

2 ej  
12



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

LA GEOMETRIA DE LAS FORMAS CUBICAS Y CUARTICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:

GABRIEL GUTIÉRREZ GARCÍA.

1986.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Introducción:

El propósito del presente Trabajo es hacer una descripción geométrica del espacio de las formas cúbicas y cuárticas en dos variables.

Estos espacios son vectoriales de dimensiones 4 y 5 respectivamente por lo que una forma inmediata de visualizados no es posible. Sin embargo observando que una forma  $f$  y toda la "línea" de formas  $\lambda f$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tienen la misma estructura en sus "raíces", la descripción bastará hacerla en las esferas  $S^3$  y  $S^4$  respectivamente. Es aquí donde se trabajará, aunque todavía estos no son de fácil forma de representarse.

La forma de estudiarlos es bajo la siguiente relación de equivalencia: dos formas  $f_1$  y  $f_2$  son equivalentes si existe un cambio de coordenadas lineal en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $f_1 = f_2 \circ g$ .

Bajo esta equivalencia; las formas cúbicas se dividen en 5 órbitas o estrados, uno de ellos consta de un sólo elemento la forma trivial  $f \equiv 0$  que en la esfera  $S^3$  no tiene ningún representante, las otras 4 órbitas son las que se describen geométricamente en el Capítulo I.

En el Capítulo II se hará lo correspondiente para las formas cuárticas, sólo que a diferencia del caso cúbico, aquí hay una infinidad de órbitas.

Al dividir en el caso degenerado (dos o más raíces coincidentes) y el no degenerado se tiene que en el primero hay sólo un número finito de órbitas que serán las que se describirán; esto se podrá hacer de manera "visual" gracias a que su "dimensión" es menor que 4.

La primera parte está basada en gran parte del Trabajo de Zeeman [Z], la segunda parte del libro de Poston y Stewart [PS].

Al final se han puesto 3 apéndices en donde se remiten algunos detalles técnicos (apéndice 2 y 3) así como aspectos conocidos de la Teoría algebraica de ecuaciones (apéndice 1), se han separado para hacer más fluida la lectura del Trabajo y no se han omitido para que el presente sea autocontenido.

# I. LA GEOMETRIA DE LAS FORMAS CUBICAS

## §1: El álgebra de la estratificación

Sea  $H^3(2,1) = \{f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  el espacio vectorial real de dimensión cuatro de las formas cúbicas homogéneas en dos variables. La representación de la forma cúbica que hemos tomado se conoce por coeficientes binomiales.

De manera natural cada  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  representa una forma cúbica homogénea de  $H^3(2,1)$  a saber  $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$  y recíprocamente.

Consideremos a  $G = GL(2, \mathbb{R})$  el grupo lineal general, es decir  $GL(2, \mathbb{R}) = \{g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; g \text{ es lineal e invertible}\}$  junto con la operación de composición.

La acción izquierda de  $G$  sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi: G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(g, v) \mapsto g(v)$

define una acción derecha de  $G$  sobre  $H^3(2,1)$ ,

$$\psi: G \times H^3(2,1) \rightarrow H^3(2,1)$$

$$(g, f) \mapsto f \circ g = fg$$

La acción  $\psi$  induce la siguiente relación de equivalencia en  $H^3(2,1)$ :  $f_1$  y  $f_2 \in H^3(2,1)$  son equivalentes si, y sólo si existe  $g \in G$  tal que  $f_2 = f_1 g$ . A la clase de equivalencia de  $f$ , que denotaremos por  $fG$ , le llamaremos el estrado que contiene a  $f$  o la G-órbita de  $f$ . Cada estrado estará caracterizado por la estructura de

las raíces de cualquiera de sus representantes.

Definamos para cada  $A = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$R_A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0 \}$ . Notemos que si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $(x, y) \in R_A$  entonces  $\lambda(x, y) \in R_A$ , luego  $R_A$  consta de líneas que pasan por el origen.

Para encontrar el arreglo de estas líneas, encontraremos sus intersecciones con la línea  $x=1$  (Si una de las líneas es  $x=0$ , es decir el eje  $Y$ , diremos que se intersecciona con  $x=1$ , en el punto al infinito) Haciendo  $x=1$  obtenemos una cúbica en  $y$ ,  $P_A(y) = a + 3by + 3cy^2 + dy^3$ , la cual tiene a lo más tres soluciones  $y_1, y_2$  y  $y_3$  a menos que  $A = (0, 0, 0, 0)$  por lo que hay tres líneas de raíces cuando mucho.

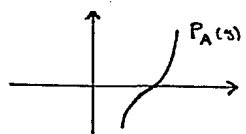
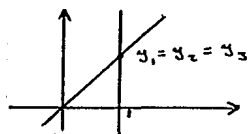
Para el caso en que trabajemos con el eje  $X$ , tenemos que la cúbica tiene por solución a  $x=0$ , lo cual sólo se satisface cuando  $d=0$ , en tal caso  $P_A(y)$  se reduce a una cuadrática con a lo más dos raíces.

En lo sucesivo estaremos hablando indiferentemente de  $\mathbb{R}^4$  o  $H^3(2, 1)$ , como el espacio de las formas cúbicas.

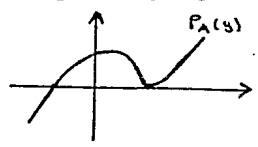
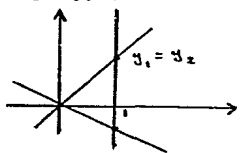
Las posibilidades para  $R_A$  son :-

- (i) Todo el plano si  $A = (0, 0, 0, 0)$ .

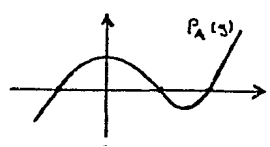
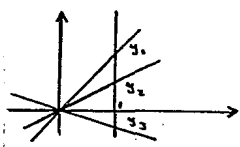
(ii) Tres líneas coincidentes.



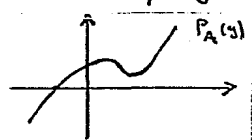
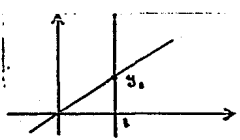
(iii) Tres líneas dos de las cuales coincidentes.



(iv) Tres líneas de raíces distintas.



(v) Una línea real (y 2 complejas)



Lema 1.1: El número de líneas de raíces es un invariante de la órbita.

Demostración: Sean  $f(x,y) = (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)(a_3x+b_3y)$

con  $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$ ,  $i=1,2,3$  una forma cúbica homogénea

y  $\varphi \in GL(2, \mathbb{R})$  arbitrarias. Si  $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) =$

$(u_1x+v_1y, u_2x+v_2y)$  se tiene que

$$(f \circ \varphi)(x,y) = f(u,v) = (a_1u+b_1v)(a_2u+b_2v)(a_3u+b_3v) =$$

$$= [(a_1 u_1 + b_1 u_2)x + (a_1 v_1 + b_1 v_2)y] \cdot$$

$$[(a_2 u_1 + b_2 u_2)x + (a_2 v_1 + b_2 v_2)y] \cdot$$

$$[(a_3 u_1 + b_3 u_2)x + (a_3 v_1 + b_3 v_2)y]$$

ahora bien,  $a_2 x + b_2 y = 0$  y  $a_3 x + b_3 y = 0$  son distintas si y sólo si  $\det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix} \neq 0$ .

Por otro lado  $[(a_2 u_1 + b_2 u_2)x + (a_2 v_1 + b_2 v_2)y]$  y  $[(a_3 u_1 + b_3 u_2)x + (a_3 v_1 + b_3 v_2)y]$  son distintas si y sólo si  $\det \begin{bmatrix} a_2 u_1 + b_2 u_2 & a_2 v_1 + b_2 v_2 \\ a_3 u_1 + b_3 u_2 & a_3 v_1 + b_3 v_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix} \neq 0$  ■

Teorema 1.1. - Hay cinco estrados en  $\mathbb{R}^2$  caracterizados por el Tipo de raíces como sigue:

<u>Estrados</u>	<u>Representantes</u>	<u>Tipo de raíces</u>
(i) 0 - Origen	0	indeterminadas
(ii) X - Excepcional	$x^3$	Tres reales iguales
(iii) P - Umbilica Parabólica	$x^2 y$	dos reales iguales
(iv) E - Umbilica Elíptica	$x(x^2 - y^2)$	Tres reales distintas
(v) H - Umbilica Hiperbólica	$x(x^2 + y^2)$	dos complejas

Demostración:

(i) Sólo sucede cuando  $(a, b, c, d) = \bar{0}$

(ii) Se deberá Tener que las Tres líneas sean iguales por lo que  $a_2 x + b_2 y = 0$  y  $a_3 x + b_3 y = 0$  son múltiplos de  $a_1 x + b_1 y$  por lo Tanto  $f(x, y) = \lambda (a_1 x + b_1 y)^3$



para algún  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \lambda^2 (a_1 x + b_1 y) \\ v(x, y) = -b_1 x + a_1 y \end{cases} \text{ es un cambio de coordenadas}$$

además si  $f_1(u, v) = u^3$  Tenemos que  $f_1 \circ \varphi = f$  por lo tanto  $f_1, f$  están en el mismo estrado.

(iii) Se deberá Tener  $f(x, y) = \lambda (a_1 x + b_1 y)^2 (a_2 x + b_2 y)$  donde las líneas  $a_1 x + b_1 y = 0$  y  $a_2 x + b_2 y = 0$  son linealmente independientes es decir  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ ,

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \text{ sea } \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ donde } \begin{cases} u(x, y) = a_1 x + b_1 y \\ v(x, y) = \lambda (a_2 x + b_2 y) \end{cases}$$

es un cambio de coordenadas, además si

$f_1(u, v) = u^2 v$  Tenemos que  $f_1 \circ \varphi = f$  por lo tanto  $f_1$  y  $f$  son equivalentes.

(iv) Para que suceda se deberá Tener que

$f(x, y) = (a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y)(a_3 x + b_3 y) = d_1 d_2 d_3$  donde las líneas son linealmente independientes por parejas; es decir  $k_1 = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \neq 0$ ,

$$k_2 = \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ y } k_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0. \text{ Sea } \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{k_1 d_1 + k_2 d_2}{2} = \frac{(a_1 k_1 + a_2 k_2)}{2} x + \frac{(b_1 k_1 + b_2 k_2)}{2} y \\ v(x, y) = \frac{k_1 d_1 - k_2 d_2}{2} = \frac{(a_1 k_1 - a_2 k_2)}{2} x + \frac{(b_1 k_1 - b_2 k_2)}{2} y \end{cases}$$

es un cambio de coordenadas ya que Tenemos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 k_1 + a_2 k_2) & \frac{1}{2}(b_1 k_1 + b_2 k_2) \\ \frac{1}{2}(a_1 k_1 - a_2 k_2) & \frac{1}{2}(b_1 k_1 - b_2 k_2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} k_1 k_2 k_3 \neq 0,$$

a hora bien si  $f_1(u,v) = u(u^2 - v^2)$ , como tenemos  $k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 = 0$  entonces

$$f_1 \circ \varphi(x,y) = u(u^2 - v^2) = u(u+v)(u-v) = \frac{(k_1 d_1 + k_2 d_2)(k_1 d_1)(k_2 d_2)}{2} \\ = -\frac{1}{2} k_1 k_2 k_3 d_1 d_2 d_3, \text{ luego } f_1 \text{ y } f \text{ son equivalentes}$$

(v) Tenemos que  $f(x,y) = (a_1 x + b_1 y)(\bar{a}_1 x + \bar{b}_1 y)(a_3 x + b_3 y) = d_1 \bar{d}_1 d_3$  donde  $(a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$  y  $(a_1, b_1) \in \mathbb{C}^2$ , además  $k_1 = \det \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $k_2 = \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0$ , es claro que  $k_2 = -\bar{k}_1$  y  $k_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \end{pmatrix} = a_1 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 b_1 = 2i \operatorname{Im}(a_1 \bar{b}_1) = iT$ , donde  $T = 2 \operatorname{Im}(a_1 \bar{b}_1)$ . Sea  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x,y) \mapsto (u,v)$

$$\text{donde } \begin{cases} u(x,y) = \frac{k_1 d_1 - \bar{k}_1 \bar{d}_1}{2i} = \left( \frac{a_1 k_1 - \bar{a}_1 \bar{k}_1}{2i} \right) x + \left( \frac{b_1 k_1 - \bar{b}_1 \bar{k}_1}{2i} \right) y \\ v(x,y) = \frac{k_1 d_1 + \bar{k}_1 \bar{d}_1}{2} = \left( \frac{a_1 k_1 + \bar{a}_1 \bar{k}_1}{2} \right) x + \left( \frac{b_1 k_1 + \bar{b}_1 \bar{k}_1}{2} \right) y \end{cases}$$

es un cambio de coordenadas ya que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{a_1 k_1 - \bar{a}_1 \bar{k}_1}{2i} & \frac{b_1 k_1 - \bar{b}_1 \bar{k}_1}{2i} \\ \frac{a_1 k_1 + \bar{a}_1 \bar{k}_1}{2} & \frac{b_1 k_1 + \bar{b}_1 \bar{k}_1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} k_1 \bar{k}_1 k_3 = \frac{1}{2i} |k_1|^2 iT \neq 0,$$

$$\text{y es real pues } \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}_1 k_1 - \bar{a}_1 \bar{k}_1}{2i} & \frac{b_1 k_1 - \bar{b}_1 \bar{k}_1}{2i} \\ \frac{a_1 k_1 + \bar{a}_1 \bar{k}_1}{2} & \frac{b_1 k_1 + \bar{b}_1 \bar{k}_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(a_1 k_1) & \operatorname{Im}(b_1 k_1) \\ \operatorname{Re}(a_1 k_1) & \operatorname{Re}(b_1 k_1) \end{pmatrix}$$

Observando que  $\begin{cases} u(x,y) = \operatorname{Im}(k_1 d_1) = -\frac{I}{2} d_3 \\ v(x,y) = \operatorname{Re}(k_1 d_1) \end{cases}$  y haciendo

$$f_1(u,v) = u(u^2 + v^2) \text{ tenemos que } f_1 \circ \varphi(x,y) = u(u^2 + v^2) \\ = \left(-\frac{I}{2} d_3\right) |k_1 d_1|^2 = -\frac{I}{2} |k_1|^2 d_1 \bar{d}_1 d_3 \text{ por lo tanto}$$

$f_1$  y  $f_2$  son equivalentes. ■

Los nombres que se le dan a los estrados se debe a la conexión que existe con las singularidades umbilicales (hiperbólica  $D_4^+$ , elíptica  $D_4^-$ , parabólica  $D_5$ ) y excepcional  $E_6$  (en la notación de Arnold).

Definiremos el discriminante por  $D = P \cup X \cup O$ , es decir: la unión de los estrados no abiertos.

La definición clásica de  $D$  (ver apéndice 1) nos lleva a que  $D$  está dado por la ecuación:

$$4(ac^3 + b^3d) + a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

Lema 1.2 Dadas  $f \in H^3(2,1)$  y  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se tiene que

$f$  y  $\lambda f$  son equivalentes. Es decir la estratificación es cónica con vértice la forma 0.

Demostración: Si  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada por  $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (\lambda^{1/3}x, \lambda^{1/3}y)$ , se tiene que es un cambio de coordenadas lineal ya que  $\det \varphi = \det \begin{pmatrix} \lambda^{1/3} & 0 \\ 0 & \lambda^{1/3} \end{pmatrix} = \lambda^{2/3} \neq 0$ . Además  $f \circ \varphi(x,y) = f(\lambda^{1/3}x, \lambda^{1/3}y) = \lambda f(x,y)$  por lo que  $f$  y  $\lambda f$  son equivalentes. ■

La importancia de éste radica en que para describir la estratificación de  $H^3(2,1) \approx \mathbb{R}^4$  es suficiente describir ésta en la esfera unitaria  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  pues al tomar el cono recuperaremos la estratificación. Se podría

hacer más, como por ejemplo identificar en  $S^3$  los puntos antípodos y describir la estratificación en el espacio proyectivo pero no lo haremos por dos razones; primero, cuando se aplican estos resultados a la Teoría de Catástrofes, la identificación antipodal confunde los máximos y los mínimos los cuales es importante distinguir, y en segundo Término deseamos visualizar la estratificación, y aunque el lenguaje proyectivo es atractivo este es más algebraico que Topológico y en consecuencia puede perderse algo de geometría.

Luego Trabajaremos en  $S^3$  que se puede pensar como  $\mathbb{R}^3$ , cuando se retira un punto "en el infinito" a  $S^3$ .

§2. La geometría de la estratificación.

Para estudiar la geometría de  $H^3(2,1)$ , ahora en  $S^3$  es conveniente usar el grupo de rotaciones o circular  $\Gamma = SO(2) = \{g_\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\}$  donde  $g_\theta$  es la rotación del plano en sentido positivo de un ángulo  $\theta$ . Su representación matricial en las bases canónicas es  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

La  $\Gamma$ -órbita de  $f$  está en la  $G$ -órbita de  $f$ .  
Toda  $G$ -órbita es unión de  $\Gamma$ -órbitas.

$G$  al actuar en  $S^3$  no da propiamente una acción, sin embargo, podemos hablar de una acción de  $\Gamma$  en  $S^3$ , aunque se tendrá una infinidad de  $\Gamma$ -órbitas en  $S^3$  se podrán identificar cuando éstas pertenecen a determinado  $G$ -estrado.

Como ahora estamos interesados en la geometría que tendrá la estratificación y no propiamente en la estratificación (sabemos ya que hay 5 estrados) nos concentraremos en la acción  $\Gamma \times S^3 \rightarrow S^3$ .

El Trabajar sólo con rotaciones  $g_\theta$  sugiere usar la notación compleja  $g_\theta(z) = e^{i\theta}z$ , con  $z = x + iy$ .

El lema siguiente, da otra manera de representar a una forma cúbica.

12

Lema 2.1. Sea  $f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$  en  $H^3(z, 1)$

$f$  puede escribirse de manera única como:

$f(z) = \operatorname{Re}(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z})$  donde  $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ ,  $\beta = \beta_R + i\beta_I$  están en  $\mathbb{C}$ .

DemostRación: Consideramos  $z = x + iy$  luego Tenemos,

$$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

$$z^2 \bar{z} = z |z|^2 = (x + iy)(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3), \text{ así,}$$

$$\alpha z^3 = [\alpha_R(x^3 - 3xy^2) - \alpha_I(3x^2y - y^3)] + i[\alpha_I(x^3 - 3xy^2) + \alpha_R(3x^2y - y^3)]$$

$$\beta z^2 \bar{z} = [\beta_R(x^3 + xy^2) - \beta_I(x^2y + y^3)] + i[\beta_I(x^3 + xy^2) + \beta_R(x^2y + y^3)].$$

Como  $f(x, y) = \operatorname{Re}(\alpha z^3) + \operatorname{Re}(\beta z^2 \bar{z})$ , por lo Tanto

$$f(x, y) = (\alpha_R + \beta_R)x^3 + (-3\alpha_I - \beta_I)x^2y + (-3\alpha_R + \beta_R)xy^2 + (\alpha_I - \beta_I)y^3.$$

$$\text{Luego } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_R \\ \alpha_I \\ \beta_R \\ \beta_I \end{pmatrix}, \text{ donde } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1/3 \\ -1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ que es}$$

invertible y con inversa

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{así, } \alpha_R = 1/4 a - 3/4 c, \quad \alpha_I = -3/4 b + 1/4 d$$

$$\beta_R = 3/4 a + 3/4 c, \quad \beta_I = -3/4 b - 3/4 d.$$

Por lo Tanto  $f(x, y)$  queda escrita como

$$f(z) = \operatorname{Re}(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z}) \text{ de manera única. } \blacksquare$$

Notación: Denotaremos por  $A$  al  $\alpha$ -plano  $\{(\alpha, 0); \alpha \in \mathbb{C}\}$ ,

por  $B$  el  $\beta$ -plano  $\{(0, \beta); \beta \in \mathbb{C}\}$ . Así  $\mathbb{R}^2$  es isomorfo a  $A \times B$ .

$A_0$  será el círculo unitario en  $A$  es decir  $\{(\alpha, 0) \in A; |\alpha| = 1\}$ .

$B_0$  será el círculo unitario en  $B$  es decir  $\{(0, \beta) \in B; |\beta| = 1\}$ .

Lemma 2.2:- El grupo de rotaciones  $\Gamma$  actúa ortogonalmente en  $A \times B$  rotando a  $A$  tres veces y a  $B$  una sola vez ambas en sentido positivo.

Demostración:- Dada  $(\alpha, \beta)$  en  $A \times B$ , ésta tiene su correspondiente forma cúbica  $f(z) = \operatorname{Re}(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z})$ ; ahora bien si  $g_\theta \in \Gamma$  entonces  $(f g_\theta)(z) = f(g_\theta(z)) = f(e^{i\theta} z) = \operatorname{Re}[\alpha (e^{i\theta} z)^3 + \beta (e^{i\theta} z)^2 \overline{(e^{i\theta} z)}]$   
 $= \operatorname{Re}[\alpha e^{3i\theta} z^3 + \beta e^{i\theta} z^2 \bar{z}]$ , así que  $(\alpha, \beta) g_\theta = (\alpha e^{3i\theta}, \beta e^{i\theta})$ . Por lo tanto  $A$  es rotado 3 veces y  $B$  es rotado sólo una vez, ambas en sentido positivo. ■

Lemma 2.3:- (a) La  $\Gamma$ -órbita de  $(1, 0)$  es  $A_0$  y la  $\Gamma$ -órbita de  $(0, 1)$  es  $B_0$ .

(b)  $A_0 \subset E$  y  $B_0 \subset H$  (donde  $E$  y  $H$  como el Teorema 1.1).

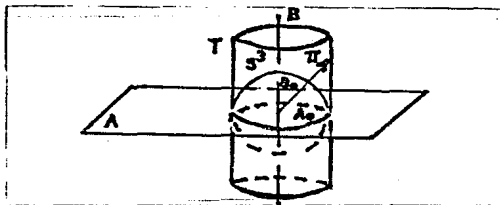
Demostración: (a) Denotemos por  $(1, 0) \Gamma$  a la

$\Gamma$ -órbita de  $(1,0) \in A_0$  es decir  $(1,0)\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in A \times B ; (\alpha, \beta) = (1,0)g_\theta, g_\theta \in \Gamma\}$  como  $(1,0)g_\theta = (e^{3i\theta}, 0)$  y  $|e^{3i\theta}| = 1$  se tiene que  $(1,0)\Gamma \subseteq A_0$ . Además como cualquier  $(\alpha, 0) \in A_0$  se puede escribir en la forma  $(\alpha, 0) = (e^{3i\theta}, 0)$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$  se tiene que  $A_0 \subseteq (1,0)\Gamma$ , luego  $A_0$  es la  $\Gamma$ -órbita de  $(1,0)$ . Análogamente la  $\Gamma$ -órbita de  $(0,1)$  es  $B_0$ .

(b) Como  $B_0$  es  $\Gamma$ -órbita, tenemos que está dentro de la  $G$ -órbita; ahora bien como  $(0,1) \in B_0$ , tenemos que su correspondiente forma cúbica  $f(z) = \operatorname{Re} z^2 \bar{z} = x^3 + xy^2$ , la cual pertenece a la  $G$ -órbita  $H$ , por lo tanto  $B_0 \subseteq H$ , análogamente  $A_0 \subseteq E$ . ■

Sea  $T = \{(\alpha, \beta) \in A \times B \mid |\alpha| = 1\}$  el cilindro unitario en  $\mathbb{C}^2$  y  $S^3 = \{(\alpha, \beta) \in A \times B \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$  la esfera unitaria en  $\mathbb{C}^2$ .

Ahora bien la proyección radial desde el origen da un difeomorfismo entre  $S^3 \setminus B_0$  y  $T$  como sigue:





Sea  $\pi : S^3 \setminus B_0 \rightarrow T$ , con inversa  
 $(\alpha, \beta) \mapsto \left( \frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\beta}{|\alpha|} \right)$

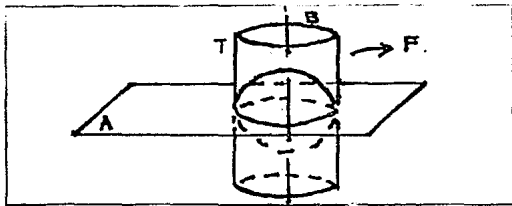
$\pi^{-1} : T \rightarrow S^3 \setminus B_0$   
 $(\alpha, \beta) \mapsto \left( \frac{\alpha}{(1+|\beta|^2)^{1/2}}, \frac{\beta}{(1+|\beta|^2)^{1/2}} \right)$  además ambas

son diferenciables por lo que  $S^3 \setminus B_0$  y  $T$  son difeomorfos

Como  $D = P \cup X \cup O$ , tenemos que  $(D \cap S^3) \cap B_0 = \emptyset$   
 así, que  $D \cap S^3$  se proyecta difeomorfamente; luego,  
 será suficiente trabajar en  $T$  en lugar de  $S^3$ .

Observemos que  $T$  es invariante bajo  $\Gamma$ , es decir  
 si  $(\alpha, \beta) \in T$  y  $g_\theta \in \Gamma$  tenemos que  $(\alpha, \beta) g_\theta \in T$ , ya que  
 $(\alpha, \beta) g_\theta = (\alpha e^{i\theta}, \beta e^{i\theta})$  y  $|\alpha e^{i\theta}| = |\alpha| = 1$ .

Sea  $U = \pi(D \cap S^3)$ ,  $F = \{(\alpha, \beta) \in A \times B; \alpha = 1\}$  y  
 $Q^3 = U \cap F$ . Observemos que  $B \cong F$  y  $T \cong A_0 \times F$ .



Lema 2.4:  $U$  es la  $\Gamma$ -órbita de  $Q^3$  es decir tenemos  
 que  $U = \Gamma(Q^3) = \{g g_\theta; g_\theta \in \Gamma, g \in Q^3\}$ .

Demostración: Sea  $u = (\alpha, \beta) \in U$ , por lo que  $\alpha = e^{i t_0}$   
 para algún  $t_0 \in [0, 2\pi)$ ; queremos expresar a  $u$  en la  
 forma  $g g_\theta$  para algún  $g \in Q^3$  y  $g_\theta \in \Gamma$ , como  $g_{(t_0-\theta)} = g_\theta^{-1} \in \Gamma$ ,

así  $\eta = \mu g_0^{-1} = (e^{iT_0}, \beta) g_{(2\pi-\theta)} = (e^{iT_0} e^{3i(2\pi-\theta)}, \beta e^{i(2\pi-\theta)})$   
 basta encontrar algún  $\theta$  tal que  $e^{iT_0} e^{3i(2\pi-\theta)} = 1$  por  
 lo que  $\theta = 2\pi + \frac{T_0}{3}$  así  $\mu = \eta g_0$  donde  $\theta = 2\pi + \frac{T_0}{3}$  y  
 $\eta = (\alpha, \beta) g_{(2\pi-\theta)}$ .

Sea  $\eta g_0 \in \Gamma(Q')$  donde  $\eta = (1, \beta) \in Q'$  y  $g_0 \in \Gamma$  por lo  
 que  $\pi^{-1}(1, \beta) = \frac{1}{(1+|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}} (1, \beta)$  está en  $DN S^3$ , luego por

los lemas 1.1 y 1.2 Tenemos que

$[\pi^{-1}(1, \beta)] g_0 = \frac{1}{(1+|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}} (e^{3i\theta}, \beta e^{i\theta})$  está en  $DN S^3$ , por

otro lado Tenemos que  $\eta g_0 \in U$  si y sólo si

$$\pi^{-1}(e^{3i\theta}, \beta e^{i\theta}) = \left( \frac{e^{3i\theta}}{(1+|\beta e^{i\theta}|^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\beta e^{i\theta}}{(1+|\beta e^{i\theta}|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}} (e^{3i\theta}, \beta e^{i\theta}) \in DN S^3 \text{ por lo que } \eta g_0 \in U. \quad \square$$

### § 3.- La geometría de $Q'$

Por el lema 2.4 para describir  $U$  bastará conocer  $Q'$ , ya que  $U$  la obtendremos de  $Q'$ , aplicando la acción de  $\Gamma$  sobre  $Q'$ .

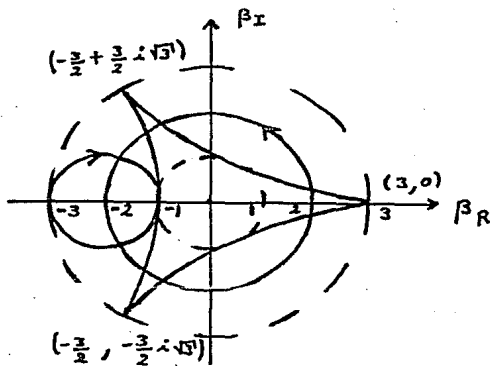
Lema 3.1.  $Q'$  está parametricamente dada por:

$$\beta(\phi) = -2e^{i\phi} + e^{-2i\phi} \text{ donde } \phi \in [0, 2\pi).$$

Demostración: Sea  $(1, \beta) \in Q' = U \cap F \subseteq D \cap F$ , por lo que  $(1, \beta)$  es degenerada, luego consideramos la cúbica correspondiente  $f(z) = \operatorname{Re}(z^3 + \beta z^2 \bar{z})$  la cual tiene dos o más líneas de raíces reales iguales  $x:y = \lambda i$ . Como  $f$  es homogénea tenemos que la línea queda determinada por su intersección con el círculo unitario  $z = e^{i\theta}$ , considerando  $\theta \in [0, \pi)$  para que la intersección sea única. Así,  $f(\theta) = \operatorname{Re}(e^{3i\theta} + \beta e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + \beta e^{i\theta} + \bar{\beta} e^{-i\theta})$  tiene una raíz doble en  $\theta$  si y sólo si  $f(\theta) = f'(\theta) = 0$ , si y sólo si  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3i\theta} & -e^{-3i\theta} \\ -3ie^{3i\theta} & +3ie^{-3i\theta} \end{pmatrix}$  si y sólo si  $\begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\theta} & -e^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{3i\theta} & -e^{-3i\theta} \\ -3ie^{3i\theta} & +3ie^{-3i\theta} \end{pmatrix}$  si y sólo si  $\beta(\theta) = -2e^{2i\theta} + e^{-4i\theta}$ . Haciendo  $\phi = 2\theta$  tenemos  $\beta(\phi) = -2e^{i\phi} + e^{-2i\phi}$  donde  $\phi \in [0, 2\pi)$ . ■

La ecuación paramétrica  $\beta(\phi) = -2e^{i\phi} + e^{-2i\phi}$  representa el movimiento de un punto  $z$ , obtenido

al sobreponer una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj en un círculo de radio 2 a una rotación en sentido a las manecillas del reloj con una rapidez dos veces mayor en un círculo de radio 1. Esto determina una hipocicloide de 3-cúspides, (ver el apéndice 2) estando entre los círculos de radio 1 y de radio 3.



Las cúspides de  $\beta(\phi)$  son simples (ver apéndice 2).

Proposición 3.1 -  $Q'' = X \cap Q'$  son las Tres cúspides de  $Q'$ .

Demostración: Como  $X$  es la  $G$ -órbita caracterizada por tener en cada uno de sus elementos Tres líneas de raíces iguales, se tiene que  $(1, \beta) \in Q''$  si la cúbica correspondiente  $f(z) = \text{Re}(z^3 + \beta z^2 \bar{z})$  tiene Tres raíces iguales, al hacer  $z = e^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, \pi)$  se tendrá

cuando  $f(\theta) = \frac{1}{2} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + \beta e^{i\theta} + \bar{\beta} e^{-i\theta})$  Tenga una raíz Triple en  $\theta$ , o equivalentemente que  $2e^{i\theta} f(\theta) = e^{4i\theta} + e^{-2i\theta} + \beta e^{2i\theta} + \bar{\beta}$  Tenga una raíz Triple en  $\theta$ .

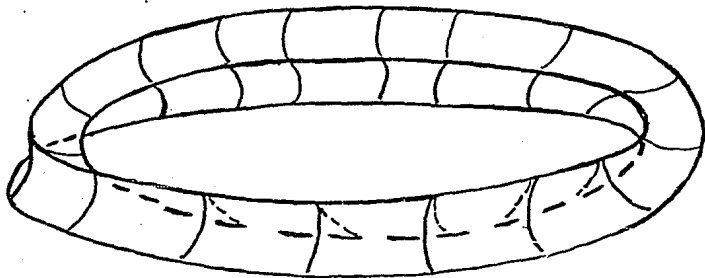
Esto sucederá cuando

$$\begin{cases} e^{4i\theta} + e^{-2i\theta} + \beta e^{2i\theta} + \bar{\beta} = 0 \\ 4i e^{4i\theta} - 2i e^{-2i\theta} + 2i\beta e^{2i\theta} = 0 \\ -16 e^{4i\theta} - 4 e^{-2i\theta} - 4\beta e^{2i\theta} = 0 \end{cases}$$

se resuelvan simultáneamente, de la última ecuación despejamos  $\beta$ , así  $\beta(\theta) = -4e^{2i\theta} - e^{-4i\theta}$ , luego de las dos primeras obtenemos que  $\beta(\theta) = -2e^{2i\theta} + e^{-4i\theta}$ , por lo tanto de las ecuaciones obtenidas tenemos que  $-2e^{-4i\theta} = 2e^{2i\theta}$  por lo tanto  $e^{6i\theta} = 1$ , al hacer  $\phi = 2\theta$ , tenemos  $e^{3i\phi} = -1$  así que  $\phi \in \{\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}$ . Evaluando en estos valores,  $\beta(\phi) \in \{-\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}), 3, \frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})\}$ , obtenemos que son las cúspides de  $Q'$ .

Por la proposición anterior podemos concluir  $Q''' = P \cap Q'$  es igual a los lados de la hipocicloide de Tres cúspides, sin las cúspides ya que  $\theta \cap Q' = \emptyset$ , (donde  $\theta$  es la  $o$ -forma).

Si rotamos la hipocicloide Triángular alvededor de un eje  $\frac{1}{3}$  vuelta por cada círculo completo. (ver la figura siguiente)



### Brazalete Umbilical de Zeeman

En esta figura la orilla cuspide del brazalete correspondien a las formas simbólicas, el resto de la superficie a las formas parabólicas, el interior a las formas elípticas y el exterior a las formas hiperbólicas.

Por lo anterior obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.1. La estratificación inducida de  $S^3$  es de la forma de un brazalete, con secciones en forma de una hipocicloide Triángular que giran  $\frac{1}{3}$  al dar una vuelta al brazalete. ■

Del Teorema anterior podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario - La estratificación de  $\mathbb{R}^4$  puede escribirse paramétricamente como sigue:  
 Sea  $(\alpha, \beta) = \lambda \{ e^{3i\theta}, \mu e^{-i\theta} (2e^{i\varphi} + e^{-2i\varphi}) \}$   
 $\lambda, \mu \geq 0, 0 \leq \theta, \varphi < 2\pi$ . entonces los estratos están dados por:

$$H: \lambda > 0, \mu > 1$$

$$E: \lambda > 0, 0 \leq \mu < 1$$

$$P: \lambda > 0, \mu = 1, \varphi \neq 0$$

$$X: \lambda > 0, \mu = 1, \varphi = 0$$

$$\emptyset: \lambda = 0$$

Con codimensión, 0, 0, 1, 2, 4. ■

## II. LA GEOMETRIA DE LAS FORMAS CUARTICAS.

Ahora consideraremos las formas cuárticas homogéneas en dos variables, con coeficientes binomiales, es decir en

$H^4(2,1) = \{ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4; a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$   
 que de manera natural es isomorfo a  $\mathbb{R}^5$  como espacios vectoriales reales.

De igual manera que el caso de las cúbicas  $G = GL(2, \mathbb{R})$  actúa por la derecha de  $H^4(2,1)$  de la siguiente manera  $\psi: G \times H^4(2,1) \rightarrow H^4(2,1)$   
 $(g, f) \mapsto f \circ g = fg.$

Es de interés la descomposición de  $H^4(2,1)$  por medio de las  $G$ -órbitas.

Como el caso de las formas cúbicas caracterizaremos, la estructura de las raíces de  $f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$ .

Definimos  $R_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = 0\}$   
 para  $A = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5$ .

Notemos que si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $(x,y) \in R_A$  entonces  $\lambda(x,y) \in R_A$  por lo tanto para todo  $A \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$   $R_A$  consta de líneas que pasan por el origen.

Para encontrar el arreglo de estas líneas, encontraremos sus intersecciones con la línea  $x=1$  (Si una de las líneas es  $x=0$  es decir el eje  $Y$  diremos que se interseca



con  $x=1$ , en el punto al infinito ).

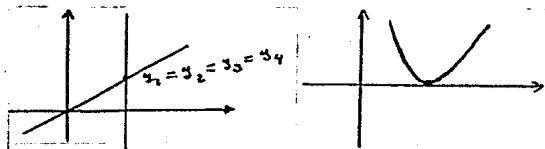
Tomando  $x=1$  obtenemos una cuártica en  $y$ ,  
 $P_A(y) = a + 4by + 6cy^2 + 4dy^3 + ey^4$ , la cual tiene a lo más  
 cuatro soluciones  $y_1, y_2, y_3$  y  $y_4$  a menos que  $A = (0,0,0,0)$   
 por lo que hay 4 líneas de raíces cuando mucho.

Para el caso en que trabajemos con el eje  $Y$ ,  
 Tenemos que la cuártica, tiene por solución a  $x=0$ ,  
 la cual solo se satisface cuando  $e=0$ , en tal caso  
 $P_A(y)$  se reduce a una cúbica con a lo más tres  
 raíces.

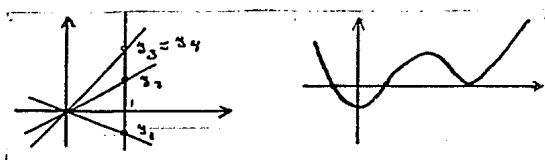
Las posibilidades para  $R_A$  son:

(i) Todo el plano si  $A = (0,0,0,0,0)$

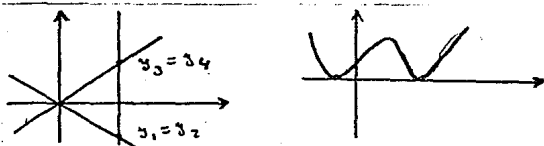
(ii) Cuatro líneas coincidentes



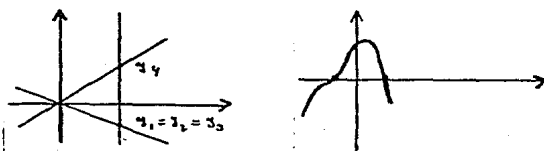
(iii) Cuatro líneas dos de las cuales coincidentes



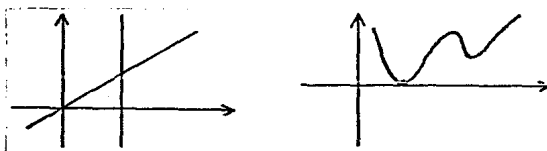
(iv) Dos pares de líneas de raíces reales iguales



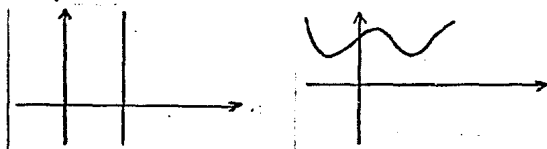
(v) Cuatro líneas de raíces reales Tres de las cuales coincidentes.



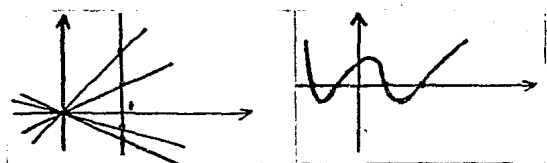
(vi) Dos líneas de raíces reales iguales y dos líneas de raíces complejas.



(vii) Dos pares de líneas de raíces complejas iguales

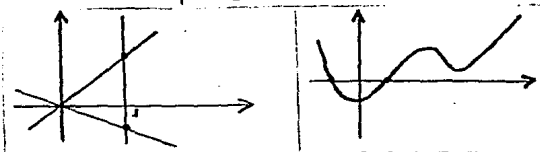


(viii) Cuatro líneas de raíces reales distintas

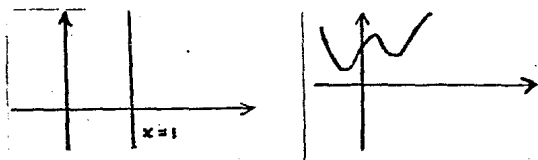


(ix) Dos líneas de raíces reales distintas

y dos complejas



(x) Dos pares de líneas de raíces complejas distintas



Lema.- Ningún cambio lineal de coordenadas puede alterar el número de líneas de raíces distintas de la forma cuártica binaria.

Demostración.- Análoga a la del Lema 1.1 del Capítulo I. ■

Lema.- Dadas  $f \in H^4(\mathbb{R}, 1)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se Tiene que  $f$  y  $\lambda f$  son equivalentes.

Demostración.- El cambio de coordenadas  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $\varphi(x, y) = (\lambda^{1/4}x, \lambda^{1/4}y)$  es el que da la equivalencia. ■

Observemos en el resultado anterior que a diferencia del Lema 1.2 del Capítulo I se Tiene  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  y no en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . De ésto resultará que hay

que distinguir entre positivo definido y negativo  
definido.

## §1.- Teoría clásica de invariantes

Si  $f$  y  $f'$  son dos formas binarias relacionadas por  $f' \circ g = f$  donde  $g \in GL(2, \mathbb{R})$ , una función  $P$  de los coeficientes de  $f$  que es igual a la misma función de los coeficientes  $f'$  multiplicada por un factor que sólo depende de  $g$  entonces  $P$  es llamado un invariante de la forma binaria  $f$  (y por lo tanto de la órbita  $f \cdot G$ )

Obsérvese que no decimos que  $P$  es el mismo en la órbita, sino que salvo un factor que depende de la forma de pasar de  $f$  a  $f' \in f \cdot G$ , es el mismo.

Proposición 1.1.- Si la función  $P$  es un polinomio entonces el factor que depende sólo de la Transformación, es una potencia entera del determinante de la matriz asociada a la Transformación lineal.

Demostración.- (Ver apéndice 1)

A la potencia del determinante de la Transformación se le llama peso del invariante, cuando éste es cero, al invariante lo llamaremos un invariante absoluto.

Un conjunto de invariantes de una forma binaria

$f$  es llamado "básico" si cada invariante de la forma binaria  $f$  es un polinomio o función racional de los elementos del conjunto.

Proposición 1.2 .- El conjunto básico de invariantes de una forma cuadrática, cúbica y cuártica binaria son:

$$\{ \Delta = ac - b^2 \}, \{ \Delta = 4(ac^3 + b^3d) + a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd \},$$

y  $\{ S = ae - 4bd + 3c^2, T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 \}$  respectivamente.

Demostración .- (Ver apéndice 1).

El discriminante de la forma cuártica binaria, es un invariante de ésta, se puede verificar (ver apéndice 1) que  $\Delta = S^3 - 27T^2$ .

Además si vemos que los pesos de los invariantes  $S$  y  $T$  son 4 y 6 respectivamente, tenemos que  $\Delta$  es de peso 12, de lo anterior podemos concluir que  $J = \frac{S^3}{\Delta} = 1 + 27 \frac{T^2}{\Delta}$  es un invariante absoluto.

Para nosotros es de gran importancia el invariante  $J$ , pues  $J(fg) = J(f) (\det g)^0 = J(f)$ , para todo  $g \in G$ , luego  $J$  permanece constante a lo

largo de la  $G$ -órbita que contiene a  $f$ , de esta manera  $J$  nos da información en dónde se encuentra la órbita.

Para interpretar estos invariantes, nos fijamos en las pendientes de las líneas de raíces  $y = \lambda_i x$  donde  $\lambda_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  y  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (haciendo uso de la geometría proyectiva, la línea  $y = \infty x$  es definida como la línea  $x = 0$ ).

Así, pues las cuárticas degeneradas son las que tienen dos o más de las  $\lambda_i$  iguales (con la posibilidad de  $\infty$ ). La interpretación de  $S$  y  $T$  requiere un estudio de  $J$ , como sigue:

La razón cruzada de cuatro puntos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$ , está dada por  $\lambda = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}$  en

$\mathbb{C}_\infty$ . Es evidente que el valor de la razón cruzada, depende del orden de estos puntos.

Como el orden de las líneas de raíces es arbitrario, tenemos que la razón cruzada de las pendientes de las líneas de raíces no está bien definida.

Para resolver esto consideramos la acción

$$\psi: S_4 \times \mathbb{C}_\infty^4 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^4$$

$$(g, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)) \mapsto (\lambda_{g(1)}, \lambda_{g(2)}, \lambda_{g(3)}, \lambda_{g(4)}) \quad \text{de } S_4$$

sobre  $\mathbb{C}_\infty^4$ , donde  $S_4$  es el grupo simétrico de orden 24. Luego podemos definir la razón cruzada de las pendientes de las líneas de raíces bajo la acción de  $S_4$ . Sin embargo, el número de razones cruzadas distintas no es veinticuatro. Puesto que el grupo de Klein,  $K = \{ e, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$  es un subgrupo normal de  $S_4$ , que deja fijo a la razón cruzada, podemos tomar el cociente  $S_4/K$ .

Como  $S_3$  y  $S_4/K$  son isomorfos digamos vía  $\varphi: S_3 \rightarrow S_4/K$  podemos definir la acción

$$l: S^3 \times \mathbb{C}_\infty^4 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty^4$$

$$(\tau, (z_1, z_2, z_3, z_4)) \longmapsto (\lambda_{\alpha(1)}, \lambda_{\alpha(2)}, \lambda_{\alpha(3)}, \lambda_{\alpha(4)})$$

donde  $\alpha$  es cualquier elemento de  $\varphi(\tau) \in S_4/K$

De esta manera bajo la acción de  $S_3$ ,  $\lambda$  es mandada a los seis valores siguientes:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Como  $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , tenemos que  $S_3$  actúa como un grupo de transformaciones de Moebius.

Observando que la razón cruzada es invariante bajo transformaciones lineales no singulares, podemos ver de manera natural al espacio de órbitas



como  $\mathbb{C}_\infty / S_3$  en el cual los seis valores son "pegados". Regresando con los invariantes, a  $J$  lo podemos ver como la función racional

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\infty & \longrightarrow & \mathbb{C}_\infty \\ \lambda & \longmapsto & \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda - 1)^2} \end{array}$$

Esta es "compatible" con la acción de  $S_3$  en el sentido que los seis valores de la razón cruzada bajo la acción de  $S_3$ , son fijados por la función  $J$ . Inversamente dado  $c \in \mathbb{C}_\infty$ , las seis soluciones de la ecuación  $\frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda + 1)^2} = c$ , son precisamente

las imágenes bajo la acción de  $S_3$  de alguna solución particular  $\lambda$ . Así pues, el espacio de órbitas puede ser identificado con otra esfera,  $J^{-1}$  manda cada punto a su órbita.

Ahora  $J$  es diferente a  $\lambda$ , pues  $\lambda$  es real si y sólo si todas las  $\lambda_i$  son reales. Como  $J$  es un invariante absoluto tenemos que el conjunto

$J = cte$  permanece fijo bajo  $G$ ; ya como la constante puede ser arbitraria, tenemos que hay una infinitud de  $G$ -órbitas, en contraste al caso de las cúbicas.

Finalmente hay precisamente 3 casos donde

$J(\lambda) = 6$ , Tiene menos de seis soluciones.

(i)  $J=1$ ,  $\lambda = -1, \frac{1}{2}, 2$  El conjunto de líneas es llamado rango armónico.

(ii)  $J=\infty$ ,  $\lambda = 0, 1, \infty$  El discriminante se anula.

(iii)  $J=0$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{3})$  El conjunto de líneas es llamado rango equiarmonico

Cuando  $S=0$  Tenemos  $J=0$  y con  $T=0$  Tenemos  $J=1$ . Esta es la interpretación de  $S$  y  $T$ .

## § 2.- La estratificación de $H^4(2,1)$ .

Teorema 2.1.- A  $H^4(2,1)$  lo podemos clasificar como sigue:

(a) El conjunto de cuárticas degeneradas se dividen en 12 estrados caracterizados por el Tipo de raíces.

<u>Estrados</u>	<u>Representante</u>
(i) Cero	$\emptyset$
(ii) 4 reales iguales	$\begin{cases} \text{Positiva} & x^4 \\ \text{Negativa} & -x^4 \end{cases}$
(iii) 2 reales iguales y 2 reales distintas	$\begin{cases} \text{Positiva} & x^2(x^2-y^2) \\ \text{Negativa} & -x^2(x^2-y^2) \end{cases}$
(iv) 2 pares de reales iguales	$\begin{cases} \text{Positiva} & x^2y^2 \\ \text{Negativa} & -x^2y^2 \end{cases}$
(v) 3 reales iguales	$x^3y$
(vi) 2 reales iguales y 2 complejas	$\begin{cases} \text{Positiva} & x^2(x^2+y^2) \\ \text{Negativa} & -x^2(x^2+y^2) \end{cases}$
(vii) 2 pares de complejas iguales	$\begin{cases} \text{Positiva} & (x^2+y^2)^2 \\ \text{Negativa} & -(x^2+y^2)^2 \end{cases}$

(b) Las cuárticas no degeneradas están en cuatro componentes, abiertas en  $\mathbb{R}^5$  como sigue:

<u>Componentes</u>	<u>Tipo</u>
(viii) 4 raíces reales distintas.	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
(ix) 2 raíces reales distintas y 2 complejas	$x^4 - y^4$
(x) 0 raíces reales, positiva definida	$x^4 + y^4$

(81) o raíces reales, negativa definida  $-(x^4 + y^4)$

Estas componentes son  $G$ -invariantes, pero consisten de una infinidad de órbitas.

### Demostración:

- (i) Sólo sucede cuando  $(a, b, c, d, e) = \bar{0}$ .
- (ii) Se deberá tener que las 4 líneas sean iguales por lo que  $a_2x + b_2y = 0$ ,  $a_3x + b_3y = 0$  y  $a_4x + b_4y = 0$  son múltiplos de  $a_1x + b_1y = 0$  por lo tanto  $f(x, y) = \lambda(a_1x + b_1y)^4$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . El mapeo  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $(x, y) \mapsto (u, v)$
- $$\begin{cases} u(x, y) = |\lambda|^{1/4} (a_1x + b_1y) \\ v(x, y) = -b_1x + a_1y \end{cases},$$
- es un cambio de coordenadas. Si  $\lambda > 0$ , sea  $f_1(u, v) = u^4$ , tenemos que  $f_1 \circ \varphi = f$  por lo tanto  $f_1$  es equivalente a  $f$ . Si  $\lambda < 0$ , sea  $f_2(u, v) = -u^4$ , luego  $f_2 \circ \varphi = f$  por lo tanto  $f_2$  es equivalente a  $f$ . Observemos que  $f_1$  y  $f_2$  no están en la misma  $G$ -órbita.

- (iii) Se deberá tener que  $f(x, y) = \lambda(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)^2 = \lambda d_1 d_2 d_3^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  donde las líneas son linealmente independientes por parejas; es decir  $k_1 = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \neq 0$ ,
- $$k_2 = \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \vee \quad k_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

El mapeo  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2) = \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} [(a_1 \kappa_1 + a_2 \kappa_2)x + (b_1 \kappa_1 + b_2 \kappa_2)y] \\ v(x,y) = \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (\kappa_1 d_1 - \kappa_2 d_2) = \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} [(a_1 \kappa_1 - a_2 \kappa_2)x + (b_1 \kappa_1 - b_2 \kappa_2)y] \end{cases}$$

es un cambio de coordenadas pues el

$$\det \begin{pmatrix} \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (a_1 \kappa_1 + a_2 \kappa_2) & \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (b_1 \kappa_1 + b_2 \kappa_2) \\ \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (a_1 \kappa_1 - a_2 \kappa_2) & \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (b_1 \kappa_1 - b_2 \kappa_2) \end{pmatrix} = -\frac{|\lambda|^{1/2}}{2} \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \neq 0.$$

Si  $\lambda > 0$ , sea  $f_1(u,v) = u^2(u^2 - v^2)$  y como tenemos que  $\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2 + \kappa_3 d_3 = 0$  entonces  $f_1 \circ \varphi(x,y) = u^2(u^2 - v^2) = u^2(u+v)(u-v) = \left[ \frac{|\lambda|^{1/4} (-\kappa_3 d_3)}{2} \right]^2 (|\lambda|^{1/4} \kappa_1 d_1) (|\lambda|^{1/4} \kappa_2 d_2) = \frac{1}{4} \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3^2 (|\lambda| d_1 d_2 d_3^2)$ , luego  $f_1$  es equivalente a  $f$ .

Si  $\lambda < 0$ , sea  $f_2(u,v) = -u^2(u^2 - v^2)$ , análogamente tenemos que  $f_2 \circ \varphi(x,y) = \frac{1}{4} \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3^2 (-|\lambda| d_1 d_2 d_3^2)$ , luego  $f_2$  es equivalente a  $f$  y  $f_1, f_2$  no están en la misma  $G$ -órbita.

(iv) Tenemos que  $f(x,y) = \lambda_1 \lambda_2 (a_1 x + b_1 y)^2 (a_2 x + b_2 y)^2$  donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y las líneas  $a_1 x + b_1 y = 0$  y  $a_2 x + b_2 y = 0$  son linealmente independientes,  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \kappa \neq 0$

El mapeo  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $\begin{cases} u(x,y) = |\lambda_1|^{1/2} (a_1 x + b_1 y) \\ v(x,y) = |\lambda_2|^{1/2} (a_2 x + b_2 y) \end{cases}$

es un cambio de coordenadas ya que el

$$\det \begin{pmatrix} |\lambda_1|^{1/2} a_1 & |\lambda_1|^{1/2} b_1 \\ |\lambda_2|^{1/2} a_2 & |\lambda_2|^{1/2} b_2 \end{pmatrix} = |\lambda_1|^{1/2} |\lambda_2|^{1/2} \kappa \neq 0$$

Además si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , Tomando  $f_1(u,v) = u^2 v^2$

Tenemos que  $f_1 \circ \varphi(x, y) = u^2 v^2 = f(x, y)$ , por lo tanto  $f_1$  es equivalente a  $f$ . Si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , definimos  $f_2(u, v) = -u^2 v^2$  con lo cual  $f_2 \circ \varphi(x, y) = f(x, y)$ , por lo tanto  $f_2$  es equivalente a  $f$ . También  $f_1$  y  $f_2$  no están en la misma  $G$ -órbita.

(V) Debemos tener que  $f(x, y) = \lambda(a_1 x + b_1 y)^3(a_2 x + b_2 y)$  donde  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y las líneas  $a_1 x + b_1 y = 0$  y  $a_2 x + b_2 y = 0$  son linealmente independientes,  $\kappa = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ . El mapeo  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (u, v)$

donde  $\begin{cases} u(x, y) = \lambda^{1/3}(a_1 x + b_1 y) \\ v(x, y) = a_2 x + b_2 y \end{cases}$  es un cambio de

coordenadas, además si  $f_1(u, v) = u^3 v$  tenemos que  $f_1 \circ \varphi = u^3 v = \lambda(a_1 x + b_1 y)^3(a_2 x + b_2 y) = f(x, y)$  por lo tanto  $f_1$  es equivalente a  $f$ .

(VI) Tenemos que  $f(x, y) = \lambda(a_1 x + b_1 y)(\bar{a}_1 x + \bar{b}_1 y)(a_3 x + b_3 y)^2 = \lambda d_1 \bar{d}_1 d_3^2$  donde  $(a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(a_1, b_1) \in \mathbb{C}^2$  además  $\kappa_1 = \det \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $\kappa_2 = \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0$  ( $\kappa_2 = -\bar{\kappa}_1$ ) y

$$\kappa_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \end{pmatrix} = a_1 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 b_1 = 2i \operatorname{Im}(a_1 \bar{b}_1) = iT$$

donde  $T = 2 \operatorname{Im}(a_1 \bar{b}_1)$ . El mapeo  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$u(x, y) = |\lambda|^{1/4} \frac{\kappa_1 d_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{d}_1}{2i} = \frac{|\lambda|^{1/4}}{2i} [(a_1 \kappa_1 - \bar{a}_1 \bar{\kappa}_1)x + (b_1 \kappa_1 - \bar{b}_1 \bar{\kappa}_1)y]$$

$$v(x, y) = |\lambda|^{1/4} \frac{\kappa_2 d_1 + \bar{\kappa}_2 \bar{d}_1}{2} = \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} [(a_1 \kappa_1 + \bar{a}_1 \bar{\kappa}_1)x + (b_1 \kappa_1 + \bar{b}_1 \bar{\kappa}_1)y]$$

es un cambio de coordenadas ya que si

$$A = \begin{pmatrix} \frac{|\lambda|^{1/4}}{2i} (a_1, \kappa_1 - \overline{a_1, \kappa_1}) & \frac{|\lambda|^{1/4}}{2i} (b_1, \kappa_1 - \overline{b_1, \kappa_1}) \\ \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (a_1, \kappa_1 + \overline{a_1, \kappa_1}) & \frac{|\lambda|^{1/4}}{2} (b_1, \kappa_1 + \overline{b_1, \kappa_1}) \end{pmatrix} \text{ entonces el}$$

$$\det A = \frac{|\lambda|^{1/2}}{2i} \kappa_1 \overline{\kappa_1} \kappa_3 = \frac{i}{2} |\lambda|^{1/2} |\kappa_1|^2 \neq 0, \text{ y es real pues}$$

$$A = \begin{pmatrix} |\lambda|^{1/4} \operatorname{Im}(a_1, \kappa_1) & |\lambda|^{1/4} \operatorname{Im}(b_1, \kappa_1) \\ |\lambda|^{1/4} \operatorname{Re}(a_1, \kappa_1) & |\lambda|^{1/4} \operatorname{Re}(b_1, \kappa_1) \end{pmatrix}. \text{ Observemos que}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = |\lambda|^{1/4} \operatorname{Im}(\kappa_1, d_1) = -|\lambda|^{1/4} \frac{i}{2} d_3 \\ v(x, y) = |\lambda|^{1/4} \operatorname{Re}(\kappa_1, d_1) \end{cases},$$

luego si  $\lambda > 0$ , definimos  $f_1(u, v) = u^2(u^2 + v^2)$ , por lo tanto  $f_1 \circ \varphi(x, y) = u^2(u^2 + v^2) = (-|\lambda|^{1/4} \frac{i}{2} d_3)^2 (|\lambda|^{1/4})^2 |\kappa_1, d_1|^2 = \frac{i^2}{4} |\kappa_1|^2 (|\lambda| d_1, \overline{d_1}, d_3)$ , luego  $f_1$  es equivalente a  $f$ .

Si  $\lambda < 0$ , definimos  $f_2(u, v) = -u^2(u^2 + v^2)$ , análogamente  $f_2 \circ \varphi(x, y) = \frac{i^2}{4} |\kappa_1|^2 (-|\lambda| d_1, \overline{d_1}, d_3)$ , y por lo tanto  $f_2$  es equivalente a  $f$ . También  $f_1$  y  $f_2$  no están en la misma  $G$ -órbita.

$$(VII) \text{ Tenemos } f(x, y) = \lambda (a_1 x + b_1 y)^2 (\overline{a_1} x + \overline{b_1} y)^2 = \lambda d_1^2 \overline{d_1}^2 \text{ donde } (a_1, b_1) \in \mathbb{C}^2, \text{ además } \kappa = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{a_1} & \overline{b_1} \end{pmatrix} =$$

$$= 2i \operatorname{Im}(a_1, \overline{b_1}) = iT \neq 0, \text{ donde } T = 2 \operatorname{Im}(a_1, \overline{b_1}) \text{ y}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  El mapeo  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\begin{cases} u(x,y) = |z|^{1/4} (|a_1| x + \frac{\operatorname{Re}(a\bar{b}_1)}{|a_1|} y) \\ v(x,y) = |z|^{1/4} \frac{\operatorname{Im}(a\bar{b}_1)}{|a_1|} y \end{cases}$$

es un cambio de coordenadas pues  $\det \begin{pmatrix} |z|^{1/4} |a_1| & |z|^{1/4} \frac{\operatorname{Re}(a\bar{b}_1)}{|a_1|} \\ 0 & |z|^{1/4} \frac{\operatorname{Im}(a\bar{b}_1)}{|a_1|} \end{pmatrix} \neq 0$ .

Si  $\lambda > 0$  y  $f_1(u,v) = (u^2 + v^2)^2$  Tenemos que  $f_1 \circ \varphi = f$  por lo tanto  $f_1$  es equivalente a  $f$ . Si  $\lambda < 0$  definimos  $f_2(u,v) = -(u^2 + v^2)^2$ , análogamente  $f_2 \circ \varphi = f$  por lo tanto  $f_2$  es equivalente a  $f$ , y también  $f_1$  y  $f_2$  no están en la misma  $G$ -órbita.

El caso (b) es inmediato, las componentes definidas por VIII, IX, X y XI no pueden ser órbitas pues la razón cruzada,  $J$  son constantes en órbitas. ■



### § 3.- La geometría del discriminante; un análisis preliminar.

Lo que se pretende en lo sucesivo es tener una representación geométrica de las formas cuárticas degeneradas, caracterizadas por que el discriminante  $\Delta = S^3 - 27T^2$  es igual a cero.

Como la estratificación es cónica, al igual que en las cúbicas bastará trabajar en la esfera  $S^4$  y por estar propiamente interesados en la geometría también restringiremos nuestra atención a la acción del grupo circular  $\Gamma = \{g_\theta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; g_\theta(z) = e^{i\theta}z\}$  sobre  $S^4$ , (ver pág. ).

Lema 3.1 :- Sea  $f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$  en  $H^4(z,1)$  entonces  $f$  puede expresarse en forma única como:  $f(z) = \operatorname{Re}(\alpha z^4 + \beta z^3 \bar{z} + \gamma z^2 \bar{z}^2)$  para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Demostración :- Análoga a la del lema 2.1 del Cap. I, las relaciones entre  $a, b, c, d, e$  y  $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ ,  $\beta = \beta_R + i\beta_I$ ,  $\gamma$  están dadas por:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_R \\ \alpha_I \\ \beta_R \\ \beta_I \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \alpha_R \\ \alpha_I \\ \beta_R \\ \beta_I \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

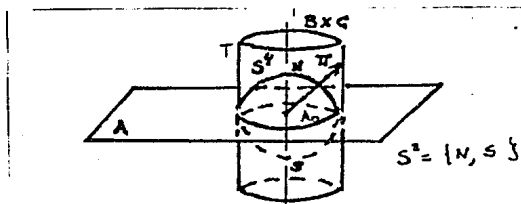
Notación : Análogamente al caso cúbico denotaremos por  $A = \{(\alpha, 0, 0); \alpha \in \mathbb{C}\}$ , el  $\alpha$ -plano,  $B = \{(0, \beta, 0) / \beta \in \mathbb{C}\}$  el  $\beta$ -plano y  $G = \{(0, 0, x); x \in \mathbb{R}\}$  la  $x$ -línea. Así  $\mathbb{R}^5$  es isomorfo a  $A \times B \times G$ . También  $A_0 = \{(\alpha, 0) \in A / |\alpha| = 1\}$  y  $B_0 = \{(0, \beta) \in B; |\beta| = 1\}$  son los círculos unitarios en  $A$  y  $B$  respectivamente.

Lema 3.2: El grupo de rotaciones  $\Gamma$  actúa ortogonalmente en  $A \times B \times G$  rotando a  $A$  cuatro veces, a  $B$  dos veces ambas en sentido positivo y dejando a  $G$  fijo.

Demostración : Análogamente al lema 2.2 del Cap. I, tenemos que  $(\alpha, \beta, x) g_\theta = (\alpha e^{4i\theta}, \beta e^{2i\theta}, x)$  por lo tanto  $A$  es rotado 4 veces,  $B$  2 veces y  $G$  lo deja fijo. ■

Sea  $T = \{(\alpha, \beta, x) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}; |\alpha| = 1\}$  el cilindro unitario en  $\mathbb{R}^5$ ,  $S^4 = \{(\alpha, \beta, x) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} / |\alpha|^2 + |\beta|^2 + x^2 = 1\}$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^5$  y  $S^2 = \{(\alpha, \beta, x) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} / \alpha = 0, |\beta|^2 + x^2 = 1\}$  la 2-esfera en  $S^4$ .

Ahora bien la proyección radial desde el origen da un difeomorfismo entre  $S^4 \setminus S^2$  y  $T$  como sigue:



Sea  $\Pi : S^1 \times S^1 \rightarrow T$  con inversa  
 $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \left( \frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\beta}{|\alpha|}, \frac{\gamma}{|\alpha|} \right)$

$\Pi^{-1} : T \rightarrow S^1 \times S^1$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \left( \frac{\alpha}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{1/2}}, \frac{\beta}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{1/2}}, \frac{\gamma}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{1/2}} \right),$$

además ambas son diferenciables por lo que  $S^1 \times S^1$  y  $T$  son difeomorfos.

Sea  $W = D \cap S^2$ , donde  $D$  son las formas cuárticas degeneradas.

Observemos que  $W \cap S^2 \neq \emptyset$ , ya que si  $(0, \beta, \gamma)$  está en  $S^2$  y su correspondiente forma cuártica es  $f(z) = \text{Re}(\beta z^3 \bar{z} + \gamma z^2 \bar{z}^2)$  donde  $|\beta|^2 + \gamma^2 = 1$ , así  $f(z) = \beta_R(x^2 - y^2) - 2\beta_I(x^3y + xy^3) + \gamma(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$  donde  $\beta = \beta_R + i\beta_I$ . Si  $\beta = 0$  y  $\gamma = \pm 1$  es claro que  $(0, 0, \pm 1) \in S^2$ , además  $f(x, y) = \pm(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$ ,  $f(x, y)$  está en  $D$  por tener dos pares de líneas complejas iguales.

Como  $W \cap S^2 \neq \emptyset$ , al hacer  $W_0 = W \cap S^2$ ,  $W_1 = W \setminus W_0$  y  $V = \Pi(W_1)$  tenemos entonces que  $V$  y  $W_1$  son difeomorfos. Así, para describir  $W$ , trataremos

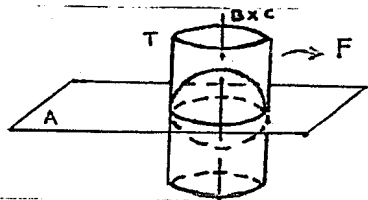
de describir a  $U$ ,  $W$  y la manera adecuada de juntarlos.

La mayor parte es la descripción de  $U$ , así que empezaremos con ésta.

Lema 3.3. - El cilindro  $T$  es invariante bajo  $\Gamma$ .

Demostración: Sea  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en  $T$  y  $g_\theta \in \Gamma$ . Tenemos por el lema anterior  $(\alpha, \beta, \gamma)g_\theta = (\alpha e^{i\theta}, \beta e^{i\theta}, \gamma)$ . luego  $|\alpha e^{i\theta}| = |\alpha| = 1$ , entonces  $(\alpha, \beta, \gamma)g_\theta \in T$  y por lo tanto  $T$  es invariante bajo  $\Gamma$ . ■

Sea  $F = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in T; \alpha = 1\}$  y  $Q = U \cap F$ , observemos que  $B \times Q \cong F$ .



Lema 3.4. -  $U$  es la  $\Gamma$ -órbita de  $Q$ , es decir  $U = \Gamma(Q)$

$$= \{g g_\theta; g_\theta \in \Gamma, g \in Q\}$$

Demostración. - Sea  $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in U$ , entonces

$\alpha = e^{i\tau_0}$  para algún  $\tau_0 \in [0, 2\pi)$ ; como queremos expresar a  $u = g g_\theta$  para alguna  $g \in Q'$  y  $g_\theta \in \Gamma$ , sabemos que  $g_\theta^{-1} = g_{(2\pi-\theta)} \in \Gamma$ , así  $g = u g_\theta^{-1} = (e^{i\tau_0}, \beta, \gamma) g_\theta^{-1} = (e^{-i\tau_0} e^{4i(2\pi-\theta)}, \beta e^{2i(2\pi-\theta)}, \gamma)$

bastará encontrar algún  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $e^{i\theta} e^{4i(2\pi-\theta)} = e^{i(8\pi-4\theta+\theta)} = 1$ , luego  $\theta = 2\pi + \frac{\tau_0}{4}$ , así,  $u = \gamma g_0$  donde  $\theta = 2\pi + \frac{\tau_0}{4}$ ,  $\gamma = (\alpha, \beta, \gamma) \in \Gamma(2\pi-\theta)$  por lo tanto  $u \in \Gamma(Q)$ .

Sea  $\gamma g_0 \in \Gamma(Q)$  donde  $\gamma = (1, \beta, \gamma) \in Q$  y  $g_0 \in \Gamma$  por lo que  $\pi^{-1}(1, \beta, \gamma) = \frac{1}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}(1, \beta, \gamma)$  está en  $DNS^3$ , luego por los dos primeros lemas de este capítulo tenemos que  $[\pi^{-1}(1, \beta, \gamma)] g_0 = \frac{1}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}(e^{4i\theta}, \beta e^{2i\theta}, \gamma)$  está en  $DNS^3$ .

Por otro lado tenemos que  $\gamma g_0 \in U$  si y sólo si  $\pi^{-1}(e^{4i\theta}, \beta e^{2i\theta}, \gamma) = \left( \frac{e^{4i\theta}}{(1+|\beta e^{2i\theta}|^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\beta e^{2i\theta}}{(1+|\beta e^{2i\theta}|^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\gamma}{(1+|\beta e^{2i\theta}|^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}(e^{4i\theta}, \beta e^{2i\theta}, \gamma)$  está en  $DNS^3$ , por lo tanto  $\gamma g_0 \in U$ . ■

Por el lema anterior para describir  $U$  bastará conocer  $Q$ , ya que  $U$  la obtendremos de  $Q$ , aplicando la acción de  $\Gamma$  sobre  $Q$ .

Descomponemos a  $Q$  en dos conjuntos;  $Q = Q' \cup Q''$  donde  $Q'$  corresponden a las  $f$  en  $Q$  que tienen raíces reales iguales y  $Q''$  corresponden a las  $f$  en  $Q$  que tienen raíces complejas iguales.

### § 4.- La geometría de $Q'$

Lema 4.1.-  $Q'$  está parametrizada por:

$$\beta(\phi, \gamma) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} + \frac{1}{2} e^{-3i\phi} - \gamma e^{-i\phi} \text{ donde } \phi \in [0, 2\pi), \\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Demostración.- Sea  $(1, \beta, \gamma) \in Q' \subseteq U \cap F \subseteq DAF$ ,  $(1, \beta, \gamma)$  es degenerada, luego considero la cuártica correspondiente  $f(z) = \text{Re}(z^4 + \beta z^3 \bar{z} + \gamma z^2 \bar{z}^2)$  la cual tiene dos o más líneas de raíces reales iguales  $x:y=2i$ . Como  $f$  es homogénea tenemos que la línea queda determinada por su intersección con el círculo unitario  $z = e^{i\theta}$ , considerando  $\theta \in [0, \pi)$  para que la intersección sea única. Así,  $f(\theta) = \text{Re}(e^{4i\theta} + \beta e^{2i\theta} + \gamma) =$   
 $= \frac{1}{2} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + \beta e^{2i\theta} + \bar{\beta} e^{-2i\theta} + 2\gamma)$  Tiene una raíz doble en  $\theta$ , si y sólo si  $f(\theta) = f'(\theta) = 0$  si y sólo si  
 $\begin{pmatrix} e^{2i\theta} & e^{-2i\theta} \\ 2ie^{2i\theta} & -2ie^{-2i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} - 2\gamma \\ -4ie^{4i\theta} + 4ie^{-4i\theta} \end{pmatrix}$  si y sólo si  
 $\begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -2ie^{-2i\theta} & -e^{-2i\theta} \\ -2ie^{2i\theta} & e^{2i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} - 2\gamma \\ -4ie^{4i\theta} + 4ie^{-4i\theta} \end{pmatrix}$   
 si y sólo si  $\beta(\theta, \gamma) = -\frac{\gamma}{2} e^{2i\theta} + \frac{1}{2} e^{-6i\theta} - \gamma e^{-2i\theta}$   
 haciendo  $\phi = 2\theta$  tenemos  $\beta(\phi, \gamma) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} + \frac{1}{2} e^{-3i\phi} - \gamma e^{-i\phi}$ . ■

Nota.- El análisis anterior falla para detectar las cuárticas correspondientes a  $Q''$  ya que asumimos

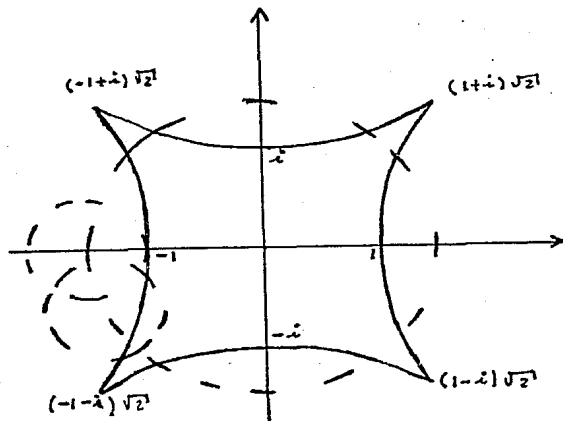
que  $x: y$  es real.

Más adelante, determinaremos a  $Q''$  por otro método.

Por el Teorema 2.1 "casi Todas" las cuárticas degeneradas Tienen dos líneas de raíces reales iguales, así, la parametrización de  $Q'$  determina "casi Todas" las de  $Q$ .

Podemos identificar a  $F$  como el  $(\beta, \gamma)$ -hiperplano pues  $F \cong B \times G$ . Haciendo  $\gamma$  constante Tenemos planos que rebanan a  $F$  en secciones paralelas, las cuales rebanan a  $Q'$  en una familia de curvas  $Q_\gamma$ , cuyas ecuaciones las obtendremos de la parametrización de  $Q'$  al fijar  $\gamma$ . Así,  $\beta_\gamma(\phi) = -\frac{3}{2}e^{-i\phi} + \frac{1}{2}e^{-3i\phi} - \gamma e^{-i\phi}$  con  $\gamma$  fija, es la curva que tiene como imagen a  $Q_\gamma$ .

Cuando  $\gamma = 0$ , Tenemos que  $\beta_0(\phi) = -\frac{3}{2}e^{-i\phi} + \frac{1}{2}e^{-3i\phi}$ , que representa el movimiento de un punto  $z = e^{i\phi}$ , obteniéndolo al sobreponer una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj en un círculo de radio  $\frac{3}{2}$ , a una rotación en sentido de las manecillas del reloj con una rapidez tres veces mayor, en un círculo de radio  $\frac{1}{2}$ .



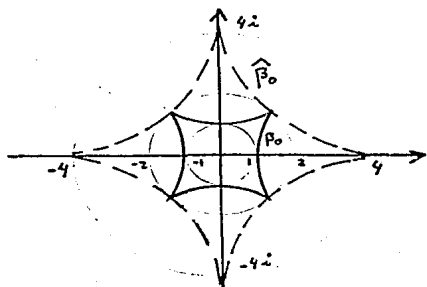
Lo cual determina una hipocicloide de 4-cúspides (Como en la figura anterior).

Para determinar las cúspides observemos que  $\beta_0'(\phi) = 0$  si y sólo si  $-\frac{3}{2}i(e^{i\phi} + e^{-3i\phi}) = 0$  si y sólo si  $e^{4i\phi} + 1 = 0$  si y sólo si  $\phi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$  por lo tanto  $\beta = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$  son las cúspides de  $\beta_0$ , éstas son simples (ver apéndice 2).

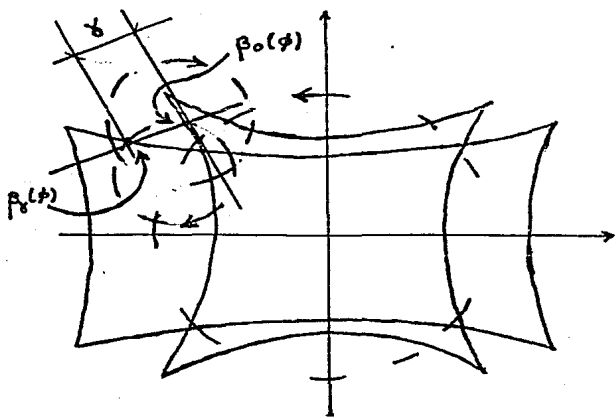
Lema 4.2: La evoluta  $\hat{\beta}_0$  de  $\beta_0$  es otra hipocicloide de 4-cúspides, cuyas cúspides están en  $\beta = \pm 4, \pm 4i$  y pasa por las 4-cúspides de  $\beta_0(\phi)$ .

Demostración: (Ver apéndice 3.) ■





Para  $\gamma \neq 0$ , podemos ver que  $\beta_0(\phi) = -\frac{3}{2} e^{i\phi} + \frac{1}{2} e^{-2i\phi} - \gamma e^{-i\phi}$ ,  
 representa el movimiento de un punto  $z = e^{-i\phi}$   
 obteniéndolo al sobreponer una Tercera rotación  
 en un círculo de radio  $\gamma$  en sentido de las  
 manecillas del reloj, a las dos anteriores de  $\beta_0(\phi)$ .



Pero es más fácil, describirla como sigue:

Se dice que dos curvas son "paralelas" cuando las  
 normales de una son normales de la otra.

Lema 4.3. La imagen  $Q_\gamma$  de la curva  $\beta_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}(-3e^{-i\phi} + e^{-3i\phi} - 2e^{-i\phi})$  con  $\gamma \neq 0$  fijo y  $0 \leq \phi < 2\pi$ , considerada sobre el  $(\beta, \alpha)$ -plano, es una curva paralela a  $\beta_0(\phi)$ .

DemostRación. (Ver apéndice 3). ■

Luego para cada  $\gamma$ , La curva  $Q_\gamma$  es el lugar geométrico de todos los puntos situados a una distancia  $\gamma$  a lo largo de las normales de la hipocicloide  $Q_0$ .

Podemos recordar algunas propiedades de curvas paralelas como las siguientes:

Lema 4.4. La curvatura y la evoluta de  $\beta_\gamma(\phi)$  son:

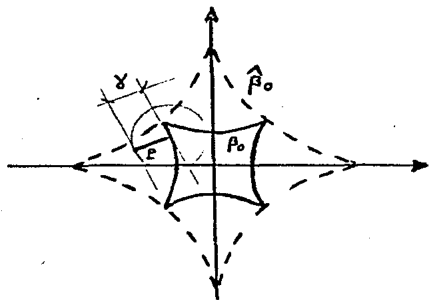
$$k_\gamma = \frac{1}{3\cos\phi - \gamma} = \frac{k_0(\phi)}{1 + \gamma k_0(\phi)} \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_\gamma(\phi) = \hat{\beta}_0(\phi).$$

DemostRación. (Ver apéndice 3). ■

Lema 4.5. La imagen de  $\hat{\beta}_0(\phi)$  es el lugar geométrico de los puntos cúspides de las  $\beta_\gamma(\phi)$ .

DemostRación. (Ver apéndice 3). ■

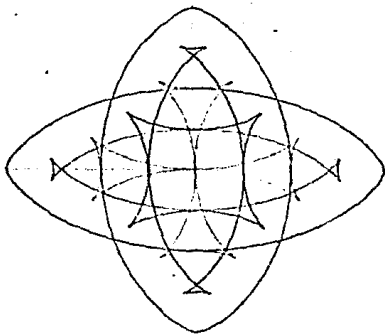
En la figura siguiente, las curvas  $Q_\gamma$  están todas dibujadas sobrepuestas, para mostrar como los puntos cúspides se mueven a lo largo



Si el punto  $P$  está en la evoluta  $\hat{\beta}_0$ , pueden suceder dos cosas; primero que  $P$  no sea punto cúspide de  $\hat{\beta}_0$  en cuyo caso  $P$  invierte su dirección hacia afuera cambiando la Tangente de su trayectoria y este punto resulta ser también un punto cúspide, de  $\mathcal{Q}_x$  situado sobre  $\hat{\beta}_0$ . Si por el contrario  $P$  es un punto cúspide de  $\hat{\beta}_0$  obtendremos una singularidad más complicada en  $\mathcal{Q}_x$ , la cuál describirá un punto cola de golondrina por razones que justificaremos después.

Estos son sólo los tipos de singularidades que  $\mathcal{Q}_x$  puede tener a lo largo de una sola rama (es decir, para variaciones pequeñas de  $\phi$ ).

de la evoluta,  $\hat{\beta}_0(\psi)$ .

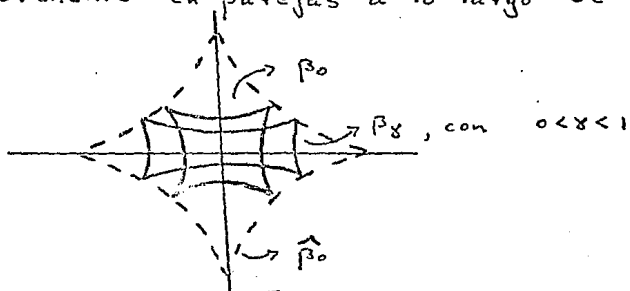


Para describir un poco más como es la geometría de  $Q_x$ , veamos cómo ésta depende de las normales a  $Q_0$  y cómo la evoluta de  $Q_0$  es un factor de control.

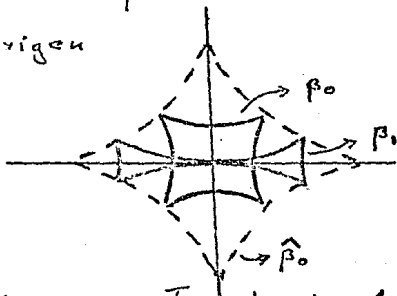
Cuando  $\phi$  varía, la normal a  $\beta_0(\phi)$  "rueda alrededor" por dentro o por fuera de la evoluta, con una velocidad angular constante.

Al considerar una rotación suave de un punto  $P$ , situado a una distancia  $x$  a lo largo de la normal, obtenemos el movimiento representado por  $\beta_x(\phi)$ , el cual es suave, excepto cuando la normal pase por las cúspides de  $\beta_0$ , en este caso  $P$  es un punto de la evoluta  $\hat{\beta}_0$  si es que  $|x| \leq 3$ .

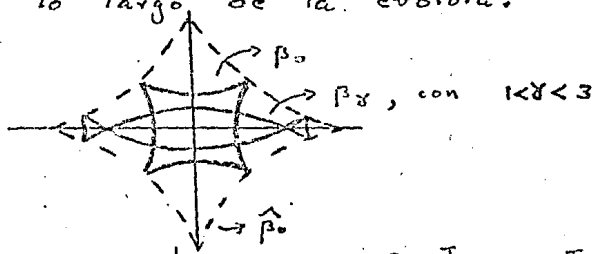
Cuando  $\gamma$  se incrementa de 0 a 1 las cúspides se mueven exteriormente en parejas a lo largo de la evoluta.



En  $\gamma=1$  dos ramas opuestas de la curva quedan tangentes en el origen

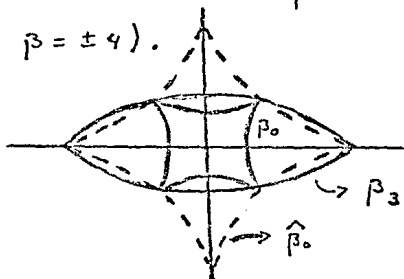


Cuando  $\gamma$  se incrementa desde 1, el punto de tangencia se divide en dos puntos de auto-intersección sobre el  $\beta$ -eje real, los cuales se mueven exteriormente desde el origen y los puntos cúspides continúan moviéndose a lo largo de la evoluta.

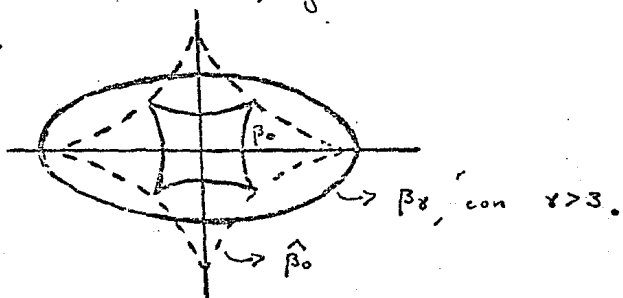


Luego para  $1 \leq \gamma < 3$ , la curva  $\alpha_\gamma$  tiene puntos dobles.

Para  $\gamma = 3$  un par de puntos cúspide. y una auto-intersección se unen en un punto cola de golondrina (donde  $\beta = \pm 4$ ).



Para  $\gamma > 3$   $Q_\gamma$  es un óvalo suave, haciéndose más circular cuando  $\gamma \rightarrow \infty$ , y con diámetro asintótico  $2\gamma$ .

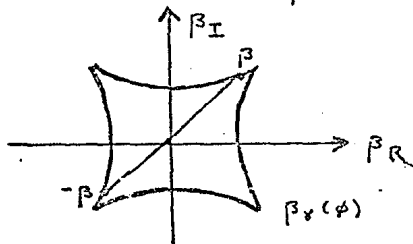


Para  $\gamma$  negativas, observemos primero que  $\beta_{-\gamma}(\phi + \frac{\pi}{2}) = i\beta_\gamma(\phi)$ . Luego  $Q_{-\gamma}$  se relaciona con  $Q_\gamma$  de la siguiente manera, la primera se obtiene de la segunda al girar esta última un ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

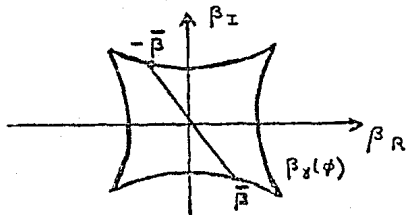
Podemos También observar las simetrías de  $Q'$ , regresando a las formas cuárticas: Esto

es un hecho valioso ya que aumenta la visión y ahorra el Trabajo más Tarde.

El elemento  $g_{\frac{\pi}{2}}$  de  $\Gamma$  manda  $z$  a  $i\bar{z}$  y entonces mapea  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en  $(\alpha, -\beta, \gamma)$ , luego cada  $Q_\gamma$  Tiene una simetría rotacional por un ángulo  $\pi$  alrededor del origen.

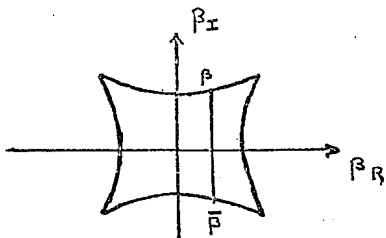


Al intercambiar las variables  $x, y$  que corresponde al elemento  $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  éste mapea  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en  $(\bar{\alpha}, -\beta, \gamma)$ . Cuando se está en  $Q_\gamma$ ,  $\alpha=1$  entonces  $\tau$  da una simetría reflejional en el eje imaginario  $\beta_I$ .



Combinando  $\tau$  con  $g_{\frac{\pi}{2}}$  ésta da una simetría reflejional en el eje real  $\beta_R$ .

También,  $g_{\frac{\pi}{2}} \circ \tau$  manda  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma)$



Notar que  $\det \tau = -1$ , por lo que  $\tau \notin \Gamma$

Además, si operamos con  $g_{\frac{\pi}{4}}$  y cambiamos signos encontramos que  $(\alpha, \beta, \gamma) = f(z) \rightarrow -f(e^{-i\frac{\pi}{4}}z) = -(-\alpha, i\beta, \gamma) = (\alpha, -i\beta, -\gamma)$ .

Luego para  $\alpha=1$ , vemos que la mitad superior de  $Q'$  es la misma que la mitad inferior de  $Q'$ , sólo que volteada hacia arriba y girada un ángulo  $\frac{\pi}{2}$ , ya hemos observado esta relación entre  $Q_x$  y  $Q_{-x}$ .

Finalmente, observemos también que  $Q'$  está parametrizada en  $S^1 \times \mathbb{R}$  por  $\mu(\phi, \gamma) = (\beta_x(\phi), \gamma)$  luego  $\mu(\phi, \gamma) = (\frac{1}{2}(-3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}), 0) + \gamma(e^{-i\phi}, 1)$  cuando  $\phi$  se mantiene fijo, tenemos que  $\mu(\phi, \gamma)$  es una recta que pasa por  $(\frac{1}{2}(-3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}), 0)$  y con una dirección  $(e^{-i\phi}, 1)$  y  $Q'$  es la unión de estas líneas, por lo tanto  $Q'$  es una superficie reglada.

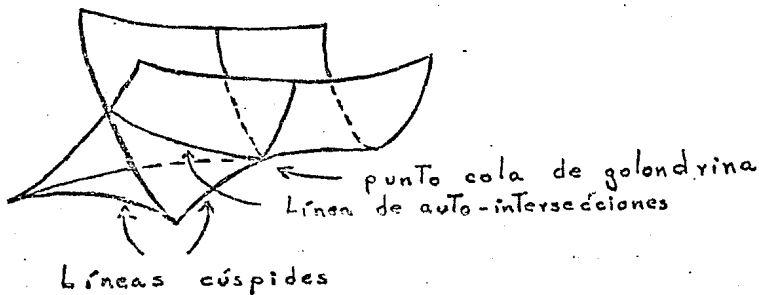
Por Todo lo anterior podemos dar geométicamente a  $Q'$  "apilando" las secciones  $Q_x$  pero, todavía serán explicados algunos rasgos adicionales.



### §5.- Los puntos cola de golondrina

En esta sección Trataremos de explicar la razón de haber llamado a  $\beta = \pm 4, \gamma = 3$  (y  $\beta = \pm 4i, \gamma = -3$ ), puntos cola de golondrina. Primero recordemos que la catástrofe cola de golondrina de Thom (

Tiene el conjunto de bifurcación como el de la figura siguiente :



La manera en que las dos líneas cúspides y la línea de auto-intersecciones se intersectan y aniquilan mutuamente es característica de esta catástrofe. Luego las singularidades de las curvas  $\mathcal{Q}_x$  cerca de  $\gamma = 3$ , se comportan exactamente de esta manera, de aquí la razón de porque los "puntos cola de golondrina" sin embargo,

más que la analogía geométrica; La singularidad en la curva  $Q$  cerca de  $\gamma=3$  es realmente equivalente a la cola de golondrina, en el sentido siguiente.

Lema 5.1: Existe un difeomorfismo local entre una vecindad  $V$  del  $(4, 0, 3)$  en  $F$  a una vecindad de  $(0, 0, 0)$  en  $\mathbb{R}^3$ , de tal manera que la imagen de  $Q \cap V$  es el conjunto de bifurcación cola de golondrina.

Demostación: El conjunto de bifurcación de la catástrofe cola de golondrina es el conjunto

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid g'(E) = g''(E) = 0\} \text{ donde}$$

$$g(E) = \frac{1}{5} E^5 + \frac{u}{3} E^3 + \frac{v}{2} E^2 + w E.$$

Tomemos  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 4 + L + iM$  y  $\gamma = 3 + N$  entonces la forma correspondiente a  $(\alpha, \beta, \gamma)$  está dada por:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (\alpha_R + \beta_R + \gamma) x^4 + 4(-\alpha_I - \frac{1}{2}\beta_I) x^3 y + 6(-\alpha_R + \frac{1}{3}\gamma) x^2 y^2 \\ &\quad + 4(\alpha_I - \frac{1}{2}\beta_I) \beta_I x y^3 + (\alpha_R - \beta_R + \gamma) y^4 \\ &= (8 + L + N) x^4 - 2M x^3 y + 2N x^2 y^2 - 2M x y^3 + (N - L) y^4. \end{aligned}$$

Para  $L, M$  y  $N$  pequeños, en particular tenemos que  $8 + L + N \neq 0$ , ahora  $f(x, y)$  tiene un par de líneas de raíces reales coincidentes  $x : y = \rho$  si y sólo si

$$h(\rho) = h'(\rho) = 0 \text{ donde } h(\rho) = \rho^4 - \frac{2M}{8+L+N} \rho^3 + \frac{2N}{8+L+N} \rho^2 - \frac{2M}{8+L+N} \rho + \frac{N-L}{8+L+N}$$

Eliminando el término cúbico por el cambio de variable  $\eta = \rho - \frac{M}{2(8+L+N)}$  Tenemos:

$$\begin{aligned}
 h(\eta) &= \left[ \eta + \frac{M}{2(8+L+N)} \right]^4 - \frac{2M}{(8+L+N)} \left[ \eta + \frac{M}{2(8+L+N)} \right]^3 + \frac{2N}{8+L+N} \left[ \eta + \frac{M}{2(8+L+N)} \right]^2 \\
 &\quad - \frac{2M}{(8+L+N)} \left[ \eta + \frac{M}{2(8+L+N)} \right] + \frac{N-L}{8+L+N} \\
 &= \eta^4 + U(L, M, N) \eta^3 + V(L, M, N) \eta^2 + W(L, M, N) \eta + \text{donde}
 \end{aligned}$$

$$U(L, M, N) = -\frac{3}{2} \frac{M^2}{(8+L+N)^2} + \frac{2N}{8+L+N}$$

$$V(L, M, N) = -\frac{M^3}{(8+L+N)^3} + \frac{2MN}{(8+L+N)^2} - \frac{2M}{(8+L+N)} \quad y$$

$$W(L, M, N) = \frac{-3}{16} \frac{M^4}{(8+L+N)^4} + \frac{1}{2} \frac{NM^2}{(8+L+N)^3} - \frac{M^2}{(8+L+N)^2} + \frac{N-L}{8+L+N}$$

Así,  $Q'$  está dada localmente por  $h(\eta) = h'(\eta) = 0$ . Ahora bien, como  $g'(\xi) = \xi^4 + u\xi^3 + v\xi^2 + w$ , es suficiente demostrar que  $(L, M, N) \xrightarrow{\psi} (u, v, w)$  es un difeomorfismo local en  $(0, 0, 0)$ . Ya que éste mapea  $Q'$  en la bifurcación  $y$   $(0, 0, 0)$  en  $(0, 0, 0)$ , pero  $L=M=N=0$  corresponde a  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 3)$ .

Se puede verificar que  $D\psi(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$

por lo que  $\psi$  es un difeomorfismo local en  $(0, 0, 0)$ .  $\square$

### § 6.- Bigotes Complejos

Para encontrar  $\mathcal{Q}$  debemos añadir a  $\mathcal{Q}^*$  los puntos de  $F$ , que corresponden a las cuárticas con dos pares de raíces complejas iguales, es decir determinar a  $\mathcal{Q}^*$ . Pero es mejor encontrar primero las cuárticas con dos pares de raíces iguales, luego ver cuáles son reales y cuáles complejas.

Lema 6.1. - Si la cuártica  $f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$

Tiene dos pares de líneas de raíces iguales entonces se cumplen las igualdades siguientes:

$$\frac{ac-b^2}{a} = \frac{ad-bc}{2b} = \frac{ae+2bd-3c^2}{6c} = \frac{be-cd}{2d} = \frac{ce-d^2}{e}.$$

Demostración. - (ver el apéndice 3). ■

Lema 6.2. - Un punto  $(1, \beta, \gamma) \in \mathcal{Q}$ , corresponde a una cuártica con dos pares de raíces iguales

si y sólo si (i)  $\beta_R = 0$ ,  $\beta_I^2 = -8(\gamma+1)$

ó  
(ii)  $\beta_I = 0$ ,  $\beta_R^2 = 8(\gamma-1)$

Demostración. - Supongamos primero que la cuártica  $f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$  correspondiente al punto  $(1, \beta, \gamma)$  de  $\mathcal{Q}$ , Tiene dos pares de raíces iguales, entonces se cumplen las igualdades del lema anterior,

ahora bien por el lema 3.1, Tenemos que  $a = 1 + \beta_R + \gamma$ ,  $b = -\frac{1}{2} \beta_I = d$ ,  $c = -1 + \frac{1}{3} \gamma$  y  $e = 1 - \beta_R + \gamma$ , luego, al hacer la sustitución en la igualdad

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ce - d^2}{e} \text{ obtenemos } \beta_I^2 \beta_R = 0 ; \text{ es decir}$$

$$\beta_R = 0 \text{ ó } \beta_I = 0 .$$

En el primer caso ( $\beta_R = 0$ ), al hacer la sustitución en la igualdad  $\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b}$  obtenemos que  $\beta_I^2 = -8(\gamma + 1)$ ; lo que equivale a las condiciones de (c).

En el segundo caso ( $\beta_I = 0$ ), al hacer la sustitución en la igualdad  $\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c}$  obtenemos que  $\beta_R^2 = 8(\gamma - 1)$ ; lo que equivale a las condiciones de (c').

Para demostrar el recíproco, supongamos primero que se cumplen las condiciones de (c), luego al hacer la sustitución de éstas, en los coeficientes de la cuártica obtenemos  $f(x, y) = (1 + \gamma) \left[ x^2 + \frac{8}{\beta_I} xy + y^2 \right]^2$ , la cual tiene dos pares de raíces iguales. Análogamente, si se cumplen las condiciones de (c'), al hacer la sustitución de éstas, en los coeficientes de la cuártica obtenemos que  $f(x, y) = (1 + \beta_R + \gamma) \left[ x^2 + \frac{\gamma - 3}{1 + \beta_R + \gamma} y^2 \right]^2$ , la cual tiene dos pares de

raíces iguales.  $\square$

Proposición 6.1. - En el caso (i) las raíces son reales si  $|\beta_I| \leq 4$  y complejas si  $|\beta_I| > 4$ .

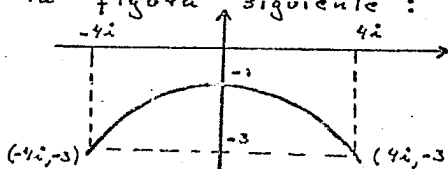
En el caso (ii) las raíces son reales si  $|\beta_R| \leq 4$  y complejas si  $|\beta_R| > 4$ .

Demostación: En el lema anterior encontramos que la cuártica correspondiente a las condiciones (i) es  $f(x,y) = (1+x) \left[ x^2 + \frac{x}{\beta_I} xy + y^2 \right]^2$ , luego tiene raíces reales si y sólo si  $\left( \frac{x}{\beta_I} \right)^2 - 4 \geq 0$ , lo que equivale

a que  $|\beta_I| \leq 4$ ; análogamente, la cuártica correspondiente a las condiciones de (ii) es  $f(x,y) = (1+\beta_R+x) \left[ x^2 + \frac{x-3}{1+\beta_R+x} y^2 \right]^2$ , tiene raíces reales si y sólo si  $\frac{-4(x-3)}{1+\beta_R+x} \geq 0$ , lo que equivale a que

$|\beta_R| \leq 4$ .  $\square$

La ecuación (i)  $\beta_R = 0$ ,  $\beta_I^2 = -8(x+1)$  representa una parábola en el  $(\beta_I, x)$ -plano con vértice en  $(0, -1)$  como en la figura siguiente:



Es claro que la parábola pasa por los puntos cola de golondrina ( $\beta = \pm 4, \gamma = 3$ )

La parte de la parábola con  $|\beta_I| \leq 4$ , que corresponde a raíces reales, es la línea de auto-intersecciones de las curvas  $Q_\gamma$  con  $-3 < \gamma \leq 1$ , ya que  $\beta(\gamma, \phi) = \frac{1}{2} (-3e^{i\phi} + e^{-3i\phi} - 2\gamma e^{-i\phi})$

$$= \cos \phi (2\cos^2 \phi - 3 - \gamma) + i \sin \phi (\gamma - 1 - 2\cos^2 \phi),$$

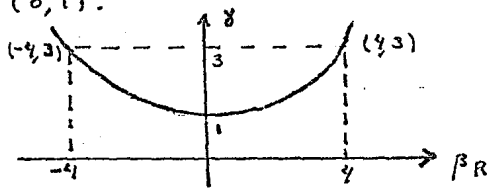
por lo tanto 
$$\begin{cases} \beta_R = \cos \phi (2\cos^2 \phi - 3 - \gamma) \\ \beta_I = \sin \phi (\gamma - 1 - 2\cos^2 \phi). \end{cases}$$

Así  $\beta_R = 0$  si y sólo si  $\cos \phi = 0$  ó  $2\cos^2 \phi = 3 + \gamma$ .

si  $\cos \phi = 0$  Tenemos  $\beta_I = \pm (\gamma - 1)$  y si  $2\cos^2 \phi = 3 + \gamma$

Tenemos  $\beta_I^2 = -8(\gamma + 1)$ , luego  $-8(\gamma + 1) = (\gamma - 1)^2$  si y sólo si  $\gamma = 3$ , por lo que  $\beta_I^2 = -8(\gamma + 1)$  es la línea de auto-intersecciones para  $|\beta_I| \leq 4$ .

Similarmemente la ecuación (ii)  $\beta_I = 0, \beta_R^2 = 8(\gamma - 1)$  representa una parábola en el plano  $(\beta_R, \gamma)$  con vértice en  $(0, 1)$ .

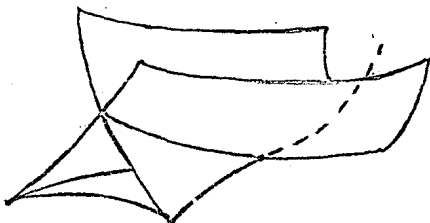


Es claro que la parábola pasa por los puntos cola de golondrina ( $\beta = \pm 4, \gamma = 3$ )

La parte de la parábola con  $|\beta_R| \leq 4$ , que

corresponden a raíces reales, es también la línea de auto-intersecciones de las curvas  $Q_\gamma$  con  $1 \leq \gamma < 3$ .

Por lo anterior podemos concluir lo siguiente, La parte plana de  $Q$ : las cuárticas con dos pares de raíces complejas iguales, (es decir  $Q''$ ) Toma la forma de "bigotes" que brotan de los puntos cola de golondrina y es la continuación de la línea de auto-intersección en el conjunto de bifurcación. cola de golondrina, esta línea es parte de una parábola. (Ver la línea punteada de la figura siguiente).



(La línea punteada nos es parte del conjunto de bifurcación)

El conjunto de bifurcación cola de golondrina es semi algebraico en lugar de algebraico (definido por un sistema de desigualdades polinomiales en lugar de ecuaciones); Para hacerlo algebraico basta añadir los bigotes. Similarmente  $Q'$  es semi algebraico, mientras que  $Q = Q' \cup Q''$  es algebraico. Esta presencia o ausencia de



bigotes es un fenómeno común en geometría algebraica real.

## § 7.- Las órbitas sobre el conjunto discriminante

En esta sección interpretaremos el Teorema 2.1 por medio de la geometría de  $\mathcal{Q}$ . Para facilitar la descripción nos referiremos a las partes de  $\mathcal{Q}$  como sigue: a las partes superiores e inferiores como los Tazones, pegados por líneas de auto-intersección que forman un Tetraedro curvilíneo, cuyas avistas restantes son cúspides. Las cúspides se intersectan en puntos cola de golondrina de los que brotan los bigotes.

Teorema 7.1.- Los Tipos de cuárticas enlistados en el

Teorema 2.1 corresponden a las siguientes regiones relativas a  $\mathcal{Q}$  (y las regiones de  $U$  obtenidas como las órbitas bajo  $\Gamma$ ). Cada tipo está indentificado por un representante el cual puede no pertenecer a  $\mathcal{Q}$ .

<u>Tipo</u>	<u>Región</u>
0	Este no está en $\mathcal{Q}$ , éste es el vértice del cono sobre $W$ .
1: $x^4$	Los dos puntos cola de golondrina superiores
2: $-x^4$	Los dos puntos cola de golondrina inferiores
3: $x^2(x^2-y^2)$	Las dos cavas del Tetraedro que Tienen una avista en común con el Tazón superior
4: $-x^2(x^2-y^2)$	Las dos cavas del Tetraedro que Tienen una avista en común con el Tazón inferior

- 5:  $x^2y^2$  La línea superior de auto-intersección  
 6:  $-x^2y^2$  La línea inferior de auto-intersección  
 7:  $x^2y$  Las líneas cúspides (que son cuatro aristas) del Tetraedro  
 8:  $x^2(x^2+y^2)$  La superficie del Tazón superior  
 9:  $-x^2(x^2+y^2)$  La superficie del Tazón inferior  
 10:  $(x^2+y^2)^2$  Los bigotes superiores  
 11:  $-(x^2+y^2)^2$  Los bigotes inferiores  
 12:  $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$  Dentro del Tetraedro  
 13:  $x^4 - y^4$  Fuera del Tetraedro y de los Tazones  
 14:  $x^4 + y^4$  Dentro del Tazón superior  
 15:  $-(x^4 + y^4)$  Dentro del Tazón inferior

Demostración: Muchas de estas afirmaciones pueden ser justificadas Topológicamente al considerar las posiciones de las 4 raíces en el plano complejo extendido (o esfera), y todas éstas pueden verificarse analíticamente con cálculos rutinarios, pero Tediosos.

Esbozaremos los argumentos Topológicos. Al Tomar la  $\Gamma$ -acción, es claro que las últimas cuatro regiones dan las componentes conexas de  $\mathbb{R}^5 \setminus V$ , por lo que los cuatro Tipos no degenerados deben corresponder a estas cuatro

regiones.

Para decir a cuáles corresponden, es suficiente seleccionar un punto en cada región y encontrar su Tipo. Ahora bien el  $(1,0,0)$  está dentro del Tetraedro y su polinomio correspondiente es  $x^2 - 6x^2y^2 + y^4$ , que tiene 4 líneas de raíces reales.

SimilarmenTe el  $(1,0,3)$  está dentro del Tazón superior y su polinomio correspondiente  $4(x^2 + y^2)$  no tiene raíces reales, ésta es claramente positiva definida. Para el Tazón inferior puede ser identificado por simetría.

Finalmente  $(1,2,0)$  está fuera de los Tazones y del Tetraedro y su polinomio correspondiente es  $3x^2 - 6x^2y^2 - y^4$  que tiene dos raíces reales.

Con ésto tenemos cubierto el caso no degenerado.

Veamos ahora el caso degenerado. La distinción entre positivo y negativo puede hacerse por simetría.

Tipos con 2 raíces reales iguales y 2 raíces complejas forman la frontera entre Tipos con 2 raíces reales y 0 raíces reales, luego deberán estar en la superficie de los Tazones.

Análogamente las del Tipo con 2 raíces reales iguales y 2 raíces reales forman la frontera

entre Tipos con 2 raíces reales y 4 raíces reales, luego deberán estar en la superficie del Tetraedro

Al hacer la  $\Gamma$  acción encontramos 2 componentes conexas para estos tipos, correspondientes a los dos pares de caras opuestas: éstas deben ser los Tipos positivos y negativos y es fácil ver cuál es cuál al observar sus fronteras.

Los Tipos con 2 pares de raíces iguales han sido alternativamente localizados al caracterizar los bigotes.

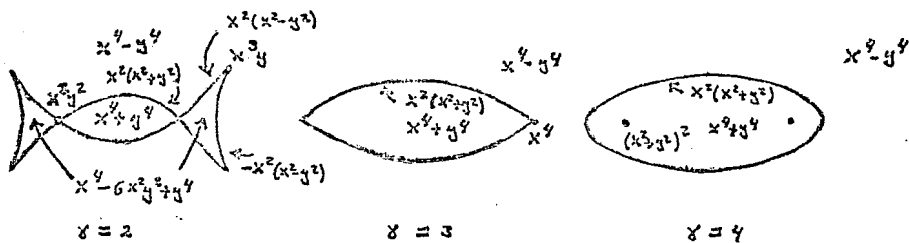
Los Tipos con 3 raíces iguales pueden encontrarse a partir de la demostración del lema 4.1 (análogo al caso cúbico), para una raíz Triple la primera y segunda derivada con respecto a  $\Theta$  deben anularse; estas ecuaciones claramente definen los puntos cúspides

Finalmente Tipos con 4 raíces iguales deben ser la frontera entre las cúspides y los bigotes, luego deben ser los puntos cola de golondrina. A forma de verificación, el punto cola de golondrina  $(1, 4, 3)$  corresponde a  $8x^4$ , el resto se sigue por simetría.

Obsérvese que Tenemos sólo una órbita del Tipo  $x^3y$  a causa de las simetrías reflejionales

mencionadas anteriormente, pero hay dos órbitas del Tipo  $\pm x^2/(x^2-y^2)$ , porque estas simetrías no intercambian caras adyacentes del Tetraedro, sólo caras opuestas.

Para claridad la figura siguiente muestra la distribución de los Tipos para Tres secciones típicas  $\gamma = 2, 3, 4$  de  $\mathcal{Q}$ .



Es interesante ver como la geometría de  $\mathcal{Q}$ , captura muchas de las propiedades Topológicas intuitivamente claras, del conjunto de pendientes de las raíces  $\{z_i\}$  en  $\mathcal{Q}$ .

Por ejemplo, no es posible pasar de 2 raíces reales coincidentes a 2 pares de raíces complejas coincidentes, moviéndose continuamente sobre las formas degeneradas, sin pasar a Través de una cuártica con cuatro raíces iguales.

Similarmente, las líneas de auto-intersección

se encuentran con bigotes sólo en puntos cola de golondrina.

También, en una vecindad de un Tipo con 2 pares de raíces complejas iguales, los únicos otros Tipos que se pueden encontrar son no-degenerados con 0-raíces reales.

Si milaramente los bigotes están completamente dentro de los Trazos excepto sus extremos.

La codimensión que Tienen los estrados y las componentes es la siguiente:

El estrado  $\emptyset$  Tiene claramente codimensión 5, los estrados con representantes  $\pm x^4$  Tiene codimensión 3, los estrados con representantes  $\pm x^2y^2, x^3y, \pm (x^2, y^2)^2$  Tienen codimensión 2 y los estrados  $\pm x^2(x^2, y^2), \pm x^2(x^2, y^2)$  Tienen codimensión 1.

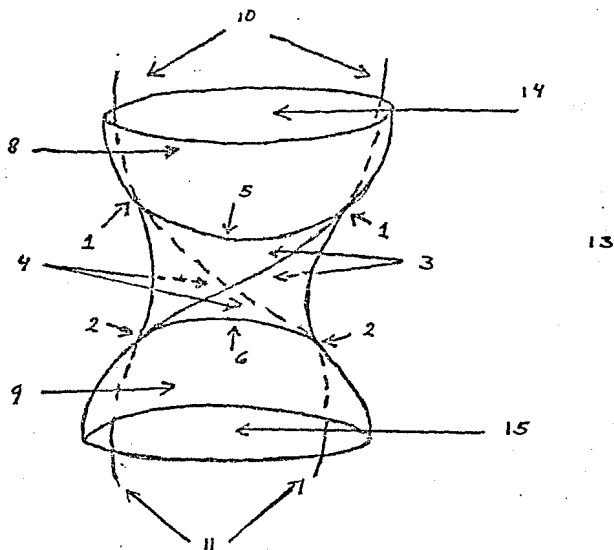
Las componentes Tienen codimensión 0.

La codimensión es fácil de ver dibujando las raíces en  $\mathbb{C}$ .

Ahora podemos esbozar un dibujo del conjunto  $\mathcal{Q}$ .

Dibujamos sólo la parte con  $1 \leq 4$ , pero permite a los bigotes sobresalir suficiente para ser claramente visibles.

(Ver la siguiente figura.)



Los números corresponden, a las regiones enlistadas en el Teorema 7.1.

La región 7 corresponde a las 4 aristas restantes del Tetraedro, al quitar las aristas 5 y 6.

Podemos ahora describir el conjunto  $U = \pi(w_1)$  de la § 3. Rotemos  $Q$  al rededor, de un círculo y junto con una media-Torcida, manteniendo las secciones  $\gamma = cte$  en el mismo nivel

Entonces en cada sección encontramos algo como un "brazalete" tipo Zeeman, sólo que con una sección diferente y una media-Torcida:

Podríamos llamar a  $U$  la argolla cuántica por analogía.



### § 8. Puntos al infinito

Ahora veremos la parte  $W_{\infty}$  de  $W$  que es mandada al infinito por la extensión de la proyección  $\Pi: S^4/S^2 \rightarrow T$  a  $S^2$ , ya que  $W_{\infty} = W \cap S^2$ .

Lema 8.1. La acción de  $\Gamma$  en  $S^1$  es  $S^2$ , ( $\Gamma(S^1) = S^2$ )  
donde  $S^1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \mid \alpha=0, \beta_{\mathbb{I}}=0, \beta_{\mathbb{R}}^2 + \gamma^2 = 1\}$ .

Demostración. Sea  $(0, \beta_{\mathbb{R}}, \gamma) \in S^1$  y  $g_{\theta} \in \Gamma$  entonces tenemos que  $(0, \beta_{\mathbb{R}}, \gamma) g_{\theta} = (0, \beta_{\mathbb{R}} e^{2i\theta}, \gamma) \in S^2$ , ya que  $|\beta_{\mathbb{R}} e^{2i\theta}|^2 + \gamma^2 = 1$  por lo tanto  $\Gamma(S^1) \subseteq S^2$ , para la otra contención tomamos  $(0, \beta, \gamma) \in S^2$ , donde  $\beta = |\beta| e^{i\theta}$  para algún  $\theta \in [0, 2\pi)$ , consideramos  $\phi = \frac{\theta}{2} \in [0, \pi)$ , luego  $g_{\phi} \in \Gamma$  y  $(0, |\beta|, \gamma) \in S^1$  además  $(0, |\beta|, \gamma) g_{\phi} = (0, \beta, \gamma)$  por lo tanto  $\Gamma(S^1) \supseteq S^2$ .  $\square$

Para dar la descripción de  $W_{\infty}$ , es decir describir las cuárticas degeneradas de  $S^2$ , bastará describir las que están en  $S^1$ , ya que  $\Gamma(S^1) = S^2$ .

Luego  $S^1$  es la sección que se obtiene de la intersección de  $S^2$  con el  $(\beta_{\mathbb{R}}, \gamma)$ -plano, donde el  $(\beta_{\mathbb{R}}, \gamma)$ -plano =  $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}; \alpha=0, \beta_{\mathbb{I}}=0\}$ .

Lema 8.2. La forma cuártica binaria  $f(x, y) = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$  es degenerada si y sólo si  $f(x, y)$  es un cuadrado o bien a

o e son cero.

Demostración:- (Ver apéndice 3). ■

Proposición 81.- Las cuárticas degeneradas que están en  $S'$  son,  $\pm(x^2+y^2)^2$ ,  $\pm\frac{2}{\sqrt{2}}x^2(x^2+y^2)$ .

Demostración:- Si Tomamos un punto  $(0, \beta_R, \gamma)$  en  $S'$  entonces por el lema 3.1, Tenemos que  $a = \gamma + \beta_R$ ,  $b = 0$ ,  $6c = 2\gamma$ ,  $d = 0$  y  $e = \gamma - \beta_R$  así, la cuártica correspondiente a  $(0, \beta_R, \gamma)$  es  $f(x, y) = (\gamma + \beta_R)x^4 + 2\gamma x^2 y^2 + (\gamma - \beta_R)y^4$  entonces por el lema 8.2 Tenemos que  $f(x, y)$  es degenerada si y sólo si  $f(x, y)$  es un cuadrado ó  $\beta_R = \pm \gamma$ .

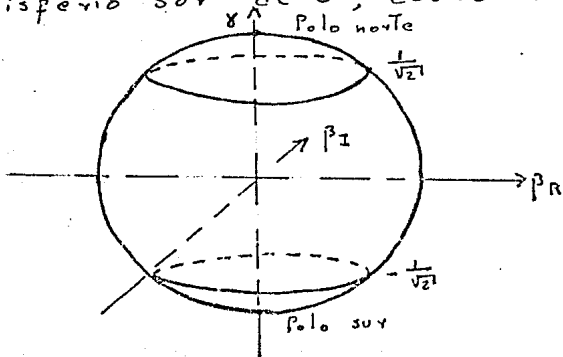
En el primer caso, Tenemos que  $f(x, y)$  es un cuadrado si y sólo si  $4\gamma^2 - 4(\gamma + \beta_R)(\gamma - \beta_R) = 0$ , es decir cuando  $4\beta_R^2 = 0$ , luego  $\beta_R = 0$  y como  $\beta_R^2 + \gamma^2 = 1$  Tenemos que  $\gamma = \pm 1$  así, las cuárticas degeneradas correspondientes a este caso son  $\pm(x^2+y^2)^2$ .

En el caso  $\beta = \pm \gamma$ , se Tiene por  $\beta_R^2 + \gamma^2 = 1$  que  $2\beta_R^2 = 1$  y entonces  $\beta_R = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  así, las cuárticas degeneradas correspondientes a estos casos son  $\pm\frac{2}{\sqrt{2}}x^2(x^2+y^2)$  si  $\beta_R = \gamma$  y  $\pm\frac{2}{\sqrt{2}}y^2(x^2+y^2) = 0$  si  $\beta_R = -\gamma$ , las cuales son equivalentes dos a dos, bajo un cambio lineal de coordenadas, por lo tanto las cuárticas degeneradas que están en  $S'$  son,

$$\pm (x^2+y^2)^2 \quad \text{y} \quad \pm \frac{z}{\sqrt{2}} x^2(x^2+y^2) \quad . \quad \square$$

Como  $(x^2+y^2)^2$  es la cuártica correspondiente a  $(0,0,1)$  y  $(0,0,1)$  es fijada por  $\Gamma$ , estará representada por el "polo norte" de  $S^2$ ; análogamente  $-(x^2+y^2)^2$  es la cuártica correspondiente a  $(0,0,-1)$  y  $(0,0,-1)$  es fijada por  $\Gamma$ , en cuyo caso estará representada por el "polo sur" de  $S^2$ .

Como las cuárticas  $\frac{z}{\sqrt{2}} x^2(x^2+y^2)$  y  $-\frac{z}{\sqrt{2}} x^2(x^2+y^2)$  corresponden a  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  respectivamente, al actuar  $\Gamma$  en cada una de éstas tenemos que  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) g_\theta = (0, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2i\theta}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{2i\theta}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ , para cada  $g_\theta \in \Gamma$ , las cuárticas correspondientes estarán en los círculos que son dos "paralelos al ecuador" de  $S^2$ , uno en el "hemisferio norte" y otro en el "hemisferio sur" de  $S^2$ , como en la figura. -



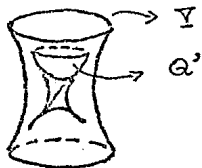
El círculo superior con representante  $x^2/(x^2+y^2)$  y el inferior con representante  $-x^2/(x^2+y^2)$ .

De hecho las partes de  $S^2$  (Polos y círculos paralelos) corresponden exactamente a las direcciones posibles desde el origen de  $\mathbb{R}^3$ , donde  $Q$  es dibujada: Por lo que podríamos llamarla la "esfera celestial".

### § 9. El mapeo de pegamiento.

Ahora debemos describir como  $W_1$  se pega a  $W_{00}$ .

Primero notemos que  $Q^3$  es "asintótico" al hiperboloide de revolución  $Y = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \alpha = 0, |\beta|^2 - \gamma^2 = 1\}$



Una manera de comprobar esto es verificando que

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|\beta|^2}{1 + \gamma^2} = 1 \quad \text{donde} \quad \beta = -\frac{3}{2} e^{i\psi} + \frac{1}{2} e^{-3i\psi} - \gamma e^{-i\psi}.$$

Para  $\gamma$  grande ( $|\gamma| > 3$  es suficiente) la imagen inversa de las proyecciones de  $Q^3$  y  $Y$  donde no es todo  $Q^3$ , ni todo  $Y$  sólo las "hojas" con  $\gamma$  grande, son isomorfas.

Tomando en cuenta la acción circular  $\Pi(W_1) \cong Y \times S^1$ , vía un difeomorfismo que preserva los conjuntos  $\gamma = \text{cte}$ , También nótese el abuso de lenguaje pues esto es para  $\gamma$  grande, esto es inmediato al recordar que  $\beta_\gamma(\psi)$  para  $|\gamma|$  grande tiene la forma de una elipse, que es difeomorfa a un círculo.

Notar También que  $Y$  tiene una simetría rotacional, así, no es necesario dar una media vuelta antes de juntar.

Lema 9.1: Una parte de  $\Pi(w_1)$  es pegada a los círculos paralelos de  $S^2$ . (ver la figura de la § 8).

Demostración:

Sea  $\Pi^{-1}: S^1 \times \mathbb{Y} \rightarrow S^4$   
 $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \left( \frac{\alpha}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{1/2}}, \frac{\beta}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{1/2}}, \frac{\gamma}{(1+|\beta|^2+\gamma^2)^{1/2}} \right)$ ,

como  $(\beta, \gamma) \in \mathbb{Y}$ , tenemos que  $|\beta|^2 = \gamma^2 + 1$ , luego  $1+|\beta|^2+\gamma^2 = 2(1+\gamma^2)$ , haciendo  $R^2 = 2(1+\gamma^2)$  tenemos que

$L = \Pi^{-1}(S^1 \times \mathbb{Y}) = \left\{ \left( \frac{\alpha}{R}, \frac{\beta}{R}, \frac{\gamma}{R} \right); |\alpha|=1, |\beta|^2 = \gamma^2 + 1 \text{ y } R^2 = 2(1+\gamma^2) \right\}$ .

Haciendo  $\delta = \frac{1}{\gamma}$ , para  $\gamma > 3$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{3}$  como  $\gamma^2 = \frac{1}{\delta^2}$ ,

tenemos  $R^2 = 2\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) = \frac{2(\delta^2+1)}{\delta^2}$ , luego

$L = \Pi^{-1}(S^1 \times \mathbb{Y}) = \left\{ \left( \frac{\alpha \delta}{\sqrt{2}(\delta^2+1)^{1/2}}, \frac{\beta \delta}{\sqrt{2}(\delta^2+1)^{1/2}}, \frac{1}{\sqrt{2}(\delta^2+1)^{1/2}} \right); |\alpha|=1, |\beta|^2 = \delta^2 + 1 \right\}$ .

Cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  (lo cual corresponde para  $\gamma \rightarrow \infty$ ) tenemos

$\left( \frac{\alpha \delta}{\sqrt{2}(\delta^2+1)^{1/2}}, \frac{\beta \delta}{\sqrt{2}(\delta^2+1)^{1/2}}, \frac{1}{\sqrt{2}(\delta^2+1)^{1/2}} \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \left( 0, \beta', \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

donde  $|\beta'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , pero los puntos  $(0, \beta', \frac{1}{\sqrt{2}})$ , con

$|\beta'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  corresponden al círculo superior de la figura de la § 8. Análogamente para  $\gamma < -3$

tenemos que  $\Pi(w_1)$  se pega al círculo inferior de la figura de la § 8.  $\square$

Por lo que tenemos que pegar  $\Pi(w_1)$ , a estos círculos admitiendo la  $\delta = 0$ .

Ahora trataremos de ver como son las cuárticas degeneradas en  $S^4$ , cerca del círculo superior  $S^2$ .

Leona 9.2. - El conjunto  $w = D \times S^4$  (de cuárticas degeneradas en  $S^4$ ) cerca del círculo superior  $S^2$ , es un Toro solido  $S^1 \times D^2$ .

Demostración. - Haciendo el cambio de coordenadas:  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\alpha s}{(s^2+1)^{1/2}}, \frac{\beta s}{(s^2+1)^{1/2}}, \frac{1}{(s^2+1)^{1/2}} \right) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha (1-\varepsilon^2)^{1/2}, \beta (1-\varepsilon^2)^{1/2}, \varepsilon \right)$$

el cual es un difeomorfismo cerca de  $s=0$ . Luego,

$$|\beta (1-\varepsilon^2)^{1/2}| = |\beta| |(1-\varepsilon^2)^{1/2}| = 1 \text{ ya que } |\beta| = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}},$$

además  $[(1-\varepsilon^2)^{1/2}]^2 + \varepsilon^2 = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} > 0$  pues  $0 < s < \frac{1}{3}$

y  $(1-\varepsilon^2)^{1/2} = \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}} \geq 0$ , por lo tanto tenemos;

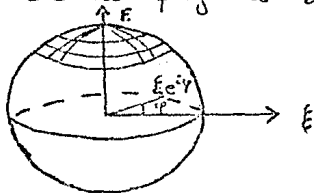
$$L = \pi^{-1}(S \times S^1) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi e^{i\phi}, e^{i\theta}, \varepsilon) ; \xi^2 + \varepsilon^2 = 1, \varepsilon > 0, \xi > 0 \right\}$$

$$\text{ya que } \begin{cases} |\beta (1-\varepsilon^2)^{1/2}| = 1 \\ \xi = (1-\varepsilon^2)^{1/2} \end{cases}$$

Cuando  $\varepsilon$  está cerca de 1,  $\xi$  está cerca de 0.

Luego  $L \cong e^{i\theta} \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi e^{i\phi}, \varepsilon)$ .

Por un lado tenemos que  $\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi e^{i\phi}, \varepsilon)$  es la capa esférica de la figura siguiente.



Pero la capa esférica  $\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi e^{i\phi}, \varepsilon)$  es difeomorfa al disco  $D^2$ , por lo que  $L \cong S^1 \times D^2$ . ■

Un análisis, análogo al anterior tenemos que  $W$  cerca al círculo inferior  $S^2$ , es también un Toro sólido.

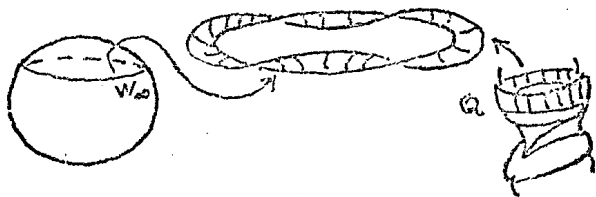
Ahora trataremos de describir como este Toro sólido se va pegando al círculo superior de  $S^2$ .

$\gamma = cte$  equivale a  $\varepsilon = cte$ , por lo que los contornos  $\gamma = cte$ , le corresponden contornos  $\varepsilon = cte$ , los cuales son círculos concéntricos en  $D^2$ .

$\alpha = cte$  equivale a una  $\phi$  fija, que corresponden a líneas radiales, una para cada dirección donde el origen del  $\alpha$ -plano.

Considerando una línea radial (para alguna  $\alpha$  fija), al aplicarle la  $\Gamma$ -acción, se Tuerce dos veces al dar una vuelta alrededor del  $\beta$ -círculo.

Luego, la parte de  $Q^3$  con  $\alpha$  fija y  $\gamma$  grande (la cual, es Topológicamente un cilindro), se pega al círculo superior de  $S^2$  como una banda Torcida dos veces, como lo muestra la figura siguiente





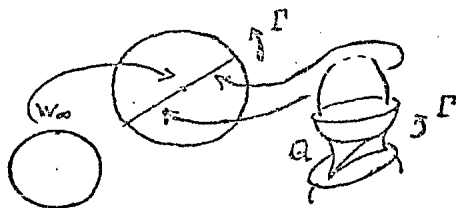
La  $\Gamma$ -acción sobre el  $\alpha$ -plano Tiene el efecto de rotar una línea radial en la dirección de esta banda. Así, el Toro sólido se descompone en una familia de bandas ( $S^1 \times D^2 = \cup \text{Bandas}$ ), donde para cada banda de esta familia uno de sus extremos es el  $\beta$ -círculo y el otro extremo una curva espiral al rededor del Toro.

Cada banda corresponde a la elección de una línea radial en  $D^2$  la cual es rotada 2 veces, como  $D^2$  se mueva al rededor del  $\beta$ -círculo.

Lo anterior describe como los bordes de los Tazones se pegan a los círculos paralelos de  $S^2$ .

Para describir como se pegan los bigotes a los polos de  $S^2$ . Notemos primero como las bandas se acercan en una  $\alpha$ -dirección pasando a través de un  $\beta$ -círculo y se unen suavemente con las bandas en la  $\alpha$ -dirección análogamente como los meridianos de  $S^2$ .

Una pareja de bigotes, para una  $\alpha$  fija le corresponden dos líneas radiales unidas por el centro, que bajo la acción de  $\Gamma$  sobre el  $\alpha$ -plano, Torciendo las líneas radiales dándoles media vuelta al rededor del disco como en la figura siguiente.



Esto completa la descripción de  $W$ .

El conjunto  $V$  de cuárticas con discriminante cero es un cono en  $W$ ; es decir  $V = \mathbb{R}^+ \times W$ .

## Apéndice 1. (Teoría clásica de ecuaciones)

### A. Polinomios simétricos

Un polinomio  $P$  en  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se dirá simétrico si  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \dots, x_{\alpha(n)})$  para toda  $\alpha$ , permutación de los índices.

Los polinomios  $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ ,  
 $\sigma_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k$ , ...,  $\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$  son simétricos,

llamados polinomios simétricos elementales, su nombre se debe al

### Teorema A.1 (Fundamental de los polinomios simétricos)

Todo polinomio simétrico  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se puede expresar de manera única como un polinomio  $\varphi$  en los polinomios simétricos elementales  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  y recíprocamente.

Demostración: [Kurosch, págs 330]. ■

La primera e importante conexión entre los polinomios simétricos con el estudio de los polinomios en una variable es la siguiente observación de Vieta:

Si  $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ . Tiene por raíces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  entonces los coeficientes del polinomio son salvo un signo los polinomios simétricos elementales de las raíces.

Después de esta observación, el Teorema. A.1 Tiene el siguiente

Corolario .- Si  $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  es un polinomio con raíces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; Todo polinomio homogéneo simétrico  $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  es un polinomio homogéneo  $\mathbb{P}$  en los coeficientes de  $p(x)$ , además.

Si  $\phi$  es de grado  $k$ ,  $k$  es igual a la suma de los subíndices de las  $a$ 's que aparecen en los sumandos de  $\mathbb{P}$ .

Si el polinomio es con coeficientes binomiales entonces la suma de Todos los factores numéricos de  $\mathbb{P}$  es cero. ■



es natural esperar una relación entre  $D_p R(p, p')$ , en efecto.

Teorema B.2  $R(p, p') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D.$

Demostración. -  $p(x) = a \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k)$ , luego

$$\begin{aligned} R(p, p') &= a_0^{n-1} \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = a_0^{n-1} \prod_{i=1}^n \left( a_0 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) \right) \\ &= a_0^{n-1} a_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 1. - El discriminante de  $p(x) = ax^2 + 2bx + c$ .

$$R(p, p') = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 2a & 2b \end{vmatrix} = 4a(-b^2 + ac), \text{ como } R(p, p') = -aD$$

se tiene que  $D = 4(b^2 - ac)$ .

Ejemplo 2. - El discriminante de  $p(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$

puesto que  $p'(x) = 3ax^2 + 6bx + 3c$ , se tiene que

$$R(p, p') = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d \\ 3a & 6b & 3c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 3b & 3c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 27a[4(b^3d + ac^3) + a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd]$$

pero  $R(p, p') = -aD$ , luego

$$D = -27[4(ac^3 + b^3d) + a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd].$$

### C. Definición de los invariantes G, H, S y T.

Consideremos un polinomio  $p(x) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \dots (1)$   
 uno de los principales trucos para estudiar a  $p(x)$  y sus raíces es mediante un cambio de coordenadas retirar el

segundo sumando. Por ejemplo si  $y = x - h$ , entonces

$$p(x) = A_0 y^n + \binom{n}{1} A_1 y^{n-1} + \binom{n}{2} A_2 y^{n-2} + \dots + A_n \dots \dots \dots (2)$$

donde  $A_0 = a_0$ ,  $A_1 = a_0 h + a_1$ ,  $A_2 = a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2$ ,

$$A_3 = a_0 h^3 + 3a_1 h^2 + 3a_2 h + a_3, \dots$$

Si además pedimos que  $A_1 = 0$  es decir  $a_0 h + a_1 = 0$ , entonces  $a_0 A_2 = a_0 a_2 - a_1^2$

$$a_0^2 A_3 = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3$$

$$a_0^3 A_4 = a_0^3 a_4 - 4a_1^2 a_2 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4 =$$

$$= a_0^3 (a_0 a_4 - 4a_1 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_2) - 3(a_0 a_2 - a_1^2)^2.$$

⋮

etc.

en general  $a_0^{n-1} A_n$  es un polinomio homogéneo en los coeficientes; son de interés los siguientes polinomios homogéneos.

Definición:  $H := a_0 a_2 - a_1^2$

$$G := a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3$$

$$S := a_0 a_4 - 4a_1 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_2$$

$$T := a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3.$$

En los casos de interés la ecuación transformada queda para la cúbica:

$$y^3 + \frac{3H}{a_0} y + \frac{G}{a_0^3} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

y al hacer  $z = a_0 y$

$$z^3 + 3Hz + G = 0 \dots \dots \dots (3')$$

y para la cuártica:

$$y^4 + \frac{6H}{a_0^2} y^2 + \frac{4G}{a_0^3} y + \frac{a_0^2 S - 3H^2}{a_0^3} = 0 \dots (1)$$

3

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2 S - 3H^2 = 0 \dots (4')$$

respectivamente.

Las raíces  $\alpha, \beta, \gamma$  de la ecuación original (1) están relacionadas con las raíces de la ecuación Transformada por  $\alpha = \alpha' + h, \beta = \beta' + h, \dots$

donde  $a_0 h + a_1 = 0$ , en el caso de las cúbicas se tiene que

$\alpha + \beta + \gamma = -3h$  y para las cuárticas  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -4h$

por lo que:  $2\alpha - \beta + \gamma = 3\alpha'$

$$2\beta - \gamma - \alpha = 3\beta'$$

$$2\gamma - \alpha - \beta = 3\gamma'$$

respectivamente para

las cuárticas

$$3\alpha - \beta - \gamma - \delta = 4\alpha'$$

$$3\beta - \gamma - \delta - \alpha = 4\beta'$$

$$3\gamma - \delta - \alpha - \beta = 4\gamma'$$

$$3\delta - \alpha - \beta - \gamma = 4\delta'$$

Por último en esta sección dos comentarios:

Cualquier función simétrica de las raíces  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  que es sólo función de las diferencias puede expresarse como función de los coeficientes de la ecuación Transformada (2), esto no debe sorprender pues la diferencia entre



dos raíces  $\alpha', \beta'$  de la ecuación (2) es igual a la diferencia entre las raíces correspondientes  $\alpha, \beta$  de la ecuación original (1) y por el Corolario al Teorema A.1 cualquier función simétrica de las raíces puede expresarse en términos de la ecuación transformada (2). Luego:

Proposición C.1 Toda función simétrica de las raíces que involucre sólo diferencias de éstas puede expresarse en función de:

- (a)  $a_0, H, G$  en el caso de las cúbicas
- (b)  $a_0, H, G, S$  en el caso de las cuárticas.  $\square$

En lo anterior para nada ha aparecido el  $T$ , este polinomio jugará un papel importante en el análisis del discriminante de las cuárticas, por ahora sólo diremos que  $T$  está relacionado con  $G, H$  y  $S$  de la siguiente manera:  $G^2 + 4H^3 = a_0^2 (HS - a_0 T)$ . ....(5)

D: Ecuación cuyas raíces son la diferencias al cuadrado de las raíces de la cúbica

Consideremos una cúbica reducida,  $x^3 + px + q = 0 \dots (1)$  con raíces  $\alpha, \beta, \gamma$ , es claro que

$[y - (\beta - \gamma)^2][y - (\gamma - \alpha)^2][y - (\alpha - \beta)^2] = 0$  Tiene por raíces a las diferencias al cuadrado de las raíces  $\alpha, \beta, \gamma$ : pero, ¿cómo expresar a ésta en términos de  $p$  y  $q$ ?

Es fácil verificar  $x = \frac{3q}{y+p} \dots (2)$

Transforma a  $(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2, (\alpha - \beta)^2$  en  $\alpha, \beta, \gamma$  y la ecuación (1) se transforma en

$$y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0 \dots (3)$$

Desde luego uno está interesado en la cúbica más general  $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \dots (4)$  en la parte C, la transformamos en

$$y^3 + \frac{3H}{a_0^2}y + \frac{6}{a_0^3} = 0 \dots (5)$$

y las raíces de (5) dan las mismas diferencias que las raíces de (4), por lo que podemos aplicar lo anterior a (5) con  $p = \frac{3H}{a_0^2}$  y  $q = \frac{6}{a_0^3}$  y obtener

$$x^3 + \frac{18H}{a_0^2}x^2 + \frac{81H^2}{a_0^3}x + \frac{27}{a_0^3}(G^2 + 4H^3) = 0 \dots (6)$$

que tiene por raíces a  $(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2$  y  $(\alpha - \beta)^2$

Es interesante rescatar que:

$$(\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2 = -\frac{27}{a_0^6} (G^2 + 4H^3) \dots (7)$$

Como el discriminante de la cúbica (1) es  $D = a_0^4 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2$  se tiene de (7) y la ecuación (5) de  $G$  que:

$$D = -\frac{27}{a_0^2} (G^2 + 4H^3) = -27(HS - a_0 T) \dots (8)$$

Muchos autores llaman a  $\frac{1}{a_0^2} (G^2 + 4H^3)$  el "discriminante" y lo denotan por  $\Delta$ , luego:

$$\Delta = \frac{1}{a_0^2} (G^2 + 4H^3) = HI - a_0 J \dots (9)$$

y la relación entre los "discriminantes" es:

$$D = -27 \Delta \dots (10)$$

### E. Solución por radicales de la cúbica y la cuártica

La solución general de la ecuación cúbica

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \quad (1)$$

puede encontrarse a partir de la ecuación transformada

$$z^3 + 3Hz + G = 0 \quad (2)$$

donde  $z = ax + b$  y  $H, G$  definidos como en G.

Para resolver (2) supóngase que la solución es de la forma  $z = \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$ , simples operaciones nos llevan a que  $z$  debe satisfacer también

$$z^3 - 3\sqrt[3]{P}\sqrt[3]{Q}z - (P+Q) = 0 \quad (3)$$

Al comparar los coeficientes de (2) y (3) obtenemos:

$\sqrt[3]{P}\sqrt[3]{Q} = -H$  y  $P+Q = -G$  por lo que  $P$  y  $Q$  son las raíces de la cuadrática  $y^2 + Gy - H^3 = 0$  y entonces

$$P = \frac{1}{2} \left( -G + \sqrt{G^2 + 4H^3} \right) \text{ y } Q = \frac{1}{2} \left( -G - \sqrt{G^2 + 4H^3} \right).$$

Puesto que existen 3 raíces cúbicas de  $P$  y 3 de  $Q$ , existen 9 valores posibles para la solución  $z$  de la ecuación (2), dado que se tiene la restricción

$\sqrt[3]{P}\sqrt[3]{Q} = -H$ , se tiene que estos 9 valores son redundantes y en realidad solo existen 3 a saber

$$\sqrt[3]{P} + \frac{-H}{\sqrt[3]{P}}, \quad w\sqrt[3]{P} + w^2\frac{-H}{\sqrt[3]{P}} \text{ y } w^2\sqrt[3]{P} + w\frac{-H}{\sqrt[3]{P}}$$

donde  $w \neq 1$  es una raíz cúbica de la unidad.

Es claro que al despejar  $ax + b = \sqrt[3]{P} + \frac{-H}{\sqrt[3]{P}}$  se obtiene

una raíz de la ecuación original.

Para la cuártica  $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e \dots \dots (4)$

la Transformación  $z = ax + b$ , la convierte en  $z^4 + 4Hz^3 + 4Gz^2 + a^2S - 3H^2 = 0 \dots (5)$

Podemos suponer que la solución de (5) se puede expresar como  $z = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ , que también resuelve  $z^4 - 2(p+q+r)z^2 - 8\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r}z + (p+q+r)^2 - 4(pq+qr+rp) = 0 \dots (6)$

al comparar los coeficientes de (5) y (6) se obtiene

que  $p+q+r = -3H$

$\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r} = -\frac{G}{2}$

$p+q+r = -3H$  y en consecuencia  $p, q$  y  $r$  son las raíces de la ecuación  $\tau^3 + 3H\tau^2 + (3H^2 - \frac{a^2S}{4})\tau - \frac{G^2}{4} = 0 \dots (7)$

y puesto que  $-G^2 = 4H^3 - a^2HS + a^3T$ , la ecuación (7) se reescribe como  $4(T+H)^3 - a^2S(T+H) + a^3T = 0 \dots (8)$

haciendo  $T+H = a^2\theta$ , obtenemos  $4a^3\theta^3 - Sa\theta + T = 0 \dots (9)$

llamada la cúbica reducida de la cuártica.

Dado que  $z = b^2 - ac + a^2\theta$ , se tiene que

$p = b^2 - ac + a^2\theta_1, q = b^2 - ac + a^2\theta_2, r = b^2 - ac + a^2\theta_3$  donde

$\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  son las raíces de (9), por lo tanto las

soluciones de (6) son

$z = \sqrt{b^2 - ac + a^2\theta_1} + \sqrt{b^2 - ac + a^2\theta_2} + \sqrt{b^2 - ac + a^2\theta_3}$

al igual que en la cúbica existe redundancia en los 8 valores posibles, la restricción  $\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r} = -\frac{G}{2}$  es la que permite evitar ésta.

Las raíces  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  de la cuártica original (4) y las raíces de la Transformada (5) se relaciona por :

$$\left. \begin{aligned} a\alpha + b &= \sqrt{p^1} - \sqrt{q^1} - \sqrt{r^1} \\ a\beta + b &= -\sqrt{p^1} + \sqrt{q^1} - \sqrt{r^1} \\ a\gamma + b &= -\sqrt{p^1} - \sqrt{q^1} + \sqrt{r^1} \\ a\delta + b &= \sqrt{p^1} + \sqrt{q^1} + \sqrt{r^1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Restando por parejas de la ecuación (10), Tenemos una relación interesante entre las raíces de (7) y (9) con la cuártica (1) :

$$\left. \begin{aligned} 4(\gamma - \gamma) &= 4a^2(\theta_2 - \theta_3) = -a^2(\beta - \gamma)(\alpha - \delta) \\ 4(\gamma - \beta) &= 4a^2(\theta_3 - \theta_1) = -a^2(\gamma - \alpha)(\beta - \delta) \\ 4(\beta - \gamma) &= 4a^2(\theta_1 - \theta_2) = -a^2(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Observación E.1 Puesto que las raíces  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  de (9) son tales que  $(\theta_1 - \theta_2)^2, (\theta_2 - \theta_3)^2, (\theta_3 - \theta_1)^2$  son raíces de  $y^3 + 6\left(\frac{-S}{4a^2}\right)y^2 + 9\left(\frac{-S}{4a^2}\right)^2y + 4\left(\frac{-S}{4a^2}\right) + 27\left(\frac{T}{4a^3}\right)^2 = 0 \dots \dots (12)$

(ver D), es inmediato que :

$$(\theta_1 - \theta_2)^2 (\theta_2 - \theta_3)^2 (\theta_3 - \theta_1)^2 = \frac{1}{16a^6} (S^3 - 27T^2)$$

Por (11) se sigue que :

$$a^6 \{ (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 (\gamma - \delta)^2 \} = 256(S^3 - 27T^2) \dots (13)$$

Es decir  $D = 256(S^3 - 27T^2)$ .

En muchos libros se conoce a  $S^3 - 27T^2$  como el "discriminante" y se denota por  $\Delta$ , es decir :  $\Delta = S^3 - 27T^2$

## F.- Criterio para la naturaleza de las raíces de una cúbica

Usaremos la ecuación cuyas raíces son las diferencias al cuadrado de las raíces  $\alpha, \beta, \gamma$  de la cúbica  $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \dots \dots \dots (1)$  que obtuvimos en D, ésta es:

$$x^3 + \frac{18H}{a^2}x^2 + \frac{81H}{a^4} + \frac{27}{a^6}(G^2 + 4H^3) = 0 \dots \dots (2)$$

donde  $H = ac - b^2$ ,  $G = a^2d - 3abc - 2b^2c$  y  $\frac{G^2 + 4H^3}{a^2} = \Delta = a^2d^2 - 6abcd + 4(ac^3 + b^3d) - 3b^2c^2$ .

Una primera observación es que (2) tiene una raíz negativa si y sólo si

(#) Tiene un par de raíces complejas conjugadas, pues la diferencia de dos raíces al cuadrado es negativa cuando y sólo cuando estas dos raíces son conjugadas complejas.

(F.1) Cuando  $\Delta$  ( $\therefore G^2 + 4H^3$ ) es negativo, las raíces de la cúbica son todas reales.

Es claro que en este caso  $H$  debe ser negativo y entonces los signos de los coeficientes en (2) están alternados; por la regla de los signos de Descartes esta ecuación no tiene raíces negativas y en consecuencia (1) sólo tiene raíces reales

(F.2) Cuando  $\Delta (\because G^2 + 4H^3)$  es positivo, la cúbica Tiene dos raíces complejas conjugadas.

La ecuación (2) debe Tener una raíz negativa y por tanto (i) dos complejas conjugadas

(F.3) Cuando  $\Delta (= \frac{1}{G^2} G^2 + 4H^3)$  es cero, la cúbica Tiene dos raíces iguales, ya que la cúbica (2) Tiene una raíz igual a cero.

(F.4) Cuando  $H = G = 0$ , la cúbica Tiene Tres raíces iguales. Esto se sigue de que (2) en este caso Tiene a cero como raíz múltiple.



G: Criterio para la naturaleza de las raíces de una cuártica.

Consideremos la ecuación cuártica  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \dots (1)$

su ecuación reducida (ver E, ecuación (9))  $4a^3\theta^3 - Sa\theta + T = 0 \dots (2)$

y la ecuación de diferencias al cuadrado de (2)

(ver ecuación (12) de E)

$$y^3 + 6\left(-\frac{S}{4a^2}\right)y^2 + 9\left(\frac{-S}{4a^2}\right)^2y + 4\left(\frac{-S}{4a^2}\right)^3 + 27\left(\frac{T}{4a^3}\right)^2 = 0 \dots (3)$$

La relación entre las raíces de (1), (2) y (3) está dada por la ecuación (11) de E.

$$\text{Aquí } S' = ac - 4bd + 3c^2, T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3$$

y  $\Delta = S'^2 - 27T^2$ , recuérdese también (ver E) que:

$$\begin{aligned} \{(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2\} &= 4^6(\theta_1 - \theta_2)^2(\theta_2 - \theta_3)^2(\theta_3 - \theta_1)^2 \\ &= \frac{256}{a^6} (S'^2 - 27T^2) = \frac{256}{a^6} \Delta \dots (4) \end{aligned}$$

(1) Cuando  $\Delta = 0$ , la ecuación tendrá raíces múltiples.

(1a) Si  $S$  y  $T$  son diferentes de cero, hay sólo dos raíces iguales

(1b) Si  $S = T = 0$ , habrá tres raíces iguales

(1c) Si  $G = 0$  y  $a^2S - 12H^2 = 0$  en tal caso hay 2 pares de raíces iguales.

(1d) Si  $H = S = T = 0$  todas las raíces son iguales.

(2) Para  $\Delta < 0$ , la ecuación tiene 2 raíces reales y 2 complejas conjugadas

(3) Si  $\Delta > 0$ , las raíces son todas reales ( $H < 0$  y  $a^2S - 12H^2 < 0$ )  
o todas complejas.

## H. Tres observaciones sobre los invariantes

En esta parte se pretenden hacer las siguientes

observaciones:

- (a) La demostración de la proposición 1.1 del Capítulo II;  
 (b) Una indicación sobre la demostración de la proposición 1.2 de Tal Capítulo.  
 (c) Una justificación de la relación  $J = \frac{4}{27} \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(1-z)^2}$  que aparece en la sección §1 de ese mismo Capítulo.  
 (a) Demostración de la proposición 1.1

Supongamos que  $I$  es un invariante y que si  $g(x', y') = (x, y) = (\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y')$  es un cambio de coordenadas entonces la función que relaciona a  $I(f)$  con  $I(f' = f \circ g)$  es  $\phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . Queremos mostrar que  $\phi$  es una potencia de  $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ .

Supongase que  $f'' = f' \circ g'$  donde  $g'(x'', y'') = (x', y')$   
 $= (\alpha' x'' + \beta' y'', \gamma' x'' + \delta' y'')$  y supongase que  $I'' = \phi(\alpha', \beta', \gamma', \delta') I'$ ,  
 luego  $I'' = \phi(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) I$ .

Como el paso a las variables  $(x, y)$  de las variables  $(x'', y'')$  está dado por

$$x = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')x'' + (\alpha\beta' + \beta\delta')y''$$

$$y = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')x'' + (\gamma\beta' + \delta\delta')y''$$

También se tiene que  $I'' = \phi(\alpha\alpha' + \beta\gamma', \alpha\beta' + \beta\delta', \gamma\alpha' + \delta\gamma', \gamma\beta' + \delta\delta') I$ ,  
 en consecuencia  $\phi$  debe satisfacer la ecuación funcional  
 $\phi(\alpha\alpha' + \beta\gamma', \alpha\beta' + \beta\delta', \gamma\alpha' + \delta\gamma', \gamma\beta' + \delta\delta') = \phi(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , que es  
 la que resolveremos.

En primer lugar si es la identidad se deberá tener que :  $\phi(1, 0, 0, 1) = 1$ .

Al hacer  $\alpha = \delta = k$ ,  $\beta = \gamma = 0$ , entonces  $g(x', y') = (kx', ky')$  luego cada nuevo coeficiente de  $f'$  es igual al correspondiente coeficiente original multiplicado por alguna potencia de  $k$ , luego  $\phi(k, 0, 0, k) = k^\gamma$  para alguna  $\gamma \in \mathbb{N}$ .

Dado que  $\phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \phi(k, 0, 0, k) = \phi(k\alpha, k\beta, k\gamma, k\delta)$ , Tenemos que  $\phi(k\alpha, k\beta, k\gamma, k\delta) = k^\gamma \phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  es decir  $\phi$  es homogénea de grado  $\gamma$  en las variables  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

Finalmente si  $g'$  es la inversa de  $g$ , se tiene que  $\alpha' = \frac{1}{D} \delta$ ,  $\beta' = -\frac{1}{D} \beta$ ,  $\gamma' = -\frac{1}{D} \gamma$  y  $\delta' = \frac{1}{D} \alpha$ , donde

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

Luego  $1 = \phi(1, 0, 0, 1) = \phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \phi(\alpha', \beta', \gamma', \delta') =$   
 $= \phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \phi\left(\frac{\delta}{D}, -\frac{\beta}{D}, -\frac{\gamma}{D}, \frac{\alpha}{D}\right)$  y como  $\phi$  es homogénea de grado  $\gamma$ ,

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \phi(\delta, -\beta, -\gamma, \alpha) = D^\gamma$$

Pero  $D$  es irreducible (es decir no se puede descomponer en producto de polinomios homogéneos en  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) y como  $\phi$  es un polinomio homogéneo en  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  entonces tanto  $\phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  como  $\phi(\delta, -\beta, -\gamma, \alpha)$  son potencias enteras de  $D$ . ■

(b) Una idea de la demostración de la proposición 1.2

Los invariantes de las formas binarias están relacionados con las raíces de ecuaciones algebraicas de la manera siguiente :

Si  $f(x, y) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$  es una forma binaria, al hacer  $y = 1$ , se obtiene un polinomio en  $x$  de grado  $n$ , si las raíces de éste son  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  se puede verificar

(ver [B-P] Capítulos XV y XVI) que cualquier invariante  $P(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $f$  se escribe en la forma  $a_0^w \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  donde  $\phi$  es una función simétrica donde solo aparecen diferencias de las  $\alpha$ 's.

También es natural que debe satisfacerse la igualdad  $P(a_0, a_1, \dots, a_n) = P(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ .

Hemos observado en la proposición C.1 de éste apéndice que el caso de las cúbicas (resp. cuárticas) la función  $\phi$  puede expresarse como función de  $a, H, G$  (resp.  $a, H, G$  y  $S'$  [i.e. También]). Más aún se tiene

(1) Si  $P(a, b, c, d) = a^w \phi(\alpha, \beta, \gamma)$  es un invariante de las cúbicas, este se puede expresar como  $F(a, H, \Delta)$  ó  $G \cdot F(a, H, \Delta)$  de acuerdo con que  $\phi$  sea una función par o impar de las raíces.

(2) Si  $P(a, b, c, d, e) = a^w \phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  es un invariante de las cuárticas, este se expresa como  $F(a, H, S, T)$  ó

$G \cdot F(a, H, S, T)$  También si  $\phi$  es par o impar.

En ambos casos  $F$  es una función racional.

Demostración - Artículos 162 y 163 de [B-P]. ■

Observemos ahora que no puede haber invariantes de las cúbicas y cuárticas con  $\phi$  impar, ya que  $G \cdot F(a, H, \Delta)$  en el primer caso o  $G \cdot F(a, H, S, T)$  en el segundo no son iguales cuando se intercambia  $a, b, c, d$  por  $d, c, b, a$  (respectivamente  $a, b, c, d, e$  por  $e, d, c, b, a$ ). Luego los invariantes son polinomios en  $a, H, \Delta$  en el caso cúbico y en  $a, H, S, T$  en el cuártico. De manera similar  $a$  y  $H$  deben retirarse debido a que no permanecen iguales al intercambiar el orden en  $a, b, c, \dots$

Por tanto todo invariante de las formas cúbicas es una función racional en  $\Delta$  y todo invariante de las cuárticas es una función racional de  $S$  y  $T$ .

En el caso de las cuadráticas, las únicas funciones simétricas de las raíces  $\alpha, \beta$  que consideran sólo las diferencias son funciones en

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{\Delta}{a^2}.$$

$$(c) = J = \frac{y}{z^2} \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(1-z)^2}.$$

Se puede verificar fácilmente que si  $\alpha, \beta, \gamma$  son raíces de la cúbica  $x^3 + px + q = 0$  entonces la ecuación cuyas raíces son  $-\frac{\alpha}{\beta}, -\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\alpha}{\gamma}, -\frac{\gamma}{\alpha}, -\frac{\beta}{\gamma}$  y  $-\frac{\gamma}{\beta}$  es

$$\{\alpha\beta y^2 + (\alpha + \beta)y + \alpha\beta\} \{\beta\gamma y^2 + (\beta + \gamma)y + \beta\gamma\} \{\gamma\alpha y^2 + (\gamma + \alpha)y + \gamma\alpha\} = 0$$

que después de multiplicar y reacomodar se expresa como:

$$q^2 (y^2 - \gamma + 1)^3 + p^3 y^2 + (1 - \gamma)^2 = 0.$$

Por otro lado si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son las raíces de la cuártica  $x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ , (es claro que estas se corresponden a las pendientes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  de las rectas solución de  $f(x, y) = 0$  donde  $f(x, y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$  y si

$$\lambda = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} = \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)} = -\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \delta)} \text{ entonces}$$

se tiene (ver ecuación (11) de E) que:

$$-\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \delta)} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta_3}$$

$$-\frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} = \frac{\theta_2 - \theta_3}{\theta_2 - \theta_1}$$

$$-\frac{(\gamma - \alpha)(\beta - \delta)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)} = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2}$$

Además la ecuación cuyas raíces son  $(\beta - \gamma)(\alpha - \delta), (\gamma - \alpha)(\beta - \delta), (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$  es

$$z^3 + \{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\gamma - \alpha)(\beta - \delta) + (\gamma - \alpha)(\beta - \delta)(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)\} z - \{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\gamma - \alpha)(\beta - \delta)(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)\} = 0$$

y por Ec. (9), (11) y (13) de E. y de la definición de  $\Delta$  se reescribe como:

$$z^3 - \frac{12}{a} ST \pm \frac{16}{a^3} \sqrt{\Delta} = 0$$

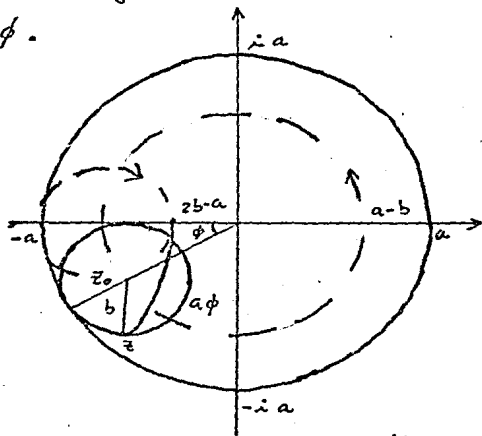
Al aplicar, lo dicho en el primer párrafo se tiene que la ecuación cuyas raíces son las razones cruzadas  $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}$  es

$$\left( \pm \frac{16}{a^3} \sqrt{\Delta} \right)^2 \left( \lambda^2 - \lambda + 1 \right)^3 + \left( \frac{12S}{a^2} \right)^3 \lambda^2 (1-\lambda)^2 = 0$$

$$\text{es decir } J = \frac{S^3}{\Delta} = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (1-\lambda)^2} .$$

## Apéndice 2.- (La hipocicloide y Cúspides).

(a) La curva hipocicloide es la que se obtiene del movimiento de un punto  $z$  sujeto en la circunferencia de un círculo que rueda sobre la circunferencia de otro círculo fijo, pero por su interior. Para encontrar la ecuación general de ésta, llamo al radio del círculo fijo como  $a$  y  $b$  para el círculo que gira. Supóngase que el punto  $z$  de la circunferencia del círculo que se mueve es  $a$  localizado en  $2b-a$  en  $\phi=0$ , supóngase además, que el círculo que gira se mueve a lo largo del círculo fijo de manera que en el tiempo  $\phi$  su centro ha girado al rededor del origen en un ángulo  $\phi$ .



Tenemos que  $z = z_0 + b e^{-i(\theta-\phi)}$  donde  $z_0 = -(a-b)e^{i\phi}$   
 y  $\theta = \frac{a}{b}\phi$  luego  $z = -(a-b)e^{i\phi} + b e^{-i(\frac{a-b}{b})\phi}$ .  
 Así,  $z_0$  expresa la rotación de un círculo en



contra las manecillas del reloj, de radio  $(a-b)$  y con velocidad angular igual 1, mientras que  $b e^{-i(\theta-\phi)}$  es la rotación de un círculo en sentido de las manecillas del reloj, de radio  $b$  y con velocidad angular  $\theta-\phi$ .

(b) Definición.- A:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene una cúspide simple en  $T_0$  si:

(i)  $f'(T_0) = 0$

(ii)  $f''(T_0) \neq 0$  y  $f'''(T_0) \neq 0$ .

(iii)  $f''(T_0)$  y  $f'''(T_0)$  son linealmente independientes.

B.-  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es equivalente en  $T_0$  a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  en  $T_1$  si existen  $\varphi: (\mathbb{R}, T_1) \rightarrow (\mathbb{R}, T_0)$  y  $\psi: (\mathbb{R}^2, f(T_1)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g(T_0))$  difeomorfismos tales que  $\psi \circ g = f \circ \varphi$

C.-  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $c(t) = (t^2, t^3)$  es una cúspide en  $T_0 = 0$ , llamada la cúspide simple canónica

Teorema 1.- Si  $f$  tiene una cúspide simple en  $T_0$  entonces  $f$  en  $T_0$  es equivalente a  $c$  en  $0$ .

Demostración.- Ver notas del Curso de Teoría de singularidades, Cap. II. de Santiago López de Medrano. por publicarse en Com. Internas. ■

Teorema 2.-  $\beta(\phi) = -ze^{i\phi} + e^{-2i\phi}$  sólo tiene cúspides simples:

Demostración.-  $\beta'(\phi) = -zi(e^{i\phi} + e^{-2i\phi}) = 0$

si y sólo si  $\phi_0 = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ .  $\beta''(\phi) = \frac{1}{e^{2i\phi}} (ze^{3i\phi} - 4)$

$\beta'''(\phi) = \frac{1}{e^{2i\phi}} (3ie^{3i\phi} - 8i)$ , luego

$\beta''(\phi_0) = -\frac{6}{\omega} = -6\bar{\omega}$  donde  $\omega$  es una raíz cúbica de uno.

y  $\beta'''(\phi_0) = \frac{6i}{\omega} = 6i\bar{\omega} = -i\beta''(\phi_0)$ , luego se satisfacen

(i), (ii) y (iii) de la primera definición. ■

Teorema 3. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^\infty$  si

$$(i) \quad f'(t_0) = f''(t_0) = 0 \quad \text{y}$$

$$(ii) \quad f'''(t_0) = f^{(iv)}(t_0) \text{ son linealmente independientes}$$

entonces  $f$  en  $t_0$  es equivalente a  $\tilde{z}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $\tilde{z} \mapsto (t^3, t^4)$   
 en  $0$ .

Demostración. - Sin perder generalidad se puede suponer que  $t_0 = 0$  y  $f(t_0) = 0$ .

Por el lema de Hadamard  $f(t) = t \tilde{f}(t)$  para alguna  $\tilde{f} \in C^\infty$ , \* además:

$$f'(t) = t \tilde{f}'(t) + \tilde{f}(t) \quad \therefore f'(0) = \tilde{f}(0)$$

$$f''(t) = t \tilde{f}''(t) + 2 \tilde{f}'(t) \quad \therefore f''(0) = 2 \tilde{f}'(0)$$

$$f'''(t) = t \tilde{f}'''(t) + 3 \tilde{f}''(t) \quad \therefore f'''(0) = 3 \tilde{f}''(0)$$

$$f^{(iv)}(t) = t \tilde{f}^{(iv)}(t) + 4 \tilde{f}'''(t) \quad \therefore f^{(iv)}(0) = 4 \tilde{f}'''(0).$$

$$\text{Luego, (i)} \Rightarrow (i') \quad \tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$$

$$\text{y (ii)} \Rightarrow (ii') \quad \tilde{f}''(0) \text{ y } \tilde{f}'''(0) \text{ son linealmente independientes.}$$

Por el Teorema 1.  $\tilde{f}(t)$  es equivalente a  $(t^2, t^3)$   
 y entonces  $f(t) = t \tilde{f}(t)$  es equivalente a  $(t^3, t^4)$ . ■

Teorema 4:

- (i)  $Q_\gamma(\phi)$  Tiene singularidades en  $e^{i\phi} = \pm \sqrt{\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 9}}{3}} e$ ,  
para  $|\gamma| \leq 3$ . (en el caso  $|\gamma| < 3$  son 4 y para  $|\gamma| = 3$  son  
2)  
(ii) Para  $|\gamma| < 3$  estas son cúspides simples.  
(es decir equivalentes a  $(T^2, T^3)$ )  
(iii) Para  $|\gamma| = 3$  son singularidades equivalentes  
a la "cúspide"  $(T^3, T^4)$ .

Demostación:

- (i) Si  $\beta_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}(-3e^{i\phi} + e^{-3i\phi} - 2\gamma e^{-i\phi})$ , se Tiene  
que  $\beta'_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}(-3ie^{i\phi} - 3ie^{-3i\phi} + 2\gamma ie^{-i\phi}) = 0$ !  
 $\Leftrightarrow e^{i\phi} = \pm \sqrt{\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 9}}{3}}$

$$(ii) \beta''_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}e^{3i\phi} (3e^{4i\phi} - 9 + 2\gamma e^{2i\phi})$$

$$\beta'''_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}e^{3i\phi} (3ie^{4i\phi} + 27i - 2\gamma ie^{2i\phi})$$

$$\beta^{(iv)}_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}e^{3i\phi} (-3e^{4i\phi} + 81 - 2\gamma e^{2i\phi})$$

$$\beta''_\gamma(\phi_0) = \frac{1}{2}e^{3i\phi_0} \left( \frac{\gamma^2 - 9 \pm i\gamma\sqrt{\gamma^2 - 9}}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \pm 3 \text{ donde}$$

$$e^{i\phi_0} = \pm \sqrt{\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 9}}{3}}. \quad \beta'''_\gamma(\phi_0) = \frac{1}{2}e^{3i\phi_0} (24i) \neq 0$$

además para  $|\gamma| < 3$ ,  $\beta''_\gamma(\phi_0)$  y  $\beta'''_\gamma(\phi_0)$  son  
linealmente independientes, luego  $Q_\gamma$  Tiene una  
cúspide simple en  $\phi_0$ .

(iii) En este caso

$$\beta_x''(\phi_0) = 0$$

$$\beta_x'''(\phi_0) = \begin{cases} \pm 12i & \gamma = 3 \\ \mp 12i & \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\beta_\gamma^{(iv)}(\phi_0) = \begin{cases} \pm 42i & \gamma = -3 \\ \pm 36 & \gamma = 3 \end{cases}$$

Luego  $\beta_x'(\phi_0) = \beta_x''(\phi_0) = 0$ ,  $\beta_x'''(\phi_0)$  y  $\beta_x^{(iv)}(\phi_0)$  son linealmente independientes por lo que  $\beta_x$  en  $\phi_0$  es equivalente por el Teorema 3 a  $(T^3, T^4)$  en 0. ■

A p ndice 3 - (Demostración de los lemas 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 6.1, 8.2).

Demostración del Lema 4.2:

Tenemos que  $\beta_0(\phi) = \frac{1}{2} (-3e^{i\phi} + e^{-3i\phi})$ , luego

$$\beta'_0(\phi) = -\frac{3}{2} i (e^{i\phi} + e^{-3i\phi}), \quad |\beta'_0(\phi)|^2 = 9 \cos^2 2\phi,$$

$$\beta''_0(\phi) = \frac{3}{2} (e^{-i\phi} - 3e^{-3i\phi}).$$

$$|\beta'_0(\phi)|^2 = \beta'_0(\phi) \overline{\beta'_0(\phi)} = \left(-\frac{3}{2} i\right) \left(\frac{3}{2} i\right) (e^{i\phi} + e^{-3i\phi})(e^{-i\phi} + e^{3i\phi})$$

$$= \frac{9}{4} (2 + 2 \cos 4\phi) = 9 \cos^2 2\phi.$$

Luego si  $\phi \notin \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$  los vectores Tangente y normal unitarios son:

$$T_0(\phi) = \frac{\beta'_0(\phi)}{|\beta'_0(\phi)|} = \frac{-i}{2 \cos 2\phi} (e^{-i\phi} + e^{-3i\phi}) = -i \left( \frac{e^{-i\phi} + e^{-3i\phi}}{e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}} \right)$$

$$= -i e^{-i\phi}.$$

$$N_0(\phi) = \frac{\beta'_0(\phi)^\perp}{|\beta'_0(\phi)^\perp|} = \frac{i \beta'_0(\phi)}{|\beta'_0(\phi)|} = i T_0(\phi) = e^{-i\phi}$$

Recordando, la curvatura  $K_0(\phi)$  debe satisfacer  $\frac{d}{ds} (T_0(\phi)) = K_0(\phi) N_0(\phi)$ , se tiene que

$$K_0(\phi) = \left\langle \frac{d}{ds} (T_0(\phi)), N_0(\phi) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{d\phi} (T_0(\phi)) \frac{d\phi}{ds}, N_0(\phi) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{|\beta'_0(\phi)|} \left\langle \frac{d}{d\phi} (T_0(\phi)), N_0(\phi) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{|\beta'_0(\phi)|^3} \left\langle |\beta'_0(\phi)| \beta''_0(\phi) - \beta'_0(\phi) \frac{d}{d\phi} |\beta'_0(\phi)|, N_0(\phi) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|\beta_0'(\phi)|^3} \langle \beta_0''(\phi), i \beta_0'(\phi) \rangle = \frac{1}{|\beta_0'(\phi)|^3} \operatorname{Re}(\overline{\beta_0''(\phi)} i \beta_0'(\phi)) \\
 &= \frac{1}{(3 \cos 2\phi)^3} \operatorname{Re} \left[ \frac{9}{4} (e^{-i\phi} - 3 e^{3i\phi}) (e^{i\phi} + e^{-3i\phi}) \right] = \\
 &= \frac{9/4}{(3 \cos 2\phi)^3} \operatorname{Re} (-2 - 3 e^{4i\phi} + e^{-4i\phi}) \\
 &= \frac{9/4}{(3 \cos 2\phi)^3} (-2 - 2 \cos 4\phi) = -\frac{9/2}{(3 \cos 2\phi)^3} (1 + \cos 4\phi) \\
 &= -\frac{9/2 (2 \cos^2 2\phi)}{(3 \cos 2\phi)^3} \quad \text{por lo tanto} \quad k_0(\phi) = -\frac{1}{3 \cos 2\phi}.
 \end{aligned}$$

La evoluta  $\hat{\beta}_0(\phi) = \beta_0(\phi) + \frac{1}{k_0(\phi)} N_0(\phi)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (-3 e^{i\phi} + e^{-3i\phi}) + (-3 \cos 2\phi) e^{-i\phi} = \\
 &= -\frac{3}{2} e^{i\phi} + \frac{1}{2} e^{-3i\phi} - 3 (e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) e^{-i\phi} \quad \text{por} \\
 &\text{lo tanto} \quad \hat{\beta}_0(\phi) = -3 e^{i\phi} - e^{-3i\phi}. \quad \text{Luego} \quad \hat{\beta}_0'(\phi) = 0 \\
 &\text{si y sólo si} \quad -3i (e^{i\phi} - e^{-3i\phi}) = 0 \quad \text{si y sólo si} \\
 &e^{4i\phi} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \quad \text{por lo} \\
 &\text{tanto} \quad \beta = \pm 4, \pm 4i, \text{ son las cúspides de } \hat{\beta}_0(\phi).
 \end{aligned}$$

Observe que para  $\phi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$   
 $\beta_0(\phi) = \hat{\beta}_0(\phi)$ , luego las cúspides de  $\beta_0(\phi)$  están  
 en  $\hat{\beta}_0(\phi)$ , se puede comprobar que  
 $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  son los únicos valores en  
 que  $\beta_0(\phi) = \hat{\beta}_0(\phi)$ , una manera es observando  
 que  $|\beta_0(\phi)| \leq 2 \leq |\hat{\beta}_0(\phi)|$  y que la igualdad se  
 da sólo en casos mencionados.

DemostRación d. l. Lema 4.3 :

Tenemos que  $\beta_\gamma(\phi) = \frac{1}{2}(-3e^{i\phi} + e^{-3i\phi} - 2\gamma e^{-i\phi})$   
 luego  $\beta_\gamma(\phi) = \beta_0(\phi) - \gamma e^{-i\phi}$ ,  $\beta_\gamma'(\phi) = \beta_0'(\phi) + i\gamma e^{-i\phi}$   
 $\beta_\gamma'(\phi)^\perp = -i \beta_\gamma'(\phi)$

$$\begin{aligned} |\beta_\gamma'(\phi)|^2 &= (\beta_0'(\phi) + i\gamma e^{-i\phi})(\overline{\beta_0'(\phi) + i\gamma e^{-i\phi}}) \\ &= |\beta_0'(\phi)|^2 + 2 \operatorname{Re}(i\gamma e^{-i\phi} \overline{\beta_0'(\phi)}) + \gamma^2 = 9 \cos^2 2\phi - 6\gamma \cos 2\phi + \gamma^2 \\ &= (3 \cos 2\phi - \gamma)^2. \end{aligned}$$

Para las  $\phi_0$  tales que  $|\beta_\gamma'(\phi)| \neq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} T_\gamma(\phi) &= \frac{\beta_\gamma'(\phi)}{|\beta_\gamma'(\phi)|} = \frac{\beta_0'(\phi) + i\gamma e^{-i\phi}}{3 \cos 2\phi - \gamma} = \frac{-\frac{3}{2}i(e^{i\phi} + e^{-3i\phi}) + i\gamma e^{-i\phi}}{\frac{3}{2}(e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) - \gamma} \\ &= -i e^{-i\phi} \text{ por lo tanto } N_\gamma(\phi) = i T_\gamma(\phi) = e^{-i\phi}, \\ &\text{por lo tanto } \beta_\gamma(\phi) \text{ es una curva paralela a } \beta_0(\phi). \end{aligned}$$

DemostRación del Lema 4.4 :

Sea  $\beta_\gamma''(\phi) = \beta_0''(\phi) + \gamma e^{-i\phi} = \frac{3}{2}(e^{i\phi} - 3e^{-3i\phi}) + \gamma e^{-i\phi}$

luego ;  $\kappa_\gamma(\phi) = \frac{1}{|\beta_\gamma'(\phi)|^3} \operatorname{Re}(\overline{\beta_\gamma''(\phi)} \beta_\gamma'(\phi) i) =$

$$= \frac{1}{|\beta_\gamma'(\phi)|^3} \operatorname{Re} \left[ (-\frac{3}{2}(e^{-i\phi} - 3e^{3i\phi}) + \gamma e^{-i\phi}) [-\frac{3}{2}i(e^{i\phi} + e^{-3i\phi}) + i\gamma e^{-i\phi}] i \right]$$

$$= \frac{1}{|\beta_\gamma'(\phi)|^3} \operatorname{Re} \left[ \frac{9}{4}(e^{-4i\phi} - 3e^{4i\phi} - 2) + 6\gamma e^{2i\phi} - \gamma^2 \right]$$

$$= \frac{1}{|\beta_\gamma'(\phi)|^3} \left[ \frac{9}{4}(-2 \cos 4\phi - 2) + 6\gamma \cos 2\phi - \gamma^2 \right] = \frac{-(3 \cos 2\phi - \gamma)^2}{(3 \cos 2\phi - \gamma)^3}$$

$$= -\frac{1}{3 \cos 2\phi - \gamma} = \frac{\kappa_0(\phi)}{1 + \gamma \kappa_0(\phi)}, \text{ además } \widehat{\beta}_\gamma(\phi) = \beta_\gamma(\phi) + \frac{1}{\kappa_\gamma(\phi)} N_\gamma(\phi)$$

$$= \beta_0(\phi) - \gamma e^{-i\phi} + \frac{1 + \gamma \kappa_0(\phi)}{\kappa_0(\phi)} e^{-i\phi} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \beta_0(\phi) + \frac{(-\gamma K_0(\phi) + 1 + \gamma K_0(\phi))}{K_0(\phi)} e^{-i\phi} = \beta_0(\phi) + \frac{1}{K_0(\phi)} e^{-i\phi} \\
 &= \hat{\beta}_0(\phi). \quad \square
 \end{aligned}$$

DemostRación del Lema 4.5 :

$\beta_\gamma'(\phi) = 0$  si y sólo si  $e^{i\phi} = \pm \left( \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 9}}{3} \right)^{1/2}$ ,  $|\gamma| \leq 3$   
 y por otro lado  $\hat{\beta}_0(\phi) = \beta_\gamma(\phi)$  si y sólo si  $e^{i\phi} = \pm \left( \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 9}}{3} \right)^{1/2}$ ,  
 $|\gamma| \leq 3$ . por lo tanto  $\hat{\beta}_0(\phi)$  es el lugar geométrico  
 de los puntos cúspides de  $\beta_\gamma(\phi)$ .  $\square$

DemostRación del Lema 6.1 :

Basta hacerlo con  $\eta = 1$  y además podemos  
 suponer que  $a = 1$ , luego tenemos que

$$f(x) = x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_4$$

donde los  $\sigma_i$ , son los polinomios simétricos  
 elementales de las raíces de  $f(x)$ .

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  son las raíces de  $f(x)$ , tenemos  
 que  $f(x)$  tiene dos pares de raíces iguales si y sólo si  
 $\lambda_1 = \lambda_2$  y  $\lambda_3 = \lambda_4$  (sino, las reordenamos)

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2(\lambda_1 + \lambda_3)$$

$$\sigma_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 = \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 4\lambda_1 \lambda_3$$

$$\sigma_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 2(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)$$

$$\sigma_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \lambda_1^2 \lambda_3^2$$

$$\text{así, } b = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \quad c = \frac{1}{6}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 4\lambda_1 \lambda_3),$$

$$d = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2) \quad \text{y} \quad e = \lambda_1^2 \lambda_3^2.$$

Luego basta justificar las igualdades

$$3bc = d + 2b^3 \quad \text{y} \quad 6cd = 2b(e + 2bd)$$

$$3bc = 3\left[-\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)\right]\left[\frac{1}{6}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 4\lambda_1 \lambda_3)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}[\lambda_1^3 + \lambda_3^3 + 5(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)] \quad \text{y}$$

$$d + 2b^3 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2) + 2\left(-\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)\right)^3$$

$$= -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2) + 2\left(-\frac{1}{8}(\lambda_1^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_3 + 3\lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_3^3)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}[\lambda_1^3 + \lambda_3^3 + 5(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)] \quad -$$

La otra igualdad,  $6cd =$

$$6\left[\frac{1}{6}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 4\lambda_1 \lambda_3)\left(-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 4\lambda_1 \lambda_3)(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)$$

$$= -\frac{1}{2}[\lambda_1^4 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^4 + 5(\lambda_1^2 \lambda_3^3 + \lambda_1^3 \lambda_3^2)]$$

$$2b(e + 2bd) = 2\left(-\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)\right)\left[\lambda_1^2 \lambda_3^2 + 2\left(-\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)\right)\left(-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)\right)\right]$$

$$= -(\lambda_1 + \lambda_3)\left[\lambda_1^2 \lambda_3^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}[\lambda_1^4 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^4 + 5(\lambda_1^2 \lambda_3^3 + \lambda_1^3 \lambda_3^2)]. \quad -$$

Para justificar las otras igualdades basta

observar que, Tomando  $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  en  $G$  Tenemos

$$\text{que } fg(x, y) = y^4 + 4by^3x + 6cy^2x^2 + 4dyx^3 + ex^4$$

Tiene También dos pares de raíces iguales, así

se cumplen las igualdades. - (al hacer  $y = 1$ )

$$\frac{ec - d^2}{e} = \frac{eb - cd}{2d} \quad \text{y} \quad \frac{e + 2db - 3c^2}{6c} = \frac{eb - dc}{2d} \quad . \quad \square$$

Demostación del Lema 8.2 :

Recordemos que  $D = S^3 - 27T^2$  donde

$$S = ae - 4bd + 3c^2 \quad \text{y} \quad T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3,$$

Así, que en nuestro caso tenemos que,

$$S = (ae + 3c^2) \quad \text{y} \quad T = ace - c^3 \quad \text{por lo tanto}$$

$$D = S^3 - 27T^2 = (ae + 3c^2)^3 - 27(ace - c^3)^2$$

$$= a^3e^3 + 3a^2e^2(3c^2) + 3ae(9c^4) + 27c^6 - 27(a^2c^2e^2 - 2ac^4e + c^6)$$

$$= a^3e^3 + 9a^2c^2e^2 + 27ac^4e + 27c^6 - 27a^2c^2e^2 + 27(2)ac^4e - 27c^6$$

$$= a^3e^3 - 18a^2c^2e^2 + 81ac^4e = ac(a^2e^2 - 18ac^2e + 81c^4)$$

$$= ac(ae - 9c^2)^2; \text{ así tenemos } D = 0 \text{ si y sólo si}$$

$$a = 0 \text{ ó } c = 0 \text{ ó } 3c = \pm a^{1/2}e^{1/2},$$

$$\text{por lo tanto } f(x, y) = (a^{1/2}x^2 \pm e^{1/2}y^2)^2. \quad \square$$

## Bibliografía

- [P-S] Poston, T y Stewart, J. N.  
 Taylor expansions and catastrophes.  
 Pitman Publishing, 1976
- [B-P]. Bunside, W y Panton, A.  
 Theory of equations, 2<sup>nd</sup> ed. Dover, 1960.
- [B-Y] Grace, J. H. y Young, A.  
 The algebra of invariants  
 Chelsea Publ. Co. 1903
- [Z] Zeeman, E. C.  
 The umbilic bracelet and The double-cusp  
 catastrophe.  
 Lecture Notes in Mathematics, 525 Springer 1976.
- [K] Kuvosch, A. B.  
 Curso de álgebra superior. Editorial MIR, 1977.