



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**REVISION DEL PROBLEMA DE UN FLUJO  
ENTRE PLANOS NO - PARALELOS**

**T E S I S**

Que para obtener el Título de  
**LICENCIADO EN FISICA**  
p r e s e n t a

**ADRIANA DEL PERPETUO SOCORRO BRAVO WILLIAMS**



**México, D. F.**

**1986**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

RESUMEN .....	1.
INTRODUCCION .....	ii.
CAPITULO I.      SOBRE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES ...	1.
I.A.    ECUACIONES DE CONSERVACION .....	4.
I.A.1.    Ecuación de Continuidad ...	4.
I.A.2.    Ecuación de Movimiento ....	5.
I.A.3.    Ecuación de Conservación de la energía .....	10.
I.B.    ECUACIONES CONSTITUTIVAS .....	12.
I.C.    SOLUCIONES EXACTAS A LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA FLUIDOS NEWTONIANOS VISCOSOS E INCOMPRESIBLES .....	19.
CAPITULO II.    EL FLUJO ENTRE PLANOS PARALELOS .....	30.
II.A.    PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	30.
II.B.    SOLUCION OBTENIDA POR G. B. JEFFERY (1915) .....	33.
II.C.    SOLUCION OBTENIDA POR G. HAMEL (1916) .....	37.
II.D.    SOLUCION GENERAL .....	40.
CAPITULO III.    ANALOGIA MECANICA DEL PROBLEMA HIDRODINAMICO .....	68.

III.A.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	
	MECANICO .....	69.
III.B.	ANALISIS CUALITATIVO .....	71.
III.C.	ANALISIS CUANTITATIVO .....	78.
CAPITULO IV.	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS .....	89.
APENDICE I.	PROPIEDADES Y DEFINICIONES DE FUNCIONES	
	ELIPTICAS .....	92.
APENDICE II.	METODO DE RUNGE-KUTTA .....	94.
REFERENCIAS	.....	97.

## R E S U M E N

Se analiza la ecuación encontrándose las soluciones del problema hidrodinámico de un flujo establecido entre dos planos no paralelos de cuya línea de intersección emana o se introduce fluido. El problema es tratado bidimensionalmente y se supone que el flujo es incompresible, irrotacional, radial.

Comparándose la ecuación del problema hidrodinámico con la ecuación de una partícula sujeta a un potencial se logró encontrar el tipo de soluciones posibles primero desde un punto de vista cualitativo, concordando el tipo de soluciones con las predichas por L. Rosenhead (1940). En segundo lugar se resolvió el problema por métodos numéricos, graficándose el número de Reynolds en función de una constante de integración que aparece al eliminar la presión de las ecuaciones como resultado se observa un patrón de bifurcación continuo cuya ventaja principal consiste en observar directamente el tipo de solución matemáticamente posible fijando la constante de integración y para cualquier número de Reynolds.

## INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es analizar y encontrar las soluciones al problema específico del flujo entre planos infinitos no-paralelos en forma clara y simple. La solución que se presenta en los libros de texto<sup>[1], [2], [5], [3]</sup> que analizan el problema es sólo un caso particular de la solución general que fue dada a conocer por L. Rosenhead en 1939<sup>[10]</sup>. Su análisis, dado en términos de funciones elípticas resulta difícil de entender, es por esto que el problema fue planteado desde otro punto de vista: como el problema de una partícula en un pozo de potencial.

En el capítulo I se muestra cómo las ecuaciones que rigen a los fluidos se derivan de los principios de conservación de masa, momento y energía; considerando el fluido como un medio continuo se aplican estos principios a elementos de volumen en la descripción lagrangiana obteniéndose las ecuaciones en la descripción euleriana mediante el teorema de transporte de Reynolds. No siendo un sistema cerrado de ecuaciones se anexan las relaciones constitutivas más usuales que se obtienen haciendo hipótesis sobre el flujo de calor y el tensor de esfuerzos, llegando a las ecuaciones de Navier-Stokes que describen la dinámica de los fluidos newtonianos. Como en la mayoría de los problemas el flujo se considera incompresible, con esta hipótesis se desacopla la ecuación de la energía de la ecuación de momento, y esta última junto con la ecuación de continuidad forman un sistema cerrado de

cuatro ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no-lineales de tipo parabólico. Este tipo de ecuaciones es en general muy difícil de resolver y se conocen muy pocos problemas en hidrodinámica en los que se puede obtener la solución. En la tercera y última parte del capítulo I se mencionan ejemplos típicos de problemas cuya solución se conoce. Se clasifican en problemas estacionarios y no-estacionarios y en cada categoría los que son lineales y no-lineales.

En la primera sección del capítulo II se hace un planteamiento general del problema, mencionando todas las hipótesis que se usaron. En las dos secciones siguientes se analiza la forma en que fue resuelto el problema por Jeffery en 1915<sup>[6]</sup> y por Hamel en 1916<sup>[4]</sup>; y en la sección II.D se presenta el análisis completo del problema hecho por L. Rosenhead en 1939.

En el capítulo III se resolvió el problema en el marco de la Mecánica Clásica, obteniéndose todas las soluciones en contradas también por Rosenhead pero en una forma que creemos es mucho más sencilla y fácil de entender.

El análisis fue hecho en forma cualitativa (sección III. B), y cuantitativa (sección II.C) usando el método numérico de Runge-Kutta de 4º orden. Al final de este capítulo se presenta el diagrama de bifurcaciones que resume, en forma muy clara, todos los tipos de soluciones.

Al final, en el capítulo IV, se mencionan las conclusiones y perspectivas de este análisis.

## CAPITULO I

## SOBRE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

## Introducción.

Las ecuaciones básicas que se utilizan para analizar el movimiento de los fluidos están basadas en los principios de conservación de masa, momento y energía.

Una forma de llegar a la expresión de las ecuaciones de movimiento es, primero, considerar el fluido como un medio continuo; bajo esta hipótesis se ignora la estructura molecular de la materia en el sentido de que en cada "punto" el fluido tendrá un valor único de sus variables de campo: presión, densidad, temperatura, etc., y en general estas cantidades serán funciones continuas de la posición y el tiempo. La hipótesis se justifica en una gran cantidad de casos considerados en la dinámica de fluidos cuando el camino libre medio de las moléculas es mucho menor que la escala de longitud más pequeña considerada en el problema, de esta manera líquidos y gases son tratados de igual manera por esta disciplina. Experimentalmente, cuando se hace la medida de alguna propiedad en el fluido, lo que se registra es un promedio de esa propiedad tomado en un cierto volumen, que depende de la sensibilidad del aparato; en la fig. I.1 se muestra una gráfica de la forma en la que puede variar la medida de la densidad con el volumen al que es sensible el instrumento. Experimentalmente ocurren variaciones muy pequeñas de las

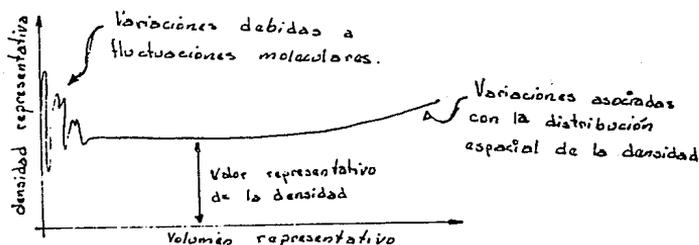


Fig. I.1 Gráfica de la densidad contra el volumen del fluido para el cual el instrumento responde.

propiedades físicas y dinámicas del fluido en regiones de por ejemplo  $10^{-9}$  cm<sup>3</sup>; si un aparato es sensible a volúmenes menores que éste podrían registrarse diferentes medidas para una misma región, un volumen de esta magnitud contiene alrededor de  $3 \times 10^{10}$  moléculas, por lo que unos millones más o menos no afectarían las medidas.

Existe, entonces, un rango de sensibilidad para el cual la respuesta es prácticamente constante, es en este intervalo donde los volúmenes considerados son pequeños comparados con las escalas macroscópicas pero suficientemente grandes para contener un gran número de moléculas de tal forma que el promedio de cualquier propiedad es localmente representativo.

Teniendo en cuenta la hipótesis anterior, puede describirse al fluido desde dos puntos de vista: el primero es la descripción lagrangiana que consiste básicamente en etiquetar, dentro de un sistema coordenado dado, una "porción

pequeña" de fluido con posición  $\vec{r}$  en el instante inicial  $t_0$  y observar su evolución en el tiempo, (se menciona pequeño en el sentido del párrafo anterior), el volumen que lo contiene es arbitrario y puede cambiar su forma y su tamaño, pero las partículas (en el sentido físico) consideradas inicialmente serán siempre las mismas, las variables independientes serán dentro de esta descripción  $\vec{r}_0$  y  $t$  y especifican qué elemento de volumen se considera.

En la descripción euleriana el volumen de control permanece fijo en un punto del espacio coordenado y se analizan cómo varían en el tiempo las propiedades del fluido ahí, las variables de campo son funciones de la posición y el tiempo.

Al aplicar los principios de conservación al elemento de volumen en una u otra descripción se obtienen expresiones diferentes, que sin embargo pueden relacionarse mediante el teorema de Transporte de Reynolds <sup>[1]</sup> que nos da la relación de las derivadas lagrangianas de integrales de volumen, con las integrales de volumen de términos que involucran derivadas eulerianas únicamente, esto es: si  $\alpha$  representa una variable de campo,  $V$  un volumen arbitrario y  $\vec{u}$  la velocidad del campo en un punto, el teorema establece que:

$$I.1 \quad \frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha \vec{u}) \right] dV.$$

Aquí  $\frac{D}{Dt}$  es llamada la derivada total o lagrangiana.

## I.A ECUACIONES DE CONSERVACION.

## I.A.1 Ecuación de Continuidad.

Para empezar, se expresarán primero las ecuaciones de un fluido en movimiento desde un marco de referencia lagrangiano en donde consideramos un elemento de fluido dentro de un volumen de control  $V$ , que es arbitrario pero una vez dado será el mismo, que evoluciona en el tiempo.

La masa total dentro de este elemento permanecerá invariante, no habiendo fuentes o sumideros, pues suponemos cierto el principio de conservación de la masa y se desprecian efectos cuánticos y relativistas: no hay reacciones nucleares y la velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz, por lo que la variación en el tiempo de la masa asociada al elemento de volumen es cero, o escrito de otra forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 ,$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido. Utilizando el teorema de transporte de Reynolds en la expresión anterior, (ec. I.1), tenemos:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right) = 0 ,$$

y dado que  $V$  es arbitrario la expresión se cumple si y sólo si el integrando se anula, esto es:

$$I.2 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 ,$$

donde  $\bar{u}$  es la velocidad del fluido en un punto  $(x, x_1, x_2)$  y a un instante de tiempo  $t$ , y  $\rho$  es la densidad de flujo masa.

La ecuación (I.2) es ya la forma diferencial en la representación euleriana del principio de conservación de la masa, llamada la ecuación de continuidad, y nos expresa el hecho de que si analizamos un volumen  $V$  arbitrario y fijo en el espacio, las variaciones en la masa encerrada en  $V$  se deberán al flujo que atraviesa la superficie del volumen.

#### I.A.2 Ecuación de movimiento.

Nuevamente, utilizamos un volumen de control arbitrario en un sistema lagrangiano y aplicamos la segunda ley de Newton, que nos dice que el cambio de momento en nuestro sistema es debido a la fuerza neta externa. Las fuerzas externas que actúan sobre un elemento de fluido pueden clasificarse en fuerzas volumétricas y fuerzas superficiales; esta caracterización se debe esencialmente a considerar fuerzas de largo y corto alcance. En la primera clasificación las fuerzas de largo alcance disminuyen lentamente conforme la distancia al elemento aumenta. y dependen, generalmente, de su masa; como ejemplos típicos podemos nombrar a la fuerza de gravedad y la fuerza electromagnética. De tal forma que si  $\Delta V$  es el volumen del elemento de fluido con centro en  $\bar{r}$  y densidad  $\rho$ , la fuerza volumétrica que siente al tiempo  $t$  está dado por:

I.3

$$\bar{T}(\bar{r}, t) \delta AV.$$

Las fuerzas superficiales son de corto alcance, dependen del área como de la orientación que ésta tenga en la interacción con elementos vecinos, en general cada cara del elemento interacciona con sus vecinos en forma diferente; la fuerza que actúa sobre un elemento de área  $\Delta A$ , con normal  $\hat{n}$ , con centro en  $\bar{r}$  y al tiempo  $t$  está definida por:

I.4

$$\bar{T}(\hat{n}, \bar{r}, t) \Delta A,$$

donde la forma de  $\bar{T}$ , llamado el vector de esfuerzos, se puede ver más claramente si analizamos las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen que por simplicidad tendrá la forma de un tetraedro (Fig. I.2)..

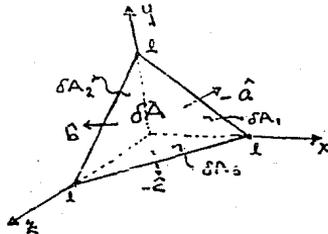


Fig. I.2 Análisis de las fuerzas sobre un elemento de volumen en forma de tetraedro.

Los ejes están orientados de tal forma que las caras ortogonales con superficies  $\delta A_1$ ,  $\delta A_2$ ,  $\delta A_3$  y cuyas normales exteriores se han puesto como  $-\hat{a}$ ,  $-\hat{b}$  y  $-\hat{c}$ , estén en los

los planos  $x-y$ ,  $y-z$ ,  $x-z$  respectivamente; si la normal de la superficie frontal  $\delta A$  se denota como  $\hat{n}$  entonces podemos escribir la fuerza superficial total como:

$$\bar{T}(\hat{n}) \delta A + \bar{T}(-\hat{a}) \delta A_1 + \bar{T}(-\hat{b}) \delta A_2 + \bar{T}(-\hat{c}) \delta A_3.$$

$\bar{T}(\hat{n}) \delta A$  es la fuerza que ejerce un elemento de fluido con normal  $-\hat{n}$ , y éste siente a su vez una fuerza igual a  $-\bar{T}(-\hat{n}) \delta A$  debido al elemento con normal  $\hat{n}$ , siendo estas fuerzas iguales vemos que el vector de esfuerzos  $\bar{T}$  es una función impar de  $\hat{n}$ , además, debido a la ortogonalidad de las caras:

$$\delta A_1 = \hat{a} \cdot \hat{n} \delta A, \quad \delta A_2 = \hat{b} \cdot \hat{n} \delta A, \quad \delta A_3 = \hat{c} \cdot \hat{n} \delta A.$$

La fuerza superficial total queda expresada como:

$$\left\{ \bar{T}(\hat{n}) - [\bar{T}(\hat{a}) \hat{a} + \bar{T}(\hat{b}) \hat{b} + \bar{T}(\hat{c}) \hat{c}] \cdot \hat{n} \right\} \delta A.$$

La segunda ley de Newton establece que:

$$\rho \delta V \bar{a} = F_v \delta V + \left\{ \bar{T}(\hat{n}) - [\bar{T}(\hat{a}) \hat{a} + \bar{T}(\hat{b}) \hat{b} + \bar{T}(\hat{c}) \hat{c}] \cdot \hat{n} \right\} \delta A,$$

donde  $\bar{a}$  es la aceleración y  $\rho$  la densidad del elemento considerado. Dividiendo la expresión por  $l^2$ ,  $l$  la longitud de las aristas del tetraedro que está en los ejes, y notando que  $\delta V = l^3/3$  y  $\delta A = \frac{\sqrt{3}}{2} l^2$ ; cuando hacemos tender  $l$  a cero necesariamente el término que corresponde a la fuerza superficial debe ser cero, esto es:

$$\bar{T}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot [\hat{a} \bar{T}(\hat{a}) + \hat{b} \bar{T}(\hat{b}) + \hat{c} \bar{T}(\hat{c})],$$

o bien en término de sus componentes:

$$1.5 \quad T_i(\hat{n}) = n_j [a_j T_i(\hat{a}) + b_j T_i(\hat{b}) + c_j T_i(\hat{c})],$$

se puede notar que la componente  $i$ -ésima del vector de esfuerzos que pasa por el elemento de superficie con normal  $\hat{n}$  está relacionada con la misma componente de los esfuerzos que se ejercen sobre tres superficies ortogonales.

Puesto que  $\hat{n}$  y  $\bar{T}$  no dependen del sistema de coordenadas, la cantidad entre corchetes tampoco y podemos asociar la con un tensor de segundo rango, el tensor de esfuerzos  $\tau_{ij}$ , estos es:

$$1.6 \quad T_i = \tau_{ij} n_j$$

Debe notarse también, dado que dicho límite existe cuando consideramos las dimensiones del paralelepípedo tender a cero, es posible definir al vector de esfuerzos como función de la posición, es decir, podemos especificar la fuerza en cualquier punto de la superficie mediante el límite de la relación fuerza sobre área, y podemos hablar de la fuerza por unidad de área en un punto que es por definición, el esfuerzo en ese punto.

$\tau_{ij}$  representa la  $i$ -ésima componente de la fuerza, por unidad de área, que se ejerce a través de un plano con normal en la dirección  $j$ . Explícitamente podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Entonces, considerando un volumen de control en un sistema lagrangiano podemos escribir la segunda Ley de Newton de acuerdo con las relaciones I.3 y I.4 como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \bar{u} \, dV = \int_S \bar{T} \, dS + \int_V \rho \bar{F} \, dV.$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds y la relación I.6 tenemos:

$$\int_V \left[ \frac{\partial (\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) \right] dV = \int_S (\bar{z} \cdot \bar{n}) \, dS + \int_V \rho \bar{F} \, dV;$$

por el teorema de Gauss podemos convertir la integral de superficie en una integral de volumen y agrupar todos los términos, y puesto que el volumen es arbitrario, la relación se cumple siempre que:

$$\frac{\partial (\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) = \text{div} \bar{z} + \rho \bar{F}$$

o en componentes:

$$\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial z_{ji}}{\partial x_i} + \rho F_j,$$

$i, j, k = 1, 2, 3.$

esta ecuación puede simplificarse si desarrollamos las derivadas del miembro izquierdo y se hace uso de la ecuación de continuidad (I.2), podemos llegar entonces a que:

$$I.7 \quad \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial z_{ji}}{\partial x_i} + \rho F_j.$$

Cabe hacer notar que esta relación es la ley de conservación del momento aplicada a un elemento de fluido visto desde un marco de referencia euleriano; el primer término del lado izquierdo es la aceleración usual (cambio de veloci

dad en el tiempo), mientras que el segundo representa una aceleración convectiva debida al gradiente de la velocidad que está presente aún en el caso de que el flujo sea estacionario; el lado derecho es la fuerza neta que causa la aceleración, siendo el primero de estos términos el correspondiente a las fuerzas superficiales y el segundo las fuerzas volumétricas.

### I.A.3 Ecuación de conservación de la energía.

Para obtener una ecuación de balance de energía supondremos, primero, que podemos aplicar a cada elemento de volumen las leyes de la Termodinámica. Los parámetros en estado de equilibrio y las relaciones entre ellos serán las mismas, esto es, supondremos que existe equilibrio local. Esta es una hipótesis muy fuerte, aunque muy buena, con bases teóricas y experimentales sólidas, si bien no siempre es válida. La primera ley de la Termodinámica se refiere a que el cambio en la energía interna de un sistema (con número de moles constante) es igual al trabajo que se realiza sobre él más el calor intercambiado por el sistema con sus alrededores; supondremos entonces que la energía a que se refiere dicha ley consta de dos partes, una de ellas será en sí energía cinética debido a que en la descripción lagrangiana el elemento de volumen no está en reposo, la otra parte será la energía interna. De tal forma que si escribimos la energía total asociada con el elemento de volumen  $V$  arbitrario como:

$$\int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho \bar{u} \cdot \bar{u}) dV,$$

donde  $e$  es la energía interna por unidad de masa y el segundo término la energía cinética por unidad de volumen. La primera ley establece que:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho \bar{u} \cdot \bar{u}) = \int_S \bar{u} \cdot \bar{T} \, dS + \int_V \bar{u} \cdot \bar{S} \bar{F}_v \, dV - \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} \, dS,$$

donde  $\bar{q}$  denota el flujo de calor, por convención se denota negativo si este flujo es del sistema a sus alrededores, siendo el último término de la expresión el flujo neto de calor que sale del sistema por unidad de tiempo y los dos primeros términos de la derecha la potencia realizada sobre el sistema por las fuerzas superficiales y volumétricas.

Teniendo en cuenta que el vector de esfuerzos  $\bar{T}$  está relacionado con el tensor del mismo nombre por la relación  $T_j = u_j \sigma_{ij}$  (ec. I.6), y utilizando el teorema de Gauss, podemos cambiar las integrales de superficie a integrales de volumen; además, utilizando el teorema de transporte de Reynolds (ec. I.1) en el lado izquierdo de la igualdad y agrupando los términos en una sola integral obtenemos:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) u_k] - \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \sigma_{ij} + u_j \sigma_{ji} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j}] \right\} dV = 0.$$

Nuevamente, como hemos utilizado un volumen arbitrario, la igualdad anterior se cumple si, y sólo si, el integrando es idénticamente igual a cero, obteniendo así una ecuación diferencial para la conservación de la energía, que puede ser reducida a una forma más simple utilizando la ecuación

de continuidad (I.2) y la ecuación de conservación del momento (I.7) obteniéndose:

$$I.8 \quad \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_r \frac{\partial e}{\partial x_r} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} ;$$

esta ecuación nos expresa el hecho de que para un elemento de fluido arbitrario que permanezca fijo en el espacio, el cambio en su energía interna está directamente relacionado con los esfuerzos superficiales por un lado, y con la cantidad de calor que pueda ser añadido al sistema.

#### I.B ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

El conjunto de ecuaciones que se han deducido, a saber, la ecuación de continuidad (I.2), la ecuación de conservación del momento (I.7), y la ecuación de conservación de la energía (I.8) no forman un sistema cerrado de ecuaciones. Tenemos hasta el momento cinco ecuaciones, tres para la ecuación vectorial de momento, y dos escalares, la ecuación de continuidad y la ecuación de la energía; las variables involucradas forman un conjunto de 17 incógnitas: dos escalares, la densidad  $\rho$  y la energía interna  $e$ ; dos vectores, la velocidad  $\bar{u}$  y el flujo de calor  $\bar{q}$  cada uno con tres componentes; y el tensor de esfuerzos que en general tiene nueve componentes independientes, se ve entonces que aunque podemos hacer uso de dos ecuaciones de estado adicionales no es suficiente para poderlas resolver.

Para cerrar las ecuaciones es necesario hacer hipótesis

sobre el flujo de calor y sobre el tensor de esfuerzos, y las ecuaciones resultado de ellas se conocen como relaciones constitutivas.

El modelo para el tensor de esfuerzos que generalmente se usa y que caracteriza a los fluidos newtonianos está basado en dos postulados fundamentales <sup>141</sup>:

a) Los elementos no diagonales del tensor de esfuerzos que representan los esfuerzos tangenciales, dependen únicamente del tensor de rapidez de deformación  $\tilde{\epsilon}$  (tensor de esfuerzos viscosos), este último debe depender de las derivadas espaciales de la velocidad, puesto que la fricción interna ocurre en un fluido sólo cuando partículas diferentes se mueven con velocidades diferentes. La relación más general tomando en cuenta esta hipótesis es:

$$\sigma_{ij} = F_0(I) \delta_{ij} + F_1(I) e_{ij} + F_2(I) e_{ik} e_{kj} + \dots,$$

donde se incluyen esfuerzos normales y  $F_i$  representan funciones de los tres invariantes de  $\tilde{\epsilon}$ : la traza, el determinante y la suma de los determinantes de los cofactores.

b) La segunda condición caracteriza a los fluidos newtonianos y afirma que la relación entre los tensores  $\tilde{\sigma}$  y  $\tilde{\epsilon}$  es lineal. Como consecuencia de esta hipótesis  $F_i = 0$  para  $i \gg 2$ ,  $F_1$  es una constante independiente de los invariantes y  $F_0$  depende, a lo más, del primer invariante, entonces la relación debe ser de la forma:

$$\sigma_{ij} = (\alpha + \lambda \nabla \cdot \bar{u}) \delta_{ij} + \mu e_{ij}.$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$  y los parámetros  $\alpha, \lambda, \mu$  se mencionan enseguida.

Como en reposo el esfuerzo es isotrópico y la presión ejercida sobre el fluido es la presión termodinámica  $p$ , identificamos  $a = -p$ .

La forma usual en que se escribe la ecuación es:

$$I.9 \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \xi \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

donde  $\xi = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  y el término proporcional a  $\mu$  está constituido de tal forma que se anula al contraer el tensor.

Los parámetros  $\mu$  y  $\xi$  son el primero y segundo coeficientes de viscosidad y son en general funciones de la densidad y la temperatura, son ambos positivos [5] y pueden determinarse experimentalmente para cada tipo de fluido en particular. El primero se identifica con la viscosidad dinámica o cortante y se define a partir de él el coeficiente de viscosidad cinemático por la relación  $\nu = \mu/\rho$ .

La segunda ecuación constitutiva se refiere al vector de flujo de calor que depende directamente de las variaciones en la temperatura del fluido. Expandiendo  $\bar{q}$  en serie de potencias en los gradientes de la temperatura, se retienen sólo los primeros términos bajo la restricción de que los gradientes son pequeños; el término constante debe ser cero ya que  $\bar{q}$  debe anularse cuanto  $\nabla T$  es cero, entonces:

$$I.10 \quad \bar{q} = -\kappa \nabla T,$$

llamada ley de conducción de calor de Fourier; la constante de proporcionalidad se llama la conductividad térmica y debe ser positiva ya que el flujo de calor es en la dirección con

traría al gradiente de la temperatura, en general es también función de la densidad y la temperatura.

Sustituyendo las relaciones constitutivas (I.9) y (I.10) en las ecuaciones de conservación de momento.

En la ecuación de continuidad no es necesario pues sólo está en términos de la densidad y la velocidad, tenemos para la componente  $j$ -ésima (donde  $j = 1, 2, 3$ ):

$$\text{I.11} \quad \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_R \frac{\partial u_j}{\partial x_R} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -p \delta_{ij} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_R}{\partial x_R} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_R}{\partial x_R} \right] + \rho F_j.$$

El conjunto de las tres ecuaciones anteriores se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes y representan las ecuaciones de movimiento para fluidos newtonianos.

La ecuación de la energía quedará expresada como:

$$\text{I.12} \quad \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_R \frac{\partial e}{\partial x_R} = \left[ -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_R}{\partial x_R} + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_R}{\partial x_R} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right].$$

Aunque los coeficientes de viscosidad no son constantes, en muchos casos no cambian notablemente y pueden considerarse como tales. Al expresar al tensor de esfuerzos en términos de la presión termodinámica y de gradientes de la velocidad y al flujo de calor en función del gradiente de la tempe

ratura logramos reducir el número de incógnitas a siete; para cerrar el sistema de ecuaciones (cinco hasta el momento) es necesario dar dos ecuaciones adicionales, esta información se obtiene de la termodinámica a partir de las ecuaciones de estado térmica y calórica. Sin embargo podemos desacoplar la ecuación de la energía de la ecuación de momento haciendo una hipótesis más: la hipótesis de incompresibilidad.

Se dice que un fluido es incompresible si la densidad es una función que varía muy lentamente en el espacio y el tiempo comparada con la región y el tiempo en que la velocidad cambia, en este sentido la densidad puede tomarse como constante <sup>[4]</sup>. Entonces, si los cambios en la densidad son pequeños y despreciando términos de orden superior en un desarrollo en serie de Taylor, podemos escribir

$$\rho = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial p} (p - p_0).$$

Si ahora definimos un incremento adimensional  $p'$  en la presión como

$$p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 v_0^2},$$

donde  $\rho_0$  y  $p_0$  son una densidad y una presión características del fluido y  $v_0$  una velocidad típica, de modo que la velocidad máxima no sea mucho mayor que ésta. Podemos escribir entonces

$$\rho = \rho_0 (1 + M^2 p')$$

donde  $M$  es el número de Mach  $M = \frac{v_0}{c}$  y  $c$  es la velocidad del sonido  $c^{-2} = \frac{\partial \rho}{\partial p}$ .

Haciendo uso de la ecuación de continuidad ec. I.2 el efecto de suponer a  $\rho$  constante es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_R} (\rho u_R) &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_R \frac{\partial \rho}{\partial x_R} \right) + \rho \frac{\partial u_R}{\partial x_R} = \\ &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_R}{\partial x_R} = \\ &= \rho \frac{\partial u_R}{\partial x_R} = 0 \end{aligned}$$

en el segundo paso de la igualdad se hace uso del teorema de transporte de Reynolds; entonces, si el fluido es incompresible la divergencia del campo de velocidades se anula, esto es, la distribución de velocidad es solenoidal:

$$I.13 \quad \frac{\partial u_R}{\partial x_R} = 0 \quad \text{cuando} \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Podemos entender mejor qué relación tiene el número de Mach con la hipótesis de incompresibilidad si en la ecuación de continuidad se divide todo por  $\rho_0 v_0 / L$ , ( $L$  - longitud característica) y se agrupan términos en  $M$ :

$$\nabla' \cdot \nabla + M^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t'} p' + \nabla' \cdot p' \nabla \right] = 0,$$

siendo todas las cantidades adimensionales:  $v = u/v_0$ ,  $r' = r/L$  y  $t' = t \frac{v_0}{L}$ . Cuando el número de Mach es muy pequeño el segundo término puede desprejarse y la ecuación es la de un fluido incompresible, la aproximación es mejor en cuanto más pequeño es  $M$ . Es conveniente enfatizar en que

esto es válido si los efectos de velocidad son despreciables y la densidad no difiere mucho de la densidad característica  $\rho_0$ .

La ecuación de continuidad para fluidos incompresibles (ec. I.13) y las ecuaciones de Navier-Stokes forman un sistema cerrado de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que son: la presión y las tres componentes de la velocidad, y en su forma vectorial se escriben:

$$I.14 \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$I.15 \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F},$$

siendo las ecuaciones de movimiento para fluidos incompresibles un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico y las condiciones a la frontera que deben imponerse pueden ser las llamadas de Dirichlet, o bien las de Neumann, y se requiere entonces especificar la velocidad hidrodinámica sobre cada frontera sólida. Experimentalmente se ha encontrado que podemos suponer que no hay deslizamiento de un fluido sobre una superficie sólida; la velocidad del fluido sobre cada frontera sólida es precisamente la velocidad de dicha frontera, entonces, si  $\vec{v}$  es la velocidad de la frontera:

$$I.16 \quad \vec{u} = \vec{v} \quad (\text{sobre la frontera}).$$

I.C SOLUCIONES EXACTAS A LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO  
PARA FLUIDOS NEWTONIANOS VISCOSOS E INCOMPRESIBLES.

Los problemas cuya solución se conoce son muy pocos debido al tipo de ecuaciones a las que pertenecen las de Navier-Stokes; aunque la hipótesis de incompresibilidad simplifica las cosas al desacoplar las ecuaciones de movimiento de la ecuación de la energía y disminuir los términos de las primeras, las ecuaciones siguen siendo ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales de tipo parabólico y en general muy difíciles de resolver. De aquellos que sí se conoce su solución pueden ser agrupados en problemas estacionarios y no estacionarios, y en cada una de estas categorías podríamos identificar los que sean lineales y no lineales; se darán algunos ejemplos a continuación.

Problemas estacionarios:

Son todos aquellos en donde el campo de velocidades es constante respecto al tiempo, el término  $\partial \bar{u} / \partial t$  que aparece en las ecuaciones de Navier-Stokes es idénticamente igual a cero; en este tipo de problemas generalmente no es el interés preguntarse cómo empieza a generarse el flujo, sino que se estudia como un flujo permanente.

Las ecuaciones I.15 pueden simplificarse aún más cuando para un problema específico el término no lineal  $\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}$  se anula, pudiendo distinguir entre problemas estacionarios lineales como el Flujo de Couette plano y cilíndrico, y pro-

blemas estacionarios no-lineales como en el caso del Flujo de Von Kármán y el flujo del jet sumergido.

### Flujo de Couette plano <sup>(2)</sup>.

Consideremos un fluido que se mueve entre dos planos paralelos e infinitos y separados una cierta distancia  $h$ ; supongamos también que el movimiento es sólo hacia una dirección, por ejemplo en la dirección  $x$ , y que en ausencia de fuerzas externas puede ser causado por el movimiento relativo de los planos en esa dirección ó a la existencia de un gradiente externo de presión.

Bajo las hipótesis anteriores es claro que sólo la primera componente de la velocidad es diferente de cero y puede ser sólo función de  $x$  y  $y$ , sin embargo de la ecuación de continuidad (ec. I.14) se obtiene que la velocidad es función únicamente de la variable  $y$ :  $u_x = u(y)$ , y entonces, en las ecuaciones de movimiento se puede ver que el término  $\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}$  se anula, obteniéndose una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal para la velocidad:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

Si suponemos primero que los planos están fijos y existe un gradiente de presión constante podemos obtener una solución al integrar dos veces la ecuación anterior, que representará un perfil de velocidades parabólico, en donde la velocidad máxima se alcanza en la distancia media entre los planos (Fig. I.3.a):  $u_x(y) = -y/2\mu \frac{dp}{dx} (h - y)$ .

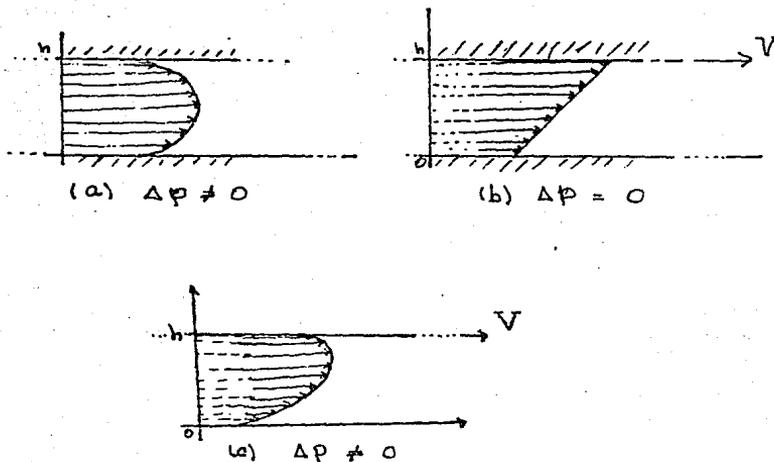


Fig. I.3 Perfil de velocidades para el flujo entre planos paralelos.

Si ahora se supone que el plano inferior está fijo y el otro se mueve con velocidad constante  $V$  en la dirección  $x$ , y que la presión es constante obtenemos una ecuación todavía más simple para la velocidad:  $d^2u/dy^2 = 0$ ; cuya solución general es, imponiendo las condiciones de contorno,  $u_x(y) = \frac{V}{h} y$ , que representa un perfil de velocidades lineal (Fig. I.3.b). La ventaja de tener ecuaciones lineales es que la combinación lineal de sus soluciones será solución del problema general en donde además de tener un gradiente

de presión, uno de los planos se está moviendo (Fig. I.3.c).

### Flujo de Couette cilíndrico [2], [5], [6]

En este caso el fluido se encuentra entre dos cilindros coaxiales de longitud infinita que rotan con velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , y en ausencia de fuerzas externas (Fig. I.4).

El flujo entre cilindros que rotan es otro ejemplo de un problema lineal, usando coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  suponemos que la única componente de la velocidad será la componente tangencial  $u_\theta$ , donde el eje de los cilindros coincide con el eje de rotación Oz. De la ecuación de continuidad se deduce que la velocidad será función sólo de la variable  $r$ , esto es:  $u_\theta = u(r)$ .

Análogamente al ejemplo anterior la ecuación de movimiento resultante es una ecuación lineal cuya solución es de la forma:

$$u_\theta(r) = \frac{A}{r} + B r,$$

donde la determinación de las constantes se obtiene considerando situaciones específicas.

Las líneas de corriente son círculos concéntricos al eje de los cilindros en el plano perpendicular a él.

### Flujo de Von Kármán.

Dentro de los problemas no lineales se puede men-

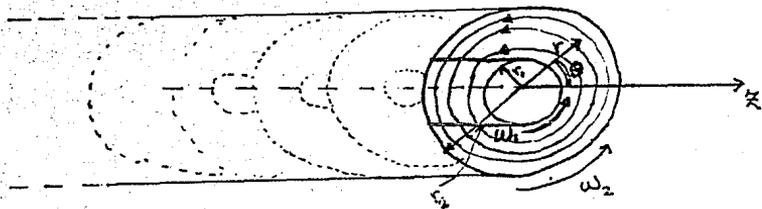


Fig. I.4 Geometría del flujo entre cilindros que rotan. cionar el movimiento de Von Kármán (1921) <sup>[6], [7]</sup> que consiste básicamente en analizar el flujo producido por un plano infinito que rota alrededor de un eje perpendicular a él, con una velocidad angular  $\omega$ , y que se encuentra inmerso en un fluido también infinito.

El problema puede ser planteado si consideramos quedada la simetría basta con analizar la parte superior del plano en rotación; utilizando coordenadas cilíndricas, en donde el plano coincide con el plano  $z = 0$ , supondremos que las componentes de la velocidad no dependen del ángulo, es decir:

$$u_r = u_r(r, z); \quad u_\theta = u_\theta(r, z); \quad u_z = u_z(r, z),$$

además, si se supone que el campo de velocidades posea simetría de revolución alrededor del eje  $Oz$  y que para cualquier plano paralelo al disco la componente de la velocidad normal es constante, las condiciones para  $z = 0$  serán:

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \omega r, \quad u_z = 0, \quad (\text{en } z = 0),$$

por otra parte debe imponerse que suficientemente lejos del plano las componentes radial y angular de la velocidad sean nulas, conforme nos alejamos del plano la velocidad en esa dirección va "amortiguándose", esto es:  $u_r = u_\theta = 0$  en  $z = \infty$ . Sin embargo la componente axial no se anula en  $z = \infty$  sino que debe tender a un valor constante negativo, ya que debido al movimiento el fluido se mueve radialmente hacia afuera especialmente cerca del plano, es necesario entonces un flujo vertical constante desde el infinito para que se cumpla la ecuación de continuidad.

Von Kármán propone que en la distribución de la velocidad las componentes radial y azimutal sean proporcionales a la distancia medida desde el origen, y que la componente en la dirección axial sea constante en cada plano paralelo al plano de rotación, de tal forma que la expresión para los componentes es

$$u_r = r\omega F(\xi); \quad u_\theta = r\omega G(\xi); \quad u_z = (\nu/\omega)^{1/2} H(\xi)$$

$$\text{y} \quad P = -S\nu\omega P(\xi)$$

$$\text{donde} \quad \xi = (\nu/\omega)^{1/2} \zeta$$

obteniéndose de las ecuaciones de movimiento tres ecuaciones adimensionales para  $F$ ,  $G$ ,  $H$  y  $P$ , y de la ecuación de continuidad una ecuación para  $F$  y  $H$ , que son:

$$F^2 - G^2 + F'H = F''$$

$$2FG + G'H = G''$$

$$HH' = D' + H''$$

y

$$2F + H' = 0.$$

con las siguientes condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} F = H = 0 \quad \text{y} \quad G = 1 \quad \text{cuando} \quad \xi = 0 \\ F \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad G \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Von Kármán obtiene una solución aproximada del problema utilizando el método empleado por Pohlhausen dentro de la teoría de la capa límite <sup>[7]</sup>. Cochran utiliza el método de integración numérica de d'ADAMS en la vecindad del valor  $\xi = 0$ , y escribe la otra parte de la solución desarrollando asintóticamente las funciones  $H$  y  $G$  <sup>[6]</sup>. Los resultados obtenidos por los dos métodos se muestran en la gráfica de la Fig (I.5), donde las líneas continuas representan los resultados de Cochran que obtiene un valor límite de  $H$  cuando  $\xi \rightarrow \infty$  de  $-0.886$ , comparado con los resultados de von Kármán (líneas punteadas en la gráfica) de  $-0.55$  para el mismo valor, por lo que la velocidad  $u_x$  al infinito para un valor de  $\nu = 0.14 \text{ cm}^2/\text{seg}$ .

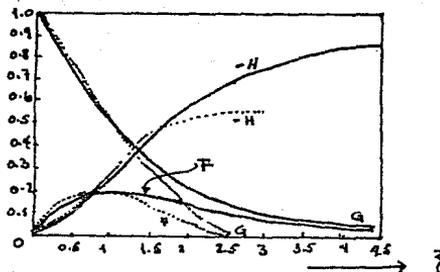


Fig. I.5 Resultados obtenidos para las funciones  $F$ ,  $G$  y  $H$  por Von Kármán (línea cortada) y por Cochran (línea continua).

y suponiendo que el disco gira a 600 rev/min, es de  $u_{\lambda}(\infty) = -2.62$  cm/seg en lugar del valor obtenido por Von Kármán de  $-1.63$  cm/seg.

El flujo del jet sumergido [1, 17].

Consiste en analizar el flujo producido por un "jet de fluido" que se introduce en un fluido infinito a través de un tubo delgado. Para encontrar la solución se utilizan coordenadas esféricas con variables  $(r, \theta, \varphi)$  y se supone, en primer lugar, que el flujo es simétrico alrededor del eje axial que va en la dirección del jet, por lo que no hay componente de la velocidad en la dirección del ángulo  $\varphi$ , y las componentes restantes  $V_{\theta}$  y  $V_r$  serán sólo función de

$r$  y  $\theta$ . El momento del jet será el flujo de momento total que debe ser el mismo para cualquier superficie cerrada alrededor del origen, y debe suponerse entonces que la velocidad será inversamente proporcional a la distancia al origen, que estará en el punto donde emerge el jet.

El problema es no lineal, L. Landau obtiene una solución exacta <sup>[6]</sup> considerando que la fuente del jet no tiene dimensiones, que es puntual. En la figura I.6 se muestran las líneas de corriente.

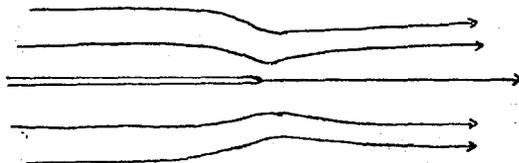


Fig. I.6 Líneas de corriente producidas por un jet sumergido.

#### Problemas no-estacionarios:

Los flujos no estacionarios son aquellos en donde la velocidad es función no sólo de la posición sino del tiempo y pueden ser causados por el movimiento repentino de sus fronteras, o por movimientos oscilatorios de éstas, o bien, por la aparición de gradientes de presión o sus variaciones en el tiempo.

Como ejemplo mencionaremos al llamado Primer problema

de Stokes, se refiere a un fluido infinito acotado sólo por un plano también infinito, que puede ser el plano  $x-z$ . Si repentinamente el plano es puesto en movimiento en una dirección con velocidad constante, esperamos que la única componente de la velocidad diferentes de cero será en esa dirección, digamos  $x$ , y será sólo función de  $y$  y  $t$ . Dada la simetría del problema, es posible analizarlo como un flujo bidimensional, como  $\vec{u} = (u(y,t), 0, 0)$  el término no lineal será cero; se puede ver también que la presión será constante en cada punto, de donde la ecuación que hay que resolver es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:

$$\partial u_x / \partial t = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad , \quad \text{con las condiciones de frontera:}$$

$$u(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \bar{v}, & t > 0 \end{cases} ,$$

y

$$u(y, t) \quad (\text{finita en el dominio}),$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad del plano. El problema puede resolverse utilizando métodos de semejanza de variables <sup>L21</sup> y por transformadas de Laplace.

Si en lugar de que la frontera sólida se deslice con velocidad constante a un tiempo  $t$  pensamos en que empieza a oscilar en una dirección, el problema sólo será diferente al anterior en sus condiciones de contorno, que se piden que sean:

$$u(x, t) = V \cos \alpha t$$

$$u(y, t) = f(y) \cos \alpha t.$$

El problema, referido como Segundo Problema de Stokes, puede resolverse si suponemos que el fluido también oscila en la misma dirección que el plano, con la misma frecuencia pero con una amplitud que dependerá de la distancia perpendicular al plano. Pensando en que la velocidad del flujo es entonces de la forma:  $u(y, t) = \text{Re}[\omega(y) e^{i\alpha t}]$ , se llega a una ecuación diferencial ordinaria de segundo grado lineal para la amplitud  $\omega(y)$  cuya solución se conoce.

Para concluir con este capítulo, mencionaré que dentro de los problemas presentados se ha supuesto siempre que el flujo es laminar, aunque en la práctica se puede observar flujo turbulento como en el problema del jet sumergido [17], por ejemplo.

También, las suposiciones de simetría en los flujos y el uso de coordenadas apropiadas nos puede permitir pasar de las ecuaciones no-lineales de Navier-Stokes a ecuaciones lineales como en los flujos de Couette y en los problemas de Stokes, donde ya no aparece la viscosidad y por esta razón las soluciones también satisfacen las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal incompresible.

Sin embargo, en algunos casos la simetría del problema no facilita la solución del mismo. Por ejemplo, el problema de Von Kármán no puede ser analizado bidimensionalmente y las ecuaciones de movimiento son no-lineales conociéndose sólo soluciones numéricas.

## CAPITULO II

## EL FLUJO ENTRE PLANOS PARALELOS

## Introducción.

En este capítulo se verán las soluciones dadas al problema no lineal y estacionario del flujo entre planos inclinados, problema primero resuelto por Jeffery <sup>[8]</sup> en 1915 y por Hamel <sup>[9]</sup> en 1916; la solución completa fué obtenida y analizada por Rosenhead <sup>[10]</sup> en 1939 en término de funciones elípticas.

Para precisar lo que se entenderá por flujo divergente y convergente se define el número de Reynolds  $R$  como  $\frac{Q}{2V}$ , donde  $Q$  es el volumen de fluido que cruza en la unidad de tiempo a través de dos planos perpendiculares cada uno a una de las paredes, y que se encuentran a una unidad de longitud del origen. Un valor positivo de  $R$  corresponderá a un flujo promedio hacia afuera y un valor negativo a un flujo promedio hacia adentro.

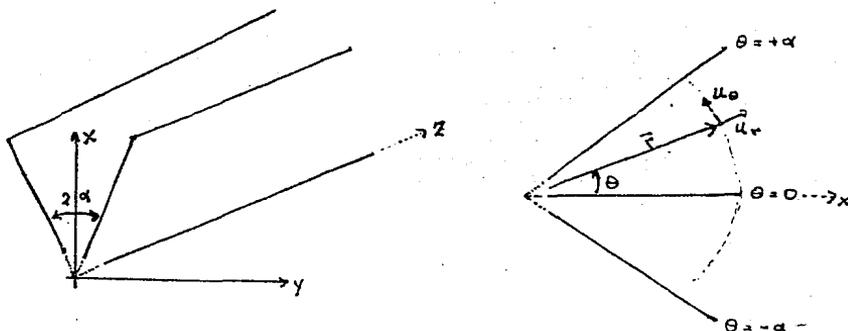
## II.A PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El flujo entre dos planos infinitos que se intersectan, digamos, en la línea  $y = x = 0$ , se ha analizado considerando primero que a través de esta línea emana (o se introduce) fluido a razón constante, y suponiendo que: el flujo entre los planos es laminar y estacionario, que el fluido se supone newtoniano e incompresible y que no actúan fuerzas externas sobre él.

Por la simetría del problema podemos considerar todo el movimiento como plano, este movimiento se caracteriza porque la velocidad de cada partícula del fluido representa un vector que es paralelo a un mismo plano (digamos el plano  $x - y$ ), y que puede depender de las coordenadas  $x$  y  $y$ .

Las coordenadas apropiadas serán coordenadas cilíndricas

$(\bar{r}, \theta)$ , donde  $\bar{r}$  se medirá a partir del punto de intersección de las paredes y se excluye el caso en el que  $\bar{r} = 0$ , y  $\theta$  será el ángulo que forma  $\bar{r}$  con la línea media del canal (fig. II.1).



a) Esquema general de los planos

b) Corte transversal de los planos

Figura II.1

Dado que consideramos el fluido newtoniano se usarán la ecuación de continuidad (ec. I.14) y las ecuaciones de Navier-Stokes (ec. I.15) que se encontraron en el capítulo anterior, y que, en coordenadas cilíndricas, para un fluido incompresible tienen la forma [2]:

$$\text{II.1} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

$$\text{II.3} \quad \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \rho f_\theta,$$

$$\text{II.2} \quad \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho f_r,$$

$$\text{II.4} \quad \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + \rho f_z,$$

donde  $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

Las ecuaciones se simplifican al tomar en cuenta las hipótesis mencionadas con anterioridad, y si además suponemos que el flujo es sólo radial, entonces  $u = (u_r, 0, 0)$  donde en general  $u_r = u_r(r, \theta)$ . Como el flujo es estacionario el término  $\frac{\partial u}{\partial t}$  es cero, y dado que no hay fuerzas externas  $\vec{F} = (f_r, f_\theta, f_z) = 0$ .

El sistema de ecuaciones por resolver para este problema en particular son:

$$\text{II.5} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) = 0$$

$$\text{II.6} \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} \right],$$

$$\text{II.7} \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right],$$

$$\text{II.8} \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

donde ahora la componente en la dirección radial se ha denotado simplemente por  $u$ . Las condiciones de contorno para un fluido viscoso son que la velocidad del fluido en las fronteras sólidas es precisamente la velocidad en la frontera; en nuestro caso las fronteras están fijas, entonces si suponemos que el ángulo de abertura del canal es  $2\alpha$  se debe cumplir que

$$\text{II.9} \quad u(r, \alpha) = u(r, -\alpha) = 0.$$

## II.B SOLUCION OBTENIDA POR G. B. JEFFERY (1915) <sup>[81]</sup>

Jeffery obtiene una solución para el flujo entre planos inclinados utilizando la función de corriente  $\Psi$ , que puede ser definida siempre que el flujo se considere bidimensional e incompresible, ya que en estos casos la ecuación de continuidad es equivalente a pedir que  $u_y dx - u_x dy$  sea una diferencial exacta, esto es,  $d\Psi = u_y dx - u_x dy$  de donde podemos entonces definir a  $\Psi$  en términos de las componentes de la velocidad como

$$\text{II.10} \quad u_x = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad u_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones de movimiento (ec. I.15) y eliminando la presión de ellas se obtiene la ecuación diferencial para la función de corriente:

$$\text{II.11} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) + \frac{\partial (\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial (x, y)} = \nu \nabla^4 \Psi,$$

siendo  $\nu$  el coeficiente de viscosidad cinemático, y el

Jacobiano es

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial r} \right].$$

La ecuación II.11 en coordenadas polares, para flujo estacionario es

$$\text{II.12} \quad \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu r \nabla^4 \psi,$$

donde el laplaciano en esas coordenadas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

En su trabajo Jeffery analiza varias posibilidades para  $\psi$  que corresponden a diferentes situaciones de flujo, en el caso de canales que convergen considera que la función de corriente depende sólo del ángulo  $\theta$ , encontrando la ecuación diferencial:

$$\text{II.13} \quad [\psi'(\theta)]^2 = 4\nu \psi''(\theta) + \nu \psi''''$$

Integrando la ecuación anterior, multiplicando después por  $\psi''$ , integrando nuevamente y reorganizando los términos se obtiene finalmente que

$$\text{II.14} \quad \frac{3\nu}{2} \left( \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} \right)^2 = \left( \frac{d\psi}{d\theta} \right)^3 - 6\nu \left( \frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 - 3a \frac{d\psi}{d\theta} - 3b,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes de integración. Integrando nuevamente se obtiene que

$$\text{II.15} \quad \theta = \int \frac{\sqrt{6\nu}}{2} \frac{d\psi'}{\sqrt{(\psi' - \lambda)(\psi' - \mu)(\psi' - 6\nu - \lambda + \mu)}}.$$

Las constantes de integración  $a$  y  $b$  están relacionadas con las raíces del polinomio cúbico que aparece en el denominador del integrando de la última expresión por

$$\text{II.16} \quad \begin{aligned} 3a &= 6v(\lambda + \mu) + (\lambda + \mu)^2 + \lambda\mu \\ 3b &= \lambda\mu(6v - \lambda + \mu). \end{aligned}$$

En estas expresiones  $\lambda$  y  $\mu$  son dos raíces del polinomio. Cabe hacer notar que en la ecuación (II.15) debemos considerar los dos signos de la raíz, sin embargo en el análisis hecho por Jeffery obtiene una solución tomando en cuenta sólo el signo positivo; además supone la siguiente relación para la derivada de la función corriente:

$$\text{II.17} \quad \psi' = \lambda \operatorname{sen}^2 \phi + \mu \operatorname{cos}^2 \phi.$$

La integral (II.15) es entonces:

$$\text{II.18} \quad (\Theta - \Theta_0) = + \left\{ \frac{6v}{6v - \lambda - 2\mu} \right\}^{1/2} \int_0^\phi \left\{ 1 - \frac{\lambda - \mu}{6v - \lambda - 2\mu} \operatorname{sen}^2 \phi \right\}^{1/2}$$

Definiendo dos nuevas constantes  $k$  y  $m$  por:

$$\text{II.19} \quad k^2 = \frac{\lambda - \mu}{6v - \lambda - 2\mu} \quad \text{y} \quad m^2 = \frac{6v - \lambda - 2\mu}{6v},$$

el sistema de ecuaciones para  $\lambda$  y  $\mu$  pueden ser expresadas en términos de  $k$  y  $m$  como:

$$\text{II.20} \quad \lambda = \mu + 6v k^2 m^2 \quad \text{y} \quad \mu = 2v(1 - m^2) - 2v m^2 k^2,$$

y la ecuación (II.18) puede escribirse en la forma:

$$|m| (\Theta - \Theta_0) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}},$$

y puede ahora identificarse con la función de Jacobi  $\operatorname{sn}$ , definida mediante la relación:

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sen} \phi \quad \text{donde} \quad u = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}},$$

haciendo  $u = |m|(\theta - \theta_0)$  y con la relación (II.15) en (II.12) se obtiene finalmente que:

$$\text{II.21} \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 2v(1 - m^2 - m^2k^2) + 6vk^2m^2 \sin^2(|m|(\theta - \theta_0)),$$

si la constante de integración  $\theta_0$  es cero, se puede ver que la función  $\frac{d\psi}{d\theta}$  es par y por lo tanto el flujo será simétrico respecto de la línea central, no pudiéndose asegurar en caso contrario. Si  $\theta_0 = 0$ :

$$\text{II.22} \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 2v(1 + 2m^2 - m^2k^2) + 6vk^2m^2 \sin^2(m\theta, k),$$

las líneas de corrientes serán líneas rectas que pasan a través del origen.

Jeffery encuentra así una solución para el movimiento de un fluido entre dos planos fijos inclinados a un ángulo  $2q$ , debido a una fuente lineal a lo largo de la línea de intersección suponiendo un gasto constante; dicho con sus propias palabras:

La solución así encontrada no puede ser general puesto que de antemano supone simetría del flujo respecto a la línea que bisecta las paredes, y tampoco analiza todas las posibilidades del polinomio cúbico de la ecuación II.15.

Muestra, sin embargo, que para ángulos de separación muy pequeños, la solución aproximada para la velocidad, a través de cualquier sección transversal, sigue la misma ley parabólica que en el flujo entre planos paralelos.

## II.C SOLUCION OBTENIDA POR G. HAMEL (1916) [9].

El análisis hecho por Hamel, casi simultáneamente al de Jeffery, es un poco más extenso que el de éste. Hamel se plantea determinar todos los movimientos estacionarios de un fluido viscoso e incompresible, que sin ser irrotacional tiene las mismas líneas de corriente que un movimiento irrotacional. Demuestra que los únicos movimientos con éstas características son aquellos cuyas líneas de corriente son: espirales logarítmicas homotéticas, círculos concéntricos, líneas concurrentes a un punto y líneas paralelas, mostrando también que las líneas concurrentes son un caso degenerado de las espirales logarítmicas [6].

Para resolver el problema propone que siendo  $\psi$  la función de corriente entonces:

$$\text{II.23} \quad \psi = f(\alpha) \quad \text{y} \quad \nabla^2 \psi \neq 0,$$

siendo  $\alpha$  una función armónica, y la segunda condición expresa el hecho de que el fluido no es necesariamente irrotacional. Si  $\beta$  es la función armónica conjugada de  $\alpha$  de tal suerte que  $\alpha + i\beta = f(z)$  es una función analítica de  $z = x + iy$ , entonces las coordenadas curvilíneas ortogonales  $\alpha$  y  $\beta$  serán llamadas coordenadas isométricas.

La medida de la distancia de un sistema de coordenadas isométricas  $\alpha, \beta$  es de la forma

$$ds^2 = h^2 (d\alpha^2 + d\beta^2)$$

La función  $h = h(\alpha, \beta)$  se define mediante la relación

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{h^2}, \quad h > 0$$

y cumple con la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) = 0;$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de la función de corriente  $\psi = \psi(\alpha, \beta)$  en coordenadas isométricas  $\alpha, \beta$  queda expresado como

$$\begin{aligned} \text{II.24} \quad & \nabla \left[ \nabla^2 (\nabla^2 \psi) + 2 \left( \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \alpha} a - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \rho} b \right) + (a^2 + b^2) \nabla^2 \psi \right] + \\ & + \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (\alpha, \beta)} - \nabla^2 \psi \left( b \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + a \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}$$

y

$$a = -\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha}, \quad b = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho}.$$

A partir de la ecuación II.24 Hamel encuentra la ecuación diferencial para  $F(\alpha)$  que es

$$\text{II.25} \quad F^{IV} + 2a F^{III} + (a^2 + b^2) F^{II} - \frac{b}{\nu} F^I F^{II} = 0,$$

donde  $F^{(n)}$  es  $\frac{d^n F}{d\alpha^n}$ .

Que se satisface siempre y cuando  $a$  y  $b$  sean constantes<sup>[9]</sup>. Cuando  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  las líneas de corriente son espirales logarítmicas, cuando  $b = 0$  las líneas de corriente son círculos concéntricos y cuando  $a = 0$  el flujo es sólo radial a partir del origen, siendo este último el caso que nos interesa. Identificando la velocidad del fluido con  $u = F'(\alpha)$  obtenemos una ecuación diferencial para

flujo sólo radial, (en coordenadas cilíndricas), y considerando por simplicidad que la constante  $b = -2$ , se obtiene por integración que

$$\text{II.26} \quad u'' + 4u + \frac{1}{r} u^2 + c = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse en términos de un polinomio cúbico  $P(u)$  cuyas raíces son  $e_1, e_2, e_3$ , tomando la forma  $u' = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)}$ , cuya integración general puede ponerse en términos de la función elíptica de Weierstrass  $\wp(z)$  como

$$\text{II.27} \quad u = -2v + \wp\left(\frac{z}{\sqrt{6v}}(a-g); g_2, g_3\right)$$

donde  $g_0, g_2, g_3$  son constantes de integración.

El problema se enfoca de la siguiente manera: se supone dentro de la discusión que la velocidad mantiene un signo constante a través de todo el canal, analizando así dos tipos particulares de movimiento: flujo puramente divergente cuando  $u > 0$  en cada punto, y flujo puramente convergente cuando  $u < 0$ .

Se muestra que en estos dos casos los coeficientes del polinomio son reales, de aquí que puedan haber una o tres raíces reales.

Como resultado de su análisis, Hamel obtiene que es posible un flujo divergente ( $u > 0$ ) sólo en los dos casos siguientes:

- a) Cuando sucede que  $0 \leq u \leq e_1$ , siendo las tres raíces del polinomio reales y tales que  $e_3 < 0$ ,  $e_2 \leq 0$  y  $e_1 > 0$ .

b) Y cuando existe sólo una raíz real  $e_1 > 0$  y la velocidad es tal que  $0 \leq u \leq e_1$ .

El flujo convergente ( $u < 0$ ) sólo será posible cuando  $e_2 \leq u \leq 0$ , siendo las tres raíces reales y tales que  $e_3 < 0$ ,  $e_4 < 0$  y  $e_1 \gg 0$ .

Para flujo divergente se considera que la velocidad como función del ángulo de abertura del canal  $u = u(\Theta)$  es simétrica respecto de  $\Theta = 0$  y por tanto es una función par; obteniendo como resultado que las aberturas posibles del canal dependen del valor máximo de la velocidad, para velocidades pequeñas pero viscosidades grandes el valor máximo de abertura se acerca a  $\pi$ , esto es, para que un flujo del tipo considerado, digamos divergente dentro de todo el canal, sea posible debe tenerse que el ángulo  $\Theta < \pi$ .

Para flujo convergente Hamel supone nuevamente que la función  $u = u(\Theta)$  es par, obteniendo por un lado que el ángulo de abertura del canal puede ser tan pequeño como se quiera.

En esta sección no se ha hecho un análisis detallado de la solución que Hamel propone ya que sólo analiza casos particulares de ésta como se verá en la sección que sigue.

## II.D SOLUCION GENERAL.

La solución que aquí se presenta fué dada por L. Rosenhead en 1939, y constituye el análisis más completo de la

ecuación diferencial y del tipo de soluciones matemáticamente posibles para el flujo entre planos no paralelos.

La ecuación de continuidad (ec. II.5) se satisface cuando:

$$r u = F(\theta).$$

Para adimensionar la función se divide el lado izquierdo entre  $2\nu$ , donde  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemático y sus dimensiones son  $[\nu] = L^2 T^{-1}$ , con  $L$  longitud y  $T$  tiempo, quedando la siguiente relación para la velocidad:

$$\text{II.28} \quad u(r, \theta) = \frac{2\nu F(\theta)}{r}.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en las ecuaciones de movimiento (ecs. II.6 y II.7) obtenemos un sistema de dos ecuaciones para la función  $F$  y la presión  $p$ , esto es:

$$\text{II.29} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2\nu^2}{r^3} (F'' + 2F'),$$

$$\text{II.30} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{4\nu^2}{r^2} F''.$$

Para obtener una expresión para la función angular  $F$ , eliminando a  $p$ , se deriva la ecuación II.29 con respecto a  $\theta$  y la ecuación II.30 con respecto a  $r$  y se restan, llegando a que:

$$\text{II.31} \quad F'''' + 4FF'' + 4F' = 0,$$

o integrando esta expresión:

$$\text{II.32} \quad F'' + 2F'^2 + 4F = -a,$$

multiplicando por  $F'$  e integrando nuevamente obtenemos:

$$\text{II.33} \quad F'^2 = -\frac{4}{b} F^3 - 4F^2 - aF + b,$$

donde ahora  $a = 2a$ ,. Estas constantes son reales puesto que están expresadas en términos de  $F$  que debe ser real, además, de las condiciones de frontera (ec. II.9) y de la forma de la velocidad (ec. II.28) se puede ver que cuando  $\theta = \pm a$  sucede que  $F(\theta = \pm a) = 0$ , esta condición en la ecuación II.33 nos dice que  $b$  es positivo, esto es:

$$\text{II.34} \quad b = (F')^2 \Big|_{\theta = \pm a} > 0.$$

Una de las ventajas del tratamiento de Hamel consiste en darse cuenta de que si definimos una nueva función  $f(\theta)$  por la relación:

$$\text{II.35} \quad F(\theta) = - \left\{ 3f(\theta) + 1 \right\},$$

la ecuación II.32 es equivalente a:

$$\text{II.36} \quad f'^2(\theta) = 4f^3 - g_2 f - g_3$$

y

$$g_2 = \frac{1}{3} (4 - a)$$

$$g_3 = \frac{1}{27} (8 - 3a - 3b),$$

donde ahora esta ecuación se puede identificar con la ecuación diferencial fundamental de la ecuación elíptica de Weierstrass <sup>1.21</sup>, siendo  $g_2$  y  $g_3$  sus invariantes, y cuya solución se expresa como:

$$f(\theta) = \wp(\theta - \theta_0)$$

$\theta_0$  es una constante de integración que puede ser compleja y  $g_1, g_2$  son reales ya que se definen en términos de  $a$  y  $b$ , que lo son. Para que la solución tenga sentido físico debe imponerse:

- i)  $\Phi(\theta - \theta_0)$  debe ser real para el intervalo de variación de  $\theta$ .
- ii)  $\theta_0$  debe ser tal que el campo de velocidades  $\bar{u}$ , que en términos de  $\Phi$  queda expresado como

$$\text{II.37} \quad u(r, \theta) = -\frac{2\nu}{r} \left\{ 3\Phi(\theta - \theta_0) + 1 \right\},$$

sea finito para cualquier valor de  $\theta$  en el intervalo considerado  $[-\alpha, \alpha]$ .

- iii) La condición de frontera  $u(r, \theta) = 0$  en  $\theta = \pm\alpha$  nos impone que  $F(\theta = \pm\alpha) = 0$ , o equivalentemente  $f(\pm\alpha) = -\frac{1}{3}$ . Como  $\Phi(z)$  es una función par, esta última condición se traduce en que

$\Phi(\alpha - \theta_0) = \Phi(\alpha + \theta_0)$ . Siendo  $\Phi$  doblemente periódica<sup>+</sup> y llamando  $2\omega_1$  y  $2\omega_2$  a sus periodos fundamentales, la igualdad puede cumplirse sólo cuando

$(\alpha - \theta_0) = \pm(\alpha + \theta_0) + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ , siendo  $m, n$  enteros, y de aquí que los valores que  $\theta_0$  y  $\alpha$  puedan tomar sean:

---

+ ver apéndice I para la definición.

II.38

$$\left. \begin{array}{l} \theta_0 \\ \alpha \end{array} \right\} = m\omega_1 + n\omega_3$$

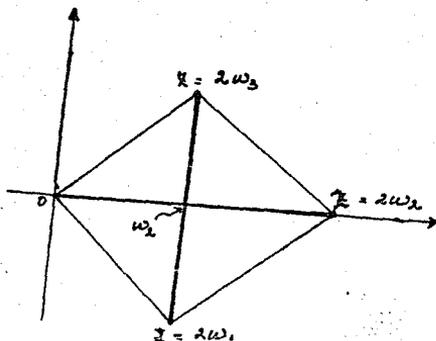
Los valores específicos que tomen  $\theta_0$  y  $\alpha$  determinan la función, y por consiguiente el perfil de velocidades, para lo cual se analizarán los siguientes casos en el polinomio cúbico de la ecuación II.36.

Sea  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  el discriminante del polinomio, entonces:

- (1)  $\Delta < 0$  Dado que  $g_2$  y  $g_3$  son reales, habrá una raíz real y dos complejas que son conjugadas.
- (2)  $\Delta > 0$  Las raíces del polinomio serán reales y diferentes.
- (3)  $\Delta = 0$  En este caso, puede ser que dos raíces sean iguales, o bien que las tres lo sean y son reales.

CASO (1).-  $\Delta < 0$

Los valores que la función  $\Phi(z)$  toma se pueden analizar mediante el paralelogramo de periodos fundamental que se construye en el plano complejo a partir de los periodos fundamentales. En el caso que estamos considerando, cuando el discriminante del polinomio es negativo, y puesto que  $g_2$  y  $g_3$  son reales, los periodos fundamentales de  $\Phi(z)$  son complejos conjugados [10], [12, cap. 18] y el paralelogramo formado con ellos constituye un rombo en donde sólo sobre sus diagonales la función puede tomar valores reales (ver fig. II.2).

Fig. II.2 Paralelogramo fundamental ( $\Delta < 0$ ).

No podemos identificar a  $\theta_0$  con  $\omega_1$  ni con  $\omega_3$  porque entonces el punto  $(\theta - \theta_0)$  no sería un punto sobre las diagonales y la función tomaría un valor complejo en ese punto. La única posibilidad es que  $\theta_0$  tome valores sobre la diagonal del eje real, se puede identificar entonces con  $\omega_2$ , donde  $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ . Teniéndose entonces que la solución cuando el discriminante es negativo es  $\wp(\theta - \omega_2)$ ; por la propiedad 2 del apéndice I se tiene:

$$\wp(\theta - \omega_2) = \frac{1}{4} \left| \frac{\wp'(\theta) - \wp'(-\omega_2)}{\wp(\theta) - \wp(-\omega_2)} \right|^2 - \wp(\theta) - \wp(\omega_2)$$

y ahora considerando las propiedades 3 a 8 del mismo apéndice, la ecuación anterior se reduce a:

$$\text{II.39} \quad \wp(\theta - \omega_2) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp(\theta) - e_2}$$

donde  $e_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) representa las raíces del polinomio cúbico ec. II.36 y se denotan como:  $e_1 = A + iB$ ;  $e_2 = -2A$ ,  $e_3 = A - iB$ . Si se define  $H \equiv 9A^2 + B^2 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$ , podemos expresar la solución en términos de las funciones elípticas de Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{II.40} \quad \Phi(\theta - \omega_2) &= -2A + \frac{H^2}{\Phi(\theta) + 2A} = \\ &= -2A + H \frac{1 - \operatorname{cn}(2\theta\sqrt{H})}{1 + \operatorname{cn}(2\theta\sqrt{H})} = \\ &= -2A + H \frac{\operatorname{sn}^2(\theta\sqrt{H}) \operatorname{dn}^2(\theta\sqrt{H})}{\operatorname{cn}^2(\theta\sqrt{H})}. \end{aligned}$$

De la condición de frontera:

$$\begin{aligned} \text{II.41} \quad f(\pm d) &= \Phi(\pm d - \omega_2) = -2A + H \frac{1 - \operatorname{cn}(2d\sqrt{H})}{1 + \operatorname{cn}(2d\sqrt{H})} = \\ &= -2A + H \frac{\operatorname{sn}^2(d\sqrt{H}) \operatorname{dn}^2(d\sqrt{H})}{\operatorname{cn}^2(d\sqrt{H})} = \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

entonces:

$$\text{II.42} \quad 0 \leq \frac{\operatorname{sn}^2(d\sqrt{H}) \operatorname{dn}^2(d\sqrt{H})}{\operatorname{cn}^2(d\sqrt{H})} = \frac{6A-1}{3H};$$

De esta desigualdad podemos ver que necesariamente  $6A - 1 \geq 0$  (se considera  $H > 0$ ), que es equivalente a  $e_2 \equiv -2A \leq -\frac{1}{3}$ . Esta condición nos dirá más acerca del perfil de velocidades ya que precisamente en el centro del canal, de la ec. (II.39), se tiene que  $f(\theta = 0) = e_2$  (pues  $\Phi(\theta)$  se hace infinito en el cero). Y

de la ec. (II.35)

$$\text{II.43} \quad F(\theta) \Big|_{\theta=0} = - \left\{ 3f(\theta) + 1 \right\} \Big|_{\theta=0} = - \left\{ 3a_2 + 1 \right\} = 6A - 1 > 0$$

por lo tanto,  $F$  es positiva en la línea central. Además  $f(\theta)$  es par dado que  $\varphi(\theta)$  lo es y entonces  $F(\theta)$  es par; por lo que el flujo será simétrico respecto a la línea central. De la figura (II.3) vemos que al aumentar  $\theta$  la función  $f$  aumenta por lo que  $F$  disminuye hasta que en el valor  $\theta = \alpha$ ,  $F = 0$ . Podemos concluir que para el caso en que el discriminante sea menor que cero el perfil de velocidades corresponde a un flujo puramente divergente y simétrico respecto a la línea central.

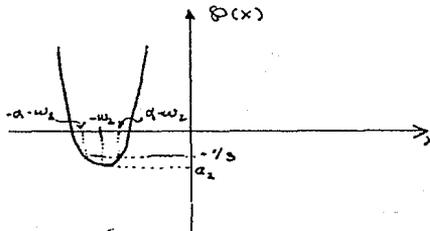


Fig. II.3 Forma de  $\varphi(x)$  cuando  $\Delta < 0$ , y  $x = \theta - \omega_2$ .

CASO (2).-  $\Delta > 0$

Supongamos que las raíces son diferentes y tales que:

$$\text{II.44} \quad a_1 > a_2 > a_3.$$

La función  $\varphi(z)$  en este caso contiene un periodo que es

puramente imaginario y otro que es real, el paralelogramo fundamental es ahora un rectángulo en el plano complejo (fig. II.4) donde la función toma valores reales sólo sobre las líneas de los períodos y las líneas intermedias.

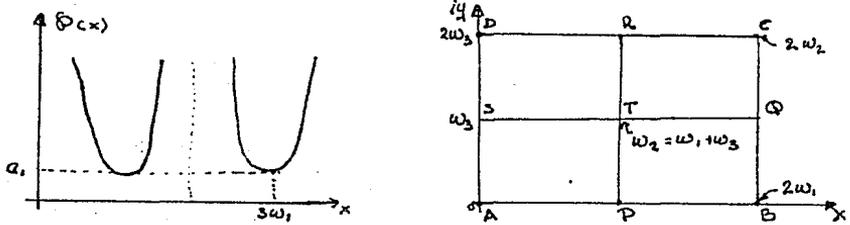


Fig. II.4 Gráfica y paralelogramo de  $Q(z)$  cuando  $\Delta > 0$ .

Sobre la línea real ( $APB$ ) la función siempre es positiva de tal forma que no podemos identificar a  $\Theta_0$  con  $\omega_1$  puesto que  $Q(\Theta - \Theta_0)$  tomaría valores sobre esa línea y no podría cumplirse la condición de frontera  $f(\Theta) \Big|_{\Theta=\alpha} = -\frac{1}{3} < 0$ .

Por lo tanto sólo tenemos los siguientes subcasos para  $\alpha$  y  $\Theta_0$ , esto es, que  $\Theta_0$  se identifique con  $\omega_3$  o con  $\omega_2$  y que como  $\alpha$  es real entonces debe ser múltiplo de  $\omega_1$  (par o impar).

CASO (2.i).-  $\Theta_0 = \omega_3$

La solución es  $Q(\Theta - \omega_3)$ , donde  $\Theta$  está en la línea real y  $\omega_3$  es imaginario puro; al hacer variar la  $\Theta$ ,  $z = \Theta - \omega_3$  cae sobre la línea  $STQ$  donde  $Q(z)$  efectivamente toma valores reales, de hecho en  $z = \omega_2$  ( $\Theta = 0$ ) toma el valor  $e_3$  aumenta monótonamente hasta que en  $z = \omega_2$

toma el valor  $e_2$  y disminuye monótonamente hasta que en  $Q$  vuelve a tomar el valor  $e_3^*$  entonces.

$$\text{II.45} \quad e_3 \leq \wp(\theta - \omega_3) \leq e_2, \quad (\theta \in [\alpha, \alpha]).$$

La relación anterior es una ecuación necesaria para que se cumpla la condición de contorno, y si

$$e_3 \leq -\frac{1}{3} \leq e_2$$

se satisface entonces la ecuación  $\wp(\alpha - \omega_3) = -\frac{1}{3}$  puede usarse para determinar el valor de  $\alpha$ , que resulta ser un número infinito como se verá después.

CASO (2.ii).-  $\theta_0 = \omega_2$ .

Nuevamente de la condición de frontera

$$\text{II.46} \quad \wp(\alpha - \omega_2) = \wp(\alpha - (\omega_1 + \omega_2)) - \wp(\alpha - \omega_1 - \omega_2) = -\frac{1}{3}$$

vemos de la fig. II.4 que el argumento de  $\wp$  cae sobre la línea  $STQ$  (donde  $\wp$  toma valores reales), ya que  $\text{Im}(\alpha - \omega_2) = -\text{Im}(\omega_2) = -\omega_3$  y usando el mismo argumento que en el caso (2.i) debe satisfacerse que

$$e_3 \leq -\frac{1}{3} \leq e_2$$

aunque la ec. II.46 no tendrá una solución única. Analicemos ahora los valores que  $\alpha$  pueda tener.

---

\* Markushevich (págs. 366 y 367).

CASO (2.iii).-  $\alpha = (2n + 1)\omega_1$ .

Si  $\alpha$  es un múltiplo impar de  $\omega_1$ , para que  $\Phi(\theta - \theta_0)$  esté en este caso sobre la línea STQ y tome valores reales es necesario que la  $\text{Im } \theta_0 = \omega_3$ . Sea entonces  $\theta_0 = \alpha_0 + \omega_3$ ,  $\alpha_0$  un número real, ( $\omega_3$  es un número imaginario puro); de la condición de contorno obtenemos la ecuación para  $\alpha_0$ :

$$\begin{aligned} \text{II.47} \quad \Phi((2n+1)\omega_1 - (\alpha_0 + \omega_3)) &= \Phi(-(\alpha_0 - \omega_1) - \omega_3) = \\ &= \Phi(\alpha_0 - \omega_1 - \omega_3) = \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

igual que en los casos anteriores debe cumplirse que:

$$a_3 \leq -\frac{1}{3} \leq a_2$$

CASO (2.iv).-  $\alpha = 2n\omega_1$ .

Haciendo un análisis como en el caso anterior donde  $\theta_0 = \alpha_0 + \omega_3$ , debe cumplirse que  $e_3 \leq -\frac{1}{3} \leq e_2$ , siendo la ecuación para  $\alpha_0$  dada por:

$$\text{II.48} \quad \Phi(\alpha_0 - \omega_3) = -\frac{1}{3}$$

Poniendo atención en los cuatros subcasos podemos notar que la condición  $e_3 \leq -\frac{1}{3} \leq e_2$  debe satisfacerse en general para asegurar soluciones reales, y que la condición de frontera en todos los casos es de la forma  $\Phi(\eta - \omega_3) = -\frac{1}{3}$ . Todos los casos pueden ser analizados en conjunto usando el siguiente método: sean

$$\text{II.49} \quad X = a_1 - a_3 \quad ; \quad X^2 = a_2 - a_1$$

entonces, por la relación II.44,  $x$  y  $k^2x$  son siempre positivas. Expresando las raíces del polinomio en términos de estas variables tenemos

$$\text{II.50} \quad y \quad a_1 = \frac{1}{3}(2 - k^2)x; \quad a_2 = \frac{1}{3}(2k^2 - 1)x; \quad a_3 = -\frac{1}{3}(1 - k^2)x$$

$$w_1 = Kx^{-1/2}$$

donde

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}; \quad w_1 = K(k^2)(a_1 - a_3)^{-1/2}$$

es la integral elíptica de primera clase y  $k^2$  es su módulo\* [11].

Utilizando el teorema de adición para la función  $\wp(\eta - \omega_3)$  y la relación de  $\wp(\eta)$  con las funciones elípticas de Jacobi en el caso en que el discriminante sea mayor que cero, la ecuación de contorno toma la forma:

$$\text{II.51} \quad \wp(\eta - \omega_3) = a_3 + (a_2 - a_3) \operatorname{sn}^2 \left\{ \eta \sqrt{(a_1 - a_3)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}x \left\{ 3k^2 \operatorname{sn}^2(\eta \sqrt{x}) - 1 - k^2 \right\} = -1/3$$

Se obtiene así una ecuación para  $\eta$  dada por

$$\text{II.52} \quad \operatorname{sn}^2(\eta \sqrt{x}) = \frac{(1+k^2)x - 1}{3k^2x}$$

y la condición que asegura que existen raíces reales se trans forma en

$$-(1+k^2)x \leq -1 \leq (2k^2 - 1)x$$

---

\* Abramowitz & Stegun (págs. 649 y 590).

que dependiendo si  $k^2$  es mayor o menor que  $\frac{1}{2}$  puede expresarse como:

$$\text{II.53} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k^2 < \frac{1}{2} : x \in \left[ \frac{1}{1+k^2}, \frac{1}{1-k^2} \right], \\ \text{si } k^2 > \frac{1}{2} : x \in \left[ \frac{1}{1+k^2}, \infty \right), \end{array} \right.$$

Si  $\eta_1$  es una raíz real de II.51, por la periodicidad de la función tendremos que habrá un infinito de soluciones, a saber:

$$\text{II.54} \quad \begin{array}{ll} \eta_2 = 2\omega_1 - \eta_1, & \eta_3 = 2\omega_1 + \eta_1 \\ \eta_4 = 4\omega_1 - \eta_1, & \eta_5 = 4\omega_1 + \eta_1, \dots \text{ etc.} \end{array}$$

arregladas en orden creciente donde  $\eta_1$ , la raíz más pequeña es menor que  $\omega_1$ . Regresando a los subcasos anteriores tenemos:

CASO (2.1):  $\Theta = \omega_3$ .

La solución es  $\Phi(\Theta - \omega_3) = \Phi(-\Theta - \omega_3)$ , por lo tanto el flujo es simétrico alrededor de  $\Theta = 0$ ; en este punto de la ecuación II.35 tenemos que  $F(\Theta = 0) = -\{3e_3 + 1\}$  y de la relación II.50 para  $e_3$  tenemos que  $F(\Theta = 0) = (1 + k^2)x$  que es positivo. Por lo tanto el flujo es divergente sobre la línea central y simétrico. Sobre la línea STQ del paralelogramo fundamental (fig. II.4) la función se comporta como lo muestra la siguiente gráfica+:

+ Markushevich (pág. 368).

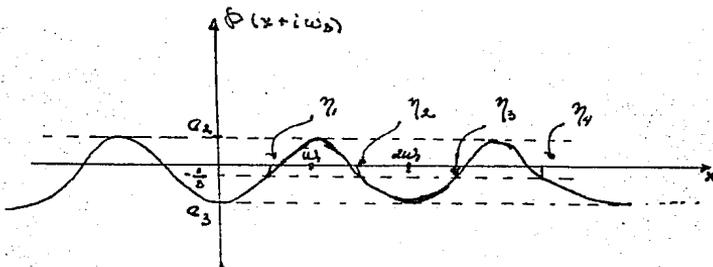


Fig. II.5.-  $\Delta > 0$  ( $e_2 \leq -\frac{1}{3} \leq e_2$ ).

- a)  $\alpha = \eta_1$  (como el flujo es simétrico se analizará sólo cuando  $\theta \in [0, \alpha]$ ). Para  $\theta = 0$ ,  $F > 0$ ,  $\Phi(\omega_2) = e_2$  al aumentar  $\theta$ ,  $\Phi(\theta - \omega_2)$  aumenta, por tanto  $F$  disminuye hasta que en  $\theta = \eta_1$  toma el valor cero. El flujo será puramente divergente, como se muestra en la fig. II.6.

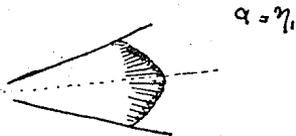


Fig. II.6. Perfil de velocidad cuando  $\alpha = \eta_1$ .

- b)  $\alpha = \eta_2$  ( $= 2\omega_2 - \eta_1$ ).

Empezando el análisis en  $\theta = 0$  (punto  $e_2$  de la gráfica), al aumentar  $\theta$ ,  $\Phi(\theta - \omega_2)$  aumenta, y  $F$  disminuye, pero al llegar a  $\theta = \eta_1$ ,  $\Phi = -\frac{1}{3}$  y consecuentemente  $F$  es cero; para valores mayores que  $\eta_1$ ,  $3\Phi - 1 > 0$  y  $F < 0$  hasta que en  $\theta = \eta_2$  es cero. Obteniéndose un flujo divergente sobre la línea central con regiones simétricas de flujo convergente sobre

esa línea, como en la fig. II.7.

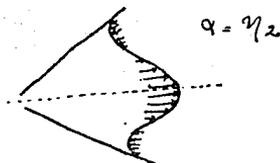


Fig. II.7. Perfil de velocidad cuando  $\alpha = \eta_2$ .

El análisis para los casos en que  $\alpha$  toma los valores  $\eta_3$ ,  $\eta_4$ , etc. es similar obteniéndose los perfiles de velocidad que se muestran en la fig. II.8.

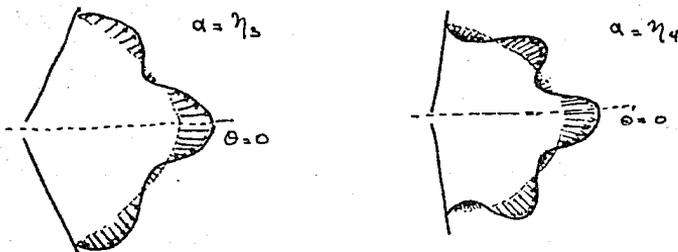


Fig. II.8. Perfiles de velocidad cuando  $\alpha = \eta_3$  y  $\alpha = \eta_4$ .

CASO (2.ii):  $\Theta = \omega_2$ .

Se puede hacer un análisis análogo al caso anterior pero ahora considerando que sobre la línea central  $F$  es negativo, ya que  $F(\Theta = 0) = -(1 + 3e_2) = \{ (1 - 2k^2)x - 1 \}$  que es siempre negativo, además es simétrico sobre la misma línea puesto que  $\hat{F}(\Theta - \omega_2) = \hat{F}(-\Theta - \omega_2)$ . De la condición de fron

tera II.46 vemos que  $\alpha$  puede tomar cualquiera de los valores:  $\omega_1 - \eta_1$ ,  $\omega_1 + \eta_1$ ,  $\omega_1 + \eta_2$ , etc. correspondiendo a un flujo puramente convergente en el primer caso; a un flujo convergente en la línea central con regiones simétricas de flujo divergente en el segundo caso, etc.; de hecho la forma de los perfiles de velocidad pueden visualizarse si multiplicásemos por menos uno los perfiles del caso anterior, y se muestran en la fig. II.9.

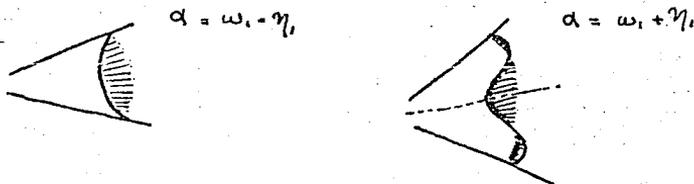


Fig. II.9. Perfil de velocidad.

CASOS (2.iii) y (2.iv).

En ambos casos  $\theta_0$  debe ser de la forma  $\alpha_0 + \omega_3$  siendo la solución  $\Phi((\theta - \alpha_0) - \omega_3)$  que es diferente a cuando se evalúa en  $-\theta$ , por tanto el flujo no es simétrico. Las condiciones de contorno dan diferentes ecuaciones para  $\alpha$  dependiendo si ésta es múltiplo par o impar de  $\omega_1$  (ecs. II.47 y II.48).

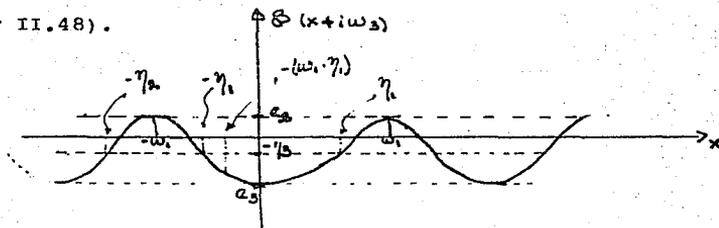


Fig. II.10. Gráfica de  $\Phi(z)$ .

a)  $\alpha = \omega_1$ .

Si  $\alpha$  es múltiplo impar de  $\omega_1$ , podemos identificar de la condición de contorno II.47 a  $\alpha_0$  con

$$\alpha_0 = \pm (\omega_1 - \eta_1)$$

llamando a  $z = ((\theta - \alpha_0) - \omega_3)$ , hemos denotado a  $[-\alpha, \alpha]$  el intervalo de variación de la función  $F(\theta)$ , que sobre la gráfica de la fig. (II.10) corresponde al intervalo  $[\eta_1, -\eta_2]$  donde  $R_z$  puede variar\*, ya que

$$\theta = \alpha : R_z \tilde{z} = \alpha - \alpha_0 = (\omega_1) - (\omega_1 - \eta_1) = \eta_1,$$

$$\theta = -\alpha : R_z \tilde{z} = -\alpha - \alpha_0 = -\omega_1 - (\omega_1 - \eta_1) = -2\omega_1 + \eta_1 = -\eta_2,$$

esto es, la función  $F(\theta)$  es cero cuando  $\alpha$  toma los valores  $\eta_1$  y  $-\eta_2$ . Además cuando  $\theta = 0$ , el punto medio del canal, corresponde al punto  $-(\omega_1 - \eta_1)$  sobre la gráfica; de tal forma que si nos empezamos a mover desde el punto  $\eta_1$  (donde  $F(\theta = \alpha) = 0$ ) hacia la izquierda, recordando que cuando  $\Phi(z) < -\frac{1}{3}$  entonces  $F(\theta) > 0$  (flujo divergente), la función  $F$  disminuye hasta el punto  $e_3$  y consecuentemente  $F$  aumenta monótonamente, a partir de ése punto (que no corresponde a  $\theta = 0$ ) comienza  $\Phi$  a aumentar y  $F$  a disminuir hasta que en  $\Phi(z) = -\frac{1}{3}$ ,  $F$  es cero, a la izquierda de ese punto ( $\Phi(z) > -\frac{1}{3}$ ) la función  $F(\theta) < 0$  (flujo con-

---

\* hemos supuesto que  $\alpha_0 = +(\omega_1 - \eta_1)$ .

vergente) y sigue disminuyendo hasta el punto  $-\omega$ , y a partir de él aumenta hasta que en  $-\eta_2$  se hace cero. Obteniéndose un flujo asimétrico respecto de la línea central con una región de flujo divergente y otra región de flujo convergente. El análisis se hizo considerando el signo positivo para  $\alpha$ , si ahora consideramos el signo negativo y variamos  $\theta$  desde  $\alpha$  a  $-\alpha$ , recorreremos la gráfica hacia la derecha desde  $-\eta_2$  hasta  $\eta_1$ , obteniendo primero una región de flujo convergente seguida de otra región de flujo divergente. Los perfiles de velocidad para los dos casos se muestran en la siguiente figura:

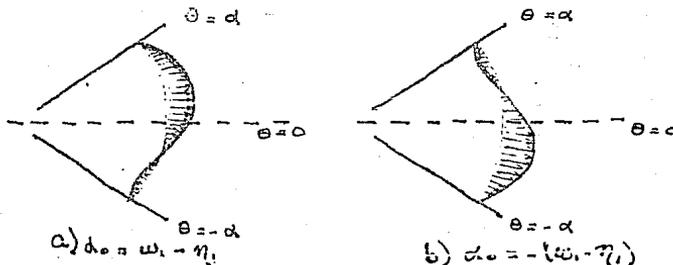


Fig. II.11. Perfiles de velocidad considerando  $\alpha = \omega_1$ .

b)  $\alpha = 2\omega_1$ .

Si ahora  $\alpha$  es múltiplo par de  $\omega_1$ , de la ecuación II.48 para  $\alpha$ , podemos identificarla con:

$$\alpha = \pm \eta_1$$

el intervalo de variación en la gráfica va desde  $\eta_2$  hasta  $-\eta_3$  ya que considerando el signo positivo para

$\alpha$ , en

$$\theta = \alpha : \operatorname{Re} z = 2\omega_1 - \eta_1 = \eta_2,$$

$$\theta = -\alpha : \operatorname{Re} z = -(2\omega_1 + \eta_1) = -\eta_3;$$

haciendo un análisis en la gráfica (II.12) como en el

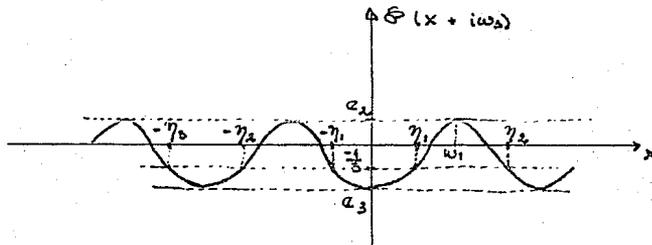


Fig. II.12. Gráfica de  $\Phi(z)$  cuando  $\alpha = 2\omega_1$ .

caso anterior, se puede ver que si recorremos la curva hacia la izquierda desde  $\eta_2$ , en el intervalo  $[\eta_2, \eta_1]$  habrá una región de flujo convergente ( $3\Phi + 1 > 0$ ) seguida de una región de flujo divergente ( $\Phi < -\frac{1}{3}$ ) en el intervalo  $[\eta_1, -\eta_1]$ , otra región de flujo convergente en  $[-\eta_1, -\eta_2]$  y finalmente una región de flujo divergente en  $[-\eta_2, -\eta_3]$  donde  $F$  será cero cuando alcancemos el punto  $-\eta_3$ . En el otro caso cuando  $\alpha = -\eta_1$ , recorreremos la curva hacia la derecha empezando en  $-\eta_3$  y terminando en  $\eta_2$ . Los perfiles de velocidad en estos dos únicos casos se presentan abajo:

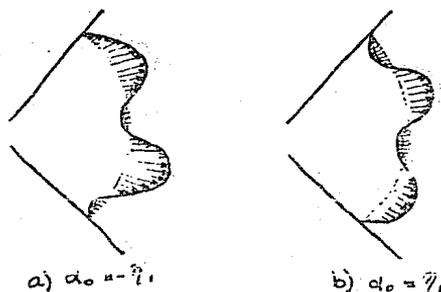


Fig. II.13. Perfiles de velocidad cuando  $\alpha = 2\omega_1$ .

Podría seguirse analizando los casos en donde  $\alpha$  toma los valores  $3\omega_1$ ,  $4\omega_1$ ,  $5\omega_1$ , etc. en todos ellos el flujo será asimétrico respecto de la línea central y las regiones de flujo convergente y divergente aumentarán conforme consideremos múltiplos de  $\omega_1$  cada vez mayores.

### CASO (3).- $\Delta = 0$ .

Habiendo analizado las soluciones en los casos en que el discriminante fuera diferente de cero, y habiendo visto que podían ser expresadas en términos de funciones elípticas, ahora en el caso degenerado ( $\Delta = 0$ ) las soluciones no serán unas funciones elípticas. Cuando el discriminante es cero puede haber dos raíces iguales o que las tres raíces del polinomio cúbico lo sean, sin embargo en este último caso cuando  $e_1 = e_2 = e_3$  la ecuación para  $f$  es

$f'^2(\theta) = 4f^3$  y de la ec. II.35,  $F'^2(\theta) = -\frac{4}{3} \{F(\theta) + 1\}^2$ ,  
 se llega a una inconsistencia pues sobre las fronteras tenemos que el cuadrado de la función en ese punto es negativo:  
 $F'^2(\theta)|_{\theta_2 \pm d} < 0$ , por lo que este caso no tendrá una interpretación física. Como la suma de las raíces debe ser cero, al menos dos de ellas deben tener signos opuestos, consideremos que  $e_1 > 0$  y que  $e_2 = e_3 < 0$  en cuyo caso la ecuación diferencial para  $f$  es de la forma  
 $f'^2(\theta) = 4(f - e_1)(f + \frac{1}{2}e_1)^2$ , y de la ec. II.35,  
 $F'^2(\theta) = -\frac{4}{3}(F + 1 + 3e_1)(F + 1 - \frac{3}{2}e_1)^2$ , teniéndose como antes que sobre las fronteras  $F'^2(\theta)|_{\theta_2 \pm d} < 0$ , a menos que  $e_1 = \frac{2}{3}$  en cuyo caso la única solución posible es  $F = 0$ , o sea que la velocidad del flujo es cero. El último caso es cuando tenemos dos raíces iguales y positivas que será analizado a continuación:

Supongamos que  $e_1 = e_2 > 0$ , entonces  $-e_3 = 2e_1$ , la ecuación para  $f$  será:

$$\text{II.55} \quad f'^2(\theta) = 4(f - a_1)(f - a_2)(f - a_3) = 4(f - a_1)^2(f + 2a_1),$$

y de la relación de  $f$  y  $F$  (ec. II.35):

$$\text{II.56} \quad F'^2(\theta) = \frac{4}{3}(F + 1 + 3a_1)^2(6a_1 - 1 - F);$$

cuando evaluamos esta última ecuación sobre las fronteras en donde  $F = 0$  vemos que sólo cuando  $(6e_1 - 1)$  es positivo no habrá inconsistencia, esto es, las raíces idénticas deben ser mayores que  $\frac{1}{6}$  para garantizar una solución físicamente

aceptable. Llamemos a  $\lambda \equiv 6e, -1$  donde  $\lambda$  es positivo, entonces la ec. II.56 toma la forma:

$$\text{II.57} \quad \frac{dF}{d\theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (2F + \lambda + 3)(\lambda - F)^{1/2}.$$

Si en la ecuación anterior consideramos el signo positivo entonces en los extremos del intervalo de variación la pendiente de la función  $F$  es positiva, en otras palabras, en una vecindad pequeña alrededor de  $-\alpha$ ,  $F$  necesariamente es positiva; y en puntos cercanos a  $\alpha$ ,  $F$  debe ser negativa. Debe existir un punto en este intervalo, digamos  $\theta'$ , en donde la pendiente de la función sea cero y  $F$  en ese punto sea negativa. De la ec. (II.57) vemos que la derivada se anula en  $\lambda$  y  $-\left(\frac{\lambda+3}{2}\right)$ , entonces  $F(\theta') = -\left(\frac{\lambda+3}{2}\right)$ . La solución a la ec. (II.57) es:

$$\text{II.58} \quad \sqrt{3} \int \frac{dF}{(2F + \lambda + 3)(\lambda - F)^{1/2}} = -\left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^{1/2} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{2(\lambda-F)}{3(\lambda+1)}} \right)$$

si la integral se realiza sobre el intervalo  $[\alpha, \theta]$ , la solución que satisface la condición de frontera en  $\theta = \alpha$  es:

$$\text{II.59} \quad \tanh^{-1} \left( \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2} - \left( \frac{1+\lambda}{2} \right)^{1/2} (\theta - \alpha) = \tanh^{-1} \left( \frac{2(\lambda-F)}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2}$$

y de aquí podemos ver que si la función toma el valor  $F = -\frac{\lambda+3}{2}$  entonces el punto  $\Theta'$ , correspondiente a este valor, tiende a  $-\infty$  lo cual es imposible ya que el rango de variación de la función es un intervalo finito; se descarta entonces la posibilidad de considerar el signo positivo en II.57.

Tomando para la ecuación el signo negativo, la solución es:

$$\text{II.60} \quad \tanh^{-1} \left( \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2} + \left( \frac{1+\lambda}{2} \right)^{1/2} (\Theta - \alpha) = \tanh^{-1} \left( \frac{2(\lambda-F)}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2}$$

la función es decreciente en una vecindad pequeña de  $\alpha$  y también lo es para una vecindad de  $-\alpha$ , existe un punto  $\Theta''$ , donde la pendiente se anula, que es justo cuando  $F(\Theta'') = \lambda$ , en la ecuación II.60 se tiene cuando integramos de  $\Theta''$  a  $\alpha$ :

$$\Theta'' = \alpha - \left( \frac{2}{1+\lambda} \right)^{1/2} \tanh^{-1} \left( \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2},$$

si ahora evaluamos de  $-\alpha$  a  $\Theta''$  la solución II.60 obtenemos:

$$-\Theta'' = \alpha - \left( \frac{2}{1+\lambda} \right)^{1/2} \tanh^{-1} \left( \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2},$$

de aquí que  $\Theta''$  debe ser cero, y por lo tanto,

$$\text{II.61} \quad \alpha = \left( \frac{2}{1+\lambda} \right)^{1/2} \tanh^{-1} \left( \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} \right)^{1/2}.$$

Puede demostrarse que el valor máximo de la función

ocurre en  $\lambda$ , y es precisamente en el centro del canal cuando  $\Theta = 0$ .

Resumiendo del análisis anterior tenemos que cuando el discriminante del polinomio cúbico (ec. II.36) es negativo el flujo será siempre puramente divergente y simétrico respecto de la línea central; cuando el discriminante es positivo el flujo puede ser puramente divergente (caso 2.i) o divergente sobre la línea central con regiones de flujo convergente; puramente convergente (caso 2.ii) o convergente sobre la línea central con regiones divergentes y en estos casos ser simétrica, o puede contener regiones de flujo convergente y divergente y ser asimétrica (caso 2.iii y 2.iv).

En los resultados obtenidos por Jeffery y Hamel aunque se menciona que la solución se puede expresar en término de funciones elípticas no se hace un análisis detallado, así que estos resultados son casos particulares de la solución general discutida por Rosenhead.

A pesar de que en el trabajo de Jeffery no se menciona, se puede pensar que implícitamente supone que las raíces del polinomio son reales ya que las constantes  $k^2$  y  $m^2$  que usa las considera como números reales (ec. II.18). Su solución corresponde al caso cuando el discriminante es mayor que cero en el análisis de Rosenhead, donde se hace la siguiente identificación; del caso (2.ii) analizado por Rosenhead:

$$\Phi(\theta - \omega_1) - \omega_3 = e_3 + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2 \left\{ (\theta - \omega_1) \sqrt{a_1 - a_3} \right\}$$

y de la ecuación II.35:

$$F(\theta) = - \left\{ 3 \epsilon_3 + 3 (\epsilon_2 - \epsilon_3) \operatorname{sn}^2 \left\{ (\theta - \omega_1) \sqrt{a_1 - \epsilon_3} + 1 \right\} \right\} e$$

La función de corriente se relaciona con la primera componente de la velocidad por

$$U = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

y por la ecuación II.28  $u(r, \theta) = \frac{2\psi F(\theta)}{r}$

comparándolas obtenemos:  $F(\theta) = -\frac{1}{2\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ ; que resulta cierta cuando se identifican las constantes  $m^2$  y  $k^2$  usadas por Jeffery con las raíces reales y diferentes como:

$$1 - m^2 - m^2 k^2 = 3 \epsilon_3 + 1$$

$$3 m^2 k^2 = 3 (\epsilon_2 - \epsilon_3)$$

$$1 m l (\theta - \theta_0) = (\theta - \omega_1) \sqrt{a_1 - \epsilon_3} + 2 \eta.$$

Por otro lado, Hamel logra identificar la velocidad en términos de la función elíptica de Weierstrass (ec. II.27), sin embargo dado que hace hipótesis adicionales sobre el tipo de flujo encuentra sólo la solución para los flujos puramente convergente y puramente divergente, analizado en las secciones (2.i) y (2.ii) por Rosenhead en el caso cuando el discriminante es positivo.

Las afirmaciones que se encuentran en los libros de tex to respecto al problema difieren entre sí y en algunos casos difieren de los resultados que Rosenhead encontró, y que principalmente son los siguientes:

"Para cada par de valores de  $\alpha$  y  $R$ , el número de perfiles de velocidad matemáticamente posibles es infinito" (33).

"Estos perfiles pueden o no ser simétricos respecto a la línea central del canal" (34).

"Si  $\frac{1}{2} \pi < \alpha < \pi$  ocurre que:

- a) El flujo puramente divergente es imposible.
- b) Existe sólo un intervalo de valores de números de Reynolds pequeños en el cual es imposible el flujo puramente convergente" (35).

Sin embargo, en el libro de Batchelor <sup>13)</sup> se menciona que cuando  $\alpha > \pi$  es entonces cuando el flujo puramente divergente no existe, y aún más, encuentra una restricción sobre la intensidad del flujo y el ángulo de abertura para que pueda existir este tipo de flujo.

En el libro de Landau <sup>15)</sup> se afirma que el flujo puramente convergente existe para cualquier ángulo  $\alpha < \pi$  independientemente del valor de  $R$ .

"El efecto de aumentar  $R$  en un flujo divergente provoca progresivamente que los tipos de flujo posibles sean cada vez más complicados, aumentando las regiones de flujo divergente y convergente. A diferencia del anterior, en un flujo convergente no aparecen regiones de flujo divergente cuando  $R$  varía".

Batchelor en su análisis dice que aparentemente el flujo hacia adentro puede estar acotado por una región delgada

de flujo hacia afuera en ambas paredes, contrariamente a lo que afirma Rosenhead.

Todos los autores están de acuerdo en que para números de Reynolds grandes debe distinguirse el caso de flujo divergente del de flujo convergente; cuando  $R$  es pequeño, los dos tipos de flujo presentan las mismas características, la distribución de la velocidad es análoga a la de un movimiento entre paredes paralelas, si el ángulo  $\alpha$  es pequeño, la distribución de la velocidad es parabólica.

Cuando  $R$  aumenta el flujo convergente difiere poco de un flujo potencial salvo entre dos capas adyacentes a las dos paredes, los perfiles de velocidad exhiben todas las características de la capa límite\* cerca de las paredes y una velocidad aproximadamente constante en el resto del canal. El flujo divergente difiere mucho del flujo potencial cuando  $R$  crece, contrariamente al caso anterior la curva de la velocidad se vuelve cada vez más pronunciada en la parte central donde casi la totalidad del flujo está concentrado, hasta que finalmente aparecen regiones convergentes, primero cerca de las paredes.

De todo el análisis descrito en este capítulo sólo podemos decir los tipos de flujo que son matemáticamente posibles, pero no nos indica cuáles tipos son los que finalmente presenta el fluido cuando queremos observarlos. Experimentalmente se tienen evidencias <sup>113]</sup> de que aún hasta una abertura de canal de  $4^\circ$  un flujo simétrico, ya sea convergente o

\* Ver por ejemplo S. Goldstein (referencia 7) para este concepto.

divergente, es estable. Para  $5^\circ$ ,  $6^\circ$  y  $8^\circ$  el flujo es mixto y asimétrico alrededor del plano medio; de un flujo divergente comienza a ocurrir una separación en una región convergente justamente a los  $5^\circ$  en una de las paredes, para  $5^\circ$  y  $6^\circ$  no hay una tendencia aparente para que la separación ocurra en la segunda pared, y el flujo asimétrico una vez establecido parece ser bastante estable. A  $8^\circ$  aparece una tendencia para que esta distribución asimétrica cambie de una pared a la otra, es decir, que la región de flujo convergente aparezca en una pared o la otra; cada configuración se mantiene por algún tiempo, el suficiente para permitir que las medidas sean tomadas antes de que el cambio ocurra.

## CAPITULO III

## ANALOGIA MECANICA DEL PROBLEMA HIDRODINAMICO

## Introducción.

En este capítulo se encontrarán las soluciones a la ec. (II.32) analizando el problema desde otro punto de vista; en el capítulo II se mostró cómo a partir de la ecuación de continuidad podemos escribir la velocidad del fluido en términos del inverso de la distancia al origen y de una función que depende sólo del ángulo medido desde la línea media del canal al punto en cuestión, y que eliminando la presión de las ecuaciones de movimiento obtenemos la ecuación diferencial para esta función; resolviéndola fué posible encontrar el perfil de velocidades cuando tomamos  $r = \text{cte.}$  y variamos el ángulo de  $-\alpha$  a  $\alpha$ , resultando ser un conjunto infinito de soluciones para una ecuación sujeta a condiciones a la frontera.

Podemos sin embargo interpretar la ecuación diferencial de  $F(\theta)$  como la ecuación que rige el movimiento de una partícula en un pozo de potencial que está sujeta a condiciones iniciales. Se intentará entonces dar solución a este problema y buscar aquellas soluciones físicamente aceptables, que en este caso, serán aquellas que cumplan también las condiciones a la frontera impuestas por el planteamiento hidrodinámico.

El problema en sí no ha variado, se tiene que resolver la misma ecuación diferencial de segundo orden no lineal, la ventaja ahora es que el tratamiento del problema se hará dentro del marco de la Mecánica Clásica, donde es más claro el tipo de soluciones posibles, dentro del análisis se verá también cómo la solución al problema no es única.

### III.A PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA MECANICO.

Recordando que la velocidad en coordenadas polares es de la forma  $\dot{u}(r, \theta) = \dot{e}_r \frac{A\sqrt{F}(\theta)}{r}$ , donde A es una constante (que en el análisis hecho por Rosenhead era igual a dos para facilitar la identificación con la función elíptica de Weierstrass); sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de movimiento se obtiene la ecuación diferencial para F dada por:

$$\text{III.1} \quad F''(\theta) + A^2 F^2(\theta) + 4F = a', \quad a' = c/t^2.$$

En analogía con las variables usadas en Mecánica clásica vamos a hacer el siguiente cambio de variable:

$$\text{III.2} \quad x = F; \quad t = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\theta}{\alpha} \right),$$

como el ángulo  $\theta$  varía de  $-\alpha$  a  $\alpha$ , el intervalo de variación de la nueva variable  $t$  será  $[0, 1]$ , y las condiciones de frontera se traducen para  $x$  en:

$$\text{III.3} \quad x(0) = x(1) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

La ecuación equivalente a III.1 sujeta a las condicio

nes III.3 será:

$$\text{III.4} \quad \ddot{x}(t) = 4a^2(a - 4x - Ax^2),$$

donde  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ , y que representa la ecuación de movimiento de una partícula de masa unitaria que se mueve en un campo de fuerzas conservativas dadas por  $4a^2(a - 4x - Ax^2)$ , cuyo potencial está dado por:

$$V(x) = 4a^2 \left( \frac{A}{3} x^3 + 2x^2 - a'x \right) + b'.$$

Como el cero del potencial es arbitrario tomaremos  $b' = 0$  y definimos  $\omega \equiv 2a$  ( $\omega$  es el ancho total del canal),  $\frac{a'}{2} = a$  y  $A = 6$  para facilitar los cálculos posteriores, entonces:

$$\text{III.5} \quad V(x) = 2\omega^2 (x^3 + x^2 - ax).$$

El campo de fuerzas es conservativo puesto que se deriva de un potencial y se tiene que la energía total es constante, esto es:

$$\text{III.6} \quad E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{cte.},$$

la constante la determinaremos evaluando en  $t = 0$ , teniendo en cuenta,

$$\text{III.7} \quad E = \frac{1}{2} \dot{x}^2(0).$$

El problema en el que estamos interesados es el de una partícula de masa unitaria que se encuentra sujeta a un potencial  $V(x)$ , y queremos saber cuáles son las trayectorias

tales que en  $t = 0$  y para  $t = 1$  la partícula se encuentra en el origen. Conviene analizar la forma de este potencial para ver en forma cualitativa el tipo de soluciones que podemos esperar, para ello se evaluarán los ceros y los puntos críticos ó valores extremos.

### III.B ANALISIS CUALITATIVO.

De la ecuación (III.5) vemos que las raíces del polinomio son:

$$\text{III.8} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ X_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a} \end{array} \right.,$$

entonces, si:

$a \in (-\infty, -\frac{1}{4})$ , la única raíz real es el cero.

$a = -\frac{1}{4}$ , habrá dos raíces reales, una simple en  $x = 0$  y una raíz doble en  $x = -\frac{1}{2}$ .

$a \in (-\frac{1}{4}, 0)$ , hay tres raíces reales, dos de ellas diferentes de cero y negativas.

$a = 0$ , hay una raíz doble en  $x = 0$  y una simple en  $x = -1$ .

$a > 0$ , hay tres raíces reales, dos de ellas diferentes de cero y de signos opuestos.

Además, de la forma del potencial se puede ver también que cuando  $x \rightarrow -\infty$  entonces  $V(x) \rightarrow -\infty$ , y que  $V(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

Para encontrar los puntos críticos del potencial tomamos

su derivada e igualándola a cero, obtenemos:

$$\frac{dV}{dx} = 2\omega^2 (3x^2 + 2x - a) = 0$$

cuando

$$\text{III.9} \quad x_{\pm} = \frac{1}{3} [-1 \pm \sqrt{1 + 3a}].$$

Tenemos entonces de lo anterior y del análisis de la 2ª derivada que si:

$a < -\frac{1}{3}$ , no hay puntos críticos del potencial.

$a = -\frac{1}{3}$ , existe un sólo punto crítico en  $x = -\frac{1}{3}$ .

$-\frac{1}{3} < a < 0$ , existen dos puntos críticos negativos.

$a = 0$ , existen dos puntos críticos, el 0 y el  $-\frac{2}{3}$ , el primero es un mínimo y el segundo un máximo.

$a > 0$ , existen dos puntos críticos, un máximo y un mínimo con signos opuestos.

En el caso en que  $a > -\frac{1}{3}$  existirán dos puntos críticos dados por la ec. (III.9), evaluándolos en la segunda derivada del potencial se demuestra que el valor de  $x_+$  corresponde a un mínimo y  $x_-$  es un máximo, y dado que  $x_+ > x_-$ , el mínimo siempre ocurrirá a la derecha del máximo.

El análisis anterior se resume en las gráficas presentadas en la Fig. (III.1), cabe hacer notar que la localización de los puntos críticos y de los ceros del potencial son independientes del ancho del canal, por lo que en las gráficas que se presentan se ha tomado  $2\omega^2 = 1$ , el efecto de considerar esta constante diferente de uno será sólo el de variar la escala sobre el eje vertical.

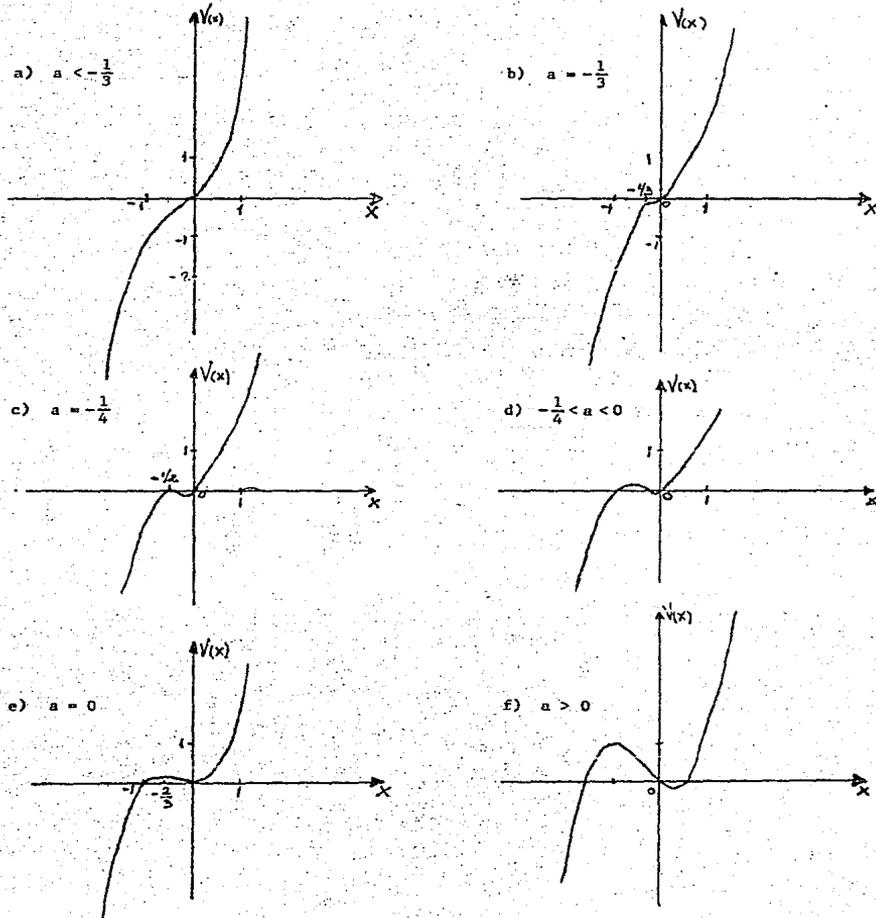


FIG. (III.1).- Gráficas del potencial conforme el parámetro  $a$  aumenta.

Conociendo ya la forma del potencial, como siguiente paso se analizarán en forma cualitativa las trayectorias posibles; teniendo en mente las condiciones de frontera, queremos que la partícula salga del origen con cierta velocidad inicial, que estará dada por la ec. (III.7) cuando fijemos el valor de la energía total, y que regrese a este punto en una unidad de tiempo; una condición necesaria entonces es que en su trayectoria la partícula tenga al menos un punto de retorno, esto es, un punto en donde la velocidad sea cero.

Como el potencial siempre pasa por el cero, independientemente del valor de la constante  $a$  en la ec. (III.5), para este problema la energía total es positiva. De las gráficas de la fig. (III.1 a, b) podemos ver que cuando  $a < -\frac{1}{4}$  la velocidad inicial no puede ser negativa pues no habría puntos de retorno y la partícula continuaría hasta  $-\infty$ ; la solución debe ser considerando velocidades iniciales positivas, y fijando la energía para la cual se satisfacen las condiciones de contorno, la trayectoria debe ser tal que en la unidad de tiempo parta del origen, llegue al punto de retorno y regrese nuevamente al origen; no habiendo otra posibilidad, la trayectoria debe ser simétrica alrededor del punto de alcance máximo, fig. (III.2).

En los casos en que  $a \geq -\frac{1}{4}$  existen varias posibilidades. Si consideramos que la energía es mayor que el máximo del potencial, denotado por  $x_0$  en la ec. (III.9), entonces nuevamente sólo podremos considerar velocidades iniciales positivas y el valor de la energía debe ser tal que cuando

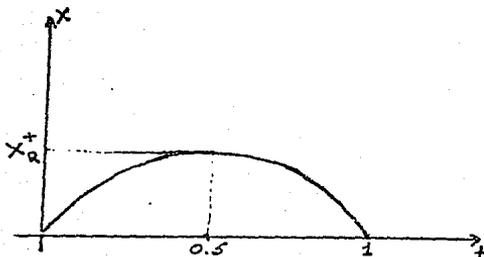


Fig. III.2. Trayectoria en el caso  $a < -\frac{1}{4}$ .

$t = 1$ , la partícula se encuentre otra vez en el origen, teniendo soluciones en donde la trayectoria es siempre positiva y simétrica como en el caso anterior.

Cuando la energía total es menor o igual que el máximo del potencial, esto es cuando  $0 < E \leq V(x_-)$ , existen dos puntos de retorno, uno negativo y el otro positivo, por lo que la velocidad inicial puede ser positiva o negativa, a priori podemos tener una infinidad de posibilidades para la trayectoria. De hecho cuando la energía es estrictamente menor que  $V(x_-)$  existen tres puntos en donde la velocidad es cero, sin embargo la raíz más negativa para la velocidad no se tomará en cuenta puesto que cuando la partícula parte del origen no podrá alcanzarlo, ver la Fig. (III.1 d, e, f).

En este caso, cuando  $a > -\frac{1}{4}$  y  $E \leq V(x_-)$ , puede suceder que si la partícula parte del origen con velocidad positiva la energía total sea tal que llegue al punto de retorno positivo y regrese en la unidad de tiempo haciendo una trayectoria como en la fig. (III.2).

Otra posibilidad es que para una energía dada y velocidad positiva llegue al punto de retorno positivo  $x_R^+$ , regrese, pase por el origen y continúe hacia el punto de retorno negativo  $x_R^-$ , donde regresará hacia el origen haciendo una trayectoria como en la fig. (III.3.a). Con esa misma energía pero empezando con velocidad negativa podría llegar al punto de retorno negativo, regresar, pasar por el origen y regresar del punto de retorno positivo al punto de partida en la unidad de tiempo, ver fig. (III.3.b). O bien, que con cierta velocidad inicial negativa (dada por la energía total) llegue al punto de retorno negativo  $x_R^-$  y regrese cumpliendo las condiciones de contorno, en cuyo caso la trayectoria sería estrictamente negativa y simétrica como en la fig. (III.3.c).

También puede darse el caso de tener una energía tal que partiendo con velocidad negativa llegue al punto de retorno negativo  $x_R^-$  y regrese alcanzando el punto de retorno positivo  $x_R^+$ , teniendo aún tiempo para llegar nuevamente a  $x_R^-$  y regresar al origen justo en la unidad de tiempo, la trayectoria sería como en la gráfica (III.3.d). El caso inverso también es factible, esto es, que salga con velocidad positiva llegue a  $x_R^+$  y regrese hasta  $x_R^-$ , regresando nuevamente hasta llegar a  $x_R^+$  de donde alcanzará el origen en un segundo, como en la gráfica (III.3.e).

Como en los casos de las figuras (III.3.d) y (III.3.e) puede haber energías en donde la partícula llegue a los puntos de retorno  $x_R^+$  y  $x_R^-$  en más de una ocasión, partiendo

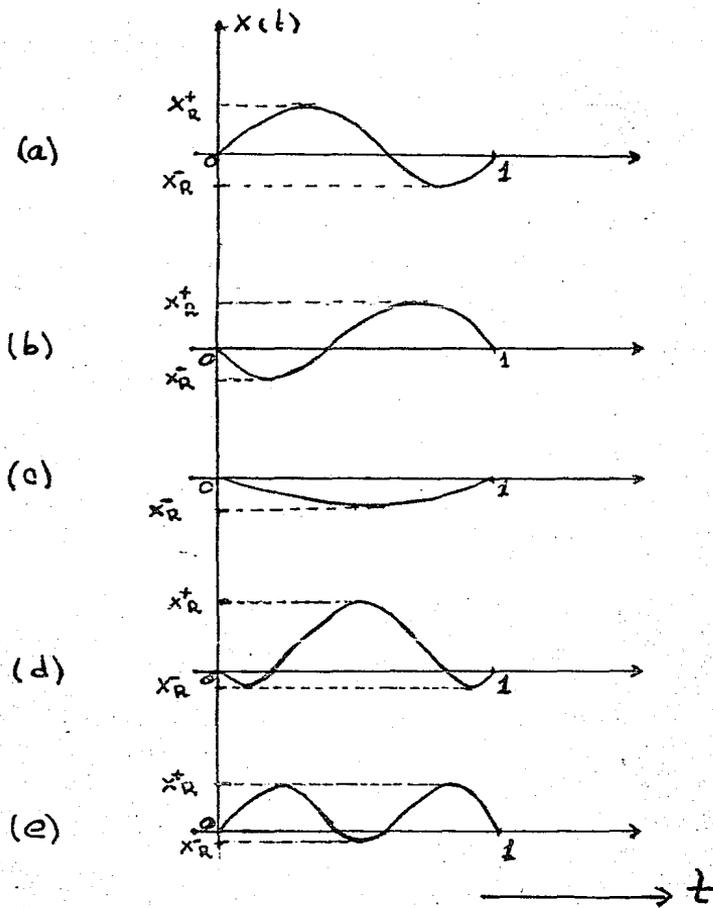


FIG (III.3) .- Trayectorias posibles en el caso  $a > -1/4$  y  $0 < E < V(x_-)$

ya sea con velocidades positivas o negativas, generándose así una gran variedad de trayectorias con un gran número de máximos y mínimos y que pueden o no ser simétricas respecto a la línea  $t = \frac{1}{2}$ .

Las gráficas que se muestran en la fig. (III.3) son sólo el resultado de un análisis cualitativo del problema y no representan todas las soluciones, como se ha tratado de esbozar, existen una infinidad de ellas. El análisis que sigue será cuantitativo resolviendo el problema numéricamente.

### III.C ANALISIS CUANTITATIVO.

Para resolver la ecuación de la partícula,

$$\ddot{x}(t) = 2\omega^2(a - 2x - 3x^2), \quad \text{con condiciones iniciales}$$

$$x(0) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = \pm\sqrt{2E}, \quad \text{sujeta al potencial}$$

$V(x) = 2\omega^2(x^3 - x^2 - ax)$  se utilizó el método numérico de Runge-Kutta de 4º orden<sup>[14]</sup>, en el apéndice II se detalla el algoritmo del método y el programa que se utilizó.

No todas las soluciones que pueden obtenerse de esta manera corresponden al problema hidrodinámico, sino sólo aquellas en las cuales la posición final es el origen al instante de tiempo  $t = 1$ . La forma de lograrlo fué dando un valor a la constante  $a$ , que fija la forma del potencial; se varió entonces la energía variando así la condición inicial, que corresponde a la velocidad inicial de la partícula, y de terminando los valores para los cuales  $x(1) = 0$ . Como esta velocidad puede ser positiva o negativa, se utilizó el criterio que proviene del análisis cualitativo; si la energía total

es mayor que el máximo del potencial las soluciones se encuentran con velocidades iniciales positivas, y cuando es menor o igual, entonces encontramos soluciones con velocidades iniciales positivas y negativas dando valores a la energía desde cero hasta el máximo del potencial.

El ancho del canal se mantuvo siempre constante con un valor a  $2\omega^2 = 1$ , que corresponde a una abertura total de  $2\alpha = 45^\circ$ .

Para cada valor de  $\alpha$  se encontraron energías específicas para las cuales la trayectoria de la partícula cumplía con las condiciones iniciales y la condición de contorno, los valores encontrados se detallan en la tabla (III.C.1).

TABLA III.C.1

E	$u_0 = f\sqrt{2E}$	Tipo de solución	$\alpha$	$\lambda \equiv \int_0^1 x(t)$	No. gráfica
68.5	+		50	4.02	
38	+	+	100	5	III.4.a
402.5	-	-	100	-3.81	III.4.b
180.99	+	+ -	200	5.89	
180.99	-	- +		5.89	
2.36	-	- + -		6.13	
1 148.5	-	-		-5.82	
1 297	-	- +	300	5.4	
1 297	+	+ -		5.4	
130	-	- + -		6.7	
2 095.2	-	-		-7	

(cont.)

TABLA III.C.1 (Continuación)

E	$u_0 = \pm \sqrt{2E}$	Tipo de solución	a	$\lambda \equiv \int_0^1 x(t)$	No. gráfica
2 538	-	- +	400	4.9	
2 538	+	+ -		4.9	
493	-	- + -		6.9	
3 209	-	-		-8.7	
3 895	+	+ -	500	4.48	
3 895		- +		4.48	
1 109	-	- + -		7.05	
4 468	-	-		-9.9	
5 362	-	- +	600	4.04	III.5.b
5 362	+	+ -		4.04	III.5.c
1 964	-	- + -		7	III.5.d
5 856	-	-		-11.02	
6 931	+	+ -	700	3.6	
6 931	-	- +		3.6	
3 035	-	- + -		6.87	
7 362	-	-		-12.02	
22 687	-	- +	1 500	0.49	
22 687	+	+ -		0.49	
17 085	-	- + -		4.91	
22 866	-	-		-18.35	
48 875.6	+	+ -	2 500	-2.88	
48 875.6	-	- +		-2.88	
2 168.3	+	+ - +		23.5	
39 680	+	+ - +		19.13	

(cont.)

TABLA III.C.1 (Continuación)

E	u =	2E	Tipo de solución	a	$\equiv$ x(t)	No. gráfica
43 129	-		- + -		2.15	
48 954.7	-		-		-24.29	
5	-		- + - +	3 000	24.83	
4	+		+ - + -		24.83	
58 625	+		+ - +		18.35	
64 199	+		+ -		-4.4	
64 199	-		- +		-4.4	
58 595	-		- + -		0.84	
64 255	-		-		-26.67	
1 847	-		- + - + -	3 500	25.68	
20 610	-		- + - +		24.21	
20 610	+		+ - + -		24.21	
75 421	-		- + -		-0.43	
80 834.9	-		- +		-5.86	
80 834.9	+		+ -		-5.86	
76 655	+		+ - +		-29.12	
80 876.2	-		-		17.66	
7 159	-		- + - + -	4 000	26.22	9
42 039	-		- + - +		23.6	10
42 039	+		+ - + -		23.6	11
42 039	-		- + -		-1.65	12
95 606	+		+ - +		17	13
98 687	-		- +		-7.32	14
98 687	+		+ -		-7.32	15
98 718.5	-		-		-31.26	16

Como se puede ver de los valores de la tabla, el número de soluciones posibles aumenta para cada valor de  $a$  conforme ésta también aumenta. Así, para  $a = 50$  sólo existe una solución que es puramente divergente; para  $a = 100$  hay dos soluciones, una puramente divergente y otra puramente convergente, ver gráficas (III.4). A partir de  $a = 200$  aproximadamente las soluciones se duplican observándose tres soluciones de flujos mixtos y una puramente convergente, las dos primeras corresponden a un flujo compuesto por una parte convergente y otra divergente, ver gráficas (III.5 (b,c)) tipos de flujo aparecerán siempre, y pensando en la analogía mecánica corresponderían al caso cuando la partícula parte con cierta velocidad inicial positiva (o negativa), llega al punto de retorno  $x_R^+$ , (o  $x_R^-$ ), regresa hasta llegar al otro punto de retorno  $x_R^-$ , (o  $x_R^+$ ), de donde regresará para alcanzar el origen, ver fig. (III.3 (a), (b)). La tercera solución consiste de una región divergente en el centro y dos regiones convergentes a los lados de ella, ver fig. (III.5.d).

Es importante notar que a partir de  $a = 200$  no habrá más solución puramente divergente.

A partir de  $a = 2\ 300$  aproximadamente aparecen dos soluciones más del mismo tipo: convergentes en el centro y divergentes en los extremos, de la forma de la fig. (III.6.g).

Para  $a \cong 3\ 000$  una de las soluciones anteriores desaparece y aparecen dos nuevas, que son degeneradas, con dos regiones convergentes y dos divergentes, ver fig. (III.6 (b), (c)) dando un total de siete soluciones.

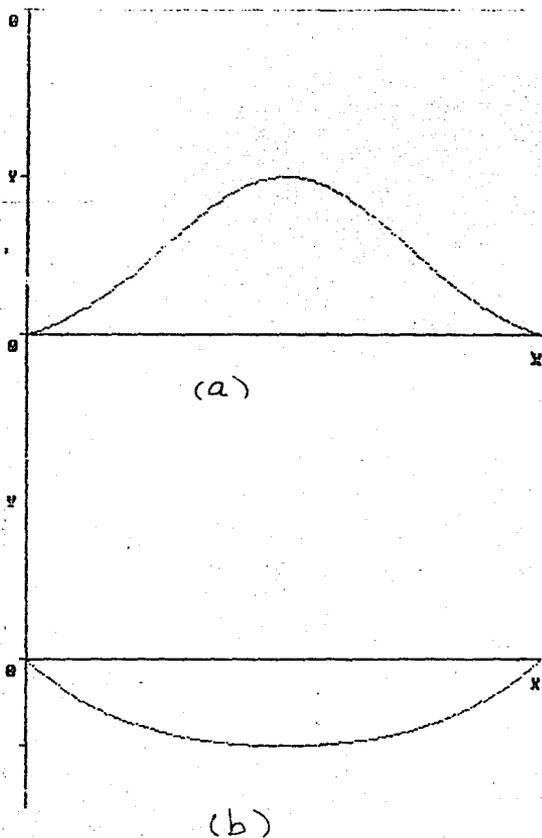


FIG. III.4.- Gráfica de las soluciones  
para  $a = 100$ .

(a)  $\lambda = 5$

(b)  $\lambda = -3.81$

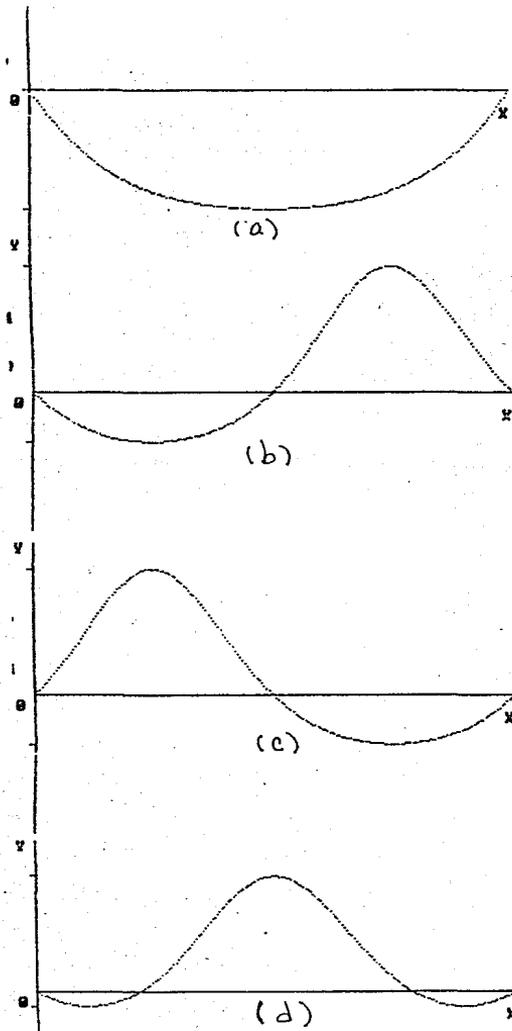


FIG. III.5.- Tipos de solución cuando  $200 < a < 2300$

(a)  $\lambda = -5.82$ ; (b)  $\lambda = 4.04$ ; (c)  $4.04$ ;  
 (d)  $\lambda = 7$ .

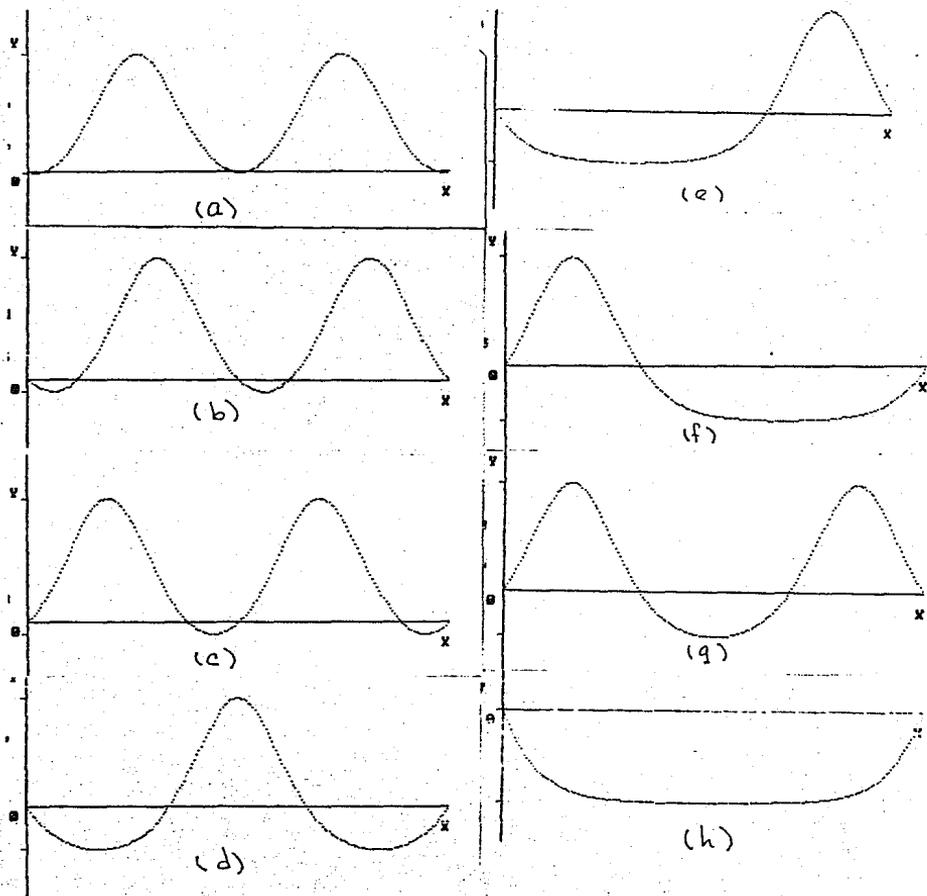


FIG. III.6.- Gráficas de las soluciones cuando  $a = 3500$ .

Para valores mayores a este último aparece una solución más con tres regiones convergentes y dos divergentes fig. (III.6.a) resultando ocho soluciones posibles; en la fig. (III.6) se muestran para un valor de  $a = 3500$ .

El problema se resolvió también con técnicas de elemento finito <sup>usi</sup> encontrándose cada vez más tipos de soluciones conforme se aumenta el valor de  $a$ .

En la tercera columna de la tabla (III.C.1) se trató de esquematizar con signos la forma de las soluciones, donde (+) representa flujo divergente y (-) flujo convergente; una solución expresada como (+ - +) representa un flujo mixto que es convergente en el centro del canal y divergente en las orillas.

Para cada solución se calculó el área bajo la curva sobre el intervalo  $[0,1]$ :

$$\text{III.10} \quad \lambda = \int_0^1 x(t) dt$$

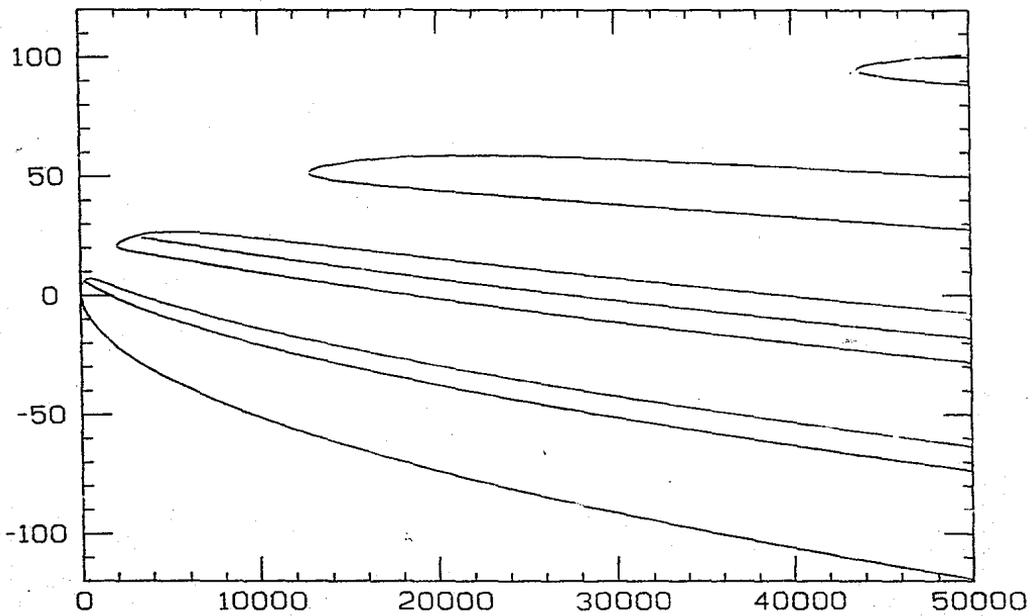
que, pensando en el problema hidrodinámico, está asociada con el gasto  $Q$  que es la masa del fluido que pasa en la unidad de tiempo a través de cualquier sección transversal  $r = \text{cte.}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{III.11} \quad Q &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho u r d\theta = \omega S v \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\theta) d\theta = \\ &= \omega S v w \int_0^1 x(t) dt \end{aligned}$$

Se puede definir el número de Reynolds como:

$$\text{III.12} \quad R = \frac{Q}{\rho \nu W} .$$

Se presenta una gráfica, fig (III.7) del número de Reynolds  $R$  contra el parámetro  $a$ , que muestra cómo aumenta el número de soluciones conforme  $a$  crece; y donde se ve claramente el tipo de soluciones posibles para cada número de Reynolds, en donde si  $R < 0$  se trata de un flujo con vergente y si  $R > 0$ , de un flujo divergente.



## CAPITULO IV

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.

Conclusiones.- El problema que se ha venido desarrollando en los capítulos anteriores consiste básicamente en analizar las formas posibles del perfil de velocidades para un flujo dentro de un canal con paredes que se intersectan.

Dentro de las soluciones dadas en la literatura para el problema, el tratamiento matemático más completo fué dado por Rosenhead en 1940, aunque su análisis, dado en términos de la función elíptica de Weierstrass, no es sencillo.

El método que se usó para resolver el problema en el capítulo III parte de la analogía hecha entre el problema hidrodinámico con un problema de Mecánica Clásica que consiste en resolver la ecuación de movimiento de una partícula bajo un potencial sujeto a condiciones de frontera; las soluciones se obtuvieron numéricamente viendo para qué condiciones iniciales se satisfacían las condiciones de contorno.

Mediante un análisis cualitativo se puede visualizar de una forma simple todas las soluciones posibles predichas en el análisis de Rosenhead.

El desarrollo del análisis cuantitativo bajo esta perspectiva nos permite obtener las soluciones para cualquier número de Reynolds, siendo fácil ver el tipo de soluciones para un número determinado de Reynolds mediante el diagrama de bifurcación (FIG. III.7).

Lo que se puede observar en el análisis hecho en el capítulo III es lo siguiente:

- Para un canal de abertura total de  $45^\circ$  existe un número infinito de soluciones.
  - Las soluciones y el tipo de ellas pueden fácilmente ser localizadas mediante el diagrama de bifurcaciones, para cualquier número de Reynolds.
  - Del diagrama de bifurcaciones se puede ver que la solución de flujo puramente divergente es posible sólo para un intervalo muy pequeño de valores de  $R$ .
  - A diferencia del punto anterior, el flujo puramente convergente existe para cualquier número de Reynolds. En términos del problema mecánico, se observa que conforme el parámetro  $a$  crece la energía para la cual se observa la solución tiende al máximo del potencial, y también se observa que pequeñas variaciones en la energía producen posiciones finales grandes. Para este flujo, se observa que en efecto cuando  $R$  aumenta el perfil se hace cada vez más constante a lo largo del canal excepto en las paredes donde decrece monótonamente.
  - Conforme  $R$  aumenta ( $R > 0$ ) algunos tipos de soluciones se van perdiendo, pudiéndose obtener soluciones cada vez con más regiones convergentes y divergentes, esto es, las soluciones "simples" con pocas regiones convergentes y divergentes ya no son posibles.
- Sin embargo, para cualquier valor de  $R$  negativo es posible, en principio, obtener cualquier tipo de solución. Esto se debe a que las ramas de las bifurcaciones cruzan necesariamente el eje, aunque en el diagrama de la fig. (III.7)

no es claro, se demuestra en el trabajo mencionado en la re  
ferencia (15).

- En contradicción con algunos libros de texto, no puede supo-  
nerse que el flujo es siempre simétrico respecto a la línea  
central, existen soluciones simétricas y asimétricas.

Perspectivas.- El conjunto de soluciones obtenidas es  
el resultado de un análisis matemático, y hasta el momento no  
puedo decir cuáles son las soluciones que experimentalmente  
se observarían. Como se mencionó al final del capítulo II,  
Goldstein menciona resultados experimentales en canales con  
aberturas de hasta  $8^\circ$  solamente. En el presente trabajo el  
problema se resolvió para una abertura total de canal de  $45^\circ$ .

Queda entonces por investigar cómo se modifica el pa-  
trón de bifurcaciones cuando variamos el ancho del canal.

También, una forma de seleccionar una solución dentro  
de las encontradas sería el hacer un análisis de estabilidad  
de las soluciones.

APENDICE I

PROPIEDADES Y DEFINICIONES DE FUNCIONES ELIPTICAS.

Definiciones:

Sea  $f$  una función definida por  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $A \subseteq \mathbb{C}$ .

- 1.- Si  $f$  es derivable en  $A$  un abierto entonces  $f$  es infinitamente derivable. Si  $f$  es derivable entonces  $f$  puede ser expresada en serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y las derivadas de } f \text{ se obtienen de}$$

rivando cada uno de los términos de la serie.

- 2.- Se dice que una función es entera si es derivable en todo  $\mathbb{C}$ .
- 3.- Se dice que una función es meromorfa si es el cociente de dos funciones enteras, e.i.,  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  con  $g, h$  enteras y definida para  $h(z) \neq 0$ .
- 4.- Se dice que una función meromorfa es periódica si existe  $w \neq 0$  tal que  $f(z+w) = f(z)$  para cualquier  $z$ . Si todos los puntos de la función  $f(z)$  se agotan con los números  $nw_1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  siendo  $w_1$  un periodo, se le llama a  $f(z)$  monoperiódica o simplemente periódica, y a  $w_1$  periodo fundamental.
- 5.- Si existen  $w_1, w_2$  tales que todo periodo de  $f$  es de la forma  $mw_1 + nw_2$  ( $m, n$  enteros), a la función  $f$  se le llama doblemente periódica o función elíptica.
- Si  $f$  es meromorfa periódica, entonces  $f$  es simplemente periódica ó doblemente periódica.

- Si  $f(z)$  es una función meromorfa doblemente periódica, sus periodos fundamentales se designan como  $2w_1$  y  $2w_3$  siendo  $2w_2 = 2(w_1 + w_3)$ .
- El comportamiento de la función puede ser analizado a través de un paralelogramo de periodos fundamentales.

#### Propiedades:

- 1.- Una función elíptica tiene un número finito de polos (y el mismo número de ceros) en un paralelogramo de periodos fundamentales, éste número (que debe ser un conjunto irreducible) define el orden de la función.  
Las funciones elípticas más simples son de orden dos, tomando como ejemplo las funciones de Jacobi con dos polos simples, o las de Weierstrass con un polo doble.
- 2.- Fórmula de adición para la función  $P(z)$  de Weierstrass:

$$P(z_1 + z_2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{P'(z_1) - P'(z_2)}{P(z_1) - P(z_2)} \right]^2 - P(z_1) - P(z_2); \quad (z_1 \neq z_2).$$

- 3.-  $P'^2(z) = 4[P(z) - e_1][P(z) - e_2][P(z) - e_3]$ .
- 4.-  $P(z) = P(-z)$  (par).
- 5.-  $P'(z) = -P'(-z)$  (impar).
- 6.-  $P'(w_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .
- 7.-  $P(w_j) = e_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .
- 8.-  $e_1 + e_2 + e_3 = 0 \Rightarrow e_2 = -e_1 - e_3$ .

## APENDICE II

METODO RUNGE-KUTTA (4º orden) PARA RESOLVER LA  
 ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA  $\dot{y}(t) = a - 2y - 3y^2$ .

El método de Runge-Kutta de 4º orden se usa para obtener aproximaciones a la solución tanto de problemas de valor inicial de la forma:  $y' = f(t, y)$  con condiciones  $a \leq t \leq b$ ,  $y(a) = \alpha$ , como de sistemas de ecuaciones de orden  $m$  de problemas de valor inicial de primer orden en  $(N + 1)$  números igualmente espaciados en el intervalo  $[a, b]$ .

El método requiere cuatro evaluaciones funcionales (o sea la evaluación de  $f$ ) por paso, pero el error de truncamiento local es  $O(h^4)$ , donde  $h = \frac{(b-a)}{N}$  es el espaciamiento\*.

---

\* R. Burden, D. Faires, pp. 249.

## ALGORITMO

Para aplicar el método es necesario transformar la ecuación diferencial  $\dot{y}(t) = a - 2y - 3y^2$ , con condiciones iniciales  $y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = \pm\sqrt{2E}$ , a un sistema de ecuaciones diferenciales de 1er. orden con condiciones iniciales.

Sean

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y(t) \\ u_2(t) &= \dot{y}(t), \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} [1] \quad \dot{u}_1(t) &= u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) &= a - 2u_1(t) - 3u_1^2(t), \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

con condiciones iniciales:

$$[2] \quad u_1(0) = 0 \quad \text{y} \quad u_2(0) = \pm\sqrt{2E}.$$

Sea  $N > 0$  un entero y  $h = \frac{1}{N}$  el ancho de la partición del intervalo  $[0,1]$ , de aquí que:

$$t_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Haciendo  $u_{ij}$  como la aproximación  $u_i(t_j)$  para  $j = 0, \dots, N$ ;  $i = 1, 2$  las condiciones iniciales se expresan:

$$[2.b] \quad \begin{aligned} u_{1,0} &= 0 \\ u_{2,0} &= \pm\sqrt{2E} \end{aligned} /$$

definimos

$$[3] \quad \begin{aligned} f_1(t, u_1, u_2) &\equiv \dot{u}_1(t) \\ f_2(t, u_1, u_2) &\equiv \dot{u}_2(t) \end{aligned}$$

El método supone que conocidos  $u_{1,j}$  y  $u_{2,j}$  podemos obtener  $u_{1,j+1}$  y  $u_{2,j+1}$  mediante el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} K_{11} &= hf_1(t_j, u_{1,j}, u_{2,j}) \\ K_{12} &= hf_2(t_j, u_{1,j}, u_{2,j}) \\ K_{21} &= hf_1(t_j + \frac{h}{2}, u_{1,j} + \frac{1}{2} K_{11}, u_{2,j} + \frac{1}{2} K_{12}) = \\ K_{22} &= hf_2(t_j + \frac{h}{2}, u_{1,j} + \frac{1}{2} K_{11}, u_{2,j} + \frac{1}{2} K_{12}) \\ K_{31} &= hf_1(t_j + \frac{h}{2}, u_{1,j} + \frac{1}{2} K_{21}, u_{2,j} + \frac{1}{2} K_{22}) \\ K_{32} &= hf_2(t_j + \frac{h}{2}, u_{1,j} + \frac{1}{2} K_{21}, u_{2,j} + \frac{1}{2} K_{22}) \\ K_{41} &= hf_1(t_j + h, u_{1,j} + K_{31}, u_{2,j} + K_{32}) \\ K_{42} &= hf_2(t_j + h, u_{1,j} + K_{31}, u_{2,j} + K_{32}) \end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned} u_{1,j+1} &= u_{1,j} + \frac{1}{6} [K_{11} + 2K_{21} + 2K_{31} + K_{41}] \\ u_{2,j+1} &= u_{2,j} + \frac{1}{6} [K_{12} + 2K_{22} + 2K_{32} + K_{42}] \end{aligned}$$

es la solución aproximada en el punto  $j + 1$ .

## REFERENCIAS

- (1) G.K. Batchelor.- "An Introduction to Fluid Dynamics".  
Cambridge University Press, 1970.
- (2) I.G. Currie.- "Fundamental Mechanics of Fluids".  
Mc Graw-Hill, 1974.
- (3) R. Peralta Fabi.- Notas de Elasticidad (sin publicar).
- (4) R. Peralta Fabi.- Notas de Hidrodinámica (sin publicar).
- (5) L.D. Landau,  
E.M. Lifshitz.- "Fluid Mechanics".  
Pergamon Press, 1975.
- (6) Handbuch der Physik Bd VIII/2.  
Springer-Verlag OHG, 1963.
- (7) S. Goldstein.- "Modern Developments in Fluid Dynamics".  
Vol. I. Dover, 1965.
- (8) G.B. Jeffery.- "The two-Dimensional Steady Motion of a  
viscous Fluid".  
Philosophical Magazine, 29, Nº 6 (1915),  
p.p. 455-465.
- (9) G. Hamel.- "Spiralförmige Bewegungen zäher  
Flüssigkeiten".  
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker  
(1917).
- (10) L. Rosenhead.- Proc. Roy. Soc. A, 175, (1940) pág. 436.
- (11) A. Markushevich.- "Teoría de las funciones analíticas".  
Tomo II. Ed. Mir, 1978.
- (12) M. Abramowitz &  
I.A. Stegun.- Handbook of Mathematical Functions.  
Dover, 1972.
- (13) S. Goldstein.- "Modern Developments in Fluid Dynamics".  
Vol. II. Dover, 1965.
- (14) Burden & Fayres.- "Análisis Numérico".  
Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
- (15) E. Díaz &  
F.J. Uribe.- "Una aplicación de la técnica de elemen  
to finito a fluidos".  
(Aparecerá como reporte interno en  
UAM-I).