2 cj
7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LA TRANSFORMADA DE HILBERT"

TESIS QUE PARA OBTENER

EL TITULO DE MATEMATICO

P R E S E N T A

GUSTAVO ORLANDO FERNANDEZ MARTINEZ

SEPTIEMBRE DE 1986.

CONTENIDO

CAPITULO		Pág.
I.	INTRODUCCION	1.
II.	TEORIA CLASICA	4.
III.	TEORIA GENERALIZADA	28.
IV.	PROBLEMA DE DIRICHLET	41.
NOTACION.		48.
BIBLIOGRAFIA.		49.

CAPITULO I.

INTRODUCCION

La transformada de Hilbert tiene su origen en una nota - hecha por David Hilbert en sus conferencias sobre ecuaciones integrales, donde llamó la atención acerca de la reciprocidad existente entre ciertas funciones de la forma

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \log\left((2)\left|\operatorname{sem}\frac{1}{2}(x - t)\right|\right) dt \;; \quad f(x) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g'(t) \log\left((2)\left|\operatorname{sem}\frac{1}{2}(x - t)\right|\right) dt.$$

Esta reciprocidad puede ser vista como una forma que toman las funciones conjugadas en la teoría de las series trigonométricas, y desde este punto de vista es investigada la reciprocidad por varios autores como Plecsner, M. Rusz, W.H. -- Young y Tetchmarsh entre otros, utilizando la teoría de las - funciones analíticas.

En 1912, Young considera esta reciprocidad de manera más amplia en la forma

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{f(x + t) - f(x - t)}{t}\, dt \;; \quad f(x) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{f(x + t) - f(x - t)}{t}\, dt,$$ y en un artículo de 1924,

corregido posteriormente en 1932, G. H. Hardy, a quien se debe el nombre de transformada de Hilbert, investiga esta reciprocidad para el caso L^2 usando sólo métodos de variable real considerándola en la forma

$$g(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt \; ; \quad f(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{t - x} dt.$$

En 1927, M. Rusz utilizando métodos de la teoría de las funciones analíticas generaliza esta reciprocidad al caso L^p - y posteriormente en 1939 J. Cassar publica un artículo basado en el artículo de 1932 de Hardy, utilizando un método sugerido por Tetchmarsh, en donde los resultados generales para L^p - son obtenidos usando técnicas de variable real unicamente.

El caso L, para el cual no se cumple el resultado general completamente es investigado por algunos de los autores - anteriores, a los que hay que agregar los nombres de Pallard, Besecanetch y Kolmogoroff, cuyos resultados son generalizados incluyendo métodos de variable real por L. H. Loanus en un artículo de 1946.

Con el advenimiento de la teoría de las distribuciones - de L. Schwartz y su elegante exposición de la transformada de Fourier dentro de este esquema, varios autores investigan la generalización de la transformada de Hilbert al caso de las - distribuciones.

En un artículo de 1983, J. N. Pandey y M. A. Chaundry investigan una generalización de la transformada de Hilbert al caso de las distribuciones utilizando los espacios D_{L^P} de funciones tales que todos sus derivados están en L^P; definiendo la transformada de una distribución como

$$\langle Hf, \phi \rangle = \langle f, -H \phi \rangle .$$

La transformada de Hilbert tiene aplicaciones a las ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales parciales y a los problemas de Frontera.

CAPITULO II.

TEORIA CLASICA

Teorema 1:

i) $$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\ (t)}{t - x}\ dt.$$ ii) $$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x+t) - (x-t)}{t}\ dt$$

donde f es una función de variable real con valores complejos y las integrales tomadas en el sentido de Lihesgue, P denota la integral en el sentido del valor principal de Cauchy, son equivalentes.

Prueba: tenemos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\ dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+t)}{t}\ dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\ dt \right)$$ y haciendo - la primera integral de cambio de variable $v = x + t$ y en la segunda $v = x - t$ queda

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+t)}{t}\ dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\ dt \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \left(\int_{\varepsilon+x}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\ dt + \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x}\ .dt \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x}\ dt = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\ dt.$$

Definición:

Dada f, si la función $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt$

existe en casi todas parte, $\tilde{f}$ es la transformada de Hilbert de f. Equivalente, si existe en casi todas partes la función

$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt$, ésta es transformada de Hilbert de f.

también se denota por Hf ó $\tilde{f}$.

Teorema 2:

Si $\tilde{f}_1$ y $\tilde{f}_2$ son las transformadas de Hilbert de las funciones f_1 y f_2, respectivamente, a y b son constantes, entonces

$$\widetilde{(a\, f_1 + b\, f_2)} = a\, \tilde{f}_1 + b\, \tilde{f}_2.$$

Prueba:

$$\widetilde{(a\, f_1 + b\, f_2)}\,(x) = \frac{1}{\pi}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a\, f_1 + b\, f_2)\,(t)}{x-t}\, dt =$$

$$= \frac{a}{\pi}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1\,(t)}{x-t}\, dt + \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(t)}{x-t}\, dt =$$

$$= a\, \tilde{f}_1\,(x) + b\, \tilde{f}_2\,(x).$$

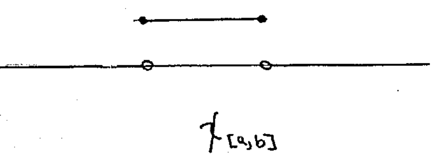
Ejemplos:

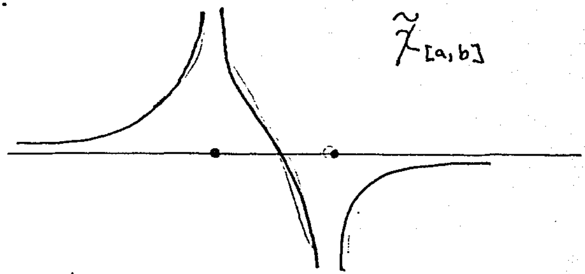
i) si $f(x) = \chi(a,\, b)$ ($= 1$ $a \leq x \leq b$ $= 0$ en otro caso) entonces

$$\tilde{\chi}_{[a,b]}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\chi_{(a,b)}}{t-x}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \;\mathrm{Ln} \left| \frac{x-b}{x-a} \right|$$

si x está en (a,b). $\tilde{\chi}_{(a,b)} = 0$ en otro caso excepto -- para x = a,b donde no existe.





de este ejemplo y la linealidad de $\tilde{f}$, si $f = \sum^{n} C_i \chi_{[a_i,b_i]}$ donde las son constantes, entonces $\tilde{f}$ existe excepto en - un número finito de puntos.

ii) si f(x) = cos x entonces $\tilde{f}(x) =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x+t) - \cos(x-t)}{t}\, dt =$$

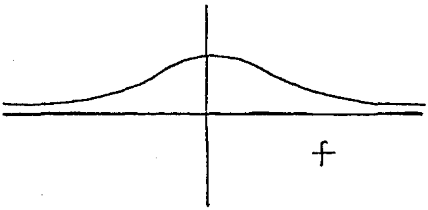
$$= - \frac{2}{\pi} \;\mathrm{sen}\, x \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\, t}{t}\, dt = - \mathrm{sen}\, x, \text{ i.e. } \widetilde{\cos}(x) =$$

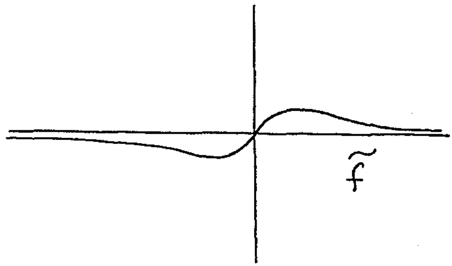
$$= - \mathrm{sen}(x).$$

iii)

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}; \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \; P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t-x}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2+1} \; P\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1+t^2} - \frac{x}{1+t^2}\right) dt = -\frac{x}{1+x^2}$$





Teorema 3:

Si $f \in L^P$ entonces $\phi(Z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-Z}\, dt$ es una función analítica para todo Z con $\operatorname{Im} Z > 0$.

Prueba: Sea γ una curva cerrada en el semiplano superior.

$$\int_{\gamma} \phi(Z)\, dZ = \int_a^b \phi(\gamma(S)) \cdot \gamma'(S)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - \gamma(s)} \cdot \gamma'(S)\, dt\, dS =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_a^b \frac{\gamma(S)}{t - \gamma(s)}\, ds\,dt = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{\gamma} \frac{1}{t - Z}\, dZ\,dt = 0$$

pues $\frac{1}{t-Z}$ es una función analítica en el semiplano superior, y por el teorema de Morera $\phi(Z)$ es analítica pues γ es arbitraria.

Teorema 4:

Sea $f \in L^P$, $Y > 0$ entonces para casi todas partes.

$$\lim_{Y \to 0} \left(\int_Y^\infty \frac{f(x + t) - f(x - t)}{t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} f(t)dt \right) = 0$$

Prueba:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} f(t)\, dt + \int_x^{\infty} \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} f(t)dt$$

haciendo en la primera integral el cambio de variable $v = x - t$ y en la el cambio $v = t - x$, obtendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{t}{t^2 + y^2} (f(x + t) - f(x - t)\, dt$$

Por otro lado si $f \in L$ y $W(y) = \int_0^{Y} f(x + t) - f(x - t) \quad dt$

entonces $(w)(y) \leq \int_0^{Y} |f(x + t) - f(x)|\, dt + \int_0^{Y} | f(x) - f(x - t) |\, dt =$

$= o(Y)$, $Y \to 0$ en casi todas partes. (Ver Ref. 8, pág. 364, El Conjunto de Lebesgue).

Ahora, si $f \in L^P$, entonces $f \cdot \chi[-n,n] \in L$ por lo que --

$w(Y) = o(Y)$ en casi todas partes del intervalo $[-n,n]$, y como esto vale para toda n, vale en toda la recta y así $w(Y) = o(Y)$, $Y \to o$ si $f \in L^P$ en casi todo x.

ahora $$\int_Y^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2} f(t)\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{t}{t^2+y^2} (f(x+t) - f(x-t))\, dt + \int_Y^\infty \frac{f(x-t) - f(x-t)}{t} dt =$$

$$= -\int_0^Y \frac{t}{t^2+y^2} (f(x+t) - f(x-t))\, dt + Y^2 \left(\int_Y^1 + \int_1^\infty \right) \frac{f(x+t) - f(x-t)}{(t^2+Y^2)\, t} dt =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3$$

haciendo $Y \to 0$

$$|J_1| \leq \int_0^Y \left|\frac{t}{t^2+Y^2}\right| \cdot |f(x+t) - f(x-t)|\, dt \leq \frac{1}{2Y} \int_0^Y |f(x+t) - f(x-t)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{2Y} W(Y) = o(1)$$

Pues $\max \left| \frac{t}{t^2+Y^2} \right| = \frac{1}{2Y}$

$$|J_3| \leq Y^2 \int_1^\infty \frac{|f(x \quad t) - f(x-t)|}{t^2 + Y^2)\, t} dt = o\,(1)$$

finalmente $|J_2| \leq Y^2 \int_Y^1 \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{(t^2+Y^2)\, t}$ dt. integrando por partes,

$$|J_2| \leq Y^2 \left[\frac{w(t)}{(t^2 + Y^2)\, t}\right]_Y^1 + Y^2 \int_Y^1 \frac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)t^2}\, W(t)dt.$$

ahora,

$$Y^2 \left[\frac{}{(t^2 + Y^2)\, t}\right]_Y^1 = Y^2 \left(\frac{W(1)}{1 + Y^2} - \frac{W(Y)}{2Y^3}\right) =$$

$$= Y^2 \frac{W(1)}{1 + Y^2} - \frac{W(Y)}{Y} \leq Y^2 K - \frac{W(Y)}{Y} = o(1).$$

Como $\frac{W(t)}{t} \to 0$, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{W(t)}{t}\right| < \varepsilon$

si $|t| < \delta$. Entonces como se está tomando el límite cuando $Y \to 0$, tomando $Y < \delta$.

$$Y^2 \int_Y^1 \frac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)t^2}\, W(t)dt < \varepsilon Y^2 \int_Y^\delta \frac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2\, t}\, dt$$

$$dt + Y^2 \int_\delta^1 \frac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2 t^2}\, W(t)\, dt.$$

Su segunda integral

$$Y^2 \int_\delta^1 \frac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2 t^2}\, W(t)dt = Y^2 K = o(1) \text{ con } Y \to 0.$$

ahora, para $t > Y > 0$, $\left(\frac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2 t}\right)\left(\frac{t^5}{3t^2}\right) =$

$$= \left(\frac{t^5}{(t^2 + Y^2)^2 t}\right)\left(\frac{3t^2 + Y^2}{3t^2}\right) \leq 1 + \frac{Y^2}{3t^2} \leq \frac{4}{3}$$

y de aquí $\dfrac{3t^2 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2 t} \leq \dfrac{4}{t^3}$ por lo que

$$\varepsilon Y^2 \int_Y^{\delta} \frac{3t^3 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2 t}\, dt \leq \varepsilon 4\, Y^2 \int_Y^{\delta} t^{-3} dt =$$

$2\varepsilon\, Y^2 (Y^{-2} - \delta^{-2}) \leq 4\varepsilon$ pues $\dfrac{Y^2}{\delta^2} < 1$, y de aquí que

$$Y^2 \int_Y^{\delta} \frac{3t^3 + Y^2}{(t^2 + Y^2)^2 t^2}\, W(t)dt = O(1)$$ y por lo tanto $|J_2| = O(1)$

entonces, finalmente tenemos que $|J_1 + J_2 + J_3| = O(1)$ para casi todas partes.

<u>Teorema 5:</u>

Si $f \in L^p$ y $Y > 0$ entonces en casi todas partes

$$\lim_{Y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2 + (x-t)^2}\, f(t)dt = f(x)$$

Prueba:

Para $Y > 0$ y $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{Y}{Y^2 + (x-t)^2} > 0$ y $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2 + (x-t)^2}\, dt = 1$

además, $\displaystyle\lim_{Y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{Y}{Y^2 + (x-t)^2}\, dt = 1$, pues $\displaystyle\int \frac{Y}{Y^2 + (x-t)^2}\, dt =$

$= \operatorname{arctg} \dfrac{x - t.}{S}$

Y finalmente $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{Y}{Y^2+(x-t)^2}\right)^P dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-t}{Y}\right)^2} \cdot \frac{1}{-Y}\right)^P dt =$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^P}\, dt < \infty$ para $P \geq 1$, así que $\frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} \in L^P$.

Ahora, si $f \in L^P$ es contínua y acotada, dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $|x-t| < \delta$, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} f(t)dt - f(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} |f(t)-f(x)|\, dt =$$

$$= \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} |f(t)-f(x)|\, dt + \int_{t>|x\pm\delta|} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} |f(t)-f(x)|\, dt \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2}\, dt + K \int_{t>|x\pm\delta|} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2}\, dt \to \varepsilon \quad \text{cuando } Y \to 0.$$

Ahora, sea $f \in L^P$ y $\{h_n\}$ una sucesión de funciones contínuas y acotadas en L^P que converja puntualmente a f en casi todas partes. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} f(t)\, dt - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} f(t)dt -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} h_n(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} h_n(t)dt - h_n(x) + h_n(x) -$$

$- f(x)$. Anora, sea N suficientemente grande para que

$\|h_n - f\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3\left\|\frac{Y}{Y^2+(x-t)^2}\right\|_q}$ y $|f(x)-h_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ en casi todas partes,

$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Tomando valores absolutos, tenemos que $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} f(t)dt - f(x)\right| \leq$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} |f(t) - h_N(t)| \, dt + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} h_N(t)dt - h_N(t)\right| + |h_N(x) -$$

$$- f(x)| ,$$

y como por la desigualdad de Holder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} \left|f(t) - h_N(t)\right| dt \leq \left\| \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} \right\|_q \cdot \left\| f - h_N \right\|_p < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

y como h_N es contínua y acotada, para Y suficientemente peque ño $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2 + (x-t)^2} h_N(t)dt - h_N(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

y como $|h_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ tenemos que para Y suficientemente - pequeño, $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y}{Y^2+(x-t)^2} f(t)dt - f(x)\right| < \varepsilon$, y de aquí el resul tado.

<u>Teorema 6.</u> Si $f \in L^p$ entonces $\tilde{f}$ existe en casi todas partes.

Prueba: Si $Z = x + Yi$ y $Y > 0$, $\phi(Z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - Z} dt =$

$$= \frac{Y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2+Y^2} dt - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - x}{(t-x)^2+Y^2} f(t)dt.$$

cierto es, $\phi(Z) = U(x,Y) + i\mathcal{V}(x,Y)$ es una función analítica para $Y > 0$, (Teo.3), por lo que $\psi(Z) = e^{-\phi(Z)}$ también es analítica si - $Y > 0$. Si suponemos, sin pérdida de generalidad que $f(x) \geq 0$, -- entonces $U(x,Y) \geq 0$ y tenemos que $|\psi(Z)| = |e^{-U-iV}| = |e^{-U}| \leq 1$ por lo que $\psi(Z)$ es acotada por lo que si $Y \to 0$ entonces $\psi(Z)$ tiende a un límite para casi todas partes (Ref. 1, pág. 128).

$\lim\limits_{Y\to 0} \psi(Z) \neq 0$ para casi todas partes pues por el teorema 5 --

$\lim\limits_{Y\to 0} U(x,Y) = f(x)$ en casi todas partes y de aquí que sacando -

logaritmos, que es posible pues se considera el semplano $U(x,Y) \geq 0$ tenemos que $\phi(Z)$ tiende a un límite finito en casi todas partes. Por el teorema 5 $\lim\limits_{Y\to 0} U(x,Y) = f(x)$ en casi todas partes, entonces $\lim\limits_{Y\to 0} V(x-Y)$ existe en casi todas partes (pues $V = \frac{\phi - U}{i}$), - y por el teorema 4 $\lim\limits_{Y\to 0} \left(\int_Y^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} - V(x,Y)\right) = 0$. Así que $\lim\limits_{Y\to 0} V(x,Y) = \int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt = \tilde{f}(x)$ existe en casi - todas partes.

<u>Teorema 7.</u> Si $f \in L^P$ entonces

i) $\|\tilde{f}\|_p \leq M_p \|f\|_p$ donde M_p sólo depende de P, i.e., -- $\tilde{f} \in L^P$.

ii) $\tilde{\tilde{f}} = -f$ (fórmula de reciprocidad).

Prueba:

Primera parte. Si $Z = x + iY$,

Sea $\phi a(Z) = \frac{1}{i\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{t-Z}\,dt =$

$$= \frac{Y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{(t-x)^2+Y^2}\,dt - \frac{i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\,f(t)\,dt =$$

$= Ua(X,Y) + i\,Va(X,Y)$. Esta es una función analítica en el plano superior del plano complejo, por lo que por el teorema integral de Cauchey, si L es el camino cerrado formado por la recta L' que va de $-R+iY$ a $R+iY$ y por el semicírculo C: $Re^{it}+iY$, $t\ [o,\pi]$ tenemos que

$$\int_L \phi_a^P(Z)\,dZ = \int_{L'}\phi_z^P(Z)\,dz + \int_C \phi_a^P(Z)\,dZ = 0$$

Ahora, $\int_{L'}\phi_a^P(Z)\,dZ = \int_{-R}^{R}\phi_a^P(x+iY)\,dx$. Por otro lado, tomando el supremo sobre la recta $(-a,a)$. $|\phi a(Z)| =$

$$= \left|\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{t-Z}\,dt\right| \leq K \sup\frac{1}{t-Z} = O\left(\frac{1}{|Z|}\right)$$

cuando $Z \to \infty$. De aquí que $\left|\int_C \phi_a^P(Z)dZ\right| \leq \int_C|\phi a(Z)|^P dZ \leq$

$\leq$ long $C\frac{1}{|Z|^P} = \frac{\pi|Z|}{|Z|^P} = O\left(\frac{1}{|Z|^{P-1}}\right)$ y como $P > 1$ tenemos que

$\lim\limits_{R\to\infty}\int_C \phi_a^P(Z)dZ = 0$, y de aquí que $\int_{-\infty}^{\infty}\phi_a^P(x+iY)dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(Ua(x,Y)+i\,Va(x,Y))^P dx = 0$$

Segunda parte. Supongamos que para $P>1$, $\int_{-\infty}^{\infty}|Va(x,Y)|^P dx \leq$

$\leq Kp\int_{-\infty}^{\infty}|Ua(x,Y)|^P dx$ donde Kp sólo depende de p. tenemos que $|Ua(x,Y)| = \frac{Y}{\pi}\left|\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{(t-x)^2+Y^2}\,dt\right| \leq \frac{Y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{|f(t)|}{(t-x^2+Y^2}\,dt \leq$

$$\frac{Y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|}{(t-x)^2+Y^2}\,dt.$$

Ahora, por la desigualdad de Hölder

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|}{(t-x)^2+Y^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|}{[(t-x)^2+Y^2]^{1/P}}\cdot\frac{1}{[(t-x)^2+Y^2]^{\frac{P-1}{P}}}\,dt \leq$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|f(t)|^P}{(t-x)^2+Y^2}\,dt\right)\right)^{1/P}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t-x)^2+Y^2}\,dt\right)^{\frac{P-1}{P}}$$

por lo que $|Ua(x,Y)|^P \leq \left(\frac{Y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^P}{(t-x)^2+Y^2}\,dt\right)\left(\frac{Y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2+Y^2}\right)^{P-1} =$

$= \frac{Y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^P}{(t-x)^2+Y^2}\,dt$ pues $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2+Y^2} = \frac{\pi}{Y}$.

Ahora, por el teorema de Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Ua(x,Y)|^P dx \leq \frac{Y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^P}{(t-x)^2+Y^2}\,dt\,dx =$$

$$= \frac{Y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(t-x)^2+Y^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^P dt$$

y por la desigualdad que se supone válida, queda,

$$\int_{-\infty}^{\infty}V_a^P(x,Y)\,dx \leq K_p\int_{-\infty}^{\infty}U_a^P(x,Y)\,dx \leq K_p\int_{-\infty}^{\infty}|Ua(x,Y)|^P dx \leq$$

$$\leq K_p\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^P dt$$

haciendo primero $a\to\infty$ entonces $Va(x,Y)\to V(x,Y)$, y después -- haciendo $Y\to 0$, por los teoremas 4 y 6, $V(x,Y)\to -\tilde{f}(x)$. Por - el lema de Faton, como $|f|^P$ es integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^P dx \leq \lim_{Y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|V(x,Y)|^P dx \leq \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|Va(x,Y)|^P dx$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^P dx \leq K_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^P dx$$

Por lo que si se satisface la desigualdad que se supuso, i) se satisface. Además de esta demostración se sigue que U y $\mathcal{V}$ están en L^P.

Tercera parte. P un entero par.

Por el teorema del Binomio, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Ua(x,Y) + i\mathcal{V}a(x,Y))^P dx = 0$$

queda $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (U_a^P + i\binom{P}{1} U_a^{P-1}\mathcal{V}a - \binom{P}{2} U_a^{P-2}\mathcal{V}a^2 + \dots \pm \mathcal{V}_a^P)\, dx = 0$

tomando la parte real de esta expresión queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}a^P - \binom{P}{2}\mathcal{V}a^{P-2} Ua^2 + \dots \pm \mathcal{V}a^P)\, dx = 0$$

Como P es un entero par todas las potencias son pares, y así todas las funciones son positivas, por lo que pasando al otro miembro y cambiando todos los signos a positivos queda

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}a^P dx \leq \binom{P}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}a^{P-2} Ua^2 dx + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} Ua^P dx$, y ahora por la desigualdad de Hölder $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_a^{P-2k} U_a^{2k} dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_a^P dx\right)^{\frac{P-2k}{P}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a^P dx\right)^{\frac{2-K}{P}}$,

y sustituyendo esta expresión en la desigualdad anterior se - obtiene

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_a^{P} dx \leq \binom{P}{2} (\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_a^{P} dx)^{\frac{P-2}{P}} (\int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx)^{\frac{2}{P}} + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx$, y de aquí dividiendo entre $\int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx$ queda

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_a^{P} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx} \leq \binom{P}{2} \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_a^{P} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx} \right)^{\frac{P-2}{P}} + \cdots + 1$$

y si hacemos $X^P = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_a^{P} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx}$ entonces la desigualdad anterior toma la forma $X^P \leq \binom{P}{2} X^{P-2} + \binom{P}{4} X^{P-4} + \ldots + 1$. Ahora el polinomio $Q(Y) = Y^P - C_1 Y^{P-2} - \ldots - 1$ con $C_i > 0$, $Q(0) = -1$ y si $Y > 1 + \ldots + C_1$, tenemos que $C_1 Y^{P-2} + \ldots + 1 < Y^{P-2}(C_1 + \ldots + 1) < Y^P$ por lo que $Q(Y) > 0$ si $Y > 1 + \ldots + C_1$, de aquí que $Q(Y)$ tiene una raíz positiva K_p tal que $Q(Y) > 0$ si $Y > K_p$, por lo que si $Q(Y) \leq 0$, es decir $Y^P \leq C_1 X^{P-2} + \ldots + 1$ entonces $Y \leq K_p$, así que la desigualdad $X^P \leq \binom{P}{2} X^{P-2} + \ldots + 1$ tiene una raíz positiva M_p, que sólo depende de P tal que $X \leq M_p$, y de aquí que $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_a^{P} dx \leq M_p^P \int_{-\infty}^{\infty} U_a^{P} dx$, y se puede aplicar la segunda parte, i.e., la desigualdad i) del teorema se cumple para P entero par.

<u>Cuarta parte.</u> P no es un entero.

Como $f = f^+ - f^-$ con f^+ y f^- en L^P, y la transformada de Hilbert es lineal entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que $f \geq 0$. Como $Y > 0$ entonces $U(x,Y) \geq 0$ y $U_a(x,Y) \geq 0$. Ahora, si $W = a + ib$ entonces $(a+ib)^P = e^{\frac{1}{2} P \log (a^2+b^2) + 2 P \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})}$ con $-\frac{1}{2}\pi < \arctan (\frac{b}{a}) < \frac{1}{2}\pi$. Haciendo $a \to 0$ obtenemos $(ib)^P =$ $= e^{\frac{1}{2} P \log b^2} e^{\pm\frac{1}{2} ip\pi} = |b|^P e^{\pm \frac{1}{2} \pi ip}$ donde se toma $+$ si $b > 0$ y $-$ si $b < 0$. Por otro lado por el teorema fundamental del cálculo $\left|(a+ib)^P - (ib)^P\right| = P \left|\int_{ib}^{a+ib} Z^{P-1}\, dZ\right| \leq P \int_{ib}^{a+ib} |Z|^{P-1}\, dZ \leq$ $\leq P(a^2+b^2)^{\frac{P-1}{2}} a$, pues a es la longitud del camino de integración y $(a^2+b^2)^{\frac{P-1}{2}}$ es el máximo que puede tomar en esa recta la función $|Z|^{P-1}$. Ahora si $x > 0$ y $\alpha > 0$ $\frac{1-x}{2} < (1+x^{\alpha})^{1/\alpha}$.

Poniendo en esta desigualdad $x = |b|^2/a^2$, obtenemos que $\frac{1+x}{2} =$

$$= \frac{1 + |b|^2/a^2}{2} = \frac{1}{a^2} \frac{a^2+|b|^2}{2} < (1 + (\frac{|b|^2}{a^2})^{\alpha})^{1/\alpha} =$$

$= \frac{1}{a^2} (a^{2\alpha} + |b|^{2\alpha})^{1/\alpha}$, de donde se obtiene $(a^2+|b|^2)^{\alpha} <$ $< 2^{\alpha} (a^{2\alpha} + |b|^{2\alpha})$, y si $\alpha = \frac{P-1}{2}$ tenemos que finalmente $(a^2+|b|^2)^{\frac{P-1}{2}} < 2^{\frac{P-1}{2}} (a^{P-1} + |b|^{P-1})$ y de aqui $P(a^2+b^2)^{\frac{P-1}{2}} a \leq$ $\leq P\, 2^{\frac{1}{2}(P-1)} (a^P + a|b|^{P-1})$.

La razón de poner $|b|^{P-1}$ es que b puede ser menor que 0 y entonces considerando a b^2 que es mayor que 0 e igual a $|b|^2$, es decir $\left|(a+ib)^P - (ib)^P\right| \leq P 2^{\frac{1}{2}(P-1)} (a^P + a|b|^{P-1})$.

Ahora, aplicando esta desigualdad a $U_a + iV_a$, tenemos que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(U_a+iV_a)^P - (iV_a)^P dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|(U_a+iV_a)^P-(iV_a)^P\right| dx \leq$$

$P2^{\frac{1}{2}(P-1)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx + \int_{-\infty}^{\infty} U_a|V_a|^{P-1} dx\right)$, pero como - -

$\int_{-\infty}^{\infty}(U_a + iV_a)^P dx = 0$ queda $\left|\int_{-\infty}^{\infty} iV_a{}^P dx\right| \leq$

$\leq P2^{\frac{1}{2}(P-1)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx + \int_{-\infty}^{\infty} U_a|V_a|^{P-1} dx\right).$

Ahora,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^P dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P e^{\pm\frac{1}{2}ip\pi} dx\right| =$$

$\left|\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P (\cos\frac{1}{2}P\pi \pm i \operatorname{sen}\frac{1}{2}P\pi)dx\right|$, tomando la parte real - queda $\left|\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^P dx\right| \geq \left|\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^P dx\right| = |\cos\frac{1}{2}P\pi| \int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx,$

y como P no es un entero entonces $P2^{\frac{1}{2}(P-1)}/|\cos\frac{1}{2}P\pi|$ tiene sentido, por lo que $\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx \leq \frac{P2^{\frac{1}{2}(P-1)}}{|\cos\frac{1}{2}P\pi|}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx + \int_{-\infty}^{\infty} U_a|V_a|^{P-1} dx\right)$

y ahora por la desigualdad de Holder

$\int_{-\infty}^{\infty} U_a|V_a|^{P-1} dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx\right)^{1/P}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx\right)^{\frac{P-1}{P}}$ se obtiene que - $\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx \leq K_p\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx + K_p\left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx\right)^{1/P}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx\right)^{P/P-1}$ y dividido por $\int_{-\infty}^{\infty} U_a{}^P dx$ queda $\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx}{\int_{-\infty}^{\infty}U_a^P dx} \leq K_p\left(\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx}{\int_{-\infty}^{\infty}U_a^P dx}\right)^{\frac{P-1}{P}} + K_p$

donde $K_p = \dfrac{P2^{\frac{1}{2}(P-1)}}{|\cos\frac{1}{2}P\pi|}$ igual que antes ponemos $x^P = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx}{\int_{-\infty}^{\infty}U_a^P dx}$

y entonces la desigualdad anterior queda $x^P \leq K_p(x^{P-1}+1)$ con $K_p > 0$.

Ahora la funcion $f(Y) = Y^P - CY^{P-1} - C$, con $C > 0$ es contínua y $f(0) = -C$, y si $Y \geq 2C$ entonces $C\,Y^{P-1} + C \leq Y^{P-1}(2C) \leq Y^P$, -- por lo que $f(Y) > 0$ si $Y > 2C$, de aquí que $f(Y)$ tiene una raíz positiva M_p tal que $f(Y) > 0$ si $Y > M_p$, por lo que si $f(Y) \leq 0$ entonces $Y \leq M_p$ donde M_p sólo depende de p. Aplicando esto a $X^P \leq K_p + K_p X^{P-1}$ entonces se obtiene igual que antes que -- existe una raíz M_p tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^P dx \leq M_p^P \int_{-\infty}^{\infty} U_a^P dx$ y aquí se pue de aplicar la segunda parte y se obtiene que la desigualdad i) del teorema vale para p no entero.

<u>Quinta parte</u>. Fórmula de reciprocidad.

Por el teorema 5, $\lim_{Y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |U(x,Y) - f(x)|^P dx = 0$.

Ahora bien, como $\int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^P dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^P dx$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x,Y) - U_a(x,Y)|^P dx \leq \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty} \right) |f(t)|\, dt,$$

y como $f \in L^P$, ésta tiende a 0 a medida que $a \to \infty$, de aquí que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,Y) - f(x)|^P dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,Y) - U(x,Y)|^P dx + \int_{-\infty}^{\infty} |U(x,Y) - f(x)|^P dx,$$ y por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,Y) - f(x)|^P dx \to 0$ a medida que $Y \to 0$, $a \to \infty$.

Por otro lado $\dfrac{\phi_a(Z)}{Z - \xi - i\eta}$, $\eta > 0$ es una función analítica en todo el semiplano superior excepto en el punto $\xi + i\eta$, por lo que por el teorema del residuo $\frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_a (Z)}{Z - \xi - \eta i} dZ = \phi_a(\xi + i\eta)$, (la $P\int$ es integral en el sentido del valor principal), tomando las partes imaginarias, $\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_a(x,\eta)}{x - \xi} dx = - Va(\xi,\eta)$, esto es $\tilde{U}_a (x,\eta) = -V_a (\xi,\eta)$ por lo que por la desigualdad ya probada para los casos entero par y no entero

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a(x,Y) + \tilde{f}(x)|^P dx \leq M_p \int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,Y) - f(x)|^P dx$$ y ésta tiende a 0 a medida que $a \to \infty$ y $Y \to 0$.

Combinando los anteriores resultados se obtiene que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_a(z) - (f(x)^{-i\tilde{\xi}(x)})|^P dx\right)^{1/P} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,Y) - f(x)|^P dx\right)^{1/P} + i \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Va(x,Y) + \tilde{f}(x)|^P dx\right)^{1/P}$$

tiende a 0 a medida que $Y \to 0$, $a \to \infty$.

Ahora, por el teorema de los residuos $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_a (Z)}{Z - \xi - i\eta} dZ =$ $= \phi_a(\xi + i\eta)$, $Y < \eta$, haciendo la integral sobre la trayectoria que se compone de la recta que va de $\xi - R + iY$ a $\xi + R + iY$ y sobre el semicírculo de radio R y centro en $\xi + iY$ y haciendo después $R \to \infty$, haciendo $a \to \infty$ y $Y \to 0$ y tomando en cuenta la --

última desigualdas se tiene que $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)-i\tilde{f}(x)}{x-\xi-i\eta}\, dx =$

$= \phi(\xi+i\eta)$, es decir $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\tilde{f}(x)}{x-\xi-i\eta}\, dx =$

$= \phi(\xi+i\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\xi-i\eta}\, dx = \frac{1}{2}\ \phi(\xi+i\eta)$, --

es decir, $\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ \tilde{f}(x)}{x\ -\ \ -}\, dx = \phi(\xi+i\eta)$ y tomando partes

reales queda que $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2}\, \tilde{f}(x)dx = -U(\xi,\eta)$

y haciendo $\eta \to 0$, por los teoremas 4 y 5, esta igualdad queda

$(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(x+t)\ -\ \tilde{f}(x-t)}{t}\, dt$, es decir $\tilde{\tilde{f}} = -\ f$.

<u>Sexta parte</u>. P entero impar.

Si ponemos $q = \frac{P}{2}$, q es un número no entero para el cual -

ya está demostrado el teorema, por lo que si se puede concluir la validez del teorema para 2q, para cualquier q, el teorema queda demostrado.

Ahora, $\frac{(\phi_a(x+iY))^2}{x-\xi}$, $Y > 0$ es una función analítica que tiene un polo en $\xi + iY$. Aplicando el teorema de los residuos como en la parte 4, se obtiene que $\frac{1}{\pi i}\ P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\phi_a(x+iY))^2}{x-\xi}\, dx =$

$= (\phi_a(\xi+iY))^2$, $P\int$ es la integral en el sentido del valor - principal. Esto es,

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Ua^2 - Va^2 + 2i\ Ua\ Va}{x - }\,dx =$$

$= U_a^2(\zeta, Y) - V_a^2(\zeta, Y) + 2i\ Ua\ (\zeta, Y)\cdot Va\ (\zeta, Y)$ igualando - partes real e imaginaria, $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Ua^2 - Va^2}{x - \zeta}dx = -2\ Ua\ Va$ es decir $\widetilde{Ua^2 - Va^2} = -2UaVa$. Ahora sean $\psi(x) = \widetilde{Ua}^2$ y -- $\chi(x) = \widetilde{Va}^2$, es decir $\widetilde{U_a^2 - V_a^2} = \psi(x) - \chi(x) = -2\ U_aV_a$, de aquí $\chi(x) = 2\ U_aV_a + \psi(x)$ y $|\chi(x)| \leq |\psi(x)| + 2|U_aV_a|$;

$|\chi(x)|^q \leq (|\psi(x)| + 2\ |U_aV_a|)^q$ y usando $(1 + a)^q \leq 2^q\ (1+a^q)$ obtenemos que $|\chi(x)|^q \leq 2^q\ |\psi(x)|^q + 2^{2q}\ |U_aV_a|^q$

de aquí que $\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(x)|^q\,dx \leq 2^q\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^q\,dx + 2^{2q}\int_{-\infty}^{\infty}|U_aV_a|^q\,dx$, --

y ahora por la desigualdad de Hölder

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U_a\ V_a|^q\,dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^{2q}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2q}\,dx\right)^{1/2}$$

y por la desigualdad i) del teorema válida para q y por la fór-mula de reciprocidad válida también para q.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^q\,dx \leq Kq\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^{2q}\,dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2q}\,dx < Kq\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(x)|^q\,dx,$$

de estas se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2q}dx \leq K^1\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2q}\,dx + K^1\left(\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^{2q}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2q}\,dx\right)^{1/2}$$

Poniendo $2q = P$ y $K_p > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx \leq K_p\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^P dx + K_p\left(\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^P dx\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx\right)^{1/2},$$ -

dividiendo entre $\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^P dx$ y poniendo $x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^P dx$

de manera similar a los casos anteriores, se obtiene

$x^2 \leq K_pX + K_p$, que de la misma manera se concluye que X no excede la menor raíz positiva de $X^2 - K_pX - K_p = 0$, así que $\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^P dx \leq K_p\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^P dx$ donde K_p sólo depende de p, y de aquí se obtiene por la parte 2 la validez del teorema para - P impar.

La fórmula de reciprocidad para este caso se demuestra igual que para los anteriores.

<u>Teorema 8.</u> Si f y $\tilde{f}$ son transformadas de Hilbert de la clase L^2, entonces $\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$.

Prueba:

Por el teorema 7, si $f \in L^2$, $\|f\|_2 \leq M_2\|f\|_2$, donde M_2 era la mayor raíz positiva de $X^P - \binom{P}{2}x^{P-2} - \ldots - 1 = 0$. para $P = 2$ esta ecuación se reduce a $X^2 - 1 = 0$ por lo que $M_2 = 1$ y así $\|\tilde{f}\|_2 \leq \|f\|_2 \leq \|\tilde{f}\|_2$ pues $\tilde{\tilde{f}} = -f$.

Teorema 9.

Si f y $\tilde{f}$ son transformadas de Hilbert de la clase L^p y g y $\tilde{g}$ son de la clase L^q, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, entonces $-\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(x)g(x)dx =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\tilde{g}(x)\,dx.$

Prueba:

Por el teorema 7 y por la desigualdad de Hölder las desintegrales existen. Ahora si f y g son de clase L^2, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x))^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(\widetilde{f(x)+g(x)})^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(f(x)+g(x))^2\,dx =$$

$= \int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{g}(x) - f(x))^2\,dx$ por lo que la igualdad vale para el caso L^2.

Ahora en la parte 4 del teorema 7 se demuestra que $\tilde{U}_a = -V_a = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\,f(t)\,dt$ e igualmente $\tilde{P}_b = -Q_b =$ $= \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\,g(t)\,dt.$ Y tanto V_a como Q_b son funciones L^2 por lo que tenemos que $-\int_{-\infty}^{\infty} V_a(x,Y)\,P_b(x,Y')\,dx =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} U_a(x,Y)\,Q_b(x,Y')\,dx$. Haciendo $a\to\infty$, $y\to 0$, $b\to\infty$, $Y'\to 0$ U_a y V_a convergen a f y $\tilde{f}$ mientras que P_b y Q_b a g y $\tilde{g}$ y después se obtiene la igualdad.

Teorema 10.

Si M_p es la constante más chica tal que $\|\tilde{f}\|_p \leq M_p \|f\|_p$ - y Mq es la análoga para L^q, entonces $M_p = M_q$.

Prueba:

Si $f \in L^p$ entonces $g(x) = |\tilde{f}(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} \tilde{f}(x)$, donde $\operatorname{sgn}(x) =$ $= (1 \quad x > 0,\ 0 \quad x = 0, -1 \quad x < 0)$, pertenece a L^q pues $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^q dx = \int_{-\infty}^{\infty} (|\tilde{f}(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^p dx$ y como $f \in L^p$, $\tilde{f} \in L^p$. Ahora, por el teorema anterior, el 7 y la desigualdad de Hölder, $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) g(x) dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{g}(x) dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |\tilde{g}(x)| \, d x \leq$ $\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq M_q \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$. Ahora $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^p dx =$ $= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) \, |\tilde{f}(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} \tilde{f}(x) \, dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) g(x) dx\right| =$ $= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{g}(x) dx\right|$, de aquí $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^p dx \leq M_q \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \cdot$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^p dx\right)^{1/q}$ dividiendo entre $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^p dx\right)^{1/q}$ y ahora a la q queda $\|\tilde{f}\|_p \leq M_p \leq M_q \|f\|_p$.

De aquí que $M_q \leq M_p$ de donde se obtiene $M_p = M_q$.

CAPITULO III

TEORIA GENERALIZADA

Para $1 < P < \infty$ se define $D_L P$ como el especio de funciones tales que $D^K\phi \in L^P$, $K = 0, 1, \ldots$ con la topología localmente conexa definida por la familia contable de normas, $\|\phi\|m = (\sum_{i=0}^{m} \|D^i \phi\|_P^P)^{1/P}$. Si $\{\phi n\}$ es una sucesión de funciones convergente a 0 en $D_L P$, ésto implica que $\{D^i\phi\}$, $i = 0,1,\ldots$ converja a 0 en L^P. Inversamente si $\{\phi n\}$ es una sucesión de funciones C^∞ tales que $D^i\phi n \in L^P$ para toda i e n y $\{D^i\phi n\}$ converge a 0 cuando $n \to \infty$ en L^P para todo i, entonces esto implica que $\{\phi n\}$ converge a 0 en $D_L P$.

Las funciones $D^k : D_L P \to L^P$, $K = 0,1,\ldots$ son contínuas en esta topología. Inverdamente si D^K definidas en el conjunto de $D^i\phi \in L^P$ es contínua para todo K, entonces si la sucesión $\{\phi n\}$ converge a 0, las sucesiones $\{D^K\phi\}$ converge a 0 en L^P y por lo tanto $\{\phi n\}$ converge a 0 en $D_L P$. Así que esta topología es la topología débil generada por la familia de funciones $D^K : D_L P \to L^P$.

Teorema 11.

D_{L^P} es un espacio completo, es decir, D_{L^P} es un espacio de -- Frechét. (Ver Ref. 3 pág. III).

Prueba:

Sea $\{\phi n\}$ una sucesión de Cauchy en D_{L^P}, esto implica que $\{\phi n\} \to \phi$ en L^P, $\{\phi' n\} \to \phi'$ en L^P, y en general $\{D^K \phi n\} \to \phi^K$ en L^P para toda K. Que $\{\phi n\} \to \phi$ y $\{D\ \phi n\} \to \phi'$ en L^P implica que existe una subsucesión $\{\phi n_i\}$ tal que en casi todas partes $\{\phi n_i(x)\} \to \phi(x)$ y $\{D\phi n_i(x)\} \to \phi'(x)$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que esto suceda. Ahora $\int_{-\infty}^{\infty} D\ \phi n_i \chi_{[a,x]} dy$ existe, pues $D\ \phi n_i \in L^P$ y $\chi_{[a,x]}$, la función característica de $[a,x]$ está en L^q, así - que $\int_{-\infty}^{\infty} D\ \phi\ n_i \chi_{[a,x]}\ dy = \int_a^x D\ \phi\ n_i dy = \phi n_i(x) - \phi n_i(a)$ en casi todas partes, pero por un lado $\int_a^x D\ \phi n_i dy \to \int_a^x \phi' dy$, pues

$$\left| \int_a^x D\ \phi n_i - \phi'\ dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D\ \phi n_i - \phi'| \chi_{[a,x]} dy \leq \| D\ \phi n_i - \phi' \|_P \cdot$$

$\| \chi_{[a,x]} \|_q \to 0$, y por otro lado $\phi n_i(x) - \phi n_i(a) \to \phi(x) - \phi(a)$ en casi todas partes, de aquí que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi' dy = \phi(x) - \phi(a)$ en casi todas partes. El mismo razonamiento muestra que $D^K \phi = \phi^K \in L^P$

para toda K, y de aquí que $\phi \in D_L P$.

<u>Teorema 12.</u> C_c^∞ es denso en $D_L P$.

Prueba:

Sea $\psi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ y 1 si $x \leq 1$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ con $\psi \in C_c^\infty$ y con $|D^m \psi| \leq K$. Sea $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$ y tenemos que $D^m \psi_n(x) = n^{-m} D\psi(\frac{x}{n})$ y de aquí $|D^m \psi_n| \leq K n^{'}$, (ver ref.2 pág.9). Ahora si $f \in L^P$ entonces $f\psi_n \in C_c^\infty$ y tenemos que $D^m f(x)\psi(x) =$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} D^i \psi_n(x)\, D^{m-i} f(x),$$

y como $D^i \psi_n(x) = 0$ si $X \leq n$ pues $\psi_n(x) = 1$ si $x \leq n$, eventualmente $D^i \psi_n(x) = 0$ a medida que n crece para todo x e i = 1,2,..., por lo que se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} D^m \psi_n(x) f(x) = D^m f(x).$$

Ahora $|D^m(\psi_n f) - D^m f|^P \leq$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} |D^i \psi_n D^{m-i} f| + |D^m f|\right)^P \leq K \left(\sum_{i=0}^{m} |D^i f|\right)^P$$

pues $D^i \psi_n$ están acotadas.

Por la misma constante, por lo que por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D^K(\psi_n f) - D^K f|^P\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |D^K(\psi_n f) - D^K f|^P\, dx = 0.$$

Por lo que la sucesión $\psi_n f \to f$ en $D_L P$.

Teorema 13. La inmersión $D \hookrightarrow D_L^P$ es contínua.

Prueba:

Para probar ésto es suficiente con probar que para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto, $D_K \hookrightarrow D_L^P$ es contínua, (D_K es el espacio de funciones C_c^∞ tales que supp $\phi \subset K$, ver ref.3 pág. 125), y para hacerlo basta con mostrar que si $\{\phi n\} \to 0$ en D_K entonces $\{\phi n\} \to 0$ en D_L^P, pero si $\{\phi n\} \to 0$ en D_K esto implica, por la topología de D_K, (ver ref.3), que para todo i $\{D^i \phi n\} \to 0$ uniformemente en K, pero como K es compacto esto implica que $\{D^i \phi n\} \to 0$ en L^P y de aquí que $\{\phi n\} \to 0$ en D_L^P.

Teorema 14. Si $\phi \in D_L^P$ entonces ϕ es acotada y $\lim\limits_{|x| \to \infty} \phi(x) = 0$.

Prueba:

Para todo $\eta \in R$, existe $\psi n \in C_c^\infty$ con $0 \leq \psi n \leq 1, |\psi' n| \leq K'$ y tal que es 1 en (n-1, n+1) y 0 fuera de (n-2, n+2)..., (ver ref.2 pág.9).

Ahora si $X \in B$, la bola con centro en n y radio 1,

$$\phi(x) = \phi(x) \psi n(x) = \int_{-\infty}^{x} D(\phi \psi n)\, dy = \int_{0}^{x} \phi D \psi n\, dy + \int_{0}^{x} D \phi \psi n\, dy \leq$$

$$\leq \int_B \phi D \psi n\, dy + \int_B D \phi \psi n\, dy \leq \left(\int_B |\phi|^P dy\right)^{1/p} \left(\int_B |D \psi n|^q dy\right)^{1/q} +$$

$(\int_B |D\phi|^p dy)^{1/p} \; (\int_B |n\psi|^q dy)^{1/q}$

Por la desigualdad de Hölder, pues ψ_n y $D\psi_n$ están en L^q y -- $\phi \in D_L^P$, así que si $x \in B$, $|\phi(x)| \leq K \,(\|\phi\|_p + \|D\phi\|_p)$, y como sólo es válido para una bola con centro n arbitrario, es válido para todo x y así $\phi(x)$ es acotada.

Por otro lado, como $\phi \in D_L^P$, para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $R > 0$ tal que tanto $\int_{|x|>R} |\phi|^P dx < \varepsilon$ como $\int_{|x|>R} |D\phi|^P dx < \varepsilon$ por lo que - para una bola B' con centro n tal que $|R| + 2 < |n|$ tenemos que

$|\phi(x)| \leq (\int_{B'} |\phi|^P dy)^{1/P} (\int_{B'} |D\psi n|^q dy)^{1/q} + (\int_{B'} |D\phi|^P dy)^{1/p} \; (\int_{B'} |\psi n|^q dy)^{1/q}$

$\leq \varepsilon K$ y de aquí que $|\phi(x)| \to 0$ a medida que $|x| \to \infty$.

<u>Teorema 15.</u>

Si $\phi \in D_L^P$, $D^K H \phi = H D^K \phi$ y por lo tanto $H\phi \in D_L^P$.

Prueba:

Haciendo un cambio variable y separando queda

$$H\phi(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t - x} dt = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t + x)}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t+x)}{t} dt + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-\nu} + \int_{\nu}^{\infty}\right) \frac{\phi(t+x)}{t} dt.$$

Ahora como $P \int_{-\nu}^{\nu} \frac{\phi(x)}{t} dt = \phi(x) \, P \int_{-\nu}^{\nu} \frac{1}{t} dt = 0$ entonces tenemos -

$$P\int_{-N}^{N}\frac{\phi(t+x)}{t}\,dt = P\int_{-N}^{N}\frac{\phi(t+x)}{t}\,dt - P\int_{-N}^{N}\frac{\phi(x)}{t}\,dt = P\int_{-N}^{N}\frac{\phi(t+x)-\phi(x)}{t}\,dt =$$

$= \int_{-N}^{N}\psi(x,t)\,dt$ donde $\psi(x,t) = \frac{\phi(t+x)-\phi(x)}{t}$ si $t \neq 0$ y $\phi'(x)$ si $t = 0$. ψ es contínua para todo x y t y tenemos que $D^K\psi(x) = \frac{Dx^K\phi(x+t) - Dx^K\phi(x)}{t}$ si $t \neq 0$ y $D^{K+1}\phi(x)$ si $t = 0$ así que como $H\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\psi(x,t)\,dt + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty}\right)\frac{\phi(t+x)}{t}\,dt$ y ψ es contínua en $(-N,N)$ y $\frac{\phi(t+x)}{t}$ en $|t| \geq N$ y diferenciables, se puede aplicar la regla de Leibnitz para invertir el orden de la derivada, es decir $DH\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}Dx\psi(x,t)\,dt + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{N} + \int_{N}^{\infty}\right)\frac{Dx\,\phi(t+x)}{t}\,dt$. Ahora las integrales $\left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty}\right)\frac{Dx\,\phi(t+x)}{t}\,dt$ convergen uniformemente para todo x si $N > 0$, pues por la desigualdad de Hölder $\int_{|t|\geq N}\frac{Dx\,\phi(t+x)}{t}\,dt \leq \left(\int_{|t|\geq N}(Dx\phi(t+x))^{P}\right)^{1/P}\left(\int_{|t|\geq N}\frac{1}{t^{P}}\,dt\right)^{1/p}$. La primera integral converge pues $\phi \in D_L^P$ y la segunda $\int_{|t|\geq N}\frac{1}{t^P}\,dt \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N^P}$ y esta serie converge para $P > 1$, así que la integral converge y por la prueba M las integrales convergen uniformemente. Así que finalmente $DH\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}Dx\psi(x,t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq N}\frac{Dx\phi(t+x)}{t}\,dt =$

$$= \frac{1}{\pi}\,P\int_{-N}^{N}\frac{Dx\phi(t+x) - D\phi(x)}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq N}\frac{Dx\phi(t+x)}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} P\int_{-\mu}^{\mu} \frac{Dx\phi(t+x)}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\mu} \frac{Dx\phi(t+x)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Dx\phi(t+x)}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D\phi(x)}{t-x}\,dt = HD\phi(x).$$ Como $\phi \in D_L P$ y por inducción tenemos que $D^K H\phi = HD^K\phi$ y por lo tanto la derivada no existe y por el teorema 7 está en L^P y así $H\phi \in D_L P$.

<u>Teorema 16.</u>

$H: D_L P \longrightarrow D_L P$ es un homeomorfismo lineal y $H^{-1} = -H$.

Prueba:

Por el teorema 2, H es lineal, ahora como $\phi, D\phi, \ldots, D^n\phi \in D_L P$ y por el teorema 7, $\|H D^K \phi\|_P \leq M_P \|D^K\phi\|_P$ para todo K, por lo que H es acotado y por lo tanto contínua. Ahora como $H^2\phi = -\phi$, H es sobre y 1-1 y también de aquí, si $H\phi = \psi$ entonces $-H(H\phi) = -H\psi = \phi$, y de aquí que $H^{-1} = -H$.

El espacio $D_L^1 P$ es el conjunto de funcionales contínuas en $D_L P$, ès décir $D_L^1 P$ es el espacio dual de $D_L P$. $D_L^1 P$ es un subespacio de distribuciones de D.

Pues $I: D \hookrightarrow D_L P$ es una función lineal y contínua por lo que si $T \in D_L^1 P$ ToI es contínua y queda unicamente determinada pues D es denso en D_LP.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "ToI"] \arrow[dr] & & R \\ & D_LP \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A D_LP se le da la topología localmente conexa generada - por la familia de seminomas $\rho_\phi(T) = \langle T,\phi\rangle$; $\phi \in D_LP$, $T \in D_L^1P$, llamada la topología débil. En esta topología una sucesión T_n converge a O si y sólo si para todo O $\in D_LP$, $\langle T_n, O\rangle$ tien de a O.

Teorema 17.

Si T es de soporte compacto $T \in D_L^1P$.

Prueba:

Para demostrar ésto, hay que mostrar que toda funcional lineal contínua en C^∞ es también una funcional linea en D_LP.

Ahora, $C_c^\infty \subset D_LP \subset C^\infty$, y como C_c^∞ es denso en C^∞ entonces D_LP es denso en C^∞. Por otro lado sea $\{\phi_n\} \to 0$ en D_LP y K un compacto en R. Tomemos una función $\psi_k \in C_c^\infty$ que sea 1 en -

una vecindad de K y 0 fuera de un conjunto que contenga a K, entonces

$|D^m \psi_k \phi_n| = \left|\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} D^i \psi_k D^{m-i}\phi_n\right| \leq \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} |D^i \psi_k| \, |D^{m-i}\phi_n| \leq$

$\leq K \sum_{i=0}^{m} |D^i \phi_n|$ y de aquí que $\psi_k \phi_n \in D_L P$ y tiende a 0 con $n \to \infty$ en L^P pues como $\phi_n \to 0$ en $D_L P$, $D^i \phi_n \to 0$ en L^P,

Como $\phi_n \in L^P$ y $\psi_k \in L^q$, $\int \phi_n \psi_k \, dx$ existe y tomando $X_0 \notin$ supp ψ_k y $X \in K$ entonces $|\phi_n(x)| = \left|\int_{X_0}^{X} D(\psi_k \phi_n + \psi_k D\phi_n) \, dy\right| \leq$

$\leq \int_{X_0}^{X} (|D\psi_k| \, |\phi_n| + |D\phi_n| \, |\psi_k|) \, dy \leq \|D\psi_k\|_q \|\phi_n\|_p + \|\psi_k\|_q \|D\phi_n\|_p$

$\leq C_n (\|\phi_n\|_p + \|D\phi_n\|_p)$ y esto tiende a 0 con $n \to \infty$

Por lo que $\phi_n \to 0$ uniformemcnte en K y así $\{\phi_n\} \to 0$ en C^∞ por lo que $I: D_L P \hookrightarrow C^\infty$ es contínua y si T es una funcional en C^∞, ToI es una funcional en $D_L P$ y por lo tanto toda distribución en $D_L^1 P$.

En particular la distribución δ de Dirac está en $D_L P^1$.

Teorema 18.

Si $f \in L^q$, entonces la funcional

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx \text{ con } \phi \in D_L P \text{ define una distribución en } D_L^1 P.$$

Prueba:

$\langle f, \phi \rangle$ es una funcional lineal. Ahora si $\{\phi_n\} \to 0$ en D_{L^p} entonces como $\{\phi_n\} \to 0$, $\{D\phi_n\} \to 0$, etc. en L^p y por la desigualdad de Hölder $\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_n(x)dx\right| \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^q(x)dx\right|^{1/q} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^p(x)dx\right|^{1/p} \to 0$ y así $\langle f, 0 \rangle$ es contínua y por lo tanto está en $D^1 L^p$.

Teorema 19.

$T \in D_L^1 P$ si y sólo si existen m funciones, $f_1, \ldots, f_m$ en L^q tal que $\langle T, \phi \rangle = \langle \sum_{i=0}^{m} D^i f_i, 0 \rangle$

Prueba:

Si $T = \sum_{i=0}^{m} D^i f_i$ con $f_i \in L^q$, por el teorema anterior $T \in D_L P^1$

Ahora, si $T \in D^1_{L^P}$ entonces como T es contínua existe una vecindad $V(m, \delta)$ en $D_L P$ tal que $\langle T, \phi \rangle \leq 1$ para $\phi \in V(m, \delta)$. Ahora si $\phi(x) \neq 0$ entonces $\|\phi\| m$, la m-es una seminoma en $D_L P$, $\|\phi\| m \neq 0$ y $\frac{\delta}{\|\phi\| m} \phi \in V(m, \delta)$, y de aquí que para toda $\phi \in D_L P$, $|\langle T, 0 \rangle| \leq C \sup_{\alpha \leq m} \| D^\alpha \phi \|_p$. Ahora haciendo

$(L^P)^{m+1} = L^P \times \ldots \times L^P$ m+1 veces, definidas para $\phi \in D_L P$

$J : D_L P \to (L^P)^{m+1}$, $(L^P)^{m+1}$, como $J(\phi) = (\phi, D\phi, \ldots, D^m\phi)$. Como es 1-1,

$\mathcal{J}(D_L P)$ es un subespacio de $(L^P)^{m+1}$ y si definimos la funcional lineal en $\mathcal{J}(D_L P)$ como $\langle F, (\phi; D\phi, \ldots, D^m\phi)\rangle = \langle T, \phi\rangle$ Si a $\mathcal{J}(D_L P)$ se le da la topología inducida por $(L^P)^{m+1}$ por la desigualdad, esta funcional es contínua y por el teorema de - Hahn-Banach F puede extenderse a una funcional contínua en todo $(L^P)^{m+1}$. El dual de $(L^P)^{m+1}$ es $(L^q)^{m+1}$, por lo que por el teorema de representación de Rusz existen fo,..., fm en L^q tales que $\langle T, \phi\rangle = \langle F, (\phi, D\phi, \ldots, D^m \phi)\rangle = \sum_{i=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} fi\ D^i\ O\ dx$ de donde se obtiene lo que se quería.

La definición de la transformada de Hilbert para distribuciones está hecha de modo que si f es una función y Tf la Distribución generada por f entonces $T_{Hf} = HT_f$. Como $\phi \in D_L P$, entonces $H\phi \in D_L P$ y por lo tanto tenemos que $\langle T_{Hf}, \phi\rangle =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} H f(x)\ \phi(x)\ dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H\phi(x) dx = \langle T_f, -H\phi\rangle$, así que si se define $\langle HT_f, \phi\rangle = \langle T_f, -H\phi\rangle$ la relación que se desea se cumple. Esto motiva la definición siguiente.

Definición: Si $f \in D_L P^1$ entonces la transformada de Hilbert --

$Hf \in D_L P^1$ es la distribución definida por $\langle Hf, \phi\rangle = \langle f, -H\phi\rangle$.

Teorema 20.

Si $F \in D_L \overset{1}{P}$ entonces $H^2{}_f = -f$.

Prueba:

$$\langle H^2 f, \phi\rangle = \langle Hf, -H\phi\rangle = \langle f, H^2\phi\rangle =$$
$$= \langle f, -\phi\rangle = \langle -f, \phi\rangle$$

Teorema 21.

El operador $H: D_L^1 P \longrightarrow D_L \overset{-1}{P}$ es un inomosfismo y $H^{-1} = -H$

Prueba:

$$\langle H(a f_1 + b f_2), \phi\rangle = \langle a f_1 + b f_2, -H\phi\rangle =$$
$$= a \langle H f_1, \phi\rangle + b \langle H f_2, \phi\rangle$$

Por lo que H es lineal. Por otro lado si $f_1 \neq f_2$

$$\langle H f_1, \phi\rangle = \langle f_1, -H\phi\rangle \neq \langle f_2, -H\phi\rangle =$$

$= \langle H f_2, \phi\rangle$. Ahora si $h = Hf$ entonces $\langle -Hh, \phi\rangle =$

$$= \langle h, H\phi\rangle = \langle f, -H^2\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle.$$

Teorema 22. Si $f \in D_L \overset{1}{P}$ entonces $D^k(Hf) = H(D^k f)$

Prueba:

$\langle H\, Df, \phi \rangle = \langle Df, -H\phi \rangle = -\langle f, DH\phi \rangle = \langle f, HD\phi \rangle =$

$= \langle -Hf, D\phi \rangle = \langle DHf, \phi \rangle$. Y por inducción se obtiene - que $D^k H f = H D^k f$.

Ejemplo: Como $\delta \in D_{L^1}^{P}$ en transformada de Hilbert existe y es.

$$\langle H\delta, \phi \rangle = \langle \delta, -H\phi \rangle = \langle \delta, -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-x} dt \rangle =$$

$$= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt = \langle -\frac{1}{\pi} PV \frac{1}{t}, \phi \rangle$$

así que $H\delta = -\frac{1}{\pi} PV \frac{1}{t}$. aplicando de nuevo el operador H se obtiene que $H\ PV \frac{1}{t} = \pi\delta$.

CAPITULO IV

PROBLEMA DE DIRICHLET

Si $\phi \in D_L P$ definimos $H_y\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\phi(t)dt$ y

$F_y\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\phi(t)dt$. con $y > 0$.

Teorema 23.

$H_y\phi \to H\phi$ y $F_y\phi \to \phi$ en $D_L P$ cuando $y \to 0^+$

Prueba:

Como se vio en la parte clásica, tanto $H_y\phi$ están en L^P

Ahora, como $Dx\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2} = -Dt\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}$ entonces $DH_y\phi(x)=$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\,Dx\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)Dt\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}dt =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Df(t)\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}dt$ por la fórmula de integración por partes y el hecho de que $\phi(x)\to 0$ cuando $|x|\to\infty$ por el teorema 14, y de aquí que $DH_y\phi(x) = H_yD\phi(x)$ y por inducción $D^kH_y\phi(x)=$ $= H_yD^k\phi(x)$ y como $D^k\phi\in L^P$ y $H_yD^kf\in L^P$ entonces la K^- es una derivada de $H_y\phi$ esta en L^P por lo que $H_y\phi\in D_L P$.

De la misma manera se muestra que $F_y\phi\in D_L P$. Ahora, en L^P, $\lim_{Y\to 0} D^kH_y\phi=$

$= \lim_{Y \to 0} H_y D^k \phi = HD^k \phi = D^k H\phi$ para toda K, por lo que $H_y \phi \to H\phi$ en $D_{L}P$ e igualmente tenemos que $F_y \phi \to \phi$ en $D_{L}P$ por los teoremas 4 y 5.

Ahora, análogamente definimos para $Y > 0$ y $f \in D^1_{L}P$ las funciones $H_y f(x) = \left\langle f'(t), \frac{1}{\pi} \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle$ y $F_y f(x) =$

$$= \left\langle f(t), \frac{1}{\pi} \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle$$

Teorema 24.

$$H_y f \to Hf \quad \text{y} \quad F_y f \to f \quad \text{en } D^1_{L}P.$$

En primer lugar, por la fórmula de estructura para $f \in D^1_{L}P$, teorema 19, tenemos que $H_y f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\, D_t^i \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\, dt$ con $f_i \in L^q$, pero ahora para cada i,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) D_t^i \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\, dt = (-1)^i \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) D_x^i \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\, dt =$$

$$= (-1)^i D_x^i \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\, dt = ((-1)^i \pi D_x^i H_y f_i(x))$$

y como $H_y f_i(x) \in D_{L}q$, $D_x{}^i H_y f_i(x) \in L^q$ y por lo tanto la suma de funciones está en L^q y así $H_y f \in L^q$. Siguiendo el mismo razonamiento pero ahora con $\frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}$ vemos que $F_y f \in L^q$, así que tanto $H_y f$ y $F_y f$ definen distribuciones en $D^1_L P$, entonces por el teorema 19, $\langle H_y f, \phi \rangle = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\, D_t^i \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\, dt$ $dt\, \phi(x)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\, D_t^i \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\, dxdt =$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)^i f_i(t) D_x^i H_y \phi(x) dt = \langle f, -H_y\phi \rangle$$

y ahora $\langle Hf, \phi \rangle = \langle f, -H\phi \rangle = \lim_{Y\to 0} \langle f, -H_y\phi \rangle =$

$= \lim_{Y\to 0} \langle H_y f, \phi \rangle$, y la demostración que $F_y f \to f$ es análoga.

Teorema 25.

Si $F(Z)$ es una función analítica para $Im(Z) > 0$ y que satisface i) para Y fija $F(x+iy) \in L^q$, ii) $\lim_{Y\to 0} F(Z) =$ $= f(x)$ en $D^1_L P$, iii) $|F(Z)| \to 0$ a medida que $Y \to \infty$ uniformemente para todo x, iv) $\sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ Y \geq \delta > 0}} |F(Z)| = A_\delta < \infty$ entonces $F(Z) =$

$= \left\langle f(t), \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t - Z} \right\rangle$ para todo Z con $Im(Z) > 0$, y en consecuencia sólo existe una función $F(Z)$ analítica satisfaciendo i) - iv) y con la representación anterior.

Prueba:

Sea C el cuadrado que va de $-a+i\varepsilon$, de ahí hacia $a+ia+i\varepsilon$, --

después hacia $-a+ia+i\varepsilon$ o finalmente hacia $-a+i\varepsilon$. Por el teorema integral de Cauchy, si $Z + i\varepsilon$ está en el interior de C tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(w)}{w-(Z+i\varepsilon)}\,dW = F\,(Z+i\varepsilon).$$

Ahora, por las condiciones iii) y iv) para toda $\eta>0$ existe M tal que si $a > M$ entonces $|F\,(t+ia+i\varepsilon)| < \eta$

Por otro lado, para $w = t + ia + i\varepsilon$ si $Z = Zo + iZ_1$, $|W - Z| \geq |a - Z_1|$, y de aquí que $\frac{1}{|w-Z_1|} \leq \frac{1}{|a-Z_1|}$, y si a es lo suficientemente grande $\frac{a}{a-Z_1} < Z$, así que la integral que va de $a + ia + i\varepsilon$ hacia $-a+ia+i\varepsilon$ queda

$$\left|\int_{-a}^{a} \frac{F(-t+ia+i\ )}{-t+ia-Z}\,dt\right| \leq \int_{-a}^{a} \frac{|F(t+ia+i\,\varepsilon)|}{|t+ia-Z|}\,dt \leq \int_{-a}^{a} \frac{\eta}{|a-Z_1|}\,dt \to 0$$

cuando $a\to\infty$. Ahora, la integral que va de $a+i\varepsilon$ hacia $a+ia+i\varepsilon$ queda

$$\int_0^{a} \frac{F(-a+it+i\ )}{-a+it-Z}\,i\,dt \leq \int_0^{a} \frac{A_\varepsilon}{(a+Zo)^2+(t-Z_1)^2}\,dt \leq$$

$$\leq A_\varepsilon \int_0^{a} \frac{1}{(a+Zo)^2}\,dt = A_\varepsilon\,\frac{a}{(a+Zo)^2} \to 0$$

Cuando $a\to\infty$, e igualmente para la integral $-a+ia+i\varepsilon$ hacia -

$-a+i\varepsilon$. Por lo que obtenemos

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(w)}{w-(Z+i\ )}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t+i\ )}{t-Z}\, dt =$$

$= F(Z+i\varepsilon)$, $\operatorname{Im}(Z) > 0$.

Ahora como $\frac{1}{t-Z} \in D_L^p$ para Z fijo con $\operatorname{Im}(Z) > 0$ y como $F(Z)+i\varepsilon) \in L^q$,

$$\left\langle F(Z+i\varepsilon), \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{t-Z} \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t+i\varepsilon)}{t-Z}\, dt =$$

$F(Z+i\varepsilon)$, y como F es analítica en el semiplano superior, -- haciendo $\varepsilon \to 0$ queda $\left\langle F(t), \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{t-Z} \right\rangle = F(Z)$

Ahora sea $\mathcal{H}$ el espacio de funciones amiónicas $w(x,y)$, con -- $Y > 0$ tales que i) para Y fija $w(x,y) \in L^q$, ii) $\lim\limits_{Y\to 0} w(x,y) =$ $= f$ en $D_L^{1}P$, iii) $w(x,y) \to 0$ a medida que $Y \to \infty$ uniformemente para todo X, iv) $\sup\limits_{\substack{-\infty < x < \infty \\ Y \geq \delta > 0}} w(x,y) = A < \infty$

<u>Teorema 26.</u>

Sean $U(x,y)$ y $V(x,y)$ funciones conjugadas en $\mathcal{H}$ que converjan a f y g y $Hg = f$ y además $U(x,y) = \left\langle f(t), \frac{1}{\pi} \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle$ y $V(x,y) = \left\langle f(t), -\frac{1}{\pi} \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle$

Prueba:

Como U y V son funciones conjugadas en γ, $U(x,y) + iv(x,y)$ - es una función analítica del tipo del teorema 25, y entonces - se tiene $U(x,y)+iV(x,y) = \left\langle f(t)+ig(t), \frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{t-Z}\right\rangle =$

$$= \frac{1}{2}\left\langle f(t)+ig(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle - \frac{i}{2}\left\langle f(t)+ig(t), \frac{1}{}\ \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle$$

$\longrightarrow \frac{1}{2}(f+ig) - \frac{i}{2} H(f+ig)$ en $D_L^1 P$ por el teorema 24 por lo que haciendo $Y \to 0$ queda $f+ig = \frac{1}{2}(f+ig) - \frac{i}{2} H(f+ig)$ e igualando partes queda $f = Hg$ y $Hf = -g$. Ahora se tiene que

$$\left\langle f(t)+ig(t), \frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{t-Z}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle f(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle -$$

$$- \frac{i}{2}\left\langle f(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle + \frac{i}{2}\left\langle g(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\left\langle g(t), \frac{-1}{\pi}\ \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle f(t), \frac{1}{2}\ \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle -$$

$$- \frac{i}{2}\left\langle f(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle + \frac{i}{2}\left\langle f(t), -\frac{1}{\pi}\ \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\left\langle f(t), -\frac{1}{\pi}\ \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle = \left\langle f(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle -$$

$$- i\left\langle f(t), \frac{1}{\pi}\ \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}\right\rangle$$ pues $\langle HT, \phi\rangle = \langle T, -H\phi\rangle$,

$g = -Hf$ y $H\left(\frac{Y}{(t-x)^2+Y^2}\right) = -\frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2}$, y de aquí como tenemos que $U(x,y)+iV(x,y) = \left\langle f(t)+ig(t), \frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{t-Z}\right\rangle$ tenemos que

$$U(x,y) = \left\langle f(t), \frac{1}{\pi} \frac{Y}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle \text{ y } V(x,y) =$$

$$= -\left\langle f(t), \frac{1}{\pi} \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle$$

Ejemplo:

Sea resolver el problema de frontera $\Delta^2 U = 0$ con $U \in \mathcal{H}$ y --

$$\lim_{Y \to 0} U(x,y) = -\frac{1}{\pi} \text{ PV } \frac{1}{X} \text{ en } D_L^1 P.$$

Esto es $\lim_{Y \to 0} U(x,t) = H\delta$ y tenemos que la solución es

$$V(x,t) = \left\langle \delta(t), \frac{1}{\pi} \frac{t-x}{(t-x)^2+Y^2} \right\rangle = -\frac{1}{\pi} \frac{X}{X^2+Y^2}$$

NOTACION

L^P Espacio de funciones tales que f ^{P} dx L , P

$D_L{}^P$ Espacio de funciones f t C con D^kf t L^P para todo K.

C^∞ Espacio de funciones infinitamente diferenciables.

D, C_c^∞ Espacio de funciones f t C de soporte compacto.

D' Espacio de distribuciones de Schwartz.

$D_L^{1}P$ Espacio de distribuciones en $D_L P$.

Hf, $\tilde{f}$-Transformada de Hilbert aplicada a f.

$\mathcal{H}$ Espacio de funciones armónicas superdecrecientes.

$\langle +, 0\rangle$ Funcional lineal + aplicada a la función O.

BIBLIOGRAFIA

(1) E.C.Titchmarsch: Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford U.P., Second Edition.

(2) Barros Neto: Introduction to the Theory of Distributions.

(3) C.L. De Vito: Functional Analysis. Academic Press.

(4) W. Rudin: Real & Complex Analysis. Tata McGraw Hill.

(5) J.N.Pandey & M.A. Chaundry: The Hilbert Transform of - - Generalized Functions and Applications.
Can. J. Math. Voll XXXV No.3, 1983, pp. 478-495.

(6) Budak & Fomin: Multiple Integrals, Field Theory and Series
Mir Publischers.

(7) E.Hewitt & K.Stromberg: Real and Abstract Analysis.
Springer Verlag.

(8) E.C.Titcharsch: The Theory of Functions. Oxford U.P.