2 ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

SOBRE EL TEOREMA DE UNIFORMIZACION

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

JORGE OLIVARES VAZQUEZ

MEXICO, D. F. 1986

INTRODUCCIÓN.

AL FINAL DE ESTE TRABAJO HABREMOS DEMOSTRADO UN RESULTADO QUE ROMPIÓ LAS CABEZAS DE LOS MÁS GRANDES MATEMÁTICOS (¿POR QUÉ NO FÍSICOS?) DE FINALES DEL XIX Y PRINCIPIOS DEL XX, EL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN, QUE TRATA CON LO QUE hoy CONOCEMOS COMO SUPERFICIES DE RIEMANN.
Y DIGO hoy, PORQUE EL PROBLEMA POSIBLEMENTE PRINCIPAL AL QUE RIEMANN, SCHWARZ, WEIERSTRASS, POINCARÉ, HILBERT (Y SIGUE LA LISTA) SE ENFRENTABAN FUE

¿qué es una Superficie de Riemann?

LOS PRIMEROS TRES CAPÍTULOS ESTÁN DEDICADOS A RESPONDER ESTA PREGUNTA Y EN LA RESPUESTA CONSTRUIREMOS (SIGUIENDO AL CREADOR, DR. HERMAN WEYL) AL ENTE EN QUE DESDE LA PERSPECTIVA CONTEMPORÁNEA LLAMAMOS FUNDAMENTAL, SI ES GEOMETRÍA LO QUE NOS PROPONEMOS ESTUDIAR

variedades

CURIOSO: PRIMERO NACIERON LAS VARIEDADES ANALÍTICAS Y DESPUÉS LAS VARIEDADES DIFERENCIALES*, LOS ENTES QUE FORMALIZAN AQUELLO DE QUE la Geometría es el estudio de los invariantes de un grupo de transformaciones

LA TEORÍA DE LAS SUPERFICIES CUBRIENTES SE INTRODUCE COMO LA HERRAMIENTA NECESARIA PARA ENTENDER EL PROBLEMA DE 'UNIFORMIZAR' O 'PARAMETRIZAR' SUPERFICIES DE RIEMANN Y LA TEORÍA DE POTENCIAL COMO EL ELEMENTO FUNDAMENTAL QUE CLASIFICA TALES PARAMETRIZACIONES. A ELLAS ESTÁN DEDICADOS LOS SIGUIENTES TRES CAPÍTULOS DE ESTA TESIS Y PARTICULARMENTE EN EL SEXTO, PERO SOBRE TODO EN EL SÉPTIMO Y ÚLTIMO VAMOS A VER FUNCIONAR ABSOLUTAMENTE TODOS (no creo exagerar) LOS CONCEPTOS DESARROLLADOS PÁGINAS ATRÁS

ADELANTE, LECTOR.

*CON UN PAR DE PÁGINAS DE DIFERENCIA.

I

análisis en C

— IF NOT FOR YOU...
BOB DYLAN.

§1.1 · FUNCIONES ANALÍTICAS Y MAPEO CONFORME

UNA FUNCIÓN f DEFINIDA EN UN ABIERTO $\mathcal{U}$ DEL PLANO COMPLEJO CON VALOR COMPLEJO $f(z)$ SE LLAMARÁ ANALÍTICA SI POSEE UNA DERIVADA EN TODO PUNTO DE SU DOMINIO. SI ESCRIBIMOS A LA FUNCIÓN EN SUS PARTES REAL E IMAGINARIA $f(z)=u(z)+iv(z)$ Y DENOTAMOS A $z=x+iy$, ENCONTRAREMOS QUE $f(z)$ DEBE SATISFACER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL EN DERIVADAS PARCIALES

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

QUE SE RESUELVE EN UN PAR DE ECUACIONES REALES

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

LAS LLAMADAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN. UNA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(z)=u(z)+iv(z)$ DEBE SATISFACERLAS.

RECÍPROCAMENTE, SI $u(x,y)$, $v(x,y)$ TIENEN PARCIALES CONTINUAS QUE SATISFACEN LAS ECUACIONES DE CAUCHY RIEMANN, ENTONCES $f(z)=u(z)+iv(z)$ ES ANALÍTICA CON DERIVADA CONTINUA $f'(z)$, QUE PUEDE EXPRESARSE COMO

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\mp i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

EL TÉRMINO "FUNCIÓN ANALÍTICA" ES GENERALMENTE REFERIDO A QUE LA FUNCIÓN ADMITA UNA EXPRESIÓN LOCAL EN SERIE DE POTENCIAS CONVERGENTE UNIFORMEMENTE. MÁS ADELANTE MOSTRAREMOS QUE LAS DOS FORMAS DE ANALITICIDAD ANTERIORES COINCIDEN EN EL CASO DE FUNCIONES COMPLEJAS DE VALOR COMPLEJO.

UNA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(z)$ CON DERIVADA $f'(z)\neq 0$ SE LLAMARÁ *conforme en* z, CON TAL PROPIEDAD. ESTAMOS PARTICULARMENTE INTERESADOS EN EL COMPORTAMIENTO TANTO LOCAL COMO GLOBAL DE LOS *Mapeos Conformes* ASÍ QUE DESCRIBIREMOS ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES.

DENOTEMOS POR γ UN ARCO DIFERENCIABLE CON ECUACIÓN $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ CONTENIDO EN UNA REGIÓN $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ (UN ABIERTO CONEXO DEL PLANO COMPLEJO) EN QUE $f(z)$ ES ANALÍTICA ($z'(t)$ EXISTE). ASÍ, $w=w(t)=f(z(t))$ DEFINE UN ARCO γ' EN EL PLANO W, LA IMAGEN DE γ. POR LA REGLA DE LA CADENA $w'(t)$ EXISTE Y

$$w'(t)=f'(z(t))\cdot z'(t)$$

EL SIGNIFICADO DE ESTA ECUACIÓN EN UN PUNTO $z_0=z(t_0)$ CON $z'(t_0)\neq 0$ Y $f'(z_0)\neq 0$ PUEDE SER DESCRITO EXHAUSTIVAMENTE:

(i) $w'(t_0)\neq 0$, ASÍ QUE γ' TIENE UNA TANGENTE EN $w_0=f(z_0)$ EN LA DIRECCIÓN DETERMINADA POR

$$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$$

ES DECIR

$$\arg w'(t_0)-\arg z'(t_0)=\arg f'(z_0)$$

EL ÁNGULO ENTRE LAS TANGENTES A γ EN z_0 Y A γ' EN w_0 ES IGUAL A $\arg f'(z_0)$, POR LO TANTO ES INDEPENDIENTE DE γ: CURVAS CON UNA TANGENTE COMÚN EN z_0 SON MAPEADAS EN CURVAS CON TANGENTE COMÚN EN w_0. MÁS AÚN, SI DOS CURVAS $z_1(t)$, $z_2(t)$ CON UN PUNTO EN COMÚN $z_1(t_0)=z_2(t_0)$ SE CORTAN EN UN ÁNGULO DIRIGIDO DE z_1 A z_2 EN t_0, $=\alpha$, ENTONCES

$$\arg(w_1'(t_0))-\arg(z_1'(t_0))=\arg f'(z_0)=\arg(w_2'(t_0))-\arg(z_2'(t_0))$$

ASÍ QUE SE TIENE

$$\alpha=\arg(z_2'(t_0))-\arg(z_1'(t_0))=\arg(w_2'(t_0))-\arg(w_1'(t_0))$$

QUE CURVAS QUE SE CORTAN EN UN CIERTO ÁNGULO SON MAPEADAS EN CURVAS QUE SE CORTAN EN EL MISMO ÁNGULO tanto en dirección como en magnitud.

(ii) CONSIDEREMOS $|f'(z_0)|$, EL MÓDULO. POR SER NO NULO, TENEMOS QUE

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = |f'(z_0)|$$

QUE SIGNIFICA QUE CUALQUIER SEGMENTO PEQUEÑO CON UN PUNTO TERMINAL EN z_0 ES EN EL LÍMITE EXPANDIDO O CONTRAÍDO EN LA RAZÓN $|f'(z_0)|$; EL CAMBIO LINEAL DE ESCALA EN z_0 EFECTUADO POR $w=f(z)$ ES INDEPENDIENTE DE LA DIRECCIÓN, AUNQUE CIERTAMENTE DEPENDE DEL PUNTO. EN PALABRAS INFINITESIMALES: SI z SUFRE UN DESPLAZAMIENTO INFINITESIMAL dz, A ESTE LE CORRESPONDERÁ UN DESPLAZAMIENTO INFINITESIMAL dw EN LA IMAGEN, TAL QUE LA RAZÓN dw/dz DEPENDE SOLAMENTE DE z Y NO DE LA DIRECCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO dz.

RECÍPROCAMENTE: LOS TIPOS (i) y (ii) DE CONFORMALIDAD JUNTOS IMPLICAN LA EXISTENCIA DE $f'(z_0)$ PUES POR (ii) $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ ESTÁN BIEN DEFINIDAS EN $z_0=(x_0,y_0)$ Y POR (i) SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

MOSTRAREMOS QUE CON CIERTAS CONDICIONES DE REGULARIDAD CADA UNO POR SEPARADO IMPLICARÁ LA EXISTENCIA DE $f'(z)$. PRECISANDO, SUPONGAMOS QUE $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ SON CONTINUAS EN z_0, ASÍ QUE PODEMOS ESCRIBIR LA DERIVADA DE

$$\omega(t)=f(z(t))$$

COMO

$$\omega'(t_0)=\frac{d}{dt}f(z(t))=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z(t_0)}\cdot x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z(t_0)}\cdot y'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0}\cdot x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0}\cdot y'(t_0)$$

Y RECORDANDO QUE $x'(t_0)$ y $y'(t_0)$ PUEDEN RESPECTIVAMENTE ESCRIBIRSE COMO $\frac{1}{2}\left(z'(t_0)+\overline{z'(t_0)}\right)$ Y $-\frac{i}{2}\left(z'(t_0)-\overline{z'(t_0)}\right)$, OBTENDREMOS QUE

$$\omega'(t_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{z_0}\cdot z'(t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{z_0}\cdot\overline{z'(t_0)} \qquad \dots (*)$$

SI AHORA SUPONEMOS QUE LOS ÁNGULOS SON PRESERVADOS, PERMITIENDO QUE $\arg(z'(t_0))$ VARÍE EN TODAS LAS POSIBLES DIRECCIONES POR z_0, OBTENDREMOS DE $(*)$ que

$$\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{z_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{z_0}\cdot\frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)} \qquad \dots (**)$$

DONDE $\arg\left(w'(t_0)/z'(t_0)\right)=\arg w'(t_0)-\arg z'(t_0)$ ES INDEPENDIENTE DE $\arg(z'(t_0))$. SI ESCRIBIMOS $z'(t_0)=re^{i\theta}$, ENTONCES $\overline{z'(t_0)}/z'(t_0)=e^{-i2\theta}$ ASÍ QUE EL MIEMBRO IZQUIERDO DE $(**)$ REPRESENTA UN CÍRCULO CON CENTRO EN

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{z_0}$$

Y RADIO $\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0}+i\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0}\right\|$ CUANDO $\arg z'(t_0)$ VARÍA. PERO COMO LOS ÁNGULOS SON PRESERVADOS, ENTONCES $\arg w'(t_0)-\arg z'(t_0)=cte$: EN UN CÍRCULO EL ARGUMENTO ES CONSTANTE SÓLO SI EL RADIO SE ANULA, EN CUYO CASO

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0}=-i\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0},$$ $f(z)$ ES ANALÍTICA EN z_0.

EN EL OTRO CASO, SI $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ SON CONTINUAS Y EL CAMBIO DE ESCALA TIENE MÓDULO CONSTANTE EN TODA DIRECCIÓN, ENTONCES EL MIEMBRO IZQUIERDO DE $(**)$ TIENE MÓDULO CONSTANTE:

EN UN CÍRCULO EL MÓDULO ES CONSTANTE SOLAMENTE CUANDO EL MÓDU SE ANULA O EL CENTRO ESTÁ EN EL ORIGEN. EN EL PRIMER CASO OBTENDREMOS (***) MIENTRAS QUE EN EL SEGUNDO TENDREMOS QUE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

ES DECIR, $\overline{f(z)}$ ES ANALÍTICA. AL MAPEO OBTENIDO MEDIANTE CONJUGACIÓN DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA CON DERIVADA NO NULA SE LE LLAMA Indirectamente Conforme. POR LO ANTERIOR, PRESERVA EL TAMAÑO PERO INVIERTE EL SENTIDO DE LOS ÁNGULOS.

AL ESTUDIAR LAS PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES ANALÍTICAS MOSTRAREMOS QUE $f'(z)$ SIEMPRE ES DISTINTO DE CERO EN EL CASO DE UN MAPEO TOPOLÓGICO REALIZADO POR UNA FUNCIÓN ANALÍTICA, DE HECHO MOSTRAREMOS QUE AL SER $f(z)$ CONFORME EN z_0, ES LOCALMENTE TOPOLÓGICO. EMPERO, AÚN EN EL CASO DE SER $f'(z) \neq 0$ EN TODO EL DOMINIO Ω NO PODEMOS ASEGURAR QUE EL MAPEO SEA NECESARIAMENTE TOPOLÓGICO: LA IMAGEN PUEDE TRASLAPARSE EN SÍ MISMA, COMO VARIAS HOJAS DE PAPEL UNAS SOBRE OTRAS.

LAS PRIMERAS SUPERFICIES DE RIEMANN APARECEN CUANDO, EN LA SITUACIÓN ANTERIOR, NOS PREGUNTAMOS POR UN BUEN DOMINIO PARA DEFINIR LA FUNCIÓN INVERSA de manera que ésta resulte uniforme (monovaluada).

§1.2 PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES ANALÍTICAS

EL PRESENTE CAPÍTULO DEBE ENTENDERSE COMO UN REPASO DE LAS PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS Y NECESARIO PARA QUE HASTA CIERTO PUNTO ESTE TRABAJO SEA AUTOCONTENIDO. CON ESE ESPÍRITU ES QUE MUCHOS DE LOS RESULTADOS SOLAMENTE SE ENUNCIARÁN SIN DEMOSTRACIÓN. INVITO AL LECTOR (que supongo $\neq \phi$) A CONSULTAR AHLFORS, COMPLEX ANALYSIS EN CASO DE DUDAS EN LA TERMINOLOGÍA EMPLEADA, O DE LOS RESULTADOS MENCIONADOS.

TEOREMA DE CAUCHY: $\int_\gamma f(z) = 0$ si $f(z)$ holomorfa en Ω, REGIÓN QUE CONTIENE A γ, ciclo cerrado.

CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE CAUCHY ES EL SIGUIENTE

TEOREMA: SI $f(z)$ ES ANALÍTICA EN UNA REGIÓN (ABIERTO-CONEXO) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ QUE CONTIENE A a, ES POSIBLE ESCRIBIR

$$(1) \qquad f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

DONDE $f_n(z)$ ES ANALÍTICA EN Ω

ESTE DESARROLLO SERÁ DE GRAN UTILIDAD PARA EL ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES ANALÍTICAS SIN NECESIDAD DE RECURRIR AL DESARROLLO COMPLETO EN SERIE DE TAYLOR DEBIDO A QUE $f_n(z)$ ADMITE UNA SENCILLA EXPRESIÓN:

$$(2) \qquad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\varphi)\,d\varphi}{(\varphi-a)^n(\varphi-z)}$$

, DONDE C ES LA FRONTERA DE UN DISCO CENTRADO EN a, PROPIAMENTE CONTENIDO EN Ω. ES VÁLIDA PARA z EN EL INTERIOR DE C.

LLAMAREMOS AL DESARROLLO (1) el desarrollo corto de TAYLOR.

TEOREMA (DE la singularidad removible) SUPONGAMOS QUE $f(z)$ ES ANALÍTICA EN LA REGIÓN Ω' OBTENIDA DE Ω AL OMITIR EL PUNTO a. UNA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EXISTA UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN Ω QUE COINCIDA CON $f(z)$ EN Ω' ES QUE

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$$

. LA FUNCIÓN EXTENDIDA ESTÁ UNÍVOCAMENTE DETERMINADA.

QUE TAMBIÉN SE SIGUE DEL TEOREMA DE CAUCHY.

.1: CEROS Y POLOS

PROPOSICIÓN: SI $f(z)$ ES ANALÍTICA EN UNA REGIÓN Ω Y PARA ALGÚN PUNTO $a \in \Omega$ SE TIENE QUE $f(a)=0$ Y $f^{(\nu)}(a)=0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ ENTONCES $f(z)\equiv 0$ EN Ω.

Demostración: CONSECUENCIA DE QUE EN Ω PODEMOS ACOTAR LA EXPRESIÓN DE $f_n(z)$ Y DE QUE, POR (1), PODEMOS ESCRIBIR QUE $f(z) = f_n(z)(z-a)$ PARA TODO $n \in \mathbb{N}$.

DENOTEMOS POR M AL MÁXIMO DE LOS VALORES DE $|f(z)|$ EN C Y POR R AL RADIO DE C, ENTONCES:

$$|f_n(z)| \leq \frac{M}{R^{n-1}(R-|z-a|)}$$, PARA $|z-a|<R$, Y DE ACUERDO A (2), ASÍ ES QUE PARA TODA $n\in N$ PODEMOS ESCRIBIR:

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n \cdot \frac{MR}{R-|z-a|}$$, PERO $\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n \to 0$ SI $n\to\infty$, (PORQUE $|z-a|<R$) ASÍ ES QUE $f(z)\equiv 0$ EN EL INTERIOR DE C.

MOSTREMOS QUE $f(z)\equiv 0$ EN Ω: SEAN $E_1=\{z\in\Omega \,/\, f(z)$ y todas sus derivadas se anulan$\}$ y $E_2=\{z\in\Omega : f(z)$ O ALGUNA DE SUS DERIVADAS ES diferente de cero$\}$. POR EL RAZONAMIENTO ANTERIOR, E_1 ES ABIERTO. E_2 ES ABIERTO PORQUE $f(z)$ Y SUS DERIVADAS SON CONTINUAS, ASÍ ES QUE ALGUNO DE E_1 y E_2 DEBE SER VACÍO: si E_2 ES VACÍO, la función es idénticamente nula en Ω MIENTRAS QUE si E_1 ES VACÍO, $f(z)$ nunca podría anularse con todas sus derivadas para todo $z\in\Omega$. +.

ASÍ PUES, si $f(z)$ NO ES IDÉNTICAMENTE NULA PERO $f(a)=0$, EXISTE UNA PRIMERA DERIVADA $f^{(h)}(a)\neq 0$. EN TAL CASO LLAMAMOS A a un cero de orden h Y LA PROPOSICIÓN ANTERIOR ESTABLECE QUE no hay ceros de orden infinito. RECURRIENDO A (1) PODEMOS ENTONCES ESCRIBIR, COMO EN EL CASO DE LOS POLINOMIOS,

$$f(z)=(z-a)^h f_h(z) \quad , \; f_h(z) \text{ analítica y } f_h(a)\neq 0 .$$

los ceros de una función analítica son aislados YA QUE, POR CONTINUIDAD, $f_h(z)\neq 0$ EN UNA VECINDAD DE a, ASÍ ES QUE $f(z)$ $(=(z-a)^h f_h(z))$ TIENE EN TAL VECINDAD DE a AL PUNTO a COMO ÚNICO CERO. EN OTRAS PALABRAS:

TEOREMA (de identidad analítica): si $f(z)$ y $g(z)$ SON ANALÍTICAS EN Ω Y $f(z)=g(z)$ EN UN CONJUNTO CON UN PUNTO DE ACUMULACIÓN EN Ω, ENTONCES $f(z)\equiv g(z)$ EN Ω.

Demostración: la función $H(z)=f(z)-g(z)$ es analítica en Ω Y POR HIPÓTESIS TIENE UN CERO NO AISLADO EN Ω (el punto de acumulación) $\therefore H(z)\equiv 0$ EN Ω y $f(z)\equiv g(z)$ EN Ω.

OBSERVA QUE UNA SUBREGIÓN O UN ARCO DE CURVA CONTENIDOS EN Ω SON CONJUNTOS CON PUNTOS DE ACUMULACIÓN EN Ω.

DEFINICIÓN: si $f(z)$ es analítica en $0<|z-a|<\delta$ decimos que a es una SINGULARIDAD REMOVIBLE DE $f(z)$.

EL SEGUNDO TEOREMA TRATA EL CASO DE LAS singularidades removibles: podemos definir $f(a)$ de manera que $f(z)$ sea analítica en $|z-a|<\delta$.

SI $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ DECIMOS QUE $f(z)$ TIENE UN POLO EN $z=a$. EN TAL CASO $f(z)\neq 0$ EN ALGUNA VECINDAD DE a, ASÍ QUE $g(z)=1/f(z)$ ESTÁ BIEN DEFINIDA, ES ANALÍTICA EN $0<|z-a|<\delta$ Y LA SINGULARIDAD EN $z=a$ ES REMOVIBLE: DEFINIENDO $g(a)=0$. ESTE CERO DE $g(z)$ EN a TIENE ALGÚN ORDEN h, ASÍ QUE PODEMOS ESCRIBIR

$$g(z)=(z-a)^h g_h(z) \quad , \; g_h(z) \text{ holomorfa y } \neq 0 \text{ en } a .$$

AL ENTERO POSITIVO h LO LLAMAREMOS el orden del polo a de $f(z)$ Y LA REPRESENTACIÓN DE $f(z)$ ES EN ESTE CASO:

$$f(z) = (z-a)^{-h} f_h(z) \text{, con } f_h(z) = 1/g_h(z) \text{ analítico y no nula en una vecindad de } a.$$

DEFINICIÓN: UNA FUNCIÓN SE DICE *meromorfa* SI ES ANALÍTICA SALVO EN POLOS.

OBSERVA QUE EL COCIENTE DE FUNCIONES MEROMORFAS ES UNA FUNCIÓN MEROMORFA (LOS POSIBLES CEROS DEL DENOMINADOR SERÁN OTROS TANTOS POLOS DEL COCIENTE).

PARA UN TRATAMIENTO COMPLETO DEL TIPO DE SINGULARIDADES QUE PODEMOS ENCONTRAR, CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES CASOS:

$$(1)\ \lim_{z\to a} |z-a|^{\alpha}|f(z)| = 0 \qquad (2)\ \lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)| = \infty \ , \ \alpha\in\mathbb{R}$$

→ SI (1) VALE PARA ALGÚN REAL α VALE ENTONCES PARA EL PRIMER ENTERO $m>\alpha$ Y, POR EL TEOREMA DE SINGULARIDAD REMOVIBLE LA FUNCIÓN $(z-a)^m f(z)$ TIENE UNA SINGULARIDAD REMOVIBLE Y SE ANULA EN $z=a$.
PUEDE SUCEDER QUE $f(z)\equiv 0$, EN CUYO CASO (1) VALE PARA TODO $\alpha\in\mathbb{R}$, O BIEN, QUE $(z-a)^m f(z)$ TENGA UN CERO DE ORDEN FINITO k EN $z=a$. EN ESTE ÚLTIMO CASO PODEMOS ESCRIBIR:

$$(z-a)^m f(z) = (z-a)^k F(z) \text{, (donde } F(z) \text{ analítico en } a)$$

$$\text{i.e.: } (z-a)^{m-k} f(z) = F(z) \quad \text{(el lado izq. es analítico también!)}$$

Y TENDREMOS QUE

$$\lim_{z\to a}\left((z-a)^{m-k+1}\cdot f(z)\right) = \lim_{z\to a}(z-a)F(z) \underset{\uparrow}{=} 0$$

teo. de sing. removible.

CONCLUIMOS QUE (1) VALE PARA TODO $\alpha > n = m-k$, MIENTRAS QUE

$$(z-a)^{m-k-1}\cdot f(z) = F(z)/z-a$$

$$\therefore \lim_{z\to a}|z-a|^{m-k-1}\cdot|f(z)| = \lim_{z\to a}\frac{|F(z)|}{|z-a|} = \infty$$

POR LO QUE (2) VALE PARA TODO $\alpha < n$.

→ SI AHORA SUPONEMOS QUE (2) VALE PARA ALGUNA $\alpha\in\mathbb{R}$, ENTONCES VALE PARA EL PRIMER ENTERO $n<\alpha$ Y ENTONCES ESTAMOS EN EL CASO DE UN POLO EN $z=a$ DE LA FUNCIÓN $(z-a)^n f(z)$. ESTE POLO ES DE ALGÚN ORDEN l, EN CUYO CASO PODEMOS ESCRIBIR:

$$(z-a)^n f(z) = (z-a)^{-l}\cdot F(z) \text{, (DONDE } F(z) \text{ es analítico y no nula en una vecindad de } a),$$

$$\therefore\ (z-a)^{n+l} f(z) = F(z) \quad \text{(otra vez: el lado izquierdo es entonces analítico)}$$

NUEVAMENTE SE TIENE QUE $\lim_{z\to a}(z-a)^{n+l+1}\cdot f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)F(z) = 0$ POR EL TEO. DE LA SINGULARIDAD REMOVIBLE, ASÍ QUE (1) VALE PARA TODO $\alpha > n' = n+l$ MIENTRAS QUE (2) VALE PARA $\alpha < n'$ PORQUE $\lim_{z\to a}(z-a)^{n+l-1} = \lim_{z\to a}\frac{F(z)}{z-a} = \infty$.

LA DISCUSIÓN ANTERIOR ARROJA TRES ÚNICAS POSIBILIDADES:

(i) que la condición (1) VALGA PARA TODO $\alpha \in \mathbb{R}$, en cuyo caso $f(z)=0$
(ii) que exista un entero n (n') tal que (1) vale para $\alpha>n$ y (2) para $\alpha<n$
(iii) que (1) ni (2) sean válidas para ningún $\alpha \in \mathbb{R}$.

EL CASO i NO TIENE INTERÉS.
EN EL CASO ii LLAMAREMOS A n el orden algebraico DE $f(z)$ EN a. ES UN ENTERO

(a) POSITIVO EN EL CASO DE UN POLO (si $h>0$, (2) VALE EN PARTICULAR PARA $\alpha=0$ y $\lim_{z\to a}|z-a|^0|f(z)|=\infty \Leftrightarrow \lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$, i.e. lo que afirmé.)

(b) NEGATIVO EN EL CASO DE UN CERO (si $h<0$, (1) VALE PARA $\alpha=0$ y $\lim_{z\to a}|f(z)|=0$) y

(c) CERO si $f(z)$ ES ANALÍTICA Y $\neq 0$ EN $z=a$ (si $h=0$, (1) SE CUMPLE PARA $\alpha=1>0$, ASÍ QUE POR EL TEO. DE LA SINGULARIDAD REMOVIBLE $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$ y $f(z)$ tiene una extensión analítica en $z=a$, PERO si $f(a)=0$, COMO (2) VALE PARA $\alpha=-1<0$, $\lim_{z\to a}\frac{f(z)-0}{z-a}=\infty$ lo que contradice la existencia del límite por ser $f(z)$ analítica en a).

HAY QUE REMARCAR QUE n ES UN ENTERO: no existe entonces función analítica UNIFORME (monovaluada) QUE TIENDA A CERO O A INFINITO COMO UNA POTENCIA fraccional de a.

PODEMOS CARACTERIZAR A LOS POLOS DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA CON EL Desarrollo corto de Taylor: SUPONGAMOS QUE $f(z)$ TIENE UN POLO DE ORDEN ℓ EN $z=a$, ES DECIR,

$$f(z)=(z-a)^{-\ell}f_\ell(z); \quad f_\ell(z) \text{ analítica y no nula en una vec. de } a$$

ASÍ QUE LA FUNCIÓN ANALÍTICA $f_\ell(z)$ ADMITE EL DESARROLLO CORTO DE TAYLOR

$$(z-a)^\ell f(z) = f_\ell(z) = B_\ell + B_{\ell-1}(z-a)+\dots+\varphi(z)(z-a)^\ell$$

DONDE $\varphi(z)$ ES ANALÍTICA EN $z=a$.
PARA $z\neq a$ PODEMOS DIVIDIR LOS EXTREMOS DE LA ECUACIÓN ANTERIOR Y OBTENER

$$(3) \qquad f(z) = B_\ell(z-a)^{-\ell}+B_{\ell-1}(z-a)^{-\ell+1}+\dots+B_1(z-a)^{-1}+\varphi(z)$$

LA PARTE DEL DESARROLLO QUE PRECEDE A $\varphi(z)$ SE DENOMINA la parte singular de $f(z)$ en $z=a$: UN POLO NO SÓLO TIENE UN ORDEN BIEN DEFINIDO SINO UNA PARTE SINGULAR DETERMINADA. OBSERVA QUE LA DIFERENCIA DE DOS FUNCIONES CON LA MISMA PARTE SINGULAR EN $z=a$ ES UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN a.

EL CASO iii ES EL DE UNA *singularidad esencial* de $f(z)$ en $z=a$. UNA CARACTERIZACIÓN CLÁSICA DEL COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN LAS CERCANÍAS DE UNA SINGULARIDAD ESENCIAL LA DA EL

TEOREMA (DE CASORATTI/WEIERSTRASS) : UNA FUNCIÓN ANALÍTICA SE ACERCA ARBITRARIAMENTE A CUALQUIER VALOR COMPLEJO EN UNA VECINDAD DE UNA SINGULARIDAD ESENCIAL.

enloquece : $f(z)$ es al mismo tiempo no acotada y arbitrariamente cercana a cero en cualquier vecindad de la singularidad esencial.

Demostración: SUPONGÁMOSLO FALSO, ASÍ QUE EXISTEN $A\in\mathbb{C}$ y $\delta>0$ TALES QUE $|f(z)-A|>\delta$ EN ALGUNA VECINDAD DE a, EXCEPTO EN a MISMO. TENEMOS ENTONCES QUE, PARA CUALQUIER $\alpha<0$, $\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)-A| = \infty$ ASÍ QUE a NO SERÍA UNA SINGULARIDAD ESENCIAL DE $f(z)-A$, POR ELLO DEBIERA EXISTIR $\beta\in\mathbb{R}$ TAL QUE $\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|f(z)-A|=0$ (es no esencial) Y POR EL TEOREMA DE SING. REMOVIBLE PODEMOS ELEGIR $\beta>0$, EN TAL CASO $\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|A|=0$, ASÍ QUE

$$0=\lim_{z\to a}\left(|z-a|^{\beta}|f(z)-A|+|z-a|^{\beta}|A|\right)=\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}\left(|f(z)-A|+|A|\right)\geq\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|f(z)|$$

$$\therefore \lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|f(z)|=0$$

QUE FLAGRANTEMENTE CONTRADICE EL HECHO DE QUE a es una singularidad esencial de $f(z)$. EL TEOREMA ES PUES VERDADERO. +.

LA NOCIÓN DE SINGULARIDAD REMOVIBLE ES VÁLIDA TAMBIÉN PARA FUNCIONES ANALÍTICAS EN UNA VECINDAD $|z|>R$ DE ∞. COMO $f(\infty)$ NO ESTÁ DEFINIDO, ∞ SERÁ por definición UNA singularidad aislada QUE TENDRÁ EL MISMO CARÁCTER DE REMOVIBLE, POLAR O ESENCIAL QUE LA SINGULARIDAD EN $z=0$ DE $g(z)=f(1/z)$. EN EL CASO DE UNA SINGULARIDAD NO ESENCIAL, POR EL TRATAMIENTO DEL CASO ii ANTERIOR, $f(z)$ TIENE UN ORDEN ALGEBRÁICO h TAL QUE

$$\lim_{z\to\infty} z^{-h}f(z)\neq 0 \text{ ó } \infty$$

EN EL CASO DE UN POLO DE ORDEN k, MOSTRAMOS QUE $z^k g(z)=g_k(z)$ es analítico y no nula en $z=0$, POR LO QUE

$$z^k g(z)=B_k+B_{k-1}z+\ldots+B_1 z^{k-1}+\varphi(z)z^k$$

Y PARA $z\neq 0$: $g(z)=B_k z^{-k}+B_{k-1}z^{-k+1}+\ldots+B_1 z^{-1}+\varphi(z)$, ES DECIR QUE $f(z)$ PUEDE ESCRIBIRSE COMO

$$f(z)=B_k z^k+B_{k-1}z^{k-1}+\ldots+B_1 z+\varphi(1/z)$$

la parte singular de $f(z)$ en ∞ es un polinomio en z.

SI ∞ ES UNA SINGULARIDAD ESENCIAL, LA FUNCIÓN TIENE LA PROPIEDAD DEL TEOREMA DE WEIERSTRASS EN TODA VECINDAD DE ∞.

§1.3. EL MAPEO LOCAL.

ESTAMOS INTERESADOS EN EL NÚMERO DE CEROS DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA. CONSIDEREMOS $f(z)$ UNA FUNCIÓN ANALÍTICA NO IDÉNTICAMENTE NULA EN Δ, UN DISCO ABIERTO Y γ UNA CURVA CERRADA EN Δ TAL QUE $f(z)\neq 0$ EN γ. POR SIMPLICIDAD, SUPONDREMOS PRIMERO QUE $f(z)$ TIENE SOLAMENTE UN NÚMERO FINITO DE CEROS EN Δ A LOS QUE DENOTAREMOS POR $z_1, z_2, \dots, z_n$, DONDE CADA CERO SE REPITE TANTAS VECES COMO SU ORDEN LO INDIQUE.

CONSTRUYENDO LA DERIVADA LOGARÍTMICA OBTENEMOS QUE:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)\cdots(z-z_n)\right]g(z) + (z-z_1)\cdots(z-z_n)g'(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)g(z)}$$

EN DONDE

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)\cdots(z-z_n)\right] &= (z-z_1)\frac{d}{dz}\left[(z-z_2)\cdots(z-z_n)\right] + (z-z_2)\cdots(z-z_n)\\ &= (z-z_1)(z-z_2)\frac{d}{dz}\left[(z-z_3)\cdots(z-z_n)\right] + \prod_{j\neq 2}(z-z_j) + \prod_{j\neq 1}(z-z_j), \quad j\in\{1,\dots,n\}\\ &\ \vdots\\ &= (z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j\neq i}(z-z_j)\right), \quad i,j\in\{1,\dots,n\}\end{aligned}$$

ASÍ ES QUE:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{1}{z-z_n} + \dots + \frac{1}{z-z_1}$$

, PARA $z\neq z_j$ Y EN PARTICULAR EN γ. PERO COMO $g(z)\neq 0$ EN Δ, EL TEOREMA DE CAUCHY NOS DICE QUE $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0$, Y RECORDANDO LA DEFINICIÓN DEL ÍNDICE, ENCONTRAMOS QUE

$$(1)\quad n(\gamma,z_n)+\dots+n(\gamma,z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \qquad \dots (2$$

ESTA EXPRESIÓN SIGUE SIENDO VÁLIDA SI $f(z)$ TIENE UN NÚMERO INFINITO DE CEROS EN Δ, QUE AL SER ABIERTO IMPLICA QUE γ ESTÁ CONTENIDO EN UN DISCO CONCÉNTRICO Δ' MENOR QUE Δ. AFIRMAMOS QUE $f(z)$ NO PUEDE TENER UN NÚMERO INFINITO DE CEROS EN Δ' (ESTAMOS SUPONIENDO $f(z)\not\equiv 0$) YA QUE DE SER ASÍ, LA PROPIEDAD DE BOLZANO-WEIRSTRASS IMPLICARÍA QUE ÉSTOS TIENEN UN PUNTO DE ACUMULACIÓN EN LA CERRADURA DE Δ', QUE NO ES POSIBLE POR EL TEOREMA 3. ASÍ ES QUE PODEMOS APLICAR (1) AL DISCO Δ', COMO PARA LOS CEROS FUERA DE Δ' SATISFACEN QUE $n(\gamma,z_j)=0$, NO CONTRIBUYEN A LA SUMA EN (1), ES DECIR:

TEOREMA 4. Sean z_j los ceros de una función $f(z)$ que es analítica en un disco Δ y que no es idénticamente nula, cada cero se ha contado tantas veces como su orden lo indique. Para toda curva cerrada γ en Δ que no pase por un cero

$$(2)\qquad \sum_j n(\gamma,z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \qquad \dots (2)$$

en donde la suma tiene solamente un número finito de términos distintos de cero.

LA FUNCIÓN $w=f(z)$ MAPEA LA CURVA γ EN UNA CURVA CERRADA Γ EN EL PLANO w, POR TANTO

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

POR LO QUE LA EXPRESIÓN (2) PUEDE SER INTERPRETADA ASÍ:

~~(3)~~

$$n(\Gamma,0) = \sum_j n(\gamma,z_j) \qquad \dots (3)$$

SI DE ANTEMANO ESPECIFICAMOS A γ SER UN CÍRCULO, ENTONCES CADA $n(\gamma,z_j)$ VALDRÁ 0 ó 1 Y LA EXPRESIÓN (2) RESULTARÁ EN UNA FÓRMULA DEL NÚMERO TOTAL DE CEROS ENCERRADOS POR γ, QUE ES LO QUE PERSEGUIMOS.

SI a ES UN VALOR COMPLEJO ARBITRARIO, LOS CEROS DE $f(z)-a$ SERÁN LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN $f(z)=a$: DENOTÉMOSLOS POR $z_j(a)$ Y APLIQUEMOS EL TEOREMA 4 A $f(z)-a$. OBTENEMOS QUE

$$\sum_j n(\gamma,z_j(a)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz .$$

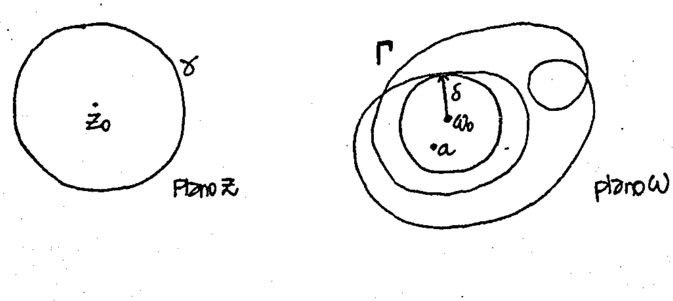
ASÍ QUE (3) TOMA LA FORMA

$$n(\Gamma,a) = \sum_j n(\gamma,z_j(a)) \quad , \text{ SIEMPRE QUE } f(z)\neq a \text{ EN } \gamma.$$

SABEMOS QUE CUANDO a y b ESTÁN EN LA MISMA REGIÓN DETERMINADA POR Γ $n(\Gamma,a)=n(\Gamma,b)$, ASÍ QUE $\sum_j n(\gamma,z_j(a)) = \sum_j n(\gamma,z_j(b))$, POR TANTO, CUANDO γ ES UN CÍRCULO, $f(z)$ TOMA LOS VALORES a y b EL MISMO NÚMERO DE VECES. CONSECUENCIA INMEDIATA DE LO ANTERIOR ES EL SIGUIENTE

TEOREMA 5: Supongamos que $f(z)$ es analítica en z_0, $f(z_0)=w_0$ y que $f(z)-w_0$ tiene un cero de orden n en z_0. Si $\varepsilon>0$ es suficientemente pequeño, existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que para todo a con $|a-w_0|<\delta$, la ecuación $f(z)=a$ tiene exactamente n raíces en el disco $|z-z_0|<\varepsilon$.

Demostración: SIENDO LOS CEROS DE $f(z)$ AISLADOS, PODEMOS ESCOGER $\varepsilon>0$ $\therefore$ $f(z)$ ESTÉ DEFINIDA Y SEA ANALÍTICA EN EL DISCO $|z-z_0|\leq\varepsilon$ Y CON z_0 EL ÚNICO CERO DE $f(z)-w_0$ EN ESTE DISCO. SEA γ EL CÍRCULO $|z-z_0|=\varepsilon$ y $\Gamma\equiv f(\gamma)$, LA IMAGEN BAJO EL MAPEO $w=f(z)$. w_0 PERTENECE AL COMPLEMENTO DEL CONJUNTO CERRADO Γ, ASÍ QUE EXISTE UNA VECINDAD $|w-w_0|<\delta$ QUE NO INTERSECTA A Γ, ~~Y TODOS LOS VALORES a~~ TODOS LOS VALORES a EN ESTA VECINDAD PERTENECEN A LA MISMA REGIÓN DETERMINADA POR Γ, ASÍ ES QUE SON TOMADOS EL MISMO NÚMERO DE VECES DENTRO DE γ. PERO POR CONSTRUCCIÓN w_0 TIENE n RAÍCES COINCIDENTES (z_0 ES UN CERO DE ORDEN-MULTIPLICIDAD n DE $f(z)-w_0$) ASÍ QUE TODOS LOS VALORES a SE TOMAN EXACTAMENTE n VECES. (FIG).



HEMOS SOBREENTENDIDO QUE LAS RAÍCES MÚLTIPLES SON CONTADAS DE ACUERDO A SU MULTIPLICIDAD, SIN EMBARGO SI $\varepsilon>0$ ES SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO PODEMOS ASEGURAR QUE TODAS LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN $f(z)=a$ SON SIMPLES (multiplicidad $=1$) PARA $a\neq w_0$. COMO MOSTRAREMOS EN EL COROLARIO 2 POR VENIR, BASTA UNA ELECCIÓN DE ε QUE SATISFAGA $f'(z)\neq 0$ EN $0<|z-z_0|<\varepsilon$.

COROLARIO 1 : las funciones analíticas no constantes son abiertas.

PORQUE, SEGÚN VIMOS, LA IMAGEN DE CUALQUIER DISCO SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO $|z-z_0|<\varepsilon$ CONTIENE UNA VECINDAD $|w-w_0|<\delta$.

COROLARIO 2 : Si $f(z)$ es analítica en z_0 con $f'(z_0)\neq 0$, mapea una vecindad de z_0 conforme y topológicamente sobre una región.

Demostración: Es el caso $n=1$ del Teorema 5, es decir, tenemos una correspondencia uno a uno entre el disco $|w-w_0|<\delta$ y un abierto Δ de $|z-z_0|<\varepsilon$. Por el Corolario 1 conjuntos abiertos del plano z corresponden a conjuntos abiertos del plano w, así que la función inversa de $f(z)$ es continua y el mapeo es topológico. Si ahora restringimos el mapeo a una vecindad de z_0 contenida en Δ, de la continuidad de la función inversa podremos invertir la representación matricial de $f'(z_0)$ y obtendremos que el mapeo inverso es también conforme.

INVERSAMENTE: SI EL MAPEO LOCAL ES UNO A UNO, EL TEOREMA 5 SÓLO VALDRÍA PARA $n=1$, ES DECIR, SI $f'(z_0)\neq 0$.

EL CASO DE UN CERO DE ORDEN $n>1$ ADMITE UNA DESCRIPCIÓN IGUALMENTE PRECISA: CON LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA 5 PODEMOS ESCRIBIR:

$$f(z)-w_0 = (z-z_0)^n g(z)\ ,\quad g(z) \text{ ANALÍTICA EN } z_0 \text{ y } g(z_0)\neq 0$$

SEA $\varepsilon>0$ CON LA PROPIEDAD DE QUE $|g(z)-g(z_0)|<g(z_0)$ SI $|z-z_0|<\varepsilon$. EN ESTA VECINDAD ES POSIBLE DEFINIR UNA RAMA ANALÍTICA MONO-VALUADA DE $\sqrt[n]{g(z)}$ QUE DENOTAREMOS POR $h(z)$. ASÍ ES QUE

$$f(z)-w_0 = \zeta(z)^n\ ,\quad \text{SI}\quad \zeta(z):=(z-z_0)h(z) \qquad \ldots (4)$$

Y COMO $\zeta'(z_0)=h(z_0)\neq 0$, EL MAPEO $\zeta=\zeta(z)$ ES TOPOLÓGICO EN UNA VECINDAD DE z_0.

SI $w=f(z)$, ENTONCES TENEMOS LA DESCRIPCIÓN DESEADA: $w=w_0+\zeta^n$ DETERMINA n VALORES ζ igualmente espaciados PARA CADA VALOR DE w Y PODEMOS CONCLUIR QUE LOCALMENTE ALREDEDOR DE UN CERO DE ORDEN n LAS FUNCIONES ANALÍTICAS SON n A 1. (FIG : $n=3$, CADA LÍNEA PINTEADA SE MAPEA SOBRE EL RADIO PINTADO EN EL PLANO w) MIENTRAS QUE CADA REGIÓN ENTRE TALES LÍNEAS SE MAPEA SOBRE EL INTERIOR DEL DISCO EN EL PLANO w, MENOS EL RADIO).

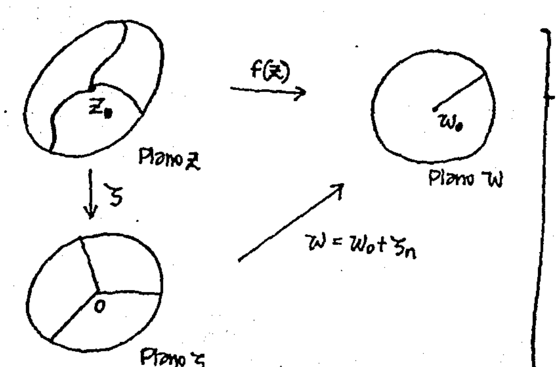
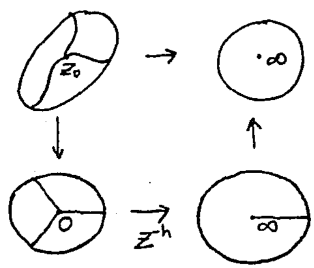


FIG.: EN UNA VECINDAD DE UN CERO SE MUESTRAN LAS PREIMÁGENES DE LAS CURVAS $ARG(w-w_0)=cte$. ELLAS ESTÁN IGUALMENTE ESPACIADAS Y PUEDE OBTENERSE UNA MEDIANTE ROTACIÓN DE CUALESQUIERA OTRA.

OBSERVACIÓN: LAS FUNCIONES φ y $W_0+\varphi^h$ SON UNIFORMES EN SUS RESPECTIVOS DOMINIOS, DE LA FIG. ES CLARO QUE PODEMOS ESCRIBIR A $f(z)$ como $f(z)=h_1 f_1 h(z)$ Y EXPRESAR EL RESULTADO ANTERIOR DICIENDO QUE, CERCA DE z_0, $f(z)$ ES Conformemente equivalente A $z\mapsto z^h$

EN EL CASO DE UN POLO EL COMPORTAMIENTO ES MUY SIMILAR. SI $f(z)$ TIENE UN POLO DE ORDEN h EN z_0, REPITIENDO LAS CONSIDERACIONES DE ___ PODREMOS AFIRMAR QUE $f(z)$ ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE, LOCALMENTE, A $z\mapsto z^{-h}$. (CUANDO HABLEMOS DE UN POLO LLAMAREMOS $-h$ SU ORDEN Y VICEVERSA).



ESTA ES UNA DE LAS RAZONES POR LAS QUE NECESITAREMOS AMPLIAR EL CODOMINIO DE LAS FUNCIONES NO A $\mathbb{C}$ SINO A $\mathbb{C}^*$, LA ESFERA DE RIEMANN. EN EL CASO DE UN POLO SIMPLE OBSERVEMOS QUE $1/z$ TOMA EL VALOR INFINITO (∞) SÓLO UNA VEZ.

¿CÓMO SE COMPORTA EL ORDEN ANTE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES? EXPLÍCITAMENTE: SI $g(z)$ TIENE ORDEN m EN z_0 Y $f(w)$ TIENE ORDEN m' EN $w_0=g(z_0)$, m y $m'\in\mathbb{Z}$, DE LAS CONSIDERACIONES ANTERIORES, $g(z)$ ES m a 1 EN UNA VECINDAD DE z_0, mientras que $f(w)$ es m' a 1 en una vecindad de w_0. RESTRINGIENDO (de ser necesario) A LAS VECINDADES CONVENIENTES PODEMOS CONCLUIR QUE $f\circ g(z)$ ES $m\cdot m'$ a 1 EN CIERTA VECINDAD DE z_0.

FORMALMENTE, SI DENOTAMOS POR $\mathrm{ord}_f(\varphi)$ AL ORDEN DE $f(\varphi)$ EN $\varphi=\varphi_0$ LO ANTERIOR PUEDE SER EXPRESADO COMO UNA Regla de la cadena del orden:

$$\mathrm{ord}_{f\circ g}(z_0)=\mathrm{ord}_f(g(z_0))\cdot \mathrm{ord}_g(z_0)$$

CUYA DEMOSTRACIÓN FORMAL IMPLICARÍA CIERTA TALACHA QUE PREFIERO NO INCLUIR.

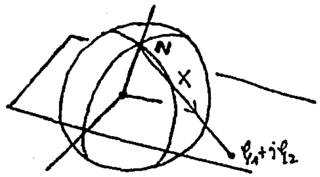
OBSERVEMOS que el orden no se altera por la aplicación previa o posterior de un mapeo conforme (que según vimos es equivalente a un mapeo univalente), UNA OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE EN LA TEORÍA DE FUNCIONES EN SUPERFICIES DE RIEMANN, COMO DE SUPERFICIES DE RIEMANN MISMAS.

PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

HEMOS HABLADO DEL PUNTO AL INFINITO COMO AQUEL VALOR EN $z=0$ DE $J(z)=1/z$. EXISTE UN TRATAMIENTO CLÁSICO DE ESTE PUNTO IDEAL GRACIAS A LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA. AL PLANO COMPLEJO extendido CON EL PUNTO AL INFINITO MEDIANTE PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA SE LE CONOCE como la esfera de Riemann. (NOTACIÓN: $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}_\infty$ or $\overline{\mathbb{C}}$, cualquiera es bueno).

CONSIDEREMOS LA ESFERA $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ CON COORDENADAS RECTANGULARES x_1, x_2, x_3, i.e.: los puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. AL POLO NORTE Y AL SUR $N=(0,0,1)$ y $S=(0,0,-1)$ LOS DISTINGUIREMOS CON ESAS LETRAS: La proyección estereográfica es una función que asigna a cada $X=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$ un punto en el plano complejo, $\varphi_1+i\varphi_2$ OBTENIDO AL PROLONGAR EL RAYO $\overline{NX}$ HASTA SU INTERSECCIÓN CON EL PLANO COMPLEJO. ESTA FUNCIÓN ESTABLECE UNA BIYECCIÓN ENTRE $\mathbb{C}$ y $S^2-\{N\}$ (SI CONSIDERAMOS LA MISMA ASIGNACIÓN DESDE $\{S\}$

OBTENDREMOS UNA BIYECCIÓN ENTRE $\mathbb{C}$ Y $S^2-\{S\}$ QUE MÁS ADELANTE NOS SERÁ DE GRAN UTILIDAD.



LA LINEA $\vec{NX}$ TIENE ECUACIÓN PARAMÉTRICA $(0,0,1)+t[(x_1,x_2,x_3)-(0,0,1)]$
ES DECIR: $(tx_1, tx_2, 1+t(x_3-1))$
ASÍ QUE EL PUNTO BUSCADO OCURRE EN AQUEL VALOR DE t EN QUE LA TERCERA COORDENADA SEA NULA,
ES DECIR: $t=1/1-x_3$

$$\text{ASÍ QUE } \varphi_1+i\varphi_2=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}=\phi_N(X) \qquad \cdots \qquad (1)$$

IGUALMENTE SENCILLA ES SU INVERSA: partiendo de $z=x+iy$ buscamos ahora $\phi^{-1}(z)\in S^2$: LA RECTA PARAMETRIZADA ES AHORA $(x,y,0)+t[(0,0,1)-(x,y,0)]=(x-tx, y-ty, t)$. EL VALOR DE t EN EL QUE ESTA RECTA CORTA A S^2 (distinto de 1, por supuesto, que corta a S^2 en N) ESTÁ DADO POR LA CONDICIÓN

$$\langle (x-tx, y-ty, t), (x-tx, y-ty, t)\rangle = 1 \qquad (\langle , \rangle : \text{producto interno usual de } \mathbb{R}^3)$$

RESOLVIENDO ESTA ECUACIÓN PARA t, OBTENEMOS QUE

$$t=\frac{1\pm|z|^2}{1+|z|^2}$$

, el signo positivo corresponde al punto N, así es que al sustituir en la ecuación de la recta obtenemos que

$$\phi_N^{-1}(z)=\left(2x/|z|^2+1,\ 2y/|z|^2+1,\ |z|^2-1/|z|^2+1\right)$$

ES EL CORRESPONDIENTE VALOR EN S^2.

DE MANERA ANÁLOGA, SE ENCUENTRA QUE CON LA PROYECCIÓN DESDE EL SUR,

$$\varphi_1'+i\varphi_2'=\frac{x_1-ix_2}{1+x_3} \qquad \cdots \qquad (2)$$

ASÍ ES QUE ϕ_N Y ϕ_S SON BIYECCIONES RESPECTIVAMENTE DE $S^2-\{N\}$ Y $S^2-\{S\}$ SOBRE EL PLANO COMPLEJO $\mathbb{C}$.

OBSERVA QUE LA COMPOSICIÓN

$$\phi_S\circ\phi_N^{-1}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$

ESTABLECE LA RELACIÓN ENTRE LOS DOS "SISTEMAS COORDENADOS" Y SATISFACE PARA CUALESQUIERA $z=\varphi_1+i\varphi_2\in\mathbb{C}$:

$$\phi_S\circ\phi_N^{-1}(\varphi_1+i\varphi_2)=\phi_S\left(2\varphi_1/|z|^2+1,\ 2\varphi_2/|z|^2+1,\ |z|^2-1/|z|^2+1\right)=\phi_S(x_1,\ ,x_3)$$

$$=\frac{2\varphi_1/|z|^2+1}{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}}+i\,\frac{2\varphi_2/|z|^2+1}{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}}=\cdots=\varphi_1+i\varphi_2$$

ES LA IDENTIDAD EN $\mathbb{C}$ (LO MISMO QUE $\phi_N\circ\phi_S^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$)

EN NUESTRAS CONSIDERACIONES ACERCA DEL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES HOLOMORFAS EN EL PLANO "CERCA DEL ∞" ESTABLECIMOS UN "SISTEMA COORDENADO" PARA LA ESFERA CON LA ASIGNACIÓN $z \mapsto 1/z$ CONSIDERANDO $0 \mapsto \infty$. EN UN SENTIDO A PRECISAR, ESTAS DOS POSIBLES estructuras DE LA ESFERA $\hat{\mathbb{C}}$ son la misma.

UN BIHOLOMORFISMO ES UNA APLICACIÓN CONFORME (EN CADA PUNTO DE SU DOMINIO) Y BIYECTIVA, ES DECIR, ES UNA FUNCIÓN HOLOMORFA CON INVERSA HOLOMORFA. A CONTINUACIÓN VAMOS A MOSTRAR CÓMO, A PARTIR DE PROPIEDADES LOCALES DE FNS. ANALÍTICAS PODEMOS OBTENER PROPIEDADES GLOBALES. POR EJEMPLO:

PROPOSICIÓN: TODA FUNCIÓN MEROMORFA EN $\bar{\mathbb{C}}$ ES RACIONAL.

CIERTAMENTE LAS FUNCIONES RACIONALES SON MEROMORFAS EN $\bar{\mathbb{C}}$, ASÍ QUE, DEMOSTRANDO LA PROPOSICIÓN LAS HABREMOS CLASIFICADO.

Demostración: HAGAMOS VER QUE $f(z)$, MEROMORFA EN $\bar{\mathbb{C}}$, SÓLO PUEDE TENER UN NÚMERO FINITO DE POLOS. DE HECHO, COMO $f(z)$ ES MEROMORFA EN, DIGAMOS $\{z\in\mathbb{C} : |z|>r\}\cup\{\infty\}$, ENTONCES $f(1/z)$ ES MEROMORFA EN EL DISCO $|z|<1/r$, ASÍ QUE EXISTE ALGÚN $\delta>0$ TAL QUE $f(1/z)$ NO TIENE POLOS EN $0<|z|<\delta$, POR LO QUE $f(z)$ NO TIENE POLOS EN EL DISCO $|z|>1/\delta$. COMO LOS POLOS DE $f(z)$ EN $\mathbb{C}$ SON AISLADOS, ENTONCES $f(z)$ SÓLO PUEDE TENERLOS EN UN NÚMERO FINITO, DIGAMOS $z_1,\dots,z_s$ Y POSIBLEMENTE UN POLO AL ∞.

PODEMOS ESCRIBIR:

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{j=1}^{s} P_j\left(1/(z-z_j)\right) + g(z)$$

, DONDE LOS P_j SON polinomios y $g(z)$ ES ANALÍTICA EN $\mathbb{C}$.

LA EXPRESIÓN ANTERIOR MUESTRA QUE $g(1/z)$ DIFIERE DE $f(1/z)$ POR UNA FUNCIÓN RACIONAL, PERO COMO $f(1/z)$ ES MEROMORFA EN $|z|<1/r$, ENT. $g(1/z)$ TAMBIÉN LO ES.

COMO $g(z)$ ES ANALÍTICA EN $\mathbb{C}$, PODEMOS ESCRIBIR

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Y TAMBIÉN EN $0<|z|<1/r$:

$$g(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

PERO COMO $g(1/z)$ ES MEROMORFA EN $|z|<1/r$, ENTONCES $a_n = 0$ PARA $n>k$, ASÍ ES QUE $g(z)$ ES UN POLINOMIO Y DE $(*)$ CONCLUIMOS QUE $f(z)$ ES RACIONAL.

+.

PODEMOS DAR MÁS INFORMACIÓN SOBRE LOS CEROS Y POLOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL. EL NÚMERO TOTAL DE CEROS DE

$$R(z) = \frac{a_0+a_1z+\dots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\dots+b_mz^m}, \quad a_nb_m \neq 0$$

ES n (EN $\mathbb{C}$) MÁS $\max\{0, m-n\}$ (EN ∞). (ESTAMOS SUPONIENDO QUE NO HAY FACTORES COMUNES EN DENOMINADOR Y NUMERADOR). DEL MISMO MODO RAZONAMOS PARA OBTENER QUE EL NÚMERO TOTAL DE POLOS DE $R(z)$ EN $\bar{\mathbb{C}}$ ES $m+\max\{0,n-m\}$. DEFINAMOS el grado d de una función racional como

$$d = \max\{m,n\}$$

Así ES QUE una función racional tiene exactamente d ceros y d polos en $\bar{\mathbb{C}}$.

OBSERVA QUE PARA TODO $w\in\mathbb{C}$, $R(z)-w$ ES TAMBIÉN DE GRADO d, ASÍ QUE TAMBIÉN TIENE d CEROS. EN OTRAS PALABRAS: PARA CADA $w\in\bar{\mathbb{C}}$, $R(z)=w$ TIENE EXACTAMENTE d SOLUCIONES EN $\bar{\mathbb{C}}$ Y R MAPEA $\bar{\mathbb{C}}$ SOBRE SÍ MISMO DE MANERA d a 1.

ENTONCES LAS ÚNICAS FUNCIONES MEROMORFAS DE $\bar{\mathbb{C}}$ EN $\bar{\mathbb{C}}$ SON LAS FUNCIONES RACIONALES DE

GRADO 1, ES DECIR

$$r(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad , \; ad-bc\neq 0$$

ES SENCILLO MOSTRAR QUE SON BIYECTIVAS Y ESTÁN BIEN DEFINIDAS EN ∞. AL CONJUNTO DE TALES APLICACIONES LO LLAMAREMOS **BIHOL**($\bar{\mathbb{C}}$). DE HECHO:

$$r^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

OBSERVA QUE LA ECUACIÓN $z=\frac{az+b}{cz+d}$ SIEMPRE TIENE SOLUCIÓN, EN OTRAS PALABRAS, $r(z)$ TIENE UN PUNTO FIJO (UNO SÓLO, POR SER BIYECCIÓN ⇒ LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ANTERIOR ES ÚNICA DE MULTIPLICIDAD 2)

SE LES LLAMA A LAS TRANSFORMACIONES DEL TIPO DE $r(z)$ *transformaciones de Möebius*. ELLAS ESTÁN GENERADAS POR LAS TRANSLACIONES, $t(z)=z+a$; LAS ROTACIONES, $r(z)=az$ CON $|a|=1$; Y LAS MAGNIFICACIONES, $a(z)=az$ CON $a>1$. DE HECHO, SI $c\neq 0$, ENTONCES

$$r(z)=\frac{a}{c}-\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)\left(z+\frac{d}{c}\right)^{-1}$$ (que es una composición de las tres anteriores y de paso muestra porqué pedimos que $ad-bc\neq 0$)

MIENTRAS QUE SI $c=0$, ENTONCES $ad\neq 0$ Y

$$r(z)=\frac{a}{d}\left(z+\frac{b}{a}\right)$$

ESTAMOS INTERESADOS EN UN SUBGRUPO PARTICULAR DE **BIHOL**($\mathbb{C}$):

COROLARIO: LAS ÚNICAS FUNCIONES HOLOMORFAS E INYECTIVAS DE $\mathbb{C}$ EN $\mathbb{C}$ SON LAS TRANSLACIONES $t(z)=az+b$.

Dem: SEA $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. POR INYECTIVIDAD, $F(z)=f(1/z)$ DEFINIDA EN $\Delta^*=\{z: 0<|z|<1\}$ NUNCA TOMA EL VALOR w SI w ESTÁ EN EL ABIERTO $f(\Delta)$, ASÍ QUE $F(z)$ TIENE BIEN UNA SINGULARIDAD REMOVIBLE O UN POLO EN $z=0$ Y $f(z)$ ADMITE UNA EXTENSIÓN $\bar{f}(z)$ A $\bar{\mathbb{C}}$; DE NUEVO POR SER INYECTIVA, DEBE SER DE LA FORMA $\bar{f}(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, así que $f(z)=az+d$.

ASÍ ES QUE **BIHOL**($\mathbb{C}$) ESTÁ CONSTITUIDO POR LAS TRASLACIONES. OBSERVA QUE EL ÚNICO PUNTO FIJO DE UNA TRASLACIÓN VIVE EN $\bar{\mathbb{C}}$ Y ES ∞.

DESPUÉS DE PROBAR EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN (*el Riemann Mapping Theorem*) CONOCEREMOS A **BIHOL**(Δ).

ANTES DE CONCLUIR ESTE CAPÍTULO INCLUYO UN RESULTADO FUNDAMENTAL PARA HABLAR CON LIBERTAD DE 'HOLOMORFÍA' Y ANALITICIDAD.

TEOREMA: TODA FUNCIÓN HOLOMORFA ES ANALÍTICA Y VICEVERSA

POR HOLOMORFA ME REFIERO A QUE SATISFAGA LAS ECS. DE CAUCHY-RIEMANN, POR ANALÍTICA A QUE ADMITA UNA EXPRESIÓN LOCAL EN SERIE DE POTENCIAS UNIFORMEMENTE CONVERGENTE.

II
¿qué son?

— LAS MATEMÁTICAS SON UN INMENSO CASTILLO CONSTRUIDO SOBRE ARENA

HERMAN WEYL

§2· ELEMENTOS DE FUNCIÓN Y CONTINUACIÓN ANALÍTICA

SEA z UNA VARIABLE COMPLEJA Y a UN NÚMERO COMPLEJO FIJO.

UN elemento de función CON CENTRO EN a ES UNA SERIE DE POTENCIAS UNIFORMEMENTE CONVERGENTE, CON RADIO DE CONVERGENCIA $r>0$ Y COEFICIENTES COMPLEJOS

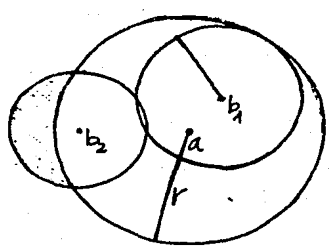
$$(1.1)\quad P(z-a) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots$$

SABEMOS QUE UNA TAL SERIE DE POTENCIAS REPRESENTA UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN EL SENTIDO DE CAUCHY EN EL INTERIOR DEL DISCO $|z-a|<r$ Y POSIBLEMENTE EN ALGÚN SUBCONJUNTO DE $|z-a|=r$. ES CLARO QUE EL DISCO DE CONVERGENCIA DEBE ESTAR CONTENIDO EN EL DOMINIO DE REGULARIDAD DE LA FUNCIÓN representada. SIGUIENDO LAS IDEAS DE WEIRSTRASS, NUESTRO PRIMER PROBLEMA SERÁ EL DE "EXTENDER ANALÍTICAMENTE" ESTE DOMINIO DE REPRESENTACIÓN A MAYORES DOMINIOS DEL PLANO z. PRECISEMOS:

SI b ES UN VALOR DE z EN $|z-a|<r$, PODEMOS DESARROLLAR $(z-a)^m = (z-b+b-a)^m$ EN POTENCIAS DE $(z-b)$ VÍA EL TEOREMA DEL BINOMIO. REAGRUPANDO LOS TÉRMINOS OBTENDREMOS UNA SERIE DE POTENCIAS

$$(1.2)\quad Q(z-b) = B_0 + B_1(z-b) + B_2(z-b)^2 + \dots$$

CUYO DISCO DE CONVERGENCIA ES AL MENOS $|z-b| < r' = |b-a|$, SIN EMBARGO ES POSIBLE QUE TAL DISCO NO SEA EL MAYOR EN QUE LA REPRESENTACIÓN (1.2) SEA VÁLIDA. SI TAL ES EL CASO DIREMOS, DADO QUE (1.1) y (1.2) TOMAN LOS MISMOS VALORES EN LA INTERSECCIÓN DE SUS RESPECTIVOS DISCOS DE CONVERGENCIA, QUE (1.2) es una continuación analítica inmediata de (1.1) Y EN GENERAL, EL PROCESO DE Continuación Analítica SERÁ LA APLICACIÓN REPETIDA UN NÚMERO FINITO DE VECES DE LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA INMEDIATA.



POR EJEMPLO:

PUEDE MOSTRARSE QUE LA SERIE $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ DEFINE (POR CONVERGER UNIFORMEMENTE) UNA FUNCIÓN HOLOMORFA EN $\Delta = \{z : |z|<1\}$ Y QUE NO PUEDE EXTENDERSE MAS ALLÁ DE ESE DOMINIO.

EJEMPLOS EN QUE LA CONTINUACIÓN ES POSIBLE APARECERÁN SOBRE LA MARCHA.

ESTAMOS INTERESADOS (Y MÁS ADELANTE SE VERÁ POR QUÉ) EN LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA A LO LARGO DE CURVAS. SEA $c: I \to \mathbb{C}$ UNA CURVA CONTINUA, $c(0)=a$ y $c(0)=b$: LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA a lo largo de c SERÁ UNA ASIGNACIÓN QUE HAGA CORRESPONDER A CADA VALOR DEL PARÁMETRO $\lambda \in I$ UN ELEMENTO DE FUNCIÓN P_λ CON CENTRO EN $z_\lambda = C(\lambda)$ DE MODO TAL QUE, SI P_0 DENOTA AL ELEMENTO DE FUNCIÓN (1.1), PARA CADA $\lambda_0 \in I$ DEBE EXISTIR $\varepsilon > 0$ CON LAS SIGUIENTES PROPIEDADES: (i) QUE PARA CUALESQUIERA $\lambda \in I \cap (\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)$ SE TENGA QUE LOS CORRESPONDIENTES z_λ SEAN INTERIORES AL DISCO DE CONVERGENCIA DE P_{λ_0}, y
(ii) QUE LOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN P_λ CORRESPONDIENTES SEAN TODOS CONTINUACIÓN ANALÍTICA INMEDIATA DE P_{λ_0}

CUANDO TENGAMOS ESA SITUACIÓN, DIREMOS QUE hemos continuado analíticamente al elemento (1.1) a lo largo de c Y P_1 SERÁ EL ELEMENTO CON CENTRO EN b RESULTANTE DE LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA. (OBSERVA QUE AL REALIZAR EL PROCESO INVERSO, CONTINUAR P_1 A LO LARGO DE C, RESULTA EN P_0).

TEOREMA 1: LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA A LO LARGO DE c ES ÚNICA, SI ES POSIBLE.

Demostración: LA COMPACIDAD DE $c(I) \subseteq \mathbb{C}$ NOS PERMITE HACER UNA PARTICIÓN DE LA CURVA z_λ EN UN NÚMERO FINITO DE ARCOS $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}$ $(0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=1)$ Y HALLAR UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS μ_i CON $\lambda_i < \mu_i < \lambda_{i+1}$ TALES QUE EL ARCO CORRESPONDIENTE $(z_{\lambda_i}, z_{\lambda_{i+1}})$ ESTÉ CONTENIDO ENTERAMENTE EN EN EL DISCO DE CONVERGENCIA CENTRADO EN z_{μ_i} DE RADIO r_{μ_i}.

SI AHORA P_λ y P_λ^* SON DOS CONTINUACIONES ANALÍTICAS DE (1.1) A LO LARGO DE $c = z_\lambda$, PARA CADA $\lambda \in I$ HAZ ASIGNADO DE MANERA CONTINUA DOS DISCOS CENTRADOS EN z_λ DE RADIOS DIGAMOS r_1^λ y r_2^λ. SI $r_\lambda = \min\{r_1^\lambda, r_2^\lambda\}$, CONSIDERA LA COLECCIÓN DE DISCOS CENTRADOS EN z_λ DE RADIO $1/3 r_\lambda$ DENOTADOS POR $\{\Delta_{z_\lambda}^{1/3 r_\lambda}\}_{\lambda \in I}$

POR COMPACIDAD PUEDES HALLAR LOS ARCOS ANTES DESCRITOS DE MANERA QUE CADA UNO DE LOS ARCOS (z_i, z_{i+1}) ESTÉ CONTENIDO EN EL DISCO DE CONVERGENCIA DE z_{μ_i}, PERO AHORA SUCEDE QUE EL DISCO CENTRADO EN z_i DE RADIO $2/3 r_\lambda$ ESTÁ CONTENIDO EN $\Delta_{z_{\mu_i}}^{r_\lambda}$ Y CONTIENE AL ARCO $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}$, (ver figura siguiente)

$$\therefore P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}^*, \text{ ENTONCES } P_\lambda = P_\lambda^* \text{ si } \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$$

EL MISMO ARGUMENTO APLICADO A CADA UNO DE LOS ARCOS OBTENEMOS QUE $P_\lambda = P_\lambda^*$ $\forall \lambda \in I$ Y EN PARTICULAR PARA $\lambda = 1$.

+.

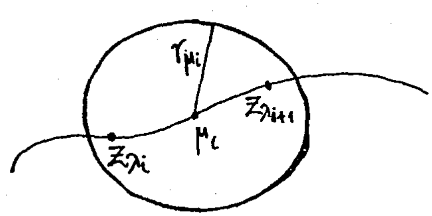


FIG. LA ELECCIÓN DE LA SUBCUBIERTA FINITA APROPIADA.

OBSERVA QUE SI LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA A LO LARGO DE UNA CURVA ES POSIBLE, ENTONCES PUEDES LLEGAR DEL ELEMENTO INICIAL AL TERMINAL con solamente un número finito de aplicaciones de continuación analítica inmediata.

EL SIGUIENTE TEOREMA EXPRESA LA INDEPENDENCIA DE LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA A LO LARGO DE CURVAS "CERCANAS" Y SU EXISTENCIA :

TEOREMA 2 : SI $C_1, C_2 : I \to \mathbb{C}$ SON DOS CURVAS CONTINUAS CON LOS MISMOS PUNTOS TERMINALES $C_j(0)=a$, $C_j(1)=b$, $j=1,2$, δ ES EL MÍNIMO DE LOS RADIOS DE CONVERGENCIA r_λ CORRESPONDIENTES A z_λ ($\lambda \in I$) : SI LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA A LO LARGO DE C_1 DE P_0 ES POSIBLE Y C_2 SATISFACE $|C_1(\lambda)-C_2(\lambda)| < \delta/4$ $\forall \lambda \in I$, ENTONCES LA CONT. ANALÍTICA A LO LARGO DE C_2 DE P_0 ES POSIBLE Y RESULTA EN P_1

Demostración:

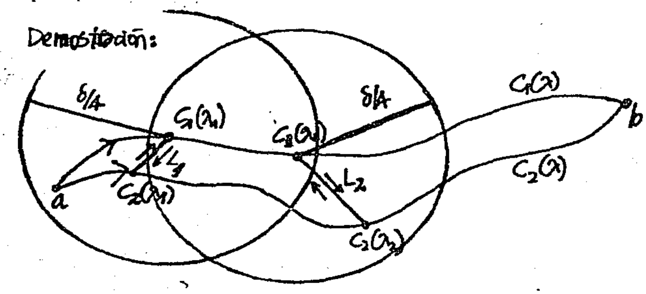


FIG. ES CLARO EL RESULTADO.

SEA $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=1$ UNA PARTICIÓN DE I QUE SATISFACE QUE PARA CUALQUIER $\lambda \in I$, $|C_1(\lambda)-C_1(\lambda_{i-1})| < \delta/4$ PARA $j=1,2,\dots,n$. DE ESTA MANERA LA CADENA DE DISCOS $|z-C_1(\lambda_i)| < r_{\lambda_i}$ PROPORCIONA LA CONTINUACIÓN DE P_0 A P_1 SOBRE C_1 MEDIANTE UN NÚMERO FINITO DE CONTINUACIONES DIRECTAS (O INMEDIATAS).

SEA L_i EL SEGMENTO QUE UNE $C_1(\lambda_i)$ CON $C_2(\lambda_i)$. POR ESTAR CONTENIDO EN EL DISCO DE CONVERGENCIA CENTRADO EN $C_1(\lambda_i)$, LA CONT. ANALÍTICA DE P_0 DESDE a HASTA $C_1(t_1)$ ORIGINA EL MISMO ELEMENTO DE FUNCIÓN QUE LA CONTINUACIÓN DE P_0 DESDE a HASTA $C_2(t_1)$ Y DESDE $C_2(t_1)$ HASTA $C_1(t_1)$ A LO LARGO DE L_1^{-1} (la curva L_1 recorrida en sentido inverso)

PROSIGUIENDO INDUCTIVAMENTE, LA CONTINUACIÓN DE P_{λ_1} A LO LARGO DE C_1 HASTA P_{λ_2} RESULTA, POR EL MISMO ARGUMENTO, EN EL MISMO ELEMENTO QUE AL CONTINUAR P_{λ_1} POR LA CURVA COMPUESTA POR L_1 SEGUIDA DE $C_2(t)$ $(t \in [t_1, t_2])$, SEGUIDA DE L_2^{-1} : P_{λ_2}.

EN UN NÚMERO FINITO DE APLICACIONES DE ESTE PROCESO SERÁ POSIBLE ENTONCES CONTINUAR P_0 A LO LARGO DE C_2 (mediante los L_i) POR LO QUE LA AFIRMACIÓN ESTÁ PROBADA.

+.

Y TENEMOS LOS ELEMENTOS SUFICIENTES PARA HABLAR DE función Analítica en el sentido de Weirstrass (TAMBIÉN LLAMADA FUNCIÓN ANALÍTICA Global $\mathbb{F}$) :

DEFINICIÓN: UNA función Analítica en el sentido de Weierstrass ES LA TOTALIDAD G DE TODOS AQUELLOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN QUE PUEDEN SER OBTENIDOS DE UNO POR CONTINUACIÓN ANALÍTICA.

HAN APARECIDO LAS PRIMERAS SUPERFICIES DE RIEMANN. SEGÚN CONSTA EN LOS PRÓXIMOS DOS EJEMPLOS, UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN EL SENTIDO DE WEIERSTRASS NO NECESARIAMENTE ES UNIFORME (MONO-VALUADA). ESTO LEJOS DE SER UN PROBLEMA ES UNA VENTAJA: PODREMOS APLICAR EL MISMO TRATAMIENTO TANTO A FUNCIONES UNIFORMES COMO A LAS QUE NO LO SEAN.

1. CONSIDERA LA APLICACIÓN $w=f(z)=z^2$. (PARA TENER FIGURITAS CLARAS, z^k CON $k=2$). NUESTRO INTERÉS ESTÁ EN LA FUNCIÓN INVERSA $z=w^{1/2}$ QUE NO ES UNIFORME (ES 1 A 2 EN TODO PUNTO DE $\hat{\mathbb{C}}$ EXCEPTO EN 0 e ∞ EN QUE ES 1-1.

pregunta: ¿EXISTE ALGÚN DOMINIO NATURAL EN QUE PUEDA DEFINIRSE COMO UNA FUNCIÓN UNIFORME?

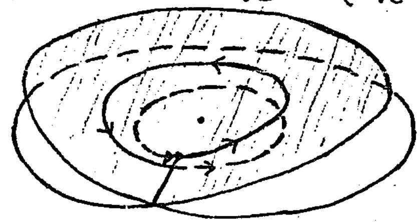
respuesta: SÍ, EN LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $\{(w, w^{1/2})\}$ (FIGURA)

LO QUE SIGUE ES ESENCIALMENTE, UNA VISUALIZACIÓN DE LA GRÁFICA DE ESTA FUNCIÓN MULTIVALUADA QUE SERÁ OBTENIDA GRACIAS AL PROCESO DE CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN EN LA FN. ANALÍTICA $z=w^{1/2}$.

TOMA EL ELEMENTO DE FN. CON CENTRO EN $r_0e^{i\theta_0}$ CON VALOR $\sqrt{r_0}e^{i\theta_0/2}$ AHÍ, Y RADIO DE CONVERGENCIA r_0, EN EL PLANO w. CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE ESTE EL. DE FN. A LO LARGO DE LA CURVA $w=r_0e^{i\theta}$ PRODUCE, DESPUÉS DE UN GIRO (DE 2π) UN EL. DE FN. CENTRADO EN $r_0e^{i(\theta_0+2\pi)}$ $(=r_0e^{i\theta_0})$ CON VALOR $\sqrt{r_0}\,e^{i(\theta_0+2\pi)/2} = -\sqrt{r_0}\,e^{i\theta_0/2}$.

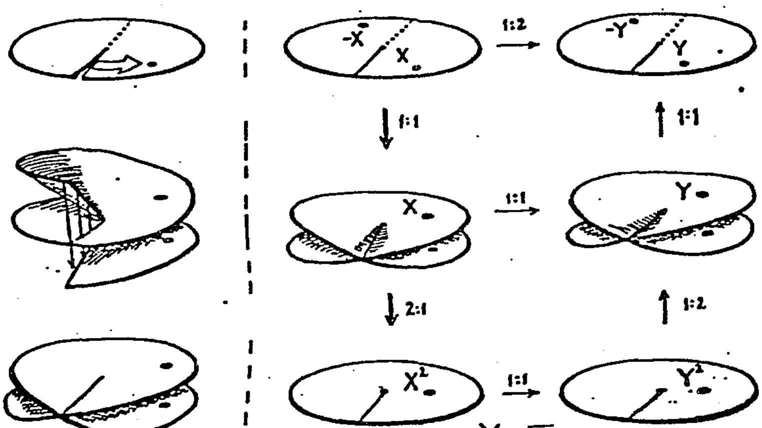
SI AHORA HACEMOS CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE ESTE NUEVO ELEMENTO DE FUNCIÓN SOBRE EL MISMO CÍRCULO $w=r_0e^{i\theta}$ OBTENDREMOS UN NUEVO ELE. DE FN. CENTRADO EN $r_0e^{i(\theta_0+4\pi)}$ $(=r_0e^{i\theta_0})$ CON VALOR

$$\sqrt{r_0}\,e^{i(\theta_0+4\pi)/2} = \sqrt{r_0}\,e^{i\theta_0/2}$$



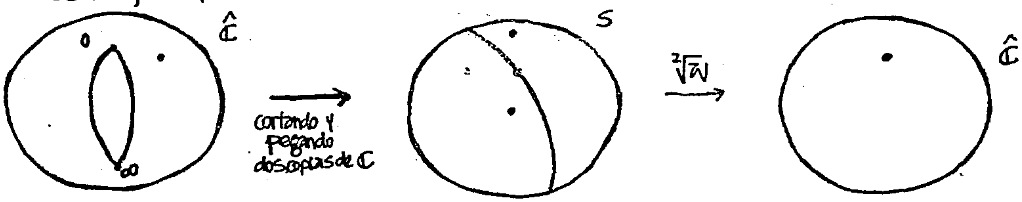
ES DECIR, REGRESAMOS AL EL. DE FN. ORIGINAL.

LA VISUALIZACIÓN SERÁ COMPLETADA SI LOGRAS DISTINGUIR A $r_0e^{i\theta_0}$ DE $r_0e^{i(\theta_0+2\pi)}$ E IDENTIFICARLO CON $r_0e^{i(\theta_0+4\pi)}$. LA SIGUIENTE FIGURA MUESTRA LA REALIZACIÓN y fue la continuación analítica quién te dijo cómo hacerlo:



- CONSTRUCCIÓN -

AUNQUE LA VISUALIZACIÓN PUEDE EXTENDERSE A $\hat{\mathbb{C}}$: BASTA "CORTAR" A LO LARGO DE UNA CURVA QUE UNA 0 CON ∞ EN $\hat{\mathbb{C}}$ Y "PEGAR" DOS (Ó K) COPIAS DE $\hat{\mathbb{C}}$ A LO LARGO DE ELLA. CADA HOJA representa ENTONCES UNA RAMA DE LA FUNCIÓN MULTIVALUADA. LA SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A $\sqrt[2]{w}$ (Ó K) APARECE COMO UNA ESFERA S CON 2 (Ó K) "GAJOS" CON DOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN, EN 0 e ∞. ES PUES, COMPACTA.



PUEDE HACERSE UNA CONSTRUCCIÓN EXPLÍCITA DEL ESPACIO COCIENTE NATURAL QUE NUESTRA REPRESENTACIÓN DEFINE (ver PORTER, Mike). MÁS ADELANTE SERÁ CLARO QUE LA SUPERFICIE OBTENIDA NO DEPENDE DE LA LÍNEA ELEGIDA PARA CORTAR Y PEGAR : LA CONT. ANALÍTICA CONLLEVA TODA LA TOPOLOGÍA DE LA SUP. DE RMN. ASOCIADA.

2. ANÁLOGAMENTE CONSIDEREMOS $w = f(z) = e^z$ Y SU INVERSA

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

EL PROBLEMA ES AHORA LA MÚLTIPLE AMBIGÜEDAD QUE EL ARGUMENTO CONLLEVA.

SIN TANTO DETALLE COMO EN EL CASO ANTERIOR, BASTE DECIR QUE PARA CONSTRUIR LA SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A $\log z$ NECESITAMOS DISTINGUIR AL EL. DE FN. OBTENIDO POR CONTINUACIÓN ANALÍTICA DEL CENTRADO EN $r_0 e^{i\theta_0}$ (CON RADIO DE CONV. EL MÁXIMO QUE NO CONTENGA A 0) A LO LARGO DE LA CURVA γ_1, DEL OBTENIDO POR CONTINUACIÓN DE ESE MISMO PERO A LO LARGO DE LA CURVA γ_2 (VER FIGURITA SIGUIENTE)

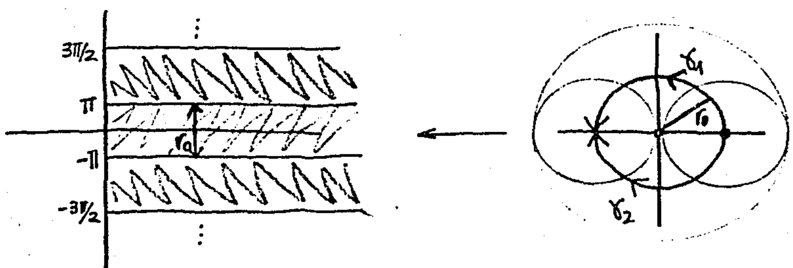
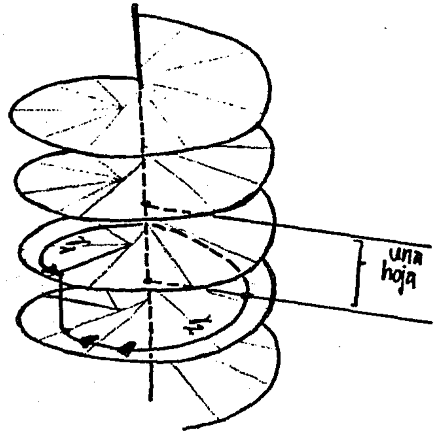


FIG: LAS REGIONES SOMBREADAS REPRESENTAN EL RANGO DE c/u DE LAS DISTINTAS (INFINITAS) RAMAS DE $\log z$

LO ANTERIOR PORQUE A LO LARGO DE γ_1 ARRIBARÍAS AL EL. DE FN. CENTRADO EN $r_0 e^{i(\theta+\pi)}$ CON VALOR AHÍ $= \log r_0 + i(\theta+\pi)$, MIENTRAS QUE POR γ_2, EL EL. DE FN. OBTENIDO TENDRÍA EL VALOR $\log r_0 + i(\theta-\pi)$, CENTRADO TAMBIÉN EN

$$r_0 e^{i(\theta+\pi)} = r_0 e^{i(\theta-\pi)}$$

CONTINUANDO SUCESIVAMENTE POR LAS CURVAS $\gamma_1\gamma_2^{-1}$, $\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_1\gamma_2^{-1}$, etc... SE OBTIENE LA REPRESENTACIÓN DEL DOMINIO DESEADO (SIGUIENTE FIGURA).



SIN EMBARGO AHORA EL COMPORTAMIENTO EN ∞ NO ES DESRIPTIBLE POR SER UNA SINGULARIDAD ESENCIAL DE $\log Z$, MIENTRAS QUE EN 0 $\arg Z$ NO ESTÁ DEFINIDO. EN OTRAS PALABRAS, LA SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A $\log Z$ NO ES COMPACTA y no existe forma congruente en que podamos compactificarla. (RECUERDA WEIERSTRASS-CASORATTI).

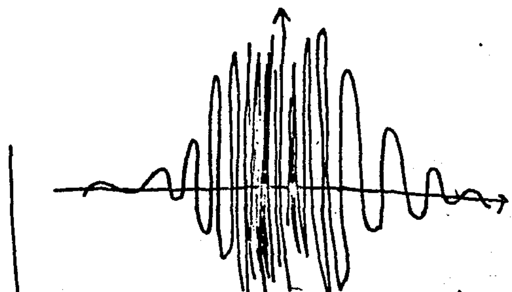


FIG. una singularidad esencial real que ilustra el comportamiento de las singularidades tales complejos-analíticos.

ASPIRAMOS A UN CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN MUCHO MÁS ABSTRACTO QUE cortar y pegar VÍA CONTINUACIÓN ANALÍTICA. HACIA ÉL VAMOS.

Si t ES UN PARÁMETRO COMPLEJO PODEMOS REPRESENTAR AL ELEMENTO DE FUNCIÓN (1.1) $P(z-a)=u$ HACIENDO

$$t = z-a$$

ASÍ QUE

$$u = P(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$$

ASÍ QUE EL COMPORTAMIENTO DE t ALREDEDOR DE $t=0$ ES EL MISMO QUE EL DE z ALREDEDOR DE $z=a$. CON MAYOR GENERALIDAD representaremos A LOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN COMO SERIES DE POTENCIAS EN t

$$(1.3) \qquad z = P(t) \quad , \quad u = Q(t)$$

A LAS QUE PERMITIREMOS CONTENER UN NÚMERO FINITO DE POTENCIAS ENTERAS NEGATIVAS DE t. SERÁN CONVERGENTES EN UNA VECINDAD $|t|<r$ ABSOLUTAMENTE Y SATISFACEN LA SIGUIENTE CONDICIÓN: UN PAR DE PUNTOS DISTINTOS t_1 y t_2 EN $|t|<r$ NUNCA DAN LUGAR A LA MISMA REPRESENTACIÓN DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN ($t_1 \neq t_2 \Rightarrow P(t_1) \neq P(t_2)$ o $Q(t_1) \neq Q(t_2)$)

¿CUÁNDO DOS REPRESENTACIONES DISTINTAS $(P(t), Q(t))$ y $(\Pi(\tau), K(\tau))$ definen AL MISMO ELEMENTO DE FUNCIÓN? DEFINAMOS UNA RELACIÓN (DE EQUIVALENCIA) ENTRE REPRESENTACIONES DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN:

$(P(t), Q(t)) \sim (\Pi(\tau), K(\tau)) \Leftrightarrow$ EXISTE UNA EXPRESIÓN EN SERIE DE POTENCIAS $t = t(\tau) = C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3 + \ldots$, QUE SATISFACE:

i) ES CONVERGENTE EN ALGUNA VECINDAD $|\tau| < \rho$
ii) $C_1 \neq 0$

"DOS REPRESENTACIONES SON EQUIVALENTES SI EXISTE UNA REPARAMETRIZACIÓN CONFORME (ii)

QUE LLEVE UNA EN LA OTRA". SIENDO DE EQUIVALENCIA, ESTA RELACIÓN INDUCE UNA PARTICIÓN EN LAS Representaciones de los elementos de función. PROCEDAMOS ENTONCES A ELEGIR AL mejor REPRESENTANTE: la representación normal de un elemento de función:

(i) SI $z = P(t) = a + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, $u = Q(t)$ NO CONTIENEN POTENCIAS NEGATIVAS DE t Y $a_1 \neq 0$, PODEMOS CONSIDERAR $\tau = z - a$ COMO NUEVO PARÁMETRO Y OBTENER UNA NUEVA REPRESENTACIÓN

$$(2.1) \quad z = a + \tau \ , \ u = K(\tau)$$

DEL MISMO ELEMENTO DE FUNCIÓN. COMO $Q(t)$ NO TIENE POTENCIAS NEGATIVAS DE t, ENT. $K(\tau)$ TAMPOCO LAS TIENE DE τ, ES ASÍ QUE (2.1) REPRESENTA UN ELEMENTO DE FUNCIÓN DEL TIPO (1.1) AL QUE LLAMAREMOS elemento de función regular y a (2.1) su representación normal.

DE LA UNICIDAD DEL DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR DE UNA FUNCIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO SE SIGUE QUE UN EL. DE FN. REGULAR TIENE UNA SOLA REPRESENTACIÓN NORMAL, ASÍ ES QUE DOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN son distintos SI SUS REPRESENTACIONES NORMALES LO SON. ESTAMOS PUES EN POSICIÓN DE DECIR QUE NUESTRA NUEVA DEFINICIÓN DE ELEMENTO DE FUNCIÓN GENERALIZA A LA TRATADA EN (1.1).

(ii) SI $z = a + a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots \quad (a_m \neq 0)$ ES DECIR, SI $z - a$ TIENE UN "CERO DE ORDEN m" EN $t = 0$ ENTONCES EXISTE UNA REPRESENTACIÓN EN TÉRMINOS DE ALGUNA $t(\tau) = c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \dots \ (c_1 \neq 0)$ $\therefore$ $z = a + \tau^m$ Y LA REPRESENTACIÓN NORMAL ES EN ESTE CASO

$$(2.1^*) \quad z = a + \tau^m \ , \ u = K(\tau) \qquad (**)$$

OBSERVA QUE EN LA REPRESENTACIÓN NORMAL DE ESTE CASO HEMOS APELADO A UNA DE LAS m RAMAS ANALÍTICAS MONOVALUADAS DISTINTAS DE ALGUNA FUNCIÓN $g(t)$ (**). ASÍ PUES, EN REALIDAD TENEMOS m representaciones normales de (ii), TODAS ELLAS OBTENIBLES DE UNA DADA MEDIANTE LA SUSTITUCIÓN $\tau | \tau \varphi$ DONDE φ ES UNA RAÍZ m-ésima de la unidad. DIREMOS ENTONCES QUE UN EL. DE FUNCIÓN DADO POR

$$(2.2) \quad z = a' + \tau^{m'} \ , \ u = K'(\tau)$$

ES el mismo QUE $(2.1^*) \Leftrightarrow a' = a$, $m' = m$ y $K'(\tau) = K(\tau)$ TÉRMINO A TÉRMINO A ALGUNA DE LAS REPRESENTACIONES OBTENIDAS DE (2.1^*) VÍA LA SUSTITUCIÓN $\tau | \tau \varphi$ (QUE SON m POSIBLES).

POR LO ANTERIOR, EL ENTERO m ES CARACTERÍSTICO DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN DADO, AL QUE LLAMAREMOS ramificado de orden m. A LOS ELEMENTOS REGULARES (aquellos en que $m = 1$) LES LLAMAREMOS no ramificados.

(**) VER "PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES ANALÍTICAS"

QUE AMBAS REPRESENTACIONES SON EQUIVALENTES, ES DECIR, SI MOSTRAMOS QUE $\mathfrak{e}_{\tau_0} = \mathfrak{e}_{t_0}$
PARA HACERLO, BASTA REARREGLAR $t(\tau)$ EN POTENCIAS DE $\tau' = \tau - \tau_0$ PARA OBTENER

$$(24) \quad t'(\tau') = t(\tau) - t_0 = c_1'\tau' + c_2'\tau'^2 + \ldots$$

EL CAMBIO DE COORDENADAS QUE LLEVA AL PAR $(P'(t'), Q'(t'))$ EN EL PAR $(\Pi'(\tau'), K'(\tau'))$, QUE SATISFACE

$$c_1' = \frac{dt}{d\tau}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_0} \neq 0$$

PORQUE EL MAPEO DEFINIDO POR $\tau \longmapsto t(\tau)$ ES TOPOLÓGICO EN PARTICULAR EN LA MAYOR VECINDAD DE τ_0 CONTENIDA EN $|\tau| < \rho$.

ADEMÁS, $P'(t'(\tau')) = \Pi'(\tau')$ y $Q'(t'(\tau')) = K'(\tau')$ PORQUE $\Pi'(\tau') = \Pi'(\tau - \tau_0)$ y $P'(t'(\tau')) = P'(t(\tau) - t_0)$ SON FUNCIONES REGULARES DE τ EN UNA VECINDAD DE τ_0 EN LA QUE SUS VALORES COINCIDEN CON LOS DE $\Pi(\tau)$ (LO MISMO QUE Q' y K' CON K)

HEMOS PUES EXHIBIDO UN "CAMBIO CONFORME DE COORDENADAS" QUE LLEVA TÉRMINO A TÉRMINO UNA REPRESENTACIÓN EN LA OTRA, ASÍ QUE por definición $\mathfrak{e}_{t_0} = \mathfrak{e}_{\tau_0}$.

+.

LA NATURALEZA AISLADA DE LAS SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS NOS PERMITE CONSIDERAR VECINDADES ANALÍTICAS DE UN EL. DE FN. DADO QUE CONSTEN (EXCEPTO QUIZÁS DEL EL. DE FN. DADO) EXCLUSIVAMENTE DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN REGULARES: BASTA ELEGIR AL DISCO $|t| < r$ QUE DEFINE LA VECINDAD DE $\mathfrak{e} = (P(t), Q(t))$ LO SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO PARA QUE (EXCEPTO QUIZÁS EN $t=0$), $dP/dt \neq 0$ EN $|t| < r$. LO ANTERIOR ES VÁLIDO EN EL CASO DE REPRESENTACIONES NORMALES DE ELEMENTOS ramificados EN TODA LA VECINDAD $|t| < r$ QUE DEFINE LA VECINDAD ANALÍTICA PUES $t=0$ ES EL único PUNTO IRREGULAR DE $P(t) = a + t^m$ Y DE $P(t) = t^{-n}$. EN OTRAS PALABRAS: PARA CADA VALOR z_1 DE z EN LA VECINDAD DE a $|z - a| < r^m$ O EN LA VECINDAD $|z| > r^{-n}$ CORRESPONDEN RESPECTIVAMENTE m y n ELEMENTOS REGULARES $P(z - z_1)$ inducidos POR EL ELEMENTO DADO (las ramas del elemento de función).

RECÍPROCAMENTE, VAMOS A MOSTRAR A CONTINUACIÓN QUE ES POSIBLE RECUPERAR AL ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathfrak{e}$ A PARTIR DE CUALESQUIERA DE SUS ELEMENTOS INDUCIDOS:

por ejemplo, si $\mathfrak{e}$ ESTÁ DADO POR

$$z = a + t^m, \quad u = \sum_{j=-n}^{\infty} A_j t_j \qquad (|t| < r)$$

POR SIMPLICIDAD SUPONGAMOS $a=0$.

SI z_1 ES UN z-VALOR $\ni$. $0 < |z_1| = \rho < r^m$, CADA UNO DE LOS ELEMENTOS REGULARES $Q(z - z_1)$ INDUCIDOS POR $\mathfrak{e}$ EN z_1 TIENEN POR DISCO DE CONVERGENCIA A $|z - z_1| < \delta$, DONDE $\delta = \min(\rho, r^m - \rho)$. CADA UNO DE ESTOS ELEMENTOS INDUCIDOS POR $\mathfrak{e}$ EN z_1 PUEDE SER OBTENIDO MEDIANTE CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE ALGÚN OTRO DE ELLOS SOBRE EL CÍRCULO $|z| = \rho$. VISTO ASÍ, EL EXPONENTE m ESTÁ CARACTERIZADO POR EL HECHO DE QUE UNO REGRESA AL ELEMENTO ORIGINAL DESPUÉS DE RECORRER m VECES ESTE CÍRCULO (ver Figura siguiente). AL MISMO TIEMPO ESTA CONTINUACIÓN ANALÍTICA DETERMINA LA FUNCIÓN $Q(t)$ EN EL ANILLO

$$\rho - \delta < |z| < \rho + \delta$$

POR LO QUE (DESARROLLO VÁLIDO EN SERIE DE LAURENT) LOS COEFICIENTES A_k DEL DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS PUEDEN OBTENERSE DE LAS INTEGRALES $A_k = \int_{|t| = \sqrt[m]{\rho}} Q(t)\,dt / t^{n+1}$

(iii) si $z = a_{-h}t^{-h} + a_{-h+1}t^{-h+1} + \dots \quad (a_{-h} \neq 0, h \in \mathbb{N})$
ES DECIR, SI z TIENE UN POLO DE ORDEN h EN $t=0$, AFIRMO QUE EXISTE $t(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + \dots \quad (c_1 \neq 0)$ ¿. LA REPRESENTACIÓN NORMAL EN ESTE CASO ES DE LA FORMA

$$(2.1^{**}) \quad z = \tau^{-h}, \; u = K(\tau) \qquad (**)$$

Y EL COMPORTAMIENTO TOPOLÓGICO ES ANÁLOGO AL CASO (ii) CUANDO $h > 1$.

EN VÍAS DE DEFINIR UNA topología EN EL ESPACIO DE LOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN, HAGAMOS LA SIGUIENTE DEFINICIÓN: SI $\mathfrak{e}$ ES UN ELEMENTO DE FUNCIÓN Y

$$(2.3) \quad z = P(t), \; u = Q(t)$$

ES UNA REPRESENTACIÓN DE $\mathfrak{e}$ VÁLIDA EN $|t| < r$ (ambas series convergen en $|t| < r$ y para dos puntos en tal disco, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow P(t_1) \neq P(t_2)$ ó $Q(t_1) \neq Q(t_2)$); PARA TODO t_0 EN $|t| < r$ PODEMOS REARREGLAR LAS SERIES $P(t)$ y $Q(t)$ EN POTENCIAS DE $t' = t - t_0$ Y OBTENER UN NUEVO PAR DE SERIES DE POTENCIAS $P'(t')$ y $Q'(t')$ Y POR ENDE UN NUEVO ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathfrak{e}_{t_0}$. TODOS AQUELLOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN $\mathfrak{e}_{t_0}$ $(|t_0| < r)$ definen LO QUE SERÁ UNA vecindad analítica de $\mathfrak{e}$ $(= \mathfrak{e}_0)$ O UNA t-VECINDAD, CUANDO LA REFERENCIA AL PARÁMETRO NECESITE SER EXPLÍCITA.

ESTAMOS DEFINIENDO LO QUE SE DEBE ENTENDER POR elementos de función cercanos. ¿CÓMO SE COMPORTA LA "cercanía" RESPECTO AL CAMBIO DE PARÁMETRO $t \leftrightarrow \tau$? ES DECIR: SI SE TIENEN DOS REPRESENTACIONES DISTINTAS DE <u>UN</u> EL. DE FN. $\mathfrak{e}$,

$$z = P(t), \; u = Q(t)$$
$$z = \Pi(\tau), \; u = K(\tau) \quad ,$$

EQUIVALENTES VÍA LA SUSTITUCIÓN $t = t(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + \dots \quad (c_1 \neq 0)$, ¿CÓMO SE COMPORTAN LAS t-VECINDADES ANTE LAS τ-VECINDADES? ¿ALTERAN LA "CERCANÍA" LOS CAMBIOS DE REPRESENTACIÓN?

NO:

TEOREMA 3 : TODA t-VECINDAD DE $\mathfrak{e}$ CONTIENE UNA τ-VECINDAD DE $\mathfrak{e}$ Y RECÍPROCAMENTE: TODA τ-VECINDAD DE $\mathfrak{e}$ CONTIENE UNA t-VECINDAD DE $\mathfrak{e}$

Demostración: CON LA NOTACIÓN DEL PÁRRAFO ANTERIOR AL ENUNCIADO DEL TEOREMA, SIENDO $t = t(\tau)$ CONFORME EN $\tau = 0$, ES LOCALMENTE TOPOLÓGICO, ES DECIR, QUE EXISTE $\rho > 0$ TAL QUE PARA TODO $|\tau| < \rho$:

(i) $t(\tau)$ CONVERGE Y TIENE NORMA $|t(\tau)| < r$

(ii) EN TAL DOMINIO $t(\tau)$ ES BIYECTIVA.

AFIRMAMOS QUE LA DESIGUALDAD $|\tau| < \rho$ DETERMINA UNA τ-VECINDAD DE $\mathfrak{e}$ CONTENIDA EN LA t-VECINDAD ORIGINAL DETERMINADA POR $|t| < r$.

EN EFECTO: SEA $|\tau_0| < \rho$ ARBITRARIO $t_0 = t(\tau_0)$. POR UN LADO PODEMOS OBTENER UNA REPRESENTACIÓN $(\Pi'(\tau'), K'(\tau'))$ DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathfrak{e}_{\tau_0}$ REARREGLANDO $(\Pi(\tau), K(\tau))$ EN SERIES DE POTENCIAS DE $\tau' = \tau - \tau_0$ Y UNA REPRESENTACIÓN $(P'(t'), Q'(t'))$ DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathfrak{e}_{t_0}$ REARREGLANDO $(P(t), Q(t))$ EN SERIES DE POTENCIAS DE $t' = t - t_0$. NUESTRA AFIRMACIÓN QUEDARÁ PROBADA SI MOSTRAMOS

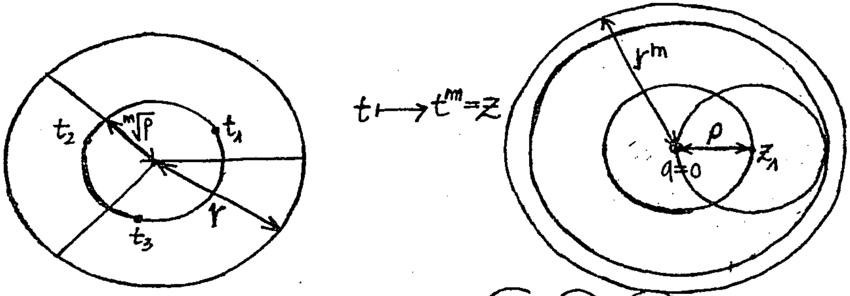


FIG. $m=3$: CADA UNO DE LOS ARCOS $\widehat{t_1 t}$, $\widehat{t_2 t_3}$ y $\widehat{t_3 t_1}$ SE MAPEAN INYECTIVAMENTE EN $|z|=\rho$ ES POR ELLO QUE SÓLO HASTA HABER COMPLETADO 3 VUELTAS SOBRE $|z|=\rho$ REGRESAS AL ELEMENTO DE FUNCIÓN ORIGINAL.

DEFINICIÓN : UNA cadena analítica de elementos de función ES UNA CORRESPONDENCIA QUE ASOCIA A CADA NÚMERO $\lambda \in [0,1]$ UN ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathbf{e}(\lambda)$ CON LA SIGUIENTE CONDICIÓN: $\forall \lambda_0 \in [0,1]$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(\lambda_0)$ EL ELEMENTO DE FUNCIÓN CORRESPONDIENTE Y $\mathcal{U}_0$ UNA VECINDAD ANALÍTICA ARBITRARIA DE $\mathbf{e}_0$, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $\mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}(\lambda)$ PERTENECE A $\mathcal{U}_0$ SI $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

DECIMOS QUE LA CADENA ANALÍTICA conecta AL ELEMENTO INICIAL $\mathbf{e}(0)$ CON EL TERMINAL $\mathbf{e}(1)$.

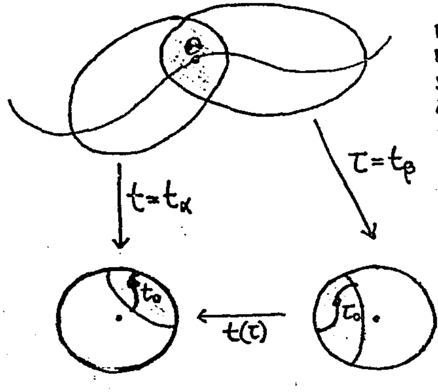
DEFINICIÓN : UNA forma analítica ES UN CONJUNTO G DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN CON LAS SIGUIENTES PROPIEDADES :

(1) CUALESQUIERA DOS ELEMENTOS DE G PUEDEN SER CONECTADOS POR UNA CADENA ANALÍTICA CUYOS ELEMENTOS TODOS PERTENECEN A G

(2) ES MAXIMAL EN EL SIGUIENTE SENTIDO: NO ES POSIBLE EXTENDER A G AGREGÁNDOLE MÁS ELEMENTOS DE FUNCIÓN DE MANERA QUE EL CONJUNTO EXTENDIDO

CUANDO SE HABLA DE vecindad, SE HABLA DE topología. EL CONTENIDO DEL REQUERIMIENTO (2) DEL CONCEPTO DE FORMA ANALÍTICA ES ENTONCES EL SIGUIENTE: en una forma analítica tenemos la estructura mínima necesaria para dotarla de una topología, PORQUE TODAS LAS VECINDADES ANALÍTICAS POSIBLES DE UN ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathbf{e} \in G$ PERTENECEN TAMBIÉN A G. AUNQUE EL espacio de los elementos de función (i.e.: la totalidad de ellos) APAREZCA A PRIMERA VISTA MONSTRUOSO (porque un punto de él −un el. de fn.− está determinado hasta un infinito continuo de parámetros complejos t_k), OBSERVA QUE SI LAS VECINDADES ANALÍTICAS DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN GENERAN UNA TOPOLOGÍA AL MENOS EN CADA FORMA ANALÍTICA G, ÉSTOS SUBCONJUNTOS APARECERÍAN COMO CONEXOS MÁXIMOS, DE DIMENSIÓN 1-compleja, AJENOS DOS A DOS Y cada vecindad analítica de un el. de fn. $\mathbf{e} \in G$ está en correspondencia 1-1 con un abierto básico de $\mathbb{C}$ (el disco de radio r centrado en el origen que define a la vecindad analítica). SI LEYÉSEMOS EL **TEOREMA 3** DE ESTA SECCIÓN EN LA SIGUIENTE FIGURA (regresa al teorema 3 y luego cambia de página) ES CLARO QUE HEMOS LOGRADO FORMALIZAR, EN UN CONCEPTO MUCHO MÁS ABSTRACTO QUE "CORTAR Y PEGAR" LA VISUALIZACIÓN QUE LOGRAMOS DE LAS SUPERFICIES DE RIEMANN ASOCIADAS A UNA FUNCIÓN EN EL SENTIDO DE WEIERSTRASS, PÁGINAS ATRÁS:

un punto de una forma analítica es un ele. de fn. en ella. Las cadenas analíticas de eles. de fn. en la forma son curvas continuas en la forma analítica que aparece, topológicamente, como una superficie (que hasta ahora es solamente una "hoja" de dimensión compleja 1).



EN LA FORMA ANALÍTICA, $e_{t_0} = e_{t(\tau_0)} = e$ ESTÁ ENTONCES EN LA INTERSECCIÓN DE UNA t-VECINDAD Y UNA τ-VECINDAD Y e PERTENECE A ALGUNA CADENA ANALÍTICA

ENGENDRAN UNA APLICACIÓN CONFORME DE LA IMAGEN BAJO τ DE LA INTERSECCIÓN DE LAS t y τ VECINDADES EN LA IMAGEN BAJO t DE ESA MISMA INTERSECCIÓN.

FIG. LA ESENCIA DEL CONCEPTO DE Variedad.

REGRESA A LAS SUPERFICIES DE RIEMANN ASOCIADAS A UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN EL SENTIDO DE WEIERSTRASS. OBSERVA QUE ES PRECISAMENTE ASÍ COMO APARECEN, REPRESENTAN PUNTOS POR ELEMENTOS DE FUNCIÓN Y CURVAS CONTINUAS POR CADENAS ANALÍTICAS. SIN EMBARGO ELLAS FUERON CONSTRUÍDAS POR CONT. ANALÍTICA DE ELS. DE FN. regulares Y HASTA AHORA NO HEMOS ANALIZADO EL COMPORTAMIENTO DE LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA CUANDO LA CADENA CONTIENE ELEMENTOS irregulares. SIN EMBARGO, ES DE ESPERAR (DE LOS EJEMPLOS $w^{1/2}$ y $\log z$) QUE EN LOS ELEMENTOS IRREGULARES EL COMPORTAMIENTO SEA BIEN DESCRIPTIBLE (DADO QUE PUDIMOS CONSTRUIR LA SUP. DE RIEMANN ASOCIADA sin pasar por ellos). RESTA PUES, DETERMINAR EL COMPORTAMIENTO DE LAS VECINDADES ANALÍTICAS DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN IRREGULARES PARA ARRIBAR AL CONCEPTO DE función analítica completa, configuración analítica completa o Superficie de Riemann en el sentido de Weyl.

NUESTRA DESCRIPCIÓN SERÁ GEOMÉTRICA, HAY QUE DECIR SIN EMBARGO QUE PUEDE HACERSE ANALÍTICAMENTE CON LA AYUDA DE LAS SERIES DE PUISEUX: SERIES DE POTENCIAS racionales (que no enteras) QUE CONVERGEN LOCALMENTE A UNA FUNCIÓN MULTIVALUADA (UN EL. DE FN. RAMIFICADO). (ver AHLFORS, COMPLEX ANALYSIS).

OBSERVA QUE LAS 'HOJAS' (las formas analíticas) NO SÓLO SON topológicamente CONEXAS, SON MÁS fuertes que eso: son analíticamente conexas. EL SIGNIFICADO DE LA ÚLTIMA AFIRMACIÓN ES EL CORAZÓN DEL CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN

ANTES DE PROSEGUIR, INVESTIGUEMOS LA RELACIÓN ENTRE LOS CONCEPTOS función analítica y forma analítica.

PRIMERAMENTE OBSERVA QUE SI LOGRASTE CONTINUAR ANALÍTICAMENTE UN ELE. DE FN. EN EL SENTIDO DE §1.1 A LO LARGO DE UNA CURVA DADA $z=z(\lambda)$ (CON $\lambda\in[0,1]$) [de tal manera que a cada valor de λ corresponde un elemento de función REGULAR $e(\lambda)$ en el que el desarrollo de z en términos del parámetro local t inicia con el término constante $z(\lambda)$] ENTONCES DE ESTA MANERA HAZ OBTENIDO UNA CADENA ANALÍTICA DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN EN EL SENTIDO DE LA DEFINICIÓN. EN EFECTO: SEA $\lambda_0\in[0,1]$, $e(\lambda_0)=e_{\lambda_0}$ EL CORRESPONDIENTE ELE. DE FN. Y $\mathcal{U}_0$ UNA VECINDAD ANALÍTICA ARBITRARIA DE e_{λ_0}. COMO e_{λ_0} ES REGULAR, PODEMOS ELEGIR $z'=z-z(\lambda_0)$ COMO PARÁMETRO LOCAL DE REPRESENTACIÓN DEL ELEMENTO e_{λ_0} Y EXISTE UNA VECINDAD ANALÍTICA DE e_{λ_0} DADA POR $|z'|<r_0$ CONTENIDA EN $\mathcal{U}_0$. PODEMOS PUES ELEGIR UN ARCO "CENTRADO" EN $z(\lambda_0)$, DADO POR $|\lambda-\lambda_0|\leq\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, PARA EL QUE $|z(\lambda)-z(\lambda_0)|<r_0$. LOS $e(\lambda)$ CORRESPONDIENTES A LOS PUNTOS DE ESTE ARCO SE OBTIENEN AL REARREGLAR e_{λ_0} EN POTENCIAS DE $z-z(\lambda)$, ASÍ QUE LOS $e(\lambda)$ PERTENECEN A LA z'-VECINDAD $|z'|<r_0$ DE e_{λ_0} Y POR TANTO A $\mathcal{U}_0$. (ver figura siguiente). EL RECÍPROCO, EL QUE UNA CADENA ANALÍTICA DE ELEMENTOS DE

FUNCIÓN REGULARES SE OBTIENE DEL ELEMENTO INICIAL POR EL PROCESO DE CONTINUACIÓN ANALÍTICA DESCRITO EN §1.1 no requiere demostración.

TEOREMA 4: UNA CADENA ANALÍTICA $\mathfrak{e}(\lambda)$ $(\lambda\in[0,1])$ DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN CONTIENE SOLAMENTE UN NÚMERO FINITO DE ELEMENTOS IRREGULARES (en particular solamente un número finito de elementos ramificados)

Demostración: según vimos es posible escoger para cada elemento $\mathfrak{e}(\lambda)$ en la cadena una vecindad analítica que conste únicamente de elementos regulares, excepto el centro mismo posiblemente; con un número finito de tales vecindades podemos cubrir a la curva $z(\lambda)$ y la afirmación está probada.

+.

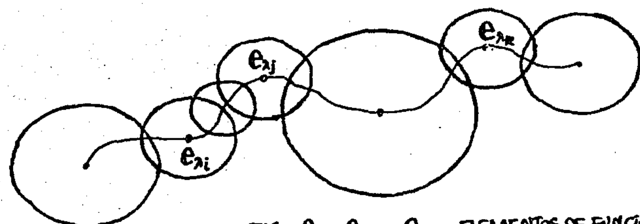


FIG: $\mathfrak{e}_{\lambda_i}, \mathfrak{e}_{\lambda_j}$ y $\mathfrak{e}_{\lambda_k}$, ELEMENTOS DE FUNCIÓN IRREGULARES Y SUS RESPECTIVAS VECINDADES ANALÍTICAS.

¿CÓMO SE COMPORTAN LAS CADENAS ANALÍTICAS EN ELEMENTOS IRREGULARES? CONSIDEREMOS (POR SIMPLICIDAD) QUE LA EXPANSIÓN DE z EN LA REPRESENTACIÓN DEL ELEMENTO $\mathfrak{e}(\lambda)$ INICIA CON LA CONSTANTE $z(\lambda)$

VAMOS A TRATAR EL CASO EN QUE APARECEN ELS. DE FN. IRREGULARES ENTRE LOS $\mathfrak{e}(\lambda)$. SEA $\mathfrak{e}_0$ REGULAR, λ_0 (<1) EL menor valor de λ EN EL QUE $\mathfrak{e}_\lambda$ ES IRREGULAR Y SEA m EL ORDEN DE RAMIFICACIÓN DE $\mathfrak{e}_{\lambda_0}$. LOS ELEMENTOS $\mathfrak{e}_\lambda$ CON $0\leq\lambda<\lambda_0$ SE OBTIENEN DE MANERA ÚNICA POR CONTINUACIÓN ANALÍTICA A LO LARGO DE LA CURVA $z=z(\lambda)$, SIN EMBARGO LA SITUACIÓN CAMBIA radicalmente en λ_0: la continuación analítica a lo largo de la curva dada puede extenderse, iniciando en $\mathfrak{e}_{\lambda_0}$, en exactamente m formas distintas: el "tronco" se ramifica en m ramas a lo largo de una de las cuales corre la cadena analítica dada.
CADA UNA DE ESTAS RAMAS PUEDE REPETIDAMENTE RAMIFICARSE A MEDIDA QUE LA CONTINUACIÓN A LO LARGO DE $z(\lambda)$ SIGUE (ver figura siguiente) Y CIERTAMENTE LA SIGUIENTE RAMIFICACIÓN DE UNA RAMA PUEDE OCURRIR EN UN SITIO* DISTINTO QUE LA SIGUIENTE RAMIFICACIÓN DE ALGUNA OTRA DE LAS RAMAS (serían cadenas analíticas distintas). POR SUPUESTO QUE UNA DE LAS RAMAS PODRÍA terminar (morir, acabarse) COMPLETAMENTE, Vgr., SI ALCANZASE UN PUNTO CRÍTICO QUE NO SEA UN POLO O UN CERO (una singularidad esencial) ANTES DE LLEGAR A $\lambda=1$ POR LA "ruta" (la cadena) dada.

POR ESO ES QUE UTILIZAMOS EL TÉRMINO ramificado PARA TALES elementos, AUNQUE NUESTRA DESCRIPCIÓN REQUIERE DEMOSTRACIÓN: SEA

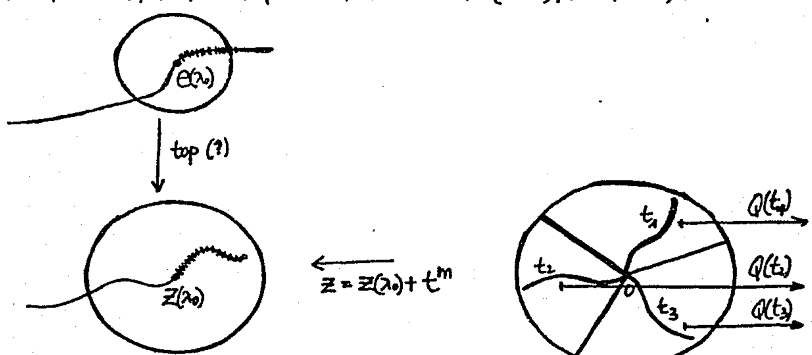
$$z=z(\lambda_0)+t^m, \quad u=Q(t)$$

(*) spot, en el original. Ver H. Weyl. "CONCEPT OF RIEMANN SURFACE"

ALGUNA DE LAS m REPRESENTACIONES NORMALES DE $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ VÁLIDA EN $|t|<r$. ELIGE $\lambda_1>\lambda_0$ TAL QUE $|Z(\lambda)-Z(\lambda_0)|<r^m$ PARA $\lambda_0\leq\lambda\leq\lambda_1$. EXISTEN ENTONCES (VER "PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES ANALÍTICAS") m CURVAS EN $|t|<r$ QUE INICIAN EN $t=0$ Y QUE CORRESPONDEN A LA CURVA $Z=Z(\lambda)$ $(\lambda_0\leq\lambda\leq\lambda_1)$ BAJO EL MAPEO

$$Z=Z(\lambda_0)+t^m .$$

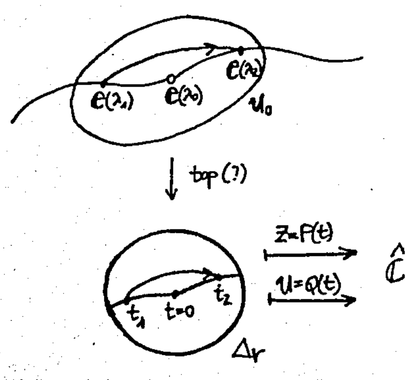
ESTAS m CURVAS SON CONGRUENTES Y PUEDEN SER OBTENIDAS AL ROTAR CUALQUIERA DE ELLAS SOBRE EL ORIGEN UN ÁNGULO $2\pi/m$, $4\pi/m$, ... CONTINUANDO $Q(t)$ A LO LARGO DE CADA UNA DE ESTAS CURVAS (continuación analítica inmediata, por supuesto!) SE OBTIENEN LAS m POSIBLES CONTINUACIONES DE $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ A LO LARGO DE LA CURVA DADA, DESDE $\lambda=\lambda_0$ HASTA $\lambda=\lambda_1$. NO ESTAMOS AFIRMANDO QUE CADA UNA DE ESTAS CONTINUACIONES PUEDA EXTENDERSE A UNA CADENA ANALÍTICA QUE ALCANCE el FINAL ($\lambda=1$). PARA $m=3$, VER LA FIGURITA SIGUIENTE:



DISCO DE RADIO r^m CENTRADO EN $Z(\lambda_0)$, EN EL PLANO Z

DISCO DE RADIO r CENTRADO EN EL ORIGEN DEL PLANO t.

COMO CADA CADENA ANALÍTICA CONTIENE SOLAMENTE UN NÚMERO FINITO DE ELEMENTOS IRREGULARES, ELLOS NO SE ACUMULAN Y SON DISCRETOS, ASÍ QUE PODEMOS evitarlos. SI PUEDES CONECTAR DOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN POR UNA CADENA ANALÍTICA ENTONCES PUEDES CONECTARLOS CON UNA CADENA ANALÍTICA CUYOS ELEMENTOS SON todos regulares, EXCEPTO POSIBLEMENTE LOS ELEMENTOS INICIAL Y TERMINAL. LA IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN ES SENCILLA (ver figura siguiente)



PARA MOSTRARLO, POR SIMPLICIDAD SUPONGAMOS QUE LA CADENA ANALÍTICA $\mathcal{C}(\lambda)$ CONTIENE SOLAMENTE UN ELEMENTO IRREGULAR $\mathcal{C}(\lambda_0)$ (CON $0<\lambda_0<1$). SEA

$$z=P(t) \quad , \quad u=Q(t)$$

UNA REPRESENTACIÓN DE $\mathcal{C}(\lambda_0)$ VÁLIDA PARA $|t|<r$. ELEGIMOS r SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO PARA QUE LA t-VECINDAD $\mathcal{U}_0$ DETERMINADA POR $|t|<r$ NO CONTENGA OTRO ELEMENTO IRREGULAR QUE $\mathcal{C}(\lambda_0)$. ELIGE $\lambda_1<\lambda_0$ Y $\lambda_2>\lambda_0$ DE MANERA QUE LOS CORRESPONDIENTES $\mathcal{C}(\lambda_i)$, $i=1,2$, ESTÉN CONTENIDOS EN $\mathcal{U}_0$. DE ESTA MANERA, $\mathcal{C}(\lambda_i)$ $(i=1,2)$ SE OBTIENEN REARREGLANDO LA REPRESENTACIÓN DE $\mathcal{C}(\lambda_0)$ EN POTENCIAS DE $t-t_i$. LOS PUNTOS t_1 Y t_2 PUEDEN SER UNIDOS POR UNA CURVA EN $|t|<r$ QUE NO PASE POR EL ORIGEN, ASÍ QUE ASOCIANDO A CADA PUNTO t_0 DE ESTA CURVA EL ELEMENTO DE FUNCIÓN OBTENIDO AL REARREGLAR $P(t)$ Y $Q(t)$ EN POTENCIAS DE $t-t_0$ OBTENEMOS UNA CADENA ANALÍTICA QUE CONECTA A $\mathcal{C}(\lambda_1)$ Y $\mathcal{C}(\lambda_2)$ QUE CONSISTE SOLAMENTE DE ELEMENTOS REGULARES.

en cualquier vecindad conveniente de un elemento de función irregular cualesquiera dos elementos ahí contenidos están relacionados por un "cambio de coordenadas" del tipo $t(\tau)=c_1\tau+c_2\tau^2+\ldots$ $\quad (c_1\neq 0)$ $\quad$ (i.e.: CONFORME).

CONSECUENCIAS DE NUESTRAS DELIBERACIONES SON LOS DOS SIGUIENTES RESULTADOS:

TEOREMA 5: LOS ELES. DE FN. REGULARES DE UNA FORMA ANALÍTICA CONSTITUYEN UNA ÚNICA FUNCIÓN ANALÍTICA

TEOREMA 6: TODA FUNCIÓN ANALÍTICA CONSISTE DE LOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN REGULARES DE UNA FORMA ANALÍTICA QUE ESTÁ UNÍVOCAMENTE DETERMINADA POR LA FUNCIÓN

(En virtud de que podemos recuperar al elemento de función $\mathcal{C}$ a partir de cualesquiera de sus elementos inducidos, si $\mathcal{C}$ fuese irregular).

Y UNO MÁS.:

TEOREMA 7: EL CONJUNTO DE ELEMENTOS DE FUNCIÓN IRREGULARES DE UNA FORMA ANALÍTICA ES CONTABLE

CUYA DEMOSTRACIÓN DEPENDE DEL SIGUIENTE TEOREMA DE POINCARÉ Y VOLTERRA: una forma analítica contiene a lo más un contable infinito de elementos de función regulares $u=\varphi(z-a)$ con $z=a$ centro fijo.

QUE A CONTINUACIÓN PROBAMOS:

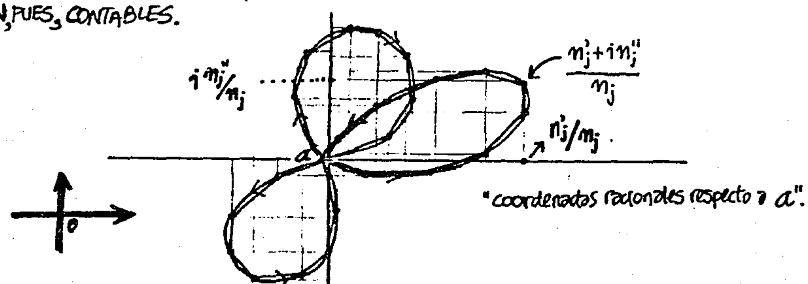
CADA UNO DE TALES ELEMENTOS PUEDE SER OBTENIDO DE ALGUNO DE ELLOS, φ_1, MEDIANTE CONTINUACIÓN REGULAR DE φ_1 A LO LARGO DE CURVAS EN EL PLANO z CON PUNTO INICIAL Y TERMINAL EN a (cerradas en a). ES POSIBLE CONSTRUIR PARA CADA UNA DE ESAS CURVAS UNA CURVA POLIGONAL CON UN NÚMERO FINITO DE SEGMENTOS suficientemente cercana a la curva para que la continuación analítica regular a lo largo de este polígono exista y resulte en el mismo elemento de función final que la continuación a lo largo de la curva. MÁS AÚN, PODEMOS ELEGIR AL POLÍGONO DE MANERA QUE SUS VÉRTICES TENGAN COORDENADAS RACIONALES RESPECTO A a (ver figura siguiente). SEAN ESTAS COORDENADAS RELATIVAS $z-a$

$$\frac{n_1'+in_1''}{n_1}, \quad \frac{n_2'+in_2''}{n_2}, \ldots, \frac{n_h'+in_h''}{n_h} \qquad (i=\sqrt{-1})$$

DONDE n'_k, n''_k, n_k SON ENTEROS SIN FACTOR COMÚN Y $n_k > 0$ $(k = 1, \ldots h)$. ASOCIO A ESTE POLÍGONO EL NÚMERO

$$\sum_{k=1}^{h} |n'_k| + \sum_{k=1}^{h} |n''_k| + \sum_{k=1}^{h} n_k = N$$

DE ENTRE TODOS LOS POSIBLES POLÍGONOS QUE INICIAN Y TERMINAN EN a Y CUYOS VÉRTICES TIENEN COORDENADAS RACIONALES RELATIVAS A a, hay solamente un número finito asociado al mismo número N. REARREGLO AHORA TODOS ESTOS POLÍGONOS EN UNA SUCESIÓN AL TOMAR $N = 3, 4, 5, \ldots$ SUCESIVAMENTE. CIERTAMENTE CADA UNO DE ESTOS POLÍGONOS DETERMINA O NO UN ELEMENTO DE FUNCIÓN REGULAR CON CENTRO a DE ACUERDO A QUE LA CONTINUACIÓN REGULAR DE φ_1 A LO LARGO DEL POLÍGONO EXISTA O NO, ASÍ QUE DE ESTE MODO HEMOS OBTENIDO TODOS LOS POSIBLES ELEMENTOS DE FUNCIÓN REGULARES QUE PERTENECEN A LA FORMA ANALÍTICA Y TIENEN CENTRO EN a, Y SON, PUES, CONTABLES.



EN LUGAR DEL Z-PLANO PUEDO CONSIDERAR LA Z-ESFERA, LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA DEL Z-PLANO EN QUE $z = \infty$ ESTÁ REPRESENTADO POR UN SOLO PUNTO. Si

$$z = a + t^{\mu},\ u = Q(t) \qquad \text{ó} \qquad z = t^{-\mu},\ u = Q(t)$$

ES LA REPRESENTACIÓN NORMAL VÁLIDA EN $|t| < r$ DE UN EL. DE FN. IRREGULAR DE UNA FORMA ANALÍTICA DADA, ENTONCES PARA CADA z_0 ($\neq a$ ó de ∞) QUE SATISFACE LA CONDICIÓN

$$(3.1) \qquad |z - a| < r^{\mu} \qquad \text{ó} \qquad |z| > r^{-\mu}$$

CORRESPONDEN EXACTAMENTE μ ELES. DE FN. REGULARES $u = \varphi(z - z_0)$ CON CENTRO EN z_0 QUE PERTENECEN A LA t-VECINDAD DADA POR $|t| < r$ DEL ELEMENTO IRREGULAR, lo que habíamos llamado los μ elementos regulares inducidos POR EL ELEMENTO IRREGULAR en z_0.

1. COMO PODEMOS RECUPERAR AL ELEMENTO DE FUNCIÓN IRREGULAR A PARTIR DE CUALQUIERA DE SUS ELEMENTOS INDUCIDOS, ENTONCES Dos elementos irregulares distintos CON EL MISMO CENTRO a ó ∞ no pueden inducir el mismo elemento de función regular en el punto z_0, si z_0 PERTENECE AL gorro* común de convergencia (ver figura siguiente)

2. SEAN AHORA e_1 Y e_2 DOS ELEMENTOS IRREGULARES CON CENTROS DISTINTOS, SEAN K_1 y K_2 LOS gorros* ASOCIADOS (DE MANERA ANÁLOGA A LO HECHO EN **1.**) Y SUPONGAMOS QUE EL CENTRO DE z_2 DE e_2 ES INTERIOR A K_1 (CON CENTRO z_1). AFIRMO QUE PARA $z_0 \in K_1 \cap K_2$ ningún elemento inducido por e_1 EN z_0 ES IDÉNTICO A CUALQUIERA DE LOS INDUCIDOS POR e_2 EN z_0.

* utilizo "gorro" porque a "vecindad" le he dado una connotación especial.

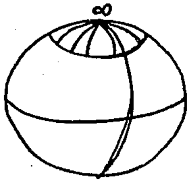


FIG. un "gorro" en el ∞, determinado por (3:1)

LA DEMOSTRACIÓN DE LA SEGUNDA AFIRMACIÓN ES COMO SIGUE:

COMO EL CENTRO DE K_2 ES UN PUNTO DE K_1 Y K_1 CONTIENE AL ARCO DE CIRCUNFERENCIA MAYOR EN K_2 QUE UNE z_0 CON EL CENTRO DE K_2, ENTONCES LA CONTINUACIÓN DE UN ELEMENTO REGULAR EN z_0 inducido POR $\mathfrak{e}_1$ A LO LARGO DE ESTE ARCO AL CENTRO DE K_2 DA LUGAR A UNO DE LOS ELEMENTOS REGULARES INDUCIDOS POR $\mathfrak{e}_1$ EN EL CENTRO DE K_2, pero nunca su elemento regular $\mathfrak{e}_2$. ESTÁ DEMOSTRADO.

PODEMOS AHORA CONCLUIR LA DEMOSTRACIÓN DEL **TEOREMA 7**:

SI k ES EL RADIO DEL "GORRO" K INDUCIDO POR (3:1) EN UN ELEMENTO IRREGULAR $\mathfrak{e}$ DE LA FORMA ANALÍTICA DADA, ASOCIEMOS A ÉL EL "GORRO" DE RADIO $\frac{1}{2}k$ CON EL MISMO CENTRO, PARA CADA EL. IRREGULAR $\mathfrak{e}$ EN LA FORMA ANALÍTICA. SI LOS ELEMENTOS IRREGULARES NO FUESEN CONTABLES, EXISTIRÍA ENTONCES UN PUNTO RACIONAL z_0 QUE PERTENECE A MÁS DE UN NÚMERO CONTABLE DE GORROS K (aquél de radio $\frac{1}{2}k$). CADA ELEMENTO IRREGULAR ASOCIADO CON UNA DE ESOS GORROS INDUCE EN z_0 POR LO MENOS UN ELEMENTO REGULAR, CENTRADO EN z_0 Y perteneciente a la forma analítica, PERO SEGÚN MOSTRAMOS, ELEMENTOS DE FUNCIÓN IRREGULARES DISTINTOS INDUCEN ELS. DE FN. REGULARES DISTINTOS EN z_0: HEMOS OBTENIDO UNA CONTRADICCIÓN A POINCARÉ-VOLTERRA PORQUE LA FORMA ANALÍTICA DADA NO CONTIENE SINO UN NÚMERO CONTABLE DE ELEMENTOS REGULARES CON CENTRO z_0.

es decir:

UNA FORMA ANALÍTICA DIFIERE DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA (EN EL SENTIDO DE WEIERSTRASS) SOLAMENTE EN QUE UN NÚMERO CONTABLE DE ELEMENTOS IRREGULARES HAN SIDO AGREGADOS.

III
el concepto

MUCHO MÁS QUE cortar y pegar

§3 · QUÉ ES UNA 2-VARIEDAD.

DESTACAMOS QUE NUESTRA IDEA INTUITIVA DE LO QUE UNA Forma Analítica ES BESTIALMENTE ENGROSADA SI LOGRAMOS REPRESENTAR A CADA ELEMENTO DE LA FORMA COMO UN PUNTO EN UNA SUPERFICIE W DE TAL MANERA QUE LOS PUNTOS QUE LA REPRESENTAN CUBRAN A W DE UNA MANERA SENCILLA, EN LA QUE UNA CADENA ANALÍTICA DE ELEMENTOS DE LA FORMA APAREZCA EN W COMO UNA CURVA CONTINUA. NUESTRA INTENCIÓN, DEBIDA A LOS TRABAJOS DE B. RIEMANN MÁS ENFOCADOS A LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS QUE A LAS DEL ANÁLISIS (COMO, SEGÚN VIMOS, WEIRSTRASS GUSTABA) PODRÁ SER LOGRADA CON LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE Variedad 2-dimensional O Superficie Topológica, CUYO GÉRMEN YA APARECÍA EN LOS TRABAJOS DEL MISMO RIEMANN O DE F. KLEIN PERO QUE, HASTA DONDE ENTIENDO, APARECE EN SU FORMA MÁS PULIDA EN EL LIBRO The Concept of a Riemann Surface, de HERMANN WEYL (EN DONDE DE PASO APARECE EL CONCEPTO DE Superficie de Riemann Abstracta, QUE NOS PROPONEMOS DESARROLLAR EN ESTE TRABAJO).

PARA RIEMANN ESTA SUPERFICIE APARECE COMO UNA MODIFICACIÓN DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA MULTIVALUADA, DOMINIO EN QUE ÉSTA REAPAREZCA AHORA COMO UNA FUNCIÓN UNIFORME (UNIVALUADA), INTUITIVAMENTE CONSTRUIDA AL "PEGAR" (en un sentido a precisar) COPIAS DEL PLANO COMPLEJO O REGIONES DE ÉL Y LLAGENDO Sobre el plano complejo. EN ESTA CONSTRUCCIÓN, SIN EMBARGO, RIEMANN SUPONE QUE W ESTÁ ENCAJADA EN EL ESPACIO EUCLÍDIANO $\mathbb{R}^3$. EL DESCARTAR ESTE ENCAJE ES UNA APORTACIÓN FUNDAMENTAL PARA EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN, DEBIDO A WEYL. EN SUS PALABRAS:

> ... desde un punto de vista meramente objetivo, el problema de encontrar una superficie para representar la forma analítica de una manera visual puede ser rechazado como no pertinente; ello porque, en esencia, el espacio tri-dimensional no tiene nada que ver con formas analíticas y uno recurre a él no basándose en fundamentos lógico-matemáticos, sino por estar cercanamente asociado con nuestra percepción sensorial. El satisfacer nuestro deseo de dibujos y análogos de esta manera al forzar representaciones no esenciales en objetos en lugar de tomarlos como son, podría llamarse un antropomorfismo contrario a los principios científicos... No utilizar esta aproximación [el concepto de 2-variedad para representar las formas analíticas] es olvidar uno de los más esenciales aspectos del tópico.

DEFINICIÓN: UNA Variedad Topológica 2-dimensional es un espacio topológico de Hausdorff W con base numerable de su topología que es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. La última condición significa que para cada punto $p\in W$, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de p y un homeomorfismo $h: \mathcal{U}\to \mathcal{U}'\subseteq\mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{U}'$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$.

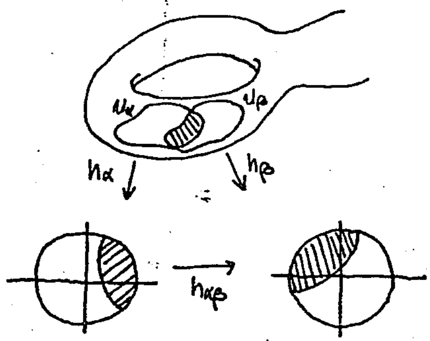
Al mapeo h con tales propiedades lo llamaremos una carta local en p. Un conjunto de cartas $\{h_\alpha : \alpha\in\mathcal{Q}\}$ con dominios $\mathcal{U}_\alpha$ se llamará un ATLAS de W si $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{Q}}\mathcal{U}_\alpha = W$.

CONSISTENTES CON LAS PÁGINAS ANTERIORES, LOS ABIERTOS $\mathcal{U}'\subseteq\mathbb{R}^2$ DE LA DEFINICIÓN ANTERIOR SERÁN COPIAS DE DISCOS PLANOS $\Delta_r = \{z\in\mathbb{C} : |z|<r\}$. ASÍ PUES LA PRIMERA IDEA DE LO QUE UNA 2-VARIEDAD PODRÍA PARECER ES SIMILAR A UN TECHO (de una casa) ARMADO CON TEJAS topológicamente iguales a Δ.

SI DOS TEJAS SE TRASLAPAN: $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\neq\phi$ y $\alpha\neq\beta$, LOS HOMEOMORFISMOS h_α y h_β CORRESPONDIENTES INDUCEN UN Cambio de Coordenadas $h_{\alpha\beta}$ MEDIANTE EL DIAGRAMA CONMUTATIVO

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{U}_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta \arrow[dl, "h_\alpha"'] \arrow[dr, "h_\beta"] & \\ h_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta})\subseteq\mathcal{U}'_\alpha \arrow[rr, "h_{\alpha\beta} := h_\beta\circ h_\alpha^{-1}"'] & & h_\beta(\mathcal{U}_{\alpha\beta})\subseteq\mathcal{U}'_\beta \end{tikzcd}$$

ASÍ QUE EL CAMBIO DE COORDENADAS $h_{\alpha\beta}$ ES UN HOMEOMORFISMO ENTRE CONJUNTOS ABIERTOS DE $\mathbb{R}^2$.



DEBEMOS NOTAR QUE ESTA DEFINICIÓN PRECISA ESCONDE UN POCO LA ORIGINAL DE WEYL. PARA ÉL UNA 2-VARIEDAD ESTÁ DADA SI ESPECIFICAMOS UN PAR DE OBJETOS: LOS "PUNTOS" DE LA 2-VARIEDAD Y "VECINDADES" DE LOS PUNTOS CON LA MISMA CONDICIÓN DE QUE ÉSTAS ÚLTIMAS SEAN DISCOS TOPOLÓGICOS MEDIANTE UN HOMEOMORFISMO QUE MANDE p AL ORIGEN.

AMBAS DEFINICIONES SON EQUIVALENTES EN TANTO QUE LA TOPOLOGÍA DE W QUEDA DEFINIDA POR LAS FUNCIONES h_α: LOS ABIERTOS BÁSICOS DE W SERÁN LAS IMÁGENES INVERSAS DE LAS h_α Y DE ESTA FORMA LOS ABIERTOS DE W APARECERÁN COMO UNIONES DE TODAS LAS POSIBLES SUBFAMILIAS DE $\{h_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha') : \alpha\in\mathcal{Q}\}$ EN LA NOTACIÓN DE WEYL, DONDE $\mathcal{U}_\alpha'$ ES UN DISCO ABIERTO.

A PARTIR DE AHORA Y EN TODO LO QUE SIGUE IMPONDREMOS UNA CONDICIÓN MÁS AL CONCEPTO DE VARIEDAD TOPOLÓGICA 2-DIMENSIONAL: QUE SEA CONEXA (UNA CONDICIÓN OBVIAMENTE INDEPENDIENTE DE LAS ANTERIORES). PARA DISTINGUIR DE AQUELLAS QUE NO LO SEAN; A LAS 2-VARIEDADES TOPOLÓGICAS CON BASE CONTABLE DE SU TOPOLOGÍA Y CONEXAS LAS LLAMAREMOS SIMPLEMENTE *Superficies*.

UNA INTERESANTE FÁBRICA DE EJEMPLOS DE SUPERFICIES LA DA LA SIGUIENTE

PROPOSICIÓN : TODO SUBDOMINIO W' DE UNA SUPERFICIE W ES TAMBIÉN UNA SUPERFICIE

PARA MOSTRAR ESTO BASTA DEMOSTRAR QUE W' PUEDE SER CUBIERTA POR UNA COLECCIÓN CONTABLE DE CONJUNTOS COMPACTOS $G_1, G_2, \ldots$ DE W', YA QUE SI ES DADA UNA VECINDAD $\mathcal{U}(p)$ CONTENIDA EN W' DE CADA PUNTO $p\in W'$, ENTONCES EN CADA G_i HAY UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS $p_i', p_i'', \ldots, p_i^{(n_i)}$ CUYAS VECINDADES ASOCIADAS CUBREN A G_i, ASÍ QUE LAS VECINDADES ASOCIADAS CON LOS PUNTOS $\{p_i', \ldots, p_i^{(n_i)} : i=1,2,\ldots\}$ CUBRIRÁN A W'.

PROCEDAMOS AHORA: SEA $\mathcal{U}(a)$ UNA VECINDAD DEL PUNTO $a\in W$ Y SEA A UN MAPEO TOPOLÓGICO DE $\mathcal{U}(a)$ SOBRE EL INTERIOR Δ DEL DISCO UNITARIO EN EL PLANO-xy. POR COMODIDAD REEMPLAZAREMOS A Δ POR EL RECTÁNGULO CERRADO $Q\subseteq\Delta$ DEFINIDO COMO $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2}\leq x,y\leq\frac{1}{2}\}$ E INTRODUZCAMOS LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS (x_1,y_1) y (x_2,y_2) COMO EL NÚMERO $\max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$. LA SUBDIVISIÓN ELEMENTAL DEL CUADRADO Q ES LA SUBDIVISIÓN EN CUATRO CUADRADOS DEL MISMO TAMAÑO Y CON LADOS PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS. (ver figura A_1 siguiente)

CIERTAMENTE EL CONJUNTO $A^{-1}(Q)\subseteq W$ ES UN COMPACTO EN W QUE CONTIENE A ALGUNA VECINDAD $\mathcal{U}(a)$ DE a. ES UN "CUADRADO" TOPOLÓGICO AL QUE POR ABUSO DE NOTACIÓN DENOTAREMOS POR Q, ASÍ QUE UNA VEZ CONSTRUIDO UN RECTÁNGULO Q CON CENTRO EN a Y UNA VECINDAD $\mathcal{U}(a)$ CONTENIDA EN Q para cada punto $a\in W$. PODEMOS ENCONTRAR UN NÚMERO CONTABLE DE PUNTOS p_i $(i=1,2,\ldots)$ TALES QUE W ESTÉ CUBIERTO POR LAS VECINDADES ASOCIADAS $\mathcal{U}(p_i)$ Y POR TANTO POR RECTÁNGULOS ASOCIADOS $Q=Q_i$

Si W' ES EL DOMINIO DADO EN W, CONSIDEREMOS LOS CUADRADOS ASOCIADOS Q_i QUE ESTÉN CONTENIDOS EN W', ELLOS FORMAN UNA SUCESIÓN $Q_1', Q_2', \ldots$ APLIQUEMOS UNA DIVISIÓN ELEMENTAL A CADA UNO DE LOS RESTANTES Y GUARDEMOS AQUELLOS RECTÁNGULOS Q_i QUE ESTÁN CONTENIDOS EN W'; ELLOS NUEVAMENTE FORMAN UNA SUCESIÓN $Q_1'', Q_2'', \ldots$ Y TIENEN LA MITAD DE TAMAÑO QUE LOS ANTERIORES. LOS RESTANTES CUADRADOS NUEVAMENTE SON SUJETOS A UNA DIVISIÓN ELEMENTAL, GUARDAREMOS AQUELLOS QUE ESTÉN CONTENIDOS EN W' Y SEGUIREMOS CON EL PROCESO. (figura B siguiente).

DE ESTA MANERA OBTENEMOS UNA CUBIERTA DE TODO W' POR "CUADRADOS ELEMENTALES" COMPACTOS Q_i^k EN W': EN EFECTO, DADO $p \in W'$, EL PERTENECE A ALGÚN "CUADRADO ORIGINAL" $Q_i = Q_{.}$, QUE ES LA PARTE DE $\mathcal{U}(p_i)$ QUE CORRESPONDE AL RECTÁNGULO CERRADO Q, QUE DEFINIMOS AL PRINCIPIO DE LA DEMOSTRACIÓN, BAJO EL MAPEO TOPOLÓGICO A DE $\mathcal{U}(p_i)$ SOBRE Δ. COMO p ES UN PUNTO INTERIOR DE W', EXISTE UN NÚMERO NATURAL $n \geq 2$ SUFICIENTEMENTE GRANDE TAL QUE TODOS LOS PUNTOS CUYA DISTANCIA DE p (EN LA IMAGEN DE $\mathcal{U}(p_i)$ POR A) ES $\leq 2^{-n}$ ESTÉN CONTENIDOS EN W'. SI AHORA APLICAMOS EN SUCESIÓN n SUBDIVISIONES ELEMENTALES A Q, LOS CUADRADOS RESULTANTES TIENEN LADOS DE LONGITUD 2^{-n}, ASÍ QUE UNO (O POSIBLEMENTE 2 ó 4) DE LOS RECT. ELEMENTALES PEQUEÑOS QUE CONTIENE(N) A p ESTARÁ(N) CONTENIDO(S) EN W': EL PUNTO p PUEDE SER TOMADO EN ALGUNO DE LOS CUADRADOS ELEMENTALES Q_i^k no después DEL n-ésimo paso, i.e.: para $k \leq n+1$. COMO EL BI-ÍNDICE (k, i) ES NUMERABLE, ESTOS CUADRADOS ASOCIADOS PUEDEN REORDENARSE EN UNA SUCESIÓN CONTABLE.

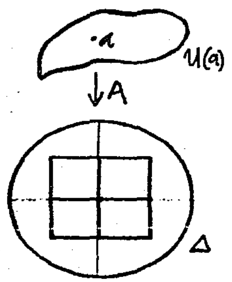


figura A: Δ y $Q \subseteq \Delta$, con una subdivisión elemental.

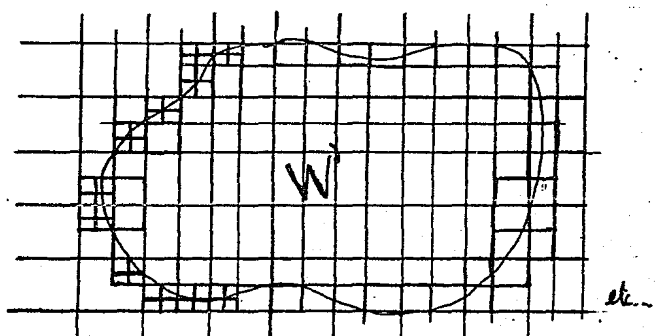
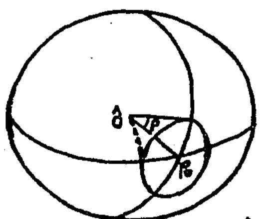


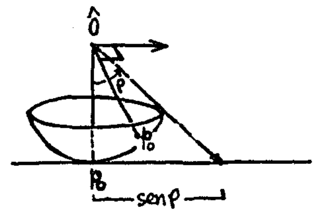
figura B. Agotando por divisiones elementales.

§ 3.1 · EJEMPLOS DE SUPERFICIES

1. EL PLANO EUCLIDIANO
2. EL INTERIOR DE UN RECTÁNGULO Y EL INTERIOR DE UN DISCO.
3. LA ESFERA $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ CON COORDENADAS CARTESIANAS $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ CONSISTE DE LOS PUNTOS $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ QUE SATISFACEN $\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2=1$. LA VECINDAD DE RADIO ρ DEL PUNTO $p_0=(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0)$ CONSISTIRÁ DE TODOS LOS PUNTOS p CUYA DISTANCIA ANGULAR A p_0 ES $<\rho$, ASÍ QUE ρ DEBE SER UN REAL POSITIVO CUALQUIERA $<\pi/2$: MEDIANTE PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE EL PLANO TANGENTE A S^2 EN p_0 ESTA VECINDAD SE MAPEA TOPOLÓGICAMENTE SOBRE UN DISCO PLANO CON CENTRO EN p_0 Y RADIO $r=\operatorname{sen}\rho$ (ver figura 1.1). ESTA VECINDAD ESTÁ TAMBIÉN CARACTERIZADA POR SER EL SUBCONJUNTO DE PUNTOS p DE LA ESFERA QUE SATISFACEN $\|p_0 \times p\| < r^2$ (donde $\|\ \|$ denota el valor absoluto o la norma y $\times$ es el producto cruz usual de $\mathbb{R}^3$). (figura 1.2).



1.1



1.2

LA ESFERA ES UNA SUPERFICIE COMPACTA. PARA MOSTRARLO DIVIDÁMOSLA EN HEMISFERIOS NORTE Y SUR Y PROYECTÉMOSLOS ORTOGONALMENTE SOBRE EL PLANO DEL ECUADOR. VISTOS ASÍ LOS HEMISFERIOS APARECEN COMO IMÁGENES 1-1 Y CONTINUAS DEL DISCO UNITARIO CERRADO QUE ES COMPACTO, ASÍ QUE CADA HEMISFERIO LO ES Y POR ENDE LA ESFERA TAMBIÉN.

4. LA BANDA DE MÖBIUS SE OBTIENE AL IDENTIFICAR LOS LADOS CORTOS DE UN RECTÁNGULO ALARGADO EN DIRECCIONES OPUESTAS (figura 1.3). ESTA SUPERFICIE EN EL ESPACIO EUCLIDIANO CON COORDENADAS xyz PUEDE SER REPRESENTADA EN TÉRMINOS DE DOS PARÁMETROS REALES ρ, ϕ COMO:

$$
\begin{aligned}
x &= (a-\rho\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\phi)\cos\phi \\
y &= (a-\rho\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\phi)\operatorname{sen}\phi \\
z &= \rho\cos\tfrac{1}{2}\phi
\end{aligned}
,
$$

DONDE ϕ NO TIENE RESTRICCIÓN, ρ debe satisfacer $|\rho|<h$, CON a y h CONSTANTES POSITIVAS $(h<a)$. (ver figura 1.4)

EN EL PLANO EUCLIDIANO CON COORDENADAS ρ, ϕ CONSIDEREMOS LA FRANJA $|\rho|<1$ Y EL GRUPO DISCRETO Γ DE "movimientos de remo" $(\rho,\phi) \longmapsto (\rho',\phi')$ DADO POR

$$(1) \qquad \rho'=(-1)^n\rho \quad , \quad \phi'=\phi+2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z})$$

(ver figura 1.5). LA órbita DE UN PUNTO (ρ,ϕ) EN EL PLANO SE DEFINE COMO EL CONJUNTO DE TODOS AQUELLOS (ρ',ϕ') QUE SATISFACEN (1). CONSIDEREMOS EL COCIENTE "$|\rho|<1$"$/\Gamma$ (UN "PUNTO" DE ESTE COCIENTE ES LA ÓRBITA DE UN PUNTO (ρ,ϕ) BAJO Γ). PARA DARLE ESTRUCTURA DE 2-VARIEDAD TOPOLÓGICA RESTA SÓLO DEFINIR las vecindades: SEA MÖ EL COCIENTE, en UN "PUNTO" DE MÖ: coloquemos círculos congruentes sobre cada elemento de la órbita de un punto euclidiano bajo Γ DE MODO QUE NO SE TRASLAPEN Y ESTÉN CONTENIDOS EN $|\rho|<1$. EN ALGUNO DE ESTOS CÍRCULOS, toma un punto interior

(ρ_0, ϕ_0) Y CONSIDERA SU ÓRBITA BAJO Γ. EL CONJUNTO DE ÓRBITAS QUE ESTÉN representadas POR UN ÚNICO PUNTO EUCLIDIANO EN CADA UNO DE ESTOS CÍRCULOS CONSTITUYE LO QUE LLAMAMOS UNA vecindad de m en MÖ (figura 1.5).

SI DECIMOS QUE UN PUNTO EUCLIDIANO EN LA ÓRBITA DE ALGÚN PUNTO está sobre SU REPRESENTANTE EN EL COCIENTE, ENTONCES LA FRANJA $|\rho|<1$ APARECE como UNA superficie cubriente sobre MÖ QUE CUBRE A MÖ UN NÚMERO INFINITO DE VECES AUNQUE NUNCA ESTÁ ramificada EN RELACIÓN A MÖ EN NINGÚN PUNTO.

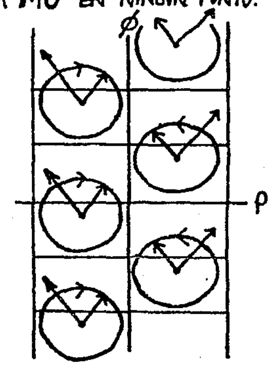


FIGURA 1.5.

EN $|\rho|<1$ UTILIZAMOS LA MEDIDA EUCLIDIANA DE ÁNGULOS. SI CONSIDERAMOS $|\rho|<1$ COMO UNA CUBRIENTE DE MÖ, ESTA MEDIDA ANGULAR PUEDE "bajarse" a MÖ canónicamente, EMPERO, DURANTE EL PROCESO EL ÁNGULO SE TORNA AMBIGUO NO SÓLO POR MÚLTIPLOS ENTEROS DE 2π SINO QUE TAMBIÉN PIERDE SU SIGNO. LA RAZÓN DE ESTE COMPORTAMIENTO ES TOPOLÓGICA: la banda de Möbius tiene un solo lado, ES DECIR, SIN ABANDONAR LA SUPERFICIE O SUBIR POR UN BORDE UNO PUEDE LLEGAR, SOBRE UNA CURVA continua, DE un LADO al otro

EN EL LENGUAJE QUE UTILIZAREMOS ADELANTE DIREMOS QUE LA BANDA DE MÖBIUS ES no orientable. UTILIZAR UNA PALABRA TAN SUGESTIVA SERÁ CONSECUENCIA DE LAS OBSERVACIONES QUE ENTONCES HAGAMOS.

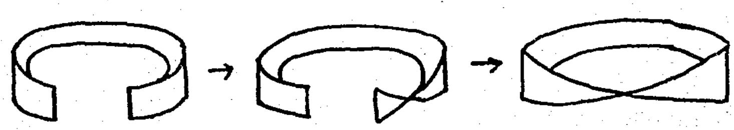
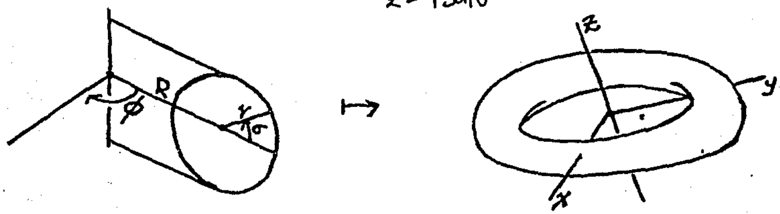


FIG. ARMANDO LA BANDA DE MÖBIUS

5. EL TORO SE CONSTRUYE AL ROTAR UN CÍRCULO DE RADIO r SOBRE UN EJE EN EL PLANO DEL CÍRCULO QUE NO INTERSECTA AL CÍRCULO. SI R $(>r)$ DENOTA LA DISTANCIA DEL CENTRO DEL CÍRCULO AL EJE, EN TÉRMINOS DE COORDENADAS RECTANGULARES xyz LOS PUNTOS EN LA SUPERFICIE PUEDEN EXPRESARSE CON LA AYUDA DE DOS PARÁMETROS REALES COMO:

$$x = (R + r\cos\sigma)\cos\phi$$
$$y = (R + r\cos\sigma)\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$z = r\,\mathrm{sen}\,\sigma$$



COMO SUPERFICIE ENCAJADA EN $\mathbb{R}^3$ EXISTE UNA MEDIDA (EUCLIDIANA) NATURAL DE LOS ÁNGULOS EN EL TORO. SI UNA CURVA $\alpha(\lambda) = (\phi(\lambda), \sigma(\lambda))$ EN EL TORO SATISFACE $\langle \alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda)\rangle \neq 0$ (DONDE $\langle\, , \rangle$ DENOTA AL PRODUCTO INTERNO USUAL DE $\mathbb{R}^3$), CON $d\phi/d\lambda$, $d\sigma/d\lambda$ CONTINUAS, LA LONGITUD DE ARCO DEFINIDA POR

$$s = s(\lambda) = \int_0^\lambda \langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle\, dt$$

SATISFACE QUE

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = (R + r\cos\sigma)^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \qquad \ldots (1)$$

SI REEMPLAZAMOS σ POR EL NUEVO PARÁMETRO ψ, $\psi(\sigma) \equiv \int_0^\sigma dk/_{R/r+\cos k}$, ENTONCES

$\dfrac{d\psi}{d\lambda} = \dfrac{d\psi}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\lambda} = \dfrac{1}{R/r\cos\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\lambda}$, ASÍ QUE $\dfrac{d\sigma}{d\lambda} = (R/r + \cos\sigma)\dfrac{d\psi}{d\lambda}$, Y SUSTITUYENDO EN (1) ENCONTRAMOS QUE LA VARIACIÓN EN EL TORO DE

LA LONGITUD DE ARCO EN TÉRMINOS DE ESTOS NUEVOS PARÁMETROS PUEDE SER ESCRITA COMO

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = (R + r\cos\sigma)^2\left(\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right)^2\right) \quad ; \qquad \ldots (2)$$

OBSERVEMOS QUE $\psi = \psi(\sigma)$ ES UNA FUNCIÓN UNIVALUADA Y DIFERENCIABLE DE σ CON DERIVADA NUNCA NULA, ASÍ ES QUE σ, COMO FUNCIÓN DE ψ SATISFACE LAS MISMAS PROPIEDADES(*). DE ESTE MODO LOS VALORES (ϕ, ψ) QUE CORRESPONDEN A UN PUNTO DEL TORO ESTÁN DETERMINADOS SÓLO POR MÚLTIPLOS ENTEROS DE

$$a = 2\pi \quad , \quad b = \int_0^{2\pi} dk/_{R/r+\cos k} = \frac{2\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \; ,$$

LO QUE NOS PERMITE CONSIDERAR EL GRUPO DE TRASLACIONES

$$\Gamma = \{\, \phi' = \phi + ma \; , \; \psi' = \psi + nb \; , \; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \}$$

EN EL PLANO EUCLIDIANO DE COORDENADAS RECTANGULARES $\phi\psi$ Y LLAMAR A un sistema de puntos de Γ (una Γ-latiz de puntos) COMO UN "PUNTO" DE LA NUEVA VARIEDAD $\mathfrak{T}$. EL PLANO APARECE AHORA COMO UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE $\mathfrak{T}$ CON UN NÚMERO INFINITO DE HOJAS Y NUNCA RAMIFICADA Y, A DIFERENCIA

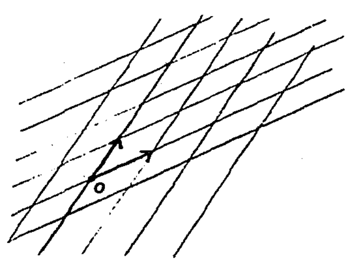
DE LA BANDA DE MÖBIUS, EN EL TORO LA MEDIDA ANGULAR DEL PLANO EUCLIDIANO SE LEVANTA (¿o deberíamos decir "se baja"?) SIN AMBIGÜEDAD A Σ.

COMO EN EL PLANO EUCLIDIANO $\phi\psi$, LA ε-VECINDAD DEL PUNTO (ϕ_0,ψ_0) SE DEFINE MEDIANTE LA DESIGUALDAD $(\phi-\phi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2<\varepsilon^2$, AUNQUE AHORA TENEMOS QUE RESTRINGIR ε A SER MENOR QUE $\min\{a,b\}$. POR LO DESTACADO EN (*) EL TORO ESTÁ AHORA REPRESENTADO POR LOS PARÁMETROS ϕ,ψ Y EN TÉRMINOS DE ESTA REPRESENTACIÓN ES APLICADO topológicamente SOBRE Σ. MÁS AUN: este mapeo es conforme PORQUE, DE ACUERDO A LA ECUACIÓN (2), EL CAMBIO LINEAL DE ESCALA ENTRE LA LONGITUD DE ARCO EN EL TORO, ds, Y LA LONGITUD DE ARCO EN EL PLANO EUCLIDIANO, $\sqrt{d\phi^2+d\psi^2}$, ESTÁ EFECTUADO POR EL FACTOR

$$R+r\cos\sigma\neq 0$$

QUE SOLAMENTE DEPENDE DEL PUNTO EN QUE SE VALÚE y no de la dirección de la curva medida.

HEMOS CONSTRUIDO, A PARTIR DEL TORO diferenciable (término que cobrará sentido en el siguiente capítulo) UN TORO conforme Y CON ÉL RESOLVEREMOS MÁS ADELANTE EL problema del Moduli. NO PUEDO DEJAR PASAR LA SIGUIENTE AFIRMACIÓN: PODEMOS CONSTRUIR "TOROS CONFORMES" A PARTIR DE UN PAR DE VECTORES COMPLEJOS linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ CON EL MISMO PROCESO DE "cuadricular e identificar" el plano bajo las traslaciones enteras que estos vectores generan. (DE CUALQUIER MANERA, EL TORO ES COMPACTO Y EL PLANO APARECE COMO superficie cubriente de él).



HE CONSERVADO ESTE EJEMPLO MENOS GENERAL PORQUE ES UNA CONSTRUCCIÓN EXPLÍCITA DE LO QUE SE SUELE LLAMAR UN factor de Conformidad. EMPERO, DESPUÉS DEL TRATAMIENTO DE ESPACIOS CUBRIENTES Y DE SUPERFICIES DE RIEMANN EN SU CONCEPTO FINAL, VOLVEREMOS CON ESTOS TOROS.

6. COMO ERA DE ESPERARSE, UNA FORMA ANALÍTICA G ES UNA DOS-VARIEDAD SI DEFINIMOS COMO "PUNTOS" DE G A LOS ELEMENTOS DE FUNCIÓN EN G Y A LAS VECINDADES DE TALES PUNTOS LO QUE DEFINIMOS COMO VECINDADES ANALÍTICAS.

SÓLO RESTA MOSTRAR QUE TIENE UNA BASE CONTABLE, (O BIEN: QUE SATISFACE EL SER 2o. NUMERABLE) Y PARA ELLO ES SUFICIENTE MOSTRAR QUE G PUEDE SER CUBIERTA POR UNA CANTIDAD NUMERABLE DE COMPACTOS.

SABEMOS QUE LOS ELEMENTOS IRREGULARES DE G FORMAN UN CONJUNTO NUMERABLE Y DISCRETO EN G. AGREGAREMOS AHORA UN NÚMERO CONTABLE DE PIEZAS CONSISTENTES DE ELEMENTOS REGULARES, DE LA SIGUIENTE MANERA: PARA CADA Z-VALOR a racional ($a=a_1+ia_2$ CON $a_i\in\mathbb{Q}$), SEA $Q(z-a)$ UN ELEMENTO REGULAR DE G CON CENTRO EN a Y RADIO DE CONVERGENCIA $r>0$. SEA $n\in\mathbb{N}$ EL PRIMERO QUE SATISFACE $2^{-n}\leq r$. ASÍ, $|z-a|\leq 2^{-n}$ DEFINE UN COMPACTO C de una vecindad analítica de Q. COMO LOS PUNTOS RACIONALES SON CONTABLES Y G CONTIENE A LO MÁS UNA CANTIDAD CONTABLE DE ELEMENTOS REGULARES CON CENTRO EN a, OBTENEMOS UN CONJUNTO CONTABLE DE COMPACTOS C.

MOSTREMOS QUE ELLOS CUBREN A G, i.e.: SÓLO FALTA MOSTRAR QUE CUALQUIER ELEMENTO REGULAR DE G ESTÁ CONTENIDO EN ALGÚN COMPACTO C.

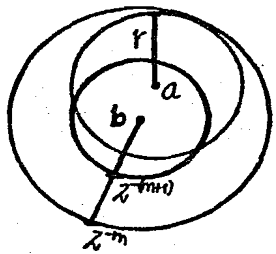
¡ADELANTE!:

SEA $P(z-b)$ UN ELEMENTO REGULAR DE G CON CENTRO EN b, QUE CONVERJA AL MENOS EN EL DISCO $|z-b| < 2^{-m}$, PARA ALGUNA $m \in \mathbb{N}$. ELIJE AHORA UN PUNTO RACIONAL $a \in \mathbb{C}$ $\left(a = \frac{n_i + m_j \cdot i}{n_j}\right)$ QUE SATISFAGA:

$$|b-a| < \frac{1}{2} 2^{-m} = 2^{-(m+1)}$$

Y CONSTRUYE EL ELEMENTO ASOCIADO $Q(z-a)$ POR CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE P: su radio de convergencia es, por ser continuación analítica directa de P, mayor que $2^{-(m+1)}$. ASOCIANDO CON ESE RADIO r EL NÚMERO n DEL PÁRRAFO ANTERIOR, OBTENEMOS QUE $n \leq m+1$, POR LO QUE EL PUNTO b ES INTERIOR AL DISCO CON CENTRO EN a Y RADIO 2^{-n} (porque se satisface que $|b-a| < 2^{-(m+1)} \leq 2^{-n}$)

ASÍ ES QUE, INVERSAMENTE, $P(z-b)$ SE OBTIENE DE $Q(z-a)$ $(\in G)$ POR CONTINUACIÓN ANALÍTICA DIRECTA Y P ES UN punto DE ALGÚN G, vgr., el determinado por Q.



§32 · ESPECIALIZACIÓN : SUPERFICIES DIFERENCIALES Y SUPERFICIES DE RIEMANN

SI $\mathfrak{e}$ ES UN ELEMENTO DE G CON REPRESENTACIÓN VÁLIDA PARA $|t|<r$ $(r>0)$:

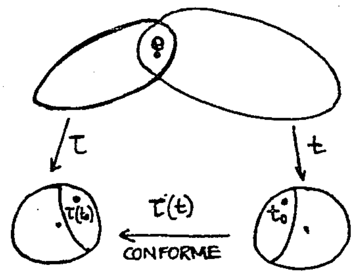
$$z=P(t)\ ,\ u=Q(t)$$

ENTONCES PARA CADA t CON $|t|<r$, EXISTE UN ELEMENTO $\mathfrak{e}_t$:

$$z=P(t+t')\ ,\ u=Q(t+t')$$

QUE SE OBTIENE AL REARREGLAR EL DESARROLLO DE $\mathfrak{e}$ EN POTENCIAS DE t'. DE ESTA MANERA EL MAPEO $t\longmapsto \mathfrak{e}_t$ ES UNA CORRESPONDENCIA 1-1 DEL DISCO $|t|<r$ EN EL PLANO t SOBRE ALGUNA VECINDAD (ANALÍTICA) DEL PUNTO $\mathfrak{e}$ EN G. ES PUES UNA MAPEO abierto (POR DEFINICIÓN DE LA TOPOLOGÍA DE G) Y POR TANTO UN HOMEOMORFISMO LOCAL. LLAMAREMOS A t UN parámetro uniformizante local EN EL PUNTO $\mathfrak{e}$. DE LAS DISCUSIONES PRECEDENTES SABEMOS QUE CUALQUIER OTRO PARÁMETRO UNIFORMIZANTE LOCAL τ EN $\mathfrak{e}$ PUEDE SER EXPRESADO EN LA FORMA

$$\tau=\gamma_1 t+\gamma_2 t^2+\dots \quad (\gamma_1\neq 0) \qquad (1)$$



UNA FUNCIÓN COMPLEJO-VALUADA DEFINIDA EN UN ABIERTO $\mathcal{U}$ DE G SE LLAMARÁ Regular Analítica EN $\mathfrak{e}\in\mathcal{U}$ SI PUEDE SER EXPRESADA EN ALGUNA VECINDAD DE $\mathfrak{e}$ POR UNA SERIE REGULAR DE POTENCIAS EN EL PARÁMETRO UNIFORMIZANTE LOCAL t EN $\mathfrak{e}$.

$$f=a_0+a_1 t+a_2 t^2+\dots \quad , \qquad (2)$$

ESTA REPRESENTACIÓN no depende DEL PARÁMETRO LOCAL UNIFORMIZANTE PUESTO QUE, AL SER VÁLIDA EN ALGÚN PARÁMETRO LOCAL, ENTONCES f ADMITIRÁ EL MISMO TIPO DE REPRESENTACIÓN EN TÉRMINOS DE CUALESQUIERA OTRO PARÁMETRO UNIFORMIZANTE LOCAL; SIN EMBARGO DEBEMOS REMARCAR QUE LA REPRESENTACIÓN (2) SOLAMENTE ES VÁLIDA EN UNA VECINDAD DE $\mathfrak{e}$: LA DETERMINADA POR LA ELECCIÓN DEL PARÁMETRO t EN $\mathfrak{e}$.

SI EL DESARROLLO DE $z=P(t)$ EN LA EXPANSIÓN DEL ELEMENTO $\mathfrak{e}$ NO CONTIENE POTENCIAS NEGATIVAS DE t, EL TÉRMINO CONSTANTE INICIAL z_0 DEL DESARROLLO DEPENDERÁ SOLAMENTE DE $\mathfrak{e}$ Y NO DE LA REPRESENTACIÓN: LO DENOMINAREMOS el valor de la variable compleja z, en el punto $\mathfrak{e}$. EN EL CASO DE QUE EL DESARROLLO INICIE CON POTENCIAS NEGATIVAS DE t (ENTERAS), ANTERIORMENTE MOSTRAMOS QUE TAL SERÁ EL CASO PARA todas LAS POSIBLES REPRESENTACIONES DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN $\mathfrak{e}$: EN ESTE CASO EL VALOR DE z EN EL PUNTO $\mathfrak{e}$ ES IGUAL A ∞. ES DECIR: $z=P(t)$ y $u=Q(t)$ SON FUNCIONES UNIFORMES, REGULAR-ANALÍTICAS (definidas en la superficie G) SALVO EN PUNTOS AISLADOS EN LOS QUE z (y/o u) TOMAN EL VALOR ∞. (FUNCIONES MEROMORFAS EN LA SUPERFICIE, POR DEFINICIÓN)

¿DE QUÉ DEPENDIÓ ENTONCES EL QUE PUDIÉSEMOS HABLAR DE función Regular Analítica en la superficie? : DE LA ELECCIÓN DE PARÁMETROS LOCALES ADECUADOS: PARÁMETROS EN LOS QUE TODAS LAS PROPIEDADES locales DE LAS FUNCIONES EN EL PLANO SIGAN TENIENDO VALIDEZ EN ESTA FORMULACIÓN.

ES DECIR: EL TIPO DE FUNCIONES QUE PODREMOS TENER DEFINIDAS EN LA SUPERFICIE (CONTINUAS, DIFERENCIABLES O ANALÍTICAS) DEPENDERÁ DE LA ELECCIÓN DE LAS COORDENADAS LOCALES Y LA RESTRICCIÓN DE COORDENADAS LOCALES ADMISIBLES POR MEDIO DE UN grupo DE TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS.

NOS REFERIMOS A LO SIGUIENTE

DEFINICIÓN: DOS MAPEOS TOPOLÓGICOS ENTRE VARIEDADES M y M^* $F_i : U_i \subseteq M \longrightarrow W_i \subseteq M^*$, U_i y W_i ABIERTOS EN M y M^*, $(i=1,2)$ TALES QUE $F_i(p_0)=p_0^*$, $p_0 \in U_1 \cap U_2$, $p_0^* \in W_1 \cap W_2$ son localmente indistinguibles en p_0 SI EXISTE UNA VECINDAD V DE p_0, $V \subseteq U_1 \cap U_2$ EN LA QUE F_1 y F_2 COINCIDEN

LA DEFINICIÓN IMPLICA LA EXISTENCIA DE UNA VECINDAD $V^* \subseteq W_1 \cap W_2$ QUE HACE A F_1^{-1} y F_2^{-1} LOCALMENTE INDISTINGUIBLES.

DE MANERA NATURAL PODEMOS HABLAR DE LA COMPOSICIÓN DE MAPEOS LOCALMENTE INDISTINGUIBLES Y ES CLARO QUE SI TENEMOS DOS MAPEOS S y S^* QUE TIENE SENTIDO COMPONER ENTONCES LA SUSTITUCIÓN DE S y S^* POR MAPEOS LOCALMENTE INDISTINGUIBLES DARÁ LUGAR A UN MAPEO LOCALMENTE INDISTINGUIBLE A SS^*.

OBSERVA QUE DOS MAPEOS LOCALMENTE INDISTINGUIBLES ORIGINAN UN MAPEO localmente topológico entre M y M^* CON centro EN (p_0, p_0^*). CON ESTA NOTACIÓN ES CLARO QUÉ ES UN sistema local de coordenadas (x,y) en el punto p_0 DE LA SUPERFICIE M: ES UN MAPEO TOPOLÓGICO F DEFINIDO EN UN ABIERTO $U \subseteq M$ QUE CONTIENE A p_0 SOBRE UN ABIERTO U' DEL PLANO xy ∋ $F(p_0)=(0,0)\equiv 0$. El comportamiento de este mapeo en el centro $(p_0, 0)$ es relevante: SI REEMPLAZAMOS A F POR UN MAPEO LOCALMENTE IDÉNTICO EN $(p_0, 0)$ HABREMOS REEMPLAZADO A (x,y) POR UN SISTEMA COORDENADO LOCALMENTE IDÉNTICO, PUESTO QUE LA TRANSFORMACIÓN DE UN SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS (x,y) EN EL PUNTO p_0 A OTRO (x^*, y^*) DA LUGAR A UN MAPEO topológico $(x,y) \longleftrightarrow (x^*, y^*)$ CON CENTRO EN $(0,0)$.

ENTRE LOS GRUPOS Γ DE TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS LOCALMENTE TOPOLÓGICOS QUE DESEN AL CENTRO FIJO 0, PODEMOS CONSIDERAR LAS TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS

$$x^* = \phi(x,y) \quad , \quad y^* = \psi(x,y)$$

QUE SATISFAGAN

1. ϕ y ψ SON DE CLASE C^1 Y EL JACOBIANO $J = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}$ NO SE ANULE EN EL ORIGEN.
   UN CAMBIO DE COORDENADAS DIFERENCIABLE: POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA ES LOCALMENTE TOPOLÓGICO.

2. ϕ y ψ SON DE CLASE C^1 Y EL JACOBIANO ES positivo EN EL ORIGEN: EL GRUPO Γ^+ DE MAPEOS DIFERENCIABLES positivos.

3. CONSIDERA AHORA LA VARIABLE COMPLEJA $(x,y) = t = x+iy$. LA TRANSFORMACIÓN DADA AHORA POR LA SERIE

$$(*) \qquad t^* = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \quad (a_1 \neq 0)$$

CONVERGENTE EN ALGÚN DISCO $|t| < r$ ES CONFORME EN $t=0$. TALES TRANSFORMACIONES FORMAN UN GRUPO Γ^c QUE TAMBIÉN SATISFACE, EXPRESANDO LA TRANSFORMACIÓN $(*)$ EN SUS PARTES

REAL E IMAGINARIA x, y DE t y x^*, y^* DE t^*,

$$t^* = (x^*, y^*) = (\phi(x,y), \psi(x,y))$$

$$J|_0 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}(0) & \frac{\partial\psi}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(0) & \frac{\partial\psi}{\partial y}(0) \end{pmatrix} \overset{\det}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}(0) & -\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(0) & \frac{\partial\phi}{\partial x}(0) \end{pmatrix} = \left|\frac{dt^*}{dt}(0)\right|^2 = |a_1|^2 > 0$$

QUE Γ^c ES UN SUBGRUPO DE Γ^+

UNA CLASE ESPECIAL DE SUPERFICIES ESTÁ AHORA DETERMINADA POR UN GRUPO Γ DE TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS EN EL ORIGEN de la siguiente manera:

DEFINICIÓN: UNA CLASE DE SISTEMAS COORDENADOS LOCALES EN EL PUNTO p_0 DE LA SUPERFICIE M ES LLAMADO admisible SI CUALESQUIERA DOS ESTÁN RELACIONADOS POR UNA TRANSFORMACIÓN DEL GRUPO LOCAL Γ.

EL MEJOR PROCEDIMIENTO ES EL SIGUIENTE: PARA UN PUNTO ARBITRARIO p_0 EN LA SUPERFICIE ESCOGEMOS UN MAPEO TOPOLÓGICO DE UN ABIERTO DE LA SUPERFICIE QUE CONTENGA A p_0 SOBRE UN ABIERTO DEL PLANO xy QUE CONTENGA AL ORIGEN DE MODO QUE $p_0 \mapsto 0$, ENTONCES LOS SISTEMAS COORDENADOS EN p_0 SERÁN AQUELLOS QUE PUEDAN SER OBTENIDOS DE ÉSTE POR MEDIO DE UNA TRANSFORMACIÓN LOCAL (EN 0) DEL GRUPO Γ. CIERTAMENTE ESTO INCLUYE LA NECESIDAD DE QUE SI UN SISTEMA COORDENADO EN p_0 ES ADMISIBLE, ENTONCES CUALQUIER OTRO LOCALMENTE IDÉNTICO A ÉL EN $(p_0, 0)$ ES ADMISIBLE. MÁS AÚN, LA SIGUIENTE CONDICIÓN DEBE SATISFACERSE: SI (x,y) ES UN SISTEMA LOCAL ADMISIBLE EN p_0, ENTONCES EXISTE UNA vecindad asociada $\mathcal{U}_\varepsilon$, $x^2+y^2<\varepsilon^2$, DEL ORIGEN TAL QUE $x-x_1$, $y-y_1$ ES UN SISTEMA COORDENADO LOCAL ADMISIBLE EN EL PUNTO p_1 CORRESPONDIENTE A (x_1,y_1), SIEMPRE QUE $(x_1,y_1)\in \mathcal{U}_\varepsilon$. ESTO ES: QUE EL SISTEMA COORDENADO $x-x_1, y-y_1$ SE OBTIENE DEL SISTEMA COORDENADO ELEGIDO EN EL PUNTO p_1 MEDIANTE UNA TRANSFORMACIÓN DEL GRUPO Γ.

☎ OBSERVA QUE AL LLAMAR A LAS PREIMÁGENES DE TALES VECINDADES $\mathcal{U}_\varepsilon$ vecindades de p_0 en M ESTAMOS REEMPLAZANDO LAS VECINDADES POR LAS CUALES DEFINIMOS A M COMO UNA VARIEDAD TOPOLÓGICA POR UN CONJUNTO EQUIVALENTE DE VECINDADES: estamos pues en posición de llamar a $\mathcal{U}_\varepsilon$ una vecindad de p_0 en M

☎ TAMBIÉN HAY QUE DESTACAR QUE SI EL JACOBIANO DE UNA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE ES NO NULO (O POSITIVO) EN EL ORIGEN, ENTONCES TIENE ESA MISMA PROPIEDAD en una vecindad DEL ORIGEN.

A LAS SUPERFICIES DEL TIPO Γ = GRUPO DE MAPEOS DIFERENCIABLES LOCALES, Γ^+ = GRUPO DE MAPEOS DIFERENCIABLES POSITIVOS Y Γ^c = GRUPO DE MAPEOS LOCALMENTE CONFORMES SE LES LLAMA, RESPECTIVAMENTE SUPERFICIES SUAVES, SUPERFICIES SUAVES ORIENTADAS y SUPERFICIES DE RIEMANN.

DE DONDE SE DESPRENDE QUE:

- TODA SUPERFICIE DE RIEMANN ES UNA SUPERFICIE SUAVE ORIENTADA
- TODO SUBDOMINIO (ABIERTO CONEXO) DE UNA SUPERFICIE DE TIPO Γ ES UNA SUPERFICIE DE TIPO Γ

HAY QUE DESTACAR QUE EN NUESTRA ESCALA DE ESPECIALIZACIÓN SUPERFICIE TOPOLÓGICA → SUPERFICIE SUAVE → SUPERFICIE SUAVE ORIENTADA → SUPERFICIE DE RIEMANN SOLAMENTE EN LA primera etapa FUIMOS CAPACES DE CARACTERIZAR A LAS SUPERFICIES TOPOLÓGICAS (con el concepto de vecindad) POR SUS PROPIEDADES INTRÍNSECAS. ME REFIERO A QUE PARA EL ESTUDIO DE LAS SUBSECUENTES CLASES DE SUPERFICIES ESTAMOS FORZADOS A ELEGIR algún SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS (MEDIANTE LA ELECCIÓN DEL GRUPO Γ DE TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS) QUE ES A FINAL DE CUENTAS QUIEN BRINDA la estructura geométrica DE LA SUPERFICIE EN CUESTIÓN

DEBEMOS ENTONCES MOSTRAR CUÁLES CONCEPTOS REFERENTES AL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES (O CURVAS) DEFINIDAS EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SON INVARIANTES, ES DECIR INDEPENDIENTES, DEL SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS ELEGIDO.

§3.3. CONCEPTOS INVARIANTES REFERENTES A CURVAS Y FUNCIONES EN SUPERFICIES DE RIEMANN. FUNCIONES ENTRE SUPERFICIES DE RIEMANN. MAPEO CONFORME.

UNA FUNCIÓN $f(p)$ DEFINIDA EN UNA VECINDAD DE $p_0 \in M$, SUPERFICIE DE RIEMANN, SE DICE QUE ES CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE EN p_0 SI PUEDE SER EXPRESADA EN TÉRMINOS DE ALGÚN SISTEMA LOCAL ADMISIBLE DE COORDENADAS x Y y EN p_0 COMO UNA FUNCIÓN $f(x,y)$ CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE EN ALGUNA VECINDAD DEL ORIGEN. DEL MISMO MODO UNA FUNCIÓN COMPLEJO-VALUADA DEFINIDA EN UNA VECINDAD DE $p_0 \in M$, SUPERFICIE DE RIEMANN, ES REGULAR ANALÍTICA EN p_0 SI PUEDE SER EXPRESADA COMO UNA SERIE DE POTENCIAS

$$f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$$

EN TÉRMINOS DEL PARÁMETRO LOCAL t EN p_0, QUE CONVERJA EN ALGUNA VECINDAD DEL ORIGEN.

EN ESTOS TÉRMINOS ES CLARO LO QUE SE ENTIENDE PORQUE UNA FUNCIÓN EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SEA UNO, DOS, TRES, etc.- CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE.

OBSERVACIÓN: si la función es continuamente diferenciable en p_0 (regular analítica en p_0) entonces lo es también en una vecindad de p_0

DEFINICIÓN: SI $f(p)$ ES REGULAR EN p_0, t ES UN PARÁMETRO LOCAL EN p_0 Y EL DESARROLLO DE $f(p)$ EN POTENCIAS DE t INICIA CON EL TÉRMINO $a_m t^m$ ($a_m \neq 0$), DECIMOS QUE p_0 ES UN CERO DE ORDEN m DE $f(p)$

ANÁLOGAMENTE, SI EN ALGUNA VECINDAD DE p_0, EXCEPTO p_0 MISMO, LA FUNCIÓN $f(p)$ ADMITE UN DESARROLLO DEL TIPO

$$f = \frac{a_{-n}}{t^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \cdots \quad (a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

DECIMOS QUE $f(p)$ TIENE UN POLO DE ORDEN n EN p_0 O BIEN, QUE f TIENE ORDEN $-n$ EN p_0.

COMO CONSECUENCIA DIRECTA DE LA Regla de la Cadena del Orden (CF. CAPÍTULO) TENEMOS QUE:

1. LOS CONCEPTOS DE "CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE", "REGULAR ANALÍTICA", etc. SON INDEPENDIENTES DE LA ELECCIÓN DEL PARÁMETRO LOCAL
2. LO MISMO EL ORDEN DE UN CERO O DE UN POLO. (ES DECIR: SON CONCEPTOS EFECTIVAMENTE REFERENTES A LA FUNCIÓN Y NO A LA SUPERFICIE).

CUANDO f ES UNIFORME Y REGULAR ANALÍTICA EN UNA VECINDAD DE p_0, EXCEPTO EN p_0 MISMO ES CLARO (de la discusión de las propiedades locales de funciones en $\mathbb{C}$) QUE O BIEN PODEMOS EXTENDER ANALÍTICAMENTE f A p_0 (SING. REMOVIBLE), O f TIENE UN POLO EN p_0, O f TIENE UNA Singularidad Esencial en p_0. CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE WEIERSTRASS ES QUE, EN ESTE CASO, $f(p)$ SE ACERCA ARBITRARIAMENTE A CUALQUIER VALOR EN CUALQUIER VECINDAD DEL PUNTO p_0.

PROPOSICIÓN: SI z y u SON DOS FUNCIONES REGULARES EXCEPTO EN POLOS EN UN DOMINIO $\mathcal{U}$ DE UNA SUP. DE RIEMANN, ENTONCES CADA EXPRESIÓN RACIONAL $R(z,u)$ EN z y u (UN COCIENTE DE POLINOMIOS EN z y u) ES REGULAR ANALÍTICA EXCEPTO POR POLOS.

Demostración:

Sea $R(z,u) = F(z,u)/G(z,u)$, F y G polinomios en las variables z y u. La afirmación es obvia si R es un polinomio F: basta reemplazar en $F(z,u)$ a z y u por sus desarrollos en alguna variable uniformizante local en un punto del dominio y recordar el comportamiento del orden bajo el producto y suma de funciones complejas.

El resultado para el caso del cociente se sigue al considerar de nuevo la sustitución en términos del parámetro local de F/G, $f(t)/g(t)$ y observar que las únicas "nuevas" singularidades son los ceros de $g(t)$: POLOS y fuera de ellos el cociente es regular analítico.

El caso $G(z,u) \equiv 0$ debe ser desechado, a menos que consideremos la función constante $\equiv \infty$ como una función meromorfa en la sup. de Riemann. Por la teoría de Singularidades Removibles, con este caso excluido, aún si la sustitución directa de valores z y u resulta en una indeterminación $0/0$, extendiendo por continuidad podemos determinar una única extensión analítica de la función a tal valor. (Estamos ante una singularidad removible).

TODA LA DISCUSIÓN ANTERIOR SE REFIERE AL SENTIDO EN QUE UNA forma analítica PUEDE SER VISTA COMO UNA SUPERFICIE DE RIEMANN. SIN EMBARGO TALES CONCEPTOS NO SON IDÉNTICOS: CON UNA FORMA ANALÍTICA (z,u) ESTÁ DADA NO SOLAMENTE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN, SINO AL MISMO TIEMPO DOS FUNCIONES z y u definidas en la superficie, REGULARES EXCEPTO EN POLOS. MÁS AÚN, z y u SATISFACEN LA SIGUIENTE CONDICIÓN: NO EXISTEN UN PAR DE PUNTOS DISTINTOS p_1^0 y p_2^0 CON PARÁMETROS LOCALES t_1 y t_2 Y UN PAR DE SERIES DE POTENCIAS $P(t)$ y $Q(t)$ TALES QUE

$$
\begin{aligned}
z = P(t_1), \quad & u = Q(t_1) \quad \text{en una vecindad de } p_1^0 \\
z = P(t_2), \quad & u = Q(t_2) \quad \text{en una vecindad de } p_2^0
\end{aligned}
$$

ASÍ QUE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN ARBITRARIA SE CONVIERTE EN UNA FORMA ANALÍTICA SI LOGRAMOS UN PAR DE FUNCIONES z y u EN ELLA, REGULARES EXCEPTO POR POLOS, QUE SATISFAGAN LA CONDICIÓN RECIÉN FORMULADA (Y TAL QUE z NO SE REDUZCA A UNA CONSTANTE).

LA DEMOSTRACIÓN DE LA EXISTENCIA DE DOS FUNCIONES MEROMORFAS (z,u) EN CUALQUIER SUPERFICIE DE RIEMANN MOSTRARÍA LA EQUIVALENCIA DE LOS CONCEPTOS forma analítica y superficie de Riemann Y PUEDE ENCONTRARSE EN WEYL [ ]. NOSOTROS NOS CONFORMAREMOS CON EL CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN HASTA AHORA DESARROLLADO POR LA SIGUIENTE RAZÓN: OBSERVA QUE TAL PAR DE FUNCIONES PARAMETRIZAN A LA SUPERFICIE EN $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$ Y EL RESULTADO QUE PROPONE RESOLVER ESTE TRABAJO SERÁ UNA PARAMETRIZACIÓN DE CUALQUIER SUPERFICIE DE RIEMANN EN ALGÚN DOMINIO DE $\bar{\mathbb{C}}$, BIEN $\bar{\mathbb{C}}$ MISMO $\mathbb{C}$ Ó Δ. EN EL SIGUIENTE CAPÍTULO AGLUTINAREMOS TODOS LOS RESULTADOS HASTA AHORA TRATADOS EN NOTACIÓN ESPERO MÁS SENCILLA.

POR LO PRONTO, ANTES DE CONCLUIR ESTE CAPÍTULO VAMOS A MOSTRAR CON SENDOS EJEMPLOS UN PAR DE COSAS: PRIMERO, QUE LA EXISTENCIA DE LAS FUNCIONES (z,u) NO ES ÚNICA Y, SEGUNDO, UNA PREGUNTA (Y SU RESPUESTA) NATURAL QUE PODRÍA SURGIR CUANDO DISCUTIMOS LOS CONCEPTOS DE función y forma analítica: EN SU MOMENTO RESALTAMOS QUE EL PROCESO DE CONTINUACIÓN ANALÍTICA (QUE DESPUÉS SE AMPLIÓ AL DE cadena analítica AL HABLAR DE ELLA EN LAS formas analíticas) CONLLEVABA TODA LA TOPOLOGÍA DE LA AHORA LLAMADA Z-VARIEDAD: ¿ACASO NO HABREMOS SOLAMENTE EXPLOTADO LA TOPOLOGÍA? ES DECIR: ¡EXISTEN SUPERFICIES TOPOLÓGICAMENTE O AÚN DIFERENCIALMENTE EQUIVALENTES QUE NO SEAN conformemente equivalentes? CON LOS TOROS MOSTRAREMOS QUE SÍ LAS HAY (el moduli) Y ELLO ES UN CLARO EJEMPLO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS APLICACIONES CONFORMES: EN LAS PRIMERAS LÍNEAS DE ESTA TESIS DESTACAMOS QUE LA APLICACIÓN CONFORME ES AQUELLA QUE INFINITESIMALMENTE EXPANDE O CONTRAE EL ESPACIO EN LA MISMA RAZÓN en todas las direcciones. EN ESTE SENTIDO, EL FACTOR DE CONFORMALIDAD (la reparametrización) QUE APARECIÓ EN EL EJEMPLO DEL TORO ES AQUÉL QUE COMPENSA EN UNA DIRECCIÓN LA INVARIANZA DE LA OTRA.

ES ASÍ DE ESPERARSE QUE, SIENDO UN PAR DE TOROS DISTINTOS SENDOS RETICULADOS DEL PLANO, SÓLO PODREMOS LLEVAR UNO CONFORMEMENTE EN EL OTRO SI LOS RESPECTIVOS "CUADRADOS ELEMENTALES" SATISFACEN ALGUNA CONDICIÓN DE HOMOGENEIDAD. ESO MOSTRAREMOS.

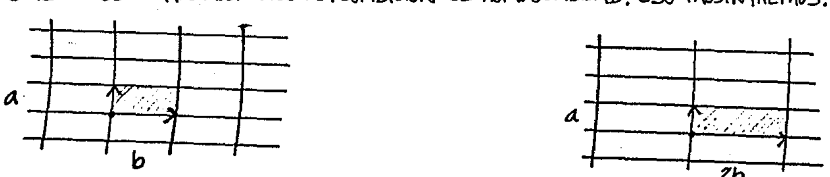


FIG. LA INTUICIÓN DICE QUE ESTE PAR DE RETICULADOS no generan toros conformemente equivalentes.

UNA CURVA $p=p(\lambda)$ con $0\leq\lambda\leq 1$ PUEDE REPRESENTARSE EN UNA VECINDAD DE CUALQUIER PUNTO $p_0=p(\lambda_0)$ DE LA CURVA EN LA FORMA $t=t(\lambda)$, DONDE t ES UN PARÁMETRO LOCAL EN p_0 QUE MAPEA UNA VECINDAD DE p_0 CONFORMEMENTE SOBRE UN DOMINIO DEL PLANO t. SI PARA $\lambda\in[0,1]$ SUFICIENTEMENTE CERCANO A λ_0, $t(\lambda)$ PUEDE SER EXPRESADO COMO UNA SERIE CONVERGENTE $b_1(\lambda-\lambda_0)+b_2(\lambda-\lambda_0)^2+\ldots$, CON $b_1=(dt/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0}\neq 0$, ENTONCES SE DICE QUE LA CURVA ES ANALÍTICA EN $\lambda=\lambda_0$

LA INVARIANZA RESPECTO AL PARÁMETRO LOCAL ES TRIVIAL: UTILIZANDO EL PARÁMETRO LOCAL τ DEFINIDO POR $t=b_1\tau+b_2\tau^2+\ldots$, UN ARCO DE LA CURVA QUE CONTENGA A $p(\lambda_0)$ APARECE COMO UN INTERVALO DEL EJE REAL EN EL PLANO τ

DEBEMOS ENTENDER POR curva analítica A UNA CURVA QUE ES ANALÍTICA EN CADA VALOR DEL PARÁMETRO EN $[0,1]$.

DEFINIMOS EL ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS EN M, SUP. DE RIEMANN, COMO EL ÁNGULO ENTRE LAS RESPECTIVAS IMÁGENES BAJO ALGÚN PARÁMETRO LOCAL, EN EL PLANO t. POR SER CONFORMES LOS CAMBIOS DE COORDENADAS, ESTE ÁNGULO ES INDEPENDIENTE DE ESTOS.

SI M y M' SON DOS SUPERFICIES DE RIEMANN, UN MAPEO UNO A UNO $M\rightleftarrows M'$ SE LLAMARÁ Conforme si es localmente conforme en todo punto. DOS SUPS. DE RIEMANN QUE PUEDEN SER MAPEADAS CONFORMEMENTE UNA SOBRE LA OTRA SE DIRÁN Conformemente Equivalentes y deberán pensarse como dos representaciones de una y la misma superficie de Riemann ideal. LAS PROPIEDADES INTRÍNSECAS DE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN INCLUIRÁN SOLAMENTE AQUELLAS PROPIEDADES QUE SEAN INVARIANTES BAJO MAPEO CONFORME, esto es, aquellas propiedades que, si posee una sup. de Riemann, poseerán todas las EQUIVALENTES.

§34 UN APERITIVO EN TEORÍA DE FUNCIONES EN SUPERFICIES DE RIEMANN. DOS PARES DE MEROMORFAS DISTINTOS EN $\mathbb{C}$ Y TOROS CONFORMEMENTE EQUIVALENTES (moduli).

EN EL CAPÍTULO I MOSTRAMOS QUE LA ESFERA PUEDE SER CUBIERTA POR SENDAS COPIAS DEL PLANO VÍA LAS PROYECCIONES ESTEREOGRÁFICAS Y, DE OTRA MANERA, CON AUXILIO DE LA IDENTIDAD EN $\mathbb{C}$: z Y DE $1/z$ EN CIERTAS REGIONES DE $\mathbb{C}$. MÁS ADELANTE EXTENDEREMOS NUESTROS CONCEPTOS DE SUPERFICIE DE RIEMANN Y MAPEO CONFORME PARA ESTE TIPO DE PARAMETRIZACIONES (BASADAS EN DOMINIOS MÁS AMPLIOS QUE EL DISCO UNITARIO). SABEMOS TAMBIÉN DEL CAPÍTULO QUE TODA FUNCIÓN REGULAR ANALÍTICA EN LA ESFERA ES UNA TRANSFORMACIÓN RACIONAL ASÍ QUE CONOCEMOS LA TEORÍA DE FUNCIONES EN LA ESFERA: LAS FUNCIONES RACIONALES EN UNA VARIABLE z. SI DESEAMOS UNA ELECCIÓN DISTINTA DE ESTA VARIABLE INDEPENDIENTE ESTAREMOS ENTONCES CONDENADOS A ELEGIR UNA DEL TIPO

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}\ ;\quad a,b,c,d \text{ constantes};\ ad-bc\neq 0$$

PUES DEBE TENER sólo UN CERO Y UN POLO.

EL CASO DEL TORO DISTA MUCHO DE SER TAN SENCILLO. LA RAZÓN DE FONDO ES TOPOLÓGICA: EN EL TORO EXISTEN SENDAS CURVAS ($\phi=0$ y $\psi=0$ en la notación del capítulo §5) CERRADAS QUE SE CORTAN EN UN PUNTO Y QUE NO SEPARAN AL TORO. TAL PAR NO EXISTE EN LA ESFERA (ver más adelante SUPERFICIES CUBRIENTES Y GRUPO FUNDAMENTAL). SI MAPEAMOS EL TORO CONFORMEMENTE SOBRE LA VARIEDAD $\mathfrak{X}$ DEL CAPÍTULO §5 ENTONCES LAS FUNCIONES EN EL TORO SIN SINGULARIDADES ESENCIALES APARECEN COMO FUNCIONES UNIFORMES EN LA VARIABLE COMPLEJA $w=\phi+i\psi$ REGULARES SALVO POLOS Y DOBLEMENTE PERIÓDICAS CON PERIODOS 2π y $2\pi i r(R^2-r^2)^{-1/2}$ [LAS LLAMADAS FUNCIONES ELÍPTICAS DE LAS QUE NOS OCUPAREMOS EN , CON RAZÓN ENTRE LOS PERIODOS $= ir(R^2-r^2)^{-1/2}$].

CIERTAMENTE DOS TOROS SIEMPRE SON TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES, SIN EMBARGO:

TEOREMA: DOS TOROS $T(R_1,r_1)$ y $T(R_2,r_2)$ SON CONFORMEMENTE EQUIVALENTES $\Leftrightarrow$ EL VALOR DEL "MÓDULO" $rR^{-2}(R^2-r^2)^{1/2}$ ES EL MISMO PARA AMBOS.

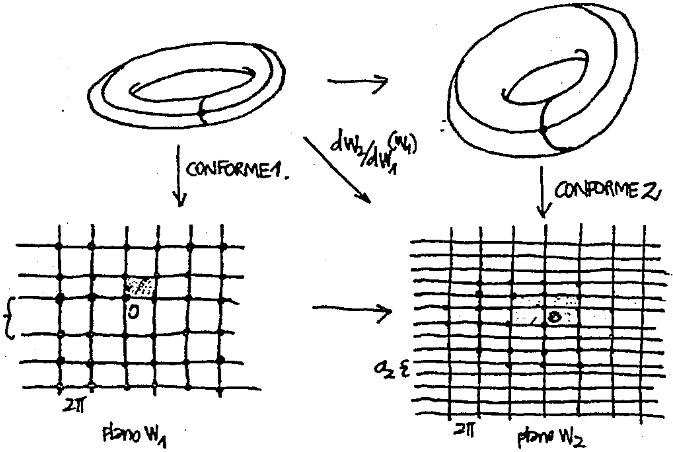
Demostración:

SEAN los puntos de un toro representados por las latices de puntos en el plano W_1 con periodos 2π y $2\pi i a_1 = 2\pi i / (r_1(R_1^2-r_1^2)^{-1/2})$. Sean los puntos del segundo toro las latices de puntos en el plano W_2 con periodos 2π y $2\pi i a_2$ $(a_2>0)$.

SI EXISTE UN MAPEO CONFORME DE UN TORO SOBRE EL OTRO, ENTONCES a cada W_1-latiz corresponderá una W_2-latiz de tal manera que si la latiz W_1 sufre un desplazamiento infinitesimal dW_1, entonces la latiz imagen W_2 sufrirá un desplazamiento infinitesimal dW_2 tal que la razón dW_1/dW_2 DEPENDE SOLAMENTE DE LA LATIZ W_1 Y NO DE LA DIRECCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO dW_1 (VER SECCIÓN Funciones Analíticas y Mapeo Conforme). COMO UNA FUNCIÓN DE LA LATIZ W_1 ESTA RAZÓN ES UNA FUNCIÓN REGULAR ANALÍTICA EN EL PRIMER TORO, ASÍ QUE DEBE SER UNA CONSTANTE A, ENTONCES EL MAPEO DEBE ESTAR DADO POR

$$W_2 = AW_1 + B \qquad (A, B \text{ constantes}) \qquad \dots (1)$$

en el sentido de que, al sustituir en (1) todos los puntos de UNA W_1-latiz, uno obtendrá todos los puntos en la correspondiente W_2-latiz.



OBSERVEMOS QUE LA CLASE DEL $(0,0)$ EN W_1 SE MAPEA EN LA CLASE DE B, EN W_2 Y LAS LATICES SON, COMO EN LA FIGURA, "CUADRICULADOS PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS". ASÍ ES QUE LA ÚNICA POSIBILIDAD DE QUE UN W_1-"RECTÁNGULO FUNDAMENTAL"* VAYA EN EL CORRESPONDIENTE W_2-"RECTÁNGULO FUNDAMENTAL"* ES QUE

$$A = \pm 1 \quad \text{ó} \quad A = \pm i/a_1$$

EN COORDENADAS, LA CONDICIÓN DE QUE LA CLASE DEL W_1-$(0,0)$ SE MAPEE EN LA CLASE W_2-B, $B = b_1 + i b_2$, SE EXPRESA COMO

$$2\pi n + i(2\pi m a_1) \longmapsto b_1 + 2\pi n' + i(b_2 + 2\pi m' a_2) \qquad \forall m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$$

ASÍ ES QUE SI $A = \pm 1$, ENTONCES

$$b_1 + 2\pi n' + i(b_2 + 2\pi m' a_2) = \pm 2\pi n + b_1 + i(b_2 \pm 2\pi m a_1)$$

$$\Leftrightarrow m' a_2 = \pm m a_1 \quad \forall m, m' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow a_2 = a_1$$

MIENTRAS QUE SI $A=\pm i a_1$, ENTONCES

$$b_1+2\pi n'+i(b_2+2\pi m' a_2)=\pm 2\pi m+b_1\pm i\left(\frac{2\pi n}{a_1}+b_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm n' & \forall m,n'\in\mathbb{Z} \\ 2\pi m' a_2=\pm 2\pi n/a_1 \Leftrightarrow m' a_2=\pm n/a_1 & \forall m',n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_2=1/a_1$$

EN CUALQUIER CASO,

LEMA: AMBOS TOROS SON CONFORMEMENTE EQUIVALENTES $\Leftrightarrow a_1+1/a_1=a_2+1/a_2$

Demostración:

$\Rightarrow]$ Es lo que hemos estado desarrollando: los dos posibles valores de a_1 y a_2 encontrados satisfacen esta ecuación.

$\Leftarrow]$ $a_1+1/a_1=a_2+1/a_2 \Leftrightarrow a_1-a_2=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{a_1-a_2}{a_2a_1}$

así es que si $a_1-a_2\neq 0 \Rightarrow 1=1/a_2a_1 \Leftrightarrow a_1=1/a_2$

mientras que si $a_1-a_2=0 \Rightarrow a_1=a_2$

y ambas condiciones implican la existencia del mapeo conforme, lo que coincide con nuestra afirmación inicial, puesto que

$$\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}+\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}=\frac{R^2}{r\sqrt{R^2-r^2}}$$

+.

HASTA ESTE MOMENTO NOS HEMOS OCUPADO DEL COMPORTAMIENTO local DE FUNCIONES DEFINIDAS YA EN EL PLANO, YA EN UNA SUPERFICIE SEA CUAL SEA SU estructura (TOPOLÓGICA, DIFERENCIABLE O ANALÍTICA). PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES GLOBALES EN SUPERFICIES, ANTES DE PREOCUPARNOS EXPLÍCITAMENTE DE ELLAS DEBEMOS DEFINIR LA SUPERFICIE QUE SERVIRÁ DE DOMINIO A LA VARIABLE INDEPENDIENTE, DESPUÉS DEBEMOS ESTIPULAR LO QUE "FUNCIÓN ANALÍTICA" SIGNIFIQUE EN ESTA SUPERFICIE, DE TAL FORMA QUE LA SUPERFICIE SEA UNA Superficie de Riemann (i.e.: debemos dotarla de lo que llamaremos una ESTRUCTURA ANALÍTICA). SÓLO HASTA ENTONCES PODREMOS OCUPARNOS DE LAS FUNCIONES EN SÍ. EN EL CONTEXTO DE FUNCIONES ANALÍTICAS, PODEMOS BUSCAR LA CLASIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES QUE ESTUDIEMOS, DE ACUERDO A SU INVARIANZA BAJO MAPEOS TOPOLÓGICOS, DIFERENCIABLES O (COMO EN EL CASO DEL MÓDULO) SÓLO BAJO MAPEOS CONFORMES Y SÓLO EN ESTE PASO COMENZAREMOS POR DISTINGUIR AQUELLAS PROPIEDADES EN QUE FUNCIONES DEFINIDAS EN LA MISMA SUPERFICIE DE RIEMANN DIFIEREN (TALES COMO LA POSICIÓN Y ORDEN DE CEROS Y POLOS).

COMO YA HEMOS VENIDO HACIENDO, LLAMAREMOS Funciones en la Superficie a las Funciones Regulares excepto en polos, también llamadas MEROMORFAS, AUNQUE CIERTAMENTE PODEMOS CONSIDERAR TAMBIÉN UNA CLASE MÁS GENERAL DE FUNCIONES: PARAFRASEANDO LA SITUACIÓN DEL CAPÍTULO §1, PODRÍAMOS INICIAR CON UN ELEMENTO DE FUNCIÓN EN M: UNA SERIE DE POTENCIAS EN UN PARÁMETRO LOCAL t ALREDEDOR DE p_0, Y "CONTINUARLO ANALÍTICAMENTE" A LO LARGO DE TODAS LAS POSIBLES TRAYECTORIAS EN M POR p_0. SUPONGAMOS POR EL MOMENTO QUE EN EL DESARROLLO DE ESTE PROCESO NO ENCONTRAREMOS PUNTOS EN QUE LA CONTINUACIÓN SEA MULTIVALUADA (RAMIFICACIÓN RESPECTO A M), NI "FRONTERAS NATURALES" (PUNTOS A TRAVÉS DE LOS CUALES LA CONTINUACIÓN SEA IMPOSIBLE) SINO, EN EL PEOR CASO, POLOS: COMO EN EL EJEMPLO $W=\phi+i\psi$ EN EL TORO LA FUNCIÓN RESULTANTE NO TIENE POR QUÉ SER UNIFORME, ASÍ ES QUE EN LO QUE VIENE NOS DEDICAREMOS A LA CONSTRUCCIÓN DE UNA NUEVA SUPERFICIE DE RIEMANN M^* ÍNTIMAMENTE RELACIONADA CON M EN LA QUE ESTA NUEVA CLASE DE FUNCIONES EN M APAREZCAN EN M^* COMO FUNCIONES UNIFORMES.

TAL ES LA IMPORTANCIA DE LAS Superficies Cubrientes asociadas a cada superficie M.

IV

Cubrientes

— LA CRUZ DEL BIZCOCHO ES EL APÓSTROFE

FRANK ZAPPA

§4. SUPERFICIES CUBRIENTES VS. SUPERFICIES DE RIEMANN

EN NOTACIÓN Y LENGUAJE CONTEMPORÁNEO PODEMOS RESUMIR EL CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN DEL SIGUIENTE MODO:

DEF'N: (*) UNA SUPERFICIE DE RIEMANN ES UN ESPACIO TOPOLÓGICO CONEXO, DE HAUSDORFF W, JUNTO CON UNA COLECCIÓN DE CARTAS $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ QUE SATISFACEN:

1. LOS U_α FORMAN UNA CUBIERTA ABIERTA DE W
2. CADA z_α ES UN HOMEOMORFISMO DE U_α SOBRE UN SUBCONJUNTO ABIERTO DEL PLANO COMPLEJO $\mathbb{C}$
3. SI $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, ENTONCES $z_{\alpha\beta} = z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ ES HOLOMORFA (COMPLEJO-ANALÍTICA) EN $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ SOBRE $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

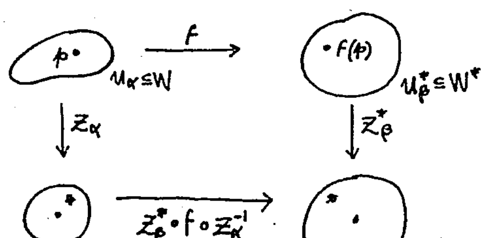
→ DECIMOS QUE EL SISTEMA $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ <u>DEFINE</u> UNA estructura conforme EN W PUES, SEGÚN DISCUTIMOS, ES LA MÍNIMA ESTRUCTURA GEOMÉTRICA QUE NOS PERMITE HABLAR DE FUNCIONES HOLOMORFAS EN LA SUPERFICIE DE RIEMANN. SEGÚN MOSTRAMOS CON LA ESFERA DE RIEMANN, ELLA ADMITE AL MENOS DOS SISTEMAS DE CARTAS DISTINTOS PERO ELLOS DEFINEN LA MISMA ESTRUCTURA CONFORME; EMPERO, NO SIEMPRE ES TAL EL CASO. CUANDO ESTÉ SOBREENTENDIDO A QUÉ ESTRUCTURA CONFORME NOS REFERIMOS, HABLAREMOS SIMPLEMENTE DE LA SUPERFICIE DE RIEMANN W.

→ LA TOPOLOGÍA DE W ESTÁ COMPLETAMENTE DETERMINADA POR LOS MAPEOS z_α, OBSERVA QUE UNA FORMA ALTERNATIVA DE DEFINIRLA SERÍA EL REQUERIR QUE LOS MAPEOS z_α SEAN BIYECCIONES Y QUE LOS CONJUNTOS $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ SEAN ABIERTOS (UNA BIYECCIÓN CONTINUA Y ABIERTA ES UN HOMEOMORFISMO). DE ESTE MODO LOS SUBCONJUNTOS ABIERTOS DE W ESTÁN GENERADOS POR LAS IMÁGENES INVERSAS DE ABIERTOS DE $\mathbb{C}$.

→ EN EL PROCESO DE ESPECIALIZACIÓN DE SUPERFICIES TOPOLÓGICAS A SUPERFICIES DE RIEMANN DISCUTIMOS LA INVARIANZA DEL VALOR $z_\alpha(p)$, $p \in U_\alpha \subseteq W$, ES DECIR, UN PUNTO $p \in W$ ESTÁ unívocamente determinado POR EL VALOR $z_\alpha(p)$; LLAMAREMOS PUES A z_α UNA variable local o un parámetro local E IDENTIFICAREMOS A $z(p)$ CON z: EN PARTICULAR $\Delta_\rho = \{z : |z - z_0| < \rho\}$ PUEDE REFERIRSE A UN DISCO EN $\mathbb{C}$ O A SU PREIMAGEN EN W. ESTA IDENTIFICACIÓN DE UN PUNTO EN LA SUPERFICIE DE RIEMANN CON el CORRESPONDIENTE VALOR DE una VARIABLE LOCAL MOSTRÓ QUE NO CONLLEVA PROBLEMA ALGUNO siempre que estemos tratando con conceptos invariantes bajo mapeo conforme, algunos de los cuales fueron discutidos en §3.2

→ LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN ENTRE SUPERFICIES DE RIEMANN ESTÁN DEFINIDAS DEL SIGUIENTE MODO:

SI W y W^* SON SUPERFICIES DE RIEMANN CON LAS CARTAS $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ y $\{U_\alpha^*, z_\alpha^*\}$ RESPECTIVAMENTE, UNA FUNCIÓN $f: W \to W^*$ SERÁ DIFERENCIABLE O ANALÍTICA EN $p \in W$ SI EN LOS PARÁMETROS LOCALES CORRESPONDIENTES $z_\beta^* \circ f \circ z_\alpha^{-1}$ TIENE LA PROPIEDAD, DONDE DEFINIDA. (ver figura siguiente).



(*): OMITIMOS EL 2o. AXIOMA DE NUMERABILIDAD.

§4.1 EL PROBLEMA A RESOLVER. INTRODUCCIÓN A LA HERRAMIENTA.

EN SU MOMENTO RESALTAMOS QUE LO QUE AHORA LLAMAMOS SUPERFICIE DE RIEMANN SERÍA CLARAMENTE VISUALIZADO COMO UNA SUPERFICIE EN EL ESPACIO QUE CONSTA DE PUNTOS QUE REPRESENTAN ELEMENTOS DE FUNCIÓN DE LA FORMA ANALÍTICA DADA, DE MANERA QUE LAS CADENAS ANALÍTICAS DE ELEMENTOS DE LA FORMA APARECIESEN COMO CURVAS CONTINUAS EN LA SUPERFICIE. PARA FORMALIZAR ESTA IDEA INTUITIVA FUE NECESARIO RECURRIR A LOS CONCEPTOS DE 2-VARIEDADES TOPOLÓGICA, DIFERENCIABLE Y, POR ÚLTIMO, ANALÍTICA O SUPERFICIE DE RIEMANN. DESEAMOS AHORA CONSIDERAR FUNCIONES DEFINIDAS EN LA SUPERFICIE DE RIEMANN MEDIANTE CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE UN ELEMENTO DE FUNCIÓN DADO EN LA SUPERFICIE DE RIEMANN (UNA SERIE DE POTENCIAS ENTERAS EN UN PARÁMETRO LOCAL t EN UN PUNTO P_0 DE LA SUPERFICIE W, EN LA FORMULACIÓN ORIGINAL) AHORA A LO LARGO DE CURVAS EN W, EN UNA FORMA ANÁLOGA A LO HECHO EN §1; EN AQUÉL CONTEXTO, AL CONTINUAR UN ELEMENTO DE FUNCIÓN EN EL PLANO DESPLEGAMOS UNA NUEVA SUPERFICIE QUE, EN EL CASO PARTICULAR DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA (EN EL SENTIDO DE WEIERSTRASS) RESULTABA SER UN DOMINIO ADECUADO PARA DEFINIR DE MANERA UNIFORME DICHA FUNCIÓN. VOLVIENDO A LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA EN LA SUPERFICIE DE RIEMANN ESPERAMOS ENTONCES OBTENER UNA NUEVA SUPERFICIE W^* DESPLEGADA SOBRE W A LA QUE DE MANERA AHORA NATURAL DOTAREMOS DE UNA ESTRUCTURA CONFORME HACIÉNDOLA UNA NUEVA SUPERFICIE DE RIEMANN, PUDIENDO HABLAR ENTONCES DE LA FUNCIÓN ORIGINAL DEFINIDA AHORA EN W^*.

¿RESULTARÁ SER UNIFORME LA "NUEVA" FUNCIÓN EN W^*? LA RESPUESTA ES SÍ (!), SIEMPRE Y CUANDO W^* NO TENGA fronteras ni ramificaciones ante el proceso de continuación analítica: DEBEN SATISFACERSE A LO LARGO DEL PROCESO DE CONTINUACIÓN ANALÍTICA LAS SIGUIENTES DOS CONDICIONES:

(i) QUE LA CONTINUACIÓN SIEMPRE EXISTA Y SEA ÚNICA A LO LARGO DE TODA CURVA

(ii) QUE NUNCA TOPEMOS CON OTROS PUNTOS SINGULARES SALVO POLOS ORDINARIOS, PARA QUE LA CONTINUACIÓN NO RESULTE RAMIFICADA RESPECTO A W^*.

W^* SE LLAMARÁ UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE W. EN LO QUE SIGUE BUSCAREMOS CONDICIONES PARA PODER SATISFACER (i) y (ii), Y MUCHO MÁS. OBSERVEMOS QUE DE ACUERDO A LAS PRIMERAS LÍNEAS DE ESTE CAPÍTULO EL PROBLEMA DE "LEVANTAR" FUNCIONES DE W A W^* ES UN PROBLEMA DE LEVANTAR CURVAS CONTINUAS DE W A W^* Y QUE LA UNIFORMIDAD DE LA FUNCIÓN LEVANTADA DEPENDE DE LA HOMOTOPÍA DE LA NUEVA CURVA. ESTAS IDEAS SERÁN PRECISADAS EN SU MOMENTO CON RIGOR.

ENUNCIAMOS AHORA <u>EL PROBLEMA GENERAL DE UNIFORMIZACIÓN</u>. SEA S UNA SUPERFICIE DE RIEMANN. ENCUENTRA TODOS LOS DOMINIOS $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ Y FUNCIONES HOLOMORFAS $t: D \to S$ TALES QUE EN CADA PUNTO $p \in S$, t SEA UNA VARIABLE UNIFORMIZANTE LOCAL EN p.

EN OTRAS PALABRAS: EXISTE UN DISCO TOPOLÓGICO $B \subseteq S$ CON CENTRO EN p TAL QUE LA RESTRICCIÓN DE t A CADA COMPONENTE DE $t^{-1}(B)$ ES UN HOMEOMORFISMO. **POR DEFINICIÓN**, SIEMPRE QUE TENGAMOS ESTA SITUACIÓN LLAMAREMOS AL PAR (D, t) UNA SUPERFICIE CUBRIENTE COMPLETA DE (O SOBRE) S.

MOSTRAREMOS LA EXISTENCIA DE UNA SUPERFICIE CUBRIENTE (HASTA ISOMORFISMO) QUE SERVIRÁ COMO SUPERFICIE CUBRIENTE DE TODA OTRA SUPERFICIE CUBRIENTE DE S: LA CUBRIENTE UNIVERSAL QUE RESULTARÁ SER SIMPLEMENTE CONEXA Y HEREDARÁ DE S UNA ESTRUCTURA CONFORME QUE LA CONVERTIRÁ EN SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA. SE SIGUE QUE PODEMOS OBTENER UNA SOLUCIÓN AL PROBLEMA GENERAL DE UNIFORMIZACIÓN MOSTRANDO QUE TODA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA ES CONFORMEMENTE (O BIHOLOMÓRFICAMENTE) EQUIVALENTE A ALGÚN SUBDOMINIO DE $\hat{\mathbb{C}}$, ES DECIR, RESOLVEREMOS EL PROBLEMA SI PODEMOS MOSTRAR QUE

TODA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE O BIEN A $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ O A Δ (EL DISCO UNITARIO)

ES DECIR, SI PODEMOS PROBAR EL ENUNCIADO AHORA CONOCIDO COMO EL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN.

ASÍ QUE NOS DEDICAREMOS AHORA A LAS POSIBLES SUPERFICIES CUBRIENTES ASOCIADAS A UNA SUPERFICIE DADA. TODA LA FORMULACIÓN QUE SIGUE SERÁ VÁLIDA INCLUSO EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS CONEXOS POR ARCOS Y LOCALMENTE CONEXOS POR ARCOS ARBITRARIOS, AUNQUE NO SATISFAGAN AXIOMA DE SEPARACIÓN ALGUNO. SIN EMBARGO Y FIELES A NUESTRO CONTEXTO LOS ENUNCIAREMOS PARA SUPERFICIES. EN PARTICULAR NO SUPONDREMOS EL AXIOMA DE SEPARABILIDAD (BASE NUMERABLE DE LA TOPOLOGÍA) PARA LAS SUPERFICIES A CONSIDERAR: APARECERÁ COMO CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN (HEREDADO DE LAS POSIBLES CUBIERTAS UNIVERSALES) QUE TODA SUPERFICIE DE RIEMANN LO SATISFACE.

DEFINICIÓN : Sean W y $\bar{W}$ superficies y $p: \bar{W} \to W$ un mapeo. Recordemos que p es un HOMEOMORFISMO LOCAL si todo punto en $\bar{W}$ posee una vecindad $\bar{V}$ tal que la restricción de p a $\bar{V}$ es un homeomorfismo. Cuando esto sucede decimos que el par $(\bar{W}, p)$ es una SUPERFICIE CUBRIENTE DE W. Al mapeo p suele llamársele LA PROYECCIÓN: si $w = f(\bar{w})$ DIREMOS QUE $\bar{w}$ ESTÁ SOBRE w. (OBSERVA QUE $p: \bar{W} \to W$ ES CONTINUA).

ESTAMOS INTERESADOS EN UN TIPO ESPECIAL DE CUBRIENTES: ELLAS DEBEN SATISFACER LA SIGUIENTE CONDICIÓN: CADA $w \in W$ POSEE UNA VECINDAD (CONEXA POR ARCOS) ABIERTA $\mathcal{U}$ TAL QUE CADA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(\mathcal{U})$ ES MAPEADA TOPOLÓGICAMENTE SOBRE $\mathcal{U}$ POR p. A LA VECINDAD DISTINGUIDA $\mathcal{U}$ LA LLAMAREMOS UNA Vecindad Elemental O Vecindad Parejamente Cubierta (Evenly covered neighborhood) Y A LA CUBRIENTE $\bar{W}$ CON ESTA PROPIEDAD LA LLAMAREMOS UNA Superficie Cubriente Completa de W.

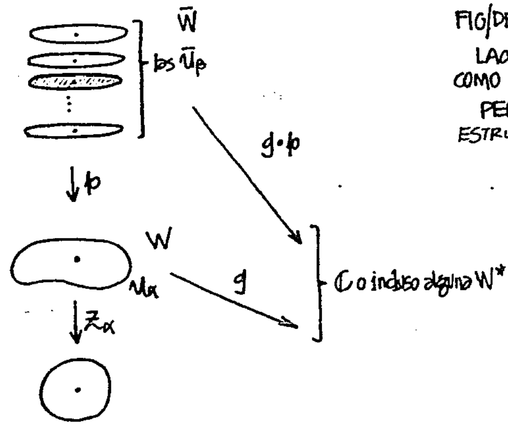
<u>EN ADELANTE TODAS LAS SUPERFICIES CUBRIENTES QUE CONSIDEREMOS SERÁN COMPLETAS, A MENOS QUE DIGAMOS EXPLÍCITAMENTE LO CONTRARIO.</u>

EL SIGUIENTE RESULTADO INMEDIATO PROVEE UNA FÁBRICA DE EJEMPLOS DE SUPERFICIES CUBRIENTES:

LEMA : SI $(\bar{W}, p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE W, A ES UN SUBESPACIO DE W QUE ES CONEXO POR ARCOS Y LOCALMENTE CONEXO POR ARCOS Y $\bar{A}$ ES UNA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(A)$, ENTONCES $(\bar{A}, p|_{\bar{A}})$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE A.

EN EL CASO EN QUE W SEA UNA SUPERFICIE DE RIEMANN CON LAS CARTAS $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ PODEMOS DOTAR A $\bar{W}$ DE UNA ÚNICA ESTRUCTURA COMPLEJA QUE HAGA DEL MAPEO $p: \bar{W} \to W$ COMPLEJO ANALÍTICO: EXIJAMOS A LAS CARTAS $\{\bar{U}_\beta, \bar{z}_\beta\}$ EL QUE p SEA 1-1 EN $\bar{U}_\beta$ Y LAS FUNCIONES $z_\alpha \circ p \circ \bar{z}_\beta^{-1}$ COMPLEJO ANALÍTICAS DONDEQUIERA QUE ESTÉN DEFINIDAS. ESTA ESTRUCTURA, INFORMALMENTE HABLANDO, ES AQUELLA QUE HACE A CADA MAPEO $g \circ p$ ANALÍTICO EN $\bar{W}$ SIEMPRE QUE g LO SEA EN W. (ver figura siguiente).

OBSERVA QUE ENTRE SUPERFICIES DE RIEMANN EXISTEN MAPEOS $p: \bar{W} \to W$ COMPLEJO-ANALÍTICOS QUE NO SON LOCALMENTE 1 a 1. SI TAL ES EL CASO, $(\bar{W}, p)$ DEBE LLAMARSE UNA <u>Superficie Cubriente Ramificada</u> contrario a las superficies cubrientes ordinarias a las que llamaremos <u>suaves</u>. POR EJEMPLO, LAS SUPERFICIES DE RIEMANN ASOCIADAS A $\sqrt{z}$ y $\log z$ SON CUBRIENTES RAMIFICADAS DE $\mathbb{C}$ -no ramificadas en $\mathbb{C} - \{0\}$-.



FIG/DEM: POR SIMPLICIDAD, SI $g: W \to \mathbb{C}$

LA COMPOSICIÓN CON p ESTÁ DEFINIDA, LOCALMENTE COMO $(g \circ p)\tilde{Z}_\beta^{-1}: U_\beta^* \longrightarrow g(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}$

PERO LA ELECCIÓN DE LAS CARTAS LOCALES (DE LA ESTRUCTURA CONFORME) DE $\tilde{W}$ DICE QUE

$p \circ \tilde{Z}_\beta^{-1} = Z_\alpha^{-1}$ PARA ALGÚN α.

luego, $(g \circ p)\tilde{Z}_\beta^{-1} = g Z_\alpha^{-1}$ QUE ES HOLOMORFA SIEMPRE que g LO SEA.

SON DOS LOS PROBLEMAS QUE BUSCAMOS RESOLVER:

1. ENCONTRAR CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE DOS SUPERFICIES CUBRIENTES SEAN ISOMORFAS (POR DEFINICIÓN, $(\tilde{W}_1, p_1)$ y $(\tilde{W}_2, p_2)$ SON CUBRIENTES ISOMORFAS DE W SI EXISTE UN HOMEOMORFISMO $h: \tilde{W}_1 \to \tilde{W}_2$ $\ni$. $p_2 h = p_1$).

2. DADA UNA SUPERFICIE W DETERMINAR HASTA ISOMORFISMO TODAS LAS POSIBLES SUPERFICIES CUBRIENTES DE ELLA

ESTAS PREGUNTAS TIENEN RESPUESTAS RAZONABLES EN TÉRMINOS DE LOS Grupos Fundamentales DE LOS ESPACIOS INVOLUCRADOS, SEGÚN VEREMOS.

§ 4.2 LEVANTAMIENTO DE CURVAS A SUPERFICIES CUBRIENTES

SI $(\tilde{W}, p)$ ES UNA SUP. CUBRIENTE DE W y $g: I \to \tilde{W}$ ES UNA CURVA CONTINUA EN $\tilde{W}$, ENTONCES pg ES UNA CURVA CONTINUA EN W. MÁS AÚN: SI DOS CURVAS $g_1, g_0: I \to \tilde{W}$ SON CONTINUAS Y $g_0 \sim g_1$, POR CONTINUIDAD PODEMOS LLEVAR LA DEFORMACIÓN DE g_0 A g_1 Y CONCLUIR QUE $pg_0 \sim pg_1$. ¿QUÉ PASA CON LOS RECÍPROCOS DE ESTAS DOS OBSERVACIONES? ¿SERÁ CIERTO QUE DADA UNA CURVA $f: I \to W$ SIEMPRE EXISTIRÁ UNA ÚNICA $g: I \to \tilde{W}$ TAL QUE $pg = f$? POR OTRO LADO: SI $g_0, g_1: I \to \tilde{W}$ y $pg_0 \sim pg_1$ ¿SE SIGUE QUE $g_0 \sim g_1$? LA RESPUESTA ES AFIRMATIVA EN AMBOS CASOS. A LA CURVA $g: I \to \tilde{W}$ DE LA PRIMERA PREGUNTA SE LE LLAMA <u>EL LEVANTAMIENTO DE f A $\tilde{W}$</u>. LA TERMINOLOGÍA LA JUSTIFICA EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO

$$\begin{tikzcd} & \tilde{W} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "¿g?"] \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

LA SEGUNDA PREGUNTA TIENE SU RESPUESTA EN EL TEOREMA DE LEVANTAMIENTO DE HOMOTOPÍA. A ELLOS VAMOS:

LEMA 2.1: SI $(\tilde{W},p)$ ES UNA SUP. CUBRIENTE SOBRE W, $\tilde{w}_0 \in \tilde{W}$ Y $w_0 = p(\tilde{w}_0)$, PARA CUALQUIER CURVA $f: I \to W$ CON PUNTO INICIAL w_0 EXISTE UNA ÚNICA CURVA $g: I \to \tilde{W}$ CON PUNTO INICIAL EN $\tilde{w}_0$ Y TAL QUE $pg = f$.

Demostración: CIERTAMENTE SI LA CURVA $f = f(I)$ ESTÁ CONTENIDA EN ALGUNA VECINDAD ELEMENTAL $\mathcal{U}$ EL PROBLEMA ES SENCILLO: DENOTEMOS POR V A LA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(\mathcal{U})$ QUE CONTIENE A $\tilde{w}_0$: COMO p ES TOPOLÓGICO DE V SOBRE $\mathcal{U}$, EXISTE UNA ÚNICA g CON TALES CONDICIONES.

POR SUPUESTO QUE NO SIEMPRE f ESTÁ CONTENIDA EN UNA SOLA VECINDAD ELEMENTAL, PERO SÍ PODEMOS PENSARLA COMO UN PRODUCTO DE CURVAS "MENORES" CADA UNA DE LAS CUALES ESTÉ CONTENIDA EN UNA VECINDAD ELEMENTAL Y ASÍ PODER APLICAR EL ARGUMENTO PREVIO A CADA UNA DE LAS PIEZAS, SUCESIVAMENTE.

DE HECHO:

SEA $\{\mathcal{U}_i\}$ UNA CUBRIENTE DE W POR VECINDADES ELEMENTALES. $\{f^{-1}(\mathcal{U}_i)\}$ ES ENTONCES UNA CUBIERTA ABIERTA DEL ESPACIO MÉTRICO COMPACTO I, ASÍ QUE PUEDE SER CUBIERTO POR UN NÚMERO FINITO $\{f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j})\}_{j=1}^{k}$ DE ELEMENTOS DE LA CUBIERTA. A ESTA NUEVA CUBIERTA ASOCIAMOS UN NÚMERO DE LEBESGUE* δ. CONSIDEREMOS $n \in \mathbb{N}$ SUFICIENTEMENTE GRANDE PARA QUE $1/n < \delta$ Y SUBDIVIDAMOS I EN INTERVALOS CERRADOS $[0,1/n], [1/n, 2/n], \ldots, [n-1/n, 1]$: DE ESTA MANERA, f MAPEA CADA SUBINTERVALO EN UNA VECINDAD ELEMENTAL DE W Y PODREMOS DEFINIR g SUCESIVAMENTE EN CADA UNO DE ESTOS INTERVALOS, INICIANDO CON $[0,1/n]$. +.

LA UNICIDAD DE LA CURVA LEVANTADA ES CONSECUENCIA DEL RESULTADO MÁS GENERAL:

LEMA 2.2: SI $(\tilde{W},p)$ SOBRE W (abreviando) Y Y UN ESPACIO TOPOLÓGICO QUE ES CONEXO, DADAS $f_0, f_1 : Y \to \tilde{W}$ CONTINUAS TALES QUE $pf_0 = pf_1$, EL CONJUNTO $A = \{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ ES, O BIEN EL VACÍO O TODO EL ESPACIO Y.

Demostración: POR LA CONEXIDAD DE Y, BASTA MOSTRAR QUE $A \subseteq Y$ ES ABIERTO Y CERRADO.

ES CERRADO: SEA $y \in Cl(A) = \bar{A}$ (TODA VECINDAD DE y INTERSECTA A A)

SEA $w = pf_0(y) = pf_1(y)$. SUPONGAMOS QUE $f_0(y) \neq f_1(y)$ (i.e.: que $y \notin A$) PARA OBTENER UNA CONTRADICCIÓN.

SEA $\mathcal{U}$ UNA VECINDAD ELEMENTAL DE w Y V_0, V_1 LAS COMPONENTES POR ARCOS DE $p^{-1}(\mathcal{U})$ QUE CONTIENEN A $f_0(y)$ Y A $f_1(y)$ RESPECTIVAMENTE. COMO f_0 Y f_1 SON CONTINUAS, PODEMOS HALLAR UNA VECINDAD V DE y $\ni$. $f_0(V) \subseteq V_0$ Y $f_1(V) \subseteq V_1$. COMO LAS COMPONENTES SON AJENAS, ENTONCES $V \cap A = \emptyset$, ASÍ QUE V SERÍA UNA VECINDAD DE y QUE NO INTERSECTARÍA AL CONJUNTO A. ∇

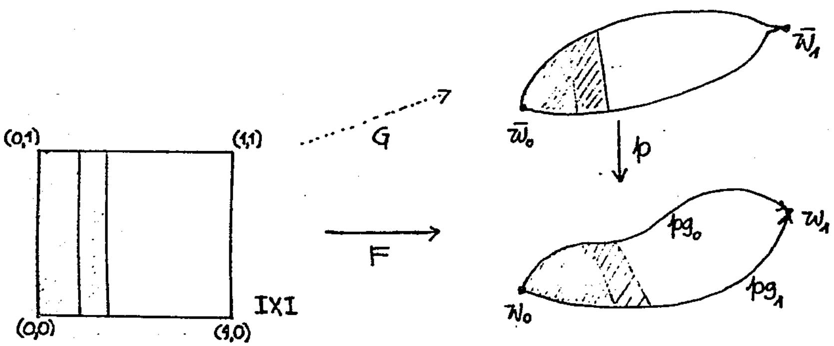
ASÍ QUE $y \in A$ Y A ES CERRADO.

(*) EN UN ESPACIO TOPOLÓGICO MÉTRICO Y COMPLETO (X,d), SE DEFINE EL diámetro DE UN SUBCONJUNTO $A \subseteq X$ COMO EL NÚMERO $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$. NO ES DIFÍCIL PROBAR EL SIGUIENTE

LEMA (LEBESGUE COVERING LEMMA): SI $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\}$ ES UNA CUBIERTA ABIERTA FINITA DE UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO X, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE SI $A \subseteq X$ ES UN SUBCONJUNTO DE DIÁMETRO $< \delta$ ENTONCES EXISTE $i \in \{1, \ldots, n\}$ TAL QUE $A \subseteq \mathcal{U}_i$.

AL NÚMERO δ SE LE LLAMA UN NÚMERO DE LEBESGUE PARA LA CUBIERTA $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\}$. (WILLARD. General topology)

ES DECIR, G DEFINE UNA DEFORMACIÓN ENTRE g_0 Y g_1, QUE ES LO QUE DESEÁBAMOS (bueno, necesitábamos) MOSTRAR. +



COROLARIO 2.4 : SEA $(\bar{W}, p)$ SOBRE W. LOS CONJUNTOS $p^{-1}(w)$ TIENEN LA MISMA CARDINALIDAD PARA TODAS $w \in W$.

Demostración: TOMEMOS DOS PUNTOS w_0 Y w_1 EN W. VAMOS A DEFINIR UN MAPEO $p^{-1}(w_0) \to p^{-1}(w_1)$ COMO SIGUE: TOMAS UNA CURVA $f: I \to W$ CON PUNTO INICIAL w_0 Y FINAL w_1 Y LEVANTÉMOSLA A UNA CURVA $g: I \to \bar{W}$ CON PUNTO INICIAL EN $\bar{w}_0 \in p^{-1}(w_0)$ Y FINAL EN ALGÚN $\bar{w}_1$ SOBRE w_1, i.e.: $pg = f$. EL MAPEO QUEDA DEFINIDO POR $\bar{w}_0 \longmapsto \bar{w}_1$. DE MANERA ANÁLOGA DEFINES UN MAPEO $p^{-1}(w_1) \longrightarrow p^{-1}(w_0)$ CON LA CURVA INVERSA $\bar{f}(t) = f(1-t)$. CIERTAMENTE ESTOS MAPEOS SON INVERSOS EL UNO DEL OTRO POR LO QUE EXISTE UNA BIYECCIÓN ENTRE LAS FIBRAS.

LLAMAREMOS AL NÚMERO COMÚN DE PUNTOS EN CADA FIBRA *el número de hojas de la cubriente*.

§4.3. GRUPO FUNDAMENTAL DE UNA CUBRIENTE

UNA GORDA APLICACIÓN DEL LEMA 2.3 PROVIENE DE LA SIGUIENTE CONSIDERACIÓN: SI TIENES UNA CURVA CONTINUA $g: I \to \bar{W}$ TAL QUE $pg_0 \sim 1$, ENTONCES $g_0 \sim 1$: LAS ÚNICAS CURVAS QUE SE PROYECTAN EN CURVAS CERRADAS EN W Y HOMOTÓPICAS A LA IDENTIDAD SON AQUELLAS QUE ERAN HOMOTÓPICAS A LA IDENTIDAD EN CADA PUNTO DE LA FIBRA. EN OTRAS PALABRAS:

TEOREMA 3.1 GENERAL DE MONODROMÍA : SI $(\bar{W}, p)$ SOBRE W, $\bar{w}_0 \in \bar{W}$ Y $w_0 = p(\bar{w}_0)$ ENTONCES EL MORFISMO INDUCIDO* $p^*: \pi(\bar{W}, \bar{w}_0) \to \pi(W, w_0)$ ES UN MONOMORFISMO DE GRUPOS.

¡EL GRUPO FUNDAMENTAL $\pi(\bar{W}, \bar{w}_0)$ ES ISOMORFO AL <u>SUBGRUPO</u> $p_*\pi(\bar{W}, \bar{w}_0)$ DEL GRUPO FUNDAMENTAL $\pi(W, w_0)$ DE LA SUPERFICIE BASE!. LAS CURVAS CERRADAS EN w_0 QUE SE LEVANTAN CERRADAS EN $\bar{w}_0$ FORMAN UN SUBGRUPO DE $\pi(W, w_0)$

(*) PORQUE LA IMAGEN CONTINUA DE UNA CURVA CERRADA ES UNA CURVA CERRADA.

ES ABIERTO: SEA $y \in A$

SEA $\bar{w} = pf_0(y) = pf_1(y)$. COMO $f_0(y) = f_1(y)$ CONSIDERAS U VECINDAD ELEMENTAL DE w Y V LA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(U)$ QUE CONTIENE A $f_0(y) = f_1(y)$. POR CONTINUIDAD EXISTE V' VECINDAD DE y EN Y ∋. $f_0(V') \subseteq V$ y $f_1(V') \subseteq V$: COMO $p|V$ ES TOPOLÓGICO ENTONCES $f_0(V') = f_1(V')$, ES DECIR: $y \in V' \subseteq A$ Y y ES UN PUNTO INTERIOR DE A, POR LO QUE A ES ABIERTO.

+.

EN PARTICULAR EL LEVANTAMIENTO DE LA CURVA $f: I \to W$ A LA CURVA $g: I \to \bar{W}$ ES ÚNICO PARA CADA PUNTO $\bar{w}$ EN LA FIBRA $p^{-1}(w_0)$.

LEMA 2.3: SEA $(\bar{W}, p)$ SOBRE W; $g_0, g_1: I \to \bar{W}$ CURVAS EN $\bar{W}$ CONTINUAS CON EL MISMO PUNTO INICIAL. SI $pg_0 \sim pg_1$ ENTONCES $g_0 \sim g_1$. EN PARTICULAR g_0 y g_1 TIENEN EL MISMO PUNTO TERMINAL.

Demostración: ESENCIALMENTE VAMOS A PARAFRASEAR LA DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.1. SEA $\bar{w}_0 = g_0(0) = g_1(0)$. COMO $pg_0 \sim pg_1$ EXISTE UNA DEFORMACIÓN $F: I \times I \to W$ QUE SATISFACE:

$$F(s,0) = pg_0(s)$$
$$F(s,1) = pg_1(s)$$
$$F(0,t) = pg_0(0) = p(\bar{w}_0)$$
$$F(1,t) = pg_0(1)$$

COMO $I \times I$ ES COMPACTO Y MÉTRICO, SI $\{U_i\}$ ES UNA CUBIERTA DE W POR VECINDADES ELEMENTALES, $\{F^{-1}(U_i)\}$ ES UNA CUBIERTA DE $I \times I$ Y DE MANERA ANÁLOGA AL LEMA 2.1 ASOCIAMOS A LA SUBCUBIERTA ABIERTA FINITA $\{F^{-1}(U_{i_j})\}_{j=1}^{k}$ UN NÚMERO DE LEBESGUE δ

PODEMOS ENTONCES HALLAR NÚMEROS $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$
$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ TALES QUE F MAPEE CADA RECTÁNGULO PEQUEÑO $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ EN ALGUNA VECINDAD ELEMENTAL DE W. PROBAREMOS QUE EXISTE UNA ÚNICA

$$G: I \times I \longrightarrow \bar{W}$$

QUE SATISFACE $pG = F$ y $G(0,0) = \bar{w}_0$.

ES POSIBLE DEFINIR TAL G EN EL RECTÁNGULO $[0,s_1] \times [0,t_1]$ PUES SU IMÁGEN BAJO F ESTÁ CONTENIDA EN ALGUNA VECINDAD ELEMENTAL U DE W: BASTA CONSIDERAR LA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(U)$ QUE CONTIENE A $\bar{w}_0$. CON ESTE MISMO RAZONAMIENTO PODEMOS IR LEVANTANDO SUCESIVAMENTE CADA RECTÁNGULO $[s_{i-1}, s_i] \times [0, t_1]$ Y TENDREMOS DEFINIDO EL LEVANTAMIENTO DE LA FRANJA $I \times [0, t_1]$. PROCEDEMOS DEL MISMO MODO PARA LEVANTAR CADA FRANJA $I \times [t_{j-1}, t_j]$.

DE LA CONEXIDAD DE $I \times I$ Y LA CONTINUIDAD DE F SE SIGUE LA UNICIDAD DE G (LEMA 2.2), MIENTRAS QUE DE LA UNICIDAD DEL LEMA 2.1 OBTENEMOS QUE

$$G(s,0) = g_0(s)$$
$$G(0,t) = \bar{w}_0$$
$$G(s,1) = g_1(s)$$

Y QUE G MAPEA $\{1\} \times I$ EN UN SOLO PUNTO $\bar{w}_1$ TAL QUE $p(\bar{w}_1) = pg_0(1) = pg_1(1)$.

¿CÓMO SE RELACIONAN ESTOS SUBGRUPOS $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$ Y $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_1)$ SI $p(\bar{w}_0)=p(\bar{w}_1)=w_0$? DE UNA MANERA MUY MUY BONITA Y SENCILLA: ELIGE UNA CLASE γ DE CURVAS EN $\bar{W}$ DE $\bar{w}_0$ A $\bar{w}_1$: ELLA DEFINE UN ISOMORFISMO

$$\mathfrak{U}:\pi(\bar{W},\bar{w}_0)\longrightarrow\pi(\bar{W},\bar{w}_1)$$
$$\mathfrak{U}(\alpha)=\gamma^{-1}\alpha\gamma$$

Y PUEDE MOSTRARSE QUE DEFINIENDO:

$$\mathcal{V}:\pi(W,w_0)\longrightarrow\pi(W,w_0)$$
$$\mathcal{V}(\beta)=(p_*\gamma)^{-1}\beta(p_*\gamma)$$

OBTENEMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO

$$\begin{tikzcd}
\pi(\bar{W},\bar{w}_0) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\mathfrak{U}"'] & \pi(W,w_0) \arrow[d, "\mathcal{V}"] \\
\pi(\bar{W},\bar{w}_1) \arrow[r, "p_*"'] & \pi(W,w_0)
\end{tikzcd}$$

EN DONDE $p_*\gamma$ ES UNA CURVA CERRADA EN w_0 Y POR ENDE UN ELEMENTO DE $\pi(W,w_0)$, ASÍ QUE LAS IMÁGENES DE $\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$ Y $\pi(\bar{W},\bar{w}_1)$ BAJO p_* SON SUBGRUPOS CONJUGADOS DE $\pi(W,w_0)$. (ver Massey).

LO QUE SIGUE ES PREGUNTARNOS AHORA SI TODO SUBGRUPO EN LA clase de conjugación DEL SUBGRUPO $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$ PUEDE OBTENERSE COMO LA IMÁGEN $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_1)$ PARA ALGUNA ELECCIÓN DE $\bar{w}_1\in p^{-1}(w_0)$

¡SÍ SE PUEDE!

FÍJATE CÓMO: RECUERDA QUE LA CLASE DE CONJUGACIÓN DE $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$ ES EL CONJUNTO DE LOS $\{\alpha^{-1}[p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)]\alpha \,:\, \alpha\in\pi(W,w_0)\}$. PARA ALGÚN $\alpha\in\pi(W,w_0)$ ELIJE UNA CURVA $f:I\to W$ QUE PERTENEZCA A α (CIERTAMENTE ES CERRADA). GRACIAS AL LEMA 2.1 PODEMOS LEVANTARLA A UNA ÚNICA CURVA $g:I\to\bar{W}$ CON PUNTO INICIAL EN $\bar{w}_0$. DIGAMOS QUE $\bar{w}_2$ ES EL PUNTO FINAL DE g, ENTONCES

$$p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_2)=\alpha^{-1}[p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)]\alpha$$

ES DECIR, HEMOS PROBADO EL

TEOREMA 3.2: SEA $(\bar{W},p)$ SOBRE W Y $w_0\in W$. LOS SUBGRUPOS $p_*\pi(\bar{W},\bar{w})$ CON $\bar{w}\in p^{-1}(w_0)$ SON EXACTAMENTE UNA CLASE DE CONJUGACIÓN DE SUBGRUPOS DE $\pi(W,w_0)$

¡MÁS ADELANTE PROBAREMOS QUE ESTA CLASE DE CONJUGACIÓN DETERMINA A LA SUPERFICIE CUBRIENTE HASTA ISOMORFISMO!

§ 4.4. LEVANTAMIENTO DE FUNCIONES ARBITRARIAS.

YA LOGRAMOS LEVANTAR CURVAS EN W A CURVAS EN $\bar{W}$. BUSCAMOS AHORA LEVANTAR MAPEOS ARBITRARIOS DE UN ESPACIO Y CUALESQUIERA. PARA ESTABLECER CLARAMENTE EL PROBLEMA INTRODUZCAMOS LA SIGUIENTE <u>NOTACIÓN</u>: SI X Y Y SON ESPACIOS TOPOLÓGICOS CON $x\in X$ y $y\in Y$, ESCRIBIR $f:(X,x)\to(Y,y)$ SIGNIFICA QUE f ES UN MAPEO CONTINUO DE X EN Y TAL QUE $f(x)=y$.

AHORA SÍ:

SEA $(\bar{W},p)$ SOBRE W, $\bar{w}_0\in\bar{W}$ y $w_0=p(\bar{w}_0)$. Y UN ESPACIO TOPOLÓGICO CON $y_0\in Y$ y SEA $\varphi:(Y,y_0)\to(W,w_0)$: ¿BAJO QUE CONDICIONES EXISTE UN MAPEO $\tilde{\varphi}:(Y,y_0)\to(\bar{W},\bar{w}_0)$ QUE HAGA AL DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} & (\bar{W},\bar{w}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, "\hat{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & (W,w_0) \end{tikzcd}$$

CONMUTATIVO? EN LA TERMINOLOGÍA QUE USAREMOS: ¿CUÁNDO PODEMOS levantar φ a alguna $\hat{\varphi}$? o bien, ¿cuándo existe un levantamiento $\hat{\varphi}$ del mapeo φ?

PODEMOS DE MANERA SENCILLA OBTENER UNA CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE TAL LEVANTAMIENTO $\hat{\varphi}$ AL CONSIDERAR LOS GRUPOS FUNDAMENTALES INVOLUCRADOS: SI EXISTE EL LEVANTAMIENTO OBTENEMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO DE GRUPOS Y HOMOMORFISMOS DE GRUPOS:

$$\begin{tikzcd} & \pi(\bar{W},\bar{w}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi(Y,y_0) \arrow[ur, "\hat{\varphi}_*"] \arrow[r, "\varphi_*"'] & \pi(W,w_0) \end{tikzcd}$$

ES DECIR: $\hat{\varphi}_*\pi(Y,y_0) \subseteq \pi(\bar{W},\bar{w}_0)$; COMO p_* ES MONO, ENTONCES $p_*\hat{\varphi}_*\pi(Y,y_0) \subseteq p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$, PERO EL LADO IZQUIERDO DE ESTA CONTENCIÓN ES PRECISAMENTE $\varphi_*\pi(Y,y_0)$ Y HEMOS OBTENIDO LA CONDICIÓN NECESARIA QUE MENCIONÁBAMOS, vgr., QUE

$$\varphi_*\pi(Y,y_0) \subseteq p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$$

Sorpresa: ¡también es suficiente!:

TEOREMA 4.1: SEAN $(\bar{W},p)$ SOBRE W, Y UN ESPACIO TOPOLÓGICO CONEXO Y LOCALMENTE CONEXO POR ARCOS, $y_0 \in Y$, $\bar{w}_0 \in \bar{W}$ Y $w_0 = p(\bar{w}_0)$. DADO UN MAPEO $\varphi:(Y,y_0) \to (W,w_0)$, EXISTE UN LEVANTAMIENTO $\hat{\varphi}:(Y,y_0) \to (\bar{W},\bar{w}_0)$ SI Y SÓLO SI $\varphi_*\pi(Y,y_0) \subseteq p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$

PARA MOSTRAR LA SUFICIENCIA DEBEMOS DEFINIR AL MAPEO $\hat{\varphi}$, AUNQUE ES SENCILLO MOSTRAR QUE ESCENCIALMENTE SÓLO HAY UNA FORMA DE DEFINIRLO: OBSERVA QUE, SI $\hat{\varphi}$ EXISTE, PARA CADA $y \in Y$ PUEDES ELEGIR UNA CURVA $f: I \to Y$ CON PUNTO INICIAL y_0 Y FINAL y, ENTONCES LAS CURVAS $\hat{\varphi}f$ (EN $\bar{W}$) Y φf (EN W) SATISFACEN QUE LA PRIMERA ES UN LEVANTAMIENTO DE LA SEGUNDA y el punto terminal de $\hat{\varphi}f$ es precisamente $\hat{\varphi}(y)$.

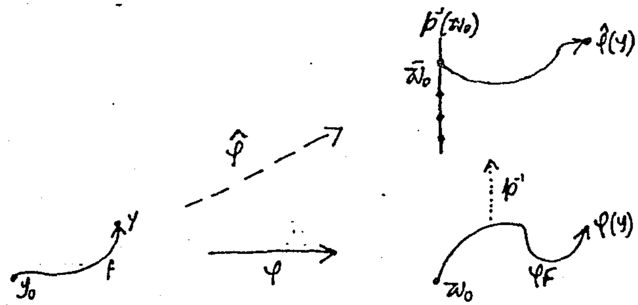
¡PUES CLARO QUE SÍ! ENTONCES PODEMOS PROCEDER A definir EL MAPEO $\hat{\varphi}:(Y,y_0) \to (\bar{W},\bar{w}_0)$ DEL SIGUIENTE MODO: DADO $y \in Y$ TOMAS $f: I \to Y$ UNA CURVA CONTINUA CON PUNTO INICIAL EN y_0 Y TERMINAL EN y, COMO LA CURVA φf ESTÁ EN W Y TIENE PUNTO INICIAL EN w_0, POR EL LEMA 2.1 PUEDES LEVANTARLA A UNA ÚNICA CURVA $g: I \to \bar{W}$ CON PUNTO INICIAL $\bar{w}_0$ (i.e.: $pg = \varphi f$). DEFINE

$$\hat{\varphi}(y) = \text{punto terminal de } g.$$

DEBEMOS VERIFICAR QUE LA DEFINICIÓN NO DEPENDE DE LA CURVA $f: I \to Y$ ELEGIDA Y QUE, DEFINIDA ASÍ, $\hat{\varphi}$ ES CONTINUA.

SI ELEGIMOS OTRA CURVA $\bar{f}$ CON LAS MISMAS PROPIEDADES DE f en la misma clase de homotopía α de f, EL LEMA 2.3 CONFIRMARÁ QUE PARA ESE CASO $\hat{\varphi}$ NO DEPENDE DE f: ELLO NOS DICE QUE $\hat{\varphi}$ DEPENDE SOLAMENTE DE LA CLASE DE HOMOTOPÍA DE LA CURVA $f: I \to Y$ UTILIZADA.

CONSIDEREMOS, ENTONCES DOS CLASES DE HOMOTOPÍA DISTINTAS α y β DE CURVAS DE y_0 A y, COMO $(\alpha\beta^{-1}) \in \pi(Y,y_0)$ Y φ_* ES MORFISMO DE GRUPOS, TENEMOS QUE $\varphi_*(\alpha\beta^{-1}) = \varphi_*\alpha \cdot \varphi_*\beta$ ESTÁ EN $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$ (LA ÚLTIMA AFIRMACIÓN ES POR HIPÓTESIS), ASÍ QUE EXISTE UNA CLASE DE HOMOTOPÍA EN $\pi(\bar{W},\bar{w}_0)$ QUE SE PROYECTA EN $\varphi_*\alpha \cdot \varphi_*\beta$. EN PARTICULAR TAL CLASE ES CERRADA (CURVAS CERRADAS EN $\bar{w}_0$), ASÍ QUE LOS LEVANTAMIENTOS DE $\varphi_*\alpha$ y $\varphi_*\beta$ tienen el mismo punto terminal. HEMOS PROBADO ASÍ QUE LA DEFINICIÓN DE $\hat{\varphi}$ NO DEPENDE DE LA CLASE DE HOMOTOPÍA DE LA CURVA QUE UNA y_0 CON y NI DE LA CURVA MISMA. (figura siguiente).



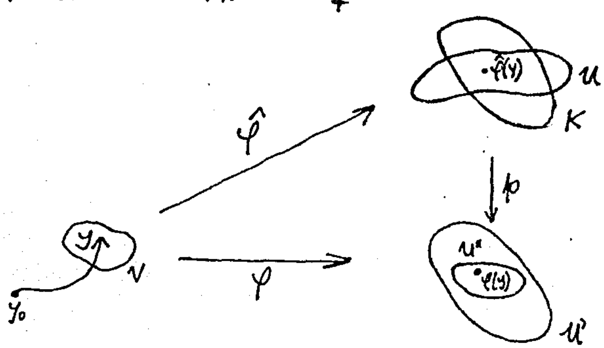
SEA AHORA $y \in Y$ y $\mathcal{U}$ UNA VECINDAD ARBITRARIA DE $\hat{\varphi}(y)$. PARA MOSTRAR QUE $\hat{\varphi}$ ES CONTINUA DEBEMOS EXHIBIR UNA VECINDAD V DE y QUE SATISFAGA $\hat{\varphi}(V) \subseteq \mathcal{U}$.

SALE:

SEAN $\mathcal{U}'$ UNA VECINDAD ELEMENTAL DE $\varphi(y)$ Y $K \subseteq \tilde{W}$ LA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(\mathcal{U}')$ QUE CONTIENE A $\hat{\varphi}(y)$. ELIJAMOS UNA NUEVA VECINDAD ELEMENTAL $\mathcal{U}''$ DE $\varphi(y)$ QUE SATISFAGA $\mathcal{U}'' \subseteq p(K \cap \mathcal{U})$. COMO p ES TOPOLÓGICO DE K SOBRE $\mathcal{U}$, ENTONCES LA COMPONENTE POR ARCOS DE $p^{-1}(\mathcal{U}'')$ QUE CONTIENE A $\hat{\varphi}(y)$, K', ES TAMBIÉN VÍA p HOMEOMORFA A $\mathcal{U}''$. AHORA POR CONTINUIDAD DE φ, SIENDO $\mathcal{U}''$ UNA VECINDAD DE $\varphi(y)$, EXISTE ALGUNA VECINDAD V DE y TAL QUE $\varphi(V) \subseteq \mathcal{U}''$ (COMO Y ES LOCALMENTE CONEXO POR ARCOS PODEMOS SUPONER S.P.G. QUE V ES CONEXA POR ARCOS)

ES INMEDIATO VERIFICAR (de la forma en que $\hat{\varphi}$ fue definida) que $\hat{\varphi}(V) \subseteq \mathcal{U}$, LO QUE MUESTRA SU CONTINUIDAD.

Por construcción SE SATISFACE QUE $p\hat{\varphi} = \varphi$, LA UNICIDAD PUEDE SEGUIRSE BIEN DEL LEMA 2.2 O DE LA CONSTRUCCIÓN MISMA. +



§ 4.5. MORFISMOS Y AUTOMORFISMOS ENTRE SUPERFICIES CUBRIENTES

¿QUE TANTA VARIEDAD PUEDE HABER ENTRE LAS DISTINTAS SUPERFICIES CUBRIENTES $(\bar{W}, p)$ DE UNA SUPERFICIE DADA? LOGRAREMOS UNA RESPUESTA A ESTA PREGUNTA (Clasificar las superficies cubrientes de una superficie dada) ESTUDIANDO A LOS POSIBLES "Mapeos Admisibles" (MORFISMOS) ENTRE LAS SUPERFICIES CUBRIENTES.

SI $(\bar{W}_1, p_1)$ Y $(\bar{W}_2, p_2)$ SON SUPERFICIES CUBRIENTES SOBRE W, UN morfismo ENTRE ESTAS SUPERFICIES CUBRIENTES ES UNA FUNCIÓN CONTINUA $\varphi: \bar{W}_1 \to \bar{W}_2$ TAL QUE $p_2 \varphi = p_1$, ES DECIR, QUE HAGA CONMUTATIVO EL DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} \bar{W}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \bar{W}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & W & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

OBSERVA QUE LA COMPOSICIÓN DE DOS MORFISMOS ES TAMBIÉN UN MORFISMO ENTRE SUPERFICIES CUBRIENTES Y QUE, SI $(\bar{W}, p)$ SOBRE W, LA IDENTIDAD $Id: \bar{W} \to \bar{W}$ ES TAMBIÉN UN MORFISMO.

LLAMAREMOS A UN MORFISMO φ DE $(\bar{W}_1, p_1)$ EN $(\bar{W}_2, p_2)$ UN isomorfismo SI EXISTE UN MORFISMO $\psi: \bar{W}_2 \to W_1$ TAL QUE LAS COMPOSICIONES $\psi\varphi$ y $\varphi\psi$ SEAN LOS MAPEOS IDENTIDAD RESPECTIVOS. COMO DE COSTUMBRE, UN automorfismo de sups. cubrientes será un isomorfismo de la superficie cubriente $(\bar{W}, p)$ EN SI MISMA. DENOTAREMOS A ESTE Grupo POR $A(\bar{W}, p)$, el grupo de transformaciones de cubierta de $(\bar{W}, p)$ (*)

OBTENDREMOS MUCHAS PROPIEDADES DE LOS MORFISMOS Y AUTOMORFISMOS ENTRE SUPERFICIES CUBRIENTES SI VEMOS AL DIAGRAMA $(*)$ EN LA FORMA

$$\begin{tikzcd} & \bar{W}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ \bar{W}_1 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p_1"'] & W \end{tikzcd}$$

QUE MUESTRA QUE PODEMOS (y debemos) PENSAR AL MORFISMO φ COMO UN LEVANTAMIENTO DE LA FUNCIÓN CONTINUA $p_1: \bar{W}_1 \to W$ A LA SUPERFICIE CUBRIENTE $(\bar{W}_2, p_2)$.

DE LA UNICIDAD DEL LEMA 2.2 OBTENEMOS INMEDIATAMENTE EL

COROLARIO 5.1: SEAN φ_0 y φ_1 MORFISMOS DE $(\bar{W}_1, p_1)$ EN $(\bar{W}_2, p_2)$. SI EXISTE ALGÚN PUNTO $\bar{w}_1 \in \bar{W}_1$ TAL QUE $\varphi_0(\bar{w}_1) = \varphi_1(\bar{w}_1)$, ENTONCES $\varphi_0 \equiv \varphi_1$.

EN PARTICULAR CUANDO $(\bar{W}_1, p_1) = (\bar{W}_2, p_2) = (\bar{W}, p)$, si $\varphi \in A(\bar{W}, p)$ y para algún $\bar{w}_0 \in \bar{W}$ sucede que $\varphi(\bar{w}_0) = \bar{w}_0$ como también $Id(\bar{w}_0) = \bar{w}_0$, SE SIGUE QUE $\varphi \equiv Id$; EN OTRAS PALABRAS:

COROLARIO 5.2: EL GRUPO $A(\bar{W}, p)$ OPERA SIN PUNTOS FIJOS, ES DECIR, si $\varphi \in A(\bar{W}, p)$ Y $\varphi \neq 1$ ENTONCES φ NO TIENE PUNTOS FIJOS.

(*) OBSERVA QUE UN MORFISMO DE UNA SUPERFICIE CUBRIENTE A OTRA ES UN ISOMORFISMO SI Y SÓLO SI ES UN homeomorfismo EN EL SENTIDO USUAL.

LEMA 5.3: SI $(\bar{W}_i, p_i)$ Y $(\bar{W}_2, p_2)$ SON SUPERFICIES CUBRIENTES DE W Y $\bar{w}_i \in \bar{W}_i$ $(i=1,2)$ SON PUNTOS QUE SATISFACEN $p_1(\bar{w}_1) = p_2(\bar{w}_2)$. ENTONCES, EXISTE UN MORFISMO φ DE $(\bar{W}_1, p_1)$ EN $(\bar{W}_2, p_2)$ TAL QUE $\varphi(\bar{w}_1) = \bar{w}_2$ SI Y SÓLO SI $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1) \subseteq p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$.

ES UN CASO PARTICULAR DEL TEOREMA 4.1.

COROLARIO 5.4: BAJO LAS HIPÓTESIS DEL LEMA 5.3, EXISTE UN ISOMORFISMO φ DE $(\bar{W}_1, p_1)$ EN $(\bar{W}_2, p_2)$ TAL QUE $\varphi(\bar{w}_1) = \bar{w}_2$ SI Y SÓLO SI $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1) = p_{2*}\pi(\bar{W}_2, p_2)$

Dem: LA NECESIDAD ES INMEDIATA DEL LEMA 5.3.

VEAMOS LA SUFICIENCIA: COMO $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1) = p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$, APLICANDO EL LEMA 5.3 A LA DOBLE CONTENCIÓN:

"$\subseteq$": EXISTE $\varphi: \bar{W}_1 \to \bar{W}_2$ MORFISMO $\ni$. $\varphi(\bar{w}_1) = \bar{w}_2$ $(p_1 = p_2\varphi)$

"$\supseteq$": EXISTE $\psi: \bar{W}_2 \to \bar{W}_1$ MORFISMO $\ni$. $\psi(\bar{w}_2) = \bar{w}_1$ $(p_2 = p_1\psi)$

CONSIDERA $\varphi\psi: \bar{W}_2 \to \bar{W}_2$, ES UN MAPEO CONTINUO QUE SATISFACE

$$p_2(\varphi\psi)(\bar{w}) = (p_2\varphi)\psi(\bar{w}) = (p_1\psi)(\bar{w}) = p_2(\bar{w}) \quad \forall \bar{w} \in \bar{W}_2,$$

ASÍ QUE ES UN MORFISMO DE $\bar{W}_2$ EN SÍ MISMO Y COMO $Id_{\bar{W}_2}(\bar{w}_2) = \varphi\psi(\bar{w}_2) = \bar{w}_2$

DEJA FIJO A $\bar{w}_2$ $\therefore$ $\varphi\psi = Id_{\bar{W}_2}$.

ANÁLOGAMENTE SE OBTIENE QUE

$\psi\varphi = Id_{\bar{W}_1}$; POR DEFINICIÓN φ ES UN ISOMORFISMO. +.

EN PARTICULAR CUANDO $\bar{W}_1 = \bar{W}_2$:

COROLARIO 5.5: SI $(\bar{W}, p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE SOBRE W Y $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ SON PUNTOS EN $p^{-1}(w_0)$, DONDE $w_0 \in W$. EXISTE UN AUTOMORFISMO $\varphi \in A(\bar{W}, p)$ TAL QUE $\varphi(\bar{w}_1) = \bar{w}_2$ SI Y SÓLO SI $p_*\pi(\bar{W}, \bar{w}_1) = p_*\pi(\bar{W}, \bar{w}_2)$

Y AHORA SÍ HEMOS OBTENIDO LA CLASIFICACIÓN DESEADA (DE HECHO CONFIRMAMOS LO QUE MENCIONÁBAMOS AL FINAL DEL TEOREMA 3.2):

TEOREMA 5.6: DOS SUPERFICIES CUBRIENTES $(\bar{W}_1, p_1)$ Y $(\bar{W}_2, p_2)$ DE W SON ISOMORFAS SI Y SOLO SI PARA CUALESQUIERA DOS PUNTOS $\bar{w}_1 \in \bar{W}_1$ Y $\bar{w}_2 \in \bar{W}_2$ TALES QUE $p_1(\bar{w}_1) = p_2(\bar{w}_2) = w_0$, LOS SUBGRUPOS $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1)$ Y $p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$ PERTENECEN A LA MISMA CLASE DE CONJUGACIÓN EN $\pi(W, w_0)$.

Demostración:

$\Rightarrow$] SEAN $\bar{w}_1 \in \bar{W}_1$ y $\bar{w}_2 \in \bar{W}_2$ TALES QUE $p_1(\bar{w}_1) = p_2(\bar{w}_2) = w_0$. SI $\varphi: \bar{W}_1 \to \bar{W}_2$ ES EL ISOMORFISMO EXISTENTE, ENTONCES $\bar{w}_2$ y $\varphi(\bar{w}_1)$ PERTENECEN A $p_2^{-1}(w_0)$, ASÍ QUE POR 4.2 $p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$ y $p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \varphi(\bar{w}_1))$ PERTENECEN A LA MISMA CLASE DE CONJUGACIÓN EN $\pi(W, w_0)$.

PERO 5.5 DIJO QUE $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1) = p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \varphi(\bar{w}_1))$

ASÍ QUE $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1)$ Y $p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$ ESTÁN EN LA MISMA CLASE DE CONJUGACIÓN.

$\Leftarrow$] SI TOMAMOS AHORA $\bar{w}_1 \in \bar{W}_1$ Y $\bar{w}_2 \in \bar{W}_2$ COMO EN LA HIPÓTESIS, EXISTE UNA CLASE DE CURVAS $\gamma \in \pi(W, w_0)$ $\ni.$ $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1) = \gamma^{-1} p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$, Y

DE NUEVO POR 4.2, SABES QUE EXISTE $z \in p_2^{-1}(w_0)$ $\ni.$ $\gamma^{-1} p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)\gamma = p_{2*}\pi(\bar{W}_2, z)$

ASÍ QUE POR 5.5 EXISTE UN ISOMORFISMO (ÚNICO) $\varphi : (\bar{W}_1, \bar{w}_1) \longrightarrow (\bar{W}_2, z)$.

+.

LEMA 5.7: SEAN $(\bar{W}_1, p_1)$ Y $(\bar{W}_2, p_2)$ SOBRE W. SI EXISTE UN MORFISMO $\varphi : \bar{W}_1 \to \bar{W}_2$, ENTONCES $(\bar{W}_1, \varphi)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE SOBRE $\bar{W}_2$.

P.D: PARA CADA $\bar{w}_2 \in \bar{W}_2$ EXISTE UNA VECINDAD CONEXA POR ARCOS ABIERTA $\mathcal{U}$ TAL QUE TODA COMPONENTE POR ARCOS DE $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ ES MAPEADA TOPOLÓGICAMENTE POR φ SOBRE $\mathcal{U}$.

SEAN $\bar{w}_1 \in \bar{W}_1$, $\bar{w}_2 = \varphi(\bar{w}_1)$ y $w_0 = p_i(\bar{w}_i)$, $i=1,2$.

OBSERVA QUE SI $\mathcal{U}_i$ ES VECINDAD ELEMENTAL DE w_0 EN $\bar{W}_i$, $i=1,2$, ENTONCES LA COMPONENTE POR ARCOS DE $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ QUE CONTIENE A w_0 ES UNA VECINDAD ELEMENTAL SIMULTÁNEAMENTE PARA AMBAS CUBRIENTES.

Si tuviéramos demostrado que φ es suprayectivo, PODRÍAMOS PROCEDER DE LA SIGUIENTE MANERA:

CONSIDERA $\bar{w}_2 \in \bar{W}_2$, $w_0 = p_2(\bar{w}_2)$ y $\mathcal{U}$ UNA VECINDAD ELEMENTAL DE w_0 EN AMBAS CUBRIENTES. SEA AHORA $\bar{\mathcal{U}}_2$ LA COMPONENTE POR ARCOS DE $p_2^{-1}(\mathcal{U})$ QUE CONTIENE A $\bar{w}_2$, como φ es suprayectivo, existe $\bar{w}_1 \in \bar{W}_1$ $\ni.$ $\varphi(\bar{w}_1) = \bar{w}_2$ ASÍ QUE LA COMPONENTE POR ARCOS $\bar{\mathcal{U}}_1$ DE $p_1^{-1}(\mathcal{U})$ QUE CONTIENE A $\bar{w}_1$ SATISFACE QUE

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathcal{U}}_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi|_{\bar{\mathcal{U}}_1}"] \arrow[dr, "\cong", "p_1|_{\bar{\mathcal{U}}_1}"'] & & \bar{\mathcal{U}}_2 \arrow[dl, "\cong"', "p_2|_{\bar{\mathcal{U}}_2}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

$\varphi|_{\bar{\mathcal{U}}_1}$ ES TOPOLÓGICO SOBRE $\bar{\mathcal{U}}_2$, Y HABRÍAMOS CONCLUIDO.

FALTA MOSTRAR LA SUPRAYECTIVIDAD DE φ: SEA $\bar{y} \in \bar{W}_2$, BUSCAMOS $\bar{w} \in \bar{W}_1$ $\ni.$ $\varphi(\bar{w}) = \bar{y}$.

ELIGE UNA CURVA $f : I \to \bar{W}_2$ CON PUNTO INICIAL EN $\bar{w}_2$ Y FINAL EN $\bar{y}$. VAMOS A BAJARLA A W Y LEVANTARLA A $\bar{W}_1$: $g = p_2 f$ ES UNA CURVA EN W CON PUNTO INICIAL EN w_0, POR $\bar{w}_1$ LEVANTAMOS g EN $h : I \to \bar{W}_1$, ES DECIR: $p_1 h = g \; (= p_2 f)$ Y $h(0) = \bar{w}_1$.

SEA $\bar{w}$ = punto final de h.

LAS CURVAS φh y f TIENEN EL MISMO PUNTO INICIAL Y $p_2(\varphi h) = (p_2\varphi)h = p_1 h = g = p_2 f$, ASÍ QUE AMBAS SON LEVANTAMIENTO DE LA MISMA CURVA g A $\bar{W}_2$ POR LA UNICIDAD DEL LEVANTAMIENTO $\varphi h = f$.

ES DECIR $\varphi(\bar{w}) = \bar{y}$. φ ES SUPRAYECTIVA.

(ver siguiente figura)

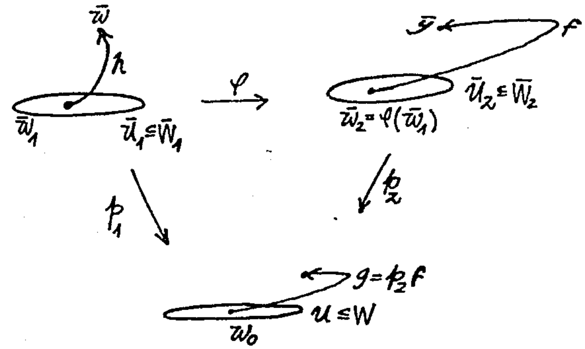


FIG. Un morfismo entre superficies cubrientes de la misma superficie es suprayectivo.

CON LA NOTACIÓN DEL LEMA ANTERIOR VAMOS A DECIR QUE $(\bar{W}_1, p_1)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE más fuerte QUE $(\bar{W}_2, p_2)$. ESTA RELACIÓN DEFINE UN ORDEN PARCIAL ENTRE LAS POSIBLES SUPERFICIES CUBRIENTES DE UNA SUPERFICIE DADA W QUE DENOTAREMOS POR $(\bar{W}_1, p_1) \geq (\bar{W}_2, p_2)$. EL COROLARIO 5.3 DICE ENTONCES QUE ESTE ORDEN PARCIAL ES EL MISMO PARA LOS SUBGRUPOS $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1)$ Y $p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$ EN EL ORDEN INVERSO:

$p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1) \leq p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2) \Rightarrow \bar{W}_1 \geq \bar{W}_2$ Y RECÍPROCAMENTE, si $\bar{W}_1$ es más fuerte que $\bar{W}_2$, ENTONCES $p_{2*}\pi(\bar{W}_2, \bar{w}_2)$ CONTIENE ALGÚN CONJUGADO DE $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1)$ (NO NECESARIAMENTE DEBE CONTENER AL MISMO $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1)$ PORQUE NO SABEMOS QUE, BAJO EL MORFISMO EXISTENTE, LA IMAGEN DE $\bar{w}_1$ SEA $\bar{w}_2$, SÓLO SABEMOS QUE ESTÁ EN LA MISMA fibra de $\bar{w}_2$).

LO ANTERIOR NOS PERMITE HABLAR DE LA SUPERFICIE CUBRIENTE MÁS FUERTE DE W, AQUELLA QUE CORRESPONDA AL SUBGRUPO TRIVIAL $\{1\} \in \pi(W)$. SE LE DENOTARÁ POR $\widetilde{W}$ Y LA LLAMAREMOS La Superficie Cubriente Universal DE W. COMO CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE MONODROMÍA ELLA ES SIMPLEMENTE CONEXA. TIENE LA PROPIEDAD DE QUE UN ARCO EN $\widetilde{W}$ ES CERRADO SI Y SÓLO SI SU PROYECCIÓN EN W ES HOMOTÓPICA A 1.

EL OTRO CASO EXTREMO DEL ORDENAMIENTO ANTERIOR ES CUANDO $p_{1*}\pi(\bar{W}_1, \bar{w}_1)$ ES ISOMORFO A TODO $\pi(W, w_0)$. EN ESE CASO p_1 ES UN HOMEOMORFISMO ASÍ QUE LAS SUPERFICIES W y $\bar{W}_1$ PUEDEN CONSIDERARSE COMO LA MISMA. (COMO UN CASO PARTICULAR DEL COROLARIO 5.4 PENSANDO A (W, Id) COMO UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE W MISMA. Ver diagrama).

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "Id"] \\ \bar{W}_1 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "p_1"'] & W \end{tikzcd}$$

§4.6. DESCUARTIZACIÓN DE $A(\bar{W}, p)$: LA ACCIÓN DEL GRUPO $\pi(W, w)$ EN EL CONJUNTO $p^{-1}(w)$

ANTES DE SEGUIR CON LAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y ALGEBRAICAS DE LAS SUPERFICIES CUBRIENTES REGRESEMOS UN MOMENTO A LAS SUPERFICIES DE RIEMANN. SI W ES UNA SUPERFICIE DE

RIEMANN Y $(\bar{W}, p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE ELLA, PODEMOS DOTAR A $\bar{W}$ DE UNA ESTRUCTURA CONFORME QUE LA HACE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN. SI AHORA $\varphi \in A(\bar{W}, p)$ (ES UN HOMEOMORFISMO $\varphi : \bar{W} \to \bar{W}$ t.q. $p \circ \varphi = p$) AFIRMO QUE φ ES UN MAPEO CONFORME. DE HECHO, LAS VARIABLES LOCALES EN W y $\bar{W}$ PUEDEN SER ELECTAS COMO z_α y $\bar{z}_\alpha = z_\alpha \circ p$. DECIR QUE φ ES CONFORME ES DECIR QUE $\bar{z}_\beta \circ \varphi \circ \bar{z}_\alpha^{-1}$ ES CONFORME EN DONDE ESTÉ DEFINIDA, SIN EMBARGO,

$$\bar{z}_\beta \circ \varphi \circ \bar{z}_\alpha^{-1} = z_\beta \circ f \circ \varphi \circ f^{-1} \circ z_\alpha^{-1} = z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$$

Y ELLAS SON CONFORMES POR HIPÓTESIS.

CONOCEREMOS

BIHOL $\mathbb{C}$

BIHOL $\bar{\mathbb{C}}$

BIHOL Δ

como transformaciones de cubierta.

VEAMOS AHORA COMO PODEMOS CONOCER COMPLETAMENTE LA ESTRUCTURA DEL GRUPO $A(\bar{W}, p)$. LA NOTACIÓN Y LOS CONCEPTOS QUE UTILIZAREMOS ESTÁN DESARROLLADOS CON DETALLE EN EL APÉNDICE **A**

GRACIAS A LOS LEMAS 2.1 Y 2.3 DE LEVANTAMIENTO DE CURVAS PODEMOS DEFINIR LA acción del grupo $\pi(W, w_0)$ en el conjunto $p^{-1}(w_0)$ DEL SIGUIENTE MODO:

SEA $(\bar{W}, p)$ SOBRE W, $w_0 \in W$. PARA CUALQUIER PUNTO $\bar{w} \in p^{-1}(w_0)$ Y CUALESQUIERA $\alpha \in \pi(W, w_0)$ DEFINIMOS $\bar{w} \cdot \alpha \in p^{-1}(w_0)$ COMO SIGUE: POR LOS LEMAS 2.1 Y 2.3 EXISTE UNA ÚNICA CLASE DE CURVAS $\bar{\alpha}$ EN $\bar{W}$ TAL QUE $p_*(\bar{\alpha}) = \alpha$ Y EL PUNTO INICIAL DE $\bar{\alpha}$ ES $\bar{w}$. DEFINIMOS $\bar{w} \cdot \alpha$ COMO EL PUNTO TERMINAL DE LA CLASE DE CURVAS $\bar{\alpha}$.

ESTE PRODUCTO SATISFACE

$$(\bar{w} \cdot \alpha) \cdot \beta = \bar{w} \cdot (\alpha \cdot \beta)$$

y

$$\bar{w} \cdot 1 = \bar{w}$$

QUE SON LOS REQUERIMIENTOS PARA QUE $\pi(W, w_0)$ SEA un grupo de operadores derechos en el conjunto $p^{-1}(x)$ (VER EL APÉNDICE **A**). MÁS AUN: EL GRUPO $\pi(W, w_0)$ OPERA TRANSITIVAMENTE EN $p^{-1}(x)$: TOMA $\bar{w}_0$ y $\bar{w}_1$ EN $p^{-1}(w_0)$. COMO $\bar{W}$ ES CONEXO POR ARCOS EXISTE UNA CLASE DE CURVAS $\bar{\alpha} \in \bar{W}$ CON PUNTO INICIAL EN $\bar{w}_0$ Y TERMINAL EN $\bar{w}_1$. SEA $\alpha = p_*(\bar{\alpha})$, α ES ENTONCES UNA CLASE DE EQUIVALENCIA DE CURVAS CERRADAS EN w_0 TAL QUE, POR DEFINICIÓN, $\bar{w}_0 \cdot \alpha = \bar{w}_1$ COMO REQUERÍAMOS.

ASÍ QUE $p^{-1}(w_0)$ ES UN $\pi(W, w_0)$-ESPACIO DERECHO HOMOGÉNEO (como en el Apéndice **A**). RESTA IDENTIFICAR A LOS ACTORES:

¿QUIÉN ES, PARA $\bar{w} \in p^{-1}(w_0)$, $H = \{\alpha \in \pi(W, w_0) : \bar{w}\cdot\alpha = \bar{w}\}$, EL SUBGRUPO DE ISOTROPÍA CORRESPONDIENTE A $\bar{w}$? PUES ES EL CONJUNTO DE LAS CLASES DE CURVAS CERRADAS EN w_0 QUE SE LEVANTAN CERRADAS EN $\bar{w}$, ES DECIR, $H = p_*\pi(\bar{W}, \bar{w})$; ASÍ QUE COMO $\pi(W, w_0)$-ESPACIO DERECHO HOMOGÉNEO, $p^{-1}(w_0)$ ES ISOMORFO AL ESPACIO DE CLASES LATERALES $\pi(W, w_0)/p_*\pi(\bar{W}, \bar{w}) = \{p_*\pi(\bar{W}, \bar{w})\cdot\alpha : \alpha \in \pi(W, w_0)\}$ Y EL NÚMERO DE HOJAS DE LA CUBRIENTE ES IGUAL AL ÍNDICE DEL SUBGRUPO $p_*\pi(\bar{W}, \bar{w})$ EN $\pi(W, w_0)$.

VOY A REPETIR EL ARGUMENTO USADO EN EL APÉNDICE A:

DECIR QUE $\pi(W, w_0)$ OPERA TRANSITIVAMENTE EN $p^{-1}(w_0)$ ES DECIR QUE EL MAPEO

$$\begin{aligned} \pi(W, w_0) &\longrightarrow p^{-1}(w_0) \\ \alpha &\longmapsto \bar{w}\cdot\alpha \end{aligned} \qquad (*)$$

ES SUPRAYECTIVO.

POR OTRO LADO, $\bar{w}\cdot\alpha = \bar{w}\cdot\beta \Leftrightarrow \bar{w}\cdot(\alpha\beta^{-1}) = \bar{w} \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in p_*\pi(\bar{W}, \bar{w})$, ASÍ QUE EL MAPEO $(*)$ INDUCE UN MAPEO

$$\begin{aligned} \pi(W, w_0)/p_*\pi(\bar{W}, \bar{w}) &\longrightarrow p^{-1}(w_0) \\ p_*\pi(\bar{W}, \bar{w})\cdot\alpha &\longmapsto \bar{w}\cdot(p_*\pi(\bar{W}, \bar{w})\cdot\alpha) \end{aligned}$$

QUE ES BIYECTIVO.

EL SIGUIENTE RESULTADO ESTABLECE UNA CONEXIÓN ENTRE EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS (TRANSFORMACIONES DE CUBIERTA) DE UNA SUPERFICIE CUBRIENTE Y LA ACCIÓN DE $\pi(W, w_0)$ EN $p^{-1}(w_0)$:

PROPOSICIÓN 6.1: PARA CUALQUIER AUTOMORFISMO $\varphi \in A(\bar{W}, p)$, CUALQUIER PUNTO $\bar{w} \in p^{-1}(w_0)$ Y CUALESQUIERA $\alpha \in \pi(W, w_0)$:

$$\varphi(\bar{w}\cdot\alpha) = (\varphi\bar{w})\cdot\alpha$$

ES DECIR: CADA ELEMENTO $\varphi \in A(\bar{W}, p)$ INDUCE UN AUTOMORFISMO DEL CONJUNTO $p^{-1}(w_0)$ CONSIDERADO COMO UN $\pi(W, w_0)$-ESPACIO DERECHO.

Demostración: LEVANTA α A LA CLASE DE CURVAS $\bar{\alpha} \in \bar{W}$ CON PUNTO INICIAL EN $\bar{w}$ Y QUE SATISFAGA $p_*(\bar{\alpha}) = \alpha$. POR DEFINICIÓN $\bar{w}\cdot\alpha$ ES EL PUNTO TERMINAL DE $\bar{\alpha}$. AHORA OBSERVA QUIÉN ES LA CURVA $\varphi_*(\bar{\alpha}) \in \bar{W}$: INICIA EN $\varphi(\bar{w})$ Y TERMINA EN $\varphi(\bar{w}\cdot\alpha)$, ADEMÁS

$$p_*[\varphi_*(\bar{\alpha})] = (p\varphi)_*(\bar{\alpha}) = \alpha \quad \text{(la última igualdad porque } \varphi \text{ es}$$

morfismo).

LO QUE QUIERE DECIR QUE $\varphi_*(\bar{\alpha})$ ES TAMBIÉN UN LEVANTAMIENTO DE α, POR DEFINICIÓN DEL PRODUCTO SE TIENE QUE $(\varphi\bar{w})\cdot\alpha$ ES EL PUNTO TERMINAL DE $\varphi_*(\bar{\alpha})$: $(\varphi\bar{w})\cdot\alpha = \varphi(\bar{w}\cdot\alpha)$

+.

YA PODEMOS DETERMINAR COMPLETAMENTE LA ESTRUCTURA DEL GRUPO DE TRANSFORMACIONES DE CUBIERTA $A(\bar{W},p)$:

TEOREMA 6.2: SEA $(\bar{W},p)$ SOBRE W. EL GRUPO $A(\bar{W},p)$ ES NATURALMENTE ISOMORFO AL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DEL CONJUNTO $p^{-1}(w_0)$, $w_0 \in W$, CONSIDERADO COMO UN π-(W,w_0)-ESPACIO DERECHO.

Demostración: EN VISTA DE LA PROPOSICIÓN ANTERIOR, SI $\varphi \in A(\bar{W},p)$ ENTONCES $\varphi|_{p^{-1}(w_0)}$ ES UN AUTOMORFISMO DEL $\pi(W,w_0)$-ESPACIO DERECHO $p^{-1}(\ \ )$. MÁS AÚN, SABES QUE φ ESTÁ COMPLETAMENTE DETERMINADO POR SU RESTRICCIÓN A $p^{-1}(w_0)$ (DE HECHO ESTÁ COMPLETAMENTE DETERMINADO POR UN PUNTO EN $p^{-1}(w_0)$ Y SU IMÁGEN EN VIRTUD DEL COROLARIO 5.2); ES DECIR QUE EL MAPEO

$$\begin{aligned} A(\bar{W},p) &\longrightarrow \operatorname{Aut}(p^{-1}(w_0)) \\ \varphi &\longmapsto \varphi|_{p^{-1}(w_0)} \end{aligned}$$

ES INYECTIVO.

CONSIDERA AHORA AL SUBGRUPO DE $\operatorname{Aut}(p^{-1}(w_0))$ DADO POR $\{\varphi|_{p^{-1}(w_0)} : \varphi \in A(\bar{W},p)\}$ Y DOS PUNTOS $\bar{w}_1$ Y $\bar{w}_2$ CON EL MISMO SUBGRUPO DE ISOTROPÍA $(\bar{w}_i \in p^{-1}(w_0))$. COMO $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_1) = p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_2)$ ENTONCES EXISTE UN AUTOMORFISMO $\psi \in A(\bar{W},p)$ ∋. $\psi(\bar{w}_1) = \bar{w}_2$ (ES EL COROLARIO 5.5) Y POR EL LEMA 2 DEL APÉNDICE **A** SE SIGUE QUE

$$\{\varphi|_{p^{-1}(w_0)} : \varphi \in A(\bar{W},p)\} = \operatorname{Aut}(p^{-1}(w_0))$$

QUE ES LO QUE BUSCÁBAMOS DEMOSTRAR.

+.

COROLARIO 6.3: PARA CUALQUIER PUNTO $w \in W$ Y CUALQUIER $\tilde{w} \in p^{-1}(w)$, EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS $A(\tilde{W}, p)$ ES ISOMORFO AL GRUPO COCIENTE $N(p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w}))/p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w})$, DONDE $N(p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w}))$ DENOTA AL NORMALIZADOR DEL SUBGRUPO $p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w})$ EN $\pi(W,w)$.

Porque de acuerdo a 6.2, $A(\tilde{W}, p)$ es naturalmente isomorfo al Grupo de Automorfismos del $\pi(W,w)$-Espacio derecho $p^{-1}(w)$, que por el Teorema 2 del Apéndice **A** es isomorfo a ese grupo cociente.

UNA CLASE IMPORTANTE DE SUPERFICIES CUBRIENTES ES AQUELLA PARA LA QUE $p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w})$ ES UN SUBGRUPO NORMAL DE $\pi(W,w)$ (*). TAL SUPERFICIE CUBRIENTE SE DENOMINA Regular. Recordando que el normalizador de un subgrupo normal es todo el grupo, obtenemos el

COROLARIO 6.4: SI $(\tilde{W}, p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE REGULAR DE W, ENTONCES $A(\tilde{W}, p)$ ES ISOMORFO AL GRUPO COCIENTE $\pi(W,w)/p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w})$ PARA CUALESQUIERA $w \in W$ Y $\tilde{w} \in p^{-1}(w)$

Y EN PARTICULAR ESTE COROLARIO SE APLICA A LA SUPERFICIE CUBRIENTE UNIVERSAL:

COROLARIO 6.5: SI $(\tilde{W}, p)$ ES UNA CUBRIENTE UNIVERSAL DE W, ENTONCES $A(\tilde{W}, p)$ ES ISOMORFO A $\pi(W)$ Y EL ORDEN DEL GRUPO $\pi(W)$ ES IGUAL AL NÚMERO DE HOJAS DE LA SUPERFICIE CUBRIENTE $(\tilde{W}, p)$.

§4.7. CUBRIENTES REGULARES VS. ESPACIOS COCIENTE.

SEA $(\tilde{W}, p)$ SOBRE W. COMO p ES UN MAPEO ABIERTO, W TIENE LA TOPOLOGÍA COCIENTE INDUCIDA POR p (ver MASSEY, por ejemplo), ASÍ QUE PODEMOS VER A W COMO EL ESPACIO TOPOLÓGICO OBTENIDO DE $\tilde{W}$ AL IDENTIFICAR CIERTOS PUNTOS: PARA CUALQUIER PUNTO EN W, w, TODOS LOS PUNTOS DE $p^{-1}(w)$ SE IDENTIFICARÁN EN UN ÚNICO PUNTO. RECORDEMOS QUE EL GRUPO $A(\tilde{W}, p)$ PERMUTA LOS ELEMENTOS DE $p^{-1}(w)$ ENTRE ELLOS MISMOS, SIN EMBARGO en general NO ES CIERTO QUE EL ESPACIO COCIENTE $\tilde{W}/A(\tilde{W},p)$ SEA NATURALMENTE HOMEOMORFO A W PORQUE PODRÍAN EXISTIR PUNTOS DISTINTOS $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in p^{-1}(w)$ TALES QUE NO EXISTA $\varphi \in A(\tilde{W}, p)$ CON $\varphi(\tilde{w}_1) = \tilde{w}_2$ (ES DECIR: NO NECESARIAMENTE SUCEDE QUE $A(\tilde{W}, p)$ OPERA TRANSITIVAMENTE EN $p^{-1}(w)$). SIN EMBARGO YA CONOCEMOS CUANDO SÍ:

LEMA 7.1: SI $(\tilde{W}, p)$ SOBRE W, EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS $A(W, p)$ OPERA TRANSITIVAMENTE EN $p^{-1}(w)$, $w \in W$, $\Leftrightarrow$ $(\tilde{W}, p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE REGULAR DE W.

Demostración:

$\Rightarrow]$ EN VIRTUD DEL COROLARIO 5.5, $A(\tilde{W}, p)$ ES TRANSITIVO EN $p^{-1}(w)$ $\Leftrightarrow$ para

(*) TAL CONDICIÓN ES INDEPENDIENTE DE LA ELECCIÓN DEL PUNTO $\tilde{w} \in p^{-1}(w)$: SI TOMAMOS OTRO PUNTO $\tilde{w}_1 \in p^{-1}(w)$, SABEMOS QUE $p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w}_1) = \alpha \cdot p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w}) \cdot \alpha^{-1}$ PARA ALGUNA CLASE $\alpha \in \pi(W,w)$, PERO COMO $p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w})$ ES NORMAL, ENT. $p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w}_1) = p_*\pi(\tilde{W},\tilde{w})$ ES NORMAL.
ES DECIR: en una sup. cubriente regular los puntos con la misma proyección son indistinguibles.

cualesquiera $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2 \in p^{-1}(w)$ se satisface que $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_1) = p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_2)$ y por el Teorema 3.2 sabes que los subgrupos $p_*\pi(\bar{W},\bar{w})$, $\bar{w} \in p^{-1}(w)$, SON EXACTAMENTE una clase de conjugación en $\pi(W,w)$, ENTONCES $p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_1) = \{\alpha^{-1}\cdot p_*\pi(\bar{W},\bar{w})\alpha : \alpha \in \pi(W,w)\} = \{\alpha^{-1}\cdot p_*\pi(\bar{W},\bar{w}_1)\cdot\alpha : \alpha\in\pi(W,w)\}$ Y ES NORMAL

$\Leftarrow$] se sigue de la observación (*) al pie de la página anterior y del COROLARIO 5.5.

CONSECUENCIA: si $(\bar{W},p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE REGULAR DE W, ENTONCES W ES NATURALMENTE HOMEOMORFA A LA SUPERFICIE COCIENTE $\bar{W}/A(\bar{W},p)$. Si AMBAS SON SUPERFICIES DE RIEMANN ¿SERÁN CONFORMEMENTE EQUIVALENTES? MOSTRAREMOS ADELANTE QUE si $(\tilde{W},p)$ ES LA CUBRIENTE UNIVERSAL DE W LA RESPUESTA ES AFIRMATIVA, sin embargo antes exploraremos un tipo de recíproco de la consecuencia anterior:

SEAN Y UN ESPACIO TOPOLÓGICO, G UN GRUPO DE HOMEOMORFISMOS DE Y y $p: Y \to Y/G$ LA PROYECCIÓN NATURAL DE Y SOBRE SU ESPACIO COCIENTE: ¿BAJO QUÉ CONDICIONES ES (Y,p) UNA SUPERFICIE CUBRIENTE REGULAR DE Y/G CON $A(Y,p) = G$?

HAY CIERTAS CONDICIONES NECESARIAS QUE DEBEN SATISFACERSE: si $(\bar{W},p)$ ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE REGULAR DE W, $A(\bar{W},p)$ OPERA SIN PUNTOS FIJOS Y CIERTAMENTE la órbita DE CUALQUIER $\bar{w}\in\bar{W}$ BAJO $A(\bar{W},p)$ (el conjunto de puntos $\{\varphi(\bar{w}) : \varphi\in A(\bar{W},p)\}$) ES UN SUBCONJUNTO DISCRETO Y CERRADO DE $\bar{W}$. ¡MÁS QUE ESO! AFIRMO QUE TODO PUNTO $\bar{w}\in\bar{W}$ POSEE UNA VECINDAD $\mathcal{U}$ TAL QUE LOS CONJUNTOS $\{\varphi(\mathcal{U}) : \varphi\in A(\bar{W},p)\}$ SON AJENOS DOS A DOS (BASTA TOMAR POR $\mathcal{U}$ A LA IMAGEN INVERSA DE ALGUNA VECINDAD ELEMENTAL APROPIADA EN W). UN GRUPO DE HOMEOMORFISMOS QUE SATISFACE LO ANTERIOR SE DICE QUE ES *propiamente discontinuo*. OBSERVA QUE un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos no tiene puntos fijos.

UNA VEZ MÁS, LAS CONDICIONES NECESARIAS RESULTAN TAMBIÉN SUFICIENTES:

PROPOSICIÓN 7.2: SEA Y UNA SUPERFICIE (espacio topológico 2-dimensional en particular conexo y localmente conexo por arcos). SEA G UN GRUPO PROPIAMENTE DISCONTINUO DE HOMEOMORFISMOS DE Y. Si $p: Y \to Y/G$ DENOTA LA PROYECCIÓN NATURAL DE Y SOBRE EL ESPACIO COCIENTE ENTRE AMBOS, ENTONCES (Y,p) ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE REGULAR DE Y/G Y $G = A(Y,p)$

Demostración: SEA $x\in Y/G$. DEBEMOS MOSTRAR QUE x POSEE UNA VECINDAD ELEMENTAL.

ELIJE $y\in Y$ ∋ $p(y) = x$. POR HIPÓTESIS EXISTE UNA VECINDAD N DE y TAL QUE LOS CONJUNTOS $\{\varphi(N) : \varphi\in G\}$ SON AJENOS DOS A DOS. COMO Y ES SUPERFICIE, N ES UN DISCO TOPOLÓGICO Y POR ELLO ES SIMPLEMENTE CONEXA.

SEA $\mathcal{U} = p(N)$. AFIRMO QUE $\mathcal{U}$ ES UNA VECINDAD ELEMENTAL DE x.

1. $\mathcal{U}$ ES ABIERTA PORQUE p ES ABIERTO Y CIERTAMENTE ES CONEXA POR ARCOS.
2. OBVIAMENTE p MAPEA A N SOBRE $\mathcal{U}$ Y CIERTAMENTE ES 1-1, COMO p ES ABIERTA ENTONCES ES UN homeomorfismo de N sobre $\mathcal{U}$.

3. CONSIDERA AHORA UNA COMPONENTE POR ARCOS N' DE $p^{-1}(U)$ DISTINTA DE N; EXISTE ENTONCES $\varphi \in G$ ∋. $N' = \varphi(N)$. COMO φ ES UN HOMEOMORFISMO DE N SOBRE N' Y $p = p\varphi$, ENTONCES p TAMBIÉN ES UN HOMEOMORFISMO DE N' SOBRE U.

ASÍ ES QUE U ES UNA VECINDAD ELEMENTAL DE X Y (Y, p) ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE DE Y/G. ES CLARO QUE TODA $\varphi \in G$ ES UN AUTOMORFISMO DE (Y, p), ASÍ QUE $G \subseteq A(Y, p)$. SUPONGAMOS QUE LA CONTENCIÓN ES PROPIA, ES DECIR, QUE G ES UN SUBGRUPO PROPIO DE $A(Y, p)$, OBVIAMENTE ELLO CONTRADICE EL HECHO DE QUE EL GRUPO $A(Y, p)$ ACTÚA SIN PUNTOS FIJOS.

DEL SIGUIENTE MODO:

DADO $\bar{y} \in Y/G$ LA CONDICIÓN DE PERTENENCIA DE UN PUNTO $y \in Y$ A LA FIBRA $p^{-1}(\bar{y})$ ES QUE PARA CUALESQUIERA $y' \in p^{-1}(\bar{y})$ EXISTA $g \in G$ ∋. $g(y') = y$, ASÍ QUE G ACTÚA TRANSITIVAMENTE EN $p^{-1}(\bar{y})$ por definición. SI LA CONTENCIÓN $G \subseteq A(Y, p)$ FUERA PROPIA PODRÍAMOS ELEGIR UN AUTOMORFISMO $\varphi \in [A(Y, p) - G]$ QUE SABEMOS ESTÁ UNÍVOCAMENTE DETERMINADO POR UN PUNTO $y \in Y$ Y SU IMAGEN $\varphi(y)$ que por definición están en la misma fibra, ASÍ QUE EXISTE $g \in G$ TAL QUE

$$\varphi(y) \cdot g = y$$

ES DECIR, φg ES UN AUTOMORFISMO CON UN PUNTO FIJO: NO LE QUEDA OTRA MÁS QUE SER LA IDENTIDAD, PERO COMO G ES SUBGRUPO, φ TAMPOCO PUEDE SER LA IDENTIDAD. CONTRADICCIÓN FLAGRANTE, ASÍ QUE $G = A(Y, p)$.

ABANDONAMOS LA TOPOLOGÍA ALGEBRÁICA FORMAL Y REGRESAMOS A LAS SUPERFICIES DE RIEMANN.

SI W ES UNA SUPERFICIE DE RIEMANN Y $\bar{W}$ ES LA CUBRIENTE UNIVERSAL DE W CON LA ESTRUCTURA CONFORME heredada de W, LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE ALGUNA FUNCIÓN LOCALMENTE MEROMORFA EN W PUEDE LEVANTARSE A $\bar{W}$. SI W ES SIMPLEMENTE CONEXA, $\bar{W}$ TAMBIÉN Y TIENE UNA SOLA HOJA Y TODA CURVA CERRADA EN W SE LEVANTA EN UNA CURVA CERRADA EN $\bar{W}$ y el fenómeno de multivaluadez ha desaparecido

HEMOS PROBADO EL

TEOREMA de MONODROMÍA: EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA W, SI $z = a_{-m}t^{-m} + \ldots + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ (t = PARÁMETRO LOCAL EN w_0) ES UN ELEMENTO DE FUNCIÓN EN w_0, Y SI EN LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE z A LO LARGO DE CUALESQUIERA CURVAS EN W NO ENCONTRAMOS OTROS PUNTOS CRÍTICOS QUE POLOS ORDINARIOS, ENTONCES ESTAS CONTINUACIONES CONSTITUYEN UNA FUNCIÓN UNIFORME Y REGULAR SALVO EN POLOS EN W.

(Y con esto me despido de la notación tradicional y del Dr. Weyl).

V

teoría de potencial plana

§ 5.1. ELEMENTOS DE FUNCIONES ARMÓNICAS

UNA FUNCIÓN ARMÓNICA O FUNCIÓN DE POTENCIAL u ES UNA APLICACIÓN COMPLEJA REAL VALUADA EN ALGUNA REGIÓN $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ QUE SATISFACE

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\text{DONDE } \Delta \text{ ES EL LAPLACIANO } \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)$$

ESTA DEFINICIÓN ES POBRE EN EL SENTIDO DE QUE AL MENOS u DEBE SER DE CLASE C^2. AUNQUE PAULATINAMENTE AMPLIAREMOS EL CONCEPTO DE ARMONICIDAD, POR LO PRONTO PERMITE MOSTRAR RÁPIDAMENTE IMPORTANTES PROPIEDADES

1. LAS CONSTANTES Y LAS LINEALES $ax+by$ SON ARMÓNICAS
2. SE DEFINE LA CONJUGADA ARMÓNICA v DE u COMO AQUELLA FUNCIÓN $v: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ QUE SATISFACE CON u LAS ECUACIONES DE CAUCHY RIEMANN. (ENTONCES $-u$ ES LA CONJUGADA ARMÓNICA DE v). NO SIEMPRE ES POSIBLE HALLAR TAL v DADA u, AUNQUE HAY CONDICIONES sobre Ω PARA LA EXISTENCIA)
3. LAS PARTES REAL E IMAGINARIA DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(z)=u(z)+iv(z)$ SON ARMÓNICAS, DONDE $f(z)$ SEA ANALÍTICA. EN PARTICULAR SON FUNCIONES ARMÓNICAS $\operatorname{Re} z^2 = x^2-y^2$ Y LA PARTE REAL DE ALGUNA RAMA DE $\log z = \log|z|$; LA PRIMERA EN $\mathbb{C}$ Y LA SEGUNDA EN $\mathbb{C}-\{0\}$

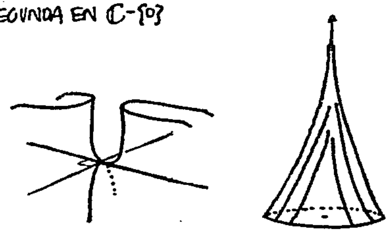


FIG. GRÁFICAS EN $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ DE ALGUNAS FNS. ARMÓNICAS: PUEDEN SER sillas o trompetas.

4. GARANTIZADA UNA EXISTENCIA, EXISTE UNA familia DE CONJUGADAS ARMÓNICAS v_α DE $u: \Omega \to \mathbb{R}$ EN Ω. PARA MOSTRARLO UTILIZO UN EJEMPLO:

   SIENDO $u(x,y) = x^2-y^2$, UNA CONJUGADA ARMÓNICA v DEBE SATISFACER
   $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

   ASÍ ES QUE $v = 2xy + \varphi(y)$ DE LA PRIMERA, Y SUSTITUYENDO EN LA SEGUNDA OBTENEMOS QUE $\varphi'(y)=0$ Y POR TANTO ES CONSTANTE $\varphi(y)=\alpha$.
   ENTONCES HAY UNA FAMILIA DE FUNCIONES ANALÍTICAS $z^2+i\alpha$ CON PARTE REAL x^2-y^2

5. POR CAUCHY-RIEMANN, LAS CURVAS DE NIVEL DE UN PAR DE FUNCIONES CONJUGADAS ARMÓNICAS SON ORTOGONALES (PORQUE EL PRODUCTO INTERIOR DE LOS GRADIENTES ES NULO)

6. QUIZÁ LA PROPIEDAD MÁS IMPORTANTE EN LAS APLICACIONES ES la propiedad del valor medio. BOSQUEJAREMOS SU DEMOSTRACIÓN

SI $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$
$(x,y)\longmapsto(U(x,y),V(x,y))$ DONDE Ω ES CERRADO, $\partial\Omega$ ES C^1 A TROZOS Y η ES LA NORMAL UNITARIA A $\partial\Omega$,

$\operatorname{div}F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$
$(x,y)\longmapsto\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)$, EL TEOREMA DE GREEN DICE QUE $\iint_{\Omega}\operatorname{div}F=\int_{\partial\Omega}F\cdot\eta$

SI AHORA $u:\Omega\to\mathbb{R}$ ES ARMÓNICA Y F SE DEFINE COMO $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, OBTENEMOS QUE $\operatorname{div}F=\Delta u=0$, ASÍ QUE

$$0=\iint_{\Omega}\operatorname{div}F=\int_{\partial\Omega}F\cdot\eta=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\,d\theta$$

longitud de arco de $\partial\Omega$.

QUE EXPRESA QUE LA SUMA DE LOS VALORES DE $\frac{\partial u}{\partial\eta}$ EN LA FRONTERA SE "COMPENSAN", POR ESEMPLO EN UN DISCO:

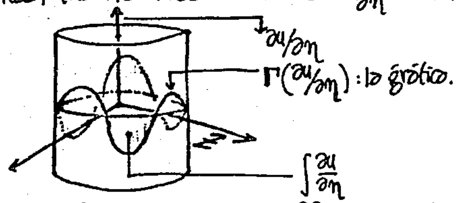


Figura 1.

. ES AL MENOS RAZONABLE EL SIGUIENTE

TEOREMA del valor medio : SI u ES ARMÓNICA EN Ω Y EL DISCO DEFINIDO POR $z_0+re^{i\theta}$ ESTÁ EN Ω ENTONCES

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \qquad (1)$$

ES DECIR: EL PROMEDIO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN ARMÓNICA SOBRE UN CÍRCULO EQUIVALE AL VALOR EN EL CENTRO.* GRACIAS A ÉL PODEMOS MOSTRAR QUE ES VÁLIDO EL

TEOREMA principio del máximo-mínimo : UNA FUNCIÓN ARMÓNICA NO CONSTANTE NUNCA TIENE UN MÁXIMO O UN MÍNIMO EN SU REGIÓN DE DEFINICIÓN, ASÍ ES QUE EL MÁXIMO Y EL MÍNIMO EN UN COMPACTO SE ALCANZAN EN LA FRONTERA

cuya demostración salta a la vista de la figura 1, graficando $u(z)$ en el círculo y centrándolo en z_0, que es el contenido del teorema del valor promedio. EL MÍNIMO, PORQUE $-u(z)$ ES ARMÓNICA TAMBIÉN.

CONSECUENCIA : SI $u(z)$ ES CONTINUA EN UN COMPACTO E Y ARMÓNICA EN $\mathring{E}$, $u(z)$ ESTÁ COMPLETAMENTE DETERMINADA POR SUS VALORES EN LA FRONTERA DE E: DE HECHO SI u_1 Y u_2 SON DOS TALES FUNCIONES, SU DIFERENCIA u_1-u_2 ES UNA FN. ARMÓNICA QUE SE ANULA EN ∂E , POR EL Principio del máximo $u_1-u_2\equiv 0$.
SURGE NATURALMENTE EL PROBLEMA DE, DADA $u(\zeta)$ CONTINUA EN LA FRONTERA $\partial\Omega$ DE UNA REGIÓN, EXTENDER (o determinar) $u(z)$ EN Ω : **EL PROBLEMA DE DIRICHLET**, SEGÚN VEREMOS FUNDAMENTAL PARA LA CLASIFICACIÓN QUE ESTA TESIS PRETENDE MOSTRAR.

---

* CONSULTA **AHLFORS** [1] PARA DEMOSTRACIONES COMPLETAS.

PUEDE MOSTRARSE QUE EL PROBLEMA DE DIRICHLET CON VALORES FRONTERIZOS $u(\zeta)$ ES SIEMPRE SOLUBLE EN EL DISCO $|z|\leq R$ $(|\zeta|=R)$ POR MEDIO DE LA INTEGRAL DE POISSON. CUANDO $R=1$, ELLA TIENE LA FORMA

$$P_u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,u(\theta)\,d\theta$$

EL TEOREMA DE SCHWARZ GARANTIZA LA VALIDEZ DE LA SOLUCIÓN.

PARA RESOLVERLO EN REGIONES MÁS GENERALES, NECESITAMOS MÁS HERRAMIENTA, teoría de potencial.

REGRESANDO AL PRINCIPIO DEL MÁXIMO Y A LA PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO, OBSERVA QUE BASTA SUPONER LA VALIDEZ DE LA SEGUNDA en círculos pequeños PARA OBTENER LA VALIDEZ DEL PRIMERO; ES DECIR:

TEOREMA (principio del máximo para funciones con la PVM): UNA FUNCIÓN CONTINUA QUE SATISFACE (1) PARA CÍRCULOS $|z-z_0|=r_0<r$ (DONDE $r_0=r_0(z_0)$) NO PUEDE TENER UN MÁXIMO O UN MÍNIMO EN EL INTERIOR DE LA REGIÓN EN QUE ESTÉ DEFINIDA.

INVERSAMENTE:

TEOREMA: SI $u(z)$ ES CONTINUA Y SATISFACE (1) EN TODO PUNTO DE Ω, ENTONCES $u(z)$ ES ARMÓNICA

Demostración:

SEA $u:\Omega\to\mathbb{R}$ TAL FUNCIÓN. OBSERVA QUE SI V ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA EN Ω, ENTONCES POR LINEALIDAD DE LA INTEGRAL $u-V$ SATISFACE (1) PARA CÍRCULOS PEQUEÑOS: CONSIDERA UNO DE ELLOS, EL DISCO $|z-z_0|\leq\rho\subset\Omega$. CON LA INTEGRAL DE POISSON PUEDO CONSTRUIR UNA FUNCIÓN $V(z)$ ARMÓNICA EN $|z-z_0|<\rho$ Y CONTINUA E IGUAL A $u(z)$ EN $|z-z_0|=\rho$.

COMO $u-V$ SATISFACE (1), SATISFACE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO Y COMO SE ANULA EN $|z-z_0|=\rho$, ENTONCES SE ANULA EN TODO $|z-z_0|\leq\rho$ Y $u(z)\equiv V(z)$ EN $|z-z_0|\leq\rho$. POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO, $u-V\equiv 0$ EN Ω ASÍ QUE u ES ARMÓNICA EN Ω

ESTE TEOREMA EXPRESA LA GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN ARMÓNICA: AQUELLA FUNCIÓN $u:\Omega\to\mathbb{R}$ CONTINUA QUE SATISFAGA (1). ES MÁS GENERAL PUES NO REQUERIMOS QUE SEA C^2.

SI AHORA $u(z)$ ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA EN $|z|<r$ QUE ES CONTINUA EN $|z|=\rho$, PODEMOS ESCRIBIR LA INTEGRAL DE POISSON PARA VALORES DE $|z|=\rho<r$:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}\,u(\rho e^{i\theta})\,d\theta \qquad (2)$$

CONSIDERA LA DESIGUALDAD: $(\rho-r)^2\leq|\rho e^{i\theta}-z|^2\leq(\rho+r)^2$, EQUIVALE A $1/(\rho-r)^2\geq\frac{1}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}\geq 1/(\rho+r)^2$, ES DECIR:

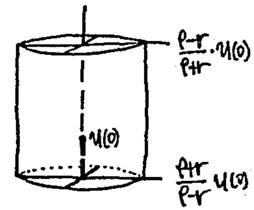
$$\frac{(\rho-r)(\rho+r)}{(\rho-r)}\geq\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}\geq\frac{(\rho-r)(\rho+r)}{(\rho+r)}, \text{ O LO QUE ES LO MISMO: } \frac{\rho+r}{\rho-r}\geq\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}\geq\frac{\rho-r}{\rho+r}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\,d\theta\left[\frac{\rho-r}{\rho+r}\right]\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}u(\rho e^{i\theta})\,d\theta\leq\left[\frac{\rho+r}{\rho-r}\right]\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

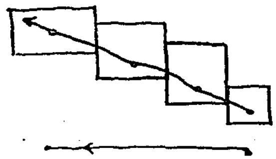
LA PRIMERA DESIGUALDAD ES VÁLIDA SOLAMENTE SI $u(\rho e^{i\theta})\geq 0$. APLICANDO (2) EN AMBOS LADOS DE

LA DESIGUALDAD, PARA $z=0$ (EL CENTRO DEL DISCO) OBTENEMOS:

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}\,u(0) \le u(z) \le \frac{\rho+r}{\rho-r}\,u(0) \qquad \dots (3)$$



LA DESIGUALDAD DE HARNACK. FÍJATE EN LA FUERZA DEL RESULTADO: EXPRESA COTAS DE LOS VALORES DE cualquier función armónica que esté definida en el disco $|z|<r$, CONTINUA EN $|z|=r$, Y ES FÁCIL EXTENDERLA A DISCOS NO PRECISAMENTE CENTRADOS EN $z=0$. GEOMÉTRICAMENTE, DICE QUE TODAS LAS FUNCIONES ARMÓNICAS DEFINIDAS EN EL DISCO ESTÁN ACOTADAS EN UN CILINDRO (figura) Y QUE NO PUEDEN VALER EN EL INTERIOR MÁS QUE "LAS TAPAS" (figura inferior). EN LA DEMOSTRACIÓN DESTACAMOS QUE LA DESIGUALDAD ES VÁLIDA SOLAMENTE PARA FUNCIONES ARMÓNICAS ≥ 0.



UNA CONSECUENCIA IMPORTANTÍSIMA DE LA ANTERIOR DESIGUALDAD ES EL

TEOREMA (Principio de Harnack). SEA $u_n(z)$ UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES CADA UNA DEFINIDA Y ARMÓNICA EN UNA REGIÓN Ω_n. SEA Ω UNA REGIÓN TAL QUE TODO PUNTO EN Ω TIENE UNA VECINDAD QUE ESTÁ CONTENIDA EN TODAS LAS Ω_n SALVO UN NÚMERO FINITO Y QUE EN ESTA VECINDAD $u_n(z) \le u_{n+1}(z)$ PARA n SUFICIENTEMENTE GRANDE, ENTONCES HAY DOS POSIBILIDADES

(i) $u_n(z) \longrightarrow \infty$ UNIFORMEMENTE EN COMPACTOS CONTENIDOS EN Ω, o bien

(ii) $u_n(z) \longrightarrow u(z)$ UNIFORMEMENTE EN COMPACTOS CONTENIDOS EN Ω CON $u(z)$ ARMÓNICA EN Ω.

UNA DEMOSTRACIÓN FORMAL PUEDE ENCONTRARSE EN AHLFORS, C.A. pág. 244. EL COMPORTAMIENTO ES EN LÍNEAS GENERALES EL SIGUIENTE.

PARA MOSTRAR (i), SUPONGAMOS QUE EN ALGÚN PUNTO $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0)=\infty$. Si n ES SUFICIENTEMENTE GRANDE PODEMOS CONSEGUIR UNA SUCESIÓN NO NEGATIVA Y CRECIENTE DE FUNCIONES ARMÓNICAS u_n-u_m $(n\geq m)$ A LA QUE PODRÍAMOS APLICAR EL MIEMBRO IZQUIERDO DE (3) EN UNA VECINDAD DE z_0 CONTENIDA EN Ω Y CONCLUIR QUE EN UN DISCO CERRADO CONTENIDO EN TAL VECINDAD LA FUNCIÓN CONVERGE A ∞. AHORA BIEN NO ES POSIBLE QUE EXISTAN PUNTOS EN Ω QUE EN EL LÍMITE DE (u_n) NO TOMEN EL VALOR INFINITO PORQUE EL CRECIMIENTO DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS ES ACOTADO (HARNACK), ASÍ QUE SI EN ALGÚN PUNTO FUESE FINITO NO PODRÍA TOMARSE EL VALOR ∞ (ver figura siguiente)

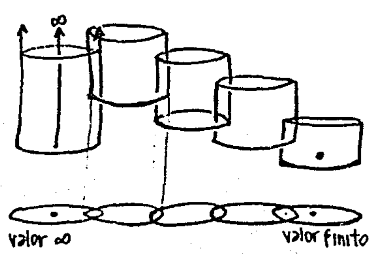


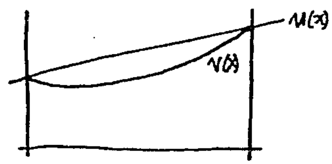
figura.
"NO SE SALEN POR LAS TAPAS"

HEMOS MOSTRADO QUE SI EN ALGÚN PUNTO EL LÍMITE NO ES FINITO, ENTONCES TODO EL LÍMITE ES ∞. SI AHORA, PARA MOSTRAR (ii), TENEMOS QUE $\lim_{n\to\infty} u_n(z) < \infty$ PODEMOS APLICAR EL MIEMBRO DERECHO DE HARNACK A LA SUCESIÓN $u_n - u_m$ ANTERIOR. CIERTAMENTE TENDREMOS NUEVAMENTE UNA VECINDAD PEQUEÑA (LA MENCIONADA EN (i)) EN QUE LA CONVERGENCIA ES UNIFORME Y COMO PODEMOS EXPRESAR A $u(z)$ COMO UNA INTEGRAL DE POISSON, HEMOS TERMINADO

REGRESAMOS AL PROBLEMA DE DIRICHLET:

§5.2 FUNCIONES SUBARMÓNICAS

EN UNA VARIABLE, EL LAPLACIANO TOMA LA FORMA $d^2u/dx^2 = 0$, ASÍ QUE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS EN UNA VARIABLE SON LAS LINEALES $u(x) = ax+b$. UNA FUNCIÓN CONVEXA EN UNA VARIABLE, $v(x)$, ES AQUELLA QUE, EN CUALQUIER INTERVALO, ES MENOR O IGUAL A LA FUNCIÓN LINEAL $u(x)$ QUE TIENE LOS MISMOS VALORES QUE $v(x)$ EN LOS EXTREMOS DEL INTERVALO.



LAS FUNCIONES subarmónicas EN $\mathbb{C}$ APARECEN COMO EL ANÁLOGO DE LAS FUNCIONES CONVEXAS (DEL MISMO MODO EN QUE PODEMOS PENSAR A LAS ARMÓNICAS COMO EL ANÁLOGO DE LAS lineales), ESTA IDEA MOTIVA LA SIGUIENTE

DEFINICIÓN 1: UNA FUNCIÓN $v(z)$ REAL VALUADA ES SUBARMÓNICA EN Ω SI SE SATISFACE LO SIGUIENTE: SI $u(z)$ ES ARMÓNICA EN Ω Y $v(\zeta) \le u(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Omega$, ENTONCES $v(z) \le u(z)$ PARA $z \in \Omega$.

O BIEN

DEFINICIÓN 2: $v: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA ES SUBARMÓNICA EN Ω SI PARA CUALQUIER FUNCIÓN ARMÓNICA $u(z)$ EN $\Omega' \subseteq \Omega$, LA DIFERENCIA $v-u$ SATISFACE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO EN Ω'.

Ciertamente la segunda definición implica la primera; de hecho, si $\Omega' = \Omega$, $u(z)$ ES ARMÓNICA EN Ω, $v-u$ SATISFACE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO EN Ω Y $v(\zeta) \le u(\zeta)$ EN $\partial\Omega$, LA ÚLTIMA CONDICIÓN (MÁXIMO) IMPLICA QUE $(v-u)(\zeta) \le 0$ EN $\partial\Omega$ Y POR TANTO $(v-u)(z) \le 0$ EN Ω.

ASÍ QUE NOS QUEDAMOS CON LA SEGUNDA DEFINICIÓN.

SATISFACEN LAS SUBARMÓNICAS MUCHAS PROPIEDADES • CON LA NOTACIÓN ANTERIOR:

1. $v-u$ NO TIENE MÁXIMOS NI MÍNIMOS EN Ω'
2. SI $\Omega' = \Omega$ Y $u \equiv 0$ EN LA DEF. 2, CONCLUIMOS QUE v NO PUEDE TENER MÁXIMOS EN Ω (vamos a explotar ésto hasta la saciedad).
3. la definición es local: UNA FUNCIÓN $v(z)$ ES SUBARMÓNICA EN z_0 ($v: \Omega \to \mathbb{R}$) si dado un disco pequeño contenido en Ω se satisface definición 2.
4. TODA FUNCIÓN ARMÓNICA $v(z)$ ES SUBARMÓNICA (porque la diferencia con cualquier armónica $u(z)$ satisface el PRINCIPIO DEL MÁXIMO).

CARACTERICEMOS A LAS SUBARMÓNICAS:

TEOREMA: UNA FUNCIÓN CONTINUA $v(z)$ ES SUBARMÓNICA $\Leftrightarrow$ SATISFACE

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad \text{PARA TODO DISCO } |z-z_0|\leq r \text{ CONTENIDO EN } \Omega. \qquad (4)$$

OBSERVA QUE UNA FUNCIÓN QUE SATISFACE (4) NECESARIAMENTE CUMPLE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO: TOMAS UNA FUNCIÓN ARMÓNICA $u(z)$, COMO

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad y \quad u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

ENTONCES

$$(v-u)(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v-u)(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad \therefore (v-u) \text{ SATISFACE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO.}$$

RESTA MOSTRAR $\Rightarrow$]

COMO $v(z)$ ES CONTINUA PODEMOS CONSTRUIR LA INTEGRAL DE POISSON $P_v(z)$ CON LOS VALORES EN $|z-z_0|=r$ DE $v(z)$, A PARTIR DE LA ECUACIÓN (2), OBTENEMOS QUE

$$P_v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \qquad (5)$$

$v(z)$ ES SUBARMÓNICA Y $P_v(z)$ ES ARMÓNICA, ASÍ QUE $(v-P_v)(z)$ NO PUEDE TENER UN MÁXIMO EN EL DISCO ABIERTO SIN REDUCIRSE A UNA CONSTANTE. EL TEOREMA DE SCHWARZ GARANTIZA QUE

$$v(z) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \xrightarrow[\text{si } |z|\to r]{} 0$$

ASÍ ES QUE $v-P_v$ TIENE UN MÁXIMO EN $|z-z_0|\leq r$. SI SUPONEMOS QUE TAL MÁXIMO ES ESTRICTAMENTE POSITIVO, TENDRÍA, POR LO ANTERIOR, QUE TOMARSE EN UN PUNTO INTERIOR ⚡ ASÍ QUE DEBE SER ≤ 0 Y

$$v(z) - P_v(z) \leq 0 \quad \text{si } z \in |z-z_0|\leq r$$

$$\text{i.e.}: v(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \quad (\text{al valuar en } z_0 \text{ y USAR } 5)$$

†.

PROPIEDADES:

1. SI $v(z)$ ES SUBARMÓNICA EN $kv(z)$ LO ES ($\text{si } k \in \mathbb{R}^+$)
2. v_1 Y v_2 SUBARMÓNICAS $\Rightarrow$ v_1+v_2 TAMBIÉN.
3. (IMPORTANTÍSIMA) SI v_1 Y v_2 SON SUBARMÓNICAS EN Ω ENTONCES LA FUNCIÓN $v(z) = \max(v_1(z), v_2(z))$ ES TAMBIÉN SUBARMÓNICA.

Demostración: la continuidad de $v(z)$ ES TRIVIAL POR QUE v_1 Y v_2 SON SUBARMÓNICAS (EN PART. CONTINUAS). PROCEDAMOS A PROBARLA DE LA DEFINICIÓN 2: SI $u(z)$ ES ARMÓNICA EN $\Omega' \subseteq \Omega$, SUPONGAMOS QUE $v(z)-u(z)$ TUVIESE UN MÁXIMO EN $z_0 \in \Omega'$ Y S.P.G. SUPONGAMOS QUE $v(z_0) = v_1(z_0)$

$v_1(z) \leq v(z)$, TENEMOS QUE

$$v_1(z)-u(z) \leq v(z)-u(z) \leq v(z_0)-u(z_0) = v_1(z_0)-u(z_0)$$

LA PRIMERA DESIGUALDAD INVOLUCRA UN PAR DE FNS. CONSTANTES (SON ARMÓNICAS Y SATISFACEN EL P. del máximo) $\therefore$ $v(z)$ ES SUBARMÓNICA.

4. (FUNDAMENTAL) SEA Δ UN DISCO TAL QUE $\bar{\Delta} \subseteq \Omega$. SI P_v ES LA INTEGRAL DE POISSON CON VALORES $v(z)$ EN LA FRONTERA DE Δ Y $v(z)$ ES SUBARMÓNICA EN Ω, ENTONCES

$$v'(z) := \begin{cases} P_v(z) & \text{si } z \in \Delta \\ v(z) & \text{si } z \in \Omega - \Delta \end{cases}$$

ES SUBARMÓNICA.
es decir: "parchar" una función subarmónica con una armónica engendra una función subarmónica. (ver figura)

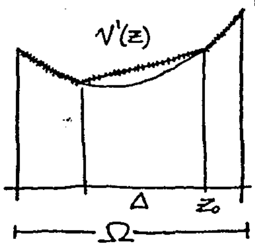


fig. PARCHE ARMÓNICO

DEM: (i) ES CONTINUA, POR EL TEOREMA DE SCHWARZ.
(ii) DE LA DEMOSTRACIÓN DEL **TEOREMA** ANTERIOR, $v \leq P_v$ EN Δ
ASÍ ES QUE $v \leq v'$ EN Ω (*)
OBSERVA QUE v' ES ARMÓNICA ($\therefore$ SUBARMÓNICA) EN Δ Y ES SUBARMÓNICA EN $\Omega - \Delta$. SEA $u(z)$ ARMÓNICA EN Ω:
POR (*):
$v - u \leq v' - u$. si $v' - u$ tiene un máximo en $z_0 \in \partial\Delta$ ese máximo es también un máximo de $v - u$, que satisface el PRINCIPIO DEL MÁXIMO, ASÍ QUE $v - u \equiv cte$ EN Ω.
$\therefore (v-u)(z) \leq (v'-u)(z) \leq (v'-u)(z_0) = (v(z_0) - u(z_0)) = cte$
$\therefore (v'-u)$ ES CONSTANTE, SATISFACE PUES EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO Y POR DEFINICIÓN v' ES SUBARMÓNICA.

VAMOS A RESOLVER EL PROBLEMA DE DIRICHLET (O BIEN, ENCONTRAR CONDICIONES PARA QUE LA SOLUCIÓN EXISTA).

SEA $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN CONTINUA Y ACOTADA $|f(\zeta)| \leq M$.
DEFINIMOS UNA FAMILIA DE FUNCIONES $\mathcal{B}(f)$ COMO AQUELLAS QUE SATISFACEN:

(i) $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ES SUBARMÓNICA
(ii) $\limsup\limits_{z \to \zeta} v(z) \leq f(\zeta)$

LA CONDICIÓN (ii) DEBE LEERSE ASÍ:
DADOS $\zeta \in \partial\Omega$ y $\varepsilon > 0$ EXISTE $\Delta \in \mathcal{N}_\zeta$ $\ni$. $v(z) < f(\zeta) + \varepsilon$ si $z \in \Omega \cap \Delta$. (*)

OBSERVA QUE $\mathcal{B}(f) \neq \phi$ PUES A ELLA PERTENECEN TODAS LAS CONSTANTES $\leq -M$
LA FAMILIA $\mathcal{B}(f)$ SE LLAMA UNA FAMILIA DE PERRON;
BUSCAMOS CONDICIONES PARA QUE ELLA AYUDE A RESOLVER EL PROBLEMA DE DIRICHLET.
ESTAMOS BUSCANDO BIEN:

TEOREMA: LA FUNCIÓN $u(z) := \sup\limits_{\substack{v \in \mathcal{B}(f) \\ z \in \Omega}} \{v(z)\}$ ES ARMÓNICA EN Ω
principio de Perron

(*) EL CONTENIDO DE (ii) ES EL SIGUIENTE: PARA UNA FUNCIÓN $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ACOTADA EN UNA VECINDAD DE $c \in \mathbb{R}^n$, SE DEFINE $\varphi(r) = \sup\{f(x) : 0 < |x - c| < r,\ x \in \mathrm{DOM} f\}$. DEFINES $\limsup\limits_{x \to c} f(x) := \inf\{\varphi(r) : r > 0\}$ y SATISFACE QUE $\limsup\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{r \to 0} \varphi(r)$. PUEDE PROBARSE QUE SI $\limsup\limits_{x \to c} f < M \Rightarrow$ EXISTE ALGUNA VECINDAD $U \in \mathcal{N}_c$ $\ni$. $f(x) \leq M$ si $c \neq x \in U \cap \mathrm{DOM} f$, DE DONDE SE DESPRENDE LA EQUIVALENCIA DE (ii) CON LO QUE AHÍ ESCRIBO.

Demostración:

PROCEDEREMOS POR PEDAZOS.

1. « SI $v \in \mathcal{B}(f) \Rightarrow v \leq M$ EN Ω » (PARA GARANTIZAR $\exists$ sup).

SEA $\varepsilon > 0$.

SEA $E = \{ z \in \Omega \,/\, v(z) \geq M + \varepsilon \}$. DEBO MOSTRAR QUE $E = \phi$. SUP $E \neq \phi$.

BASTA MOSTRAR QUE E ES COMPACTO, YA QUE DE SER ASÍ, TODA $v \in \mathcal{B}(f)$ TENDRÍA UN MÁXIMO EN E, Y POR LA DEFINICIÓN DE E, ESE MÁXIMO LO SERÍA EN Ω, PERO COMO LAS v SON SUBARMÓNICAS, ENTONCES ELLAS SERÍAN CONSTANTES Y MAYORES QUE M, LO QUE CONTRADICE (ii)

ASÍ QUE E COMPACTO $\Rightarrow E = \phi$ Y TENDRÍAMOS 1.

PROCEDAMOS: SI $E \neq \phi$ EL COMPLEMENTO $\sim E$ DE E CONSISTE DE TRES CLASES DE PUNTOS:

(1) PUNTOS EN EL EXTERIOR DE $\bar{\Omega}$

(2) PUNTOS EN $\partial\Omega$

(3) PUNTOS EN Ω CON $v(z) < M + \varepsilon$

ENTONCES: SI z SATISFACE (1), EXISTE UNA VECINDAD DE z CONTENIDA EN $\sim\bar{\Omega}$

SI z SATISFACE (2), POR (ii), z TIENE UNA VECINDAD Δ TAL QUE $v < M + \varepsilon$ EN $\Delta \cap \Omega$.

SI z SATISFACE (3), COMO v ES CONTINUA, EXISTE Δ VECINDAD DE z QUE SATISFACE $v < M + \varepsilon$ EN Δ.

ASÍ QUE $\sim E$ ES UNA UNIÓN DE ABIERTOS Y E ES CERRADO.
<u>SI Ω es acotada</u> ENTONCES E ES ACOTADO

2. SEA Δ_{z_0} UN DISCO TAL QUE $\bar{\Delta}_{z_0} \subsetneq \Omega$. PUEDES ENTONCES CONSEGUIR UNA SUCESIÓN $(v_n) \in \mathcal{B}(f)$ TAL QUE $\lim_{n\to\infty} v_n(z_0) = u(z_0)$

AHORA CONSIDERA $V_n = \max(v_1, \dots, v_n)$: (V_n) ES UNA SUCESIÓN NO DECRECIENTE DE FUNCIONES Y CADA V_n ESTÁ EN $\mathcal{B}(f)$ (SON SUBARMÓNICAS Y OBVIAMENTE SATISFACEN ii) Y AHORA CONSIDERA LA SUCESIÓN DE PARCHES ARMÓNICOS DE V_n EN $\Delta_{z_0} (= \Delta)$

$$\text{PARA CADA } n \in \mathbb{N}: \quad V_n'(z) := \begin{cases} V_n(z) & \text{si } z \in \Omega - \Delta \\ P_{V_n}(z) & \text{si } z \in \Delta \end{cases}$$

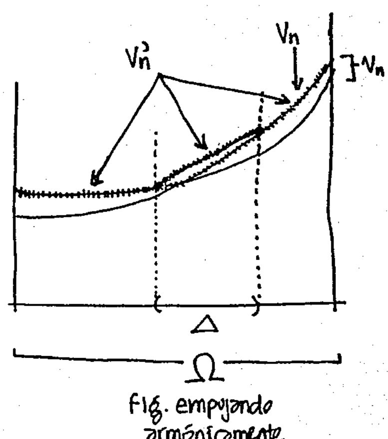


Fig. empujando armónicamente.

POR LA PROPIEDAD 4. ANTERIOR, $(V_n'(z)) \in \mathcal{B}(f)$ Y (V_n') ES NO DECRECIENTE Y SATISFACE:

$$v_n(z_0) \leq V_n(z_0) \leq V_n'(z_0) \leq u(z_0) \qquad (A)$$

DE LA ÚLTIMA DESIGUALDAD OBTENEMOS QUE

$$\lim_{n\to\infty} V_n'(z_0) = u(z_0)$$

APLICANDO EL PRINCIPIO DE HARNACK A (V_n') EN Δ OBTENEMOS QUE (V_n') CONVERGE UNIFORMEMENTE A UNA FUNCIÓN ARMÓNICA U EN Δ QUE POR (A) SATISFACE

$$U(z_0) = u(z_0) \quad \text{y} \quad U(z) \leq u(z) \text{ si } z \in \Delta$$

VAMOS A MOSTRAR QUE $u \equiv U$, PARA ELLO ELIGE OTRO $z_1 \neq z_0$ EN Δ.

ASOCIADA A TAL z_1 PUEDO CONSEGUIR ALGUNA $(w_n) \in \mathcal{B}(f)$ QUE CUMPLA

$$\lim_{n\to\infty} w_n(z_1) = u(z_1)$$

PERO AHORA VAMOS A COMPARARLA CON LAS ANTERIORES. SEA $(\tilde{w}_n) = \max(w_n, v_n)$ (ASÍ QUE $\tilde{w}_n \geq v_n$). CONSTRUIMOS DE NUEVO LA SUCESIÓN (W_n) DONDE

$$W_n(z) = \max(\tilde{w}_1(z), \ldots, \tilde{w}_n(z))$$

Y DE NUEVO LA SUCESIÓN (W_n') CON

$$W_n'(z) = \begin{cases} W_n(z) & \text{si } z \in \Omega - \Delta \\ P_{W_n}(z) & \text{si } z \in \Delta \end{cases}$$

ASÍ QUE AHORA (W_n') CONVERGE UNIFORMEMENTE A ALGUNA FUNCIÓN ARMÓNICA U_1 EN Δ QUE SATISFACE $U_1(z_1) = u(z_1)$. SIN EMBARGO AHORA, COMO

$$v_n \leq \tilde{w}_n \Rightarrow v_n \leq W_n \;\therefore\; v_n' \leq W_n' \text{ EN } \Delta$$

ES DECIR

$$U \leq U_1 \;(\leq u) \text{ EN } \Delta$$

PERO RECUERDA QUE

$$\lim_{n\to\infty} V_n'(z_0) = U(z_0) = u(z_0)$$

POR ELEMENTAL SANDWICH CONCLUIMOS QUE ENTONCES

$$U_1(z_0) = u(z_0) = U(z_0)$$

O LO QUE ES LO MISMO: LA FUNCIÓN ARMÓNICA $U_1 - U$ TOMA EL VALOR MÍNIMO 0 EN z_0: POR TANTO $U_1 = U = u$.

l.q.q.d.

¿BAJO QUÉ CONDICIONES $u(z)$ RESUELVE EL PROBLEMA DE DIRICHLET?

Observación: no siempre es soluble.

si $\Omega = \{z : 0 < |z| < 1\}$, $f(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta = 0 \\ 0 & \text{si } |\zeta| = 1 \end{cases}$

UNA FUNCIÓN ARMÓNICA CON ESTOS VALORES DE FRONTERA ES ACOTADA Y POR ELLO tiene una singularidad removible en el origen. SIN EMBARGO, SI $F(\zeta)$ DENOTA LA "extensión armónica de $f(\zeta)$ A $|z|<1$, COMO EN $\partial\Delta$ $F(\zeta)=0$ POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO $F(z)=0$, ASÍ QUE NO PUEDE TOMAR EL VALOR 1 EN EL ORIGEN

DE HECHO, UN TEOREMA FUERTE ASEGURA QUE el problema de Dirichlet puede ser resuelto para cualquier región cuyo complemento sea tal que ninguna componente se reduzca a un punto.

NO VOY A UTILIZAR ESE RESULTADO, SINO EL SIGUIENTE, MÁS MODESTO PERO QUE CUBRE NUESTRAS NECESIDADES POSTERIORES

LEMA: SUPONGAMOS QUE EXISTE $w : \Omega \to \mathbb{R}$ ARMÓNICA, CONTINUA EN $\partial\Omega$ QUE SATISFACE $w(\zeta) > 0$ PARA $\zeta \in \partial\Omega$, EXCEPTO PARA ALGÚN $\zeta_0 \in \partial\Omega$ EN QUE $w(\zeta_0) = 0$
SI $f(\zeta)$ ES CONTINUA EN ζ_0, LA CORRESPONDIENTE $u(z)$ OBTENIDA POR EL MÉTODO DE PERRON SATISFACE QUE $\lim_{z\to\zeta_0} u(z) = f(\zeta_0)$

A LA FUNCIÓN $w(\zeta)$ SE LE LLAMA UNA BARRERA. PODEMOS DECIR QUE EL PROBLEMA DE DIRICHLET TIENE SOLUCIÓN (CON VALORES FRONTERIZOS DADOS ACOTADOS Y CONTINUOS) SI EXISTE UNA BARRERA EN CADA PUNTO FRONTERA.

¿CONDICIONES SUFICIENTES PARA EXISTENCIA DE BARRERAS?

TEOREMA : EL PROBLEMA DE DIRICHLET PUEDE SER RESUELTO PARA CUALQUIER REGIÓN Ω TAL QUE CADA PUNTO FRONTERA SEA EL PUNTO FINAL DE UN SEGMENTO DE LÍNEA CUYOS OTROS PUNTOS SEAN EXTERIORES A Ω.

Dem: SI ζ_0 ES EL PUNTO FINAL DE UN SEGMENTO CUYOS PUNTOS EXCEPTO ζ_0 ESTÁN EN EL EXTERIOR DE Ω Y ζ_1 ES EL OTRO EXTREMO, LA FUNCIÓN

$$\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}$$

ES NO NULA EN Ω ASÍ QUE EXISTE UNA RAMA ANALÍTICA MONOVALUADA DE

$$\sqrt{\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}} \quad \text{EN } \Omega$$

UNA CORRECTA ELECCIÓN DEL ÁNGULO α MUESTRA QUE LA FUNCIÓN

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\alpha}\sqrt{\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}}\right] \quad \text{ES UNA BARRERA.}$$

EN PARTICULAR, LAS HIPÓTESIS SE SATISFACEN SI $\partial\Omega \; (=\partial(\mathbb{C}-\Omega))$ CONSISTE DE UN # FINITO DE CURVAS SIMPLES CON TANGENTE EN CADA PUNTO.

OBSERVA QUE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE DIRICHLET ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA ACOTADA.

§5.3 · EL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN (con un mensaje de nuestros patrocinadores)

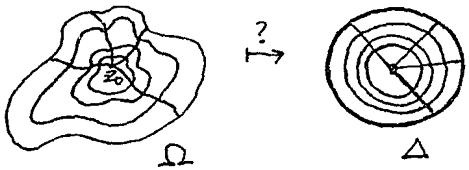
TEOREMA : SI Ω ES UNA REGIÓN SIMPLEMENTE CONEXA EN $\mathbb{C}$ CUYA FRONTERA ES UNA CURVA CERRADA DE JORDAN, ENTONCES Ω ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A Δ.

El teorema del mapeo de Riemann BRINDA UNA CLASIFICACIÓN CONFORME DE LAS POSIBLES REGIONES SIMPLEMENTE CONEXAS DEL PLANO. ES EL ANÁLOGO PARA REGIONES PLANAS DEL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN Y VAMOS A DEMOSTRARLO con teoría de potencial.

EN EFECTO: TRATAREMOS CON CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS E Y SU FUNCIÓN DE POTENCIAL ASOCIADA g (POR DEFINICIÓN: $E = -\nabla g$). LOS EJEMPLOS CLÁSICOS DE ESTOS CAMPOS SON LOS CAMPOS ELÉCTRICOS O BIEN EL FLUJO DE UN FLUIDO INCOMPRIMIBLE.

LA IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN ES LA SIGUIENTE: CON LA AYUDA DE UN Potencial Puntual (POR ESTO ES QUE NECESITAMOS DE PATROCINADORES) DEFINIDO EN LA REGIÓN PLANA Ω VAMOS A TENDER UNA Red ortogonal que "pegue bien" en la frontera (VALE DECIR: DEBEMOS DEFINIR UN Potencial Puntual QUE SE ANULE EN LA FRONTERA $\partial\Omega$). ESTA RED, CON LA AYUDA DE LA exponencial DEFINIRÁ UNA BIYECCIÓN CONFORME

DE Ω SOBRE Δ. (figura siguiente).



SON PUES, DOS LOS INGREDIENTES NECESARIOS. 1. CONOCER EL COMPORTAMIENTO DE LOS potenciales puntuales y 2. CONSEGUIR UN POTENCIAL ARMÓNICO PUNTUAL EN Ω QUE SEA ARMÓNICO (PARA QUE LA RED QUE CONSTRUYAMOS EN Ω REPRESENTE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA Y PODAMOS ASÍ CONSEGUIR UN MAPEO CONFORME.

el mensaje es el siguiente

« el potencial definido por un punto de carga positivo en $z=0$ en el disco Δ y aterrizado en la frontera (vale 0 en $\partial\Delta$) es $g(z,0) = -\log|z|$ »

ES DECIR, SU GRÁFICA ES UNA "TROMPETA" COMO LA DIBUJADA AL INICIO DE § 5.1. EVIDENTEMENTE NO TIENE SINGULARIDADES (PUNTOS EN QUE LA DERIVADA SE ANULE O SEA INDEFINIDA) SALVO EN $z=0$, EN DONDE TIENE UN POLO.

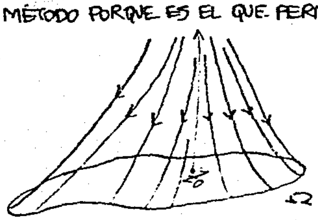
CON LA AYUDA DEL PRINCIPIO DE DIRICHLET PODEMOS ENCONTRAR ESTOS POTENCIALES EN CUALQUIER REGIÓN Ω DE LAS CONSIDERADAS. DE HECHO, SEA Ω UNA REGIÓN DE LAS ENUNCIADAS EN EL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN, SEA $z_0 \in \Omega$ Y CONSIDERA LOS VALORES EN LA FRONTERA $\log|\zeta - z_0|$ (QUE SON ACOTADOS, POR LA FORMA EN QUE ELEGIMOS Ω). SEA $G(z)$ LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE DIRICHLET EN Ω CON TALES VALORES DE FRONTERA Y CONSIDERA

$$g(z,z_0) = G(z) - \log|z - z_0| \qquad (5)$$

ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA EN $\Omega - \{z_0\}$, CON UN POLO EN z_0 QUE SE ANULA EN LA FRONTERA DE Ω (ES DECIR: LA FRONTERA ES LA CURVA DE NIVEL CERO DE $g(z,z_0)$) Y EN UNA VECINDAD DE z_0 DIFIERE DE $-\log|z-z_0|$ POR UNA FUNCIÓN ARMÓNICA. LAS PROPIEDADES ANTERIORES LA DETERMINAN DE MANERA ÚNICA: así es, porque si $g_1(z)$ ES OTRA FUNCIÓN CON TALES PROPIEDADES, ENTONCES $g(z,z_0) - g_1(z)$ ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA EN Ω (SE ANULA EN z_0) QUE SE ANULA EN $\partial\Omega$, POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO, $g_1(z) = g(z,z_0)$ EN Ω.

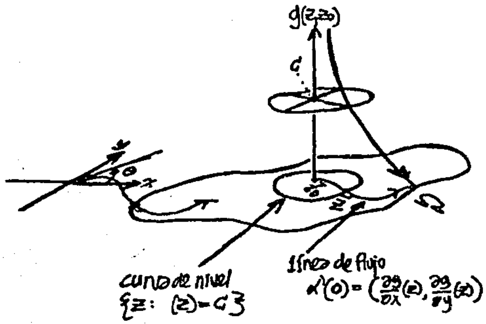
LLAMAREMOS A $g(z,z_0)$ la función de Green de Ω con singularidad en z_0.

ES NECESARIO MOSTRAR QUE $g'(z,z_0) \neq 0$ PARA TODO $z \in \Omega^*$. AUNQUE TODA LA BIBLIOGRAFÍA OMITA ESTE "DETALLE" NO ENCONTRÉ UNA FORMA DIRECTA DE DEMOSTRARLO. MÁS ADELANTE MOSTRARÉ CON OTRA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN QUE ESO ES CIERTO. HE UTILIZADO ESTE MÉTODO PORQUE ES EL QUE PERMITE GENERALIZACIÓN A SUPERFICIES DE RIEMANN.



DICHO LO ANTERIOR, LA FUNCIÓN DE GREEN APARECE COMO EN LA FIGURA A LA IZQUIERDA Y PODEMOS PROCEDER CON NUESTRAS IDEAS: LA "RED" ESTÁ GENERADA POR LAS CURVAS DE NIVEL DE $g(z,z_0)$ Y LAS LÍNEAS DE FLUJO DEL POTENCIAL ASOCIADO $(\partial g/\partial x, \partial g/\partial y) = \nabla g$. COMO $g'(z,z_0) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ CADA $z \in \Omega$ ESTÁ EN UNA

ÚNICA CURVA DE NIVEL DE $g(z,z_0)$ Y ESTÁ EN UNA ÚNICA LÍNEA DE FLUJO DEL CAMPO ASOCIADO (POR EXISTENCIA Y UNICIDAD, DE ECUACIONES DIFERENCIALES)



LAS CURVAS DE NIVEL SON IMÁGENES INVERSAS DE VALORES REGULARES, ASÍ QUE SON CURVAS ANALÍTICAS (NO SÓLO SUAVES) CERRADAS QUE SEPARAN A z_0 DE $\partial\Omega$. LAS LÍNEAS DE FLUJO SON TAMBIÉN CURVAS ANALÍTICAS DE z_0 A $\partial\Omega$ QUE PUEDEN ENTONCES PARAMETRIZARSE POR EL ÁNGULO θ CON QUE "ENTRAN" A z_0 (ver figura a la izquierda). COMO LOS VALORES DE g ESTÁN ENTRE 0 e ∞ PODEMOS CONSTRUIR UNA APLICACIÓN

$$F:\Omega\longrightarrow\Delta$$

ASIGNANDO A CADA $z\in\Omega$ LOS VALORES (c,θ) ÚNICOS ANTERIORES $z\leftrightarrow ce^{i\theta}$ (PARAMETRIZANDO Ω), DEFINO $F(ce^{i\theta}) = e^{-c}e^{i\theta}$

$$F(z_0) = 0$$

QUE ES BIYECTIVO Y COMO EN CADA PUNTO SU DERIVADA ES NO NULA, ES CONFORME, AL MENOS EN LAS COORDENADAS DE LA PARAMETRIZACIÓN DE Ω DADAS POR $ce^{i\theta}\leftrightarrow z$. LO ANTERIOR ES VÁLIDO PORQUE, EN EL SENTIDO DE LA DEFINICIÓN (Y COMENTARIOS A ELLA) DE SUPERFICIE DE RIEMANN DADA EN §4, HEMOS HECHO DE Ω UNA SUPERFICIE DE RIEMANN CON CARTA GLOBAL ÚNICA.

CUANDO DEMOSTREMOS LA PRIMERA PARTE DEL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN RECURRIREMOS A ESTAS IDEAS. OBSERVA POR LO PRONTO QUE LAS LÍNEAS DE FLUJO DEL CAMPO ASOCIADO A g, POR SER ORTOGONALES A LAS CURVAS DE NIVEL DE $g(z,z_0)$ SON LAS CURVAS DE NIVEL DE UNA CONJUGADA ARMÓNICA "CONVENIENTE" DE $g(z,z_0)$ EN CADA VECINDAD DE Ω QUE NO CONTENGA A z_0. (CIERTAMENTE LA CONJ. ARMÓNICA GLOBAL -EN Ω- DE $g(z,z_0)$ NO ES UNIFORME), SIN EMBARGO EN ESTE CASO POR SER UNA PARAMETRIZACIÓN GLOBAL, NO TUVIMOS NECESIDAD DE ENTRAR EN ESOS DETALLES. EN SU MOMENTO PRECISAREMOS A LO QUE POR "CONVENIENTE" NOS REFERIMOS.

+.

VOY A PLATICAR OTRA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN INDEPENDIENTE DE LA ANTERIOR CON LA QUE MOSTRARÉ QUE $g'(z,z_0)\neq$ $\forall z\in\Omega^* = \Omega-\{z_0\}$.

TEOREMA*: SI $\Omega\subsetneq\mathbb{C}$ PROPIAMENTE, ES UNA REGIÓN SIMPLEMENTE CONEXA, EXISTE $f:\Omega\to\Delta$ BIHOLOMORFISMO. SI ADEMÁS RESTRINGIMOS f A QUE:

(i) DADO $z_0\in\Omega$, $f(z_0)=0$

y (ii) $f'(z_0)\in\mathbb{R}^+$

ENTONCES f ES ÚNICA.

LA GEOMETRÍA DE LA DEMOSTRACIÓN ES LA SIGUIENTE:
CONSIDERA LA FAMILIA DE FUNCIONES

$$\mathcal{F} = \{f:\Omega\to\Delta \ :\ \text{ES MONOVALUADA E INYECTIVA EN SU IMAGEN}, f(\Omega)\subset\Delta, f(z_0)=0, f'(z_0)\in\mathbb{R}\}$$

LAS ÚLTIMAS CONDICIONES NO SON MUY FUERTES PORQUE SI $f(z_0)\neq 0$, EXISTE UN BIHOLOMORFISMO M que manda $f(z_0)$ en 0. LA ÚLTIMA SOLAMENTE PIDE QUE LA DERIVADA NO ROTE LOS VECTORES: QUE SÓLO LOS EXPANDA O CONTRAIGA EN z_0. CASO DE QUE f LOS ROTASE, PUEDES COMPONER CON ALGÚN θ=cte PARA ENDEREZARLOS A $\mathbb{R}$ (EL PRIMER CAPÍTULO DEL PRESENTE TRABAJO).

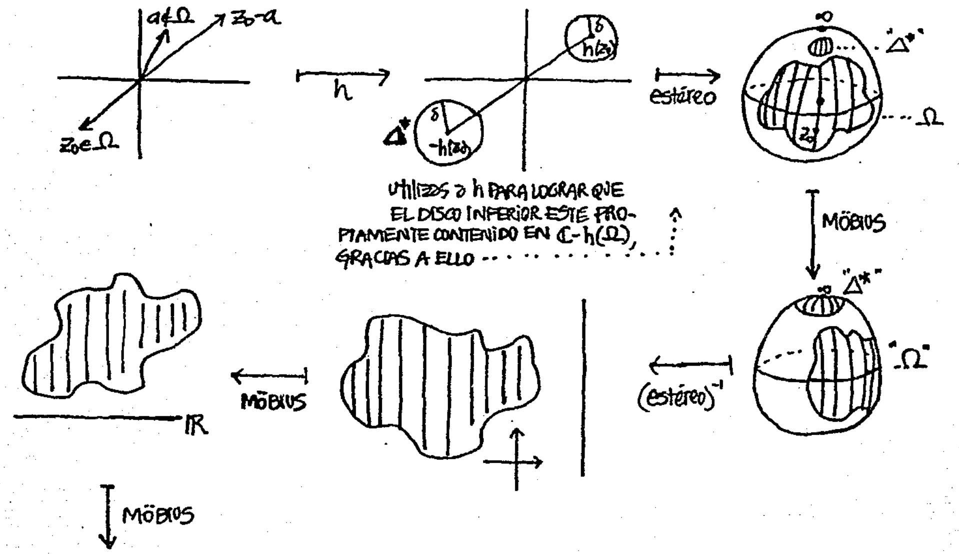
(*DEMOSTRACIÓN COMPLETA EN AHLFORS C.A.)

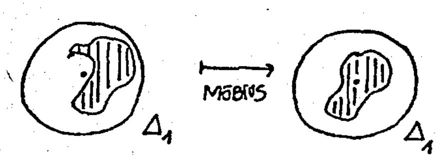
POR HIPÓTESIS EXISTE $a \neq \infty$ EN $\mathbb{C}-\Omega$, SIENDO ENTONCES $z-a \neq 0$ EN Ω, PUEDES DEFINIR UNA RAMA MONIVALUADA Y ANALÍTICA DE $\sqrt{z-a}$, $h(z)$, EN Ω.

OBSERVA QUE:

1. $\infty \notin \Omega$
2. LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA Y LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS SON CONFORMES (la primera en $\mathbb{C}$, las segundas en $\bar{\mathbb{C}}$).
3. $\sqrt{\ }$ "NO SE VA A ∞" EN Ω

GEOMÉTRICAMENTE LA FAMILIA $\mathfrak{F} \neq \phi$ PORQUE:





- AHORA LA IDEA ES "INFLAR" LA IMAGEN LO MÁS POSIBLE. puede mostrarse que la familia $\mathfrak{F}$ ES NORMAL Y POR TANTO $\sup \mathfrak{F}$ ES LA FUNCIÓN QUE MÁS "INFLA" A Ω EN Δ_1. DE HECHO ELLA ES EL BIHOLOMORFISMO.

UTILIZANDO ESTA DEMOSTRACIÓN INDEPENDIENTE VOLVEMOS A LA FUNCIÓN DE GREEN. ES CONSECUENCIA DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA FUNCIONES ANALÍTICAS Y ARMÓNICAS DEMOSTRAR LO SIGUIENTE:

SI $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ SIMPLEMENTE CONEXA Y $f: \Omega \to \Delta$ ES EL BIHOLOMORFISMO DEL TEOREMA, ENTONCES la FUNCIÓN DE GREEN DE Ω ES $-\log|f(z)|$ $(f = u+iv)$.

ASÍ ES QUE $g(z,z_0) = -\log|f(z)|$ y $g(z,z_0) \neq 0$.

ES SENCILLO MOSTRAR A PARTIR DEL TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN* QUE LAS ÚNICAS APLICACIONES CONFORMES BIYECTIVAS $T:\Delta\to\Delta$ SON DEL TIPO

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{(z-z_0)}{1-\bar{z}_0 z}$$

Y QUE SUS PUNTOS FIJOS (CUANDO NO SE REDUCE A UNA ROTACIÓN) APARECEN SÓLO EN $|z|=1$. CONOCEMOS PUES A BIHOL (Δ).

VOLVIENDO A LAS SUPS. DE RMNN., SI QUIERO TENER DERECHO A HABLAR DE FUNCIONES ARMÓNICAS Y SUBARMÓNICAS EN ELLA, DEBO MOSTRAR QUE SON invariantes conformes. DEBO PUES MOSTRAR QUE u ES ARMÓNICA EN Ω y $f:\Omega'\to\Omega$ ES ANALÍTICA, ENTONCES $u\circ f$ ES ARMÓNICA EN Ω'. EL CASO ARMÓNICO ES SENCILLO PUES LOCALMENTE $u=\mathrm{Re}F$ PARA ALGUNA F HOLOMORFA Y $u\circ f=\mathrm{Re}(F\circ f)$. SUBARMONICIDAD ES SIMILAR.

* POR EJEMPLO, MARSDEN: BASIC COMPLEX ANALYSIS PP. 274

VI
grande y chica

- SAME OLD BLUES
ERIC CLAPTON

§6.1 • SUPERFICIES SIMPLEMENTE CONEXAS

EN EL CAPÍTULO §4 TRATAMOS EL CASO DE LAS SUPERFICIES SIMPLEMENTE CONEXAS Y SU CUBRIENTE UNIVERSAL, PUNTUALIZANDO QUE ESTA ÚLTIMA RESULTABA SER DE UNA SOLA HOJA. LA PRIMERA CONSECUENCIA IMPORTANTE DE ESTA PROPIEDAD ES EL TEOREMA DE MONODROMÍA. EL SIGUIENTE RESULTADO CONTIENE A AQUÉL COMO UN CASO PARTICULAR, AUNQUE PARA EL CASO DE FUNCIONES EN LA SUPERFICIE COMPLEJO VALUADAS PUEDE APARECER COMO UNA CONSECUENCIA INMEDIATA DEL DE MONODROMÍA.

TEOREMA 6.1: SEA W UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA Y SEA $\{U_\alpha\}$ UNA CUBIERTA ABIERTA-CONEXA DE W. EN CADA U_α ESTÁ DADA UNA FAMILIA Φ_α DE FUNCIONES QUE SATISFACEN LAS SIGUIENTES DOS CONDICIONES:

(a) si $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$ y $\varphi_\beta \in \Phi_\beta$ y si $V_{\alpha\beta}$ es una componente de $U_\alpha \cap U_\beta$, entonces $\varphi_\alpha(p) = \varphi_\beta(p)$ bien para toda $p \in V_{\alpha\beta}$ o para ninguna p.

(b) si $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$ y $V_{\alpha\beta}$ es una componente de $U_\alpha \cap U_\beta$, entonces existe alguna $\varphi_\beta \in \Phi_\beta$ TAL QUE $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$ EN $V_{\alpha\beta}$.

EN ESTAS CIRCUNSTANCIAS, EXISTE UNA FUNCIÓN φ EN W CUYA RESTRICCIÓN A CUALQUIER U_α PERTENECE A Φ_α. MÁS AUN, φ ESTÁ UNÍVOCAMENTE DETERMINADA POR SU RESTRICCIÓN A UNA SOLA U_α.

ES BESTIALMENTE GENERAL PORQUE LA NATURALEZA DE LAS FUNCIONES $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$ es irrelevante. EN LÍNEAS GENERALES DICE QUE cualquier FAMILIA indexada DE FUNCIONES QUE SATISFACEN a y b DEFINE UNA FUNCIÓN GLOBAL para cada elección de $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$. TENGAMOS BIEN PRESENTE ESTO ÚLTIMO.

La Demostración REQUIERE LA CONSTRUCCIÓN EXPLÍCITA DE LA SUPERFICIE CUBRIENTE (DE UNA SOLA HOJA, OJO) QUE 'REALICE' LA FUNCIÓN GLOBAL BUSCADA. PROCEDAMOS: CONSIDEREMOS TODOS LOS PARES (p,φ) TALES QUE $p \in U_\alpha$ y $\varphi \in \Phi_\alpha$ PARA ALGUNA α. LA RELACIÓN

$$(p,\varphi) \sim (q,\psi) \iff p = q \text{ y } \varphi(p) = \psi(p)$$

ES DE EQUIVALENCIA. DENOTAMOS LA CLASE QUE CONTIENE A (p,φ) POR $[p,\varphi]$. DEFINIMOS A W^* COMO EL CONJUNTO DE TODAS ESAS CLASES DE EQUIVALENCIA Y A $f: W^* \to W$ COMO LA ASIGNACIÓN $[p,\varphi] \longmapsto p$

PARA INDUCIR UNA TOPOLOGÍA EN W^* DE W LA EXPERIENCIA DE CAPÍTULOS ANTERIORES NOS DICE QUE BASTA CONSEGUIR SUBCONJUNTOS DE W^* QUE ESTÉN EN CORRESPONDENCIA 1-1 CON ABIERTOS DE W. SI f EFECTÚA TAL CORRESPONDENCIA, LOS ABIERTOS DE W^* SERÁN LAS IMÁGENES INVERSAS BAJO f DE LOS ABIERTOS ELECTOS EN W (POR enésima vez: toda biyección abierta es un homeomorfismo).

PUES BIEN, para cada α y $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$ SEA $U^*[\alpha,\varphi_\alpha]$ EL CONJUNTO DE LOS $[p,\varphi_\alpha]$ TALES QUE $p \in U_\alpha$ (exactamente como hicimos con las vecindades analíticas). ESTOS CONJUNTOS DE W^* SATISFACEN LO QUE BUSCÁBAMOS Y POR (a) LA TOPOLOGÍA INDUCIDA EN W^* ES HAUSDORFF.

AFIRMACIÓN: CADA COMPONENTE W_0^* DE W^* ES UNA SUPERFICIE CUBRIENTE COMPLETA (CON PROYECCIÓN f) DE W.

PARA PROBARLO, DEBEMOS PRIMERO MOSTRAR QUE LOS $U^*[\alpha,\varphi_\alpha]$ CUBREN A W_0^* Y DESPUÉS EXHIBIR UNA VECINDAD ELEMENTAL DE CADA PUNTO EN W (CANDIDATOS: U_α).

SI $p^* = [p, \varphi] \in f^{-1}(U_\alpha)$, EXISTE ALGUNA β PARA LA QUE $\varphi \in \Phi_\beta$ y $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. POR (b), EXISTE ALGUNA $\psi \in \Phi_\alpha$ TAL QUE $\varphi(p) = \psi(p)$, ASÍ QUE $p^* \in U^*[\alpha, \psi]$ y entonces los abiertos de W^* sí cubren a W^*.

AHORA LA VECINDAD ELEMENTAL: CIERTAMENTE CADA $U^*[\alpha, \varphi_\alpha]$ ESTÁ CONTENIDA EN $f^{-1}(U_\alpha)$, ASÍ QUE

$$f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha} U^*[\alpha, \varphi_\alpha]$$

PERO SUCEDE QUE CADA $U^*[\alpha, \varphi_\alpha]$ ES UN ABIERTO CONEXO Y POR (a) LOS CONJUNTOS QUE CORRESPONDEN A φ_α'S DIFERENTES O BIEN COINCIDEN O SON AJENOS, ASÍ QUE LAS $U^*[\alpha, \varphi_\alpha]$ SON LAS COMPONENTES DE $f^{-1}(U_\alpha)$ Y AQUELLAS QUE PERTENECEN A W_0^* SON LAS COMPONENTES DE $f^{-1}(U_\alpha) \cap W_0^*$. ELLAS ESTÁN EN CORRESPONDENCIA 1-1 CON U_α Y ASÍ U_α ES UNA VECINDAD ELEMENTAL.

PARA MOSTRAR LA AFIRMACIÓN DEL TEOREMA, COMO W ES SIMPLEMENTE CONEXA ENTONCES $f: W^* \to W$ ES UN HOMEOMORFISMO, ASÍ QUE $f^{-1}(U_\alpha) = U^*[\alpha, \varphi_\alpha]$ PARA UNA $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$. SI $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ LAS CORRESPONDIENTES φ_α y φ_β COINCIDEN EN $U_\alpha \cap U_\beta$ Y TODAS ELLAS DEFINEN UNA FUNCIÓN GLOBAL φ.

PARA HACER QUE φ COINCIDA CON UNA φ_{α_0} DADA EN U_{α_0} LO ÚNICO QUE NECESITAMOS ES ELEGIR POR W_0^* COMO LA COMPONENTE DE W^* QUE CONTENGA A $U^*[\alpha_0, \varphi_{\alpha_0}]$.

+.

1 COROLARIO: SI $F: W \to \mathbb{C}$ ES CONTINUA Y DISTINTA DE CERO EN W, SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA, ENTONCES ES POSIBLE DEFINIR UNA FUNCIÓN CONTINUA f EN W TAL QUE

$$e^f = F$$

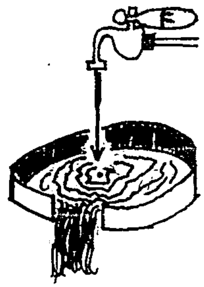
Dem: TODO $w_0 \in W$ POSEE UNA VECINDAD ABIERTA Y CONEXA QUE SATISFACE $|F(w) - F(w_0)| < F(w_0)$. TOMA COMO SISTEMA U_α COMO EL CONJUNTO DE TODAS ESAS VECINDADES Y DEFINE $(\log F)_\alpha$ COMO ALGUNA RAMA MONOVALUADA Y CONTINUA DE $\log F$ EN U_α. LA FAMILIA QUE CONSISTE ENTONCES DE TODAS LAS FUNCIONES $(\log F)_\alpha + 2\pi n i$ $(n \in \mathbb{Z})$. LAS CONDICIONES (a) y (b) DEL TEOREMA 6.1 SE SATISFACEN, ASÍ QUE EXISTE UNA FUNCIÓN CONTINUA f QUE ES IGUAL A ALGUNA $(\log F)_\alpha + 2\pi n i$ EN CADA U_α.

CIERTAMENTE SATISFACE $e^f = F$.

2 COROLARIO: SI u ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA W, EXISTE UNA CONJUGADA ARMÓNICA DE u EN W.

Dem: TOMA POR U_α DISCOS TOPOLÓGICOS. EN CADA U_α SABES QUE HAY UNA CONJUGADA ARMÓNICA v_α DE u. SI Φ_α CONSISTE DE TODAS LAS FUNCIONES $v_\alpha + c$ (c = cte.), EL TEOREMA NOS PERMITE HALLAR UNA FUNCIÓN GLOBAL v QUE TIENE LA FORMA $v_\alpha + c$ EN CADA U_α.

el teorema de uniformización es un problema de aplicaciones conformes que se resuelve (HASTA AHORA) con teoría de potencial.



"frontera grande"

CONSIDERA LA FUENTE PUNTUAL DE LA FIGURA. ES UN CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO Y BIEN PODEMOS ASOCIARLO CON UNA FUNCIÓN DE GREEN. SIENDO UN FLUÍDO INCOMPRIMIBLE, DEBE EXISTIR UN BORDE A TRAVÉS DEL CUÁL EL FLUÍDO ESCAPE Y PERMITA DEFINIR LA FUENTE PUNTUAL EN EL DOMINIO. ES INTUITIVAMENTE obvio QUE, TENIENDO EL DOMINIO TAL BORDE, CUALQUIER PUNTO DE ÉL DEBE SERVIR COMO FUENTE PUNTUAL DEL FLUJO INCOMPRIMIBLE (debe existir $g(\zeta,\zeta_\alpha)$ en todo $\zeta_\alpha \in$ DOMINIO) Y TAMBIÉN ES CLARO QUE EL BORDE NO PUEDE REDUCIRSE A UN PUNTO (Intuitivamente) PORQUE EL FLUIDO NO PODRÍA ESCAPAR fluidamente, VALGA LA REDUNDANCIA.

LLAMAREMOS AL BORDE QUE PERMITE DEFINIR UNA FUENTE PUNTUAL frontera grande. FORMALIZAR ESE CONCEPTO ES LA ESENCIA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN. NO DEBE PENSARSE EN LA frontera grande LITERALMENTE COMO EN LA FIGURA. CONVIENE PENSARLA como una pared porosa (EN LA FIGURA) QUE CERCA DE CUALQUIER PUNTO DE LA FRONTERA permite que el fluido escape (¡fluya!). PIENSA EN LAS BARRERAS DE §5.2.

LAS FUNCIONES ARMÓNICAS EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SON LAS QUE EN ALGUNA (Y POR TANTO EN TODAS) CARTA LOCAL z ALREDEDOR DE $\zeta \in W$ SATISFACEN

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \qquad (1)$$

CON $z_0 = z(\zeta_0)$ Y r SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO.

ANÁLOGAMENTE Y CON LA MISMA NOTACIÓN LAS FUNCIONES SUBARMÓNICAS SERÁN LAS QUE SATISFAGAN

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \qquad (2)$$

CONSIDERA UNA SUPERFICIE DE RIEMANN COMPACTA W. MOSTRAMOS EN §5 QUE LA PROPIEDAD (1) IMPLICA LA VALIDEZ DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO (PARA CÍRCULOS DE RADIO $r>0$ SUFICIENTEMENTE PEQUEÑOS). UNA FUNCIÓN ARMÓNICA $u: W \to \mathbb{C}$ ALCANZA SU MÁXIMO (POR CONTINUIDAD) Y SU MÍNIMO EN ALGÚN PUNTO DE W, ASÍ QUE ES CONSTANTE (A MENOS QUE SEA MULTIVALUADA). ES DECIR, NO EXISTEN FUNCIONES ARMÓNICAS UNIFORMES DEFINIDAS EN TODA LA SUPERFICIE COMPACTA W, POR ENDE, TAMPOCO ANALÍTICAS.

DEBEMOS PUES, PERMITIRLES SINGULARIDADES.

LO ANTERIOR ES UNA MUESTRA DE LA FUERZA DE LA TEORÍA DE POTENCIAL Y VAMOS A PROCEDER A RECONSTRUIR LAS FORMULACIONES HECHAS EN DOMINIOS PLANOS, AHORA EN SUPERFICIES DE RIEMANN.

OBSERVA QUE LA ANALOGÍA LINEAL ↔ ARMÓNICA / CONVEXA ↔ SUBARMÓNICA SIGUE TENIENDO SENTIDO, AUNQUE AHORA LOCALMENTE, EN LAS SUPERFICIES DE RIEMANN.

COMO LA EXISTENCIA DE FUNCIONES DE GREEN EN DOMINIOS PLANOS GARANTIZÓ LA EQUIVALENCIA CONFORME CON Δ, ES NATURAL PREGUNTARNOS POR LAS CONDICIONES QUE PERMI-

TAN DEFINIR FUNCIONES DE GREEN EN SUPERFICIES DE RIEMANN. ANTES DE INICIAR CON EL TRATAMIENTO CONSIDERA LA SIGUIENTE PREGUNTA:

¿existirá la función de Green de $\mathbb{C}$?
es decir
una función armónica en $\mathbb{C}-\{z_0\}$, con un polo en z_0, estrictamente positiva y que se anule en... *la frontera*

el primer problema ha aparecido: ¿cuál es *la frontera*?

UN POCO MÁS ADELANTE EL MISTERIO DESAPARECERÁ, SIN EMBARGO PODEMOS RESPONDER negativamente LA PRIMERA PREGUNTA CON EL PRINCIPIO DE HARNACK Y SU DESIGUALDAD: DESECHANDO EL CASO DE UNA FUNCIÓN IDÉNTICAMENTE ∞, UNA FUNCIÓN ARMÓNICA CON UN POLO EN z_0 Y DEFINIDA EN TODO $\mathbb{C}$ DEBE SATISFACER, EN TODO PUNTO ($\neq z_0$) LAS RESTRICCIONES DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE LA DESIGUALDAD DE HARNACK. YO AFIRMO QUE NO PUEDE MANTENERSE ESTRICTAMENTE POSITIVA EN TODO $\mathbb{C}$ PORQUE, SI SEGUIMOS SU COMPORTAMIENTO POR UNA línea de flujo, ELLA VA DECRECIENDO EN COMPACTOS (DISCOS CERRADOS) A LO LARGO DE LA LÍNEA DE FLUJO, ASÍ QUE NO PUEDE PERMANECER INDEFINIDAMENTE POSITIVA (ver figura siguiente)

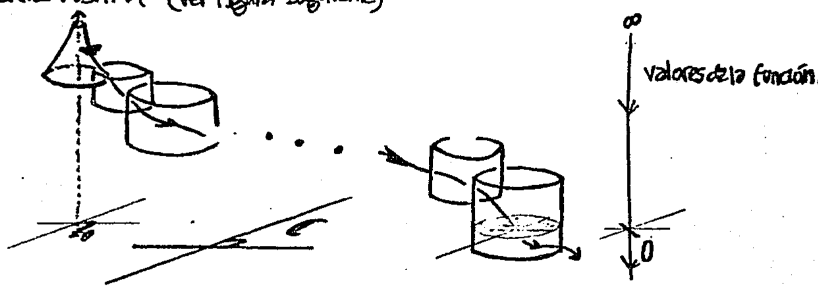


figura 1 : $\mathbb{C}$ ES "GRANDE"

LA DISCUSIÓN ES INFORMAL PERO ILUSTRATIVA. PARA MOSTRARLO CON DETALLE Y RIGOR, OBSERVA QUE SI EXISTIESE FUNCIÓN DE GREEN $G(z,z_0)$ DE $\mathbb{C}$, $-G(z,z_0)$ SERÍA UNA FUNCIÓN ARMÓNICA Y ACOTADA POR CERO EN $\mathbb{C}-\{z_0\}$, TENDRÍA PUES UNA SINGULARIDAD REMOVIBLE AL ∞ Y PASARÍA A SER UNA FUNCIÓN ARMÓNICA $\bar{G}: \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ que alcanza un mínimo en su dominio ∇_0.

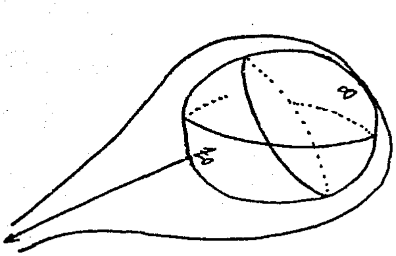


figura: PODEMOS VER LA GRÁFICA DE $\bar{G}$ PORQUE LA NORMAL EN CADA PUNTO DE $\bar{\mathbb{C}}$ ESTÁ DEFINIDA POR UNA FUNCIÓN CONTINUA (EN MÖBIUS NO PODRÍAS)

DE PASO APARECIÓ EL CANDIDATO A FRONTERA: ∞.

LA COMPACTIFICACIÓN DE STONE-CĚCH DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO ARBITRARIO ES LA QUE AÑADE UN PUNTO IDEAL AL ESPACIO (el ∞ PODRÍAMOS DECIRLE, PENSANDO EN $\mathbb{C}$ y $\bar{\mathbb{C}}$ vía stéreo ó $1/z$). LAS VECINDADES DE "∞" SON LOS EXTERIORES DE COMPACTOS DEL ESPACIO.

SI X ES EL ESPACIO Y $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ SE DEMUESTRA QUE $\bar{X}$ ES COMPACTO Y QUE CON LA NUEVA TOPOLOGÍA X SIGUE SIENDO ABIERTO. LLAMAREMOS AL PUNTO IDEAL ∞ la frontera Ideal.

HAY VARIOS PROBLEMAS.

1. SI X ES VARIEDAD ¿ES NECESARIAMENTE $\bar{X}$ VARIEDAD? NO NECESARIAMENTE: PIENSA EN LA SIGUIENTE FIGURA:

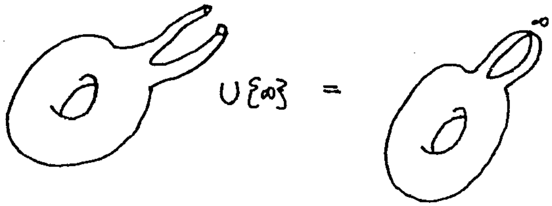


Figura: NO ES VARIEDAD POR QUE NINGUNA VECINDAD DE ∞ ES HOMEOMORFA A UN DISCO ABIERTO.

2. SABEMOS QUE LA SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A $\log z$ NO PUEDE COMPACTIFICARSE CON UN PUNTO, DE MANERA QUE SIGA SIENDO VARIEDAD.
3. SI COMPACTIFICAS Δ CON UN PUNTO (identificando la frontera en un punto) OBTIENES UNA ESFERA TOPOLÓGICA pero no conforme (ESCUCHA, AMABLE LECTOR, LA VOZ DE LIOUVILLE: si fueran conformemente equivalentes, quitando un punto en cada una de ellos obtendrías un biholomorfismo de Δ en $\mathbb{C}$).

... lo que pasa es que la frontera de Δ es grande, y la frontera de $\mathbb{C}$ es chica.

VAMOS A FORMALIZAR RIGUROSAMENTE LO ANTERIOR. POR LO PRONTO SABEMOS QUE $\mathbb{C}$ NI $\hat{\mathbb{C}}$ ADMITEN TROMPETA LOGARÍTMICA (FUNCIÓN DE GREEN), MIENTRAS QUE Δ SÍ.

§6.2 · LA BALADA DE LAS TROMPETAS Y LAS FUENTES. (POTENCIALES EN SS. DE RMNN.)

VAMOS A INVESTIGAR LAS CONDICIONES BAJO LAS CUALES UNA SUPERFICIE DE RIEMANN UNA FUNCIÓN DE GREEN.

DEFINICIÓN: UNA FAMILIA DE PERRON ES UN CONJUNTO NO VACÍO DE FUNCIONES SUBARMÓNICAS $v: W \to \mathbb{R}$ QUE ES CERRADA BAJO LAS SIGUIENTES OPERACIONES

(i) TOMAR EL MÁXIMO DE DOS FUNCIONES EN LA FAMILIA.
(ii) MAYORIZACIÓN ARMÓNICA LOCAL (el proceso de "parches armónicos" descrito en 5.2)

TEOREMA (principio de Perron): SI $\mathbf{V}$ ES UNA FAMILIA DE PERRON, LA FUNCIÓN u DEFINIDA COMO $u(p) = \sup v(p)$ PARA $v \in \mathbf{V}$ ES ARMÓNICA O BIEN $\equiv \infty$.

SU DEMOSTRACIÓN ES LOCAL EN EL PLANO, NO HAY PROBLEMA PARA GENERALIZARLA A SUPERFICIES DE RIEMANN (VER §5.2).

Sea $p_0 \in W$, z UNA VARIABLE LOCAL EN p_0 CON $z(p_0) = 0$. SEA $\mathbf{V}_{p_0}$ LA FAMILIA DE FUNCIONES QUE SATISFACEN

a) v ESTÁ DEFINIDA Y ES SUBARMÓNICA EN $W - \{p_0\}$
b) v ES IDÉNTICAMENTE CERO FUERA DE UN COMPACTO QUE CONTIENE A p_0
c) $\limsup_{p \to p_0} [v(p) + \log |z(p)|] < \infty$

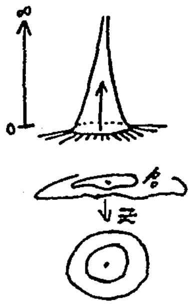
ES CLARO QUE V_{p_0} ES UNA FAMILIA DE PERRON. SI $\sup v$ ES FINITO (Y PORTANTO ARMÓNICA) DIREMOS QUE W ADMITE FUNCIÓN DE GREEN CON POLO EN p_0

DENOTAMOS A $\sup v$ COMO $g(p,p_0)$

OBSERVACIONES: (1) la función de Green no depende de la elección de la carta o variable local, por la condición (C). (ADELANTO: tampoco depende su existencia o no de p_0).

(2) ES NO VACÍA LA FAMILIA V_{p_0}.

SUPONGAMOS QUE EL DISCO $|z|\leq r_0$ está contenido en el rango de $z(p)$, LA FUNCIÓN



$$v_0(p) = \begin{cases} \log r_0 - \log|z(p)| & \text{si } |z(p)| \leq r_0 \\ 0 & \text{EN EL COMPLEMENTO EN } W \end{cases}$$

PERTENECE A V_{p_0}. EN PARTICULAR SE SIGUE QUE $g(p,p_0) \geq v_0(p)$ Y POR TANTO $g(p,p_0) \to \infty$ SI $p \to p_0$

(3) EL ARGUMENTO UTILIZADO EN $\mathbb{C}$ MUESTRA QUE NINGUNA SUPERFICIE COMPACTA ADMITE FUNCIÓN DE GREEN.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE GREEN:

AI $g(p,p_0) > 0$

AII $\inf g(p,p_0) = 0$

AIII $g(p,p_0) + \log|z(p)|$ tiene una extensión armónica a una vecindad de p_0 (REGRESA AL CASO PLANO: $G(z)$).

PRIMERO MOSTRAREMOS LA VALIDEZ DE AI (LAS OTRAS DOS SERÁN DEMOSTRADAS MÁS TARDE): como $0: W-\{p_0\} \to \mathbb{R}$

$p \mapsto 0 \in V_{p_0}$, TENEMOS QUE $g(p,p_0) \geq 0$. ¿QUÉ PASARÍA SI $g(p_1,p_0)=0$ PARA ALGÚN $p_1 \in W$? EVIDENTEMENTE p_1 NO PUEDE ESTAR EN EL RANGO DE NINGUNA CARTA LOCAL EN p_0 (POR (2) ANTERIOR). BUENO, COMO $g(p,p_0) \geq 0$ ENTONCES p_1 SERÍA UN MÍNIMO DE UNA función armónica tomado en un punto interior ¡!.

$\therefore g(p,p_0) > 0$.

SI COMPARAS LA DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DE GREEN EN W CON LA UTILIZADA EN EL PLANO OBSERVARÁS, AMABLE LECTOR, QUE NO HAY AMBIGÜEDAD: nuestra nueva función de Green es una función armónica en $W-\{p_0\}$, DEFINIDA POSITIVA Y QUE SE ANULA EN LA FRONTERA... ideal.

POR (3) ANTERIOR, EN LO QUE SIGUE TODAS LAS SUPERFICIES CONSIDERADAS SERÁN NO COMPACTAS (las llamaremos abiertas).

EN W, UNA SUP. DE RMNN. ABIERTA INTRODUCIMOS LA SIGUIENTE FAMILIA DE PERRÓN: DADO K UN COMPACTO ∋. SU COMPLEMENTO $W-K$ ES CONEXO, V_K SE DEFINE LA FAMILIA DE FUNCIONES $v: W-K \to \mathbb{R}$ TALES QUE

(i) v ES SUBARMÓNICA EN $W-K$

(ii) $v \leq 1$ EN $W-K$

(iii) SI $p_n \to \infty$ ENTONCES $\limsup v(p_n) \leq 0$

(LA CONDICIÓN (iii) PUEDE LEERSE ASÍ : DADO $\varepsilon>0$ EXISTE UN COMPACTO K_ε TAL QUE $v(p)<\varepsilon$ SI $p\in W-K_\varepsilon$).

ES RUTINARIO MOSTRAR QUE V_K ES FAMILIA DE PERRON, PERO ADEMAS, SIENDO UNA FAMILIA UNIFORMEMENTE ACOTADA (POR 1 Y 0 RESPECTIVAMENTE ARRIBA Y ABAJO) ENTONCES LA FUNCIÓN ARMÓNICA $u_K=\sup V_K$ SIEMPRE EXISTE Y $0\leq u_K\leq 1$. BIEN PUEDE SUCEDER QUE $u_K\equiv 1$ O QUE $u_K\equiv 0$

AFIRMACIÓN : SI EL INTERIOR DE K ($\mathring{K}$) ES NO VACÍO, ENTONCES u_K NO PUEDE SER IDÉNTICAMENTE NULA

Y VAMOS A MOSTRARLO CONSTRUYENDO UNA FUNCIÓN EN V_K QUE SEA ≥ 0 :

SEA $p_0\in\partial K$ Y $q_0\in K$ QUE ESTÉ CONTENIDO EN EL DOMINIO DE UNA CARTA LOCAL z EN p_0 QUE TENGA RANGO Δ Y $z(p_0)=0$.

SEA $z(q_0)=q_0$ (ver figura a la izquierda).

EXISTEN DISCOS CONCÉNTRICOS $|z-z_0|<\delta$ Y $|z-z_0|<2\delta$ AMBOS CONTENIDOS EN Δ TALES QUE EL DISCO PEQUEÑO ESTÁ CONTENIDO EN $z(K)$ Y EL MAYOR NO DEL TODO.

DEFINIMOS LA FUNCIÓN v COMO SIGUE

$$v(p)=\begin{cases}\log\dfrac{2\delta}{|z(p)-z_0|}:\log 2 & \text{SI } z(p) \text{ ESTÁ DEFINIDA Y SATISFACE } \delta<|z(p)-z_0|<2\delta\\[2ex] 0 & \text{EN CUALQUIER OTRO CASO } (p\in W)\end{cases}$$

LA RESTRICCIÓN DE ESTA FUNCIÓN A $W-K$ (ÁREA SOMBREADA DE LA FIGURA INFERIOR PERTENECE A V_K (UN SENCILLO CÁLCULO MUESTRA QUE, SI $z(p)\to\partial\Delta(z_0,\delta)$, $v_0(p)\to 1$ Y QUE SI $z(p)\to\partial\Delta(z_0,2\delta)$, $v_0(p)\to 0$) Y ES NO NULA, ASÍ QUE CUANDO $\mathring{K}\neq\emptyset$, $u_K\not\equiv 0$.

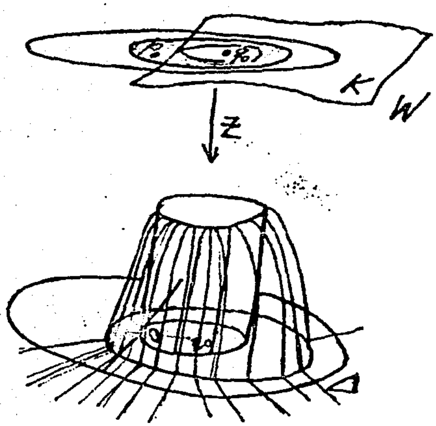


figura 2-GRÁFICA DE $v(p)$ EN LA COORDENADA LOCAL.

SIENDO u_K UNA FUNCIÓN ARMÓNICA, LAS POSIBILIDADES $0\leq u_K<1$ Y $0<u_K\leq 1$ QUEDAN DESCARTADAS, ASÍ QUE RESTAN SÓLO DOS POSIBILIDADES:

$$\underline{0<u_K<1 \quad \text{ó} \quad u_K\equiv 1}$$

EN EL PRIMER CASO <u>LLAMAMOS A u_K la medida armónica de K</u>. EN EL SEGUNDO CASO DECIMOS QUE LA MEDIDA ARMÓNICA no existe.

VAMOS A MOSTRAR QUE LA MEDIDA ARMÓNICA NO DEPENDE DEL COMPACTO K ELECTO SINO DE LA SUPERFICIE W MISMA, POR LA CONDICIÓN (iii) ESTAMOS EN POSIBILIDAD DE ASEGURAR que la medida armónica es una propiedad de la frontera ideal.

☛ OBSERVA SIN EMBARGO QUE LA FRONTERA DEBE SER grande PARA PODER EXISTIR LA MEDIDA ARMÓNICA : LAS FUNCIONES QUE LA DEFINEN SE VERÍAN COMO LA FIGURA 2 ANTERIOR, CON EL DISCO PEQUEÑO SIENDO K Y LA FRONTERA DEL DISCO MAYOR LO QUE, intuiríamos (espero) LA FRONTERA ideal.

☞ EL SIGUIENTE CONCEPTO FORMALIZA LA INTUICIÓN SOBRE frontera no grande PRESENTADO AL INICIO DE ESTE CAPÍTULO CON EL EJEMPLO DE LA FUENTE PUNTUAL (DIGNA REPRESENTANTE DE UNA FUNCIÓN DE GREEN):

SEA u UNA FUNCIÓN ARMÓNICA Y ACOTADA POR ARRIBA EN $W-K$. DECIMOS QUE el principio del máximo relativo a K (o bien: el principio del máximo es válido en $W-K$) si $\limsup_{p\to K} u(p) \leq 0$ implica que $u \leq 0$ EN $W-K$

o equivalentemente:

$$\sup_{p\in W-K} u(p) = \limsup_{p\to\partial K} u(p)$$

(PARA EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO NO ES NECESARIO SUPONER $\mathring{K}\neq\phi$).

DECÍAMOS INFORMALMENTE QUE SI W ADMITE FUNCIÓN DE GREEN, ENTONCES LA FRONTERA DE W DEBE SER grande. PERO SI W ADMITE FUNCIÓN DE GREEN $g(p,p_0)$ CON SINGULARIDAD EN $p_0 \in K$, ENTONCES $-g(p,p_0)$ ES UNA FUNCIÓN QUE NO SATISFACE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO (requiere demostración)

i.e.: SATISFACER EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO RELATIVO A ALGÚN COMPACTO $K \Rightarrow$ LA FRONTERA no es grande.

PARA SELLAR LA ARGUMENTACIÓN ANTERIOR DEBEMOS MOSTRAR QUE LA VALIDEZ O INVALIDEZ DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO NO DEPENDE DEL COMPACTO QUE TOMEMOS SINO DE LA SUPERFICIE MISMA. TAMBIÉN DEBEMOS MOSTRAR QUE LA EXISTENCIA DE $g(p,p_0)$ EN ALGÚN PUNTO IMPLICA QUE EXISTE EN TODO PUNTO DE W Y, POR SUPUESTO, DEBEMOS DEMOSTRAR TAMBIÉN LA ÚLTIMA AFIRMACIÓN DEL PÁRRAFO ANTERIOR (de hecho: que son equivalentes). ES PRECISAMENTE LO QUE HAREMOS:

6.2. TEOREMA: LAS SIGUIENTES PROPIEDADES SON EQUIVALENTES EN UNA SUP. DE RIEMANN ABIERTA:

(i) EXISTE FUNCIÓN DE GREEN
(ii) EXISTE MEDIDA ARMÓNICA
(iii) EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO NO ES VÁLIDO

PERO DEBEMOS MOSTRAR QUE SON INDEPENDIENTES TANTO DEL PUNTO p_0 ELECTO, COMO DEL COMPACTO K. ETIQUETÉMOSLAS COMO $(i)_{p_0}$, $(ii)_K$ y $(iii)_K$ PARA ENFATIZAR LA DEPENDENCIA.

BASTA ENTONCES PROBAR LO SIGUIENTE

I $(i)_{p_0} \Rightarrow (iii)_K$ si $p_0 \in K$
II $(ii)_K \Rightarrow (i)_{p_0}$ si $p_0 \in \mathring{K}$
III $(iii)_K \Rightarrow (ii)_{K'}$ PARA CUALESQUIERA K y K' COMPACTOS.

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

antes de demostrarlo veamos sus consecuencias, con el fin de no perder el hilo del razonamiento:

CON EL TEOREMA 6.2 DEMOSTRADO, TENDREMOS LA SIGUIENTE AFIRMACIÓN:

la invalidez del principio del máximo relativo a cualquier compacto $K \subseteq W$ es equivalente a la existencia de función de Green $g(p, p_0)$ con singularidad en cualquier punto $p_0 \in W$.

Y TENEMOS UNA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA MOSTRAR LA INVALIDEZ DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO:

supongamos que existe una función armónica no constante $h: W \to \mathbb{R}$, esta función debe tener un máximo en K. SI EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO FUESE VÁLIDO RELATIVAMENTE A K, tal máximo sería un máximo global, (PORQUE LA VALIDEZ DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO REL. A K DICE QUE LOS VALORES DE h EN $W-K$ SON MENORES O IGUALES QUE LOS VALORES DE h EN K) llegamos a una contradicción al principio del máximo usual para funciones armónicas. ASÍ ES QUE CON EL TEOREMA 6.2 DEMOSTRADO, TENDREMOS EL SIGUIENTE RESULTADO PROBADO:

TEOREMA 6.3: SEA W UNA SUPERFICIE DE RIEMANN ABIERTA. SI EXISTE UNA FUNCIÓN ARMÓNICA ACOTADA $f: W \to \mathbb{R}$ QUE NO ES CONSTANTE, ENTONCES PARA TODO COMPACTO $K \subseteq W$ CON INTERIOR NO VACÍO, EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO RELATIVO A K NO ES VÁLIDO Y W ADMITE FUNCIÓN DE GREEN CON SINGULARIDAD EN CUALQUIER PUNTO $y_0 \in W$.

ESTE TEOREMA BRINDA LA CLASIFICACIÓN potencial DE LAS SUPERFICIES DE RIEMANN ABIERTAS, Y FORMALIZA EL MISTERIOSO ENUNCIADO CON QUE CONCLUIMOS §6.1:

$\mathbb{C}$ ES (de acuerdo a la teoría de potencial) GRANDE PORQUE NO ADMITE FUNCIONES ARMÓNICAS NO CONSTANTES POSITIVAS Y LA FRONTERA DE $\mathbb{C}$ ES chica PORQUE NO ADMITE FUNCIONES ARMÓNICAS ACOTADAS NO CONSTANTES.

Δ ES (ídem) CHICO PORQUE ADMITE FUNCIONES ARMÓNICAS NO CONSTANTES POSITIVAS Y LA FRONTERA DE Δ ES GRANDE PORQUE Δ ADMITE FUNCIONES ARMÓNICAS ACOTADAS NO CONSTANTES.

Demostración del Teorema 6.2:

I $(\mathrm{i})_{p_0} \Rightarrow (\mathrm{iii})_K$ si $p_0 \in K$

EN EFECTO: LA FUNCIÓN $-g(p, p_0)$ TIENE UN MÁXIMO m EN K Y ESTÁ ACOTADA SUPERIORMENTE POR 0 EN $W-K$. Si el principio del máximo fuese válido en $W-K$, se tendría que $-g(p,p_0) \leq m$ EN TODO W, ASÍ que el valor m sería tomado en un punto interior del complemento de $\{p_0\}$, lo que contradice al principio del máximo usual.

ES DECIR (ppf): $\max_{\partial K_1} v^+(p) \leq \left(1 - \max_{\partial K_2} u_{K_1}\right)^{-1} \log r_2/r_1$

$\underbrace{\phantom{\left(1 - \max_{\partial K_2} u_{K_1}\right)^{-1} \log r_2/r_1}}_{\text{ESTA CANTIDAD ES ESTRICTAMENTE POSITIVA}}$

ASÍ ES QUE v^+ Y POR TANTO $v \in V_{p_0}$ ESTÁN UNIFORMEMENTE ACOTADAS POR ARRIBA EN ∂K_1, ES DECIR, $\sup V_{p_0} < \infty$ Y POR ENDE $g(p,p_0)$ EXISTE.

+.

III $(iii)_K \Rightarrow (ii)_{K'}$

EQUIVALENTEMENTE, PROBAREMOS QUE SI $u_{K'} \equiv 1$ ENTONCES EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO RELATIVO A K ES VÁLIDO

primer caso: $K' \subseteq K$.

CONSIDERA $u: W-K \longrightarrow \mathbb{R}$ SRG. ACOTADA SUPERIORMENTE POR 1 (si $u \leq M$ entonces considera la armónica u/M)

y tal que $\limsup_{p \to K} u(p) \leq 0$.

P.D: $u(p) \leq 0$ EN $W-K$

AFIRMACIÓN: si $v(p) \in V_{K'}$ ENTONCES $u(p) + v(p) \leq 1$ si $p \in W-K$

LO MOSTRAMOS... YA TERMINAMOS, PORQUE $v(p)$ PUEDE TOMARSE ARBITRARIAMENTE CERCANO A 1, LO QUE OBLIGA A SER $u(p) \leq 0$ EN $W-K$)

DEMOSTRACIÓN: LA DESIGUALDAD ES VÁLIDA CERCA DE LA FRONTERA IDEAL (PORQUE si $p \to \infty$, $v(p) \leq 0$ y $u(p) \leq 1$ siempre) Y TAMBIEN LO ES CUANDO $p \to K$ (PORQUE ENTONCES SE CUMPLE QUE $u(p) \leq 0$ y $v(p) \leq 1$).

listo el primer caso.

Segundo caso: toma ahora un par de compactos arbitrarios K y K' y sea K'' UN COMPACTO TAL QUE $K \cup K' \subseteq \mathrm{INT}\, K''$ Y SEA u COMO ANTES.

DE HECHO YA MOSTRAMOS QUE EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO USUAL ES VÁLIDO EN K'', ASÍ QUE

$$u(p) \leq \max_{\partial K''} u \quad \text{en } W-K''$$

P.D: $\max_{\partial K''} u \leq 0$

SUPONGAMOS QUE NO: si $\max_{\partial K''} u > 0$ ENTONCES

$u(p) \leq \max_{\partial K''} u$ también para $p \in K''-K$ (pues $u(p) \leq 0$ si $p \to K$)

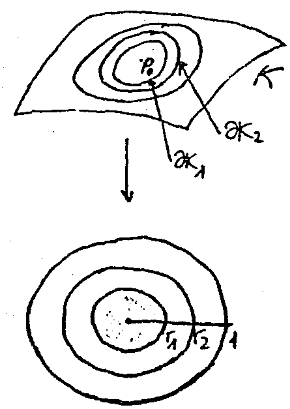
ASÍ ES QUE EL MÁXIMO DE $u(p)$ SE TOMA EN $\partial K''$ ($p \in W-K$) que es interior a $\overset{\circ}{W-K}$ ∇

ASÍ ES QUE $u \leq 0$ EN $\partial K''$ Y SIENDO $\partial K''$ FRONTERA COMÚN DE $W-K''$ y $K''-K$, EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO USUAL GARANTIZA QUE $u \leq 0$ EN $W-K$. q.q.d.

II $(ii)_K \Rightarrow (i)_{p_0}$ si $p_0 \in \mathring{K}$.

ESTAMOS SUPONIENDO QUE $\sup V = u_K$ EXISTE Y SATISFACE $0<u_K<1$. SI LOGRAMOS ACOTAR A LOS ELEMENTOS DE V_{p_0} UNIFORMEMENTE POR ARRIBA EN ALGÚN COMPACTO, PODRÍAMOS APLICAR EL PRINCIPIO DE PERRÓN Y CONCLUIR QUE, COMO $\sup V_{p_0} \neq \infty$, EXISTE $g(p,p_0)$.

ELIGE UNA CARTA LOCAL EN p_0 CONTENIDA EN K CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A $\Delta = |z|<1$ CON $p_0 \mapsto 0$. TOMA $0<r_1<r_2<1$ Y SEAN K_1 Y K_2 LOS COMPACTOS QUE CORRESPONDEN A LOS DISCOS CERRADOS $|z|\le r_1$ y $|z|\le r_2$.



COMO $K_1 \subsetneq K$, TODA FUNCIÓN SUBARMÓNICA EN $W-K_1$ LO ES EN $W-K$, SI ES MENOR O IGUAL QUE 1 EN $W-K_1$, TAMBIÉN LO ES EN $W-K$ Y LA TERCERA CONDICIÓN ES TRIVIALMENTE SATISFECHA, ASÍ QUE EXISTE

$$u_{K_1} : W-K_1 \to \mathbb{R} \ \ni\ 0<u_{K_1}<1.$$

AHORA TOMA $v \in V_{p_0}$ Y SUSTITÚYELA POR LA FUNCIÓN ARMÓNICA ≥ 0

$$v^+(p) = \max(v(p),0) \in V_{p_0}$$

(1) AFIRMACIÓN: $v^+(p) \le \left(\max\limits_{\partial K_1} v^+\right) u_{K_1}(p)$ si $p \in W-K_1$

PORQUE, CERCA DE LA FRONTERA IDEAL $v^+(p)\equiv 0$ Y CERCA DE K_1, $u_{K_1}(p)$ $(p\in W-K_1)$ ES ARBITRARIAMENTE CERCANA A 1.

COMO (1) ES VÁLIDA EN $W-K_1$, ENTONCES EN PARTICULAR:

$$\max_{\partial K_2} v^+ \le \left(\max_{\partial K_1} v^+\right)\left(\max_{\partial K_2} u_{K_1}\right) \quad \longleftrightarrow \quad (2)$$

SEA $\varepsilon>0$ PEQUEÑO Y CONSIDERA LA FUNCIÓN DEFINIDA EN K_2:

$$v^+(p) + (1+\varepsilon)\log|z(p)|$$

RECORDANDO QUE $v^+(p) \in V_{p_0}$ OBTENEMOS QUE CUANDO $p\to p_0$, ELLA $\to -\infty$ EN K_2, ASÍ QUE TOMA SU MÁXIMO EN ∂K_2, EN PARTICULAR

$$\max_{\partial K_1}\left[v^+(p)+\log|z(p)|+\varepsilon\log|z(p)|\right] \le \max_{\partial K_2}\left[v^+(p)+\log|z(p)|+\varepsilon\log|z(p)|\right]$$

$$\max_{\partial K_1} v^+(p) + \log r_1 + \varepsilon\log r_1 \le \max_{\partial K_2} v^+(p) + \log r_2 + \varepsilon \log r_2$$

$$\underset{(2)}{\le} \left(\max_{\partial K_1} v^+\right)\left(\max_{\partial K_2} u_{K_1}\right) + \log r_2(1+\varepsilon) \qquad (3)$$

SI $\varepsilon \to 0$, OBTENEMOS QUE $\left(\max\limits_{\partial K_1} v^+(p)\right)\left(1-\max\limits_{\partial K_2} u_{K_1}\right) \le \log r_2/r_1$

SOLAMENTE FALTA MOSTRAR AII y AIII DE $g(p,p_0)$

AIII : toma de nuevo una variable local en p_0, conformemente equivalente con Δ tal que $z(p_0)=0$.

P.D : $g(p,p_0)+\log|z(p)|$ tiene una extensión armónica a una vecindad de p_0

ASÍ QUE SÓLO DEBEMOS acotarla en el dominio de z.
SI $m(r)$ ES EL MÁXIMO DE $g(p,p_0)$ EN $|z(p)|=r$, DE

$$\max_{\partial K_1} v^+(p)+(1+\varepsilon)\log r_1 \leq \max_{\partial K_2} v^+(p)+(1+\varepsilon)\log r_2 \quad \text{(APARECIÓ EN II)}$$

OBTENEMOS QUE $\log r + m(r)$ ES UNA FUNCIÓN CRECIENTE DE r, ASÍ QUE $g(p,p_0)+\log|z(p)|$ ESTÁ ACOTADA POR ARRIBA CERCA DE p_0

LA COTA INFERIOR ES TRIVIAL: $v(p)=\begin{cases}-\log|z(p)|+\log r_0 & \text{si } |z(p)|<r_0\\ 0 & \text{AFUERA}\end{cases}$

ESTÁ EN V_{p_0} $\therefore$ $g(p,p_0)\geq -\log|z(p)|+\log r_0$ CERCA DE p_0 en PARTICULAR.

AII : APARECERÁ COMO CONSECUENCIA INMEDIATA EN UNOS MOMENTOS. (NO HE UTILIZADO HASTA AHORA EN NINGÚN MOMENTO ESA PROPIEDAD : SOLAMENTE FUE MENCIONADA CUANDO ENUNCIÉ LAS PROPIEDADES AI, AII y AIII con el propósito de mostrar que la función de Green en una superficie de Riemann es la generalización 'natural' de la desarrollada en §5.1)

ESTAMOS DE NUEVO EN LAS CONCLUSIONES DEL **TEOREMA 6.3.**

DEFINICIÓN : UNA SUPERFICIE DE RIEMANN ABIERTA QUE SATISFAGA UNA (y $\therefore$ TODAS) LAS PROPIEDADES DEL TEOREMA 6.2 SE LLAMARÁ hiperbólica. Aquellas QUE NO LAS TENGAN SE LLAMARÁN PARABÓLICAS.

NUESTRA CARACTERIZACIÓN potencial de las superficies abiertas va por buen camino:

LEMA : UNA FUNCIÓN ARMÓNICA positiva en una superficie parabólica es constante.

Demostración : SI u ES ARMÓNICA Y POSITIVA EN W, PARABÓLICA. TOMA DOS PUNTOS ARBITRARIOS p y $q\in W$. COMO SON COMPACTOS, EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO RELATIVO A CADA UNO DE ELLOS ES SATISFECHO POR $-u$ (ARMÓNICA Y ACOTADA POR 0)

EN $W-\{p\}$: $-u(q)\leq -u(p)$
EN $W-\{q\}$: $-u(p)\leq -u(q)$ $\quad\therefore\ u(p)=u(q)$

1.q.q.d.

ESTAMOS ANTE EL PROBLEMA DE producir FUNCIONES ARMÓNICAS ACOTADAS NO CONSTANTES EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN: el problema de Dirichlet ha aparecido. LO ENUNCIO DE NUEVO, AHORA EN SUPERFICIES DE RIEMANN:

> SEAN $W \subseteq W_1$ SUPERFICIES DE RIEMANN Y SUPONGAMOS QUE ∂W ES UNA COLECCIÓN FINITA DE CURVAS ANALÍTICAS A TROZOS: DADA $f: \partial W \to \mathbb{R}$ CONTINUA DEBES ENCONTRAR UNA FUNCIÓN ARMÓNICA $h: \bar{W} \to \mathbb{R}$ ∋. $h|_{\partial W} = f$ (DONDE $\bar{W}$ = CERRADURA DE $W = W \cup \partial W$).

RESOLVER EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA f NO CONSTANTE IMPLICA LA EXISTENCIA DE FUNCIONES ARMÓNICAS NO CONSTANTES EN W, ASÍ QUE POR 6.3 EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO RELATIVO A CUALQUIER COMPACTO K DE W SERÁ INVÁLIDO Y la frontera de W es grande.

PERO... YA SABEMOS RESOLVERLO: PERRON TIENE DE NUEVO LA PALABRA:

$$\text{SEA } \mathfrak{F} = \{ v : \bar{W} \to \mathbb{R} \;/\; v \text{ ES SUBARMÓNICA EN } W,\; v|_{\partial S} \leq f,\; v \leq \sup f \}$$ ES UNA FAMILIA DE PERRÓN

LA DEMOSTRACIÓN EN EL PLANO SE BASÓ EXCLUSIVAMENTE EN PROPIEDADES LOCALES ASÍ QUE SE EXTIENDE SIN PROBLEMAS A SUPERFICIES DE RIEMANN. CUANDO f ES ACOTADA (o bien, ∂W ES COMPACTA), EL PRINCIPIO DE PERRON APLICADO A LA FAMILIA $\mathfrak{F}$ RESUELVE EL PROBLEMA. RESTA DEMOSTRAR QUE LA SOLUCIÓN h RESTRINGIDA A ∂W COINCIDE CON f.

CON UNA FRONTERA TAN DECENTE ES EVIDENTE LA FORMA EN QUE PODEMOS DEFINIR <u>BARRERAS</u> EN CADA VECINDAD DE $p \in \partial W$ (AL FINAL DE §5.2 MOSTRAMOS CONDICIONES SUFICIENTES Y POR SER LOCALES, PODEMOS SUBIRLAS A ∂W CON LAS VARIABLES LOCALES DE W_1).

OBSERVA QUE LAS BARRERAS SON LA FORMALIZACIÓN DE LA pared porosa que mencionábamos en el ejemplo de la fuente puntual, al inicio de §6.1)

HEMOS PROBADO:

TEOREMA 6.4: SEAN W_1 Y W SUPERFICIES DE RIEMANN ∋. $W \subseteq W_1$. SI ∂W ES UNIÓN FINITA DE ARCOS ANALÍTICOS CERRADOS, ENTONCES PARA CUALQUIER FUNCIÓN CONTINUA Y ACOTADA $f: \partial W \to \mathbb{R}$, EXISTE $h: \bar{W} \to \mathbb{R}$ QUE SATISFACE:

(i) $|h| \leq \sup |f|$
(ii) $h|_W$ ES ARMÓNICA
(iii) $h|_{\partial W} = f$

Y UNA CONSECUENCIA INMEDIATA DE 6.3 y 6.4 ES LA PRIMERA PARTE DEL:

TEOREMA 6.5: SEAN W_1 Y W SUPERFICIES DE RIEMANN ∋. $W \subseteq W_1$. SI ∂W ES COMO EN 6.4 ENTONCES:

(i) W TIENE FUNCIÓN DE GREEN $g(p, p_0)$, y
(ii) $\lim_{p \to \partial W} g(p, p_0) = 0$

Demostración de (ii): SEA C UN "DISCO" PEQUEÑO (CONTENIDO EN UNA CARTA LOCAL USUAL) ALREDEDOR DE p_0

POR EL TEOREMA 6.4, ES POSIBLE, EN W, RESOLVER EL PROBLEMA DE DIRICHLET EN EL EXTERIOR DE C CON VALORES EN LA FRONTERA $f|_C = g$ y $f|_{\partial W} = 0$

SEA h LA SOLUCIÓN.

POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA FUNCIONES SUBARMÓNICAS h ES UNA COTA SUPERIOR DE TODAS LAS FUNCIONES $v \in V_{p_0}$, QUE DEFINEN A $g(p,p_0)$

$$\therefore \limsup_{p \to \partial W} g(p,p_0) \leq 0$$

Y COMO $v(p) \equiv 0$ ESTÁ EN V_{p_0}

$$\liminf_{p \to \partial W} g(p,p_0) \geq 0$$

... LO QUE DEMUESTRA (ii).

VII

demostración:

CASO HIPERBÓLICO:

COMO ERA DE ESPERAR:

PARTE 1: SI W ES UNA SUPERFICIE DE RIEMANN HIPERBÓLICA, ENTONCES W ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A Δ.

Dem: SEA $p_0 \in W$ y $g(p,p_0)$ LA FUNCIÓN DE GREEN DE W CON SINGULARIDAD EN p_0. CADA $p \neq p_0$ EN W POSEE UNA VECINDAD U_α QUE NO CONTIENE A p_0. SEA ENTONCES h_α UNA CONJUGADA ARMÓNICA DE $g(p,p_0)$ EN U_α (ESTÁ DETERMINADA HASTA UNA CONSTANTE) Y CONSIDERA

$$f_\alpha = e^{-(g+ih_\alpha)}.$$

ENTONCES f_α ESTÁ DETERMINADA HASTA UNA CONSTANTE DE MÓDULO 1.

ES CLARO QUE LAS CONSTANTES PUEDEN ELEGIRSE DE MANERA QUE SI $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, LAS CORRESPONDIENTES f_α y f_β COINCIDAN EN CADA COMPONENTE DE $U_\alpha \cap U_\beta$.

ASÍ QUE TENEMOS UNA FAMILIA DE FUNCIONES $\{f_\alpha\}$ QUE SATISFACEN

$$\log|f_\alpha| = \log|e^{-(g+ih)}| = -g(p,p_0) \quad \text{PARA CADA } U_\alpha$$

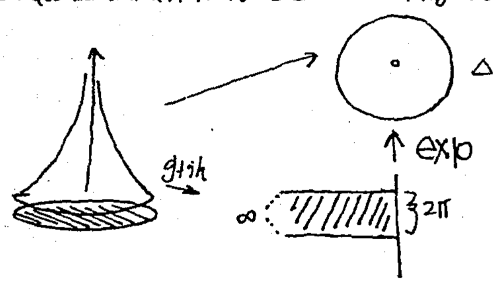
EL TEOREMA 6.1 GARANTIZA LA EXISTENCIA DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(p,p_0)$, $f: W-\{p_0\} \to \mathbb{C}$ QUE SATISFACE

$$\log|f(p,p_0)| = -g(p,p_0)$$

Y ES CLARO QUE PODEMOS COMPLETAR $f(p,p_0)$ EN p_0 DEFINIENDO

$$f(p_0,p_0) = 0.$$

(ES DECIR, PODEMOS REMOVER LA singularidad al ∞ DE LA FUNCIÓN GLOBAL POR QUE EL COMPORTAMIENTO ES COMO EN LA figura siguiente)



COMO $0 < g(p,p_0) < \infty$, ENTONCES $|f(p,p_0)| < 1$ Y ADEMÁS, $f(p,p_0) = 0 \Leftrightarrow p = p_0$.

RESTA ÚNICAMENTE MOSTRAR QUE TAL f REALIZA UNA BIYECCIÓN ENTRE W y Δ. LO LOGRAREMOS COMPARANDO EL COMPORTAMIENTO DE $f(p,p_0)$ CON EL DE $f(p,p_1)$, $p_1 \neq p_0$ UN PUNTO ARBITRARIO DE W (ESTAMOS UTILIZANDO FUERTEMENTE EL HECHO DE QUE SI $g(p,p_0)$ EXISTE, ENTONCES $g(p,p_1)$ TAMBIÉN, PARA CUALQUIER $p_1 \neq p_0$: $f(p,p_1)$ SE CONSTRUYE DEL MISMO MODO QUE $f(p,p_0)$).

Inyectividad:

PARA LA COMPARACIÓN ANUNCIADA, CONSIDERA

$$(1) \quad F(p) = \frac{f(p,p_0) - f(p_1,p_0)}{1 - \left(\bar{f}(p_1,p_0)\cdot f(p,p_0)\right)} \qquad \text{(ES UN BIHOLOMORFISMO DE } \Delta)$$

ELLA SATISFACE $|F(p)| < 1$ y $F(p_1) = 0$

LO ÚNICO QUE DEBEMOS MOSTRAR ES QUE p_1 ES EL ÚNICO PUNTO QUE VA A DAR A 0.

(OBSERVA QUE, COMO $|\bar{f}(p_1,p_0)\cdot f(p,p_0)| < 1$, $F(p)$ ES LIBRE DE POLOS EN W).

SIN EMBARGO, EL COMPORTAMIENTO DE $f(p,p_1)$ ESTÁ DETERMINADO POR EL DE $g(p,p_1)$, ASÍ QUE COMPARANDO A $F(p)$ CON $g(p,p_1)$ OBTENDREMOS LA INFORMACIÓN QUE BUSCAMOS.

RECORDEMOS QUE $g(p,p_1) = \sup V_{p_1}$, DONDE LA FAMILIA V_{p_1} ESTÁ DEFINIDA POR

$$V_{p_1} = \{ v : W - \{p_1\} \to \mathbb{R} \text{ SUBARMÓNICA, NULA CERCA DE LA FRONTERA IDEAL Y } \limsup_{p\to p_1} \left(v(p) + \log|z_1(p)|\right) < \infty \}$$

DONDE z_1 ES UNA CARTA LOCAL EN p_1 QUE TIENE RANGO Δ Y $z_1(p_1) = 0$

COMO $\displaystyle\lim_{p\to p_1} \frac{F(p)}{z_1(p)} = \lim_{p\to p_1} \frac{F'(p)}{z_1'(p)}$, AMBOS NO NULOS, EL LÍMITE DEL COCIENTE EXISTE Y ES FINITO, VALE DECIR, AMBAS FUNCIONES TIENEN EL MISMO COMPORTAMIENTO CERCA DE p_1, POR LO TANTO

$$\limsup_{p\to p_1} \left(v(p) + \log|F(p)|\right) < \infty \quad (\text{DE LA DEFN. DE } V_{p_1})$$

SIN EMBARGO:

$$\limsup_{p\to p_1} \varepsilon \log|F(p)| = -\infty$$

$$\therefore \quad \limsup_{p\to p_1} \left(v(p) + (1+\varepsilon)\log|F(p)|\right) = -\infty \quad \text{PARA TODA } v \in V_{p_1}$$

POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA FUNCIONES ARMÓNICAS

$$v(p) + (1+\varepsilon)\log|F(p)| \leq 0 \quad \text{EN } W$$

AHORA, TOMANDO EL $\sup V_{p_1}$ Y TENDIENDO $\varepsilon \to 0$ CONCLUIMOS QUE LA FUNCIÓN ARMÓNICA

$$g(p,p_1) + \log|F(p)| \text{ ES } \leq 0 \text{ EN } W$$

Y SE ANULA EN $p = p_1$ (SINGULARIDAD REMOVIBLE); POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO

$$g(p,p_1) + \log|F(p)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \log|F(p)| = -g(p,p_1) \underset{\text{HIP.}}{=} \log|f(p,p_1)| \quad \therefore |F(p)| = |f(p,p_1)|$$

Y ENTONCES $F(p) = e^{i\theta_0} f(p,p_1)$, LO QUE NOS PERMITE CONCLUIR QUE $F(p) = 0$ SÓLO CUANDO $p = p_1$: TRADUCIENDO EN (1), HEMOS PROBADO QUE $f(p,p_0) = f(p_1,p_0) \Leftrightarrow p = p_1$ $\therefore$ f ES INYECTIVA (DE HECHO: ES ENTONCES

UNIFORME. POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO DE FUNCIONES HOLOMORFAS, $f(p, p_0)$ TAMBIÉN ES SUPRAYECTIVA

... y eso es precisamente 1.q.q.d.

OBS: PUEDE MOSTRARSE QUE LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN

$$f_0(p) = z(p)\exp\left[-\left(g(p,p_0) + \log|z(p)| + i h_0\right)\right]$$

(DONDE h_0 ES UNA CONJUGADA ARMÓNICA DE $g(p,p_0) + \log|z(p)|$ CERCA DE p_0)

CON UNA ELECCIÓN CORRECTA DE LAS CONSTANTES INVOLUCRADAS genera a los ELEMENTOS DE FUNCIÓN QUE YO DEFINÍ COMO f_α. ESTE CAMINO PERMITE UTILIZAR EL TEOREMA DE MONODROMÍA Y EVITA EL PROBLEMA DE LA SINGULARIDAD EN p_0. SIN EMBARGO, LA COMPARACIÓN CON $F(p)$ ES INSALVABLE.

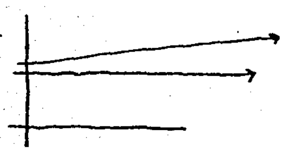
DEBEMOS ENTONCES CONSIDERAR AHORA UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA QUE NO ADMITA FUNCIÓN DE GREEN.

DEFINICIÓN: UNA CURVA DIVERGENTE EN W ES UNA CURVA ANALÍTICA A TROZOS, SIMPLE $\phi: [0,\infty) \to W$ QUE SATISFACE: para cualquier compacto $K \subseteq W$, $\phi^{-1}(K)$ ES COMPACTO.

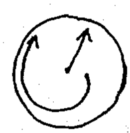
no es trivial producir curvas divergentes

INFORMALMENTE: ES UNA CURVA QUE SE SALE DE CUALQUIER COMPACTO

FORMALMENTE: ES UNA CURVA QUE SE VA A LA FRONTERA IDEAL



$\mathbb{C}$ tiene curva divergente y no tiene función de Green



Δ tiene curva divergente pero tiene función de Green.

UNA SUPERFICIE COMPACTA no puede tenerla.

CASO PARABÓLICO

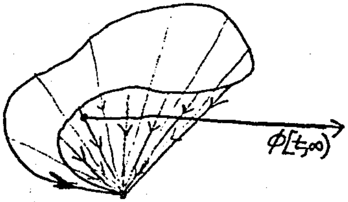
LEMA 1: SI S ES SIMPLEMENTE CONEXA Y ADMITE CURVA DIVERGENTE ϕ ENTONCES

$$S_t = S - \{\phi[t,\infty)\}$$

ES SIMPLEMENTE CONEXA $\forall t \in [0,\infty)$

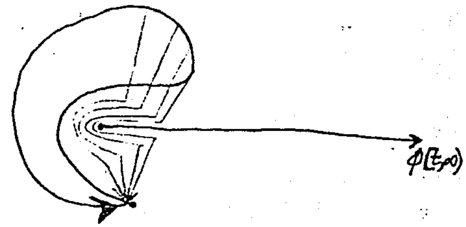
es decir: quitando "la cola" al ∞ obtienes una superficie simplemente conexa. La idea de la demostración es sencilla (figura siguiente)

Si tomas un lazo α contenido en S_t, DEBES MOSTRAR QUE ES nulhomotópico en S_t:



la homotopía o deformación vive en un compacto que no necesariamente esté contenido en S_t

sin embargo:



puedes deformarlo continuamente de manera que sí viva en S_t

¿CUAL ES LA FRONTERA DE $S_t \subseteq S$?
ES $\phi([0,t))$.
es grande.

DE MANERA AHORA SENCILLA OBTENEMOS EL SIGUIENTE (sorprendente) RESULTADO:

LEMA 2: PARA TODA $t \geq 0$, S_t ES SIMPLEMENTE CONEXA Y PARA CUALQUIER $\zeta_0 \in S_0$, S_t ADMITE UNA FUNCIÓN DE GREEN CON SINGULARIDAD EN ζ_0. MÁS AUN:

$$\lim_{\zeta \to \partial S_t} g(\zeta, \zeta_0) = 0$$

es decir, S es Δ por pedazos cada vez mayores. EL PROBLEMA ES QUE NO TENGO CONTROL ALGUNO AL ∞. (NO TIENE AUN NINGÚN SENTIDO HABLAR DEL LÍMITE AL ∞.

PRECISANDO: PODEMOS TOMAR UNA SUCESIÓN $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ QUE TIENDA A ∞ (EN $\mathbb{R}$). PARA CADA PUNTO t_i, SEA $S_i = S_{t_i}$. EL LEMA 2 DICE QUE EXISTE UN BIHOLOMORFISMO $f_{t_i} = f_i : S_i \to \Delta$ PARA CADA S_i. COMPONIENDO CON ALGUNA TRANSFORMACIÓN EN BIHOL Δ PUEDO CONSEGUIR UN POCO DE CONTROL

$$f_i(\zeta_0) = 0 \quad \forall_i$$

AHORA BIEN, SIENDO UN BIHOLOMORFISMO PUEDO ELEGIR f_0 COMO CARTA LOCAL EN ζ_0: $z = f_0(\zeta)$. PODEMOS ENTONCES CALCULAR $c_i = f_i'(z(\zeta))\big|_{\zeta=\zeta_0}$

y OBTENER $F_i(\zeta) = c_i^{-1} \cdot f_i(\zeta)$. AHORA

$$F_i : S_i \longrightarrow \Delta_i \ (= \text{disco en el origen y radio } |c_i^{-1}|)$$

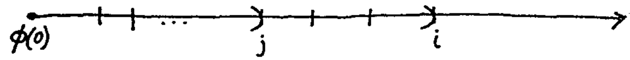
son biholomorfismos que satisfacen

$$F_i(\zeta_0) = 0$$
$$F_i'(\zeta_0) = 1$$

y he ganado cierto control sobre la forma en que, por pedazos, puedo ir metiendo S en $\mathbb{C}$, AUNQUE AUN NO SE MUCHO AL ∞.

SIN EMBARGO:

OBSERVA QUE PARA $i \geq j$, $S_j \subseteq S_i$



SI consigo una familia de inyecciones holomorfas $G_i : S_i \longrightarrow \mathbb{C}$ DE MANERA QUE PARA $j \leq i$, $G_j = G_i|_{S_j}$

entonces podríamos ir comparando las imágenes en $\mathbb{C}$ de cada S_i y podríamos, ahora sí, tener control al infinito

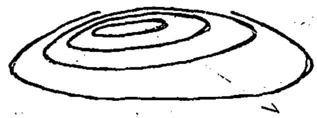


fig: inyecciones holomorfas

OBS: SI CONSIGUES UNA FUNCIÓN HOLOMORFA E INYECTIVA global $f: S \to \mathbb{C}$, LA IMAGEN $f(S) \subseteq \mathbb{C}$ ES SIMPLEMENTE CONEXA, SI NO FUERA TODO $\mathbb{C}$, ENTONCES SERÍA Δ (TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN) es decir, existiría un BIHOLOMORFISMO

$$h: f(S) \longrightarrow \Delta$$

Y ENTONCES $Re(h \circ f): S \longrightarrow \Delta$ SERÍA UNA FUNCIÓN ARMÓNICA NO CONSTANTE Y ACOTADA GLOBAL ASÍ QUE S ADMITIRÍA FUNCIÓN DE GREEN !

ASÍ QUE $f(S) = \mathbb{C}$

¿CÓMO LA CONSIGO?

EN ESTE PUNTO PIDO DISCULPAS AL LECTOR POR BOSQUEJAR SOLAMENTE LA DEMOSTRACIÓN DEL PODEROSO

TEOREMA: SEA $\Delta(r) = \{|z| < r\}$ Y $\mathcal{S}_r$ EL CONJUNTO DE INYECCIONES HOLOMORFAS $f: \Delta(r) \to \mathbb{C}$ QUE SATISFACEN

(i) $f(0) = 0$
(ii) $f'(0) = 1$

LA FAMILIA $\mathcal{S}_r$ ES NORMAL (en la topología de convergencia uniforme en compactos).

BASTARÍA MOSTRARLO PARA $\mathcal{S}_1$ PORQUE LA APLICACIÓN

$$\mathcal{S}_r \longrightarrow \mathcal{S}_1$$
$$f(z) \longmapsto F(z) = r^{-1} f(rz)$$

ES UN HOMEOMORFISMO

PENSARÍAMOS EN ARZELA-ASCOLI, PERO EL ESPACIO DE TALES APLICACIONES ES MUY DECENTE: SI MOSTRAMOS QUE $\mathcal{S}_1$ ES COMPACTO HABREMOS TERMINADO

Y VIENE UNA CADENA DE RESULTADOS:

TEOREMA* : LOS COMPACTOS DE $\mathcal{S}_1$ SON LOS CERRADOS Y ACOTADOS
(MONTEL)

para mostrar que es CERRADO, EL Teorema de Hurwitz ** establece que el límite de inyecciones holomorfas es inyectiva y holomorfa o constante; la condición ii desecha un límite constante.

para mostrar que es ACOTADO, EL Teorema de la Distorsión de Koebe*** acota el comportamiento de toda $f(z) \in \mathcal{S}_1$:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} \quad , \text{ si } |z| = r < 1 .$$

COMO SEÑALÉ (literalmente) EN LA PAGINA ANTERIOR, DEBO CONSTRUIR recursivamente subsucesiones que converjan a las funciones G_i Y QUE SATISFAGAN $G_j = G_i|_{S_j}$ PARA $i \geqslant j$.

LA SUCESIÓN $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ DE TALES SUBSUCESIONES SE DEFINE ASÍ :

(i) SEA $N_1 = \mathbb{Z}^+$. POR EL MÉTODO DESCRITO, PUEDO OBTENER UNA SUCESIÓN DE BIHOLOMORFISMOS $F_i : S_i \longrightarrow \Delta_i = \Delta(c_i)$ QUE SATISFACEN $F_i(z_0) = 0$ y $F_i'(z_0) = 1$ (TOMANDO A F_0 COMO CARTA EN z_0, EL PUNTO DE CARGA). (SERÁN SUBSUCESIONES DE SUBSUCESIONES DE $\mathbb{Z}^+$).

(ii) SI N_i ESTÁ DEFINIDA (ES UNA SUBSUCESIÓN DE $\mathbb{Z}$), TOMA $j \in N_i$ ∍. $j \geqslant i$
COMO F_j ES UN BIHOLOMORFISMO DE S_j (QUE CONTIENE A S_i) SOBRE ALGÚN DISCO EN $\mathbb{C}$, ENTONCES RESTRINGIDA A S_i ES INYECTIVA Y POR SUPUESTO $F_j'(z(z_0)) = 1$, ENTONCES para toda $j \geqslant i$:

$F_j \circ F_i^{-1} : \Delta_i \longrightarrow \mathbb{C}$ ES INYECTIVA,
MANDA 0 EN 0, Y POR LA REGLA DE LA CADENA Y TEOREMA DE LA FN. INVERSA TIENE DERIVADA $= 1$ EN 0

POR EL **TEOREMA**, la sucesión de funciones

$$(F_j \circ F_i^{-1})_{j \geqslant i} \; : \Delta_i \longrightarrow \mathbb{C}$$

ADMITE UNA SUBSUCESIÓN

$$(F_{n_j} \circ F_i^{-1})_{n_j \geqslant j \geqslant i}$$

CONVERGENTE A UNA FUNCIÓN HOLOMORFA E INYECTIVA

$$H_i : \Delta_i \longrightarrow \mathbb{C} \quad ∍. \; H_i(z_0) = 0 \;\&\; H_i'(z_0) = 1$$

DEFINIMOS N_{i+1} COMO n_j . ES DECIR $N_{i+1} \subseteq N_i$ Y N_{i+1} DEFINE A H_i.

---

* CARTAN, HENRI : ELEMENTARY THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS OF ONE AND SEVERAL COMPLEX VARIABLES. ADDIWES. pág 163.

** AHLFORS, LARS : C.A. pág 224.

*** AHLFORS, LARS : C.I. pág 87.

YA LA HICIMOS:

SEA n_j LA j-ésima entrada de la sucesión N_j.

PARA TODA $k>i$ LA FUNCIÓN

$$H_k \circ F_k : S_k \longrightarrow \mathbb{C}$$

RESTRINGIDA A S_i ES UNA INYECCIÓN HOLOMORFA, Y EN TAL DOMINIO PODEMOS ESCRIBIR:

$$H_k \circ F_k = \left(\lim_{j\to\infty} F_{n_j} \circ F_k^{-1}\right) \circ F_k = \left(\lim_{j\to\infty} F_{n_j} \circ (Id_{S_i}) \circ F_k^{-1}\right) \circ F_k$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{j\to\infty} F_{n_j} \circ F_i^{-1}}_{\text{ESTA ESTÁ BIEN DEFINIDA } \therefore} \circ F_i \circ F_k^{-1}\right) \circ F_k$$

$$= \left(\lim_{j\to\infty} F_{n_j} \circ F_i^{-1}\right) \circ F_i \circ F_k^{-1} \circ F_k$$

$$= H_i \circ F_i$$

ES ENTONCES UNA RESTRICCIÓN: LAS G_k BUSCADAS SON ESTAS ÚLTIMAS PORQUE REALIZAN LO QUE DESEÁBAMOS:

"... que las anteriores S_i estuvieran inyectadas en las siguientes S_k cuando las bajásemos a $\mathbb{C}$ ..."

ASÍ ES QUE PARA CADA k, $H_k \circ F_k$ ES LA RESTRICCIÓN A S_k DE UNA APLICACIÓN GLOBAL

$$f : S \to \mathbb{C}$$

QUE ES INYECTIVO PORQUE RESTRINGIDO A CADA S_i LO ES.

hemos probado la

PARTE 2: SI S ES UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA
CON UNA CURVA DIVERGENTE
Y SIN FUNCIÓN DE GREEN
ENTONCES S ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A $\mathbb{C}$.

PARA EL CASO RESTANTE NECESITAMOS

TEOREMA: SI W ES UNA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA SIN CURVA DIVERGENTE, ENTONCES, PARA TODO $z_1 \in W$, $W - \{z_1\} = \dot{W}$ ES SIMPLEMENTE CONEXA.

es un resultado TOPOLÓGICO

TOPOLÓGICAMENTE EL TAMAÑO DE LA FRONTERA NO ME PREOCUPA.

TOMA $\bar{N}$ UN DISCO CERRADO CENTRADO EN z_1, ENTONCES $W - \{z_1\}$ y $W - \bar{N}$ SON HOMEOMORFOS.

AHORA, EL ASUNTO ES QUE $W_1 = W - \bar{N}$ tiene frontera grande, es inmediato mostrar que sigue siendo superficie de Riemann y entonces W_1 ADMITE FUNCIÓN DE GREEN PARA CUALQUIER $z_0 \in W_1$.

CONSIDEREMOS LA FUNCIÓN DE GREEN $g(\zeta,\zeta_0)$
Z UNA CARTA USUAL EN ζ_0 :
EN UNA VECINDAD DE ζ_0 ESTÁ BIEN DEFINIDA LA FUNCIÓN ARMÓNICA

$$g(\zeta,\zeta_0)+\log|Z(\zeta)| \qquad (1)$$

Y EN ELLA TIENE UNA CONJUGADA ARMÓNICA h_0 (DETERMINADA HASTA UNA CONSTANTE)

trabalenguas:

ENTONCES, EN ESA VECINDAD, LA FUNCIÓN

$$Z(\zeta)e^{-(g(\zeta,\zeta_0)+\log|Z(\zeta)|+ih_0)} \qquad (2)$$

TAMPOCO TIENE SINGULARIDADES, PORQUE LAS ÚNICAS SINGULARIDADES DE (2) SON LAS SINGULARIDADES DE

$$g(\zeta,\zeta_0)+\log|Z(\zeta)|+ih_0$$

QUE A SU VEZ SÓLO SON LAS DE $g(\zeta,\zeta_0)+\log|Z(\zeta)|$ (POR CAUCHY-RIEMANN)

PODEMOS APLICAR EL TEOREMA **6.1** A LAS CONTINUACIONES ANALÍTICAS DEL ELEMENTO DE FUNCIÓN INDICADO POR (2) EN $\zeta=\zeta_0$ A LO LARGO DE CURVAS EN ESTA MISTERIOSA VECINDAD.

pregunta: ¿hasta dónde es válido este procedimiento?

es decir: qué tan grande puede ser esta vecindad.

respuesta: **6.1** ES VÁLIDO MIENTRAS NO APAREZCAN SINGULARIDADES ... DE $g(\zeta,\zeta_0)$ (QUE NO DE (1) PORQUE ES LA FAMILIA DE LAS CONTINUACIONES

$$Z(\zeta)e^{-(g(\zeta,\zeta_0)+ih_\zeta)}$$

CON ζ EN LA VECINDAD (A LO LARGO DE CURVAS DE ζ_0 A ζ, CON ζ EN LA VECINDAD)

DETERMINEMOS LA VECINDAD: si g tiene puntos críticos, . . .

$$\text{SEA } M=\sup\{g(\zeta,\zeta_0) : \zeta\neq\zeta_0 \text{ y } g'(\zeta,\zeta_0)=0\}$$

si g NO TIENE PUNTOS CRÍTICOS

$$M:=0$$

SEA $D = \{\zeta \in W_1 : g(\zeta,\zeta_0) > M\} \cup \{\zeta_0\}$

Y SEA $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < e^{-M}\}$

ENTONCES *hemos probado*:

LEMA B1: EXISTE UN BIHOLOMORFISMO $f: D \to B$

Dem: **6.1** y **PARTE 1** (CASO HIPERBÓLICO)

EVIDENTEMENTE: P.D.: $M = 0$

SI NO ($M > 0$) ALGÚN PUNTO DEBE REALIZARLO, ES DECIR

P.D. $\exists\, \zeta_2 \ni. \ g'(\zeta_2,\zeta_0) = 0$ y $g(\zeta_2,\zeta_0) = M$

DE EXISTIR, POR DEFINICIÓN ESTÁ EN ∂D (PORQUE ARBITRARIAMENTE CERCA DE ζ_2 HAY PUNTOS DE D)

DEM: BUENO, ES QUE SI NO EXISTIESE TAL ζ_2, AL MENOS EL VALOR CRÍTICO M PODRÍA SER APROXIMADO POR UNA SUCESIÓN (acotada) Y ENTONCES EXISTIRÍA UNA SUCESIÓN DE PUNTOS $(\zeta_n) \ni. \ g(\zeta_n,\zeta_0) \longrightarrow M$

DE EXISTIR ESTA ÚLTIMA SUCESIÓN:

(i) NECESARIAMENTE ES DE PUNTOS CRÍTICOS: UNA SUCESIÓN DE PUNTOS REGULARES NO PUEDE CONVERGER A UN VALOR CRÍTICO

(ii) NECESARIAMENTE SE ACUMULAN (porque no hay curvas divergentes y estás cerca de un elemento ramificado)

(iii): (ii) ES imposible

$\therefore$

LEMA B.2: SI $M > 0$, g tiene un punto crítico $\zeta_2 \ni. \ g'(\zeta_2,\zeta_0) = 0$ y $g(\zeta_2,\zeta_0) = M$.

RECUERDA AHORA QUE LA FUNCIÓN DE GREEN ES, ALREDEDOR(*) DE ζ_0, "idéntica" a $-\log$: DECRECE CUANDO r CRECE EN $|z| < r < e^{-M} < 1$

LA EXISTENCIA DE LA SINGULARIDAD IMPLICA LA EXISTENCIA DE al menos DOS CURVAS DE ζ_0 A ζ_2 TALES QUE LAS LÍNEAS DEL FLUJO GENERADO POR $g(\zeta,\zeta_0)$ TOMAN EL VALOR M EN ζ_2 (figura siguiente)

EN D ESAS CURVAS ESTÁN BIEN PARAMETRIZADAS POR EL ÁNGULO CON QUE "ENTRAN" A ζ_0, O BIEN: EXISTEN θ_1 y $\theta_2 \in [0, 2\pi]$ QUE SATISFACEN: CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE (2) A LO LARGO DE LAS CURVAS $\theta_i = cte$ PRODUCE EL MISMO ELEMENTO RAMIFICADO EN ζ_2 (figura siguiente)

(*) EN D

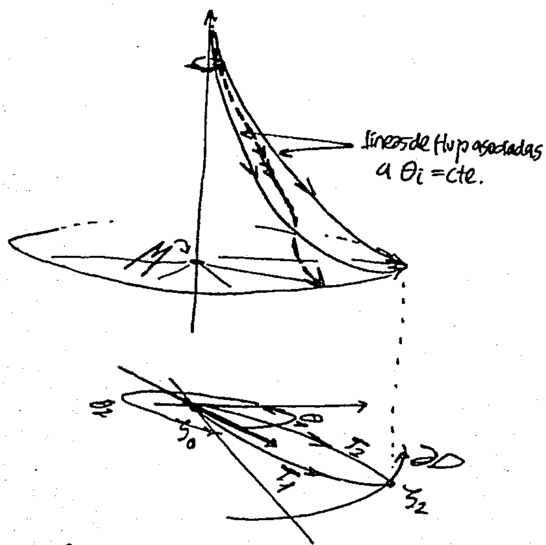


Fig: el flujo con punto crítico

POR LA ESTRUCTURA LOCAL DE LA SINGULARIDAD, Y POR EL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO EN D

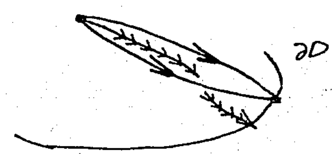
LA CONTINUACIÓN ANALÍTICA DE (2) A LO LARGO DE LAS CURVAS QUE SIGUEN $\arg\theta$ =cte con $\theta_2 < \theta < \theta_1$

1. NO PUEDEN GENERAR ELEMENTO REGULAR ALGUNO EN ζ_2
2. NECESARIAMENTE TOMAN EL VALOR M (PORQUE GREEN DECRECE EN D)

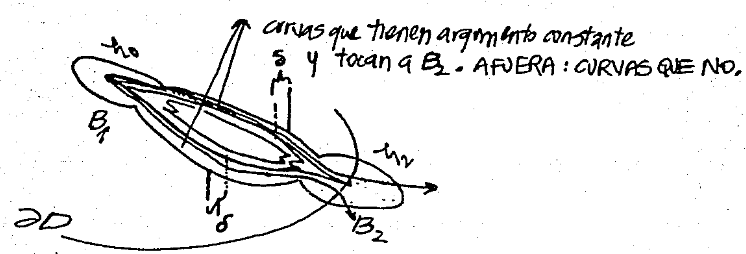
ES DECIR: EL COMPACTO $T_1 \cup T_2$ TIENE COMPLEMENTO CONEXO POR TRAYECTORIAS

(¿ves el hoyo?)

VÉLO EN LA LINEA PUNTEADA DE LA FIGURA A LA IZQUIERDA Y EN SU "GENERADOR" EN W_1 ABAJO



PARA FORMALIZAR LA EXISTENCIA DEL HOYO DEBEMOS "ENGROSAR" A $T_1 \cup T_2$. GEOMÉTRICAMENTE ES OBVIO CÓMO:



HEMOS PROBADO:

LEMA B3: SI M ES POSITIVO, EXISTE UN ANILLO CERRADO $\bar{A} \subseteq W$ CON FRONTERA ANALÍTICA A TROZOS TAL QUE $S - \bar{A}$ ES CONEXO POR ARCOS.

ENTONCES S NO SERÍA SIMPLENTE CONEXA :

TEOREMA/PROPOSICIÓN B1 :
EN CUALQUIER SUPERFICIE DE RIEMANN W, LA EXISTENCIA DE UN ANILLO CERRADO $\bar{A}$ COMO EN B.3 IMPLICA QUE W NO ES SIMPLEMENTE CONEXA.

Dem: $\bar{A}$ TIENE DOS COMPONENTES DE FRONTERA F_1 y F_2
MÁS AÚN: EXISTE UNA CURVA CERRADA Y SIMPLE α EN W TAL QUE

$\alpha \cap \mathrm{INT}\,A$ ES UN ARCO SIMPLE DE F_1 A F_2

PUEDES RESOLVER EL PRINCIPIO DE DIRICHLET (6.4) EN $\bar{A}$ CON DATOS FRONTERA

$$\Phi_1\big|_{F_1}=1 \;,\; \Phi_1\big|_{F_2}=2$$

Y EN $W-\bar{A}$ CON DATOS

$$\Phi_2\big|_{F_1}=1 \;,\; \Phi_2\big|_{F_2}=2$$

LA APLICACIÓN $\zeta \longmapsto \exp i\pi\phi_i(\zeta)=\phi(\zeta)$, $\zeta\in S$, ES CONTINUA, SU IMAGEN ES S^1 y $\phi\circ\alpha$ tiene entonces índice 1 respecto a $z=0$

SI α ES HOMOTÓPICA A UNA CONSTANTE, POR CONTINUIDAD $\phi\circ\alpha$ LO SERÍA ... en S^1 !

∴ α NO LO ES Y
W NO ES SIMPLEMENTE CONEXA !

ASÍ QUE $M=0$ Y $W-\bar{N}\cong W-\{\zeta_1\}$ ES SIMPLEMENTE CONEXA

...Y PODEMOS DEMOSTRAR LA

PARTE 3 Y CON ELLA EL

Teorema de Uniformización : TODA SUPERFICIE DE RIEMANN SIMPLEMENTE CONEXA W ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A Δ, $\mathbb{C}$ ó $\bar{\mathbb{C}}$.

PARTE 1: W tiene GREEN ∴ W es Δ
PARTE 2: W no tiene GREEN Y TIENE CURVA DIVERGENTE: W es $\mathbb{C}$
PARTE 3: EN CUALQUIER OTRO CASO $\hat{W}$ ES SIMPLEMENTE CONEXA

CLARO QUE TIENE CURVA DIVERGENTE:

ó

ENTONCES $\dot{W} \simeq \Delta$ ó $\dot{W} \simeq \mathbb{C}$

Δ NO PUEDE SER:

SI $f: \dot{W} \to \Delta$ BIHOLOMORFISMO, f ES ACOTADA EN ζ_0 $\therefore$ SE EXTIENDE $f: W \to \bar{\Delta}$ Y POR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO HOLOMORFO

$$|f(\zeta_0)| < 1$$

COMO $f(\dot{W}) = \Delta$ EXISTE $\zeta_1 \ni. f(\zeta_0) = f(\zeta_1)$, PERO ES ABIERTA, ASÍ QUE EXISTEN PUNTOS ζ_0' y ζ_1' CERCA DE ζ_0 Y ζ_1 RESPECTIVAMENTE TALES QUE

$$f(\zeta_0') = f(\zeta_1') \quad \text{!}$$

PUES $f|_{\dot{W}}$ ES INYECTIVA

$\therefore$

$\dot{W} \simeq \mathbb{C}$ y $W \simeq \bar{\mathbb{C}}$

listo.

CONSECUENCIAS:

1. TODA SUP. DE RMNN. ES 2o. CONTABLE Y SEPARABLE (SE HEREDA DE LA CBTE. UNIVERSAL $\Delta, \mathbb{C}$ ó $\bar{\mathbb{C}}$).

2. (TEOREMA DE PICARD). f MEROMORFA EN $\mathbb{C}$. SI LA IMAGEN DE f EN $\bar{\mathbb{C}}$ OMITE TRES PUNTOS, ENTONCES f ES CONSTANTE.

   porque la cubriente universal $\tilde{D}$ DE $D = f(\mathbb{C})$ ES Δ. SI $\pi: \Delta \to D$ es la proyección, localmente π^{-1} EXISTE Y $\pi^{-1} \circ f$ PUEDE CONTINUARSE A LO LARGO DE TODO $\mathbb{C}$ DEFINIENDO UNA APLICACIÓN HOLOMORFA

   $$F: \mathbb{C} \to \Delta$$

   Liouville: es constante. $\therefore$ f también.

3. SI W ES UNA SUP. DE RMN. NO CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A $\mathbb{C}, \bar{\mathbb{C}}$ O A $\mathcal{T}$, EXISTE UN GRUPO DE TRANSFORMACIONES DE CUBIERTA DE Δ (QUE ACTÚA PROPIA Y DISCONTINUAMENTE) TAL QUE $W \simeq \Delta/\Gamma$

4. CUALQUIER REGIÓN PLANA QUE OMITE AL MENOS DOS PUNTOS ADMITE LA MÉTRICA DE POINCARÉ (tiene curvatura -1).

APÉNDICE A:

¿GRUPOS DE PERMUTACIONES? ¡GRUPOS DE TRANSFORMACIONES!

DADO UN CONJUNTO E, UNA ASIGNACIÓN BIYECTIVA DE $E \to E$ SE LLAMA UNA Permutación. Tales asignaciones forman un grupo, el llamado Grupo Simétrico de E que suele denotarse por $S(E)$.

SI ahora G es un grupo, un morfismo $G \to S(E)$ se llama una Representación de G por permutaciones de E. Si el morfismo es un isomorfismo la representación se dice FEHACIENTE y un resultado de Teoría de Grupos dice que todo grupo admite una representación fehaciente por permutaciones.

Tengamos en mente estas ideas; en un principio no parecerá que estemos muy cercanos a ellas pero arribaremos a un resultado idéntico (el TEOREMA 1 de este Apéndice).

DEFINICIÓN: Sean E un conjunto y G un grupo. Decimos que E es un G-espacio izquierdo o que E admite a G como un grupo de operadores por la izquierda si está dado un mapeo $G \times E \to E$ denotado por $(g, x) \mapsto g \cdot x$ para cualesquiera $g \in G$ y $x \in E$ que satisface las siguientes dos propiedades:

(1) para todo $x \in E$, $1 \cdot x = x$

(2) para todos $x \in E$ y $g_1, g_2 \in G$,

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

ejemplo: G un subgrupo del grupo simétrico de E, donde $g \cdot x$ es el efecto de aplicar la permutación g al elemento $x \in E$. Así E es un G-espacio izquierdo

ejemplo: $E = \mathbb{R}^3$, $G = \{$rotaciones que dejan el origen fijo$\}$, $g \cdot x$ = imagen del punto $x \in \mathbb{R}^3$ bajo la rotación $g \in G$. Entonces E es un G-espacio izquierdo.

Los G-espacios DERECHOS se definen de manera análoga, el mapeo es ahora

$$E \times G \longrightarrow E$$
$$(x, g) \longmapsto x \cdot g$$

y satisface

(1') para todo $x \in E$, $x \cdot 1 = x$

(2') para todos $x \in E$ y $g_1, g_2 \in G$,

$$x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$$

La diferencia entre G-espacios derechos e izquierdos no es notacional: observa que en las condiciones (2) y (2') lo que estás diciendo respectivamente es que en la primera el producto del grupo $g_1 g_2$ opera de tal manera que g_2 opera primero y después opera g_1 mientras que en la segunda, primero opera g_2 y luego g_1. EMPERO, si $(E, *)$ es un G-espacio izquierdo, es fácil mostrar que definiendo

$$x \cdot g = (g^{-1}) * x \quad \forall x \in E \text{ y } g \in G$$

hacemos de $(E, \cdot)$ un G-espacio derecho.

TEOREMA 1. SEA E UN G-ESPACIO IZQUIERDO. Para cualesquiera $g \in G$ el mapeo $x \longmapsto g \cdot x$ es una permutación de E.

Demostración: Denota al mapeo en cuestión por $\varphi_g : E \to E$ y considera el mapeo $\varphi_{g^{-1}}$. PARA CUALQUIER $x \in E$:

$$\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}(x) = \varphi_g(g^{-1} \cdot x) = g(g^{-1} x) = gg^{-1}(x) = x$$

análogamente

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(x) = x$$

ES DECIR, AMBOS mapeos son la identidad en E, así que φ_g tiene inverso y es biyección, es decir, es una permutación.

Lo que debemos resaltar de este sencillo teorema es que muestra que la noción de una representación de G por permutaciones del conjunto E es equivalente a la noción de un G-espacio. De cualquier manera no podemos concluir que tal representación sea Fehaciente: bien podría suceder que existiese un elemento $g \neq 1$ en G tal que $g \cdot x = x$ para toda $x \in E$. En el caso de que tal elemento $g \in G$ no exista diremos que G opera EFECTIVAMENTE en el conjunto E.

Sean E_1 y E_2 G-ESPACIOS izquierdos. Un mapeo $f: E_1 \to E_2$ se llama G-EQUIVARIANTE o simplemente un morfismo de G-espacios izquierdos en caso de que:

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x) \qquad \forall g \in G \text{ y } x \text{ E}$$

Un mapeo G-equivariante $f: E_1 \to E_2$ es un ISOMORFISMO DE G-ESPACIOS IZQUIERDOS en caso de que exista otro mapeo G-equivariante $f': E_2 \to E_1$ tal que ff' es la identidad en E_2 y $f'f$ es la identidad en E_1 (ESTO ES EQUIVALENTE A QUE f SEA uno a uno y sobre).

Como siempre, UN AUTOMORFISMO de un G-espacio es un isomorfismo de él en él mismo.

G-ESPACIOS HOMOGÉNEOS

Sea E un G-espacio izquierdo. Decimos que <u>G opera transitivamente en E</u> o que <u>E ES UN G-ESPACIO IZQUIERDO HOMOGÉNEO</u> si se satisface que, para cualesquiera $x, y \in E$, existe un elemento $g \in G$ tal que

$$g \cdot x = y$$

(esta condición no es trivial: los dos ejemplos que dimos de G-espacios no la satisfacen).

ejemplo tipo: SEA G UN GRUPO Y H UN SUBGRUPO ARBITRARIO DE G. DENOTEMOS POR G/H AL CONJUNTO DE CLASES LATERALES $g \cdot H$, $g \in G$. SI MULTIPLICAMOS A LA IZQUIERDA TODOS LOS ELEMENTOS EN UNA CLASE DADA POR CUALQUIER ELEMENTO $g \in G$, OBTENDREMOS COMO RESULTADO ELEMENTOS QUE ESTÁN EN LA MISMA CLASE. ESTO DEFINE UN MAPEO

$$G \times G/H \longrightarrow G/H$$

VAMOS A MOSTRAR QUE CUALQUIER G-ESPACIO HOMOGÉNEO IZQUIERDO ES ISOMORFO A ALGÚN ESPACIO DE CLASES LATERALES G/H (de ahí la importancia del ejemplo anterior).

Sea E un G-Espacio Homogéneo Izquierdo arbitrario. Elije un elemento $x_0 \in E$ y sea

$$H = \{ g \in G : g \cdot x_0 = x_0 \} ,$$

es sencillo verificar que H es un subgrupo de G, EL SUBGRUPO DE ISOTROPÍA QUE CORRESPONDE A x_0.

Considera ahora el mapeo $F : G \longrightarrow E$ dado por $F(g) = g \cdot x_0$. Como E es un G-Espacio HOMOGÉNEO este mapeo es suprayectivo y vamos a hacerlo inducir uno inyectivo: es sencillo conocer las condiciones bajo las cuales dos elementos g_1 y $g_2 \in G$ se mapean en el mismo elemento en E, de hecho:

$$g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0 \Leftrightarrow (g_2^{-1} g_1) \cdot x_0 = x_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 H = H \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H$$

es decir, solamente cuando g_1 y g_2 pertenecen a la misma clase lateral de H, así que el mapeo $F : G \longrightarrow E$ induce un mapeo $f : G/H \longrightarrow E$ que es inyectivo y suprayectivo. Resta verificar que es G-equivariante y vamos a hacerlo con detalle:

Antes que nada observa que $F : G \to E$ satisface

$$F(gg_1) \equiv (gg_1) \cdot x_0 \underset{\substack{\uparrow \\ E \text{ es } G\text{-Espacio}}}{=} g \cdot (g_1 \cdot x_0) = g \cdot F(g_1)$$

y de paso observa que $f(gH) \equiv (gH) \cdot x_0 \overset{\downarrow}{=} g \cdot (Hx_0) = g \cdot x_0$

MOSTRAR QUE f ES G-EQUIVARIANTE ES MOSTRAR QUE $f(g_1 * (gH)) = g_1 \cdot f(gH)$ Y EN EFECTO:

$$\begin{aligned} f(g_1 * (gH)) = (g_1 * (gH)) \cdot x_0 = ((g_1 g) H) \cdot x_0 &= (g_1 g) \cdot (H \cdot x_0) \\ &= (g_1 g) \cdot x_0 \\ &= g_1 \cdot (g \cdot x_0) = g_1 \cdot f(gH) \end{aligned}$$

☎ ATENCIÓN: EL ISOMORFISMO f Y EL SUBGRUPO H DE LA ARGUMENTACIÓN ANTERIOR DEPENDEN DE LA ELECCIÓN DEL PUNTO $x_0 \in E$. UNA ELECCIÓN DISTINTA DE x_0 DARÁ LUGAR A UN SUBGRUPO CONJUGADO: toma $x_1 \neq x_0$ en E, por transitividad, existe $h \in G$ ∋. $x_1 = h \cdot x_0$. Si H_1 denota el subgrupo de isotropía que corresponde a x_1, tenemos que

$$H_1 = \{ g \in G : g \cdot x_1 = x_1 \} = \{ g \in G : g \cdot (h \cdot x_0) = h \cdot x_0 \} = \{ g \in G : (h^{-1} g h) \cdot x_0 = x_0 \}$$

SIENDO CONSISTENTES CON EL USO QUE DE ESTO HAREMOS EN REFERENCIA A LAS SUPERFICIES CUBRIENTES, CONSIDERAREMOS EN ADELANTE G-ESPACIOS derechos E. Sea $\varphi : E \to E$ un automorfismo de E y sea $x \in E$ cualquiera, $\varphi(x) \in E$ su imágen. Como $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g \;\; \forall g \in G$ y

φ es biyectiva, se verifica de la definición que x y $\varphi(x)$ tienen el mismo subgrupo de isotropía. INVERSAMENTE: si x y $y \in E$ tienen el mismo subgrupo de isotropía afirmo que existe un automorfismo $\varphi: E \to E$ ∍. $\varphi(x) = y$. Hay una manera obvia de definirlo: toma $z \in E$, sabes que existe $h \in G$ tal que

$$z = x\cdot h$$

φ debería satisfacer

$$\varphi(z) = \varphi(x\cdot h) = \varphi(x)\cdot h = y\cdot h$$

bueno, pues DEFINAMOS

$$\varphi(z) = y\cdot h$$

La definición es independiente de h: suponte que $x\cdot h = x\cdot h'$, debemos verificar que $\varphi(x\cdot h) = \varphi(x\cdot h')$ y en efecto, por un lado $\varphi(x\cdot h) = y\cdot h$ y por otro $\varphi(x\cdot h') = y\cdot h'$
como $x\cdot h = x\cdot h' \Rightarrow x\cdot(hh'^{-1}) = x$ y $hh'^{-1} \in \{$subgrupo de isotropía de x e $y\}$,
así que $y\cdot(hh'^{-1}) = y$ y $y\cdot h = y\cdot h'$ que es lo que afirmábamos.

Es equivariante $(\varphi(z\cdot g) = \varphi(z)\cdot g \quad \forall z \in E$ y $g \in G)$; toma $z \in E$ y $g \in G$ arbitrarios. Sabes que existe $h \in G$ ∍. $z = x\cdot h$, así que

$$\varphi(z)\cdot g = \varphi(x\cdot h)\cdot g = (\varphi(x)\cdot h)\cdot g = y\cdot(hg)$$
$$\varphi(z\cdot g) = \varphi((x\cdot h)\cdot g) = \varphi(x\cdot hg) = y\cdot(hg), \text{ coinciden.}$$

Para mostrar que es biyectivo construyamos de manera análoga un inverso $\tilde{\varphi}: E \to E$ que cumpla $\tilde{\varphi}(y) = x$. Si $z \in E$ existe $g' \in G$ ∍. $z = y\cdot g'$ y análogamente defino

$$\tilde{\varphi}(z) = x\cdot g' \quad (\text{Es } G\text{-equivariante e independiente de } g')$$

en particular

$$\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(y\cdot 1) = x\cdot 1 = x$$

y satisface que es inverso de φ:
toma $z \in E$, existen $h', g' \in G$ ∍. $z = x\cdot h' = y\cdot g'$
entonces

$$\tilde{\varphi}\varphi(z) = \tilde{\varphi}(\varphi(z)) = \tilde{\varphi}(y\cdot h') = \tilde{\varphi}(y)\cdot h' = x\cdot h' = z$$
$$\varphi\tilde{\varphi}(z) = \varphi(\tilde{\varphi}(z)) = \varphi(x\cdot g') = \varphi(x)\cdot g' = y\cdot g' = z$$

OBSERVEMOS QUE, si φ_1 y φ_2 SON AUTOMORFISMOS DEL G-ESPACIO HOMOGÉNEO DERECHO E TALES QUE, PARA ALGÚN PUNTO $x \in E$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, ENTONCES $\varphi_1 = \varphi_2$. Para $z \in E$ existe $g \in G$ ∍. $z = x\cdot g$; ENTONCES

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(x\cdot g) = \varphi_1(x)\cdot g = \varphi_2(x)\cdot g = \varphi_2(x\cdot g) = \varphi_2(z)$$

ES CONSECUENCIA DE NUESTRAS CONSIDERACIONES EL

LEMA 2: UN GRUPO A DE AUTOMORFISMOS DE UN G-ESPACIO HOMOGÉNEO E ES todo EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS $\Leftrightarrow$ PARA CUALESQUIERA DOS PUNTOS x y $y \in E$ CON EL MISMO SUBGRUPO DE ISOTROPÍA, EXISTE UN AUTOMORFISMO $\varphi \in A$ ∍. $\varphi(x) = y$

Demostración:

$\Rightarrow$] si $A = \mathrm{Aut}(E)$, es la primera afirmación de esta página.

$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que para todos $x,y\in E$ con el mismo subgrupo de isotropía existe $\varphi\in A$ ∋. $\varphi(x)=y$.

Considera $\beta: E\to E$ un automorfismo; $z\in E$ y $\beta(z)\in E$ tienen el mismo subgrupo de isotropía, así que existe $\varphi\in A$ tal que $\varphi(z)=\beta(z)$. Por la OBSERVACIÓN previa al lema $\varphi=\beta$ y $\beta\in A$, es decir, $A=Aut(E)$.

+

Determinaremos ahora la estructura del Grupo de Automorfismos de un G-espacio homogéneo. Recordemos que si H es un subgrupo de G, el conjunto

$$N(H)=\{g\in G : gHg^{-1}=H\}$$

es un subgrupo de G que contiene a H, pero no de cualquier forma: es el mayor subgrupo de G que contiene a H como un subgrupo normal, de ahí que se le llame el NORMALIZADOR DE H.

TEOREMA 2 : Sea E un G-espacio homogéneo y sea H el subgrupo de isotropía correspondiente a $x_0\in E$. Entonces el Grupo de Automorfismos de E es isomorfo a $N(H)/H$

Demostración: sea $S\subseteq E$ el subconjunto de aquellos puntos $x,y\in E$ que tienen el mismo subgrupo de isotropía, en tal situación existe $\varphi\in Aut(E)$ ∋. $\varphi(x)=y$, es decir, $Aut(E)$ actúa transitivamente en S.

Considera $x\in S$ y $g\in G$. AFIRMO que $x\cdot g\in S \Leftrightarrow g\in N(H)$.

Veamos:

$x\cdot g\in S \Leftrightarrow$ x y $x\cdot g$ tienen el mismo subgrupo de isotropía H, i.e, $\Leftrightarrow H=\{h\in G : (x\cdot g)h = x\cdot g\}$, pero $x\cdot g\cdot h = x\cdot g \Leftrightarrow x\cdot(ghg^{-1})=x$, i.e., $\Leftrightarrow (ghg^{-1})\in H$ ó bien, que $h\in g^{-1}Hg$: $H=g^{-1}Hg$ y por definición $g\in N(H)$, así que el subgrupo $N(H)$ actúa transitivamente en S.

Más aún: los elementos de H dejan fijo a cada elemento de S (por definición de H).

ENTONCES EL GRUPO $N(H)/H$ ACTÚA TRANSITIVAMENTE A LA DERECHA EN S (RECUERDA QUE $N(H)/H=\{gH : g\in N(H)\}=\{Hg : g\in N(H)\}$) SIN PUNTOS FIJOS

DESPUÉS DE ESTAS OBSERVACIONES PODEMOS ESTABLECER EL ISOMORFISMO: Sea $\varphi: E\to E$ UN AUTOMORFISMO Y CONSIDERA x_0 y $\varphi(x_0)$: ELLOS TIENEN EL MISMO SUBGRUPO DE ISOTROPÍA ASÍ QUE AMBOS PERTENECEN A S. COMO $N(H)/H$ ACTÚA TRANSITIVAMENTE EN S, EXISTE $\alpha\in N(H)/H$ ∋. $x_0\cdot\alpha=\varphi(x_0)$. AFIRMO QUE, COMO $N(H)/H$ ACTÚA SIN PUNTOS FIJOS, α ES ÚNICA. De hecho, si existiese $\beta\in N(H)/H$ ∋. $x_0\cdot\beta=\varphi(x_0)$, ENTONCES $x_0\cdot\alpha=x_0\cdot\beta \Leftrightarrow x_0\cdot(\alpha\beta^{-1})=x_0$ y $\alpha=\beta$.

LA CORRESPONDENCIA $\varphi\leftrightarrow\alpha$ ES BIYECTIVA ENTONCES. RESTA CHECAR QUE ES UN MORFISMO DE GRUPOS: SUPONGAMOS QUE

$$\varphi(x_0)=x_0\cdot\alpha$$
$$\psi(x_0)=x_0\cdot\beta \quad \text{, ENTONCES}$$

$(\varphi\psi)(x_0)=\varphi(\psi x_0)=\varphi(x_0\cdot\beta)=(\varphi x_0)\cdot\beta=(x_0\cdot\alpha)\cdot\beta=x_0\cdot(\alpha\beta)$, ASÍ QUE $\varphi\psi$ y $\alpha\beta$ SE CORRESPONDEN Y ES UN ISOMORFISMO

BIBLIOGRAFÍA

AHLFORS, LARS V [1] COMPLEX ANALYSIS 3a. EDICIÓN
Mc Graw Hill
[2] CONFORMAL INVARIANTS

MASSEY, INTRODUCTION TO ALGEBRAIC TOPOLOGY
Springer-Verlag

MARSDEN, JERROLD BASIC COMPLEX ANALYSIS

WEYL, HERMAN The concept of a Riemann Surface
ADDISON-WESLEY

CARTAN, HENRI ELEMENTARY THEORY OF ONE AND SEVERAL COMPLEX VARIABLES
ADDISON-WESLEY

ABIKOFF, WILLIAM THE UNIFORMIZATION THEOREM
JAMS.

PORTER, Mike SUPERFICIES DE RIEMANN
I.P.N.

BEARDON RIEMANN SURFACES
Ediciones de la LONDON MATHEMATICAL SOCIETY