longrightarrow 3N_2O + 5H_2O$$

Demos algunos juegos de coeficientes que balancean la ecuación original

$$5NH_4^{\ +} + 18NO_2^{\ -} + 14H^+ \longrightarrow 18NO + 3N_2O + 17H_2O$$
$$5NH_4^{\ +} + 13NO_2^{\ -} + 8H^+ \longrightarrow 6NO + 6N_2O + 14H_2O$$
$$2NH_4^{\ +} + 8NO_2^{\ -} + 6H^+ \longrightarrow 8NO + N_2O + 7H_2O$$

Hemos encontrado que una reacción queda balanceada eléctricamente al resolverla de la manera antes descrita, y que, en una reacción escrita en forma iónica como la anterior, debe agregarse la ecuación del balance de cargas. (Dejaremos sin demostración el hecho antes mencionado).

Cabe mencionar que hasta ahora, hemos excluído de nuestras soluciones por comodidad, los valores negativos para los parámetros. Aunque puede darse el caso de que tales valores (negativos) sean de interés para alguna otra consideración teórica.

En los ejemplos anteriores, las soluciones generales que obtuvimos son "bien comportadas" en el sentido de que las variables fijas quedaron descritas explícitamente en términos de parámetros multiplicados por coeficientes positivos. Esto no ocurre siempre así, puede muy bien darse el caso de que queden coeficientes negativos. Escogimos intencionadamente como parámetros, los coeficientes de aquellas moléculas de los productos que involucran a los elementos que cambian su estado de oxidación, con el fin de obtener subreacciones independientes "decentes". Tomemos un último ejemplo:

Ejemplo 5.

$$\alpha Cu + 2\delta HNO_3 \longrightarrow \alpha Cu(NO_3)_2 + \delta H_2O + \gamma NO + \beta N_2O_3$$

Y escojamos como parámetros a γ y a β para obtener una solución con subreacciones "decentes".

$$\begin{aligned}
Cu &: \alpha = \alpha \\
H &: 2\delta = 2\delta \\
N &: 2\delta = 2\alpha + \gamma + 2\beta \\
O &: 6\delta = 6\alpha + \delta + \gamma + 3\beta \\
&\quad 5\delta = 6\alpha + \gamma + 3\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \delta & \gamma & \beta \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \alpha & \delta & \gamma & \beta \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

Sea $\frac{\gamma}{2} = a;\ \beta = b$ **se tiene pues:**

$$\bar{x} = a\begin{pmatrix}3\\4\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\delta\\\gamma\\\beta\end{pmatrix} \quad a,\ b \geq 0 \qquad 1$$

sea $a = 1,\ b = 0: \quad \alpha = 3;\ \beta = 0;\ \gamma = 2;\ \delta = 4$

$$A : 3Cu + 8HNO_3 \longrightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$$

sea $b = 1;\ a = 0: \quad \alpha = 2;\ \beta = 1:\ \gamma = 0;\ \delta = 3;$

$$B : 2Cu + 6HNO_3 \longrightarrow 2Cu(NO_3)_2 + 3H_2O + N_2O_3$$

y ahora resolvamosla escogiendo como parámetros a γ **y** δ

$$\alpha Cu + 2\delta HNO_3 \longrightarrow \alpha Cu(NO_3)_2 + \beta N_2O_3 + \gamma NO + \delta H_2O$$

$$N : \quad 2\alpha + 2\beta = -\gamma + 2\delta$$

$$O : \quad 6\alpha + 3\beta = -\gamma + 5\delta$$

$$\begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1 & -2\\6 & 3 & 1 & -5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/6 & -2/3\\0 & 1 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{6}\begin{pmatrix}1\\-4\\6\\0\end{pmatrix} + \frac{\delta}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$$

Sea $\frac{\gamma}{6} = s$, $\frac{\delta}{3} = t$

$$\bar{x} = s\begin{pmatrix}1\\-4\\6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}$$

sea pues $s = 1;\ t = 0$

$S : Cu + 4N_2O_3 \longrightarrow 6NO + Cu(NO_3)_2$

sea $s = 0;\ t = 1$

$T : 2Cu + 6HNO_3 \longrightarrow 2Cu(NO_3)_2 + N_2O_3 + 3H_2O$

la reacción S no es decente, así pues, necesitamos obtener los rangos entre los que pueden variar s y t de manera que todos los coeficientes que aparezcan en la reacción sean no negativos. A nosotros nos interesan los valores de s y t, α, β, γ y $\delta \in R^+$

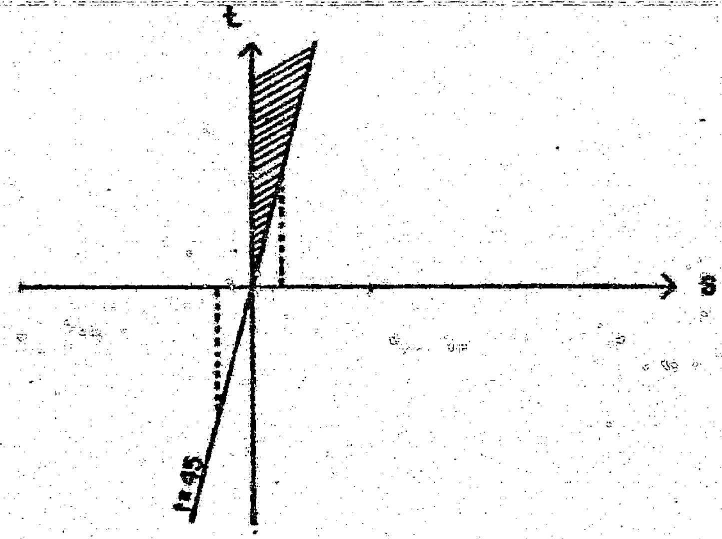
(1).....$\alpha = s + 2t$

(2).....$\beta = -4s + t$

(3).....$\gamma = 6s$

(4).....$\delta = 3t$

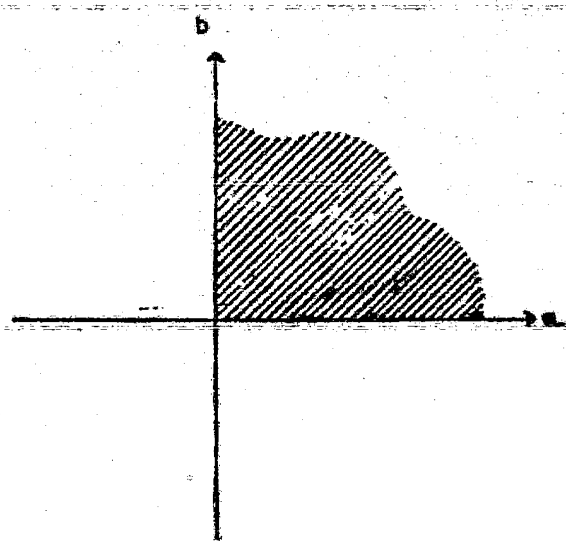
de 3,4 y 1 se ve que $s > 0$, $t > 0$ y de 2 $t > 4s$ se escoge la región del plano que nos interesa, según $s > 0$, $t > 0$ sería dentro del primer cuadrante, la región sombreada.

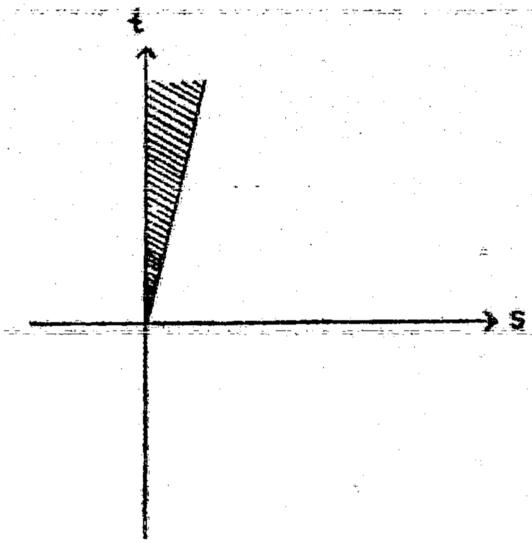


Sean $s = 1;\ t = 5;\ \alpha = 11;\ \beta = 1;\ \gamma = 6;\ \delta = 15$

$$11Cu + 30HNO_3 \longrightarrow 11Cu(NO_3)_2 + 15H_2O + 6NO + N_2O_3$$

Pero ahora, nos queda la duda, a simple vista pareciera como sí de la primera solución general que obtuvimos, pudieramos sacar más soluciones particulares que de la segunda.





¿Será que cualquier solución que se saque de ① pueda estar en ② ó, al revés? Y es más, ¿serán iguales las soluciones de ① y de ②?

Probémoslo:

de ① sabemos que: $\alpha = 3a + 2b$

$\beta = b$

$\gamma = 2a$

$\delta = 4a + 3b$

de ②

$\alpha = s + 2t$

$\beta = -4s + t$

$\gamma = 6s$

$\delta = 3t$

1) De ①, sea $a > 0;\ b > 0$

$s + 2t = 3a + 2b$

$-4s + t = b$

$6s = 2a$

$3t = 4a + 3b$

de donde $a = 3s$

$b = t - 4s$

$\therefore\ s > 0 \qquad t - 4s > 0$

$t > 4s$

$\therefore\ t > 0$

2) De (2) sean $s \geq 0 \quad t \geq 0 \quad t \geq 4s$

$$a = 3s$$

de:

$$b = t - 4s$$

$$s = a/3$$

$$t = b + 4/3a$$

$$\therefore \quad a \geq 0 \qquad b = t - 4s$$

$$\therefore \quad b \geq 0$$

Al presentar el método algebraico no se pretende decir que es el mejor ó el único, pero sí, que bien empleado podemos extraer información si somos capaces.

Debemos mencionar que, además del método algebraico para balancear ecuaciones, existen otros métodos: el del número de oxidación, en donde la suma de los números de oxidación de los elementos en cualesquiera especies químicas debe ser igual a la carga en aquellas especies, y la suma de cambios en números de oxidación en una ecuación balanceada debe igual a cero. Y el del ión electrón en donde se escriben medias reacciones (de los que se oxidan y los que se reducen, balanceando los electrones perdidos y los ganados.

Terminemos esta parte recalcando que si bien es cierto que es importante la capacidad de balancear reacciones, mucho más importante es, para el estudioso de la química el saber interpretarlas. "Entender lo que las ecuaciones balanceadas significan en entender la esencia de la química" (1).

Un problema más general, sería por ejemplo el de encontrar la colección (vacía o no vacía) de todas las posibles reacciones entre una lista de especies químicas. Sean por ejemplo: H_2, H_2O, CH_4, CO_2, CO y se quiere encontrar todas las reacciones posibles entre ellos. Así se tiene:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} H_2 & H_2O & CH_4 & CO_2 & CO \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} H \\ O \\ C \end{array}
\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Chemical Principles Ravisited. Vol. 56. Número 5 Marzo 79, 181. Doris Kolb.

$$\alpha H_2,\ \beta H_2O,\ \gamma CH_4,\ \delta CO_2,\ \in CO$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= 4\delta + 3\in \\
\beta &= -2\delta - \in \\
\gamma &= -\delta - \in \\
\delta &= \delta \\
\in &= \qquad\qquad \in
\end{aligned}
\qquad\qquad
\bar{x} = \delta\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \in\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seis posibles reacciones correspondientes serían:

1) $4H_2 + CO_2 \longrightarrow 2H_2O + CH_4 \quad (\delta = 1,\ \in = 0)$

2) $3H_2 + CO \longrightarrow H_2O + CH_4 \quad (\delta = 0, \in = 1)$

3) $H_2O + CO \longrightarrow H_2 + CO_2 \quad (\delta = -1,\ \in = 1)$

4) $4H_2O + CH_4 + 2CO \longrightarrow 6H_2 + 3CO_2 \quad (\delta = -3,\ \in = 2)$

5) $H_2O + 2CH_4 + CO_2 \longrightarrow 5H_2 + 3CO \quad (\delta = 1,\ \in = -3)$

6) $10H_2O + 6CH_4 \longrightarrow 22H_2 + 4CO_2 + 2CO \quad (\delta = -4,\ \in = -2)$

MEZCLAS

Otro problema de aplicación sería el de mezclas.

Supongamos que se desea fabricar un alimento especiel con las siguientes características. 40% proteínas, 20% fibra; 10% vitamina A; 10% vitamina D. A partir de los siguientes alimentos: queso gruyere, leche en polvo, salmón, espinacas, macarela, frijoles, cereal All Brand. Y tienen los siguientes contenidos:

NOTA: Usaremos las siguientes abreviaciones:

proteínas - pr

fibra - fb

vitamina A - vA

vitamina D - vD

queso gruyere - G

leche en polvo - LP

espinaca - EC

macarela cruda - MC

frijoles - F

cereal All Brand - AB.

EN PORCIENTO	pr	fb	vA	vD
queso G 1oz (30 g)	6	0	12	3
leche en polvo entera 1oz (30 g)	4	0	10	0
Salmón al vapor 5oz (150 g)	16	0	0	0
espinaca cruda 1oz (30 g)	0	20	11	0
macarela cruda 1oz (30 g)	3	0	0	15
frijoles bakodcanned 11/2oz (45 g) (2 tbs)	0	15	0	0
All Bran Kellogs 1oz (30 g)	3	12	12	14

$$
\begin{array}{cccccccccc}
G & LP & SV & EC & MC & F & AB & & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc}
3 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 14 & -10 \\
6 & 4 & 16 & 0 & 3 & 0 & 3 & -40 \\
12 & 10 & 0 & 11 & 0 & 0 & 12 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 15 & 12 & -20
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c}
vD \\ pr \\ vA \\ fb
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 14 & -10 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -24 & -33/10 & -506/25 & 82/5 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & -30/4 & 33/4 & -119/10 & -91 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 15 & 12 & -20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} vD \\ pr \\ vA \\ fb \end{array}$$

$$\bar{X} = \frac{MC}{16}\begin{pmatrix} -80 \\ 96 \\ 3 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{F}{160}\begin{pmatrix} 0 \\ 132 \\ -33 \\ -120 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{AB}{400}\begin{pmatrix} \frac{-14}{3} \times 400 \\ 506 \times 4 \\ -119 \\ -240 \\ 0 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10/3 \\ -41/10 \\ 91/40 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $MC = x$, $F = y$, $AB = z$

tenemos así:

$$-5x - \frac{14}{3}z + \frac{10}{3} > 0$$

$$-\frac{3}{4}y - \frac{3}{5}z + 1 > 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{33}{160}y + \frac{119}{400}z + \frac{91}{40} > 0$$

$$6x + \frac{33}{40}y + \frac{506}{100}z - \frac{41}{20} > 0$$

Y sean las regiones entre el origen y los planos 1,2,3,4

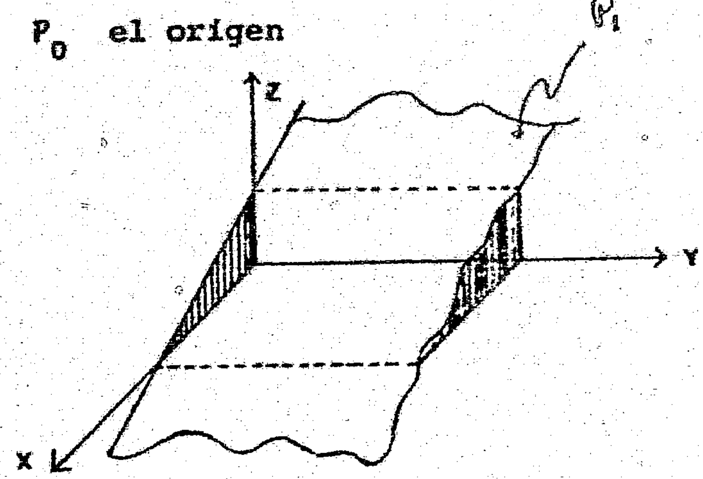
P_1: $-15x - 42z > -10$

P_2: $-15y - 12z > -20$

P_3: $\frac{3}{16}x - \frac{33}{160}y + \frac{119}{400}z > -\frac{91}{40}$

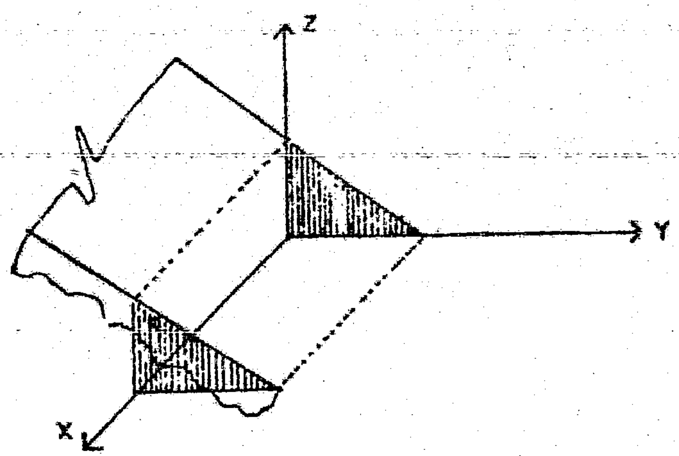
$P_4: \quad 6x + \frac{33}{40}y + \frac{506}{100}z > \frac{41}{20}$

y sea P_0 el origen



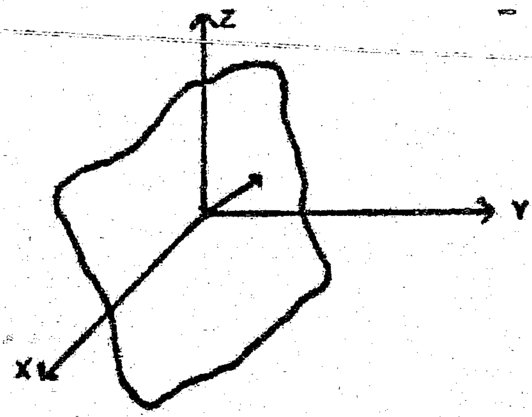
$n = (-15, -42, 0)$

$d_1 = (P_0, P_1) = \frac{|d|}{|n|} = 0.4874$



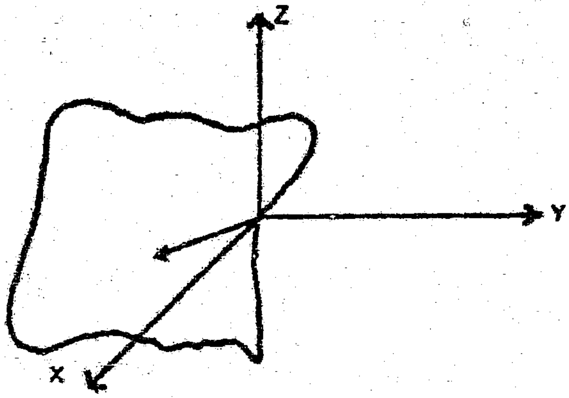
$n = (0, -3/4, -3/5)$

$d_2 = (P_0, P_2) = 1.0412$



$n = (\frac{3}{16}, \frac{-33}{160}, \frac{119}{400})$

$d_3\ (-P_0, P_3) = 5.5804$

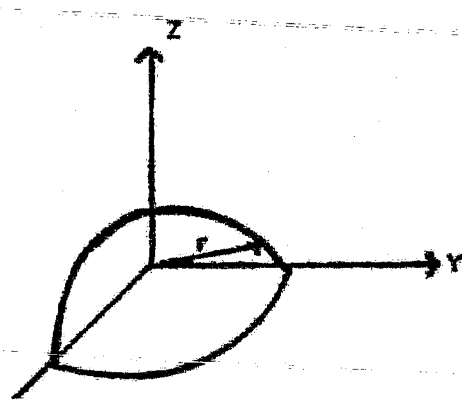


$n = (6, \frac{33}{40}, \frac{506}{100})$

$d_4\ (P_0, P_4) = 0.2609$

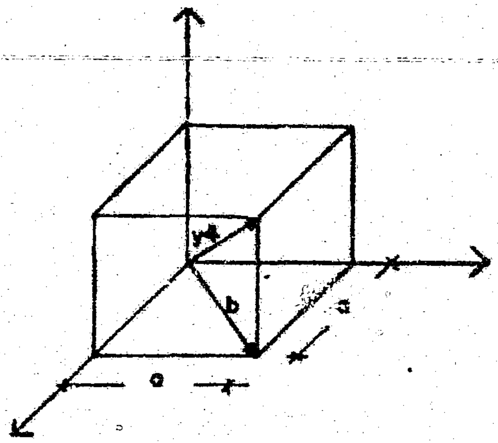
de aquí, se ve que: $d_4 < d_1 < d_2 < d_3$

Se escoge pues la más pequeña, d_4, y por comodidad $r = 1/4$. Así las cosas podemos escoger cualesquiera de 2 regiones:



Región 1

donde $r = 1/4$



ó Región 2

$2a = b$

$3a = \frac{1}{16}$

$a = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

ANALISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional es un método para obtener información acerca de un fenómeno, suponiendo que este fenómeno puede describirse por medio de una ecuación entre varias variables. No se consigue una solución completa, ni tampoco se descubre el mecanismo del problema.

Lo que se logra con el análisis dimensional es la reducción del número de variables. La ventaja que se tiene con ésto, es la facilitación de la labor para la determinación experimental de una función. Esto es: una función de una variable se grafica con una curva; de 2 variables con una familia de curvas, (una curva para cada valor de la 2a. variable); una de 3 variables por un conjunto de familias de curvas (cartas), y así para 4, etc. Si cada punto involucra un alto costo, (lo cual no es raro) esto representa que los gastos de experimentación van en aumento. Y la reducción del número de variables en un problema amplía la formación que se obtiene de pocos experimentos.

Existen 5 sistemas comunes de medición: *CGS*, *MKS*, *MKS* sis de fuerza, sistema inglés de masa, sistema americano ingenieril.

Siendo sus unidades fundamentales:

Del *CGS* : cm, gramo, seg (long., masa, tiempo)

MKS : m, kg, seg (long, masa, tiempo)

Inglés: Ib, ft, seg (masa, long, tiempo)

El razonamiento científico está apoyado en conceptos de varias entidades abstractas como: masa, fuerza, longitud, tiempo, aceleración, temperatura, calor especffico,etc.; a cada una de ellas se le asigna una unidad de medición. Las entidades masa, longitud, tiempo, temperatura y carga eléctrica, son independientes unas de otras. Sus unidades de medición están prescritas por normas internacionales. Y las unidades de estas entidades determinan las unidades de todas las otras entidades. Se usa $[F]$ $[M]$ $[L]$ $[T]$ $[\theta]$ para denotar las dimensiones de fuerza, masa, longitud, tiempo y temperatura. "LAS DIMENSIONES SON UN CODIGO PARA DECIRNOS COMO CAMBIA EL VALOR NUMERICO DE UNA CANTIDAD CUANDO LAS UNIDADES BASICAS DE MEDICION SE SUJETAN A CAMBIOS PRESCRITOS".

DIMENSIONES DE LAS ENTIDADES

	SISTEMA DE MASA	SISTEMA DE FUERZA
Length	$[L]$	$[L]$
Time	$[T]$	$[T]$
Temperature	$[\Theta]$	$[\Theta]$
Force	$[MLT^{-2}]$	$[F]$
Mass	$[M]$	$[FL^{-1}T^{2}]$
Specific Weight	$[ML^{-2}T^{-2}]$	$[FL^{-3}]$
Mass Density	$[ML^{-3}]$	$[FL^{-4}T^{2}]$
Angle	$[1]$	$[1]$
Pressure and Stress	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[FL^{-2}]$
Velocity	$[LT^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
Acceleration	$[LT^{-2}]$	$[LT^{-2}]$
Angular Velocity	$[T^{-1}]$	$[T^{-1}]$
Angular Acceleration	$[T^{-2}]$	$[T^{-2}]$
Energy, Work	$[ML^{2}T^{-2}]$	$[FL]$
Momentum	$[MLT^{-1}]$	$[FT]$
Power	$[ML^{2}T^{-3}]$	$[FLT^{-1}]$
Moment of a Force	$[ML^{2}T^{-2}]$	$[FL]$
Dynamic Coefficient of Viscosity	$[ML^{-1}T^{-1}]$	$[FL^{-2}T]$
Kinematic Coefficient of Viscosity	$[L^{2}T^{-1}]$	$[L^{2}T^{-1}]$
Moment of Inertia of an Area	$[L^{4}]$	$[L^{4}]$
Moment of Inertia of a Mass	$[ML^{2}]$	$[FLT^{2}]$
Surface Tension	$[MT^{-2}]$	$[FL^{-1}]$

Modulus of Elasticity	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[FL^{-2}]$
Strain	$[1]$	$[1]$
Poisson's Ratio	$[1]$	$[1]$

"SE DICE QUE UNA ECUACION ES DIMENSIONALMENTE HOMOGENEA SI SU FORMA NO DEPENDE DE LAS UNIDADES FUNDAMENTALES DE MEDICION".

vgr. la ecuación para el período de oscilación de un péndulo simple $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ es válida ya sea que la longitud se mida en *ft*, *m*, ó millas y el tiempo en min, días ó segs, por ésto se dice que es dimensionalmente homogénea. Si en cambio tenemos $T = 1.11\sqrt{L}$ (usando $g = 32.2$ *ft/seg*^{2}) ya no es dimensionalmente homogénea porque la $[L]$ debe medirse en *ft* y el tiempo en *segs*. Si tenemos una ecuación que combine una suma de términos, y si todos tienen la misma dimensión será dimensionalmente homogénea.

La aplicación del análisis dimensional a un problema práctico se basa en la hipótesis de que la solución del problema es expresable por medio de una ecuación dimensionalmente homogénea en términos de las variables especificados. Esta hipótesis se apoya en que las ecuaciones fundamentales de la física son dimensionalmente homogéneas, al igual que las relaciones que se derivan de ellas.

El primer paso para entrar al análisis dimensional de un problema es decidir cuales variables entran en el problema.

Esto es importante por las siguientes razones:

1. Si se meten variables que no afectan el fenómeno pueden resultar demasiados términos en la ecuación final.

2. Si se omiten variables que sí influyen, se puede obtener un resultado completamente erróneo.

3. Aún cuando algunas de las variables sean prácticamente constantes (vgr. acción de la gravedad) son esenciales porque se combinan con otras variables para formar productos adimensionales.

Para todo esto, uno debe de entender y comprender el problema lo suficiente para saber porqué y cómo una variable influye en él.

Existen muchos campos en donde el análisis dimensional tiene poca aplicación, debido a que el conocimiento existente en estas áreas es inadecuado para señalar las variables significativas.

JUEGOS COMPLETOS DE PRODUCTOS ADIMENSIONALES

Se dice que un producto de variables es un grupo adimensional si al sustituir por las unidades fundamentales y agruparlas, los exponentes resultantes de las unidades fundamentales son iguales a cero.

$$G = V_1 \; V_2 \; V_3 \; \ldots, V_n$$
$$[G] = [V_1 \; V_2 \; V_3 \; \ldots . V_n] = [M^0 L^0 T^0 \theta^0]$$

Un ejemplo de producto adimensional es el número de Reynolds

$$Re = \frac{VL\rho}{\mu}$$

$$[Re] = [\frac{VL\rho}{\mu}] = [\frac{(LT^{-1})(L)(ML^{-3})}{ML^{-1}T^{-1}}] = [\frac{ML^3T}{ML^3T}] = [M^0 L^0 T^0]$$

Como otros ejemplos tenemos:

coeficiente de Presión $P = \frac{F}{\rho v^2 L^2} = \frac{p}{\rho v^2}$ (p presión)

número de Froude $F = v^2/LG$

Número de Mach $M = v/C$

Número de Weber $W = \rho v^2 L/\sigma$

donde F = fuerza

L = longitud

v = velocidad

ρ = densidad de masa

μ = coeficiente de viscosidad

g = acción de la gravedad

c = velocidad del sonido

σ = tensión superficial.

Se pueden formar muchos productos adimensionales con estas variables, pero cualquier producto adimensional de estas variables es de la forma

$$Re^{a_1}\ P^{a_2}\ F^{a_3}\ M^{a_4}\ W^{a_5}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_5$ exponentes constantes. Y todos son independientes uno de otro, puesto que ninguno de estos productos es un producto de potencias de los demás.

Un conjunto de productos adimensionales de variables dadas está completo, si cada producto en el conjunto es independiente de los otros, y cualquier otro producto adimensional de las variables es un producto de potencias de los productos adimensionales en el conjunto.

Una condición suficiente para que una ecuación sea dimensionalmente homogénea es que sea reducible a una ecuación entre productos adimensionales, y el teorema de Buckingham complementa esta observación.

TEOREMA DE BUCKINGHAM:

"SI UNA ECUACION ES DIMENSIONALMENTE HOMOGENEA PUEDE SER REDUCIDA A UNA RELACION ENTRE UN CONJUNTO COMPLETO DE PRODUCTOS ADIMENSIONALES"

Este teorema justifica la teoría del análisis dimensional.

Tratemos el problema del efecto de la temperatura sobre la viscosidad de un gas.

Consideremos la fuerza de arrastre F que experimenta un cuerpo esférico liso en una corriente de fluido incompresible consideremos 5 variables involucradas: fuerza de arrastre, velocidad, diámetro, densidad de masa y viscosidad, y supongamos que estan relacionados por una ecuación dimensionalmente homogénea $f(F, v, D, \rho, \mu) = 0$ en donde f es una función no especificada.

El teorema de Buckingham asegura que f es función de un conjunto completo de productos adimensionales de las variables.

De acuerdo con esto, el conjunto completo de productos adimensionales de las variables comprehende al coeficiente de presión $P = \frac{F}{\rho v^2 D^2}$ y $Re = \frac{vD\rho}{\mu}$.

Según el teorema de Buckingham, la ecuación es reducible a la forma $f(P, Re) = 0$ ó $P = f(Re)$.

Esto significa que podemos graficar una curva que nos de la relación entre P y Re.

mensionalmente homogénea desconocida, el teorema de Buckingham nos permite concluir que la ecuación se puede expresar en la forma de una relación entre $n-k$ productos adimensionales, en donde $n-k$ es el número de productos en un conjunto completo de productos adimensionales de las variables. En la mayoría de los casos k es el número de dimensiones fundamentales en el problema.

CALCULO DE PRODUCTOS ADIMENSIONALES.

En general el número de productos adimensionales que pueden formarse es igual al número total de variables menos el número de unidades fundamentales que estemos de considerando.

Es conveniente desglosar las dimensiones de las variables en un arreglo tabular.

Supongamos que las variables a considerar son: velocidad v, longitud l, fuerza F, densidad de masa ρ, viscosidad dinámica μ y g.

En la siguiente tabla, cada columna consta de los exponentes en la expresión dimensional de la variable correspondiente, escogiendo como unidades fundamentales M, L, T, vgr: $g = [M^0 L T^{-2}]$

$$\begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v & L & F & \rho & \mu & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A la que se denomina matriz de dimensiones.

El número de productos adimensionales en un conjunto completo es igual al número de variables menos el rango de su matriz de dimensiones.

En este caso $6 - 3 = 3$, el número de productos adimensionales debe ser 3 (Re, F, P). Cualquier producto Π (que denota un producto adimensional) de estas variables debe tener la siguiente forma:

$$\Pi = V^{k1} L^{k2} F^{k3} \rho^{k4} \mu^{k5} g^{k6}$$

y la dimensión correspondiente de Π

$$[\Pi] = [LT^{-1}]^{k_1} [L]^{k_2} [MLT^{-2}]^{k_3} [ML^{-3}]^{k_4} . [ML^{-1}T^{-1}]^{k_5} [LT^{-2}]^{k_6}$$

Como se requiere que Π sea adimensional los exponentes de M, L, T deben ser cero:

$$M : \quad k_3 + k_4 + k_5 = 0$$

$$L : \quad k_1 + k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 - k_6 = 0$$

$$T : \quad -k_1 - 2k_3 - k_5 - 2k_6 = 0$$

Esto equivale á resolver la matriz de dimensiones

$$\begin{array}{cccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \bar{X} = k_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_6 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En donde k_4, k_5, k_6 pueden tomar cualesquiera valores, y, resolviendo las ecuaciones para las 3 restantes tenemos, sean $k_4 = -1$ se tiene $k_1 = -2$

$k_5 = 0$ $k_2 = -2$

$k_6 = 0$ $k_3 = 1$

obtenemos así:

el coeficiente de presión $P = \dfrac{F}{v^2 L^2 \rho} = \Pi_1$

si ahora $k_4 = 1$; $k_5 = -1$; $k_6 = 0$ se tiene $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$

obtenemos así: $Re = \dfrac{vL\rho}{\mu} = \pi_2$

y finalmente $k_4 = k_5 = 0$, $k_6 = -1$ se tiene $k_1 = 2$, $k_3 = 0$, $k_2 = -1$ $\Pi_3 = F = \frac{v^2}{LG}$ (num. de Froude).

El procedimiento anterior es del todo arbitrario, pudimos muy bien haber escogido $k_1 = 10$, $k_2 = -5$, $k_3 = k_4 = 8$, $k_5 = -16$, $k_6 = -5$

resultando $\Pi_4 = v^{10}L^{-5}F^{8}\rho^{8}\mu^{-16}G^{-5} = P^{8}Re^{16}F^{5}$

Se pudo haber anticipado una relación de esta forma puesto que P, R y F forman un conjunto completo de productos adimensionales de las variables.

El número de soluciones linealmente independientes es $n-r$ y un conjunto de soluciones de estas características se denomina un sistema fundamental de soluciones. Cualquier otra solución es una combinación lineal de las soluciones en cualquier sistema fundamental

$$f(P, Re, F) = 0 \quad ó \quad P = f(Re, F)$$

Hay un sinnúmero de conjuntos completos de Π, que pueden formarse de un conjunto dado de variables, pero hay algunos conjuntos de Π's que son más útiles en la práctica que otros. El investigador desea que cualquiera de las variables adimensionales independientes sean susceptibles de controlarse por técnicas experimentales mientras las otras se mantienen constantes.

Se obtiene mayor control experimental sobre los productos adimensionales si las variables originales que pueden regularse aparecen cada una en solo un producto adimensional.

Las variables dependientes del problema también deben considerarse. Se desea conocer como dependen éstas de las demás. Por tanto estas variables no deben aparecer en más de un producto adimensional y este producto puede llamarse la "variable adimensional dependiente", para cada caso.

Para lograr ésto podemos observar ciertas condiciones al formar la matriz.

"En la matriz dimensional, la primer variable será la variable dependiente que nos interese, la segunda aquella que sea la más fácil de regular experimentalmente, la tercera aquella que le siga en facilidad de regular experimentalmente y así sucesivamente".

También es deseable transformar los productos adimensionales, para obtener por ejemplo productos "conocidos" como son Re, F, P, etc.

ejemplo:

el análisis de arrastre de un barco, las variables se escriben en el siguiente orden (F, v, L, μ, ρ, g) (de acuerdo con lo que dijimos) se obtiene

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$$

donde $\Pi_1 = \frac{\rho F}{\mu^2}$, $\Pi_2 = v\sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu g}}$ $\Pi_3 = L\sqrt[3]{\frac{\rho^2 g}{\mu^2}}$

supongamos ahora que deseamos despreciar la μ. Obviamente no podemos descartar todos los productos que lo contienen porque son todos, en cambio podemos obtener otro conjunto completo:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2{}^2\Pi_3{}^2} = P = \frac{F}{\rho v^2 L^2} \qquad \Pi_2\Pi_3 = Re \qquad \frac{\Pi_2{}^2}{\Pi_3} = F = \frac{v^2}{LG}$$

así tenemos $f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$, $f(P, Re, F) = 0$

ó $P = f(Re, f)$ y si μ es despreciable se puede descartar al término Re,

Cuando se hace una transformación de productos adimensionales es necesario asegurarse de que hay tantos productos nuevos como el número original.

Ejemplo A

Caída de Presión en un Tubo Uniforme. La caída de presión ΔP de un líquido en un tubo horizontal uniforme depende de la longitud L, en donde ocurre la caída de presión, el diametro D del tubo, la velocidad promedio V del fluído, la viscosidad μ, la densidad de masa ρ y una medida de la rugosidad de la superficie del tubo e. La relación entre las variables se indica por la ecuación

$$f(\Delta P,\ L,\ D,\ e,\ V,\ \rho,\ \mu) = 0$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ M \\ L \\ T \end{array}
\begin{array}{ccccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 \\ \Delta P & L & V & D & e & \rho & \mu \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \end{pmatrix} = k_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_7 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y así obtenemos 4 productos adimensionales, sean $k_5 =$ $k_6 = k_7 = 0$ $k_4 = -1$ $k_1 = k_3 = 0$

$k_2 = 1$

$$\Pi_1 = L/D$$

Sean $k_1 = k_2 = k_3 = k_6 = k_7 = 0$; $k_4 = -1$; $k_5 = 1$

$$\Pi_2 = e/D$$

Y, finalmente sean $k_1 = k_2 = k_5 = 0$; $k_6 = k_3 = k_4 = 1$; $k_7 = -1$

$$\Pi_3 = \frac{vD\rho}{\mu} = Re$$

Y sean $k_4 = k_5 = k_7 = k_2 = 0;\ k_1 = 1;\ k_6 = -1;\ k_3 = -2$

$$\Pi_4 = \frac{\Delta P}{\rho v^2} = P$$

Así se tiene $f(P,\ Re,\ L/D,\ e/D) = 0$

que se puede escribir $P = f(Re,\ L/D,\ e/D)$

Ejemplo B: Condensación en un tubo Vertical.

Considere vapor a la temperatura de saturación θ que pasa a través de una tubería vertical lisa cuya temperatura de pared es $\theta - \Delta\theta$. El condensado forma una película en la pared que es una película aislante. Consecuentemente, la rapidez de condensación es afectada por el coeficiente de conductividad térmica k del condensado. La rapidez de condensación se determina directamente por el coeficiente promedio de transferencia de calor h, ya que el calor extraído del vapor por unidad de tiempo es $hA\ \Delta\theta$, en donde A es el área de la pared del tubo. La principal variable geométrica en el problema es el espesor de la película de condensado. Este depende de la rapidez de condensación y de la naturaleza del flujo de condensado. La rapidez de condensación depende del calor latente de vaporización del flujo. Como el volumen es más significativo que la masa de condensado, el calor latente debe expresarse como "calor de vaporización por unidad de volumen". Esto está representado por $\rho\lambda$, en donde λ es calor latente de vaporización por unidad de masa y ρ es la densidad de masa del condensado.

La facilidad con que la película de condensado fluye de la pared se determina principalmente por su viscosidad μ y su peso específico ρg. También como el espesor de la película no es constante a lo largo del tubo, L afecta al coeficiente de transferencia de calor. El diámetro del tubo no afecta el espesor de la película. La velocidad del vapor en el tubo influye en el espesor, pero este efecto es pequeño si la velocidad no es grande. Si se desprecia la interacción entre el flujo de vapor y el flujo de condensado, la densidad del vapor es irrelevante.

En vista de todo lo anterior, suponemos que existe una relación: $f(h,\ \Delta\theta,\ L,\ \rho\lambda,\ k,\ \rho g,\ \mu) = 0$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 \\
h & \Delta\theta & L & \rho\lambda & k & \rho g & \mu
\end{array}
\\
\begin{array}{c} M \\ L \\ T \\ \theta \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\
-3 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7
\end{array}
\\
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \end{pmatrix} = k_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_6 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_7 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos tres productos adimensionales. Si consideramos: los siguientes valores, $k_6 = k_7 = k_2 = k_4 = 0;\ k_1 = k_3 = -1;$ $k_5 = 1$ obtenemos $\Pi_1 = k^{-1} h L$

con $k_1 = k_5 = -1;\ k_4 = k_6 = 1;\ k_7 = 0;\ k_2 = -2;\ k_3 = 4$
se obtiene $\Pi_2 = L^4 \rho^2 \lambda g \ / \ h \ \Delta\theta^2 k$

Y finalmente $k_5 = k_6 = 0;\ k_1 = k_2 = -3;\ k_7 = 1;\ k_4 = 2;\ k_3 = 3$
resulta: $\Pi_3 = L^3 \rho^2 \lambda^2 \mu \ / \ h^3 \Delta\theta^3$

$$\frac{k}{hL} = f\left(\frac{L^2 \rho^2 \lambda g}{h \ \Delta\theta^2 k} \ , \ \frac{L^3 \rho^2 \lambda^2 \mu}{h^3 \Delta\theta^3} \right)$$

En este caso, el fenómeno quedaría descrito parcialmente por una carta en donde la ordenada sería k/hL, la abcisa $L^4 \rho^2 \lambda g \ / \ h \ \Delta\theta^2 k$ y, el parámetro de las curvas $L^3 \rho^2 \lambda^2 \mu \ / \ h^3 \Delta\theta^3$.

BIBLIOGRAFIA

1) ANDER P. & SONESSA, J.A. Principios de Química. Limusa. México. 1975.

2) BENDER A.E. Encyclopedia of Calories and Nutrition. Simon & Schufter. New York. 1979.

3) CARDENAS, LLUIS, RAGGI, THOMAS. Algebra Superior. Trillas. México. 1974.

4) CARDENAS, LLUIS. Sistemas de Ecuaciones Lineales. Revista Matemática Número XIII. Sociedad Matemática Mexicana. Enero 1963.

5) CARDENAS, LLUIS. Espacios Vectoriales. Revista Matemática Número X. Sociedad Matemática Mexicana. Julio 1961.

6) CARDENAS E., HERNANDEZ D., RINCON C., VELARDE C. Métodos Matemáticos de la Termodinámica. Dirección General de Publicaciones. UNAM. México 1978.

7) HERNANDEZ M. Introducción al Análisis Dimensional. Edición de la Revista Ingeniería. 1957. México.

8) JOHNSON R.E. Algebra Lineal. C.E.C.S.A. 1969. 2a. edición. México, D. F.

9) KOLB D. More On Balancing Redox Equations. Chemical Principles. Vol 56, number 5. March 1979.

10) LANG S. Algebra Lineal.
Fondo Educativo Interamericano. México, D. F. 1976.

11) LANGHAAR H.L. Dimensional Analysis and Theory of Models.
John Wiley & Sons Inc. New York. 1967.

12) Perry J.H. Chemical Engineers' Handbook.
Mc. Graw Hill 3era. edición, 2a. impresión 1950.

13) Sumposium on the Goals of General Chemistry. Part III.
Chemical Equation Balancing. Journal of Chemical Education Vol. 59, number 9. September 82.