UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE MEDICINA VETERINARIA Y ZOOTECNIA

LA PROGRAMACION LINEAL Y SU APLICACION EN LA MEDICINA VETERINARIA Y ZOOTECNIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MEDICO VETERINARIO ZOOTECNISTA

P R E S E N T A :

CARMEN LAURA CALETTI RODRIGUEZ

ASESORES: M.V.Z. FRANCISCO ALONSO PESADO
M.V.Z. RAFAEL MELENDEZ GUZMAN

MEXICO, D. F. 1984

CONTENIDO

R E S U M E N

CALETTI RODRIGUEZ, CARMEN LAURA. La Programacion Lineal y su aplicación en la Medicina Veterinaria y Zootecnia (bajo la dirección de : Francisco Alonso Pesado y Rafael Meléndez Guzmán).

La programación lineal es una técnica matemática -- que ayuda a optimizar los recursos escasos a la vez que maximiza las utilidades y/o minimiza los costos de una empresa industrial o agropecuaria.

El principal objetivo de este trabajo de tesis es - proporcionar las aplicaciones que tiene esta técnica dentro - de la medicina veterinaria y zootecnia como son: en la administración de empresas agropecuarias (planeación, toma de decisiones y control de la producción); en la nutrición animal (balanceo de raciones); en la mercadotecnia (transporte, distribución de productos); en la empresa agrícola (planes de -- cultivos); en la economía zootécnica (minimización de costos); y en la rama farmaceútica (mezcla de drogas).

Asimismo, ante la falta de información suficiente - para la aplicación de ésta técnica en explotaciones zootécnicas, fué necesario elaborar un ejemplo para maximizar las utilidades de una empresa porcina de doble propósito (lechones - al destete y engorda), mostrando el procedimiento paso a paso de los métodos de solución que tiene ésta técnica (método gráfico y método simplex). Adaptando la metodología de una empre

sa industrial a una explotación zootécnica.

Además se menciona desde el origen de la técnica -- (1947) hasta sus bases matemáticas que son esenciales para su aplicación.

Por consiguiente, la programación lineal es un instrumento más de la administración y un proceso analítico que ofrece grandes ventajas, a pesar de tener algunas limitaciones, para determinar las soluciones óptimas de los interminables problemas de la empresa y que todo profesionista debe conocer.

I.- INTRODUCCION:

La Medicina Veterinaria y Zootecnia, a grandes rasgos, se divide en tres áreas de estudio: Medicina, Sanidad o salubridad y Zootecnia.

La Medicina propiamente dicha, implica la prevención de las enfermedades de los animales en general,y por ser más importantes al tema, la de los animales domésticos, así como su tratamiento con fármacos o en su defecto a través de la cirigía.

La Sanidad o Salubridad involucra una serie de normas que tienen como finalidad la higiene y bienestar tanto de los animales, desde el punto de vista prevención de enfermedades, como de los humanos en el consumo de ellos o de sus derivados.

Y la Zootecnia que implícitamente habla de las reglas o técnicas de producción.

Las tres áreas tienen un mismo camino que es la producción animal que satisface las necesidades que requiere el país.

En la estructura económica de un país la producción animal es una rama de las actividades del sector de actividades primarias, junto con la Agricultura, la Silvicultura y la Pesca. Los otros sectores son el de actividades secundarias y el de actividades terciarias, llamadas también industrial y de servicios respectivamente. Así ubicada, la ganadería es un subconjunto del sistema económico y por lo tanto sujeta al comportamiento de las leyes económicas en las etapas de producción, distribución, consumo y ahorro e inversión que estudia la economía general. De ahí también que la unidad de producción ganadera, como la de cualquier otro tipo de actividad económica, quede sujeto a los principios, normas y procedimientos de la microeconomía, que es una forma de designar a la economía de la empresa.

En ambos niveles, el macroeconómico, que contempla - el acontecer nacional, regional o sectorial, y el microeconómico, que analiza lo que sucede en las unidades de producción, - se impone la necesidad de recabar información básica que permita hacer un diagnóstico de la eficiencia u eficacia con que se estén realizando las actividades productivas; la planeación -- tendiente a superar los resultados de la situación actual y, - el control de la ejecución de las operaciones planeadas. (17)

Tales actividades sólo pueden llevarse a cabo si --- existen elementos cuantitativos que permiten evaluar los resultados obtenidos y, objetivizar la tarea de identificar alternativas de acción y tomar las mejores decisiones.

Las metas de la Administración, tanto públicas como- privadas, son expresiones numéricas de lo que se desea alcanzar en términos de producción, costos, utilidades, valor agregados, niveles de ingreso, etc.

Estas consideraciones llevan a la conclusión de que- tanto la economía general como la Administración son áreas del conocimiento que no tendrían aplicación práctica si no se recurren a los métodos matemáticos que permiten evaluar resultados y planear soluciones eficientes a los problemas detectados. (17)

La ganadería como segundo piso de un sistema productivo de integración vertical, está ligada a la producción agrícola que la sustenta. Los métodos matemáticos de balanceo de-- raciones ligan los requerimientos del ganado con las aportaciones de la agricultura, proporcionan el método estructural y -- cuantitativo para la planeación de la producción forrajera.

En éstos cálculos, de las raciones balanceadas y los patrones óptimos de cultivos se pueden aplicar diversos métodos matemáticos que se estudian dentro del gran campo de conocimientos como "investigación de operaciones" que han tenido - un acelerado desarrollo a partir de la Segunda Guerra Mundial, y tiene múltiples aplicaciones dentro de la Administración --- científica. Entre estos métodos figura la programación lineal, la planeación por etapas y el método vectorial desarrollado en el Centro Nacional de Productividad de México, A.C. (17)

La programación lineal se ha desarrollado más dentro del campo de la Administración de Empresas y en otras ciencias. En Medicina Veterinaria y Zootecnia no ha sido estudiada en forma suficiente por los profesionistas en esta rama, por lo que el objetivo primordial de este trabajo de tesis es dar a conocer el uso de dicho método desde sus orígenes hasta su uso actual por medio de computadoras de una forma continua. Asimismo se menciona las diversas aplicaciones que tiene ésta en las diferentes ramas de la Medicina Veterinaria y Zootecnia, como son:

1) En la Administración de Empresas Agropecuarias (planeación, toma de decisiones y control de la producción).

2) En la Nutrición animal (balanceo de raciones)

3) En la Mercadotecnia (transporte, almacenamiento)

4) En la Empresa Agrícola (planes de cultivos)

5) En la Economía Zootécnica (minimización de costos)

6) En la Rama Farmacéutica (mezclas de drogas), etc.

El presente trabajo de tesis está comprendido por dos partes, una teórica y otra práctica, en la primera se da a conocer el método, sus orígenes históricos, su definición, las partes o elementos que lo constituyen y sobre todo sus bases matemáticas, dentro de éstas, la forma de graficación, el algebra lineal, algebra matricial y anexando un glosario de términos y símbolos matemáticos, que ayudarán a la comprensión del tema por no ser comunes para el M.V.Z.

En la segunda parte (práctica) se proporciona un ejemplo de utilidad en medicina veterinaria, para maximizar las utilidades de una empresa al cual se le da solución gráfica y solución por medio del método simplex. La metodología que se sigue con este problema puede ser aplicada a cualquier otro tipo de problema que reuna las caracteristicas esenciales. Posteriormente se citan las diferencias esenciales que existen con un problema de minimización de costos . En esta parte también se mencionan las aplicaciones, las ventajas y las desventajas que tiene la programación lineal.

PROCEDIMIENTO

RESEÑA HISTORICA

El conocimiento de la programación lineal se remota- hasta el año de 1776 donde Monge, Gaspar (1746-1818) matemático y físico francés, tuvo interés por primera vez, por un problema de éste género. (7) (15).

Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830) físico matemático francés posiblemente en 1823, pudo haber estado enterado de ésta. (8) (16).

Durante la década de 1930 había un grupo notable de- economistas matemáticos, concentrado en Viena, que utilizaban- el seminario matemático de Menger, Karl (1840-1921)-un economista austriaco, fundador de la escuela de Viena-, como centro de discusión de sus estudios relativos a modelos de equilibrio general. En este grupo de economistas matemáticos se encontraban Neisser, Stackleburg, Schlesinger, Wald y Jhon Von Neumann de una economía en expansión, los cuales aportan los antecedentes matemáticos de la programación lineal en 1936. (10).

Pero no fué sino hasta 1941 cuando se encuentra formulado por primera vez un escrito de un problema particular de programación lineal llamado el problema del transporte presentado por Hitchcock (1941), Koopmans y Kantorovitch (1947) independientemente y llamado después por esta razón problema de -- Hitchcock, Koopmans y Kantorovitch. (25) (13).

También se debe reconocer que el economista y matemático soviético L.V. Kantorovich, formuló y resolvió en 1939, - un problema de programación lineal que trataba de la organización y planeación de la producción. (13).

G. Stigler, por otra parte, planteaba en 1945, otro- problema en particular el del régimen alimenticio optimal. (21)

Se puede afirmar que la programación lineal empezó - a ser utilizada durante la segunda Guerra Mundial y fué desarrollada por un grupo de hombres de ciencia, en 1947, bajo la- dirección de Marshall K. Wood que trabajó para Fuerza Aérea de los Estados Unidos y constituían un equipo llamado "Proyecto -

SCOOP" (Scientific Computation of Optimun Programs) la aplicación de la programación lineal era esencialmente de orden militar. (10) (21).

La contribución principal del Proyecto SCOOP fué el desarrollo formal y la aplicación del modelo de programación lineal. Estas primeras aplicaciones de los métodos de la programación lineal cayeron en tres categorias principales: aplicaciones militares generadas por el Proyecto SCOOP, economías interindustriales basadas en el modelo de insumo-producto de Leontief y problemas que involucran la relación entre los juegos de suma cero para dos personas y la programación lineal. (13)
George B. Dantzig formaba parte de este grupo y el fué quién formuló en términos matemáticos precisos el problema general de la programación lineal e inventó el llamado "Método Simplex" para la resolución de éstos problemas (10).

Pero no fué sino hasta 1949 cuando las palabras "linear Programming" aparecen en un título de publicación por primera vez. (21).

Tras el trabajo de Dantzig, Galey Cooper del Tecnológico Carnegie, tomo la iniciativa en cuanto a promover las aplicaciones industriales de la programación lineal.(10).

A partir de 1950, un número cada vez mayor de individuos y organizaciones de investigación han encontrado el origen de este notable desarrollo. Se citará en particular la Rand Corporation con G.B. Dantzig y W. Orchard Hays; después L.R. Ford, D.R. Fulkerson, y D. Gale etc; el Departamento de matemáticas de la Universidad de Princeton con A.W. Tucker y H.W. Kuhn; la Graduate School of Industrial Administration del Carnegie Institute of Technology con A. Charnes y W.W. Cooper. Los dos primeros grupos trabajan esencialmente en la teoría matemática de los programas y en la puesta en práctica en los ordenadores; los resultados son absorbidos por la Rand Corporation por la serie de las Rand Notes on Linear Programming and Extensions (más de 60 notas desde 1953 a 1961), entre las que se debe mencionar especialmente las de G.B. Dantzig sobre los desarrollos teóri--

cos, las de W. Orchard - Hays sobre la puesta a punto de los -- programas de cálculo en máquinas, las de L.R. Ford y D.R. Ful-- kerson sobre las redes de transporte y otros que sin duda alguna son de gran importancia dentro de su área.

En enero de 1952 se llevó a cabo la primera solución exitosa de un problema de programación lineal en una computadora electrónica de alta velocidad, en la máquina SEAC del National Bureau of Standards. Desde entonces, se ha codificado el algoritmo simplex, o variaciones de éste procedimiento, para la - mayoría de las computadoras electrónicas de uso general, gran-- des y medianas. (21).

Se puede hablar de publicaciones más recientes y de - mayor interés por tratarse de temas agropecuarios, entre las -- cuales se necuentra el libro de Métodos matemáticos para la formulación de raciones balanceadas en la producción animal del Dr. Vicente Trujillo Figueroa y publicado por el Centro Nacional de Productividad (Fideicomiso del Gobierno Federal en el año de -- 1979). La creación de este libro nació por el desconocimiento - casi generalizado de técnicos, profesionales y productores primarios en métodos aplicables al balanceo de raciones y conse--- cuentemente su repercusión para el desarrollo de la ganadería - del país. El Dr. Trujillo presenta en este libro diferentes métodos matemáticos actualmente conocidos incluyendo la programación lineal entre otros, igual o más importantes que ésta, lle-- nando así el vacío existente en la literatura técnica y didáctica disponible en el país sobre tecnología y administración ganaderas. (26).

SIGNIFICADO DE LA PROGRAMACION LINEAL.

Definiciones:

En algunas ocaciones se puede encontrar que los factores de la producción disponibles en un momento dado pueden - ser tales que no sea posible satisfacer todas las demandas de- tales factores. Cuando se presenta esta situación se dice que- la dirección está abocada a un problema de asignación en el -- cual se debe hacer una determinación de la manera más eficiente de asignar recursos escasos entre las demandas que existen- para ellos. (19)

Quizás la aseveración más general del objetivo de la programación lineal es que se desea asignar cierta clase de recurso limitado a las demandas competitivas en la forma más e-- fectiva. (9)

Otros autores definen a la programación lineal como:

La técnica matemática para determinar la mayor asignación de los recursos limitados de la empresa.

Un matemático podría ser más técnico al definirla, y diría que es un método de solución de problemas en el que una- función objetivo debe maximizarse o minimizarse cuando se consideran ciertas restricciones. (4)

Un economista podría definir la programación lineal- como un método para la asignación de recursos limitados en tal forma que satisfagan las leyes de la oferta y la demanda de -- los productos de la empresa.

Un hombre de negocios consideraría los métodos de la programación lineal como uno de los instrumentos de la administración para buscar soluciones de los problemas de acuerdo con los objetivos claramente definidos de la empresa. (4)

Tal vez la mejor manera de definir la programación - lineal, consista en exáminar el significado del término. Se -- usa el adjetivo "lineal" para describir una relación entre dos o más variables, que son directa y precisamente proporcionales. por ejemplo, un aumento del 5% al número de horas de trabajo - directo, producirá el mismo porcentaje de aumento en el resultado. En realidad se tiene una "relación matemática", que es lineal, comparada con otras que no lo son. Finalmente la "programación" utiliza ciertas técnicas matemáticas para llegar a la mejor solución, empleando los recursos limitados de la empresa. Podría usarse la palabra computo en vez de programación porque significa calcular alguna incógnita con una serie de ecuaciones o desigualdades, en ciertas condiciones que se expresan matemáticamente.(14)

Independientemente de la forma en que se defina a la programación lineal, se necesitan ciertos requerimientos básicos (cinco).

Hay que recordar que el volúmen de las ventas se relaciona linealmente con la contribución total (precio de venta menos costo variable por unidad, multiplicado por el número de unidades vendidas). Por lo tanto el primer requerimiento es:

1.- Definir claramente una función objetivo en forma matemática.

2.- Debe haber otros recursos alternativos de acción es decir, debe ser posible escoger una solución que satisfaga la función objetivo.

3.- Exige que los objetivos de la empresa y sus restricciones se expresen como inecuaciones o desigualdades lineales.*/

4.- Las variables del problema deben interrelacionarse.

5.- Que haya un suministro limitado de recursos. (24)

Con el propósito de hacer hincapié en las características básicas que requiere un problema de programación lineal se da un ejemplo expresándolo en forma matemática y señalando la función objetivo, las variables del problema, las desigualdades o restricciones y sus respectivos límites.

En un rancho se adquieren dos tipos de alimentos para el ganado, el alimento tipo A, y el alimento tipo B, el precio del alimento tipo A es de 4 pesos por kilogramo y del tipo

*/ Ver glosario de términos.

B es de 2 pesos por kilogramo. Supongamos que cada animal re--- quiere tres ingredientes nutritivos por ejemplo proteinas, gra-- sas y carbohidratos (I, II y III respectivamente) en una canti-- dad mínima diaria de 16, 15 y 24 unidades de cada uno.

Los contenidos de los ingredientes nutritivos en cada alimento son:

1.- Un kilogramo de alimento A contiene 8 unidades del ingrediente I; 5 unidades del II y 6 del ingrediente III.

2.- Un kilogramo de alimento B contiene 4 unidades del ingrediente I: 5 unidades del II y 16 del III.

El problema consiste en calcular con que combinación - debe alimentarse diariamente cada animal con el objeto de minimi zar el costo de alimentación y satisfacer los requerimientos nu- tritivos mínimos.

Los datos anteriores se resumiran en la siguiente ta-- bla para una mayor comprensión.

Ingredientes nutritivos	Alimento A	Alimento B	Requerimientos nutritivos
I	8	4	16
II	5	5	15
III	6	16	24

Expresando el problema matamáticamente, las variables en el problema son:

X_1 el número de kg del alimento A

X_2 el número de kg del alimento B

Es decir X_1 y X_2 representan las incógnitas del proble ma se tiene que buscar que cantidades de alimento tipo A y tipo B se necesitan para cubrir las necesidades de nutrición de los - animales y que además tengan un costo mínimo.

Por otra parte se sabe que el costo (C) de la alimenta ción diaria por animal, es:

Función Objetivo $\qquad C = \overset{A}{4X_1} + \overset{B}{2X_2}$

esto es, el número 4 son los \$ 4.00 del costo del alimento tipo A (X_1) y el número 2 son los \$ 2.00 del costo del alimento tipo B (X_2) que una vez calculando $X_1 + X_2$ y sumándolos nos dará el - costo total diario por animal.

Pero además se tiene que tomar en cuenta las restricc-- ciones o desigualdades lineales que son:

$$4X_1 + 4X_2 \geq 16$$
$$5X_1 + 5X_2 \geq 15$$
$$6X_1 + 16X_2 \geq 24$$

las cuales indican las cantidades de nutrientes que debe de te-- ner cada alimento, es decir 8, 5 y 6 son las cantidades de cada uno de los nutrientes en el alimento A (X_1) y 4, 5 y 16 las del alimento B (X_2); y la cantidad mínima que requiere el ganado --- (16, 15 y 24).

Una vez expresado el problema en forma matemática se - podrán obtener las diferentes soluciones de X_1 y X_2 y posterior- mente escoger el costo mínimo.

En resumen el problema es: (22)

Minimizar $\quad C = 4X_1 + 2X_2$

Sujeto a:

$$8X_1 + 4X_2 \geq 16$$
$$5X_1 + 5X_2 \geq 15$$
$$6X_1 + 16X_2 \geq 24$$

$$Xj \geq 0, \forall j$$ */

En este caso la solución del problema podría decirse - que es sencilla, pues se puede obtener de dos formas, una gráfi- ca y otra calculada matemáticamente por medio del álgebra, carac terísticas que sólo es posible emplear cuando se trata de dos va

*/ Ver glosario de símbolos matemáticos.

riables. Cuando se trata de problemas con más de dos variables el método de solución gráfico no es factible por lo que se tiene que recurrir al álgebra matricial y cuando se trata de trabajar con variables que si son posibles de resolver manualmente con -- ayuda de una calculadora común, pero que se requiere del dominio de las matemáticas y además de mucho tiempo, es donde entra la - colaboración de la computadora puesto que es menos laborioso --- aprender a utilizar la computadora que hacer los cálculos manualmente además de la ventaja de poder utilizar el número de variables que convenga y de obtener los resultados rápida y exactamente.

La computadora además de la ayuda indiscutible que nos proporciona, es una herramienta más que todo profesionista debe saber manejar, que requiere del conocimiento elemental de las matemáticas y que con sólo el conocimiento de un lenguaje o de varios, según el interés, se pueden realizar infinidad de problemas.

En su oportunidad se explicará cada una de las formas de solución como el método gráfico y el matemático (Método Simplex) o de computo que tiene la programación lineal.

Hay dos clases especiales de problemas de programación lineal a los que se hace referencia frecuentemente con el nombre de modelos de distribución, éstos son los problemas del transporte y asignación. Teniendo en cuenta que la solución de estos -- dos problemas por el método simplex no es eficiente, se han desarrollado algoritmos */especiales para resolverlos. (23)

Cabe hacer la aclaración de que la programación lineal tiene diferentes tipos de métodos, según la naturaleza del problema por resolver, es decir, los métodos simplex de programación lineal son más generales en su alcance y aplicación que los métodos de distribución-transporte. Los problemas de distribución pueden resolverse por medio del método simplex, pero por lo común requieren de cierto esfuerzo y tiempo adicionales. Sin em

*/Ver glosario de términos.

bargo, el método simplex puede usarse en donde no se pueden em-- plear los métodos de distribución; por tanto el campo de aplicación para el método simplex es más extenso.(9)

FUNDAMENTOS MATEMATICOS.

Hasta aquí se ha hablado de una manera muy general y sencilla del significado de la programación lineal, pero para profundizar más es necesario tener conocimientos previos por lo menos de álgebra lineal, álgebra matricial y determinantes, por lo que en este trabajo de tesis y concretamente en este capítulo de fundamentos matemáticos se explican estos temas para la comprensión y desarrollo completos de los conceptos y de las técnicas fundamentales de varios temas matemáticos. Desde este punto de vista se presentan y se exponen solamente aquellos elementos de éstos temas que faciliten la explicación de los problemas relacionados con la programación lineal. (13)

Como se mencionó anteriormente, la programación lineal tiene varios métodos de solución que son el gráfico, el matemático (M. Simplex) y por medio de computación. Para la solución gráfica, en este capítulo se parte desde la definición de una gráfica, sus diferentes tipos y la forma de graficar en coordenadas cartesianas rectangulares. Posteriormente se explican los diferentes métodos que existen para dar solución a un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas. Los pasos del método simplex se indicarán en el problema que se expondrá en el capítulo subsecuente pero en éste se darán las bases del álgebra matricial que se utilizan para resolver el método simplex.

GRAFICA.

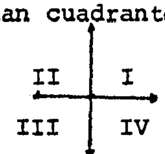
Se denomina gráfica a la representación por medio de dibujos de las relaciones que existen entre los números.

Dentro de los diferentes tipos de gráficas que existen se encuentran las gráficas en coordenadas cartesianas el cual es un sistema que situa los puntos en un plano tomando como referencia dos rectas perpendiculares que reciben el nombre de ejes coordenados.

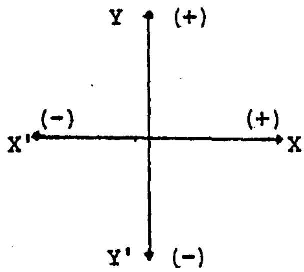
El eje horizontal (X X') se llama eje de las abscisas o eje de las X; el eje vertical (Y Y') eje de las ordenadas o eje de las Y.

La intersección de los dos ejes se llama origen.

Los ejes de las coordenadas dividen el plano en cuatro regiones, que se llaman cuadrantes.



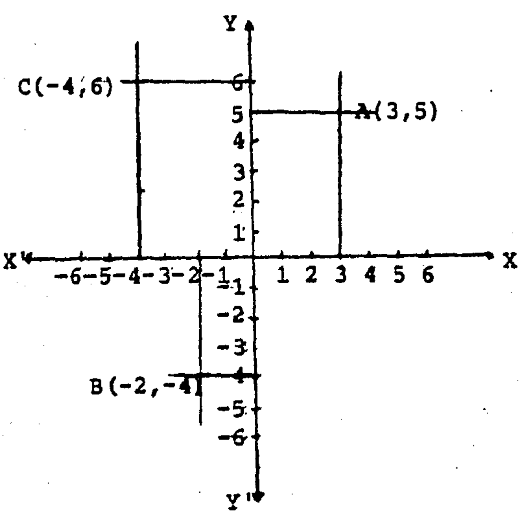
Signos de las coordenadas. El origen divide a cada uno de los ejes coordenados en dos semiejes de signos contrarios.



OX - semieje positivo de abscisas
OX'- semieje negativo de abscisas
OY - semieje positivo de ordenadas
OY'- semieje negativo de ordenadas

Se puede determinar cualquier punto en el plano por sus distancias a los ejes. Estas distancias del punto a los ejes se llaman coordenadas del punto (p), y se escriben como un par de números encerrados entre paréntesis y separados mediante una coma. La abscisa se escribe primero y la ordenada después.(3).

Ejemplo:



FORMA DE GRAFICAR UNA FUNCION LINEAL.

Como parte introductoria es necesario tener claro diferentes conceptos como son: variable, variable independiente, variable dependiente, constante, constante absoluta, función - y función lineal; mismos que su definición se encuentra en el- glosario de términos matemáticos.

Con las definiciones anteriores, se explica la representación gráfica de una función lineal y se ilustra el procedimiento por pasos:

Una función lineal de X es una función del tipo:

$$aX + b$$

en la cual a y b son constantes y a es diferente de 0.

Ejemplo:

$3X - 5$

1. PASO.

Para construir la gráfica de la ecuación 3X - 5 se - iguala primero la función con la variable dependiente Y, y se- obtiene:

$$Y = 3X - 5$$

2. PASO:

Se asignan a X (variable independiente) los valores- que convengan, en este caso -1, 0 y 3 para obtener los correspondientes valores de Y simplemente sustituyendo estos valores en la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y &= 3(-1) - 5 \quad \text{-----} \quad (1) \\ &= -3 - 5 \\ Y &= -8 \end{aligned}$$

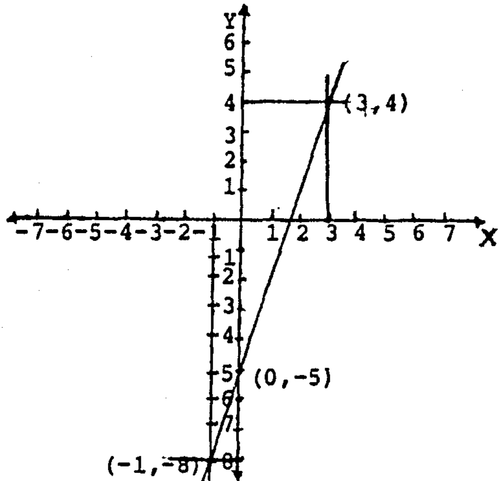
$$\begin{aligned} Y &= 3(0) - 5 \quad \text{-----} \quad (2) \\ Y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= 3(3) - 5 \quad \text{-----} \quad (3) \\ &= 9 - 5 \\ Y &= 4 \end{aligned}$$

Los valores asignados a X, así como los valores obtenidos de Y se representan en la siguiente tabla:

X	-1	0	3
Y	-8	-5	4

Gráficamente se representan de la siguiente manera: (20)



SOLUCION SIMULTANEA DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS A TRAVES DE LOS METODOS MAS COMUNES.

En primer lugar,se debe partir desde saber que es una ecuación, una ecuación equivalente, transposición y otros conceptos para llegar a definir lo que es un sistema de dos ecuaciones simultáneas y posteriormente explicar los métodos más comunes de solución.

Para fines explícitos estos conceptos se citan en esta sección, pero también se encuentran en el glosario de términos.

DEFINICION DE UNA ECUACION

Una ecuación es la proposición de que dos expresio---

nes son iguales.
ejemplo:

$$3X - 6 = 2X + 1$$

a las dos expresiones se le llaman miembros de la ecuación.

DEFINICION DE ECUACIONES EQUIVALENTES.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mis-- mas soluciones. Por ejemplo:

Por sustitución directa se puede comprobar que $X = 3$ y es solución de las siguientes ecuaciones:

$$4X - 2 = 3X + 1 \quad \text{y de}$$

$$7X = 6X + 3$$

Al substituir:

$$4(3) - 2 = 3(3) + 1 \qquad 7(3) = 6(3) + 3$$

$$12 - 2 = 9 + 1 \qquad 21 = 18 + 3$$

$$10 = 10 \qquad 21 = 21$$

por lo tanto ambas ecuaciones son equivalentes.

Evidentemente si se agrega la misma cantidad, o se- multiplican o se dividen las dos expresiones por una misma --- constante diferente de cero se obtienen dos nuevas expresiones que son iguales para el mismo valor de la incógnita.

Por tanto cada una de las siguientes operaciones -- que se efectuen en una ecuación da por resultado una ecuación- equivalente.

REGLAS PARA OBTENER ECUACIONES EQUIVALENTES.

1.- Si se agrega la misma cantidad a cada miembro - de la ecuación, la ecuación resultante es equivalente a la primera.

2.- Si se multiplica o se divide cada miembro de -- una ecuación por una misma constante diferente de cero la ecuación obtenida es equivalente a la primera. (20)

Estas dos definiciones de ecuación y ecuación equivalente nos conducen a que:

Si en una relación funcional aparece explícitamente la variable dependiente se tiene entonces una ecuación con dos incógnitas por ejemplo:

$$Y = 3X - 5$$

aquí no solo se muestra a Y como función lineal de X, sino que también establece que las dos cantidades son iguales y por lo tanto es una ecuación y además cualquier par de números, uno para X y otro para Y, para el cual los dos miembros de la ecuación son iguales, es solución de la ecuación y se pueden obtener tantas soluciones como se deseen con sólo asignar valores a X y luego calcular cada valor correspondiente de Y, obviamente, las coordenadas de cualquier punto de la gráfica son solución de la ecuación.

Ahora según los axiomas 1 y 2 (reglas para obtener ecuaciones equivalentes) se sabe que cualquier solución de:

$$Y = 3X - 5 \text{ ------ } (1)$$

es solución también de:

$$4Y = 12X - 20 \text{ ----- } (2)$$ Se ha multiplicado cada miembro de la ecuación (1) por 4.

$$\frac{-12X}{-1} + \frac{4Y}{-1} = \frac{-20}{-1} \text{ --- } (3)$$ Se ha transpuesto* 12X y luego se ha dividido entre -1.

$$12X - 4Y = 20 \text{ ----- } (4)$$. Ecuación resultante.

La ecuación (4) es del tipo

$$aX + bY = c$$

donde a, b y c son constantes.

Una ecuación de este tipo se llama:

<u>Ecuación de primer grado con dos incógnitas.</u>

---

* Transposición: Ver definición en glosario de términos.

Como se dijo anteriormente una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene tantas soluciones como se desee.

Dos o más ecuaciones de primer grado con las mismas incógnitas reciben el nombre de Sistema de ecuaciones lineales y pueden tener una solución común y cuando este es el caso reciben el nombre de Ecuaciones simultáneas. (20)

Existen varios métodos para resolver un Sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas y son:

1.- Método gráfico

2.- Métodos algebraicos:

2.1.- Eliminación de una variable por adición o sustracción. También conocido como método de Reducción.

2.2.- Método por Sustitución.

2.3.- Método por Igualación.

3.- Método por Determinantes. Se dice que éste método es una simplificación de operaciones donde no se usa el álgebra, es un artificio o invento debido a Liebniz (1646-1716). También se menciona que un matemático Japonés Seki Kowa (1647-1708) produjo el mismo invento 10 años antes que Leibniz pero su trabajo no fué conocido oportunamente a causa del aislamiento en que se encontraba su país. (20)

Para ilustrar los métodos antes descritos se utilizará un mismo sistema de ecuaciones simultáneas para comprobar que por todos los métodos se llega a la misma solución.

Dado un sistema de ecuaciones simultáneas:

$$3X + 2Y = 14 \text{ ------ } (1)$$
$$2X - Y = 2 \text{ ------ } (2)$$

SOLUCION GRAFICA

1ª PASO:

Las coordenadas de los puntos se pueden obtener fácilmente haciendo que $X = 0$ y resolviendo para Y, asimismo se hace que $Y = 0$ y se resuelve para X. Es aconsejable determinar un tercer punto asignándole a x un número cualquiera diferente de cero a modo de comprobación.

$$3X + 2Y = 14 \text{ ------ } (1)$$

Cuando $X = 0$

$$2Y = 14$$

$$Y = \frac{14}{2}$$

$$Y = 7$$

Cuando $Y = 0$

$$3X = 14$$

$$X = \frac{14}{3}$$

$$X = 4.66$$

Tercer punto. Cuando $X = -2$

$$3(-2) + 2Y = 14$$

$$-6 + 2Y = 14$$

$$2Y = 14 + 6$$

$$Y = \frac{14 + 6}{2} = \frac{20}{2}$$

$$Y = 10$$

Las coordenadas de esta primera ecuación se presentan en la siguiente tabla:

X	0	4.66	-2
Y	7	0	10

------ (1)

El mismo procedimiento se hace para la segunda ecuación:

$$2X - Y = 2 \text{ ------ } (2)$$

Cuando $X = 0$

$$-Y = 2$$

$$\frac{-Y}{-1} = \frac{2}{-1}$$

Se ha dividido entre -1 para fin de intercambiar signos.

$$Y = -2$$

Cuando $Y = 0$

$$2X = 2$$

$$X = \frac{2}{2}$$

$$X = 1$$

Tercer punto. Cuando X = 3

$$2(3) - y = 2$$
$$6 - Y = 2$$
$$- Y = 2 - 6$$
$$- Y = -4$$
$$\frac{- Y}{-1} = \frac{-4}{-1}$$
$$Y = 4$$

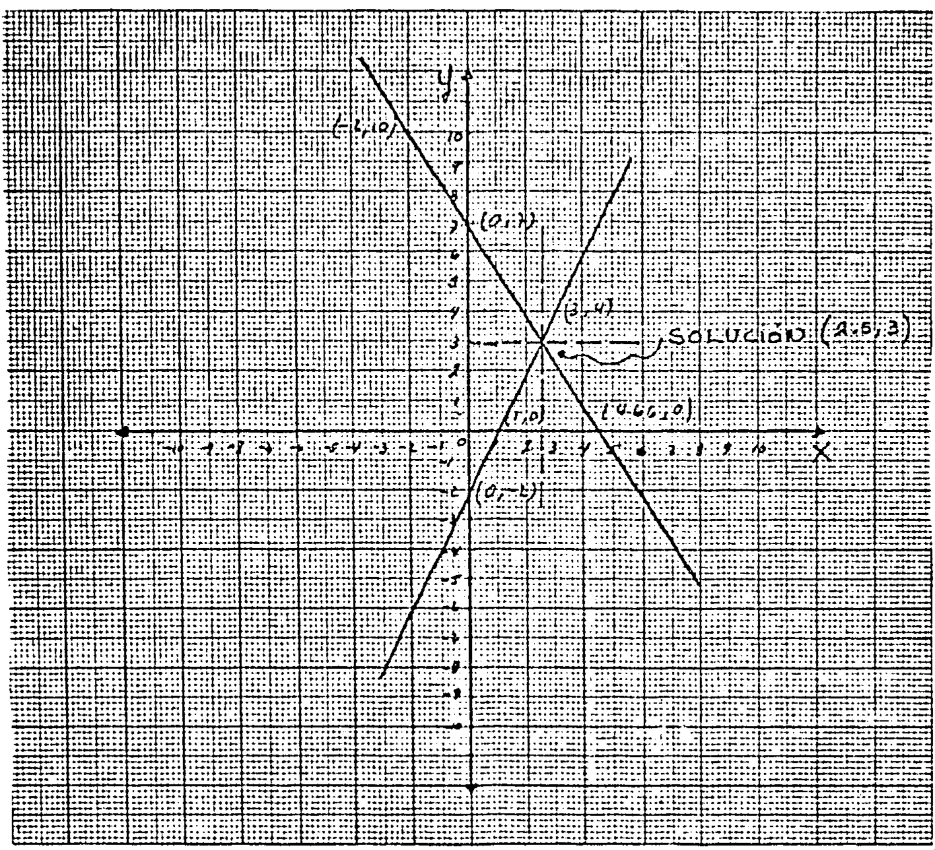
Las coordenadas de la segunda ecuación se presentan en la siguiente tabla:

X	0	1	3
Y	-2	0	4

------ (2)

2°PASO.

Representar gráficamente los puntos determinados en las tablas y construir las gráficas.



3°PASO.

Las coordenadas del punto donde se cortan las líneas que representan las dos ecuaciones son aproximadamente (2.5, 3) por tanto de acuerdo con la gráfica se puede decir que la solución de las ecuaciones (1) y (2) es:

$$X = 2.5$$
$$Y = 3$$

4°PASO.

Comprobación: Se efectúa sustituyendo los valores obtenidos de la gráfica en las ecuaciones del sistema.

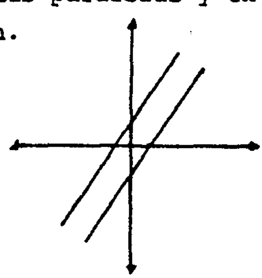
$$3(2.5) + 2(3 \quad = 14 \text{ ----- } (1)$$
$$7.5 + 6 \quad = 13.5$$

$$2(2.5) - 3 \quad = 2 \text{ ----- } (2)$$
$$5.0 - 3 \quad = 2$$

Se observa que los valores no son exáctos en la primera ecuación pero si se agrega una décima más tal vez se obtengan exáctos.

La exactitud de este procedimiento depende del valor de la escala considerada y de la habilidad del operador al realizar la gráfica.

Puede suceder que las gráficas de dos ecuaciones de primer grado sean rectas paralelas y en este caso las ecuaciones no tienen solución.



Por otro lado se pueden obtener dos ecuaciones cuyas gráficas coincidan en todos sus puntos. Entonces cualquier par de valores que satisfaga a la primera ecuación satisface también a la segunda y el par de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

De acuerdo con lo anterior, es muy importante señalar que dentro de los sistemas de ecuaciones existe una clasificación en cuanto a sus soluciones en la que, algunos admiten más de una solución, otros que sólo admiten una solución y también otros sistemas que no admiten solución matemática, pero sí gráfica. En general de acuerdo con la existencia y tipos de soluciones se dice:

Un sistema es COMPATIBLE cuando tiene una solución y es INCOMPATIBLE cuando no la tiene.

Ahora bien, un sistema compatible es DETERMINADO cuando tiene una solución y es INDETERMINADO cuando tiene infinitas soluciones. Para que quede más claro, los sistemas de ecuaciones se clasifican en: (27)

- SISTEMAS DE ECUACIONES.
  - COMPATIBLES (tienen solución)
    - DETERMINADOS (una solución)
    - INDETERMINADOS (más de una solución)
  - INCOMPATIBLES (no tienen solución matemática pero sí gráfica).

Desventajas del método gráfico.

El método gráfico es un auxiliar para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado, pero sin embargo, no es un método eficáz para obtener la solución cuando ésta existe por las siguientes razones:

1.- Es muy laborioso

2.- La exactitud depende de la habilidad del operador para construir la gráfica y para estimar las coordenadas de su punto de intersección. (12)

Los métodos matemáticos son más fáciles de operar y permiten obtener absoluta exáctitud en la solución y son los que se verán a continuación en el orden antes expuesto.

Eliminación de una variable por adición o sustracción [20]

1°PASO.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$3X + 2Y = 14 \text{ ----- } (1)$$
$$2X - Y = 2 \text{ ----- } (2)$$

Se suman los valores de los miembros de la izquierda y se igualan a la suma de los miembros de la derecha de ambas-- ecuaciones de la siguiente forma:

$$(3X + 2Y) + (2X - Y) = 14 + 2$$

También se pueden sumar verticalmente:

$$\begin{array}{r} 3X + 2Y = 14 \\ 2X - Y = 2 \\ \hline 5X + Y = 16 \end{array}$$ Ecuación resultante.

2°PASO.

Se simplifica la ecuación:

En este caso la ecuación resultante

$$5X + Y = 16$$

aún contiene las dos incógnitas (X, Y) y lo que se busca es que una de las dos incógnitas se elimine por adición o sustracción- de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} +\,2Y \\ -\,2Y \\ \hline 0 \end{array}$$ suma algebraica

En estos casos ¿Qué es lo que debe hacerse?

Lo que se debe hacer es convertir las ecuaciones (1) y (2) en ecuaciones equivalentes, para esto hay que recordar -- las reglas para obtener las ecuaciones equivalentes.

1.- Se escoge arbitrariamente la variable que se quiera eliminar. En este caso (Y).

2.- Se observa que si se multiplica la ecuación(1) -- por 2, se obtiene la ecuación equivalente (3):

$$2(3X) + 2(2Y) = 2(14)$$
$$6X + 4Y = 28 \text{ ------ } (3)$$

y si se multiplica la ecuación (2) por 4, se obtiene la ecuación equivalente (4).

$$4(2X) - 4(Y) = 4(2)$$

$$8X - 4Y = 8 \text{ ------ } (4)$$

Ahora si se hace la suma algebraica con las ecuaciones equivalentes (3) y (4)

$$\begin{array}{r} 6X + 4Y = 28 \text{ ----- } (3) \\ 8X - 4Y = 8 \text{ ----- } (4) \\ \hline 14X \qquad = 36 \end{array}$$

Se despeja X:

$$X = \frac{36}{14}$$

$$X = 2.57$$

3°PASO:

Como X = 2.57 es uno de los valores buscados el procedimiento se completa sustituyendo el valor de X en la ecuación original (1).

$$3(2.57) + 2Y = 14 \text{ ----- } (1)$$

$$7.71 + 2Y = 14$$

$$2Y = 14 - 7.71$$

$$Y = \frac{14 - 7.71}{2}$$

$$Y = 3.14$$

4°PASO:

Como los valores son:

$$X = 2.57$$

$$Y = 3.14$$

se supone que deben satisfacer a ambas ecuaciones iniciales -- por lo tanto se sustituyen los valores en las ecuaciones (1) y (2).

$$3(2.57) + 2(3.14) = 14 \text{ --- } (1) \qquad 2(2.57) - 3.14 = 2 \text{ --- } (2)$$

$$7.71 + 6.28 = 14 \qquad 5.14 - 3.14 = 2$$

$$13.99 \quad 14 \qquad 2 = 2$$

METODO POR SUSTITUCION.(22)

1°PASO

Dado el sistema de ecuaciones:

$$3X + 2Y = 14 \text{ ----- } (1)$$

$$2X - Y = 2 \text{ ----- } (2)$$

Se despeja una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones en este caso Y de la ecuación (2)

$$-Y = 2 - 2X$$

se multiplica por -1 con el fin de intercambiar signos:

$$(-1)-Y = -1(2) - (-1)(2X)$$

$$Y = -2 + 2X$$

se ordena la ecuación para expresarla correctamente:

$$Y = 2X - 2 \text{ ----- } (3)$$

2°PASO

Este valor de Y = 2X - 2 se sustituye en la ecuación (1).

$$3X + 2(2X - 2) = 14$$

3°PASO.

Se resuelve la ecuación para obtener el valor de X:

$$3X + 4X - 4 = 14$$

$$7X - 4 = 14$$

$$7X = 14 + 4$$

$$7X = 18$$

$$X = \frac{18}{7}$$

$$\underline{\underline{X = 2.57}}$$

4°PASO.

Se sustituye el valor de X = 2.57 en la ecuación (3)

$$Y = 2(2.57) - 2$$

$$Y = 5.14 - 2$$

$$\underline{\underline{Y = 3.14}}$$

5°PASO.

Claramente se observa que la solución es igual a la obtenida con el método anterior, por lo que la comprobación debe ser la misma.

METODO DE IGUALACION. (20)

1°PASO.

Dado el sistema:

$$3X + 2Y = 14 \text{ ----- } (1)$$
$$2X - Y = 2 \text{ ----- } (2)$$

Se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones en este caso Y.

$$2Y = 14 - 3X \text{ -----}(1)$$
$$Y = \frac{14 - 3X}{2}$$
$$Y = 2X - 2 \text{ ----- } (2)$$

En este despeje aquí se obtuvo directamente pero se siguen los mismos pasos que en el despeje anterior.

2°PASO.

Se igualan términos

$$Y = \frac{14 - 3X}{2} = \frac{2X - 2}{1}$$

Se eliminan denominadores

$$Y = \frac{14 - 3X}{2} = \frac{2X - 2}{1}$$

$$Y = 1(14 - 3X) = 2(2X - 2)$$
$$Y = 14 - 3X = 4X - 4$$

Se igualan términos con el fin de despejar a X

$$14 + 4 = 3X + 4X$$
$$18 = 7X$$
$$\frac{18}{7} = X$$
$$2.57 = X$$

3°PASO.

A partir de aquí se observa que el valor de X es igual al obtenido anteriormente con los otros métodos, por lo tanto este valor X = 2.57 se sustituye en la ecuación (1) del sistema y se despeja a Y.

$$3(2.57) + 2Y = 14$$
$$7.71 + 2Y = 14$$
$$2Y = 14 - 7.71$$
$$Y = \frac{6.29}{2}$$
$$Y = 3.14$$

Finalmente se comprueban los resultados en ambas ecuaciones del sistema.

METODO POR DETERMINANTES.(20)

Antes de proseguir con la metodología por determinantes es necesario definir ciertos conceptos:

Determinante: Es el valor absoluto de una matriz y se determinan entre dos líneas verticales $|A|$

Determinante de segundo orden: Es la ordenación cuadricular de 4 números:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$ Se le conoce como determinante de los coeficientes.

Y su valor o desarrollo es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ - & + \end{vmatrix} = ad - bc$$

A las letras a, b, c y d representan a los números y se llaman elementos del determinante.

Los determinantes de segundo orden se pueden emplear para resolver todo par de ecuaciones compatibles de primer grado y la solución se encuentra mediante los siguientes pasos:

En el método por determinantes se trabaja principalmente con los coeficientes de las ecuaciones.

1°PASO.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$3X + 2Y = 14 \text{ ----- } (1)$$
$$2X - Y = 2 \text{ ----- } (2)$$

Se observa primero el determinante de los coeficientes y el determinante de los términos constantes o independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 \\ 2 \end{vmatrix}$$

2°PASO.

Se procede la metodología para calcular el valor de X

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{14(-1) - 2(2)}{3(-1) - 2(2)} = \frac{-14 - 4}{-3 - 4} = \frac{-18}{-7} = 2.57$$

3°PASO.

Análogamente se calcula el valor de Y

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3(2) - 14(2)}{3(-1) - 2(2)} = \frac{6 - 28}{-3 - 4} = \frac{-22}{-7} = 3.14$$

4°PASO.

Al obtener los valores correspondientes a las variables X y Y los siguientes pasos son iguales a los de los métodos anteriores se sustituye en las ecuaciones del sistema y se comprueba la solución.

Al estudiar los métodos descritos se puede llegar a una conclusión: cuando se tiene un problema para resolver con un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se recomienda estudiar el problema antes de intentar resolverlo y seleccionar el método que requiera un menor número de operaciones.

MATRICES.

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales realizado anteriormente, sirve como una introducción al concepto de matriz, tanto por las definiciones esenciales como por el ejercicio practicado del álgebra elemental.

Siguiendo con la secuencia del estudio, ahora se darán algunas definiciones: de matriz, matriz cuadrada, matriz unidad, matriz triangular etc; así como los conceptos que sean necesarios aclarar para una mayor comprensión. Y a medida del avance en el estudio de las matrices se dará a conocer también la suma, resta, multiplicación y la obtención de la inversa de una matriz para solucionar un sistema de ecuaciones simultáneas por medio del algebra matricial.

CONCEPTO DE MATRIZ.

Una matriz es un arreglo rectangular de (m;n) números, dispuestos en m renglones* y n columnas en la forma siguiente:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \cdots & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \cdots & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Tal arreglo generalmente va encerrado en paréntesis y recibe el nombre de MATRIZ. Las a_{ij} individuales son las llamadas elementos de la matriz. (13)

Comunmente se representa a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. En forma abreviada una matriz puede expresarse como:

$$A = (a_{ij}) \text{ donde } i = 1,2, \ldots , m \text{ renglones y } j = 1,2, \ldots , n \text{ columnas.}$$

---

* También se usan los términos de hilera y renglón, además de fila para designar colectivamente a todos los elementos que tienen el mismo subíndice i. En este trabajo de tesis se usará el término de renglón.

Los subíndices(i,j) indican, respectivamente, el ren-- glón y la columna en que se encuentra el elemento a_{ij}. Así por - ejemplo: a_{23} representa al elemento que se encuentra en el segun do renglón (número 2) y la tercera columna (número 3) de la ma-- triz A. (27).

Algunas veces se designa la matriz A por (a_{ij}). Para - cualquier m ó n y cualesquiera elementos a_{ij} se tiene: (13)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = (a_{ij})$$

A continuación se da la forma de representar un siste- ma de ecuaciones en una matriz, que no es más que un sistema e-- quivalente, se representa mediante un ejemplo:

En el proceso de construcción de un sistema equivalen- te, debe señalarse que no es necesario escribir incógnitas, es - decir, X_1, X_2 , ... X_n, ya que realmente sólo se opera con los - coeficientes a_{ij} y con los términos independientes o constantes- b_i.

Si se analiza el ejmplo, se observa que el sistema de- ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\,X_2 + 2\,X_3 &= 6 \\ X_1 - 2\,X_2 + X_3 &= 1 \\ -X_1 + X_2 + 5\,X_3 &= 10 \end{aligned}$$

Queda completamente determinado al conocer el valor y la posición de cada uno de los coeficientes y términos indepen- dientes. Esta información se puede presentar convenientemente - en el siguiente arreglo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

Al cual se le llama MATRIZ como anteriormente se había señalado. Este arreglo en particular consta de 12 elementos (nú- meros) dispuestos en tres renglones y cuatro columnas, por lo -- que se dice que la matriz es del orden 3 x 4. (27)

TIPOS DE MATRICES.

Ahora bien, una vez aclarado el concepto de matriz, se procede a dar las siguientes definiciones de los tipos de matrices, con el fin de obtener un mejor entendimiento en los conceptos que se tratarán posteriormente.

- Una matriz A se llama CUADRADA si $m = n$ y se dice -- que es del orden n. (m = renglones y n = columnas)

- Un vector columna es una matriz con sólo una columna.

- Un vector renglón es una matriz con solamente un renglón.

- Una matriz diagonal, es una matriz cuadrada cuyos elementos son todos iguales a cero, fuera de la diagonal princi-- pal en la que los elementos a_{ij} están dispuestos de tal forma -- en que $i \neq j$.*

- Una matriz unidad o matriz identidad, es una matriz-diagonal, cuyos elementos diagonales son 1. Una matriz unidad de orden n se designa I_n o simplemente I. Para $n = 3$, se tiene:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- La matriz transpuesta, A', de una matriz A es:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Es decir, que los renglones y las columnas están intercambiadas.

* Ver lista de símbolos matemáticos

- Una matriz A es simetrica, si $A = A'$, o sea, si $a_{ij} = a_{ji}$.

- Dos matrices son iguales si son del mismo orden y -- sus elementos correspondientes son iguales. Por consiguiente, -- las dimensiones correspondientes m y n, también deben ser iguales A esto obedece la siguiente definición abreviada:

$$A = B \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall^{*} ij.$$

- Una matriz cuadrada A es triangular si todas sus a_{ij} son iguales a cero para i j, ó ai todas sus a_{ij} son iguales a - cero para i j.

La matriz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

es triangular.

- Una matriz es escalonada si el primer elemento diferente de cero de cada renglón, es igual a 1 y el número de ceros anteriores a dicho elemento aumenta de renglón a renglón.

- Una matriz nula tiene todos sus elementos iguales a- cero y se designa por 0 = (0). (13) .

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES POR RENGLON.

Las transformaciones efectuadas con los renglones de - una matriz M para obtener finalmente una matriz escalonada, se - llaman "transformaciones elementales por renglón" y pueden ser - de tres tipos:

1) Intercambio de dos renglones
2) Multiplicación de un renglón por un número $K \neq 0$
3) Multiplicación de un renglón por un número $K \neq 0$
   y la suma del resultado a otro renglón de la matriz

Utilizando las transformaciones elementales por renglón es posible transformar cualquier matriz en una matriz escalonada.

---

* Ver lista de símbolos matemáticos.

MATRICES EQUIVALENTES.

Se dice que dos matrices son equivalentes, si cualquiera de ellas puede obtenerse a partir de la otra efectuando un número finito de transformaciones elementales por renglón. (Es semejante a los axiomas de igualdad efectuados para transformar ecuaciones en ecuaciones equivalentes, ambos tienen el mismo fin: (simplificación de operaciones).

Sea la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 & -2 \\ 4 & 8 & 4 & 16 & -4 \\ 3 & -3 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1/3 & 4 \end{vmatrix}$$

Transformar la matriz A en una matriz escalonada equivalente utilizando transformaciones elementales por renglón

Solución:

Diviendo entre dos el primer renglón de A se obtiene:

$$\frac{2 \quad 4 \quad 2 \quad 8 \quad -2}{2} = 1 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad -1$$

y queda

$$A_I = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 & -4 \\ 3 & -3 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1/3 & 4 \end{vmatrix}$$

Multiplicando el primer renglón por -4 y sumando al segundo renglón de A_I obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ & & & x\ -4 & & \\ \hline & -4 & -8 & -4 & -16 & 4 \\ + & 4 & 8 & 4 & 16 & -4 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Y queda:

$$A_{II} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1/3 & 4 \end{vmatrix}$$

Multiplicando por -3 el primer renglón y sumando el re sultado al tercer renglón de A_{II} obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ & & & \times -3 & & \\ \hline & -3 & -6 & -3 & -12 & 3 \\ + & 3 & -3 & 9 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & -9 & 6 & -11 & 4 \end{array}$$

Y queda:

$$A_{III} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & -11 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1/3 & 4 \end{vmatrix}$$

Multiplicando por -1 el primer renglón y sumando al -- cuarto renglón de A_{III} obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ & & & \times -1 & & \\ \hline & -1 & -2 & -1 & -4^{*} & 1 \\ + & 1 & -1 & 3 & 1/3 & 4 \\ \hline & 0 & -3 & 2 & -11/3 & 5 \end{array}$$

* Para realizar la suma de -4 + 1/3, hay que convertir el -4 en tercios lo cual es 12/3 = 4 y así se procede a efectuar la suma algebraica en quebrados: $-\frac{12}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$ quedando - así el resultado.

Y queda:

$$A_{IV} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & -11 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -11/3 & 5 \end{vmatrix}$$

Intercambiando el segundo renglón con el cuarto ren-- glón de A_{IV} obtenemos:

$$A_{V} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -11/3 & 5 \\ 0 & -9 & 6 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplicando el segundo renglón por -3 y sumando el tercer renglón de A_V, obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrr} 0 & -3 & 2 & -11/3^{*} & 5 \\ & & \times -3 & & \\ \hline 0 & 9 & -6 & 11 & -15 \\ +\ 0 & -9 & 6 & -11 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \qquad {}^{*}\frac{-3}{1} \times \frac{-11}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Y queda:

$$A_{VI} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -11/3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dividiendo entre -3 el segundo renglón de A_{VI} obtenemos:

$$\frac{0 \quad -3 \quad 2 \quad -11/3^{*} \quad 5}{-3} \qquad {}^{*}\frac{-11}{3} \div \frac{-3}{1} = \frac{11}{9}$$

$$0 \quad 1 \quad -2/3 \quad 11/9 \quad -5/3$$

Y queda:

$$A_{VII} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 11/9 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dividiendo entre -11 el tercer renglón de A_{VII} obtenemos:

$$\frac{-11}{-11} = 1$$

Y finalmente queda:

$$A_{VIII} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 11/9 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matriz A_{VIII} es una matriz escalonada, equivalente a la matriz A. (27)

Al hablar de transformaciones elementales, se ha hecho énfasis en el término "por renglón". Esto obedece a que existen- transformaciones análogas a las descritas anteriormente efectuadas en las columnas de una matriz. En este trabajo de tesis no - se justificará la existencia de dichas transformaciones y tampoco serán utilizadas por ser un ejemplo exclusivamente ilustrativo; sin embargo el estudioso interesado en saber más acerca de - esto, puede consultar la referencia N°11 pag, 141.

RANGO DE UNA MATRIZ.

Si transformamos una matriz A en una matriz escalonada B, el número de renglones de la matriz B con al menos un elemento distinto de cero se llama RANGO DE LA MATRIZ A y se representa con R (A). El mismo rango se asigna a la matriz B.

De acuerdo con esta definición, cuando dos matrices -- son equivalentes, ambas tienen el mismo rango.

En el ejemplo anterior, las matrices A, A_I, A_{II}, ... A_{VIII}, todas son del rango 3.

Asimismo para obtener el rango de cualquier matriz es- necesario obtenerlo paso por paso y utilizando las transformaciones elementales renglón por renglón de tal manera que se permita "hacer ceros" debajo de un elemento distinto de cero.

El concepto de rango de una matriz, juega un papel muy importante en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales que - se verán más adelante. El estudiante puede darse cuenta que la - definición de rango tal como se enuncia, proporciona a la vez un- método para obtenerlo.

Se dice que dos matrices son equivalentes si se puede- obtener una de la otra mediante un número finito de operaciones- elementales. Si dos matrices A y B son equivalentes se escribe - $A \sim B$. (27)

Existe una propiedad importante relativa a las trans-- formaciones elementales:

Las transformaciones elementales NO alteran el rango.

De aquí que:

Si dos matrices son equivalentes entonces tienen el - mismo rango.

OPERACIONES MATRICIALES.

Las operaciones matriciales son las mismas que las operaciones algebraicas, es decir, son la suma, resta, multiplicación y división, sólo que existen algunas diferencias al realizar estas operaciones con matrices y que se harán notar en su oportunidad.

PRODUCTO DE MATRICES.

La multiplicación de dos matrices A y B, se define solamente bajo la suposición de que el <u>número de columnas de A es igual al número de renglones de B</u>. Bajo esta suposición, los elementos del producto AB = C se definen de la siguiente forma:

El elemento del renglón i y la columna j de la matriz C es igual a la suma de los productos de los elementos del renglón i de A, multiplicados por los correspondientes elementos de la columna j de B. Por ejemplo se obtiene el producto de las matrices A y B:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad y \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{vmatrix}$$

3 columnas = 3 renglones por lo tanto la multiplicación sí se puede efectuar.

El producto AB será la matriz:

$$AB = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_{11} + a_{12}\ b_{21} + a_{13}\ b_{31} \\ a_{21}\ b11 + a_{22}\ b_{21} + a_{23}\ b_{31} \end{vmatrix}$$

donde se observa que:

1°) El elemento que se encuentra en el primer renglón-primera columna de la matriz producto, es la suma:

$$a_{11}\ b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}\ b_{31} = \sum_{K=1}^{3} a_{1k}b_{k1}$$

2°) El elemento que se encuentra en el segundo renglón primera columna de la matriz producto, es la suma:

$$a_{21}\ b_{11} + a_{22}\ b_{21} + a_{23}\ b_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}\ b_{k1}$$

Generalizando, el elemento que se encuentra en el renglón i, columna j, de una matriz producto AB, es la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

En donde n es el número de columnas de la matriz A y-- el número de renglones de la matriz B, que deberá se el mismo para que pueda efectuarse el producto.

Para ilustrar la definición, se obtiene el producto de las matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}_{3x4}$$

La forma de obtener la matriz C producto de AB, se obtiene efectuando el producto escalar* del renglón i de A por la-columna j de B:

Por ejemplo el elemento C_{13} es el producto

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} = (2x-2) + (-3x0) + (-1x4)$$
$$-4 \quad + \quad 0 \quad - \quad 4 \quad = -8$$

$$-8 = C_{13}$$

Por lo que la matriz C, se obtiene:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = (2x1) + (-3x3) + (-1x-1)$$
$$2 \quad - \quad 9 \quad + \quad 1 \quad = -6$$

$$C_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix} = (2x0) + (-3x1) + (-1x-3)$$
$$0 \quad - \quad 3 \quad + \quad 3 \quad = 0$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} = (2x-2) + (-3x0) + (-1x4)$$
$$-4 \quad + \quad 0 \quad - \quad 4 \quad = -8$$

$$C_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} = (2x1) + (-3x1) + (-1x3)$$
$$2 \quad - \quad 3 \quad - \quad 3 \quad = -4$$

* Ver glosario de términos matemáticos.

$$C_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = (-1x1) + (4x3) + (1x-1)$$
$$-1 + 12 - 1 = 10$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix} = (-1x0) + (4x1) + (1x-3)$$
$$0 + 4 - 3 = 1$$

$$C_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} = (-1x-2) + (4x0) + (1x4)$$
$$2 + 0 + 4 = 6$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} = (-1x1) + (4x1) + (1x3)$$
$$-1 + 4 + 3 = 6$$

Entonces la matriz producto AB es:

$$AB = \begin{vmatrix} -6 & 0 & -8 & -4 \\ 10 & 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Que es la matriz C de orden 2x4.

Obsérvese que el producto del renglón 1 por la columna 1 es el elemento (1,1) de la matriz resultante (C). Análogamente el renglón 1 por la columna 2 da por resultado el elemento -- (1,2), etc.

Se puede concluir en base a la definición, que se puede efectuar el producto AB sólo cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. En este caso se dice que las matrices A y B son conformables para la multiplicación.

En general, la multiplicación de las matrices NO es -- conmutativa*, incluso en muchas ocasiones se tiene que dos matrices A y B son conformables para multiplicarse en ese orden (es - decir puede obtenerse el producto AB), mientras que no son con-- formables para multiplicarse en el orden contrario (no puede obtenerse el producto BA), o sea que $AB \neq BA$. Por tal motivo es - necesario precisar el orden en que las matrices se van a multi-- plicar. Para el caso del producto AB, se dice que A premultiplica a B, o bien, que B postmultiplica a A.

---

* Ver glosario de términos matemáticos.

Ejemplo:

Dadas las matrices:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} , \quad S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} , \quad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Obtener: a) RS , b) SR , c) TS , d) ST

Solución:

a) RS $\quad \overset{R}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \overset{S}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \overset{RS}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -7 \end{vmatrix}}$

b) SR $\quad \overset{S}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} \overset{R}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \overset{SR}{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}$

En este caso pudieron obtenerse tanto el producto RS - como el producto SR, debido a que ambas matrices son cuadradas - (2x2) y del mismo orden. Sin embargo se hace notar que RS $\neq$ SR - como se mencionó, el producto de matrices no es una operación -- conmutativa aunque pueda efectuarse.

c) TS = $\overset{T}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} \overset{S}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \overset{TS}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}}$

d) ST = $\overset{S}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} \overset{T}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}$

El producto ST no se puede efectuar, ya que el número de columnas de S (2) es diferente al número de renglones de T (3) En otras palabras, S y T no son conformables par a la multiplicación.

Obsérvese que aunque pudo obtenerse el producto TS, no fué posible obtener ST, lo cual resalta la importancia de especificar claramente el orden en que se desea multiplicar dos matrices. (17)

Propiedades de la multiplicación de las matrices.

La multiplicación de matrices tiene las siguientes propiedades:

a) Propiedad Asociativa y

b) Propiedad Distributiva*

La demostración de las leyes antes enunciadas puede ser consultadas en la referencia N° 20 página 24.

OPERACIONES MATRICIALES. Suma y Resta.

La suma y/o resta puede efectuarse con vectores o matrices en dos formas:

1.- Sumando o restando una constante a la matriz o vector y

2.- Sumando o restando dos matrices o vectores.

Sumar una constante, denominada escalar, a un vector significa simplemente sumar la misma constante a cada elemento del vector:

$$2 + \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2 \\ 4+2 \\ -1+2 \\ 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad 2 + \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 5+2 & 0+2 & -3+2 & 10+2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

La resta se efectúa de la misma forma:

$$2 - \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2 \\ 4-2 \\ -1-2 \\ 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad 2 - \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 5-2 & 0-2 & -3-2 & 10-2 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Esta operación se efectúa realmente sumando dos vectores, uno de los cuales tiene todos sus elementos iguales a 2.

Para sumar una constante y una matriz se emplea el mismo procedimiento.

Los vectores pueden sumarse o restarse en la misma forma que las matrices, pero deben ser del mismo orden. Esto es, un vector renglón 1x5 puede sumarse solamente a otro vector renglón 1x5. Una matriz 5x7 puede sumarse solamente a otra matriz 5x7.

Cuando se suman dos vectores del mismo orden, cada elemento de un vector se suma al elemento correspondiente del otro vector. Las mismas reglas se aplican a las matrices. [23]

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}$$ no es posible efectuarse la suma ni la resta.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ no es posible

$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 14 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 4 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}$ no es posible

Propiedades de la suma y resta. (27)

1.- Es Asociativa:*(misma ley que en la multiplicación)

$$(A+B) + C = A + (B+C)$$

2.- Es Conmutativa*:

$$A+B = B+A$$

3.- Es Distributiva* (misma ley que en la multiplicación)

$$A(B+C) = AB = AC \text{ y } (B+C)A = BA + CA$$

La demostración de las leyes antes expuestas puede consultarse en la referencia N° 27 páginas 45 y 46.

DIVISION DE MATRICES. (inversa)

La división*tal como se efectúa normalmente en álgebra no es posible en álgebra matricial, aunque es posible logar re-sultados muy semejantes. Esto requiere la creación de una <u>matriz inversa</u> que tiene propiedades similares a las del inverso de un número o recíproco*. La analogía tiene límites definidos y no debe ampliarse demasiado. Sin embargo, el concepto de esta analogía es válido y permite una interpretación más sencilla de la técnica.

Para despejar b de la siguiente expresión algebraica simplemente divídase por (a) ambos miembros de la ecuación:

$$ab = c$$

$$\frac{ab}{a} = \frac{c}{a} \quad ó \quad 1/a \; ab = 1/a \; c$$

$$b = \frac{c}{a}$$

Puesto que no es posible efectuar directamente la división matricial, la siguiente ecuación de matrices sugieren la utilización del mismo inverso y de la misma multiplicación que en la ecuación anterior:

---

* Ver glosario de términos matemáticos.

$$Ax = b$$

donde A = representa la matriz mxn de coeficientes.

x = representa el vector columna n x 1 de variables y

b = representa el vector columna m x 1 de constantes.

$$\underset{\text{m x n matriz de coeficientes}}{A} \quad \underset{\text{n x 1 vector de variables.}}{x} = \underset{\text{m x 1 vector de constantes.}}{b}$$

Ahora siguiendo el procedimiento de la ecuación anterior , al despejar x de esta ecuación se tiene:

$$Ax = b$$
$$1/A \quad Ax = 1/A\ b$$
$$x = 1/A\ b$$
$$x = b/A$$
$$x = A^{-1}b$$

Entonces es necesaria una forma matricial que tenga propiedades semejantes a las del inverso de un número. Esta es la inversa, denotada por el exponente negativo:

$$\text{inversa de } A = A^{-1}$$

Para propósitos de explicar como se obtiene la inversa de una matriz, es necesario recordar la definición, antes enunciada, de lo que es una matriz identidad.

Una matriz identidad o unidad, es una matriz cuadrada (que tiene tantos renglones como columnas) que tiene una diagonal principal formada de unos (1), y ceros en las demás posiciones. La matriz identidad se designa por In o simplemente I.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I_4 \quad 4x4.$$

En la multiplicación de matrices, una matriz identidad tiene propiedades similares a las del 1 (uno)en la multiplicación regular. Por tanto, cualquier matriz multiplicada por una matriz identidad da como producto la matriz original:

$$AI = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2x1)+(5x0) & (2x0)+(5x1) \\ 2 + 0 & 0 + 5 \\ (-3x1)+(7x0) & (-3x0)+(7x1) \\ -3 + 0 & 0 + 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

En forma simbólica esta expresión se convierte en:

$$AI = A$$
$$IA = A \quad y$$
$$AI = IA$$

Ahora como ya se ha visto que la inversa de una matriz es: $A = A^{-1}$ también recomendable recordar que solamente para una matriz cuadrada puede definirse la inversa.

La inversa de una matriz tiene la siguiente propiedad:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Como se indica:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Verificación de la propiedad:

$$A\,A^{-1} = \underset{A}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} (1x-3)+(2x2) & (1x1)+(2x-1/2) \\ -3 + 4 & 1 +(-1) \\ (4x-3)+(6x2) & (4x1)+(6x-1/2) \\ -12 + 12 & 4 +(-3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \underset{A^{-1}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix}} \underset{A}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} (-3x1)+(1x4) & (-3x2)+(1x6) \\ -3 + 4 & -6 + 6 \\ (2x1) +(-1/2x4) & (2x2) +(-1/2x6) \\ 2 + (-2) & 4 + (-3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

Una vez comprobada esta propiedad, el problema sería: ¿Cómo se obtiene la inversa de una matriz?

Puede definirse una forma generalizada la obtención de una inversa si se entienden primero las operaciones con renglones. Las operaciones con renglones de una matriz consisten en multiplicar (o dividir) cada componente de un renglón por una constante- o en sumar un renglón de otro. Realmente una vez comprendidos estos pasos pueden combinarse. Cuando esto se efectúa en ambos lados de una ecuación , la igualdad aún es válida.

Para obtener la inversa de una matriz, basta recordar las propiedades de una matriz identidad:

$$A = AI$$

y de la inversa: A^{-1}

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

analizando éstas, sugieren un procedimiento para obtener la inversa. Debe tenerse en cuenta la ecuación $A = AI$ que define las propiedades de I.

La igualdad se conserva si se efectúan operaciones con los renglones en la matriz A al lado izquierdo de la ecuación y en la matriz identidad al lado derecho de la ecuación. Puede suponerse que estas operaciones con renglones fueron seleccionadas para convertir la matriz A en una matriz identidad y a su vez la matriz identidad será la inversa de la matriz A ó A^{-1}.

$$A = IA$$

$$I = AX$$

De acuerdo con las propiedades definidas anteriormente. X debe ser la inversa de A ó A^{-1}. Realmente no es necesario llevar el signo de igualdad durante esta conversión. Por ejemplo:

Dada la matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Hallar A^{-1}:

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

En primer lugar se multiplica o se divide para obtener un(1) en la esquina superior izquierda de A (posición 11) en este caso, se divide el primer renglón entre 2 de ambas matrices - (A, I).

$$\begin{vmatrix} 2/2 & 4/2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Y queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Luego se multiplica y se suma para obtener ceros en -- los demás renglones de la primera columna. En este caso se multiplica el primer renglón por -4 y se suma el resultado al segundo renglón, en ambas matrices:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix} \times -4 \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \end{vmatrix} \times -4 =$$
$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \end{vmatrix}$$

este resultado se suma al segundo renglón:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4+(-4) & 6+(-8) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0+(-2) & 1+0 \end{vmatrix}$$

Y queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ahora se multiplica para obtener 1 en la segunda columna del segundo renglón esto es en la posición (2 2), se multi-- plica por -1/2 el segundo renglón:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \end{vmatrix} \times -1/2 \text{ ó por } -.5 \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \end{vmatrix} \times -1/2 \text{ ó por } -.5$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

y la matriz queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Finalmente se multiplica el segundo renglón por -2 y se suma el resultado al primer renglón.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \times -2 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \end{vmatrix} \times -2 =$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \end{vmatrix}$$

sumar el resultado al primer renglón:

$$\begin{vmatrix} 1+0 & 2+(-2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2+(-4/2) & 0+1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

y queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Pero, ahora falta comprobar si A^{-1} obtenida es realmente el recíproco de A. Para comprobar esto, se debe multiplicar - $A \times A^{-1}$ y el resultado debe ser I.

$$AA^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} = I$$

$$\begin{vmatrix} (2x-3/2)+(4x1) & (2x1)+(4x-1/2) \\ -3 \quad + \quad 4 & 2 \quad + \quad (-2) \\ (x-3/2) \; +(6x1) & (4x1)+(6x-1/2) \\ -6 \quad + \quad 6 & 4 \quad + \quad (-3) \end{vmatrix} = AA^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

Por lo tanto la inversa de A = $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

Es $A^{-1} = \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$

No todas las matrices tienen inversa. Una matriz que - no tiene inversa se denomina matriz singular. En relación con determinantes, se agrega que una matriz singular tiene un determinante de valor cero. Esta situación equivale a encontrar la intersección de dos líneas paralelas. Se dice que una matriz no es singular si tiene inversa. Si para una matriz existe inversa ésta es única. No es posible preveer siempre si una matriz es singular; sin embargo, no será posible continuar los cálculos empleados para obtener su inversa. (23)

Con lo que se ha visto hasta ahora, se sabe que si se - tiene una matriz cuadrada A de orden n y rango n es posible (mediante una serie de transformaciones elementales) transformarla- primero un una matriz escalonada y luego en una matriz identidad I_n.

Por lo tanto si A es una matriz de orden mxn (cuadrada) existe su inversa A^{-1} sí y sólo sí el número de renglones (m) es igual al número de columnas (n) y a su vez estos son igual al -- rango de la matriz A. (27)

$$m = n = R(A).$$

UTILIDAD DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ.

La inversa puede utilizarse para resolver ecuaciones - lineales simultáneas, que a su vez estas ecuaciones lineales se- usan para resolver problemas de programación lineal, de ahí la -

IMPORTANCIA DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ.

Considérese el siguiente problema:

$$2X + 4Y = 8$$
$$4X + 6Y = 10$$

Este problema se puede describir en forma matricial:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$ matriz de coeficientes

$$x = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$$ vector columna de variables

$$b = \begin{vmatrix} 8 \\ 10 \end{vmatrix}$$ vector columna de constantes

Si ambos lados de la ecuación $Ax=b$ se multiplican por la inversa A^{-1}

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Como $A^{-1}A = I$ entonces queda:

$$Ix = A^{-1}b \quad ó \quad x = A^{-1}b$$

Hay que recordar que I es igual a 1 (uno) es por eso que en la segunda expresión se suprime I.

Esta es la solución del vector de variables X. Por tanto,

$$Ax = b$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Si $X = A^{-1}b$; en primer lugar es necesario encontrar A^{-1} para poder dar solución a X y Y, para encontrar A^{-1} se multiplica $AI = A^{-1}$. Esto es:

$$\overset{A}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} \overset{I}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = A^{-1}$$

Como anteriormente ya se había obtenido el valor de A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Ahora simplemente se sustituyen los valores:

$$X = A^{-1}b$$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 10 \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Se efectúa la multiplicación de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -3/2(8) + & 1(10) \\ 1(8) & +(-1/2(10) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -12 + 10 \\ 8 - 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = -2$$
$$Y = 3$$

Se verifican estos valores en el sistema de ecuaciones:

$$2X + 4Y = 8$$
$$4X + 6Y = 10$$

$$2(-2) + 4(3) = 8$$
$$4(-2) + 6(3) = 10$$

$$-4 + 12 = 8$$
$$-8 + 18 = 10$$

En la solución de ecuaciones con matrices debe tenerse cuidado en la colocación de las matrices para efectuar la multiplicación, pues se debe recordar que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

En el mismo ejemplo puede efectuarse la analogía algebraica. Resolver algebraicamente:

$$2X + 4Y = 8$$
$$4X + 6Y = 10$$

Dividir la primera ecuación por 2:

$$2/2X + 4/2Y = 8/2$$
$$X + 2Y = 4$$

Queda:

$$X + 2Y = 4$$
$$4X + 6Y = 10$$

Multiplicar por -4 la primera ecuación y sumarla a la segunda:

$$X(-4) + 2Y(-4) = 4(-4)$$

$$\begin{array}{rrcr} & -4X + -8Y & = & -16 \\ + & 4X + \ 6Y & = & 10 \\ \hline & 0X + -2Y & = & -6 \end{array}$$

quedando:

$$X + 2Y = 4$$
$$0X - 2Y = -6$$

Multiplicar la segunda ecuación por -1/2

$$0X(-1/2) - 2Y(-1/2) = -6(-1/2)$$
$$0X + 1Y = 3$$

queda:

$$X + 2Y = 4$$
$$0X + 1Y = 3$$

Multiplicar por -2 la segunda ecuación y sumarla a la primera:

$$0X(-2) + 1Y(-2) = 3(-2)$$

$$\begin{array}{rrcr} & -2X - 2Y & = & -6 \\ + & X + 2Y & = & 4 \\ \hline & X + 0Y & = & -2 \end{array}$$

Y finalmente queda:

$$\begin{array}{l} X + 0Y = -2 \\ 0X + Y = 3 \end{array} \quad \text{por lo tanto} \quad \begin{array}{l} X = -2 \\ Y = 3 \end{array}$$

Estos son los mismos pasos utilizados anteriormente en la inversión de la matriz 2x2: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

El álgebra matricial así expuesta, está de una manera condensada para manejar mejor los datos y para proveer una solución. El empleo de matrices conduce por sí mismo a las técnicas de computador y permite una notación más condensada de las matemáticas. (23)

EJEMPLO DE MAXIMIZACION.

MAXIMIZACION DE LAS UTILIDADES EN UNA EMPRESA.

Para ilustrar gráficamente un problema de maximiza--- ción de utilidades de una empresa agropecuaria se puede partir- de la suposición de que la empresa está en proyecto o bien de - una empresa ya establecida que desea planear su máxima utilidad para el próximo año o ciclo productivo.

Lo que se busca es la máxima contribución en utilida- des que nos pueda dar un producto "X" o un producto "Y" o la -- combinación de ambos.

Con base a lo anterior se parte de la idea de estable- cer una empresa porcina y se desea saber cuál sería la máxima - utilidad si se producen lechones al destete o cerdos cebados o- ambos y además se considera que esta empresa tiene como recur-- sos limitados, el capital que se invierte o se invertirá, el nú mero de vientres, la mano de obra empleada en el manejo de los- animales y el alimento, mismo que se ha clasificado según las - etapas correspondientes a su edad y consumo de los animales, pa ra el caso de los lechones destetados las etapas serían de pre- iniciación e iniciación y para el caso de los cerdos cebados la de engorda. Además se debe de tomar en cuenta la contribución o utilidad que nos daría una unidad de producto (un lechón deste- tado y un cerdo cebado).

En resumen para establecer esta empresa porcina, se - cuenta con los siguientes elementos:

Se sabe que la utilidad es igual al precio de venta - menos el costo de producción, por lo tanto, para este ejemplo - el costo de un lechón destetado es de $ 400.00 y el costo de un cerdo cebado es de $ 500.00*

Para representar matemáticamente el problema se le -- llamará "X" a la producción de lechones al destete y "Y" a la -

---

* Este precio es arbitrario, el cual sólo es utilizado para fi- nes de cálculo, para un problema real el precio deberá tomarse- de los costos de la empresa.

de los cerdos cebados.

Con base a lo anterior la ecuación de la función objetivo sería:

$$400\ X + 500\ Y = Z$$

Donde Z es igual a la utilidad máxima buscada.

Por otro lado se tiene disponible un capital de ----- \$ 1'000,000.00 para invertirlo en la empresa. Si se producen lechones al destete el gasto será de \$ 1,500.00 por lechón, y si- se producen cerdos cebados el gasto sería de \$2,500.00.

La inecuación * que representa esta restricción será:

$$1{,}500\ X + 2{,}500\ Y \leq 1'000{,}000 \text{ ----- } (1)$$

Además la empresa cuenta con 80 vientres disponibles- y tomando como promedio que un vientre nos produce 8 lechones,- se calcula la "parte equivalente de vientre" que se requiere para producir un lechón, es decir:

1 vientre --- 8 lechones

X --- 1 lechón

$$X = \frac{1}{8} = 0.125$$

entonces se necesita 0.125 de vientre para producir 1 lechón -- destetado.

Para el caso de producir cerdos cebados, como la em-- presa adquirirá los cerdos ya destetados no es necesario hacer- el cálculo anterior y su valor se tomará como cero.

Al representar esta restricción matemáticamente

$$0.125\ X + \text{-----} \leq 80 \text{ ----- } (2)$$

Con respecto a la mano de obra sólo se tomará en cuenta, aquella que esté involucrada directamente con el manejo de- los animales, es decir, para lechones se calcula 3 personas y - para la engorda 2 personas, teniendo un total de 5 personas, -- las cuales trabajarán 8 hrs. diarias lo que indica que se tie-- nen 40 hrs. disponibles al día; ahora calculando que en 8 hrs.- se maneja a 150 lechones, se deberá conocer cuál es el tiempo-- empleado en la atención de 1 lechón de la siguiente manera.

---

* Ver glosario de términos.

8 hrs. --- 150 lechones

X --- 1 lechón

X = 0.05 décimas de hora.

o.05 décimas de hora será el tiempo que se requiere para producir un lechón.

De la misma forma se calcula el tiempo que se requiere para producir un cerdo cebado, con base en la suposición de que en 8 hrs. se maneja a 65 cerdos, por lo tanto 1 cerdo se maneja en "X" tiempo:

8 hrs. --- 65 cerdos

X --- 1 cerdo

X = 0.12 décimas de hora.

0.12 décimas de hora será el tiempo empleado para producir 1 -- cerdo cebado.

La desigualdad quedaría de la siguiente manera:

$$0.05\ X + 0.12\ Y \leq 40 \text{ horas. ----- } (3)$$

El último límite o restricción que se tiene es la cantidad de alimento que se deberá emplear para lo cual, se debe - de tener en cuenta el consumo por día de cada animal considerando la etapa en la que se encuentran.

Para los lechones: el consumo de alimento de preini-- ciación es de 0.450 kg/día que multiplicado por 38 días que dura el consumo de alimento en esta etapa, se obtiene 17.1 kgs. - de alimento de preiniciación que se necesita para producir 1 lechón.

La cantidad disponible que se tiene de alimento de -- preiniciación, se calculó con base a una producción posible de- 700 lechones: es decir, 700 lechones por 17.1 kg/día/lechón nos da 11,970 que redondeando para facilitar la graficación será de 12,000 kg. de alimento de preiniciación disponibles.

La restricción expresada matemáticamente es como sigue:

$$17.1\ X + \text{-----} \leq 11{,}970 \leq 12{,}000 \text{ ----- } (4)$$

Después a los lechones se les cambia el alimento de - preiniciación por el de iniciación, del cual se va estar consumiendo 1.250 kg/día durante 25 días que dura consumiendo el ani mal este tipo de alimento, al realizar la multiplicación (1.250 x 25) da por resultado 31.25 kg/día para producir un lechón.

Con la misma cantidad de producción posible de lechones (700) se hizo el cálculo para la cantidad disponible de alimento de iniciación

$$700 \times 31.25 = 21,875 \approx 22,000$$

redondeando 22,000 kg. de alimento de iniciación es la cantidad disponible.

Expresándola en forma de inecuación

$$31.25\ X + \text{----} \leq 22,000 \text{ -----} \quad (5)$$

Para los cerdos en engorda: hay una variación en el nombre del alimento y su respectivo consumo en días, por lo que se tuvo sacar un promedio del consumo diario de cada animal.

La clasificación en días y tipo de alimento es la siguiente:

1.700kg/día	alimento para desarrollo	x 35 días de consumo =	59.5
2.500kg/día	alimento para engorda	x 45 días de consumo =	112.5
3.300kg/día	alimento para finalización.	x 30 días de consumo =	99.0
7.500		110 días	271.0

$$\bar{X} = \frac{7.5}{3} = 2.5$$

Por lo tanto en 110 días se consume 271 kg. por animal pero tomando en cuenta el consumo promedio (2.5 kg./día) en los 110 días y realizando la multiplicación correspondiente (2.5x110) da un total de 275 kg/día que son los que se necesitan para producir 1 cerdo cebado. (1).

Ahora la cantidad disponible de alimento de engorda se calcula tomando en cuenta una producción posible de 500 cerdos por lo que:

$$275 \times 500 = 137,500 \approx 138,000 \text{ kg.}$$

redondeando los 138,000 kgs. será la cantidad de alimento disponible para engordar a los cerdos en el ciclo, por lo que la restricción quedaría:

$$\text{-----} + 275\ Y \leq 138,000 \text{ -----} \quad (6)$$

Estos requerimientos de capital, vientres, mano de obra y alimento se resumen en el siguiente cuadro:

CUADRO 1

RESTRICCIONES	PRODUCCION DE DE LECHONES (X)	PRODUCCION DE DE CERDOS CEBADOS (Y)	CANTIDAD DISPONIBLE.
FUNCION OBJETIVO	$ 400	$ 500	
CAPITAL	1,500	2,500	1'000,000
VIENTRES	0.125	0	80
HRS/M. de O./DIA	0.05	0.12	40
ALIMENTO PREINICIACION	17.1	0	12,000
ALIMENTO INICIACION	31.25	0	22,000
ALIMENTO ENGORDA	0	725	138,000

METODOLOGIA

(SOLUCION GRAFICA)

1°PASO.

Expresar el problema en forma matemática.

Estos requerimientos al expresarlos en forma matemática quedan del modo siguiente:

MAXIMIZAR:

400 X + 500 Y F. OBJETIVO

SUJETO A:

1,500 X + 2,500 Y ≤ 1'000,000 ----- (1)
0.125 X + ----- Y ≤ 80 ----- (2)
0.05 X + 0.12 Y ≤ 40 ----- (3)
17.1 X + ----- Y ≤ 12,000 ----- (4)
31.25 X + ----- Y ≤ 22,000 ----- (5)
-------- + 275 Y ≤ 138,000 ----- (6)

2°PASO.

Localizar las coordenadas de cada una de las restricciones para graficarlas:

Cualquiera de las desigualdades puede mostrarse gráficamente, localizando sus dos puntos terminales en el eje de "X" y en el eje de "Y" y uniéndolos con una línea recta. Primero se graficarán las desigualdades y aparte se graficará la función - objetivo.

Como la técnica para realizar las gráficas ya se describió en el capítulo de Fundamentos Matemáticos (pag. 21) . Aquí sólo se muestran las coordenadas correspondientes a cada - una de las restricciones, obteniendo las coordenadas de los puntos dando el valor de cero a la variable "X" y resolviendo para la variable "Y" y viceversa.

	Coordenadas	
Ecuación 1	(666,400)	Ver gráfica N°1.
Ecuación 2	(640,0)	Ver gráfica N°2.
Ecuación 3	(800,333)	Ver gráfica N°3.
Ecuación 4	(701,0)	Ver gráfica N°4.
Ecuación 5	(704,0)	Ver gráfica N°5.
Ecuación 6	(0,501)	Ver gráfica N°6.

Observando la gráfica N°7, se encuentran todos los -- puntos graficados, las flechas indican la dirección por donde - se debe localizar el área factible de solución, es decir, el -- signo de las restricciones (menor o igual) señala dentro de la- gráfica esta dirección. De esta manera, los puntos A, B, C, D y E determinan el área de solución factible, que contiene todas - las combinaciones posibles de los productos (Area sombreada).

3°PASO.

Graficación de la función objetivo

El tercer paso consiste en trazar la función objetivo (Z= 400 X + 500 Y), lo que puede lograrse haciendo que la contribución total sea igual a una cantidad mínima, que puede calcularse multiplicando las dos contribuciones, lo que da $200,000 cantidad que puede alcanzarse fácilmente. La función objetivo - puede escribirse de nuevo como: 400 X + 500 Y = 200,000.00

A fin de trazar esta ecuación (Gráfica N°8), hay que- localizar los dos puntos terminales y unirlos con una línea recta, de manera similar como se calcularon las restricciones. Los cálculos son los siguientes:

cuando $X = 0$ F. O. Original.

$$400\,(0) + 500\,Y = 200{,}000 \text{ ---- } (1)$$

$$500\,Y = 200{,}000$$

$$Y = \frac{200{,}000}{500}$$

$$Y = 400$$

Cuando $Y = 0$

$$400\,X + 500\,(0) = 200{,}000$$

$$400\,X = 200{,}000$$

$$X = \frac{200{,}000}{400}$$

$$X = 500$$

Las coordenadas son: (500,400) Ver gráfica N°8.

Se pueden dibujar líneas paralelas a la línea original de la función objetivo o utilizar cantidades mayores para la contribución, y calcular nuevos valores para los productos de la - siguiente manera:

$$400\,X + 500\,Y = 225{,}000 \text{ ----- } (2)$$

$X = 0$	$Y = 0$
$500\,Y = 225{,}000$	$400\,X = 225{,}000$
$Y = \frac{225{,}000}{500}$	$X = \frac{225{,}000}{400}$
$Y = 450$	$X = 562.5$

Efectivamente, puede dibujarse una serie de líneas de funciones objetivo. Esto se hace con la finalidad de llegar al- punto más lejano en el área de soluciones factibles o posibles. La línea recta, de la función objetivo, que cruza con el punto- más lejano (D) corresponde a la ecuación Z = 400 X + 500 Y = 265,000. Superponiendo ambas gráficas la N°7 y la N°8 se demuestra lo anterior. (Ver gráfica N°9). La línea de contribución -- que puede localizarse más lejos del origen (punto D), contiene- las combinaciones de los productos -lechones y cerdos cebados-, que producirán la mayor utilidad posible. Mientras haya por lo menos un punto en esa línea de contribución máxima, que quede-- dentro del área de soluciones factibles, ese punto representará la combinación más provechosa de los productos. Las líneas de - puntos rojos indican esa mejor combinación, es decir, las coordenadas del punto D son 640.15, es decir, 640 lechones al destete (X) y 15 cerdos cebados (Y).

Empleando esta solución gráfica se puede calcular la- utilidad máxima:

$$X = 640 \qquad Y = 15$$
$$Z = 400\ X + 500\ Y$$
$$Z = 400\ (640) + 500\ (15)$$
$$Z = 256{,}000 + 7{,}500$$
$$Z = \$\ 263{,}500$$

Y respectivamente se comprueban las restricciones -- respetando su signo, es decir, el valor calculado debe ser me-- nor o igual al total disponible, de la siguiente manera:

Comprobación de las restricciones:

$$X = 640 \qquad Y = 15$$
$$1{,}500\ (640) + 2{,}500\ (15) \leq 1'000{,}000 \text{ ----- } (1)$$
$$960{,}000 + 37{,}500 \leq 1'000{,}000$$
$$\underline{\underline{997{,}500}} \leq \underline{\underline{1'000{,}000}}$$

$$0.125\ (640) \text{ ------ } \leq 80 \text{ -------- } (2)$$
$$\underline{\underline{80}} = \underline{\underline{80}}$$

$$0.05\ (640) + 0.12\ (15) \leq 40 \text{ ------ } (3)$$
$$32 + 1.8 \leq 40$$
$$\underline{\underline{33.8}} \leq \underline{\underline{40}}$$

$$17.1\ (640) \leq 12{,}000 \quad \text{-----}\ (4)$$
$$\underline{\underline{10{,}944}} \leq \underline{\underline{12{,}000}}$$

$$31.25\ (640) \leq 22{,}000 \quad \text{-----}\ (5)$$
$$\underline{\underline{20{,}000}} \leq \underline{\underline{22{,}000}}$$

$$275\ (15) \leq 138{,}000 \quad \text{-----}\ (6)$$
$$\underline{\underline{4{,}875}} \leq \underline{\underline{138{,}000}}$$

4°PASO.

Solución simultánea a las ecuaciones.

El paso final consiste en la solución simultánea de - las ecuaciones de las dos líneas que se cruzan en el punto D en la gráfica N°7. Las dos ecuaciones en este caso 1 y 2 son comunes al punto D. Como se hizo notar en el paso 3, los valores numéricos de X y de Y de ambos productos se tomaron de la gráfica N°9. Sin embargo, en la mayoría de los casos es difícil leer -- una respuesta precisa (en la gráfica) para los problemas del -- mundo real, pero de cualquier forma la gráfica nos facilita conocer cuáles ecuaciones se deben de escoger para resolverlas simultáneamente, como en este problema que son la ecuación 1 y la ecuación 2.

$$1{,}500\ X + 2{,}500\ Y \leq 1'000{,}000 \quad \text{-----}\ (1)$$
$$0.125\ X + \text{-----} \leq 80 \quad \text{-----}\ (2)$$

Resolviendo estas ecuaciones por cualquiera de los - métodos descritos en las páginas del capítulo de fundamen-- tos matemáticos, se observa que la solución al problema es:

$$X = 640\ ;\ Y = 16$$

Ahora si se usa la ecuación de la contribución total (F.O.) Z = 400 X + 500 Y, la contribución total real es de:

$$400\ (640) + 500\ (16) =$$
$$256{,}000 + 8{,}000 = \$\ 264{,}000$$

Que es aproximadamente igual al valor obtenido con la solución gráfica.

Y también al comprobar esta solución (X= 640; Y= 16) en las restricciones se observa que sí satisfacen el objetivo - planteado:

$$1{,}500\ (640) + 2{,}500\ (16) \leq 1'000{,}000 \ \text{----}(1)$$
$$960{,}000 + 40{,}000 \leq 1'000{,}000$$
$$\underline{\underline{1'000{,}000}} = \underline{\underline{1'000{,}000}}$$

$$0.125\ (640) \leq 80 \ \text{-----}\ (2)$$
$$\underline{\underline{80}} = \underline{\underline{80}}$$

$$0.05\ (640) + 0.12\ (16) \leq 40 \ \text{-----}\ (3)$$
$$32 + 1.92 \leq 40$$
$$\underline{\underline{33.92}} \leq \underline{\underline{40}}$$

$$17.1\ (640) \leq 12{,}000 \ \text{-----}\ (4)$$
$$\underline{\underline{10{,}944}} \leq \underline{\underline{12{,}000}}$$

$$31.25\ (640) \leq 22{,}000 \ \text{-----}\ (5)$$
$$\underline{\underline{20{,}000}} \leq \underline{\underline{22{,}000}}$$

$$275\ (16) \leq 138{,}000 \ \text{-----}\ (6)$$
$$\underline{\underline{4{,}400}} \leq \underline{\underline{138{,}000}}$$

Otro tratamiento del enfoque gráfico de la programa-- ción lineal, consiste en probar las esquinas, lo que significa- probar los cinco puntos (A, B, C, D y E), de la figura N° 7 que limitan el área sombreada, para determinar cuál de ellos produce la mayor contribución. Básicamente, ésta es la comparación - de las alturas de las líneas de contribución en las esquinas -- del problema. Una expresión gráfica de las contribuciones de - los puntos A a E en la figura N°9, indicaría que el punto D tiene la mayor contribución (Z), basandose en los datos siguientes:

PUNTO A (0,0) 400 (0) + 500 (0) = \$ 0

PUNTO B (0,333) 400 (0) + 500 (333) = \$ 166,500.00

PUNTO C (373,175) 400 (373) + 500 (175) =

149,200 + 87,500 = \$ 236,700.00

PUNTO D (640,15) 400 (640) + 500 (15) =

256,000 + 7,500 = \$ 263,500.00

PUNTO E (640,0) 400 (640) + 500 (0) = \$ 256,000.00

Este enfoque puede reemplazar los pasos 3 y 4 del método gráfico tradicional. Sin embargo, habrá que usar más ecuaciones simultáneas a fin de determinar las cantidades de cada - producto.

Desde este punto de vista, el administrador o el productor de la empresa, puede analizar las utilidades y decidir - cuál de los productos (lechones al destete, cerdos cebados o -- una combinación de ambos) deberá producir según sus conveniencias. Por ejemplo, la ecuación del punto B expresa:

"Si no se producen lechones al destete, el beneficio- que dan los cerdos cebados es de \$ 166,500.00";en cambio en el- punto E se observa que "Si sólo se producen lechones al destete aumentaría la utilidad a \$ 256,000.00"; o en cambio, dependiendo de las instalaciones o de otros factores limitativos que se- tengan, se puede elegir en producir lechones y cerdos cerdos cebados (ciclo completo) y obtener una ganancia mayor, como es el caso del punto D, el cual indica que una combinación de los productos (lechones al destete y engorda) aumentaría el provecho - en \$ 263,500.00 que sería la máxima utilidad buscada.

De ahí que está en manos del administrador, del productor o del M.V.Z., considerar su infraestructura y disponibilidad de otros recursos limitantes, el de decidir que producto le conviene más producir o inclinarse por una combinación que - le dará una mayor utilidad o contribución. */

---

*/ Este ejemplo se desarrollo con la colaboración del M.V.Z. Alberto Reyes Gómez Llata.- Departamento de Economía y Administración. F.M.V.Z. U.N.A.M.

METODO SIMPLEX
(MAXIMIZACION)

El método simplex de programación lineal utiliza conceptos básicos del álgebra matricial para determinar la intersección de dos o más líneas o planos. Comienza con alguna solución factible, una que satisface todas las restricciones, y sucesivamente obtiene soluciones en las intersecciones que ofrecen mejores valores de la función objetivo. Finalmente éste método de solución proporciona un indicador que determina el punto en el cual se logra una solución óptima.

Para ilustrar el método, se usará el ejemplo precedente (solución gráfica) de programación lineal. Expresado el problema algebraicamente, es el siguiente:

Maximizar $Z = 400X + 500Y$

Sujeto a:

$$1{,}500X + 2{,}500Y \leq 1'000{,}000 \quad \text{-----} \quad (1)$$
$$0.125X + \text{------} \leq 80 \quad \text{-----} \quad (2)$$
$$0.05X + 0.12Y \leq 40 \quad \text{-----} \quad (3)$$
$$17.1X + \text{------} \leq 12{,}000 \quad \text{-----} \quad (4)$$
$$31.25X + \text{------} \leq 22{,}000 \quad \text{-----} \quad (5)$$
$$\text{------} + 275Y \leq 138{,}000 \quad \text{-----} \quad (6)$$

Para fin de usar el método simplex, es necesario convertir primero las desigualdades en ecuaciones, esto se efectúa agrgando a cada restricción un término adicional denominado: VARIABLE DE HOLGURA. De una manera característica la variable de holgura se representa por el término U_i ó S_i, el subíndice se refiere a la i-ésima restricción, ya que para cada restricción se utiliza una variable de holgura diferente.

En la primera desigualdad empleada en el problema de ejemplo

$$1{,}500X + 2{,}500Y \leq 1'000{,}000$$

Existe un valor no negativo U_i el cual si se añade al lado izquierdo de la desigualdad convierte la expresión en una igualdad

Por ejemplo: sea $X = 640;\ Y = 15$

$$1{,}500X + 2{,}500Y \leq 1'000{,}000$$

$$1{,}500(640) + 2{,}500(15) \leq 1'000{,}000$$

$$960{,}000 + 37{,}500 \leq 1'000{,}000$$

$$997{,}500 \leq 1'000{,}000$$

$997{,}500 \leq 1'000{,}000$ Aún es verdadera

Al añadir U_i al lado izquierdo y convertir la expresión en una igualdad.

$$997{,}500 + U_i = 1'000{,}000$$

Por lo tanto en este caso

$$U_i = 1'000{,}000 - 997{,}500$$

$$U_i = 2{,}500$$

Por consiguiente la variable de holgura representa el valor no negativo requerido para hacer que exista la igualdad. En esta forma las seis restricciones representadas como desigualdades se convierten en igualdades

$1{,}500X + 2{,}500Y + U_1 = 1{,}000{,}000$ ----- (1)

$0.125X +$ ------ $+ U_2 = 80$ ----- (2)

$0.05\ X + 0.12\ Y + U_3 = 40$ ----- (3)

$17.1\ X +$ ------ $+ U_4 = 12{,}000$ ----- (4)

$31.25X +$ ------ $+ U_5 = 22{,}000$ ----- (5)

------ $275\ Y + U_6 = 138{,}000$ ----- (6)

La variable de holgura es la cantidad de capital, vientres, mano de obra y alimento que no se usa, es decir:

U_1 = Capital no usado en la inversión

U_2 = Vientres no usados

U_3 = Horas de mano de obra no usadas

U_4 = Alimento de preiniciación no usado

U_5 = Alimento de iniciación no usado

U_6 = Alimento de engorda no usado

Para presentar los datos se utiliza una matriz, dentro de la matriz se asigna una columna a cada variable real (las X) y una a cada variable de holgura (las U). Para cada restricción se asigna un renglón, utilizando las seis ecuaciones del problema que fueron obtenidas introduciendo variables de holgura.

Se obtiene la matriz:

MATRIZ 1.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1500	2500	1	0	0	0	0	0	1'000,000
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
0.05	0.12	0	0	1	0	0	0	40
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
0	275	0	0	0	0	0	1	138,000

Como se puede observar, los valores insertados proce-- den de las seis ecuaciones de restricción (1) a (6). La separa--- ción vertical entre la última columna de variables (U_6) y la co-- lumna de constantes (b) puede considerarse como representación -- del signo de igualdad. Por consiguiente, dentro de la matriz cual quier renglón puede leerse como una ecuación. Por ejemplo, el ren glón 3 se puede leer

$$0.05X + 0.12Y + U_3 = 40$$

Cuando hay n variables en este caso ocho (X, Y, U_1, U_2,-- U_3, U_4, U_5 y U_6) y m ecuaciones en este caso seis, es necesario-- suponer que n - m variables son iguales a cero con el objeto de - lograr una solución (8 - 6 = 2). Para un punto inicial que satis- faga todas las seis restricciones, suponer X = Y = 0. Esta es la- primera solución factible (dando el valor de cero a 2 variables). En este caso, según la matriz 1., las ecuaciones representadas -- por renglones quedan reducidas a

$X = Y = 0$ primera solución factible

$$1U_1 = 1'000,000$$
$$1U_2 = 80$$
$$1U_3 = 40$$
$$1U_4 = 12,000$$
$$1U_5 = 22,000$$
$$1U_6 = 138,000$$

Se observa que estas seis variables forman una matriz identidad. Las variables representadas por las columnas que componen esta matriz identidad se dice que estan en la solución mientras que las demás son cero.

Las variables en la solución también se denominan frecuentemente variables básicas mientras que aquéllas que no están en la solución, o sea, las que son iguales a cero, se denominan variables no básicas.

En el procedimiento simplex en seguida se despeja otra intersección de las líneas de restricción, que proporcione un mejor valor de la función objetivo, en este caso se incrementaría la función objetivo. En términos de algebra matricial, esto se efectúa suponiendo que una de las variables básicas (diferentes de cero) es cero y resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones para la intersección que representa ese sistema de ecuaciones. Para hacer esto en forma sistemática que siempre mejore el valor de la función objetivo se requiere agregar un renglón adicional a la matriz.1. Este renglón está formado simplemente por los coeficientes de la misma función objetivo, como se indica en la matriz 1.1.

MATRIZ 1.1.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b	
1500	2500	1	0	0	0	0	0	1,000,000	
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80	
0.05	0.12	0	0	1	0	0	0	40	
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000	
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000	
0	275	0	0	0	0	0	1	138,000	
400	500	0	0	0	0	0	0	0	= Z

Si la función objetivo se escribe de manera que incluya las ocho variables, se obtiene:

F.O. $Z = 400X + 500Y + 0U_1 + 0U_2 + 0U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 0$

En este ejemplo los coeficientes del renglón Z de la matriz 1.1. indican que un incremento de 1 unidad en Y aumenta Z en 1.5 unidades. Análogamente, incrementando U_1, U_2, etc. no se aumenta el valor de Z ya que éstas variables no tienen valor en la función objetivo. Por consiguiente, parece más conveniente aumentar el valor de Y, esto es, suponer $Y \neq 0$. La siguiente decisión- consiste en determinar cuál de las variables presentes ahora en - la solución (variables básicas), debe suponerse igual a cero para permitir que Y tenga un valor diferente de cero.

Este paso requiere comprender exáctamente lo que representan las variables de holgura y las constantes (columna b). La columna b se obtuvo a partir de los límites de capacidad de cada -- restricción. Por lo tanto representa los recursos totales disponibles para asignar. Esta capacidad no puede alcanzar un valor negativo; o sea, interpretada físicamente, no se pueden asignar más - recursos (capacidad) de los que estan disponibles. Las variables- de holgura representan la diferencia entre lo que ha sido asignado y lo que queda por asignar, ésta es la razón del término variable de holgura. Cuando una variable de holgura es cero, todos los recursos originalmente definidos por esa restricción han sido asignados. Esto se interpreta gráficamente diciendo que la solución está en algún punto sobre la línea límite.

Puesto que Y ha sido seleccionada como variable que debe- aumentarse, el problema es ¿Cuánto aumentarla?. Se puede aumentar hasta exceder la capacidad de producción de una restricción, es - decir, eliminando toda la holgura de una restricción. Esto se obtiene algebraicamente a partir de la ecuación del renglón 1 de la matriz 1.1.

$$1{,}500X + 2{,}500Y + U_1 = 1{,}000{,}000$$

Se supone $X = 0$

Si se disminuye U_1 hasta su valor mínimo (cero) ¿Qué tan grande puede ser Y?

$$1{,}500(0) + 2{,}500Y + 0 = 1{,}000{,}000 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$Y = \frac{1{,}000{,}000}{2{,}500}$$

$Y = 400$ Máximo para el renglón 1.

Similarmente se calcula para las demás ecuaciones-- o renglones de la matriz 1.1.

Si $X, U_2 = 0$

$$0.125(0) + \text{----} + 0 = 80 \quad \text{-----} \quad (2)$$

$$Y = \frac{80}{0} = \text{infinito } (\infty)$$

Sí X, $U_3 = 0$ ----- (3)

$0.05(0) + 0.12Y + 0 = 40$

$Y = \frac{40}{0.12}$

$Y = \underline{333}$ MAXIMO VALOR LIMITANTE

Sí X, $U_4 = 0$ ----- (4)

Y = infinito

Sí X, $U_5 = 0$ ----- (5)

Y = infinito

Sí X, $U_6 = 0$ ----- (6)

$275Y + 0 = 138,000$

$Y = \frac{138,000}{275}$

$Y = 501$

Después de lograr el máximo de los renglones (Y) no se -- puede aumentar adicionalmente sin convertirse en no factible. Por tantó el máximo obtenido en la ecuación (3) define el valor limitante de (Y), en este caso según la ecuación (3) Y = 333 es el límite. En este punto U_3 es ahora cero (0) debido a que toda la holgura se ha eliminado.

Una vez obtenido el límite del valor de (Y), se sabe que-la columna Y y el renglón 3 son la clave (pivote) para convertir-la matriz y obtener un nuevo valor en Z. Así el computo puede hacerse efectuando operaciones con los renglones de la matriz 1.1., para convertir la columna Y en miembro de la matriz identidad con un uno (1) en el renglón representado por la restricción limitante (3).

Para obtener un uno (1) en el renglón clave (la restricción límite) y la columna clave (la nueva variable diferente de - cero, Y) o comunmente llamado pivote. Se comienza dividiendo el - renglón 3 de la matriz 1.1. entre 0.12 para obtener uno (1)

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
$\frac{0.05}{0.12}$	$\frac{0.12}{0.12}$	$\frac{0}{0.12}$	$\frac{0}{0.12}$	$\frac{1}{0.12}$	$\frac{0}{0.12}$	$\frac{0}{0.12}$	$\frac{0}{0.12}$	$\frac{40}{0.12}$

Resultado:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2

La matriz se convierte en:

MATRIZ 1.2.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1500	2500	1	0	0	0	0	0	1'000,000
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
0	275	0	0	0	0	0	1	138,000
400	500	0	0	0	0	0	0	0

Se efectúan operaciones con los demás renglones para obtener ceros en todos los otros espacios de la columna clave (Y). Recordar que ahora el pivote es la columna Y; renglón 3, es decir,- todas las operaciones o transformaciones elementales van a girar- en base al renglón 3.

Multiplicar el renglón 3 de la matriz 1.2. por -2,500

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333
-2500	-2500			-2500				-2500
-1040	-2500	0	0	-20825	0	0	0	-833000

Sumar el resultado al renglón (1) de la matriz 1.2.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1500	2500	1	0	0	0	0	0	1000000
1040	-2500	0	0	-20825	0	0	0	-833000
460	0	1	0	-20825	0	0	0	-167000

La matriz queda transformada así:

MATRIZ 1.3.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
460	0	1	0	-20827	0	0	0	167000
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22000
0	275	0	0	0	0	0	1	138000
400	500	0	0	0	0	0	0	0

Multiplicar el renglón (3) por -275 y sumar el resultado al renglón (6). De la matriz 1.3:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
-275	-275			-275				-275
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	-91630

Sumar el resultado al renglón (6)

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	275	0	0	0	0	0	1	138000
-114.4	-275	0	0	-2290.7	0	0	0	-91630
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46370

La matriz queda convertida en:

MATRIZ 1.4.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
460	0	1	0	-20825	0	0	0	167000
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22000
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46370
400	500	0	0	0	0	0	0	0

Se multiplica el renglón (3) de la matriz 1.4. por -500

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
-500	-500			-500				-500
-208	-500	0	0	-4165	0	0	0	-166600

Sumar el resultado al renglón Z

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
400	500	0	0	0	0	0	0	0
-208	-500	0	0	-4165	0	0	0	-166600
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166600

La matriz queda convertida en:

MATRIZ 1.5.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
460	0	1	0	-20825	0	0	0	167000
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22000
-114.4	0	0	0	-2290..7	0	0	1	46370
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166600

Se puede mostrar fácilmente que el procedimiento anterior da una respuesta igual a la obtenida mediante una solución básica de la matriz.

Si $X = U_3 = 0$, entonces:

$$U_1 + 0U_2 + 2{,}500Y + 0U_4 + 0u_5 + 0U_6 = 1'000{,}000$$
$$0U_1 + U_2 + 0\,Y + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 80$$
$$0U_1 + 0U_2 + 0.12Y + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 40$$
$$0U_1 + 0U_2 + 0\,Y + U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 12{,}000$$
$$0U_1 + 0U_2 + 0\,Y + 0U_4 + U_5 + 0U_6 = 22{,}000$$
$$0U_1 + 0U_2 + 275\,Y + 0U_4 + 0U_5 + U_6 = 138{,}000$$

Ordenando para la inversión de la matriz, esto se con-- vierte en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 275 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se divide el renglón 3 entre 0.12 y queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar el renglón 3 por -2,500 y sumar el resultado al renglón 1.La matriz resultante es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 275 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20825 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar el renglón 3 por -275 y sumar el resultado al renglón (6).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -20875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2290.7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Despejando los valores de
U_1, U_2, Y, U_4, U_5 y U_6:

$$X = A^{-1}b$$

$$\overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -20875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2290.7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{b}{\begin{bmatrix} 1{,}000{,}000 \\ 80 \\ 40 \\ 12{,}000 \\ 22{,}000 \\ 138{,}000 \end{bmatrix}}$$

Efectuando la multiplicación matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1(1000000) + 0 + -20875(40) + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 1(80) + 0 + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 8.33(40) + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + 1(12000) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + 1(22000) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + -2290.7(40) + 0 + 0 + 1(138000) \end{bmatrix}$$

Resultado:

$$\begin{array}{rcrcl}
1000000 + (-835000) & = & 165{,}000 & = & U_1 \\
80 & = & 80 & = & U_2 \\
333.2 & = & 333.2 & = & Y \\
12{,}000 & = & 12{,}000 & = & U_4 \\
22{,}000 & = & 22{,}000 & = & U_5 \\
-91{,}630 + 138{,}000 & = & 46{,}370 & = & U_6
\end{array}$$

Se observa que la inversa A^{-1} está formada por las mismas columnas U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 y U_6 (la matriz identidad original) de la matriz 1.5.

Ahora se tienen en cuenta el último renglón, el renglón Z y los valores de la parte inferior de la matriz 1.5. Los coeficientes representan las pendientes de la función objetivo con respecto a las variables. Bajo X, en la matriz 1.5, está el valor de 192 que indica una pendiente de 192; esto es, un incremento de 1 unidad en X aumenta la función Z (objetivo) en 192 unidades. El coeficiente de la parte inferior de U_3, en la misma matriz, es -4,165, indicando que un aumento de 1 unidad en esa variable hace disminuir a Z en 4,165 unidades. Esto es lógico, ya que la holgura en la restricción 3, representada por U_3, sólo puede obtenerse disminuyendo X y por consiguiente la elaboración de un producto aprobechable. Los demás coeficientes son cero, lo que indica que no puede obtenerse ganancia aumentando estas variables, o sea, que su valor límite ha sido alcanzado. Por tanto conviene aumentar X ya que ésta es la única variable que puede alcanzar un aumento en Z. De esta manera la columna X se convierte en la columna clave de la siguiente iteración. El -166,600 de la columna b representa el valor de Z de la solución presente. Realmente en este caso el signo debe de invertirse para problemas de maximización. Esto puede verificarse sustituyendo los valores de la solución presente en la función objetivo.

$$Z = 400\ X + 500\ Y + 0U_1 + 0U_2 + 0U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6$$

$$Z = 400(0) + 500(333.2)$$

$$Z = 166{,}600$$

Esto significa realmente que Z tiene un costo negativo- de 166,600 unidades y por consiguiente una ganancia de 166,600.00

Ya se ha determinado que aumentando X, se puede aumen-- tar Z puesto que solamente X tiene una pendiente positiva, como - se indica en la línea inferior de la matriz 1.5. La columna X es- entonces la columna clave. En seguida se determina cuánto puede - incrementarse X antes de alcanzar una restricción.

Leyendo los renglones como ecuaciones, de la matriz 1.5 y haciendo tender a cero las demás variables, se obtiene:

$$460X + 0Y + 1U_1 + 0U_2 + -20825U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 165{,}000 \quad --- (1)$$

$$0.125X + 0Y + 0U_1 + 1U_2 + 0U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 80 \quad --- (2)$$

$$0.416X + 0Y + 0U_1 + 0U_2 + 8.3U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 333.2 \quad --- (3)$$

$$17.1X + 0Y + 0U_1 + 0U_2 + 0U_3 + 1U_4 + 0U_5 + 0U_6 = 12{,}000 \quad --- (4)$$

$$31.25X + 0Y + 0U_1 + 0U_2 + 0U_3 + 0U_4 + 1U_5 + 0U_6 = 22{,}000 \quad --- (5)$$

$$-114.4X + 0Y + 0U_1 + 0U_2 + -2290.7U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 1U_6 = 46{,}370 \quad --- (6)$$

Por lo tanto los límites presentes de X de cada restric ción son:

$$X = \frac{167{,}000}{460} = 363.04 \quad ---- (1)$$

$$X = \frac{80}{0.125} = 640 \quad ---- (2)$$

$$X = \frac{333.2}{0.416} = 800.96 \quad ---- (3)$$

$$X = \frac{12{,}000}{17.1} = 701.75 \quad ---- (4)$$

$$X = \frac{22{,}000}{31.25} = 704 \quad ---- (5)$$

La ecuación (6) no se calcula puesto que la resultante es con signo negativo.

De estas el renglón 1 es el que tiene el menor valor - permisible de X = 363.04. Por consiguiente puede incrementarse X hasta un valor máximo de 363.04. El renglón (1) y la columna (X) se convierten en el nuevo pivote. Empleando el mismo procedimiento de la matriz 1.5 se comienza dividiendo el renglón 1 por el coeficiente de X en el renglón clave, en este caso 460, para obtener un 1 en la posición (a_{11}).

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
$\frac{460}{460}$	$\frac{0}{460}$	$\frac{1^1}{460}$	$\frac{0^2}{460}$	$\frac{-20825}{460}$	$\frac{0^4}{460}$	$\frac{0^5}{460}$	$\frac{0^6}{460}$	$\frac{167000}{460}$

Resultado:

1	0	.002	0	-45.27	0	0	0	363.04

Quedando la matriz:

MATRIZ 1.6

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46,370
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600

En seguida se multiplica el renglón (1), el renglón clave, de la matriz 1.6 por -0.125:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
				x -0.125				
-.125	0	0	0	5.65	0	0	0	-45.38

El resultado se suma al renglón (2) de la matriz 1.6 -- para obtener un cero en la siguiente posición de la columna clave (X).

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0.125	0	0	1	0	0	0	0	80
-0.125	0	0	0	5.65	0	0	0	-45.38
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62

La matriz se transforma en :

MATRIZ 1.7

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62
0.416	1	0	0	8.33	0	0	0	333.2
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46,370
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600

Multiplicar el renglón (1) de la matriz 1.7, por -0.416

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
				x -0.416				
-.416	0	0	0	18.8	0	0	0	-151.02

Sumar el resultado al renglón (3) de la matriz 1.7:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0.416	1	0	0	8.3	0	0	0	333.2
-0.416	0	0	0	18.8	0	0	0	-151.0
0	1	0	0	27.1	0	0	0	182.18

Y se obtiene la matriz :

MATRIZ 1.8

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62
0	1	0	0	27.1	0	0	0	182.18
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46,370
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600

Multiplicar el renglón (1), de la matriz 1.8 por -17.1

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
				X -17.1				
-17.1	0	0	0	774.1	0	0	0	-6207.9

Sumar el resultado al renglón (4) de la matriz 1.8:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
17.1	0	0	0	0	1	0	0	12,000
-17.1	0	0	0	774.1	0	0	0	-6,207.9
0	0	0	0	774.1	1	0	0	5,792.0

Se obtiene la matriz :

MATRIZ 1.9

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	0	0	0	774.11	1	0	0	5792.01
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46,370
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600

Multiplicar el renglón (1), de la matriz 1.9, por -31.25

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
				x -31.25				
-31.25	0	0	0	1414.6	0	0	0	-11,345

Sumar el resultado al renglón (5) de la misma matriz.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
31.25	0	0	0	0	0	1	0	22,000
-31.25	0	0	0	1414.6	0	0	0	-11,345
0	0	0	0	1416.6	0	1	0	10,655

Y queda la matriz:

MATRIZ 1.10

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	0	0	0	774.11	1	0	0	5792.01
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46,370
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600

Multiplicar el renglón (1),de la matriz 1.10, por 114.4

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
				x 114.4				
114.4	0	0.2	0	-5178.8	0	0	0	41531.7

Sumar el resultado al renglón (6) de la misma matriz:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
-114.4	0	0	0	-2290.7	0	0	1	46,370
114.4	0	0.2	0	-5178.8	0	0	0	41,531.7
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7

La matriz se convierte en:

MATRIZ 1.11

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	0	0	0	774.11	1	0	0	5792.01
0	0	0	0	1414.68	0	1	0	10,655
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600

Finalmente se multiplica el renglón (1), de la matriz 1.11, por -192:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600
				x -192				
-192	0	-0.3	0	8691.8	0	0	0	- 69,703.6

Y el resultado se suma al renglón Z, de la matriz 1.11 para obtener ceros en todas las posiciones de la columna clave a excepción del 1 del renglón clave.

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
192	0	0	0	-4165	0	0	0	-166,600
-192	0	-0.3	0	8691.8	0	0	0	- 69,703.6
0	0	-0.3	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68

Y se obtiene la matriz :

MATRIZ 1.12

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	1	5.65	0	0	0	34.62
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	0	0	0	774.11	1	0	0	5792.01
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
0	0	0	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
0	0	-0.387	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68

La matriz 1.12 indica que se ha logrado una tercera solución factible debido a que la función objetivo (renglón Z) se-incrementó a 236,303.68.

Observando el renglón Z de la matriz 1.12, los coeficientes aún representan las pendientes de la función objetivo, con respecto a las variables. Bajo U_3 está el valor 4,52.8 que indica una pendiente de 4,526.8, esto es, un incremento de 1 unidad en U_3 aumenta la función Z en 4,526.8 unidades. El coeficiente de la parte inferior de U_1 es -0.387, indicando que un aumento de 1 unidad en esa variable hace disminuir a Z en -0.384 unidades. Por tanto conviene aumentar U_3 ya que al aumentar ésta, - aumenta Z puesto que U_3 tiene una pendiente positiva.

El -236,303.68 de la columna b representa el nuevo valor de Z. Recordar que el signo debe invertirse para problemas - de maximización y el resultado puede verificarse sustituyendo -- los valores de la solución presente en la función objetivo.

$$Z = 400X + 500Y + 0U_1 + 0U_2 + 0U_3 + 0U_4 + 0U_5 + 0U_6$$
$$= 400(363.04 + 500(182.18)$$
$$= 145,216 + 91,090$$
$$= 236,306 \text{ y es aproximadamente igual a } 236,303.6$$

Ya se había determinado que aumentando U_3, se puede lograr un incremento en Z, puesto que U_3 tiene una pendiente positiva como se indica en la línea inferior de la matriz 1.12. En seguida se determina cuánto puede aumentarse U_3 antes de alcanzar una restricción. Los valores negativos no se toman en cuenta puesto que dan resultados negativos. Se repite el mismo procedimiento anterior. Se leen los renglones como ecuaciones y se hace tender a cero las demás variables,obteniendose los límites presentes de U_3 de cada restricción.

$$U_3 = \frac{34.62}{5.65} = 6.12 \text{ ----- } (2)$$

$$U_3 = \frac{182.18}{27.16} = 6.70 \text{ ----- } (3)$$

$$U_3 = \frac{5,792.01}{774.11} = 7.48 \text{ ----- } (4)$$

$$U_3 = \frac{10,655}{1,414.6} = 7.53 \text{ ----- } (5)$$

De estas el renglón 2 es el que tiene el menor valor - permisible de U_3 por consiguiente puede incrementarse U_3 hasta - un valor máximo de 6.12 y el renglón (2) se convierte en el nuevo renglón clave. Por lo tanto hay que pivotear en base al renglón (2) y la columna U_3 de la misma forma que la anterior, con la finalidad de obtener un 1 en el pivote (renglón 2, columna U_3)

y ceros en todas las demás posiciones de la columna U_3.

Se comienza dividiendo el renglón (2) de la matriz 1.12 entre 5.65:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
$\frac{0}{5.65}$	$\frac{0}{5.65}$	$\frac{0}{5.65}$	$\frac{1}{5.65}$	$\frac{5.65}{5.65}$	$\frac{0}{5.65}$	$\frac{0}{5.65}$	$\frac{0}{5.65}$	$\frac{34.62}{5.65}$

Resultado:

0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12

Quedando la matriz :

MATRIZ 1.13

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	0	0	0	774.11	1	0	0	5792.01
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.77
0	0	-0.38	0	4526.84	0	0	0	-236,303.68

Multiplicar el renglón (2), de la matriz 1.13,por 45.27

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
				x 45.27				
0	0	0	8.0	45.27	0	0	0	277.36

Sumar el resultado, al renglón (1) de la misma matriz:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	B
0	0	0	8.0	45.27	0	0	0	277.36
1	0	0	0	-45.27	0	0	0	363.04
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4

Quedando la matriz:

MATRIZ 1.14

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	0	0	0	774.1	1	0	0	5792.01
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.6

Multiplicar el renglón (2) de la matriz 1.14, por ---- -27.16

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
				x -27.16				
0	0	0	-4.8	-27.16	0	0	0	-166.4

El resultado se suma el renglón (3) de la misma matriz

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	-4.8	-27.16	0	0	0	-166.4
0	1	0	0	27.16	0	0	0	182.18
0	1	0	-4.8	0	0	0	0	15.75

Se obtiene la matriz :

MATRIZ 1.15

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	-4.8	0	0	0	0	15.75
0	0	0	0	774.1	1	0	0	5792.01
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.6

Multiplicar el renglón (2), de la matriz 1.15, por ----
-774.1:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
				x -774.1				
0	0	0	-137	-774.1	0	0	0	-4,743

Sumar el resultado al renglón (4) de la misma matriz:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	-137	-774.1	0	0	0	-4,743.01
0	0	0	0	774.1	1	0	0	5,792.01
0	0	0	-137	0	1	0	0	1,049.00

Resultando la matriz:

MATRIZ 1.16

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	-4.8	0	0	0	0	15.75
0	0	0	-137	0	1	0	0	1,049
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68

Multiplicar el renglón (2) de la matriz 1.16, por ----
-1414.6 :

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
				x -1414.6				
0	0	0	-250	-1414.6	0	0	0	-8,667.78

Sumar el resultado al renglón (5) de la misma matriz:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	-250	-1414.6	0	0	0	-8,667.7
0	0	0	0	1414.6	0	1	0	10,655
0	0	0	-250	0	0	1	0	1,987.2

Resultando la matriz :

MATRIZ 1.17

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	-4.8	0	0	0	0	15.75
0	0	0	-137	0	1	0	0	1,049
0	0	0	-250	0	0	1	0	1,987.2
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68

Multiplicar el renglón (2) de la matriz 1.17, por ---- 7469.6 :

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
				x 7469.6				
0	0	0	1322	7469.6	0	0	0	45,766.42

Sumar el resultado de la multiplicación al renglón (6) de la misma matriz:

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0	1322	7469.6	0	0	0	45,766.42
0	0	0.2	0	-7469.6	0	0	1	87,901.7
0	0	0	1322	0	0	0	1	133,668.2

Transformandose la matriz en:

MATRIZ 1.18

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	-4.8	0	0	0	0	15.7
0	0	0	-137	0	1	0	0	1,049
0	0	0	-250	0	0	1	0	1,987.2
0	0	0	1322	0	0	0	1	133,668.2
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68

Finalmente se multiplica el renglón (Z) de la matriz -1.18 por -4526.8 :

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68
				x - 4526.8				
0	0	0.2	-801	-4526.8	0	0	0	-27,735.94

Y se suma el resultado al renglón Z para obtener ceros en todas las posiciones de la columna clave a excepción del 1 -- del renglón clave (2).

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
0	0	0.2	-801	-4526.8	0	0	0	-27,735.94
0	0	-0.38	0	4526.8	0	0	0	-236,303.68
0	0	-0.18	-801	0	0	0	0	-264,039.63

Quedando la matriz final:

MATRIZ 1.19

X	Y	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	b
1	0	0	8	0	0	0	0	640.4
0	0	0	0.17	1	0	0	0	6.12
0	1	0	-4.8	0	0	0	0	15.75
0	0	0	-137	0	1	0	0	1,049
0	0	0	-250	0	0	1	0	1,987.2
0	0	0	1322	0	0	0	1	133,668.2
0	0	-0.18	-801.2	0	0	0	0	-264,039.63

La matriz 1.19 indica que se ha logrado una solución - optimal, debido a que la función objetivo no puede incrementarse adicionalmente mediante el incremento de cualquiera de sus ocho- variables. El renglón Z (inferior de la matriz 1.19) indica que- ni X, Y, U_3, U_4, U_5 ni U_6 pueden incrementarse (todos los coeficientes son cero), y un aumento de U_1 o U_2 ocasionaría una disminución de Z debido a las pendientes negativas (coeficientes de - U_1 y U_2 del renglón Z).

En esta solución:

$$X = 640.4$$

$$Y = 15.7$$

que coincide con la solución gráfica antes descrita, y además demuestra que el computo simplex fué desarrollado correctamente.

El valor final de la función objetivo es entonces:

$$Z = 400X + 500Y$$

$$Z = 400(640.4) + 500\ (15.7)$$

$$Z = 256{,}160 + 7{,}850$$

$$Z = 264{,}010$$

Obsérvese que este valor es aproximadamente igual al - obtenido en la columna b, renglón Z e indica el valor máximo de- la función objetivo.

Los valores finales de $U_3 = 6.12$; $U_4 = 1{,}049$; $U_5 = 1{,}987.2$ y $U_6 = 133{,}668.2$, indican que en la restricción U_3 hay-- 6.12 unidades de capacidad (horas-hombre) que no se utilizan completamente; análogamente en la restricción U_4 hay 1,049 unidades (alimento de preiniciación no usado) y respectivamente en U_5 y - U_6 hay 1,987.2 y 133,668.2 unidades (alimento de iniciación y - engorda) no utilizado.

MINIMIZACION

Generalmente el proceso de minimización (mínimo costo) es aplicable a los problemas de mezclas, estos problemas generalmente son aplicables a diversas industrias y comparten algunos puntos comunes. En general un problema de este tipo consiste en mezclar diversos ingredientes para obtener un producto que satisfaga algunas condiciones arbitrariamente impuestas. Al mismo tiempo se optimiza algún objetivo tal como ganancia, producción, facilidad de uso, etc. Algunos problemas típicos son la mezcla de alimentos para ganado con el propósito de maximizar la relación entre la ganacia de peso y el costo del alimento, la mezcla de varios ingredientes de farmacología para obtener una droga más rentable, que satisfaga las especificaciones con un costo mínimo, o la mezcla de ingredientes que satisfagan los requerimientos de un fertilizante con un costo mínimo. (23)

Un caso concreto para minimizar costos es la formulación de raciones. El planteamiento general del problema es semejante al problema de maximización (de ejemplo), es decir también se puede obtener una solución gráfica y una solución matemática empleando el método simplex.

Tanto como en la solución gráfica como en el método simplex, también se cuenta con la función objetivo, la cual en éste caso se desea minimizar, las restricciones no siempre tienen la forma menor o igual que ($\leq$). Frecuentemente es necesario estipular que en determinadas condiciones deben ser mayores que ($\geq$) un valor asignado, esto no quiere decir que en casos de minimización sólo se utilicen restricciones del tipo ($\geq$), por el contrario se pueden utilizar de los dos tipos, como es en el caso del balanceo de raciones, las restricciones representan los requerimientos mínimos y máximos de nutrientes que tienen los animales.

En la solución gráfica el procedimiento es el mismo que en maximizar, primero se grafican las restricciones y posteriormente la función objetivo; la superposición de ambas gráficas orientan a la solución.

En la solución con el método simplex, hay diversos procediminetos según el tipo de problema. Un procedimiento utiliza - una variable adicional denominada VARIABLE ARTIFICIAL. Si se em-- plea el procedimineto anterior (maximización) para convertir una- desigualdad en igualdad, la variable de holgura debe agregarse al otro lado de la desigualdad, por ejemplo:

$X = 45 + U_2$ ----- Maximizar

$X - U_2 = 45$ ----- Minimizar.

Y utilizando una matriz de ejemplo quedaría:

	X	Y	U_1	U_2	b
	2	2	1	0	160
	1	2	0	-1	45
F.O. --	1	1.5	0	0	0

En este caso la matriz cuadrada formada por las colum-- nas U_1 y U_2 no es una matriz identidad ya que la columna U_2 tiene un -1 en lugar de 1. Este problema se resuelve fácilmente agregando una variable adicional a la nueva restricción

$$X - U_2 + a_1 = 45$$

Esta nueva variable a_1 es la VARIABLE ARTIFICIAL. No se define en función de holgura sino que simplemente es una variable provisional que puede utilizarse para alcanzar una solución factible. Una vez lograda, puede descartarse para utilizar el algoritmo* regular simplex. Cuando se inserta la restricción modificada, la nueva matriz es:

X	Y	U_1	U_2	a_1	b
2	2	1	0	0	160
1	2	1	-1	1	45
1	1.5	0	0	0	0

Ahora existe una matriz identidad en términos de las -- columnas U_1, U_2 y a_1. Los valores de las variables que represen-- tan estas columnas pueden leerse:

$$U_1 = 160 \text{ y } a_1 = 45$$

* Ver glosario de términos matemáticos.

Las demás variables tienen un valor cero.

Puesto que a_1 es simplemente una variable adicional que no tiene significado físico, realmente no se necesita. Por lo tanto cuando puede obtenenerse una solución que satisface todas las restricciones y en la cual $a_1 = 0$, esta variable se descarta y se utiliza el algoritmo regular simplex.

Si el algoritmo simplex puede utilizarse para maximizar una función objetivo, evidentemente puede usarse (con una ligera modificación) para minimizar alguna función objetivo. Esta es la lógica empleada para hallar una solución factible cuando a_1 es cero, en este caso a_1 es igual a 45, cuando se minimiza esta función hasta el punto en el cual $a_1 = 0$, también puede obtenerse una solución factible con a_1 igual a cero. Por lo tanto puede descartarse esta variable.

La segunda restricción ha sido definida anteriormente por:

$$X - U_2 + a_1 = 45$$

Despejando a_1 se obtiene:

$$a_1 = -X + U_2 + 45$$

Por consiguiente esta es la función objetivo a_1 que debe minimizarse de la misma manera que la función Z fué maximizada en el ejemplo anterior. Esta función se agrega a la matriz como un renglón adicional recordando que la línea vertical entre la columna b y las otras columnas representa un signo de igualdad.

	X	Y	U_1	U_2	a_1	b
	2	2	1	0	0	160
	1	2	1	-1	1	45
Z	1	1.5	0	0	0	0
a_1	0	-1	0	1	0	-45

Se observa en el último renglón de la matriz anterior que el coeficiente de X es -1 y el de U_2 es 1; en la columna b el valor es -45. Puesto que se encontró que a_1 es

$$a_1 = -X + U_2 + 45$$

el signo de la constante se cambió como si estuviera anotado al - otro lado de la línea de igualdad de la matriz. El hecho de que - a_1 tenga un coeficiente cero en el último renglón es correcto ya- que ésta no aparece en la función que debe minimizarse.

El siguiente procedimiento es casi el mismo empleado -- en el ejemplo (maximización) anterior. Solamente difieren los de- talles:

1.- Se desea minimizar la función representada por el - último renglón en lugar del renglón Z de manera que la primera -- pueda usarse como base para seleccionar la columna clave. Más ade lante ésta será descartada y se proseguirá como antes, pero hasta que a_1 sea igual a cero, el renglón a_1 gobernará la selección de- la columna clave.

2.- Como en este punto se desea minimizar en lugar de - maximizar, debe alterase ligeramente la lógica. Los coeficientes- del renglón a_1 aún representan pendientes o tasas de cambio de a_1 para un cambio de una unidad en la variable. Ahora debe seleccio- narse una columna que represente una variable que disminuya a la- función. Por lo tanto, el valor más negativo del último renglón - indicará la mayor disminución de a_1 por cada aumento de una uni-- dad en una variable. Esta etapa se cpmpleta cuando todos los valo res son cero o positivos ya que no es posible disminuir a_1 incre- mentando los valores de las variables..

Siguiendo este pequeño ejemplo, se puede dar solución a un problema que su objetivo sea minimizar. También se puede trans formar un problema de maximización en un problema de minimización (programa dual) del cual se menciona su importancia.(23)

Importancia del programa dual relacionado.

En 1949, Albert W. Tucker y Harold W. Kuhn de la Univer sidad de Princeton y David Gale de la Universidad Brown, demostra ron que todo problema de programación lineal tiene una "sombra",- a la que se llama su"programa dual". Cuando los matemáticos esta- blecen un programa lineal para lograr un objetivo, pueden resol-- ver el programa dual y con ello alcanzar un objetivo diferente.

Por ejemplo. Un problema original de programación lineal podría - encontrar un programa de producción que minimizara los costos --- para una fuerza de trabajo y consumo de materias primas fijos. El programa dual determinaría un sistema de fijación de precios que- maximizara el valor de la producción neta, a la vez que equilibra ría los costos directos de la mano de obra y las materias primas. El disponer de las soluciones tanto del programa original como de su dual da a los productores, M.V.Z (s) o administradores, otro - grado de flexibilidad al tomar decisiones. Además de aprender la- forma de lograr la máxima utilidad con los recursos limitantes de que disponen. Tal análisis revela también, que tan críticamente a fecta a la solución final un error en los datos. El significado - de ésta información adicional permite a los ejecutivos no matemáticos hacerse preguntas condicionales, como "que pasaría sí ...", que naturalmente quisieran preguntar, así como otras que pudieran no habérseles ocurrido al comenzar el programa lineal. Además pue den utilizar este análisis para aumentar el realismo de ésta técnica mezclando su intuición y aspectos de criterio con matemáticas aplicadas.(25)

APLICACIONES DE
DE LA PROGRAMACION LINEAL.

El número y variedad de usos que se han hecho de la programación lineal en el transcurso de los últimos años son inmensos y parece ser que, los campos de aplicación se han descubierto de manera casi continuada.

Se citan primero los campos de aplicación en áreas distintas al de la Medicina Veterinaria y posteriormente los relacionados con ésta.

Campos de Aplicación.

Campo de aplicaciones militares:

En esta los estudiosos son probablemente más numerosos, aunque no lo parezca, debido al secreto que rodea la mayor parte de los resultados. (La RAND CORPORATION que ha sido, la cuna de la mayoría de las publicaciones, fundamentales en la teoría de la programación lineal es una emanación de la U.S. Air Force).

Campo de las matemáticas puras y aplicadas:

Donde la programación lineal ha permitido obtener resultados teóricos o métodos de cálculo en la teoría de los grafos, en el análisis combinatorio para la resolución de algunos "juegos", la inversión de las matrices, etc.

Campo de la Economía: (teórica o aplicada)

Especialmente la economía de la empresa. En este campo, las aplicaciones tocan numerosos sectores entre los cuales se pueden mencionar:

- La industria química. En particular la industria del petróleo en todos sus estados.
- La industria alimenticia.
- La metalurgia
- La producción y distribución de la energía eléctrica.
- La industria del papel.
- Los transportes aéreos, maritimos, ferroviarios o por carretera.
- La agricultura. (21)

Dentro del área de la Medicina Veterinaria y Zootecnia- existen también diferentes campos de aplicación, entre los cuales se pueden citar:

1.- Campo de aplicación en la Administración de Empre-- sas Agropecuarias:

1.1.- La programación lineal se utiliza para averiguar cómo se debe repartir el capital entre proyectos alternati-- vos de inversión para obtener la máxima tasa de rendimientos.(19)

1.2.- Distribución de materia prima limitada usada en una diversidad de productos, de manera que la ganancia total - se maximice, ajustándose a las demandas del mercado hasta donde - sea posible. (9)

1.3.- Mezcla de productos: Si se tienen medios de - producción que puedan usarse para producir diferentes artículos,- los cuales pueden tener costos diferentes, impuestos y demanda en el mercado, se desea saber cómo determinar del mejor modo la capacidad disponible para diversos productos dentro de las limitaciones de la demanda del mercado. (9)

1.4.- Mezcla de materias primas: Ayuda a mezclar varios ingredientes de una mezcla particular para satisfacer requerimientos especiales y auxilia a la gerencia de producción proporcionando las materia primas sujetas a restricciones de calidad.

1.5.- Programación de inventarios: Permite el acomodo de materias primas y artículos semiterminados, minimiza la inversión del capital de la empresa mientras maximiza el flujo de - producción eficiente.

1.6.- Planeación de la mano de obra: Permite analizar combinaciones de políticas de personal en función de sus aptitudes para mantener un flujo de estado estable de gente, por y -- fuera de la compañía.(25)

2.- En la Mercadotecnia.

2.1.- Para determinar cómo deben distribuirse los-- fondos disponibles entre varios medios publicitarios para tener - algún objetivo dado. (19)

2.2.- Para determinar el patron de distribución más económico cuando se deben transportar productos elaborados en diferentes centros de distribución. (19)

2.3.- La distribución de productos desde un conjunto de puntos de origen a un número de destinos en una forma que satisfaga la demanda en cada uno de los destinos y los suministros disponibles en los orígenes y, a su vez, minimiza el costo total de transporte. (9)

2.4.- La distribución de productos desde las fábricas hasta los almacenes, es semejante al anterior, pero se minimizan los costos combinados de producción y distribución, o si los productos tienen diferentes impuestos en las varias áreas del mercado se maximiza una función de los impuestos, menos los costos de producción - distribución. (9)

2.5.- La programación lineal y el problema de los medios de publicidad. El problema consiste en la selección de la mezcla de publicidad que aumente al máximo el número de exposiciones eficaces, sujeta a las restricciones siguientes: presupuesto total de publicidad, proporciones máximas y mínimas de utilización de varios medios, y proporciones especificadas de exposición a diferentes sectores del mercado. (24)

2.6.- Problema de asignación para la fabricación de salchichas. Entre otras cosas, contienen carne de res, de cerdo, algunos cereales y especias. Hay límites superiores e inferiores sobre la cantidad de cada parte constitutiva, impuestos por el sabor y las consideraciones estructurales o legales. Los precios de los ingredientes fluctúan diariamente, pero la proporción de la línea es constante. Por lo tanto puede hacerse una asignación de la mezcla de ingredientes, para dar el costo mínimo diario de cada salchicha, sujeto a las restricciones que se impongan. Esta es un área que muchos empacadores de carnes han explorado y que pueden explorarse para disminuir los costos diarios. (24)

3.- En el campo de la Economía Zootécnica.

3.1.- Planeación a largo alcance: El problema general de la planeación de la capacidad se ha considerado resuelto por medio de la propiedad, el arrendamiento y los contratos a corto plazo. Un modelo hecho en el marco de referencia de la programación lineal, puede ayudar a contestar preguntas como:

a) el efecto de un pronóstico dado para la demanda sobre los planes de capacidad, b) los efectos de los cambios en los costos de propiedad, c) el efecto de cambios en los costos de la capacidad arrendada y d) la sensibilidad para pronosticar un error en las diversas decisiones y costos. (9)

4.- En la rama farmacéutica:

4.1.- Búsqueda de la mezcla de costo más bajo para los fabricantes de ciertos tipos de drogas. (24)

5.- En el campo de gestión de la empresa agrícola:

5.1.- Estudio de la combinación de producciones que nos ofrezca el máximo ingreso neto, al final de una campaña agrícola, sin modificar el equipo de producción. (7)

5.2.- Estudio de las decisiones relativas a las producciones y a los factores fijos que aseguran de un modo duradero el ingreso neto máximo. (7)

5.3.- Estudio del plan de cultivos forrajeros que asegure la alimentación al mínimo costo del rebaño.(7)

5.4.- Estudio de la composición de alimentos más barata, capáz de satisfacer las necesidades específicas de un animal en una fase de producción definida. (7)

5.5.- El método también puede usarse para decidir cómo debe adjudicarse una cantidad limitada de tierra adecuada, entre varias cosechas, para obtener los resultados óptimos.(19)

5.6.- Estudio de las características de un huerto frutal que ofrezca el mejor ingreso neto actualizado durante la vida entera de la plantación. (7)

6.- En actividades de cultivos y de regadíos para una empresa agrícola.

6.1.- La diferenciación de actividades en función de la organización práctica del riego y del nivel de utilidad en el uso de agua de riego, dentro de un mismo cultivo, responde a un objetivo de optimización del empleo de un factor que se encuentra disponible en la empresa pero en cantidades limitadas. (7)

7.- En la Nutrición Animal:

7.1.- Mezcla de alimentos para animales a fin de suministrar valores nutritivos mínimos a un costo también mínimo. (9)

7.2.- En la formulación de raciones balanceadas para la producción animal de las diferentes especies domésticas. (26)

En general cualquier productor que utilice fórmulas que especifiquen límites superiores e inferiores de materias primas - resultará beneficiado si estudia la aplicación de la programación lineal para sus entradas (en un mercado con amplias fluctuaciones). (9).

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA PROGRAMACION LINEAL

VENTAJAS:

Los problemas presentados con objeto de ejemplificación son, necesariamente, sencillos, sin embargo, esto no es una limitación de los métodos simplex o de la programación lineal. En realidad una de las ventajas más grandes de la programación lineal - es la complejidad en la escala de los problemas que pueden resolverse. (9)

Ofrece la utilización óptima de los factores productivos dentro de la empresa, es decir, la programación lineal indica la forma en que un M.V.Z. o un administrador puede emplear más eficazmente sus factores productivos, seleccionando y distribuyendo más eficientemente esos elementos.Puede obtenerse la utilización más eficaz de la fuerza humana y de las máquinas como solución a un problema lineal bien estructurado.(24)

Mejor calidad de las decisiones. Se hace que el administrador sea más objetivo (mediante el proceso de programación lineal), y no subjetivo (como piensa en virtud de las condiciones - existentes). El individuo que emplea este método, debe analizar - los problemas de negocios como son realmente, y obtener tan solo los datos pertinentes que puedan ser útiles para la formulación matemática. Como tiene una imagen bien definida de las relaciones dentro de las ecuaciones básicas y las desigualdades o restricciones, el administrador (M.V.Z.) puede comprender mejor el problema y sus soluciones relativas.

La programación lineal ofrece un medio substancial para mejorar los conocimientos y pericias de los medicos vetrinarios - zootecnistas del mañana que se dediquen a la administración.

El método, permite modificar su solución matemática en favor de la conveniencia del productor o el administrador.(24)

DESVENTAJAS:

Hay algunas precausiones o dificultades asociadas con - cualquier método matemático, por grandes que sean sus méritos, y la programación lineal no es una excepción.

Las condiciones bajo las cuales se puede usar la programación lineal son la linealidad y la certeza (exáctitud)

1.- Por linealidad significa que todas las relaciones entre las variables en un problema dado puedan describirse en términos de ecuaciones lineales*.

2.- Por certeza (exáctitud) se entiende que no ocurrirán variaciones en los valores numéricos esperados de los factores relievantes o bien, que tales variaciones serán insignificantes. (19)

3.- El precio de los productos, los factores de costo y las restricciones pueden cambiar constantemente según el problema planteado, por lo que, si ya se obtuvieron los resultados en un problema y cambia el precio de los productos o las restricciones es necesario volver a reprogramar con los nuevos valores que justifiquen el cambio.

Cuando se comparan las ventajas de la programación lineal con sus limitaciones, es evidente que las primeras compensan ampliamente las segundas. Pero es necesario aclarar una vez más que las técnicas de programación lineal, como otros muchos instrumentos matemáticos, ayudan al M.V.Z., administrador o productor en la tarea de decidir cual es la solución más apropiada en un problema de negocios, pero no lo substituyen. (24)

---

* Ver glosario de términos.

La computadora ha convertido a la programación lineal - en una técnica de computación práctica. El tiempo necesario para cálculos manuales no sólo sería excesivo, aún con las calculadoras de escritorio, sino que los errores aritméticos simples harían casi imposible obtener una solución correcta. Hoy se considera rutinario un problema que tenga 50 variables y 100 restricciones. Prácticamente cualquier centro de cálculo dispone de técnicas operacionales (software) previamente desarrolladas, para una utilización más eficiente de la programación lineal. Cuando éstas técnicas se utilizan respectivamente en la misma clase de problema, los formatos de entrada-salida pueden revisarse para organizar la información de acuerdo a las necesidades del sistema. (15)

El modelo de programación lineal que se elabora para la computadora se hace siguiendo la misma metodología que se ha empleado para elaborar el correspondiente en la solución gráfica y en el método simplex. (23)

La razón es que la computadora no trabaja con otro método, sino con el simplex. Las ventajas de la computadora con respecto al hombre, es que resuelve modelos de programación lineal más complejos, en menor tiempo y que da información que en forma manual no se puede obtener, como por ejemplo:

En un problema de balanceo de raciones y ración de mínimo costo, la computadora nos proporciona:

- La fórmula de menor costo y el costo de la ración.
- La composición nutritiva de la ración de menor costo.
- El precio al cual los alimentos que no integraron la ración, sí podrían entrar en la ración del mínimo costo. Y
- El rango de precios al cual los alimentos seguirán - integrando la ración de menor costo. (26)

Existen diferentes técnicas para hacer un programa para computadora de programación lineal.

1.- Guía Técnica Nº VII. Es un instructivo básico para la utilización del "paquete tempo" en rutinas de programación lineal. "Tempo" es un sistema de programación matemática que ofrece técnicas de computo para la solución de problemas de programación lineal. Tempo es además un sistema interactivo, es decir, se puede correr desde una terminal remota con muchas ventajas. [6]

2.- FORTRAN IV.- Con este lenguaje se puede escribir un programa de programación lineal, aunque requiere de algunas modificaciones. Existen programas ya dimensionados para procesarlo en un IBM 360/65, que utiliza FORTRAN IV con el compilador WATFIV. Tal como está dimensionado, requiere 5.112 bytes para la codificación objeto y 4.560 bytes para el área de arreglos. Las dimensiones presentes permiten un máximo de 20 restricciones y 50 variables (incluyendo las variables reales, las de holgura y las artificiales). Si se desea procesar un problema más largo, la proposición DIMENSION debe modificarse. [15]

3.- Existe también un programa de una "ración de mínimo costo" empleando la calculadora programable Hewlett-Packard modelo 41 - CV, que emplea el método simplex.

Independientemente de los programas que existan para utilizar una computadora, el estudiante requiere de una buena comprensión de la solución de un problema, así como la técnica para resolverlo, ya que hay que recordar que la computadora realiza las operaciones que se hacen manualmente, es por eso que es importante tener las bases para poder resolver cualquier problema de programación lineal.

ANALISIS DE LA INFORMACION.

La técnica de programación lineal desde sus inicios se ha empleado básicamente en la optimización de los recursos de la empresa industrial. La mayor parte de la literatura utilizada en este trabajo de tesis, cita ejemplos sobre producción de bienes y servicios de tipo industrial y doméstico producción y distribución de energía eléctrica, elaboración de papel, distribución y transporte de productos, fabricación de escritorios y sillas, elaboración de alimentos balanceados para la ganadería,etc.

En la literatura revisada no existe ningún ejemplo de interés puramente pecuario, es decir, dentro de este rubro los productos que se quieren obtener son: huevo, leche, engorda de animales (carne), animales para reposición (pollita de reemplazo, lechones, animales reproductores), leche y sus derivados, etc. y a la vez cuantificar las utilidades que se generen con esta producción en donde entraría en juego la programación lineal para maximizar estas utilidades y optimizar los recursos disponibles.

Ante esta realidad, se creó el ejemplo desarrollado en este trabajo de tesis "Maximización en una granja porcina de doble propósito" (productora de lechones al destete y engorda), ajustándose a los métodos gráfico y simplex de una empresa industrial a una empresa agropecuaria, es decir, simplemente se sustituyeron los productos, en vez de fabricar sillas, se producen lechones al destete y en lugar de escritorios se engordan cerdos. Las restricciones se modificaron de acuerdo a la especie zootécnica convenientemente, racionalizando los principales recursos como son: alimento, mano de obra, animales al inicio de la producción y capital invertido.

De la misma forma en que se emplea la metodología en los libros de referencia, se adaptó tanto el método gráfico, como el método simplex y se demuestra en este ejemplo que la programación lineal puede ser aplicada a cualquier explotación zootécnica que tenga las características que exige la técnica.

En el desarrollo de la técnica (M. gráfico y M. simplex) se emplea álgebra lineal y álgebra matricial, razón por la cual --

los fundamentos matemáticos que aquí se plasman son esenciales para la completa comprensión del tema.

Las aplicaciones de éstos métodos, en medicina veterinaria y zootecnia, se han aplicado exitosamente, así dentro del área veterinaria, específicamente en la elaboración de fármacos (mezcla de drogas) y más ampliamente en la zootecnia concretamente en el área económico-administrativa, nutrición animal y otras ya descritas en el desarrollo de este trabajo de tesis. Además el ejemplo elaborado sirve como guía a seguir para maximizar las utilidades de cualquier empresa agropecuaria cubriendo así la falta de literatura sobre este tema.

CONCLUSIONES

La programación lineal, un método cuyo origen es relativamente reciente, ha tenido una influencia favorable y de gran importancia en muchos problemas períodicos de negocios. Los problemas que antes se creían insolubles, se formulan fácilmente en términos de restricciones y de una función objetivo.

Muchos de los éxitos de la "investigación de operaciones" pueden atribuirse al método simplex, que es realmente una de las técnicas actuales más significativas.

Los métodos de programación lineal no han terminado ya. Del mismo modo que la programación matemática dió por resultado áreas tales como la programación lineal, el método de transportación, la programación en enteros, la no lineal y la dinámica, otras modificaciones adicionales de la técnica básica darán por resultado su extensión a otros difíciles problemas de negocios. La programación de decisiones es un buen ejemplo de esa extención de la técnica básica. Se considera que la programación lineal está en su infancia, y que todavía quedan muchas variaciones por descubrir. El uso más riguroso de las computadoras en las zonas de investigación de operaciones pondrá en primera línea esos nuevos perfeccionamientos. Por consiguiente. la programación lineal es un instrumento de la administración y un proceso analítico que ofrece grandes ventajas, a pesar de tener algunas limitaciones, para determinar las soluciones óptimas de los interminables problemas de la empresa.

El método simplex, que se puede usar para resolver cualquier problema de programación lineal, consta de una serie de operaciones repetidas que se llevan a cabo después de haber determinado las limitaciones y la función objetiva, por medio de los cuales se alcanza, en último término una solución óptima. No se considera este procedimiento iterativo porque el método gráfico es suficiente para demostrar los fundamentos de la programación lineal. Sin embargo, se debe tener en cuenta que, si se desarrolla manualmente, la técnica simplex resulta bastante tediosa y demorada. Esto es particularmente cierto cuando debe manejarse un número grande de variables y limitaciones.

En estos casos se debe aplicar el algoritmo en unión -- con un computador electrónico que haya sido programado para ejecutar las operaciones necesarias. En realidad es solamente una ligera exageración decir que la solución de la mayoría de los problemas de programación lineal en la práctica, requieren el uso de equipo electrónico de procesamiento de datos. Afortunadamente se-- han preparado programas especiales de computador para este fin y- estań disponibles fácilmente.

Es probable que el enfoque gráfico que se ha discutido- no se use en la realidad para obtener la solución de un problema- dado, pero sirve para familiarizarse con los fundamentos de la -- programación lineal.

Eń sí, este trabajo de tesis, infunde en el estudiante la habilidad de, reconocer los problemas potenciales de -- programación lineal, formularlos como modelos de programación lineal, emplear las técnicas de computo apropiadas para resolver estos problemas y entender los aspectos matemáticos que ligan entre sí a estos elementos de la programación lineal.

Por lo que se concluye que tanto el conocimiento de la - técnica como el de sus aplicaciones dentro de la medicina veterinaria y zootecnia debe ser de interés general tanto para profesionistas del área, como para productores o administradores.

La propia naturaleza de este trabajo de tesis aporta elementos esenciales,tanto matemáticos como de la propia técnica de - programación lineal, útiles para el M.V.Z. proporcionando las ba-- ses para extender el campo de aplicación dentro de la medicina veterinaria y zootecnia (empresa agropecuaria).

LITERATURA CITADA.

1.- Aguilar,V. y Colaboradores.: Administración Agropecuaria. 3a. Edición. Ed. Limusa. México, 1982.

2.- Barsou, A.S.: ¿Qué es programación lineal? Ed. Limusa, S.A. México, 1976.

3.- Bachtold E; Aguilar A; Alonso F; Juárez J; Casas V.M.; Meléndez R; Huerta E; Mendoza E; y Espinoza A.: Economía Zootécnica. 1a. Edición. Ed. Limusa. S.A., México, 1982.

4.- Cárdenas. M.A.: La Ingenieria de Sistemas. Ed. Limusa, S.A. México, 1974.

5.- Cárdenas; Lluis; Raggi y Tomas.: Algebra Superior. 5a. Reimpresión, Serie Matemáticas Superiores. México, 1981.

6.- Chávez M.R. Instructivo básico para la utilización del paquete Tempo en rutinas de programación lineal. Guia Técnica Centro de Servicios de Computo. U.N.A.M. 1980.

7.- Coordonnier P., Carles R. y Marsal P.: Economía de la Empresa Agraria. Ediciones Mundi Prensa.

8.- Dantzig, G.B. Linear Programming and Extensions, Princeton-University, N.J., 1963.

9.- Elwood S.B.: Dirección de Operaciones. Problemas y Modelos. Ed. Limusa, S.A., México 1982.

10.- Ferguson C.E.: Teoría Microeconómica. Fondo de Cultura Económica. 3a. reimpresión. México, 1974.

11.- Franz E. H.: Algebra de matrices. Ed. Trillas S.A. México, 1970.

12.- Frazer J.R. Programación Lineal Aplicada. Editora Técnica, México, 1972.

13.- Gass S.I.: Programación Lineal, 3a. Impresión. C.E.C.S.A. México, 1981.

14.- Gerez y Grijalva.: El enfoque de sistemas. 1a. Edición. Ed. Limusa, México, 1976.

15.- Gómez G.; Mendoza E.; Quijano G.: Introducción a la Computación. Centro de Servicios de Computo. U.N.A.M.

16.- Gran Enciclopedia del Mundo; DURVAN, S.A. De Ediciones Bilbao, Tomo 8, Tomo 12 y Tomo 13.

17.- La Enseñanza de la Economía Zootécnica en Medicina Veterinaria y Zootecnia. Curso de Actualización. U.N.A.M. Memorias, 1980.

18.- Lexis 22; Matemáticas, Diccionario Enciclopédico Vox, España, 1981.

19.- Mayer R.R.: Gerencia de Producción y Operaciones, Mc. Graw-Hill, México, 1982.

20.- Ress P. K. y Sparks F.W. Algebra. Ed. Reverté Mexicana, S.A. 2a. edición, México, 1970.

21.- Simonnard. M.:Programación Lineal. Ed. Paraninfo, Madrid, 1972.

22.- Sevilla J., Fiol M. y Sauvegrain R. Tópicos Matemáticos para Administración y Economía. Ed. Trillas. México 1981.

23.- Shamblin J.E. y Stevens G.T. Jr.: Investigación de Operaciones Mc. Graw - Hill. México, 1982.

24.- Thierauf J. R.: Toma de Decisiones por medio de Investigación de Operaciones. Ed. Limusa. México, 1982.

25.- Thierauf J.R.: Introducción a la Investigación de Operaciones. Ed. Limusa. México, 1982.

26.- Trujillo F.V.: Métodos Matemáticos para la formulación de raciones balanceadas en la Producción Animal. Centro Nacional de Productividad de México. A.C. Fideicomiso del Gobierno Federal.

27.- U.N.A.M. Apuntes de Algebra Superior. Facultad de Ingeniería F.E.S. Cuautitlán.

FIGURA 1

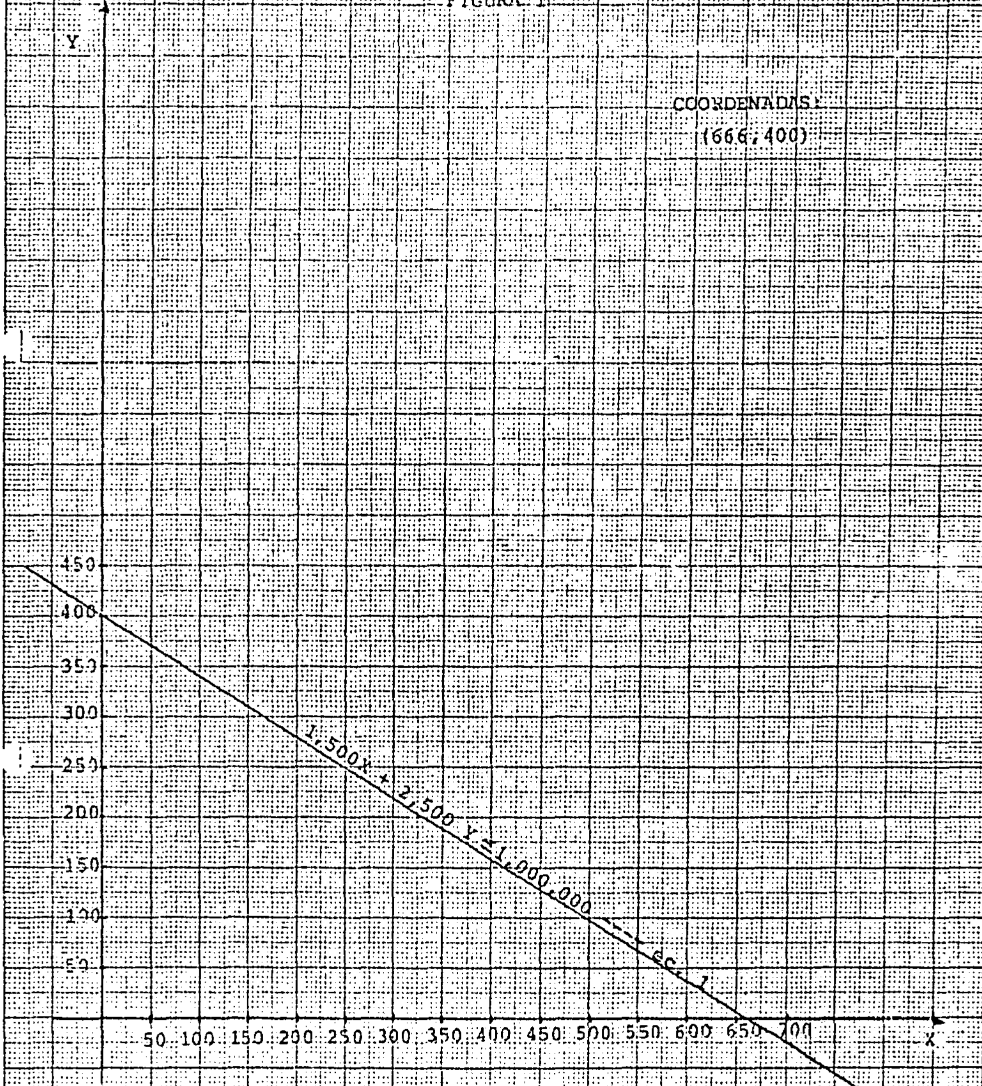

Y
COORDENADAS:
(666,400)
450
400
350
300
250
200
150
100
50
1,500X + 2,500 Y = 1,000,000
ec. 1
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700
X

FIGURA 2

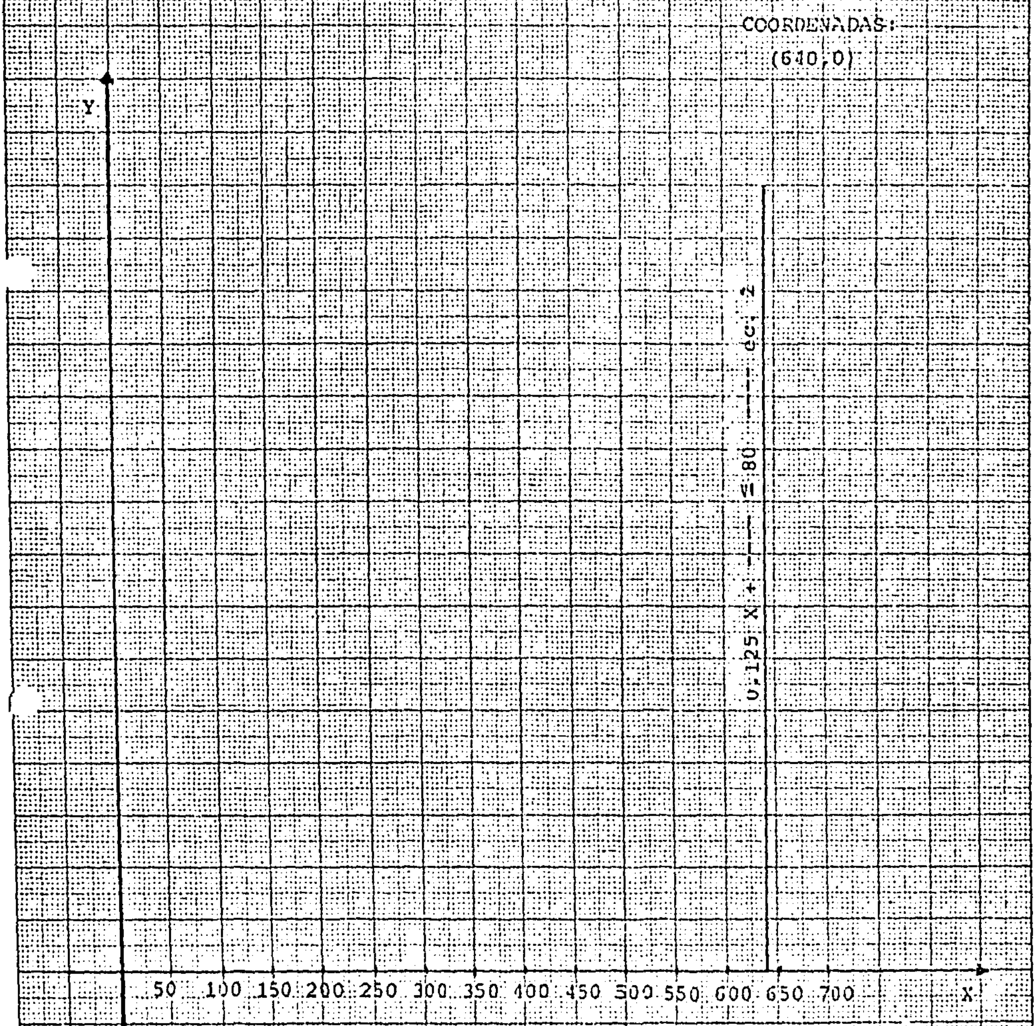

COORDENADAS:
(640,0)
Y
0,125 X + ≤ 80 ec. 2
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700
X

FIGURA 3

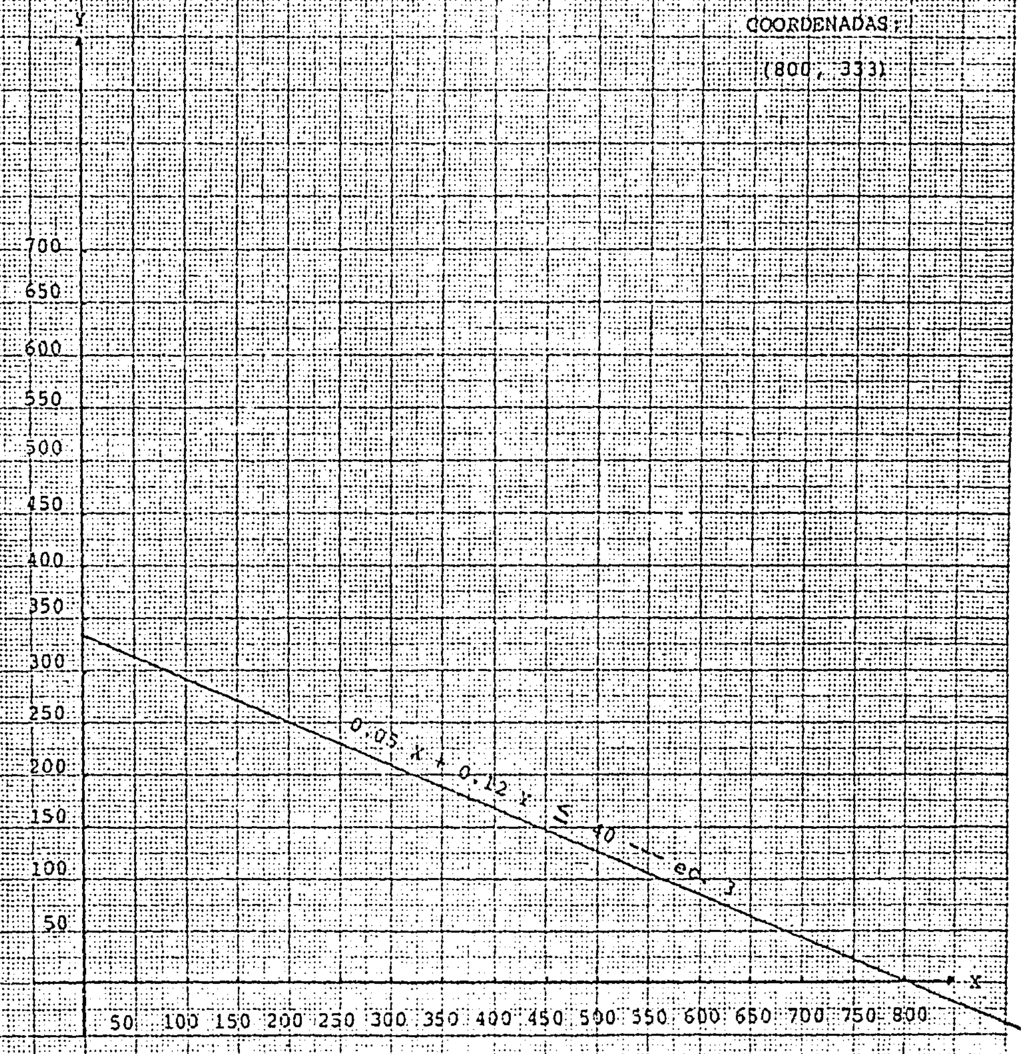

COORDENADAS:
(800, 333)
Y
X
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800
0.05 x + 0.12 y ≤ 40 --- ec. 3

FIGURA 4

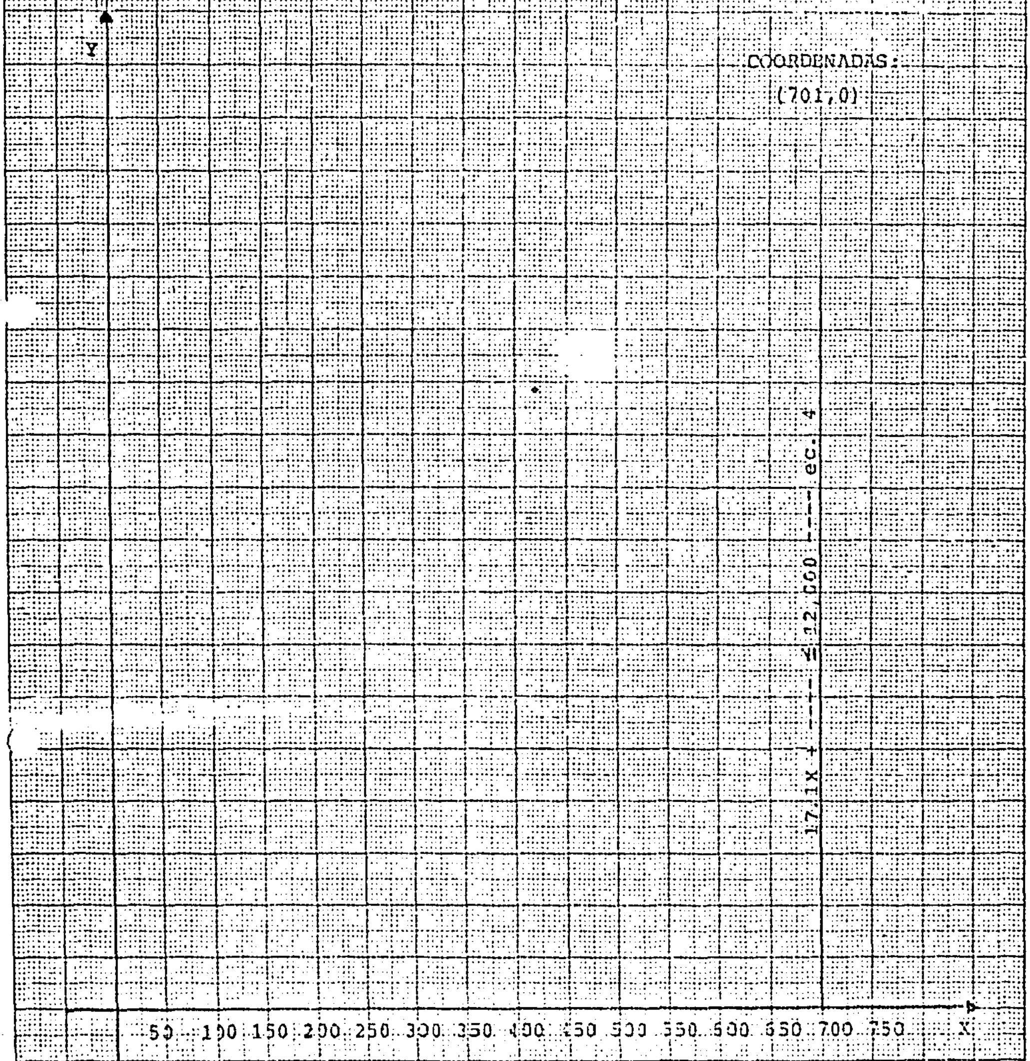

Y
COORDENADAS:
(701,0)
17.1X + ---- = 12,000 ---- ec. 4
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750
X

FIGURA 5

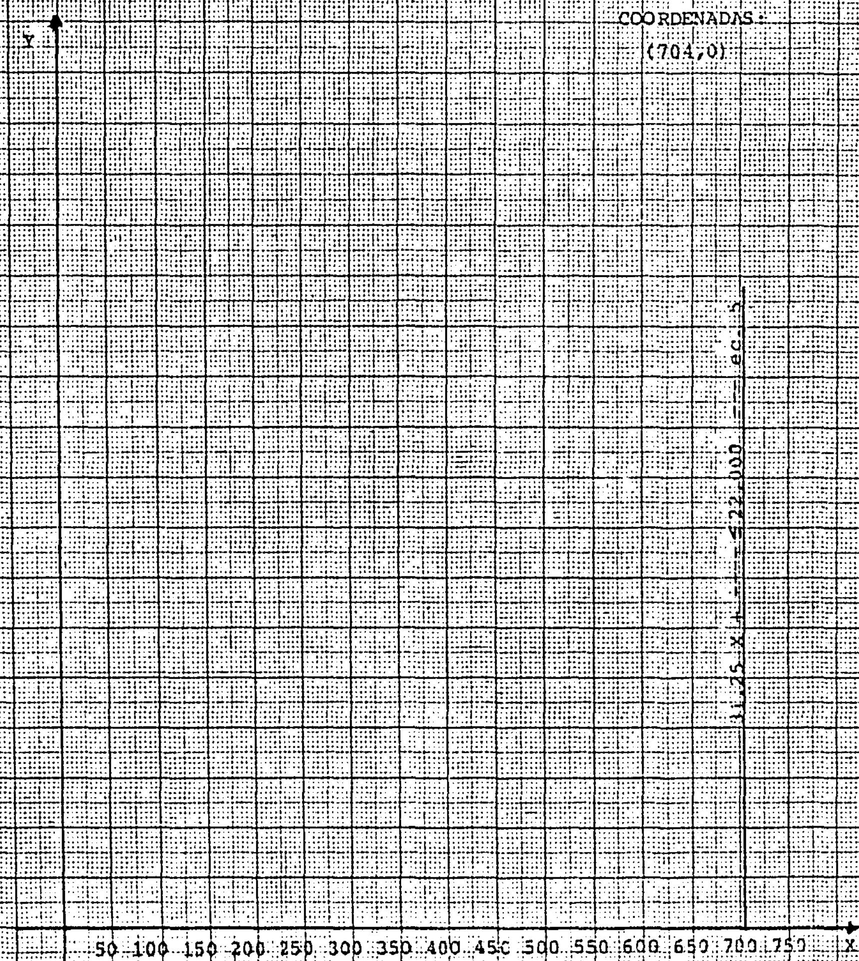
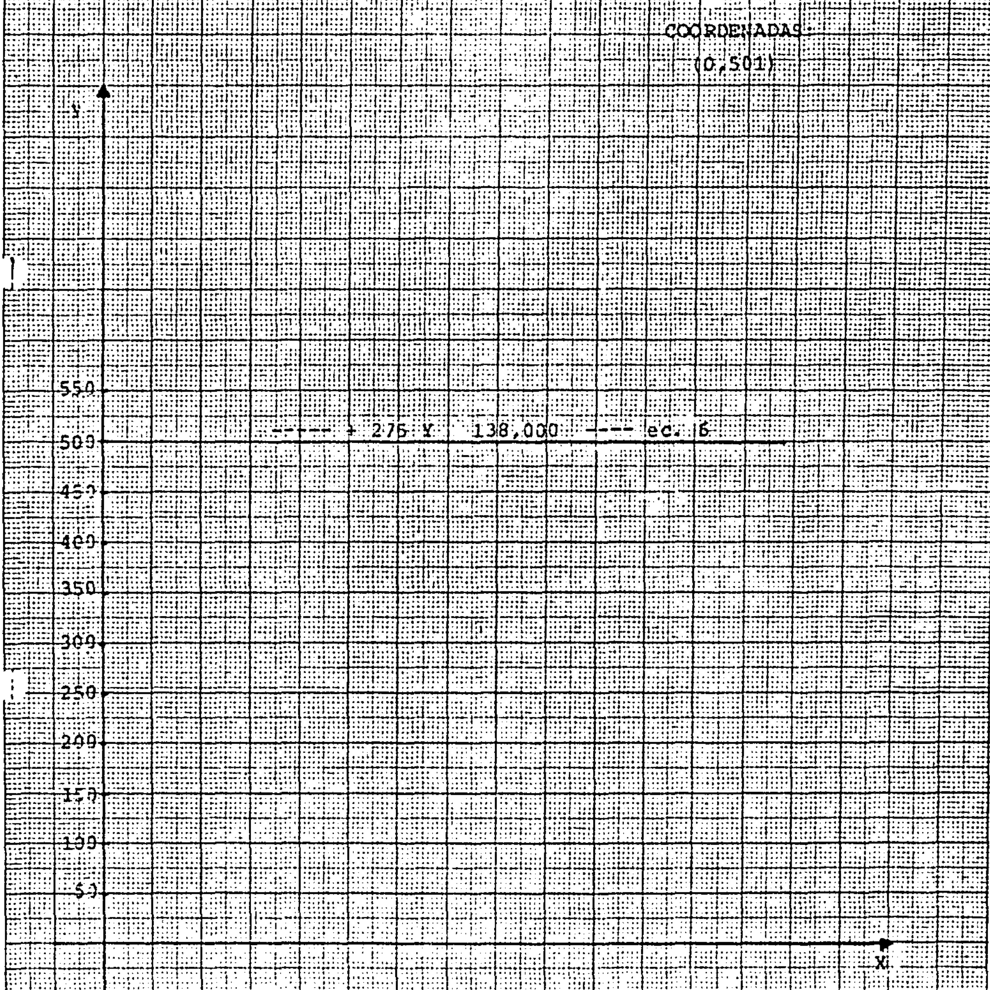

COORDENADAS:
(704,0)
Y
11.25 X ≤ 22,000 — ec. 5
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750
X

FIGURA 6

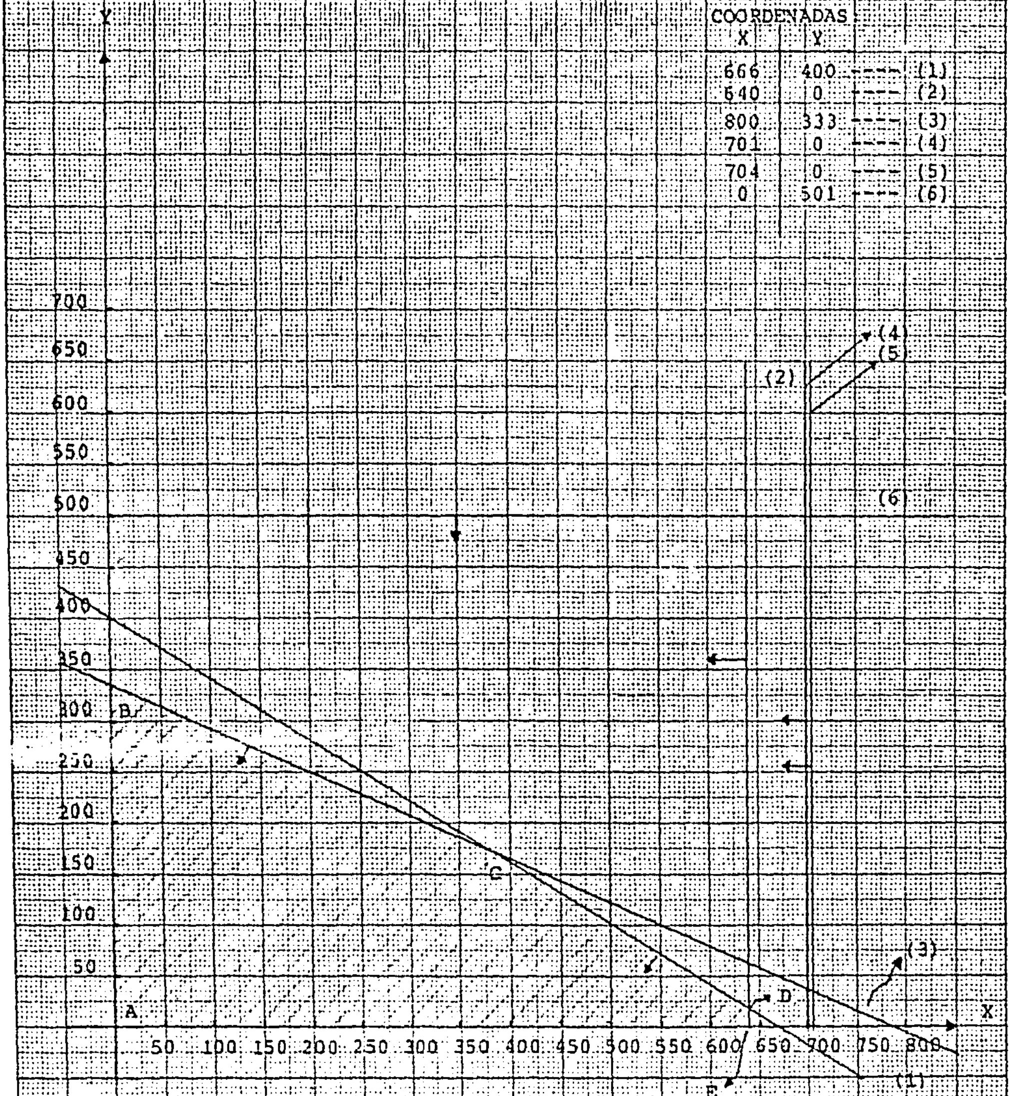


COORDENADAS:
(0,501)
Y
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
+ 275 Y 138,000 ec. 6
X

FIGURA 7

COORDENADAS:

X	Y	
666	400	---- (1)
640	0	---- (2)
800	333	---- (3)
701	0	---- (4)
704	0	---- (5)
0	501	---- (6)



FUNCION OBJETIVO

FIGURA 8

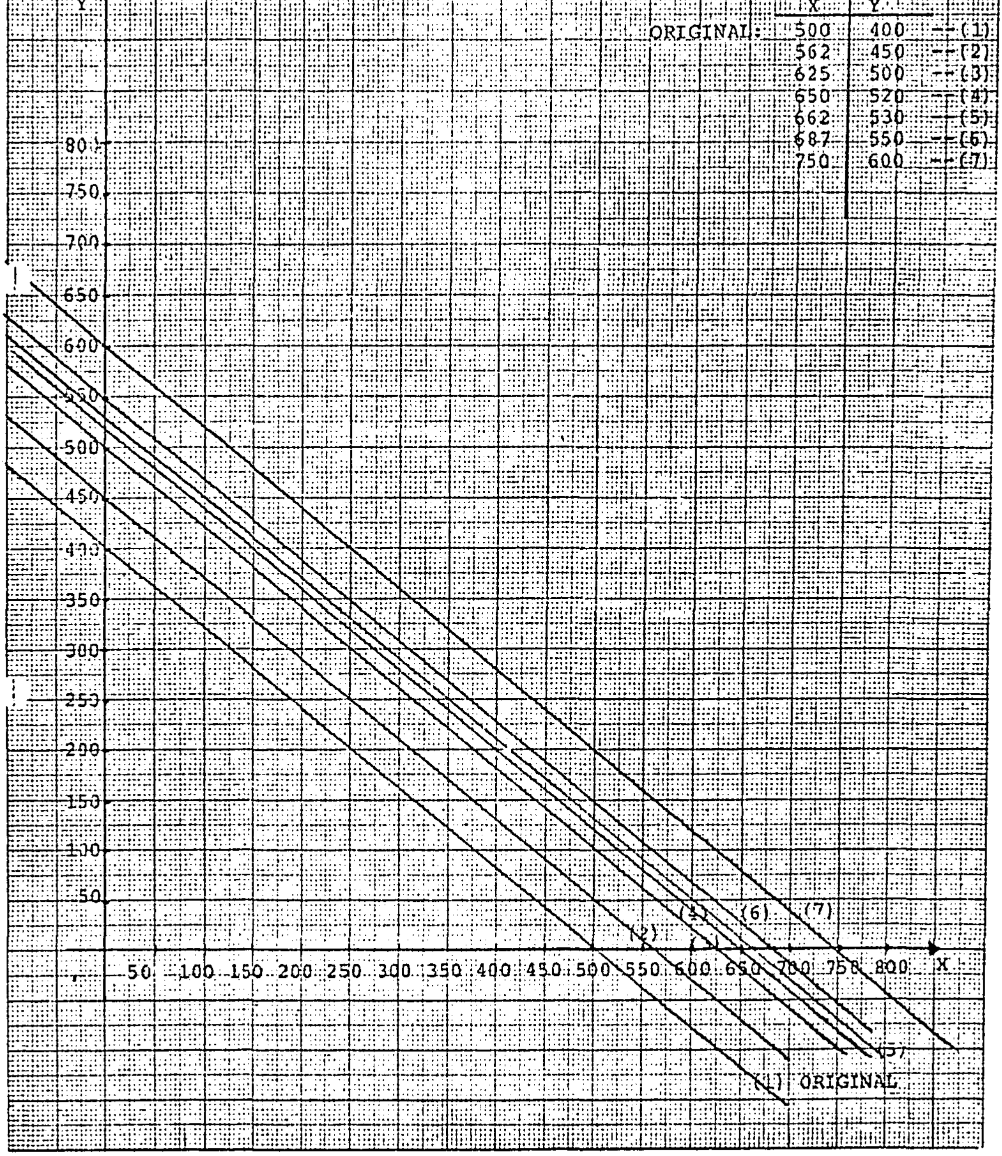
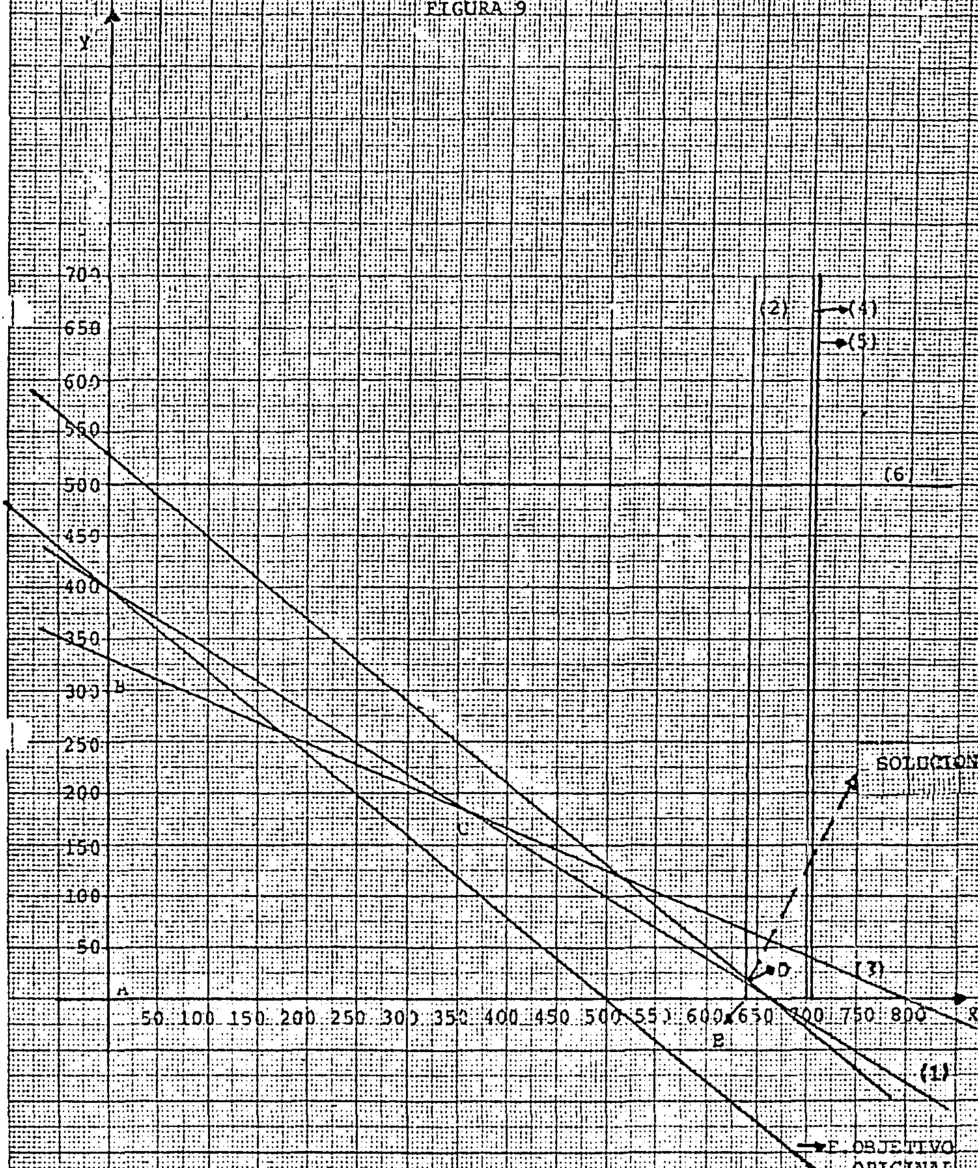


FIGURA 9


Y
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
A
B
C
D
E
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800
X
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
SOLUCION
F. OBJETIVO ORIGINAL

ANEXO 1
GLOSARIO DE TERMINOS MATEMATICOS (20)

Abscisa.- La distancia dirigida medida perpendicularmente desde el eje de las (Y) u ordenadas, hasta un punto, en un sistema de coordenadas cartesianas.

Algoritmo.- Es una secuencia de pasos lógicos para resolver cualquier problema. Sus principales caracteristicas son: 1.- Debe de tratar de resolver el o los problemas en el menor número de pasos posibles. 2.- No debe incluir palabras que puedan mal interpretarse tales como: hasta, hasta aquí, etc.y 3.- Debe de llegar a la solución del problema de una manera veraz y concisa.

Coeficiente numérico.- El número que aparece como factor en una expresión.

Constante.- Una variable cuyo valor no cambia en un problema determinado.

Constante absoluta.- Una constante cuyo valor nunca cambia, por ejemplo, cualquier número, como el 3.

Coordenadas.- La abscisa y la ordenada de un punto en un sistema de coordenadas cartesianas.

Coordenadas cartesianas.- Un sistema de coordenadas formado por dos rectas que se interceptan perpendicularmente, llamadas eje de las X y eje de las Y. También se llaman coordenadas rectangulares.

Desigualdad.- Una proposición que representa que una expresión es mayor que, o menor que, otra expresión.

Dígito.- Cualquiera de los diez números 0,1,2, ... , 9.

División.- La operación inversa de la multiplicación en un sistema numérico.

Ecuación.- Una proposición que establece que dos expresiones, de las cuales por lo menos una contiene una incógnita, son iguales.

Ecuación de primer grado.- Una ecuación en la que la incógnita aparece únicamente a la primera potencia y en forma de numerador.

Ecuaciones dependientes.- Dos ecuaciones de primer grado relacionadas de tal modo que una puede obtenerse de la otra mediante la multiplicación de cada término por una constante adecuada.

Ecuaciones equivalentes.- Dos ecuaciones en las que toda solución de una de ellas es solución de la otra.

Ecuación lineal.- Véase ecuación de primer grado.

Entero positivo.- Dícese de los números empleados en la aritmética para contar.

Expresión.- Un número o variable, o una combinación de ambos obtenida mediante operaciones algebraicas.

Factor.- Un divisor exácto de una expresión.

Factor común.- Un número o expresión algebraica que es factor de dos o más términos.

Factorial de n.- El producto del entero positivo n con todos los enteros positivos menores que n; por ejemplo, si n = 4, el factorial de n es 4x3x2x1 = 24. Se simboliza con n!

Factorizar.- Descomponer una expresión en sus factores.

Función.- Conjunto de parejas ordenadas (X,Y) relacionadas de tal modo que a cada X corresponde por lo menos una Y.

Gráfica.- Un diagrama basado en un sistema de coordenadas tales como el cartesiano, o el polar, y cuyo propósito es ilustrar alguna relación entre datos numéricos. También se aplica al lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación.

Identidad.- Una ecuación que es verdadera para todo valor permisible de las variables que contiene.

Inversión.- Un cambio en el orden de los términos de una proporción; que se efectúa invirtiendo cada razón. Así por inversión, a/b = c/d es equivalente a b/a = d/c.

Ley Asociativa.- Principio fundamental de un sistema numérico que expresa que la suma (o el producto) de tres números encontrada efectuando la suma (producto) de los dos primeros y luego sumando (multiplicando por) el tercero, o bien encontrando la suma (producto) de los dos últimos y luego sumando (multiplicando por) el primero, es la misma.

<u>Ley Conmutativa</u>.- Principio fundamental de un sistema numérico - que expresa que la suma (o el producto) de dos números - encontrada sumando el primero con el segundo (multipli-- cando el primero por el segundo) y la encontrada sumando el segundo con el primero (multiplicando el segundo por- el primero) es la misma.

<u>Ley Distributiva</u>.- Principio de un sistema numérico que relaciona la suma con la multiplicación en la forma siguiente: si - a, b y c son elementos del sistema, entonces a(b + c) = ab + ac.

<u>Llaves</u>.- Los símbolos de agrupación $\{ \}$.

<u>Miembros</u>.- Las expresiones que aparecen a la izquierda y a la de- recha del signo de igualdad en una ecuación.

<u>Multiplicación</u>.- Nombre de una de las operaciones algebraicas bá- sicas, definida en la aritmética como la adición de un nú mero (multiplicando) un cierto número de veces (multipli- cador). El resultado de esta operación se llama producto.

<u>Número racional</u>.- Un número real que puede expresarse como el co- ciente de los enteros.

<u>Número reales</u>.- El conjunto de números que comprende a todos los- números irracionales.

<u>Ordenada</u>.- La distancia dirigida medida perpendicular desde el -- eje de las X hasta un punto en un sistema de coordenadas- cartesianas. Consúltese: abcisa, origen.

<u>Origen</u>.- Punto de referencia en un sistema de coordenadas. en el- sistema cartesiano es la intersección de los ejes de las- X y de las Y. Consúltese: abcisa, ordenada.

<u>Operaciones fundamentales</u>.- Adición, sustracción, multiplicación y división.

<u>Paréntesis</u>.- Los símbolos de agrupación $\{ \}$.

<u>Raiz de una ecuación</u>.- Un valor de la incógnita que satisface la- ecuación.

<u>Recíproco</u>.- Un número es el recíproco de otro si el producto de - ambos es 1.

<u>Término</u>.- Una expresión que consta de un número, de una variable, o de una combinación de ambos empleando únicamente las o- peraciones de multiplicación y división.

<u>Transposición</u>.- Es trasladar un miembro de una ecuación por otro de la misma ecuación intercambiando sus signos.

<u>Valor absoluto</u>.- El valor absoluto de un número real a es a si a es mayor o igual que cero, y es - a si a es menor que cero. Se llama también valor numérico.

<u>Variable</u>.- Un símbolo que representa a cualquiera de los elementos de un conjunto de números. Consúltese: constante.

<u>Variable dependiente</u>.- La variable cuyos valores admisibles son los segundos elementos de las parejas ordenadas que forma una función.

<u>Variable independiente</u>.- La variable cuyos valores admisibles son los primeros elementos de las parejas ordenadas que forman una función.

ANEXO 2

CUADRO DE LENGUAJE MATEMATICO. (18)

X	Abcisa
a/b	a divide a b
$+$	Adición
A'	Conjunto complementario de A
Z	Conjunto de números enteros
Z^+	Conjunto de números enteros positivos.
Z^-	Conjunto de números enteros negativos.
Z_o	Conjunto de números enteros sin el cero.
N	Conjunto de los números naturales
R	Conjunto de los números reales
AxB	Conjunto producto AxB
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\subset$	Contenido
$\not\subset$	No contenido
f^{-1}	Correspondencia inversa
$\neq$	Distinto
:	División
/	Divide a
e	Elemento neutro
$\Longleftrightarrow$	Equivale
$\exists$	Existe uno y sólo uno
G	Grupo
$\equiv$	Idéntico
$=$	Igual
$\Longrightarrow$	Implica
$\subset$	Incluido en
$\supset$	Incluye a
$\cap$	Intersección
$>$	Mayor que
$\geq$	Mayor o igual que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor o igual que
(x), (.)	Multiplicación

+n	Número entero positivo
-n	Número entero negativo
Y	Ordenada
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
(AxB)	Producto cartesiano
R	Relacionado
$\not R$	No relacionado
$\overline{AB}$	Segmento AB.
(-)	Sustracción
Σ	Suma de términos
U	Unión
3	Valor absoluto 3
$\overline{AB}$	Vector AB